

# De Frobenius à Riedel : analyse des solutions de l'équation de Markoff

Serge Perrine

38-40 rue du Général Leclerc - 92794 Issy les Moulineaux Cedex 9  
serge.perrine@orange-ftgroup.com

Ce travail a fait l'objet d'une conférence à la journée  
« Groupes, géométrie discrète et information quantique »  
organisée à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon  
le 11 juin 2009.

L'auteur remercie chaleureusement Maurice Kibler pour cette invitation, ainsi que tous les participants à la journée pour leur intérêt pour ce travail, notamment Michel Planat et Metod Saniga. Merci aussi à Norbert Riedel pour les discussions sur son travail.

**Abstract:** The beginning of the present article is a review of the preprint recently posted by Norbert Riedel on the site arXiv at Los Alamos, with the title "Markoff equation and nilpotent matrices", arXiv:0709.1499v4 [mathNT] 5 Aug 2008. The author of this document announced a proof of the Frobenius conjecture about the solution of the Markoff equation. The aim of the present work is to systematically verify all the Riedel's computations, to explain their significance, and to give some corrections. Our main task is to identify the tree dealt with by Riedel, to generalize his formalization to his whole tree, modifying when necessary his definitions. We clearly describe the mechanism devised by Riedel in order to prove the conjecture. Unfortunately, we put in light some deficiency in his developments, showing that the conjecture still resists. We also give explicit values for the parameters introduced by Riedel.

**Résumé :** Le présent article débute par une revue de la prépublication de Norbert Riedel mise récemment sur le serveur arXiv de Los Alamos, et dont l'intitulé est "Markoff equation and nilpotent matrices", de référence arXiv:0709.1499 v4 [mathNT] 5 Aug 2008. L'auteur de ce dernier document annonce y présenter une démonstration de la conjecture de Frobenius relative aux solutions de l'équation de Markoff. L'objectif du présent travail est de vérifier systématiquement tous les calculs faits par Riedel, d'en expliquer la signification, de corriger différentes imperfections présentes dans la prépublication de Riedel. Mais surtout il s'agit d'identifier sur quel arbre travaille ce dernier, et de généraliser à tout cet arbre son formalisme, en adaptant comme nécessaire ses définitions. On décrit clairement le mécanisme qu'il a imaginé pour transformer la conjecture de Frobenius en un théorème. On détecte malheureusement une insuffisance dans le raisonnement qu'il présente, ce qui met en évidence qu'il n'a pas résolu la conjecture. On entreprend ensuite d'explicitier les paramètres qu'il a introduits sur la base des observations faites dans le présent article.

**Mots clés :** Markoff equation, Markoff tree, nilpotent matrices

**[AMS classification 2000] :**

Primary :11D25, 11J06,

Secondary : 20H15, 57R56, 57R22

## 1. Introduction

Le présent texte a été élaboré au départ comme une revue de l'article [19] de Norbert Riedel, intitulé "Markoff equation and nilpotent matrices" et déposé dans le serveur arXiv de Los Alamos. Ce travail de revue et les échanges qui ont eu lieu à cette occasion ont permis à Riedel de perfectionner son propre texte. Mais il a également permis à l'auteur du présent article de généraliser tous les calculs élaborés pour [19] et d'en comprendre la signification profonde. C'est ce que l'on veut exposer dans la suite. L'intérêt premier de la prépublication [19] est qu'elle annonce donner une démonstration de la conjecture étudiée depuis presque un siècle, et essentielle pour assurer la présentation donnée dans [10] ou [5] de la théorie de Markoff relative aux solutions en nombres entiers strictement positifs de l'équation

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2. \quad (1.1)$$

Cette conjecture consiste à énoncer que pour tout triplet solution  $(m, m_1, m_2)$  de cette équation tel que

$$m_1 \leq m, \quad m_2 \leq m,$$

la valeur  $m$  détermine de façon unique la paire  $\{m_1, m_2\}$ , où encore si l'on impose  $m_1 \leq m_2$  que le couple  $(m_1, m_2)$  est unique. Dans les travaux originaux de Markoff [14], cette question n'est pas posée, car le recours aux fractions continues donne directement tous les résultats recherchés. C'est dans la présentation de ces travaux remaniée par Frobenius [10] en 1913, et qui met en avant les formes quadratiques, que cette conjecture apparaît. Ayant jusqu'à aujourd'hui résisté à toute démonstration alors que les résultats d'origine de Markoff laissent pressentir qu'elle est vraie, cette conjecture crée un sentiment d'insatisfaction à la lecture de tous les exposés modernes de cette théorie ; ils sont en fait basés sur la présentation de Frobenius (voir par exemple [5] p. 33 ou [8] p. 11). L'enjeu est donc de savoir si l'arbre des solutions de l'équation 1.1 est bien un "arbre binaire" comme l'indique Guy dans son ouvrage sur le problème non résolu en Théorie des Nombres [11]. Selon [25] le problème restait ouvert en 2004. Depuis 1913, différentes démonstrations fausses ou incomplètes ont été données de la conjecture, mais aucune à ce jour n'éteint la question. Il est d'ailleurs possible que faire précéder les exposés modernes de la théorie par une démonstration de la conjecture n'en améliore pas l'élégance si l'on compare aux travaux originaux de Markoff. Cependant l'agacement face à une conjecture simplement énoncée, mais qui résiste, reste une puissante motivation, de même et surtout que la compréhension profonde des mécanismes qu'elle recouvre. Des approches heuristiques ont été développées (voir

[28]), des résultats très partiels ont été démontrés (voir [1], [2], [13], [29], [30], [22]), et même des significations géométriques profondes ont été données à cette conjecture (voir [21], [20]). Cependant pour le moment aucun moyen convainquant n'a été trouvé pour l'établir. C'est d'ailleurs pourquoi l'auteur du présent document a dans ses propres travaux ([17] ou [18]) contourné l'obstacle qu'elle constitue en préférant considérer dans l'esprit de [14] l'ensemble de toutes les solutions de l'équation 1.1, pas seulement un sous ensemble d'entre elles. Ceci a conduit à introduire naturellement une structure géométrique sur tout l'ensemble de ces solutions, considéré en tant qu'orbite pour l'action naturelle du groupe produit libre  $\mathbf{T}_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Norbert Riedel s'est attaqué quant à lui à la conjecture en déplaçant le problème dans des ensembles de matrices  $3 \times 3$ . Son approche est innovante, comme on va le voir ci-après, mais elle mérite pas mal d'éclaircissements. Hélas on confirme sans pouvoir la corriger l'erreur redhibitoire que contient cette prépublication [19] (v4).

Le plan du présent article est le suivant :

1 - Introduction .....	page 3
2 - Présentation de l'approche de Norbert Riedel .....	page 6
2.1 - Quelques aspects préliminaires .....	page 6
2.2 - L'arbre de Riedel.....	page 9
2.3 - Confirmation complète de la proposition 1.2 de Riedel .....	page 14
2.4 - L'explication centrale .....	page 15
2.5 - Compléments à l'approche de Riedel .....	page 18
2.5.1 - Lien avec les formes quadratiques .....	page 19
2.5.2 - Lien avec le groupe de Heisenberg .....	page 20
2.5.3 - Lien avec les quaternions .....	page 22
2.6 - Des matrices nilpotentes et leurs propriétés .....	page 25
2.7 - Introduction de matrices auxiliaires .....	page 30
3 - Résultats sur les orbites .....	page 34
3.1 - Calculs préparatoires .....	page 34
3.2 - Premier jeu de trois expressions .....	page 37
3.2.1 - Première expression .....	page 37
3.2.2 - Deuxième expression .....	page 41
3.2.3 - Troisième expression .....	page 42
3.2.4 - Application du premier jeu de trois expressions .....	page 44
3.3 - Second jeu de trois expressions .....	page 45

3.3.1 - Première expression .....	page 45
3.3.2 - Deuxième expression .....	page 47
3.3.3 - Troisième expression .....	page 50
3.3.4 - Application du second jeu de trois expressions .....	page 51
3.4 - Structure des congruences .....	page 52
3.4.1 - Le résultat essentiel .....	page 53
3.5 - Généralisation à tous les triplets de l'arbre de Riedel .....	page 57
3.5.1 - Une formule valable pour l'ensemble des triplets .....	page 57
3.5.2 - Une formule encore plus générale .....	page 60
3.5.3 - Les formules les plus générales à considérer .....	page 64
3.5.4 - Compléments et formulaire général .....	page 66
4 - Sur la démonstration de la conjecture par Norbert Riedel .....	page 70
4.1 - Quelques résultats arithmétiques auxiliaires .....	page 70
4.2 - Nouvelles notations et conséquences .....	page 75
4.2.1 - Des involutions et leurs propriétés .....	page 76
4.2.2 - Une formule de Chasles .....	page 78
4.2.3 - Applications .....	page 83
4.2.4 - Un lemme technique auxiliaire .....	page 86
4.3 - Le coeur de la démonstration de Riedel .....	page 87
4.3.1 - Analyse du lemme 3.10 de Riedel .....	page 87
4.3.2 - Défaillance de l'argument décisif .....	page 93
5 - Evaluation des paramètres $s$ et applications .....	page 97
5.1 - Perfectionnement d'un résultat arithmétique déjà vu .....	page 97
5.2 - Une première extension du lemme 3.10 de Riedel .....	page 98
5.2.1 - Autour de la racine de l'arbre .....	page 98
5.2.2 - Premier exemple $P : (3, 3, 3) \rightarrow (3, 3, 6)$ .....	page 101
5.3 - Une seconde extension du lemme 3.10 de Riedel .....	page 103
5.3.1 - Permutation des valeurs extrêmes des triplets .....	page 103
5.3.2 - Second exemple $Q^{-1}P : (6, 3, 3) \rightarrow (3, 3, 6)$ .....	page 106
5.3.3 - Troisième exemple $Q : (3, 3, 3) \rightarrow (6, 3, 3)$ .....	page 109
5.4 - Calcul des valeurs $s = s_N$ pour tout l'arbre de Riedel .....	page 111
5.4.1 - Précisions dans les notations .....	page 111
5.4.2 - Calcul des valeurs $s_{(i+1,i)}$ pour $i \geq 0$ .....	page 112
5.4.3 - Signe des valeurs $s_{(i+1,i)}$ pour $i \geq 0$ et observations ..	page 115
5.4.4 - Calcul des valeurs $s_{(0,j)}$ pour tout triplet de l'arbre ..	page 118
5.4.5 - Nouvelle généralisation .....	page 124
5.5 - Application à la conjecture .....	page 126

5.5.1 - Des propriétés de divisibilité plus fortes .....	page 126
5.5.2 - Retour sur l'insuffisance de l'argument de Riedel .....	page 130
5.5.3 - Deux observations complémentaires .....	page 137
5 - Conclusion .....	page 141
Bibliographie .....	page 143

## 2. Présentation de l'approche de Norbert Riedel

### 2.1. Quelques rappels préliminaires

Norbert Riedel rappelle d'abord qu'à une multiplication par un facteur 3 près, on peut se ramener à considérer de façon équivalente la résolution de l'équation en nombres entiers strictement positifs

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc. \quad (2.1)$$

Un triplet de Markoff est donc ici un triplet d'entiers strictement positifs  $(a, b, c)$  solution de cette dernière équation, c'est à dire qui vérifie 2.1. On organise habituellement tout ensemble de ces solutions en un arbre ayant pour sommets des triplets de Markoff, et dont les arêtes indiquent comment on passe du triplet origine d'une telle arête à son triplet extrémité. Mais il y a souvent plusieurs façons de le faire. Dans mes propres travaux [17], j'ai préféré considérer toutes les solutions possibles de 2.1. Les arêtes de l'arbre correspondant sont associées à trois transformations involutives, ce qui permet d'oublier l'orientation de ces arêtes :

$$\begin{aligned} X & : (a, b, c) \longrightarrow (bc - a, b, c), \\ Y & : (a, b, c) \longrightarrow (a, ac - b, c), \\ Z & : (a, b, c) \longrightarrow (a, b, ab - c). \end{aligned}$$

Ce sont ces trois transformations qui permettent de faire agir naturellement le groupe  $\mathbf{T}_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur l'ensemble de solutions de l'équation 2.1, et il n'existe qu'une  $\mathbf{T}_3$ -orbite donnant toutes les solutions strictement positives. Elle a la forme en arbre suivante :

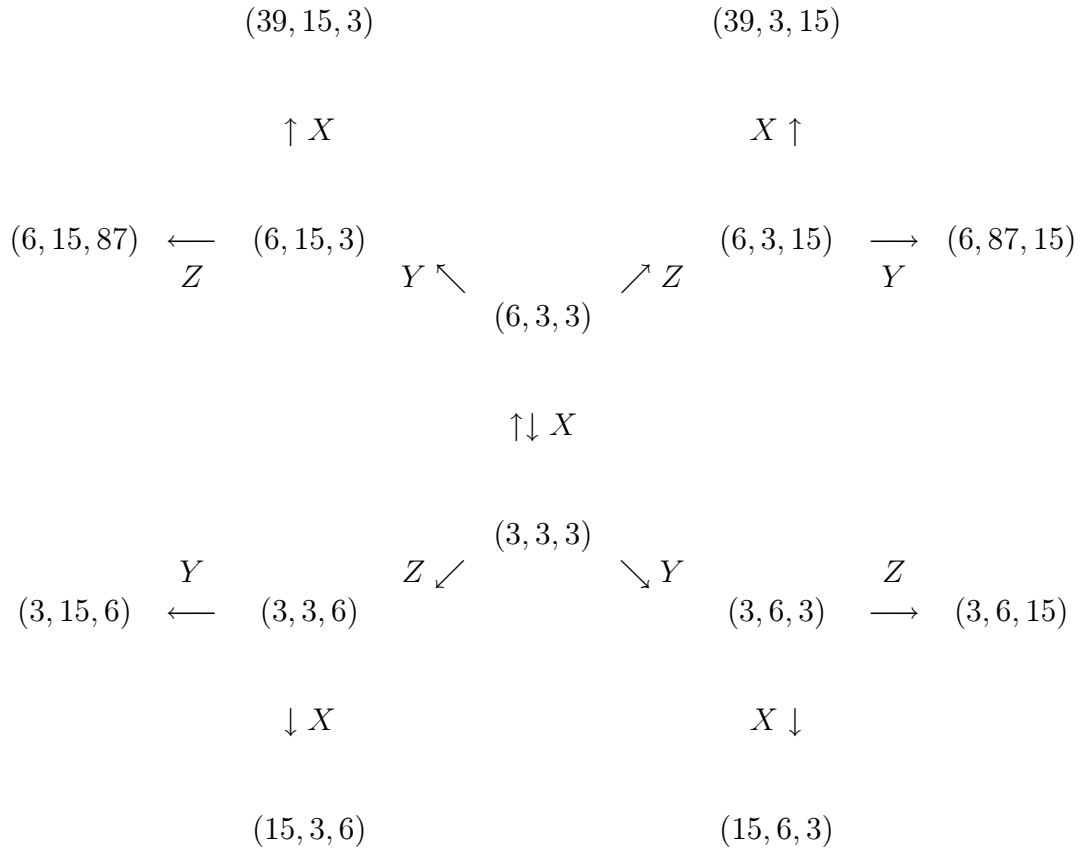


fig.1 : Un arbre complet de triplets, la  $T_3$ -orbite.

On observe que si  $(a, b, c)$  est une solution, tout triplet obtenu à partir de ce dernier par permutation de  $a, b, c$  est une autre solution figurant dans ce dernier arbre. Plusieurs auteurs utilisent cette remarques pour réduire l'ensemble des triplets qu'ils considèrent. Par exemple la méthode donnée dans [5] (p. 27-28) évite des redondances en ne considérant que les triplets où

$$a = \max(a, b, c).$$

Cassels y divise en plus par deux le nombre des triplets qu'il considère en ne raisonnant que sur la partie de son arbre située sous  $(15, 3, 6)$ . Dans [6], Cohn

fusionne d'une certaine façon les deux opérations précédentes en ne considérant que les triplets vérifiant  $a \geq b \geq c$ . Au contraire, Zhang donne dans [29] une autre façon de construire un arbre de solutions en ne considérant que les triplets qui vérifient  $a \leq b \leq c$ . Il passe de  $(a, b, c)$  à  $(a, b, ab - c)$  et  $(b, c, bc - a)$ , mais il permute éventuellement en plus les termes de ces deux derniers triplets pour les remettre en ordre croissant si nécessaire. L'arbre de Zhang ([29] §1.7. figure 2) paraît par sa définition bien adapté à l'étude de la conjecture de Markoff qui en l'occurrence se traduit par le fait que  $c$  détermine de façon unique le triplet de Zhang  $(a, b, c)$ .

L'énoncé du théorème de Riedel qui résoudrait la conjecture est donné à la page 2 de son article ([19] v4). Cet énoncé semble afficher que c'est sur l'arbre de Zhang [29] que travaille l'auteur. Toutefois, il dit un peu plus loin sur la même page : " It is also common to represent the three numbers as a components of a triple, arranged in increasing order from the left to the right, for instance. **This arrangement is unsuitable for the present purpose.** While still referring to this arrangement as a Markoff triple, and the largest number as the dominant member we will supplement this notion by the following...". De sorte qu'au début de l'article [19] il n'est pas bien facile de comprendre de quel arbre de solutions parle son auteur. En fait la construction de Riedel est précisée dans la suite de [19]. Elle consiste à travailler sur les triplets de Markoff  $(a, b, c)$  qui vérifient la condition

$$\max(a, b, c) \in \{a, c\}.$$

On les appelle dans la suite triplets de Riedel. Et il associe à chacun d'eux une matrice de forme

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qu'il appelle une MT-matrice (où MT signifie bien sûr Markoff Theory). On peut observer, pour bien comprendre la différence entre les différents arbres, les premiers triplets de Markoff non triviaux et déduits par permutation les uns des autres que sont  $(15, 6, 3)$ ,  $(15, 3, 6)$ ,  $(6, 15, 3)$ ,  $(3, 15, 6)$ ,  $(6, 3, 15)$ ,  $(3, 6, 15)$ . Dans mes travaux [17] j'ai considéré les six dans ce qui est appelé l'arbre complet ou la  $\mathbf{T}_3$ -orbite des solutions de l'équation 2.1. La condition de Cassels caractérise les deux premiers, celle de Cohn le premier, celle de Zhang le dernier, et celle de Riedel l'ensemble à quatre éléments composé des deux premiers et des deux derniers. En résumé, le choix que fait Riedel des triplets qu'il considère est très particulier et tout à fait original. Ceci permet à Riedel d'indiquer qu'à l'exception des triplets



(3, 3, 3) et (3, 3, 6) on peut associer à tous les autres triplets de Zhang  $(a, b, c)$ , qui sont seulement des triplets de Markoff tels que  $0 < a < b < c$ , quatre triplets de Riedel  $(a, b, c)$ ,  $(b, a, c)$ ,  $(c, b, a)$ ,  $(c, a, b)$ , et donc quatre MT-matrices. A partir de tout triplet de Zhang on peut aussi considérer le nouveau triplet  $(a, c, ac - b)$  où  $ac - b$  reste positif car  $b$  est positif et que l'on a

$$a^2 + c^2 = b(ac - b).$$

Et comme cette condition donne aussi  $c^2 < b(ac - b) < c(ac - b)$ , il en résulte que l'on a  $a < c < (ac - b)$ , c'est à dire le fait qu'il s'agit bien d'un nouveau triplet de Zhang. Comme déjà dit, un second triplet peut se déduire de  $(a, b, c)$ , il s'agit de  $(b, c, bc - a)$ . C'est aussi un triplet de Zhang, comme le montre une vérification facile avec

$$c^2 < a(bc - a) = b^2 + c^2 < c(bc - a).$$

Ainsi utilisant les deux transformations entre triplets que l'on vient de préciser, on fabrique l'arbre des triplets de Zhang dont les plus bas niveaux s'organisent comme suit (comparer à [29] p. 4):

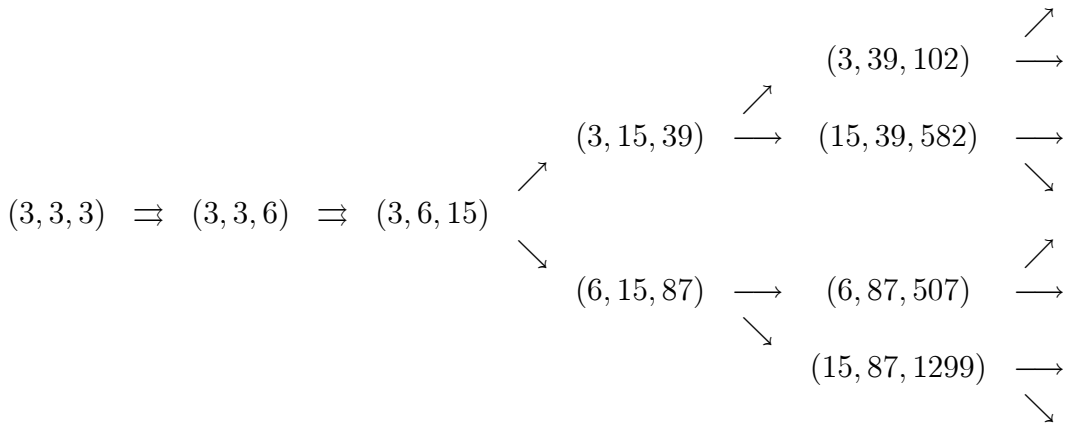


fig. 2 : L'arbre des triplets de Zhang.

## 2.2. L'arbre de Riedel

Riedel n'explicite pas complètement dans son article comment il organise en arbre ses triplets, mais il ne fait aucun doute qu'une telle possibilité existe car on peut les identifier dans l'arbre complet (ou  $\mathbf{T}_3$ -orbite telle que définie dans [17]) de toutes

les solutions de l'équation de Markoff, et considérer le sous-arbre correspondant. Il passe directement aux aspects matriciels dans l'anneau  $\mathbf{M}_3(\mathbb{Z})$  des matrices  $3 \times 3$  à coefficients entiers positifs ou négatifs. Et c'est à partir de là qu'il construit un arbre de MT-matrices. Comme chaque MT-matrice est de façon unique associée à un triplet de Riedel, ceci donne inversement la structure d'arbre qu'il considère sur ses triplets et que l'on va expliciter dans la suite.

La méthode consiste à utiliser, avec  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{Z}$ , les deux matrices

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec la notation classique pour la transposition des matrices, on vérifie facilement que l'on a:

$${}^tP(a)M(a, b, c)P(a) = M(a, c, ac - b), \quad (2.2)$$

$${}^tQ(c)M(a, b, c)Q(c) = M(ac - b, a, c), \quad (2.3)$$

et en permutant  $a$  et  $c$ , on en déduit aussi:

$${}^tP(c)M(c, b, a)P(c) = M(c, a, ac - b), \quad (2.4)$$

$${}^tQ(a)M(c, b, a)Q(a) = M(ac - b, c, a). \quad (2.5)$$

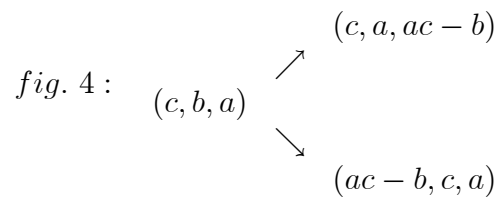
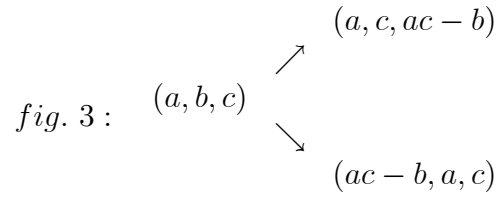
Riedel parvient curieusement à ces deux dernières relations par transposition et conjugaison, c'est à dire avec la relation

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M(a, b, c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^tM(c, b, a),$$

alors que le raisonnement direct que l'on vient de faire suffit.

On a vu précédemment que  $(a, c, ac - b)$  étant un triplet de Zhang, sauf pour les plus petites solutions il existe quatre triplets de Riedel associés:  $(a, c, ac - b)$ ,  $(c, a, ac - b)$ ,  $(ac - b, c, a)$ ,  $(ac - b, a, c)$ . La MT-matrice définie par le premier correspond à l'égalité 2.2, celle définie par le second correspond à l'égalité 2.4, celle définie par le troisième correspond à l'égalité 2.5, celle définie par le quatrième correspond à l'égalité 2.3. De sorte que si l'on suppose maintenant  $(a, b, c)$  est lui-même un triplet de Zhang,  $(a, b, c)$  et  $(c, b, a)$  sont tous deux des triplets de Riedel, avec  $(a, c, ac - b)$  également triplet de Zhang auquel s'applique ce que l'on

vient de voir. On peut traduire chacune des égalités 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, par une arête de l'arbre de Riedel:



Il existe deux autres triplets de Riedel définis par  $(a, b, c)$  qui sont  $(b, a, c)$  et  $(c, a, b)$ . Ils conduisent à considérer d'autres égalités que l'auteur ne mentionne pas, mais qui sont évidentes par permutation respectivement de  $a$  et  $b$ , puis  $c$  et  $b$ :

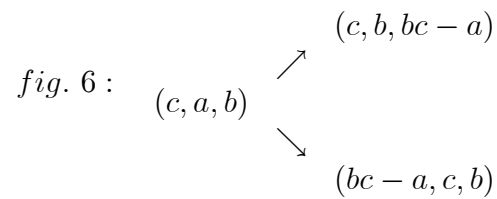
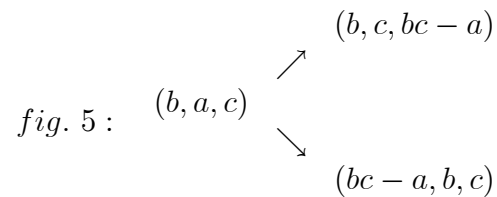
$${}^tP(b)M(b, a, c)P(b) = M(b, c, bc - a), \quad (2.6)$$

$${}^tQ(c)M(b, a, c)Q(c) = M(bc - a, b, c), \quad (2.7)$$

$${}^tP(c)M(c, a, b)P(c) = M(c, b, bc - a), \quad (2.8)$$

$${}^tQ(b)M(c, a, b)Q(b) = M(bc - a, c, b). \quad (2.9)$$

Or le triplet  $(b, c, bc - a)$  est le second triplet de Zhang déductible de  $(a, b, c)$ . Et on donc peut également traduire chacune des égalités précédentes 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, par une arête de l'arbre de Riedel:



Il ne reste qu'à comprendre ce qui se passe à la racine de l'arbre de Riedel, ce que l'on visualise sur la figure suivante:

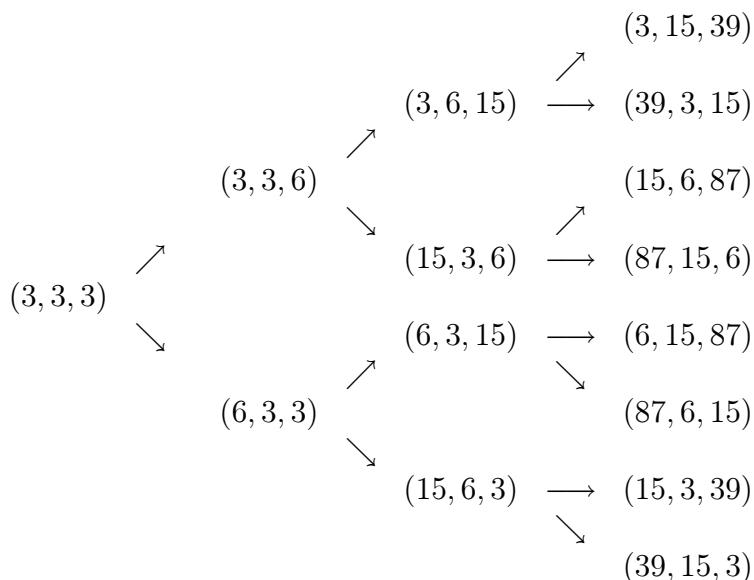


fig. 7 : L'arbre des triplets de Riedel.

En combinant toutes les figures 3 à 7 précédentes, on obtient l'ensemble de l'arbre des triplets de Riedel. On vient donc de décrire complètement sa construction en précisant de façon explicite ce qui est évoqué dans [19]. Sur cet arbre on voit aisément que la conjecture de Markoff se traduit, lorsque l'on a  $\max(a, b, c) = c$ , par le fait que tout nombre  $c$  détermine au plus un unique triplet, si  $c = 3$  ou  $c = 6$ , ou deux triplets  $(a, b, c)$  dans les autres cas pour  $c$ . La moitié des triplets de l'arbre de Riedel vérifiant  $\max(a, b, c) = a$  n'est pas concernée par la conjecture de Markoff, de sorte qu'on ne voit pas à ce stade pourquoi l'arbre des triplets de Riedel serait mieux adapté à son étude. Remarquons en complément que l'on peut facilement étendre encore la construction précédente à tous les triplets de la  $\mathbf{T}_3$ -orbite des solutions de l'équation 2.1. De sorte qu'il est maintenant possible de développer l'analogie des calculs donnés en dimension 2 dans [16] (ou ce qui est le même texte dans [17] (chapitre 6)), mais cette fois en dimension 3. C'est ce que fait Riedel, sans que soient jusque là bien claires les raisons qui le poussent à ignorer ce qui se passe sous le triplet  $(3, 6, 3)$  de la

$\mathbf{T}_3$ -orbite qui prolonge l'arbre que l'on vient de décrire. Sous le triplet  $(3, 3, 3)$ , on peut en effet prolonger la figure précédente comme suit :

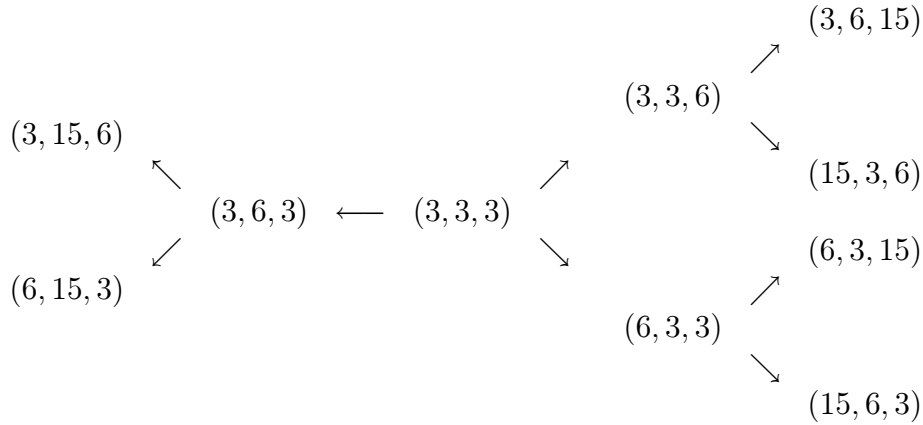


fig.8 : Un autre arbre complet de triplets : le MT-arbre.

Il est possible de vérifier que l'on retrouve ainsi tous les triplets de la  $\mathbf{T}_3$ -orbite des solutions de l'équation 2.1, mais on voit en comparant la figure 8 à la figure 1 que ces triplets sont disposés en un arbre complètement différent. On dit qu'il s'agit du MT-arbre des triplets de solutions de l'équation 2.1. En d'autres termes, on a construit par ce qui précède une bijection de l'ensemble des noeuds de la  $\mathbf{T}_3$ -orbite sur lui même considéré ici en tant qu'ensemble des noeuds du MT-arbre. Ceci s'est fait en utilisant plutôt que les involutions  $X, Y, Z$ , les quatre matrices  $P(a), P(b), Q(a), Q(b)$ , et leurs inverses. De façon équivalente, on peut dire que Riedel a trouvé une autre façon de faire agir proprement le groupe  $\mathbf{T}_3$  sur le même ensemble de noeuds. De plus, par cette bijection les triplets de Riedel sont tous disposés sur les deux branches issues de  $(3, 3, 3)$  du côté de  $(3, 3, 6)$  et  $(6, 3, 3)$ . Cette nouvelle construction est suffisamment étonnante pour ne pas douter qu'elle recouvre des propriétés algébriques intéressantes. On peut ajouter que la branche nouvelle introduite dans la figure 8 comparée à la figure 7 ne contient que des triplets  $(a, b, c)$  qui ne sont pas de Riedel. Ils vérifient donc :

$$\max(a, b, c) = b.$$

Si elle contient le triplet  $(a, b, c)$ , elle contient aussi  $(c, b, a)$ . Ceci laisse imaginer une nouvelle disposition des noeuds en un nouvel arbre complet où on aurait

respectivement sur les deux autres branches  $\max(a, b, c) = a$  et  $\max(a, b, c) = c$ . Bref les réflexions sur l'organisation de l'arbre des triplets à considérer peuvent être encore développées.

### 2.3. Confirmation complète de la proposition 1.2 de Riedel

Toutes les matrices  $3 \times 3$  définies par Riedel sont inversibles, puisque l'on a :

$$M(a, b, c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P(x)^{-1} = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(y)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix}.$$

Mieux, elles sont dans  $SL(3, \mathbb{Z})$ , groupe des matrices  $3 \times 3$  à coefficients entiers et de déterminant égal à 1. Avec les compléments que l'on vient d'expliciter sur l'arbre des triplets de Riedel, il est maintenant évident qu'une partie de sa proposition suivante est assurée :

**Proposition 2.1.** (*Proposition 1.2 de [19]*) *Pour deux MT-matrices quelconques  $M(a_1, b_1, c_1)$  et  $M(a_2, b_2, c_2)$  on peut trouver une matrice  $N$  dans  $SL(3, \mathbb{Z})$  telle que l'on ait :*

$${}^t N M(a_2, b_2, c_2) N = M(a_1, b_1, c_1). \quad (2.10)$$

*Dans ces conditions, on a également la relation suivante :*

$${}^t N \begin{pmatrix} c_2 \\ a_2 c_2 - b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ a_1 c_1 - b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Pour la démonstration, il suffit de suivre un chemin de  $(a_2, b_2, c_2)$  à  $(3, 3, 3)$  puis à  $(a_1, b_1, c_1)$ , et de composer les matrices  $P$  et  $Q$  données pas à pas par les flèches de l'arbre selon les relations associées 2.2 à 2.9. Le produit de ces matrices, ou de leurs inverses si l'on prend une flèche en sens inverse, donne  $N$ . Cette matrice est bien dans  $SL(3, \mathbb{Z})$ . Par le même procédé, on peut également vérifier la seconde relation 2.11 que mentionne Riedel. Il suffit pour l'établir de considérer par exemple l'égalité 2.2 avec  $N = P(a)$ ,  $(a_2, b_2, c_2) = (a, b, c)$  et  $(a_1, b_1, c_1) =$

$(a, c, ac - b)$ . L'égalité précédente 2.11 se vérifie aisément dans ces conditions sous la forme:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ ac - b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b \\ a(ac - b) - c \\ a \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

On fait de même avec toutes les relations 2.2 à 2.9. Ainsi 2.3 est traitée avec  $N = Q(c)$ ,  $(a_2, b_2, c_2) = (a, b, c)$  et  $(a_1, b_1, c_1) = (ac - b, a, c)$ . L'égalité 2.11 se vérifie à nouveau dans ces conditions, sous la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ ac - b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ (ac - b)c - a \\ ac - b \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Toutes les autres relations s'en déduisent en permutant les coefficients  $a$  et  $c$  dans les deux dernières égalités, puis  $a$  et  $b$  dans les quatre égalités ainsi obtenues. Il suffit alors de suivre le même chemin de  $(a_2, b_2, c_2)$  à  $(3, 3, 3)$  puis à  $(a_1, b_1, c_1)$  que dans la démonstration précédente de la première partie de la proposition 1.2, et de composer les matrices  $P$  et  $Q$  données pas à pas par les flèches de l'arbre selon les relations associées 2.2 à 2.9. Le produit de ces matrices, ou selon le sens des flèches de l'arbre de leurs inverses, donne la même matrice  $N$  avec la possibilité de s'assurer par produit que l'on a aussi 2.11. Ainsi vérifie-t-on de façon complète la proposition 1.2 de [19], dont les deux égalités 2.10 et 2.11 avec la même matrice  $N$  sont donc bien simultanément vraies. Il est à noter que jusque là on n'a pas utilisé les conditions définissant les MT-matrices. D'ailleurs la dernière remarque faite par Riedel à la fin du paragraphe 2) page 4 de son article [19] montre qu'il a bien vu que sa proposition 2.1 est en réalité valable pour tous les triplets de l'arbre complet de Markoff (le MT-arbre de toutes les solutions de l'équation 2.1).

#### 2.4. L'explication centrale

Riedel donne une explication un peu étrange ([19] Remarks 3) pp. 4-5) du lien avec les travaux classiques sur la théorie de Markoff, en évoquant la présentation qu'en fait Cohn [6]. Cette théorie dit essentiellement que dans  $SL(2, \mathbb{Z})$  le groupe  $\mathbf{F}_2$  engendré par les deux matrices

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

est libre à deux générateurs, et elle donne des précisions sur les autres couples de générateurs de ce groupe en les liant aux solutions de l'équation 2.1. Ce groupe est

d'ailleurs le sous-groupe normal dérivé de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . L'article [16] cité par Riedel est une longue variation sur ce dernier sujet.

Dans l'esprit de [6], Riedel introduit une notion de triplet admissible de matrices. Il la définit par les règles de récurrence suivantes :

$$(A_0, A_0B_0, B_0) \text{ triplet admissible,}$$

Si  $(A, AB, B)$  triplet admissible, alors  $(A, A^2B, AB)$  et  $(AB, AB^2, B)$  admissibles.

Tout triplet admissible  $(A, AB, B)$  donne une solution de l'équation de Markoff 2.1 sous la forme  $(tr(A), tr(AB), tr(B))$ , en utilisant simplement la trace des matrices. Et on retrouve bien à partir de là toutes les solutions de l'équation de départ et une organisation en arbre. Ceci résulte par exemple de la proposition 4.3 de [17] p.174, où l'on en a déduit une application surjective  $\Pi$  dont l'image est l'ensemble de tous les triplets admissibles (à un facteur 3 près).

Mais l'observation essentielle que fait alors Riedel est que toute matrice d'un triplet admissible peut être écrite comme combinaison linéaire des matrices  $A_0, A_0B_0, B_0$ , avec des coefficients entiers. Ce résultat s'établit aisément par récurrence. Il est évidemment vrai pour le triplet admissible  $(A_0, A_0B_0, B_0)$ . Et si l'on suppose qu'il est vrai pour le triplet admissible  $(A, AB, B)$  il suffit de le vérifier pour les deux matrices  $A^2B$  et  $AB^2$ . Vérifions le pour la première, la méthode est la même pour la seconde. La matrice  $A$  est unimodulaire et racine de son polynôme caractéristique

$$A^2 - tr(A)A + 1 = 0,$$

de sorte que l'on a

$$A^2B = tr(A)AB - B.$$

On conclut avec le fait que  $tr(A)$  est un entier, et que  $AB$  et  $B$  sont par hypothèse de récurrence combinaisons linéaires des matrices  $A_0, A_0B_0, B_0$ , avec des coefficients entiers. Il en est de même de  $A^2B$ , en utilisant le polynôme caractéristique de  $B$  :

$$AB^2 = tr(B)AB - A.$$

Remarquons maintenant que si l'on cherche une combinaison avec des coefficients entiers  $\alpha, \beta, \gamma$ , reliant les matrices  $A_0, A_0B_0, B_0$ , on a à résoudre un système qui ne laisse s'exprimer que la possibilité  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . On fait donc apparaître un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang trois engendré par la base des matrices  $(A_0, A_0B_0, B_0)$ , contenant toutes les matrices apparaissant dans un triplet admissible. La



décomposition sur cette base, avec une matrice de passage dans  $\mathbf{M}_3(\mathbb{Z})$ , s'écrit pour tout triplet admissible:

$$(A, AB, B) = (A_0, A_0B_0, B_0) \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}.$$

Le développement de cette relation donne trois égalités entre des matrices dans  $\mathbf{M}_2(\mathbb{Z})$ , et l'on peut passer aux traces pour en déduire une nouvelle égalité. Et si l'on note alors de façon peu naturelle  $(tr(A), tr(AB), tr(B)) = (c, ac - b, a)$ , on a :

$$(c, ac - b, a) = (3, 6, 3) \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}.$$

A partir de là, on peut maintenant visualiser sur la base  $(A_0, A_0B_0, B_0)$  le passage d'un triplet admissible aux deux autres déterminés par les règles de récurrence précédentes. Le premier s'en déduit avec l'expression donnée ci-dessus pour  $A^2B$  et la matrice  $Q$  introduite précédemment :

$$\begin{aligned} (A, A^2B, AB) &= (A, AB, B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & tr(A) & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (A, AB, B)Q(tr(A)). \end{aligned}$$

En passant comme ci-dessus aux traces, le calcul de  $tr(A^2B) = c(ac - b) - a$  étant évident, on en déduit la transposée de la relation 2.13 :

$$(c, c(ac - b) - a, ac - b) = (c, ac - b, a)Q(c).$$

Le second est obtenu de même avec l'expression donnée ci-dessus pour  $AB^2$  et la matrice  $P$  :

$$\begin{aligned} (AB, AB^2, B) &= (A, AB, B) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & tr(B) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (A, AB, B)P(tr(B)). \end{aligned}$$

En passant encore aux traces, avec cette fois  $tr(AB^2) = a(ac - b) - c$ , on en déduit la transposée de la relation 2.12 :

$$(ac - b, a(ac - b) - c, a) = (c, ac - b, a)P(a).$$

De sorte que la signification de la matrice  $N$  considérée dans la proposition 1.2 est maintenant évidente en tant que matrice de passage d'une base du  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang 3 que l'on vient d'exhiber à une autre. On comprend ainsi retrospectivement sur quoi sont fondées les notions qui ont permis à Riedel d'établir sa proposition 1.2, et en particulier comment il a pu transposer effectivement la théorie de Markoff en dimension 3 (une perspective qui était affichée dans [18] p. 8 ou p. 34, en liaison avec un théorème de Dyer et Formanek, mais dont l'article de Riedel donne une concrétisation effective).

Il reste cependant à expliquer dans ce contexte quel est l'ensemble des matrices  $3 \times 3$  de forme  $M(a, b, c)$  que l'on considère, et la structure qu'il porte. On pense à une structure de sous-groupe de  $SL(3, \mathbb{Z})$  du fait de la relation

$$M(a, b, c) = M(-a, ac - b, -c)^{-1}.$$

A partir de  $(A_0, A_0B_0, B_0)$  et des deux triplets admissibles qui s'en déduisent, on est conduit à considérer les deux matrices de  $SL(3, \mathbb{Z})$ :

$$\begin{aligned} \rho(A_0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \rho(B_0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ainsi que le groupe des matrices  $N$  qu'elles engendrent. Pour compléter [19] il faut développer l'analyse de la représentation  $\rho : \mathbf{F}_2 \rightarrow SL(3, \mathbb{Z})$  qui en résulte et caractériser son image, etc. Sur ces bases, la transposition des travaux de [16] ou [17] (chapitre 6 § 6.1) est envisageable, non plus en utilisant des automorphismes intérieurs de  $GL(2, \mathbb{Z})$  de forme

$$V \in GL(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow N^{-1}VN \in GL(2, \mathbb{Z}),$$

mais en utilisant plutôt ce que Riedel nomme "automorphs" et que l'on appellera ici des congruences (Voir [15] page 3) :

$$W \in GL(3, \mathbb{Z}) \longrightarrow {}^tNWN \in GL(3, \mathbb{Z}).$$

## 2.5. Compléments à l'approche de Riedel

L'apparition de telles congruences dans la relation 2.10, vue ci-dessus, peut être interprétée en disant que les MT-matrices sont dans une même orbite pour l'action

par les congruences de  $SL(3, \mathbb{Z})$ . S'introduit par là toute une nouvelle approche géométrique que l'on peut approfondir, en se demandant quel est le stabilisateur associé, etc. Ceci sera évoqué dans la suite de notre texte. La présente section est plutôt consacrée à quelques digressions par rapport à [19]. Il s'agit de montrer comment ces congruences sont aussi liées à une action de changement de base sur des formes quadratiques. De telles congruences sont en effet classiques dans la théorie de ces formes. On examine également le contexte des matrices  $M(a, b, c)$  et les perspectives qu'il ouvre. On montre enfin comment en prolongeant un peu l'approche de Riedel se met en place un lien avec les quaternions.

### 2.5.1. Lien avec les formes quadratiques

Associée à une matrice  $M(a, b, c)$ , il existe naturellement une forme correspondant à un cône, et on l'a déjà mentionnée dans [17] (p. 138) :

$$\begin{aligned} \Phi_{M(a,b,c)}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + axy + cyz + bzx. \end{aligned}$$

On a indiqué dans [18] (§ 3.2.4 p. 55 et § 5 p.63-64) comment cette forme avait une certaine importance du point de vue de la géométrie algébrique, et certainement pour la classification de certains faisceaux vectoriels exceptionnels sur le plan projectif [20]. Cette dernière question est le cadre de la conjecture de A. N. Tyurin qui affirme qu'un tel faisceau exceptionnel serait déterminé de façon unique par son rang. Dans l'article de A. N. Rudakov [20], il est indiqué que cette conjecture est équivalente à la conjecture de Frobenius, objet du travail de N. Riedel examiné ici. En tout cas le glissement des automorphismes intérieurs aux congruences est essentiel dans l'article [19]. Et l'on peut dire que cette piste n'est pas nouvelle puisqu'elle est explicitement l'objet d'un article de Cohn [7] qui donne une bibliographie complémentaire de cette interprétation géométrique.

Notons ici que ce qui serait aussi naturel dans l'approche de Riedel serait de considérer dans une base  $(A, AB, B)$  la forme quadratique

$$\Psi_{(A,AB,B)}(x, y, z) = \det(xA + yAB + zB).$$

On peut explicitement calculer cette autre forme  $\Psi$ , et l'on obtient l'expression

$$x^2 \det A + y^2 \det AB + z^2 \det B + xy \operatorname{tr}(B) \det A + yz \operatorname{tr}(A) \det B + zx \operatorname{tr}(AB^{-1}) \det B.$$

Or elle se simplifie lorsque l'on a  $\det A = \det B = 1$ , comme dans le cas étudié de la théorie de Markoff. Et on retrouve alors simplement une forme  $\Phi$ , comme définie précédemment, avec :

$$\begin{aligned} & \Psi_{(A,AB,B)}(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + \operatorname{tr}(B)xy + \operatorname{tr}(A)yz + \operatorname{tr}(AB^{-1})zx \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tr}(B) & \operatorname{tr}(AB^{-1}) \\ 0 & 1 & \operatorname{tr}(A) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \Phi_{M(\operatorname{tr}(B), \operatorname{tr}(AB^{-1}), \operatorname{tr}(A))}(x, y, z). \end{aligned}$$

### 2.5.2. Lien avec le groupe de Heisenberg

Ce qui vient d'être décrit permet aussi le lien avec le groupe de Heisenberg discret, que les physiciens nomment plutôt groupe de Weyl, ou encore groupe de Heisenberg-Weyl (voir [27] ou [12] p. 825):

$$\mathbb{H}_1(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ce groupe pour la multiplication ordinaire des matrices, est un réseau du groupe de Lie  $\mathbb{H}_1(\mathbb{R})$ , groupe défini par des matrices analogues mais avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Ce dernier groupe définit un ensemble de vecteurs tangents à toutes les courbes de  $\mathbb{H}_1(\mathbb{R})$  passant par l'unité qui est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie. Il s'agit de l'algèbre de Lie de Heisenberg-Weyl  $\mathfrak{h}_1$  qui est engendrée par trois opérateurs  $Q, P, -I$ , et dont le crochet de Lie vérifie  $[P, Q] = -I$ ,  $[-I, *] = 0$ . Cette algèbre de Lie est l'algèbre de Lie matricielle (on dit aussi linéaire) des matrices triangulaires supérieures

$$pP + qQ - zI = \begin{pmatrix} 0 & p & z \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec pour crochet de Lie le simple commutateur des matrices :

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 & p & z \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p' & z' \\ 0 & 0 & q' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pq' - p'q \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette algèbre définit inversement  $\mathbb{H}_1(\mathbb{R})$  comme groupe de Lie local matriciel dont l'opération est la multiplication des matrices et dont tous les éléments s'écrivent tous comme une exponentielle, ici avec un calcul évident utilisant le développement de Taylor de l'exponentielle, sous la forme :

$$g = \exp(pP + qQ - zI) = \begin{pmatrix} 1 & p & z + \frac{pq}{2} \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}_1$  associée en calculant les vecteurs tangents en à une courbe de ce groupe passant par l'unité, avec en ce point la possibilité de noter

$$\frac{\partial g}{\partial p} = P = U - 1, \quad \frac{\partial g}{\partial q} = Q = V - 1, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = -I = W - 1.$$

Et par une vérification directe, on a :

$$\begin{aligned} & \exp(pP) \exp(qQ) \exp(-zI) \\ = & \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & p & z + pq \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vérifie en passant que cette expression est différente de celle de  $\exp(pP + qQ - zI)$ . La différence entre les deux expressions s'explique par le classique théorème de Campbell-Baker-Hausdorff (voir [23] pour l'actualité de cette formule). Maintenant les éléments

$$\begin{aligned} U &= \exp(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ V &= \exp(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ W &= \exp(-I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

engendrent le sous groupe  $\mathbb{H}_1(\mathbb{Z})$  de  $GL_3(\mathbb{Z})$ , qui est défini avec ces trois générateurs par les relations

$$UVU^{-1}V^{-1} = VU^{-1}V^{-1}U = U^{-1}V^{-1}UV = V^{-1}UVU^{-1} = W.$$

On observe, en calculant le produit de deux matrices du groupe  $\mathbb{H}_1(\mathbb{Z})$ , que ce dernier est représentable plus simplement par l'ensemble  $\mathbb{Z}^3$  des triplets d'entiers muni de l'opération non commutative

$$(a, b, c)(a', b', c') = (a + a', b + b' + ac', c + c').$$

Avec son graphe de Cayley, on peut aussi représenter le groupe  $\mathbb{H}_1(\mathbb{Z})$  comme une structure géométrique d'orbite pour l'action naturelle du groupe  $\mathbf{T}_4 = \mathbf{T}_3 \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , produit libre de quatre modèles du groupe à deux éléments  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . La théorie de Markoff étant liée à  $\mathbf{T}_3$ , comme on l'a rappelé, elle est naturellement représentable dans  $\mathbb{H}_1(\mathbb{Z})$  réseau du groupe de Lie  $\mathbb{H}_1(\mathbb{R})$ . Le groupe  $\mathbb{H}_1(\mathbb{Z})$  constitue donc un cadre encore plus vaste où l'on peut naturellement imaginer d'attaquer la conjecture de Frobenius, avec des moyens plus puissants que ceux dont on dispose dans  $\mathbf{T}_3$  seul. L'équivalence modulo  $\mathbb{H}_1(\mathbb{Z})$  dans le groupe  $\mathbb{H}_1(\mathbb{R})$  est aussi un objet d'étude intéressant. Riedel n'indique pas précisément avoir considéré les objets que l'on vient d'évoquer. Il ne donne d'ailleurs aucune précision sur ce qui l'a conduit à introduire la matrice  $M(a, b, c)$ , de sorte que l'on souhaiterait en savoir plus sur sa démarche issue en fait de travaux de physicien habitué au formalisme quantique.

Les remarques que l'on vient de faire laissent imaginer l'importance qu'il y a à approfondir encore ce que l'on vient d'esquisser. Elles donnent également à comprendre comment se construit grâce au groupe de Lie  $\mathbb{H}_1(\mathbb{R})$  l'ubiquité de la théorie de Markoff dans différents contextes où se manifeste un oscillateur harmonique (voir [12]). En fait elle apparait dans toute situation de couplage de deux tels oscillateurs.

### 2.5.3. Lien avec les quaternions

Avec le groupe  $\mathbf{F}_2$  il est très naturel d'introduire, plutôt que le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par  $(A_0, A_0B_0, B_0)$  comme le fait Riedel, le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle$  des combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de forme

$$\alpha 1_2 + \beta A_0 + \gamma B_0 + \delta A_0 B_0 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

où

$$1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Les expressions de  $A_0$  et  $B_0$  imposent que l'on ait  $p, q, r, s$ , dans  $\mathbb{Z}$ . En substituant dans 2.14, on obtient quatre égalités:

$$\alpha + 2\beta + \gamma + 3\delta = p, \quad (2.16)$$

$$\beta + \gamma + 4\delta = q, \quad (2.17)$$

$$\beta + \gamma + 2\delta = r, \quad (2.18)$$

$$\alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta = s. \quad (2.19)$$

Si on cherche à les inverser dans  $\mathbb{Q}$ , on trouve:

$$\alpha = q - 2r + s + \frac{p - q - s}{2} - \frac{q - r}{2}, \quad (2.20)$$

$$\beta = r + \frac{p - q - s}{2}, \quad (2.21)$$

$$\gamma = r - q - \frac{p - q - s}{2}, \quad (2.22)$$

$$\delta = \frac{q - r}{2}. \quad (2.23)$$

Mais comme on considère le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle$  des combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , il est en fait nécessaire que  $p, q, r, s$  dans  $\mathbb{Z}$  vérifient les deux conditions:

$$p - s \equiv q \equiv r \pmod{2}. \quad (2.24)$$

Inversement lorsque ces congruences sont vérifiées, on peut trouver à partir de  $p, q, r, s$  dans  $\mathbb{Z}$  les nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , dans  $\mathbb{Z}$ . On est alors certain d'être dans le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle$ , par construction sous  $\mathbb{Z}$ -module de  $\mathbf{M}_2(\mathbb{Z})$ . Remarquons que les expressions que l'on vient de donner montrent que  $\alpha 1_2 + \beta A_0 + \gamma B_0 + \delta A_0 B_0 = 0$  si et seulement si  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ . En d'autres termes les quatre matrices  $1_2, A_0, B_0, A_0 B_0$ , forment un système libre du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle$  qui est ainsi de rang 4. Ces quatre matrices sont d'ailleurs  $\mathbb{Q}$ -indépendantes dans  $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q})$ . On peut maintenant construire à partir des expressions précédentes une table de multiplication:

$$\begin{array}{lll}
(A_0)^2 & A_0B_0 & A_0(A_0B_0) \\
= -1_2 + 3A_0 & = (A_0B_0) & = -B_0 + 3A_0B_0 \\
\\
B_0A_0 & (B_0)^2 & B_0(A_0B_0) \\
= -3.1_2 + 3A_0 + 3B_0 - A_0B_0 & = -1_2 + 3B_0 & = -3.1_2 + A_0 + 6B_0 \\
\\
(A_0B_0)A_0 & (A_0B_0)B_0 & (A_0B_0)^2 \\
= -3.1_2 + 6A_0 + B_0 & = -A_0 + 3(A_0B_0) & = -1_2 + 6(A_0B_0)
\end{array}$$

Cette table montre que  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle$  est aussi muni d'une structure d'anneau, un sous-anneau de  $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q})$ . Ceci permet, en utilisant le langage des quaternions [24], d'observer que dans la  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q})$  des matrices  $2 \times 2$  à coefficients rationnels considérée comme  $\mathbb{Q}$ -algèbre de quaternions, le sous  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle$  engendré par le sous groupe multiplicatif normal dérivé  $\mathbf{F}_2$  de  $SL(2, \mathbb{Z})$  est un ordre. Le fait que  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle$  est strictement contenu dans l'ordre  $\mathbf{M}_2(\mathbb{Z})$  se voit aisément avec la condition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle .$$

On peut en plus considérer dans  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle$  la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_0 - B_0.$$

Celle-ci est de trace nulle et de déterminant  $-1$ , elle est donc inversible. Elle appartient à  $GL_2(\mathbb{Z})$ , mais n'est pas dans  $SL(2, \mathbb{Z})$  qui ne contient que des matrices de déterminant 1. Ainsi le groupe des unités  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle^*$ , c'est à dire des éléments inversibles de  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle$ , est-il plus gros que  $\mathbf{F}_2$  lui même, qui par construction est à la fois un sous-groupe de  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle^*$  et de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Dans  $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q})$  s'introduisent alors classiquement diverses notions. Ainsi pour :

$$h = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{Q}),$$

on note

$$\bar{h} = \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix},$$

$$t(h) = p + s = Tr(h), \quad n(h) = ps - qr = \det(h),$$



$$\langle h_1, h_2 \rangle = t(h_1 \overline{h_2}).$$

Ces expressions induisent des notions analogues sur les sous structures de  $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q})$ , en particulier sur  $\mathbb{Z} \langle \mathbf{F}_2 \rangle$ . Remarquons qu'avec la table précédente, on a

$$\begin{aligned} & A_0(\alpha 1_2 + \beta A_0 + \gamma B_0 + \delta A_0 B_0) \\ = & -\beta + (\alpha + 3\beta)A_0 + (-\delta)B_0 + (\gamma + 3\delta)A_0 B_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_0(\alpha 1_2 + \beta A_0 + \gamma B_0 + \delta A_0 B_0) \\ = & (-3\beta - \gamma - 3\delta)1_2 + (3\beta + \delta)A_0 + (\alpha + 3\beta + 3\gamma + 6\delta)B_0 + (-\beta)A_0 B_0. \end{aligned}$$

Ceci introduit une autre représentation de la théorie de Markoff, cette fois dans  $SL(4, \mathbb{Z})$ , mais qu'on ne considèrera plus dans la suite :

$$\varrho(A_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \varrho(B_0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.6. Des matrices nilpotentes et leurs propriétés

Avec sa représentation de la théorie de Markoff dans  $SL(3, \mathbb{Z})$  grâce aux MT-matrices, Riedel se pose des questions comparables à celles dont les réponses sont détaillées dans [16] ou [17] (chapitre 6) pour la représentation de cette même théorie dans  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Il est ainsi naturel de se demander ce qui se passe si au lieu d'utiliser la base  $(A_0, A_0 B_0, B_0)$  construite à partir du couple de générateurs  $(A_0, B_0)$  de  $\mathbf{F}_2$  on en utilise une autre  $(A, AB, B)$  construite à partir d'un autre couple de générateurs  $(A, B)$  de  $\mathbf{F}_2$ . On revient sur cette question dans la suite. Riedel évoque aussi les congruences qui laissent une matrice  $M(a, b, c)$  invariante, c'est à dire qu'il étudie les matrices  $N$  de  $SL(3, \mathbb{Z})$  contenues dans le stabilisateur de  $M(a, b, c)$  pour l'action considérée. Elles vérifient

$${}^t N M(a, b, c) N = M(a, b, c). \quad (2.25)$$

Il établit d'abord que certaines matrices peuvent être construites vérifiant une telle égalité :

**Proposition 2.2.** (Proposition 2.1 de [19]) Soit  $H(a, b, c) = M(a, b, c)^{-1} {}^t M(a, b, c)$ , on a :

$$1/ {}^tH(a, b, c)M(a, b, c)H(a, b, c) = M(a, b, c).$$

2/ Si  $N$  inversible vérifie  ${}^tNM(a_2, b_2, c_2)N = M(a_1, b_1, c_1)$ , alors on a aussi  ${}^tNH(a_2, b_2, c_2)N = H(a_1, b_1, c_1)$ .

Les énoncés de cette proposition se vérifient facilement en remplaçant  $H = H(a, b, c)$  par son expression  $M^{-1} {}^tM$ , où  $M = M(a, b, c)$ , et en notant ici  $M_i = M(a_i, b_i, c_i)$  :

$${}^tHMH = M^tM^{-1}MM^{-1} {}^tM = M,$$

$${}^tNH_2N = {}^tNM_2^{-1} {}^tM_2N = {}^tNM_2^{-1}N^{-1} {}^tNM_2N = M_1^{-1} {}^tM_1 = H_1.$$

L'expression de  $H$  peut être calculée :

$$\begin{aligned} H(a, b, c) &= M(a, b, c)^{-1} {}^tM(a, b, c) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - (a^2 + b^2 - abc) & ac^2 - bc - a & ac - b \\ a - bc & 1 - c^2 & -c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \begin{pmatrix} -(a^2 + b^2 - abc) & ac^2 - bc - a & ac - b \\ a - bc & -c^2 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En posant  $H(a, b, c) = 1 + S(a, b, c)$  ou simplement lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté  $H = 1 + S$ , ceci introduit la matrice

$$S = \begin{pmatrix} -(a^2 + b^2 - abc) & ac^2 - bc - a & ac - b \\ a - bc & -c^2 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Le polynome caractéristique de  $H$  est obtenu par l'intermédiaire de celui de  $S$  qui est plus facile à calculer :

$$\det(\lambda 1 - S) = \lambda^3 + d\lambda^2 + d\lambda; \quad \det(\lambda 1 - H) = (\lambda - 1)^3 + d(\lambda - 1)^2 + d(\lambda - 1),$$

où l'on note de façon générale  $d = a^2 + b^2 + c^2 - abc$ . Riedel constate ensuite qu'une autre matrice candidate pour satisfaire l'équation 2.25 peut être obtenue à partir d'une matrice  $R = R(a, b, c)$  qui vérifie, en notant ici  $M = M(a, b, c)$  :

$${}^tRM + MR = 0. \quad (2.27)$$

En considérant dans 2.27 les coefficients de  $R$  comme des inconnues on peut facilement trouver une expression définissant désormais  $R$  :

$$R = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - abc & 2a + bc - ac^2 & 2b - ac \\ bc - 2a & c^2 - a^2 & 2c - ab \\ ac - 2b & -2c - ab + a^2c & abc - b^2 - c^2 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

Avec cette expression, on a bien  ${}^tRM + MR = 0$  comme le montrent effectivement les calculs de  $MR$  qui est égal à

$$\begin{pmatrix} abc - a^2 - b^2 & 2a - bc - a^3 - ab^2 + a^2bc & 2b + ac - b^3 - a^2b - bc^2 + ab^2c \\ -2a - bc + ac^2 & -abc - a^2 - c^2 + a^2c^2 & 2c - ab - c^3 - b^2c + abc^2 \\ -2b + ac & -2c - ab + a^2c & abc - b^2 - c^2 \end{pmatrix},$$

et de  ${}^tRM$  qui vaut l'opposé de cette dernière matrice. Le polynôme caractéristique de  $R$  est facile à calculer :

$$\det(\lambda 1 - R) = \lambda^3 + d(d - 4)\lambda.$$

Mais surtout en étendant l'anneau  $\mathbb{Z}$  à un corps plus vaste comme  $\mathbb{R}$ ,  $R$  permet de considérer pour tout  $x \in \mathbb{R}$  la matrice  $\exp(xR)$ . Elle vérifie par construction l'équation 2.25 :

**Proposition 2.3.** (Proposition 2.2 de [19]) On a :

$${}^t \exp(xR)M \exp(xR) = M. \quad (2.29)$$

Avec 2.27, on a en effet pour tout  $k$  entier  $({}^tR)^k M = (-1)^k MR^k$ , et ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & {}^tNMN \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{x^{k+l}}{k!l!} ({}^tR)^k MR^l = \sum_{k,l=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+l}}{k!l!} MR^{k+l} = M \exp(-xR) \exp(xR) \\ &= M. \end{aligned}$$

Le lien avec la matrice  $H$  qui vérifie également l'équation 2.25 est ensuite donné par Riedel :

**Proposition 2.4.** (Proposition 2.3 (a) de [19]) On a :

$$H = \exp\left(-\frac{R}{2}\right) = 1 - \frac{R}{2} + \frac{R^2}{8}. \quad (2.30)$$

L'article [19] ne contient pas de démonstration de cette égalité, mais on peut facilement en donner une. On utilise pour cela le polynôme caractéristique de  $R$ , que l'on vient de calculer et dont cette matrice est une racine. Sachant qu'ici  $d = 0$ , on trouve donc  $R^3 = 0$ . Ceci donne directement la seconde égalité de 2.30. On peut alors calculer le dernier terme de cette même égalité, car on dispose des expressions de  $H$  et  $R$ . Remarquons seulement que  $H$  est inversible et que l'on a

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -a & -a^2 + 1 & c - ab \\ -b + ac & -c - ab + a^2c & abc - b^2 - c^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on en soustrait  $H$ , on trouve une expression que Riedel ne cite pas:

$$H^{-1} - H = \begin{pmatrix} -abc + a^2 + b^2 & 2a + bc - ac^2 & 2b - ac \\ -2a + bc & -a^2 + c^2 & 2c - ab \\ -2b + ac & -2c - ab + a^2c & abc - b^2 - c^2 \end{pmatrix} = R.$$

En utilisant le polynôme caractéristique de  $H$  qui s'écrit  $(H - 1)^3 = 0$ , ceci donne directement les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} H^{-1} &= H^2 - 3H + 3, & H^{-2} &= 3H^2 - 8H + 6, \\ R &= H^2 - 4H + 3, & R^2 &= 4H^2 - 8H + 4, \\ 1 - \frac{R}{2} + \frac{R^2}{8} &= \frac{8 - 4H^2 + 16H - 12 + 4H^2 - 8H + 4}{8} = H = 1 + S. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ainsi le premier énoncé (a) de la proposition 2.3 de [19] est-il assuré. La matrice  $R$  est telle que  $R^3 = 0$  et en évaluant  $R^2 = 8H + 4R - 8$ , on s'assure facilement que l'on a  $R^2 \neq 0$ . De façon plus précise :

$$R^2 = 4 \begin{pmatrix} abc - a^2 - b^2 & -bc + ac^2 & ac \\ -bc & -a^2 - c^2 & -ab \\ ac & -ab + a^2c & abc - b^2 - c^2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

De sorte que  $R$  est une matrice nilpotente d'indice 2. Riedel dit alors que la matrice  $R$  est un peu compliquée, et que dans la suite il utilisera plutôt la matrice

$S = H - 1 = \frac{1}{8}R^2 - \frac{1}{2}R$ . La matrice  $S$  est elle-même nilpotente d'indice 2. On a en effet facilement  $S^3 = 0$  et

$$S^2 = H^2 - 2H + 1 = R + 4H - 3 - 2\left(1 - \frac{R}{2} + \frac{R^2}{8}\right) + 1 = \frac{R^2}{4} \neq 0, \quad (2.32)$$

Le calcul complet donne d'ailleurs à partir de l'expression fournie ci-dessus pour  $S$ , et simplifiée avec  $d = 0$  parce qu'on travaille avec des solutions de l'équation 2.1 :

**Proposition 2.5.** (*Proposition 2.3 (b) de [19]*) On a :

$$S^2 = \begin{pmatrix} c^2 & -bc + ac^2 & ac \\ -bc & -a^2 - c^2 & -ab \\ ac & -ab + ca^2 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & ac - b & a \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'avec  $S = -\frac{R}{2} + \frac{R^2}{8}$  et  $S^2 = \frac{R^2}{4}$ , on obtient encore

$$R = S^2 - 2S. \quad (2.33)$$

Riedel dit alors ([19] p. 7) que la suite de son article montrera que toutes les congruences laissant  $M$  invariante sont données par une exponentielle  $\exp(sR)$ , où  $s$  est un nombre rationnel. En d'autres termes, il affiche quel est le stabilisateur de  $M$  pour l'action du groupe  $SL(3, \mathbb{Z})$  dans  $GL(3, \mathbb{Z})$  par les congruences. Mais il a également énoncé dans la seconde partie de la proposition 2.1 de [19] que si une matrice inversible quelconque  $N$  est telle  ${}^tNM(a_2, b_2, c_2)N = M(a_1, b_1, c_1)$ , c'est à dire telle que 2.10 soit assurée, on a aussi

$$N^{-1}H(a_2, b_2, c_2)N = H(a_1, b_1, c_1). \quad (2.34)$$

Cette condition peut être traduite en disant que si les matrices  $M_1$  et  $M_2$  sont liées par une congruence définie par  $N$ , les matrices associées  $H_1 = (M_1^{-1})({}^tM_1)$  et  $H_2 = (M_2^{-1})({}^tM_2)$  sont liées par un automorphisme intérieur également défini par  $N$ . Or partant de  $({}^tN)M_2N = M_1$ , et en déduisant par transposition et inversion

$$({}^tN)({}^tM_2)N = {}^tM_1, \quad (N^{-1})M_2^{-1}({}^tN)^{-1} = M_1^{-1},$$

on conclut bien par produit que l'on a

$$\begin{aligned} N^{-1}H_2N &= N^{-1}(M_2^{-1})({}^tM_2)N \\ &= (N^{-1})M_2^{-1}({}^tN)^{-1}({}^tN)({}^tM_2)N \\ &= (M_1^{-1})({}^tM_1) \\ &= H_1. \end{aligned}$$

En d'autres termes Riedel identifie différentes matrices d'une orbite pour l'action par congruences du groupe  $SL(3, \mathbb{Z})$  sur les matrices de  $GL(3, \mathbb{Z})$ , ainsi que différentes matrices d'une orbite pour l'action par automorphismes intérieurs du groupe  $SL(3, \mathbb{Z})$  également sur les matrices de  $GL(3, \mathbb{Z})$ . Il signifie ainsi qu'il est possible de complètement décrire ces deux actions du groupe  $SL(3, \mathbb{Z})$  dans  $GL(3, \mathbb{Z})$ , par les automorphismes intérieurs ou par les congruences, dans l'esprit de ce qui a été fait dans [16]. De plus il indique comment ces deux actions sont liées.

## 2.7. Introduction de matrices auxiliaires

Dans [19] page 8, la matrice nilpotente  $S$  est dans un premier temps ramenée à une forme de Jordan plus simple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

en utilisant une matrice de passage

$$T = \begin{pmatrix} c & ac(ac^2 - bc - a) & ac(ac - b)c \\ ac - b & ac(-c^2) & ac(ac - b)(-b) \\ a & ac^2 & ac(ac - b)a \end{pmatrix},$$

de déterminant non nul  $\det(T) = (b - ac)^3 c^3 a^3$ . Ceci se vérifie bien en comparant les deux matrices

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac(-a - bc + ac^2) & ac^2(-b + ac) & 0 \\ -ac^3 & -abc(-b + ac) & 0 \\ ac^2 & a^2c(-b + ac) & 0 \end{pmatrix},$$

$$ST = \begin{pmatrix} c^3 + b^2c - 2abc^2 + a^2c^3 & -abc^2 + a^2c^3 & 0 \\ -ac^3 & -ac^3 - a^3c + ac^5 + a^3c^3 + ab^2c^3 - a^2bc^4 & 0 \\ ac^2 & -ac^4 - a^2bc - ab^2c^2 + a^2bc^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il suffit d'utiliser le fait que  $(a, b, c)$  solution de l'équation 2.1 pour en conclure que ces deux dernières matrices sont égales. On peut aussi écrire ce résultat sous la forme

$$T^{-1}ST = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Riedel parvient à cette propriété en observant que

$$\begin{aligned}
 S \begin{pmatrix} c \\ ac - b \\ a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(a^2 + b^2 - abc) & ac^2 - bc - a & ac - b \\ a - bc & -c^2 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ ac - b \\ a \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -a^2c - abc^2 + a^2c^3 \\ -ac^3 \\ ac^2 \end{pmatrix} \\
 &= ac \begin{pmatrix} -a - bc + ac^2 \\ -c^2 \\ c \end{pmatrix}, \\
 \\
 S \begin{pmatrix} -a - bc + ac^2 \\ -c^2 \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c^2 & ac^2 - bc - a & ac - b \\ a - bc & -c^2 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a - bc + ac^2 \\ -c^2 \\ c \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c(ac - b) \\ -b(ac - b) \\ a(ac - b) \end{pmatrix} \\
 &= (ac - b) \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

en en fabriquant la matrice  $T$  avec les matrices colonnes ainsi obtenues. Il montre aussi que  $T$  se décompose en produit sous la forme  $T = ABCD$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c(-b + ac) - a & c \\ 1 & -c^2 & -b \\ 0 & c & a \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} ac & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ac(ac-b) \end{pmatrix}.$$

Le calcul effectif du produit  $ABCD$  est facile et donne bien

$$ABCD = \begin{pmatrix} c & -ca(a+bc-ac^2) & c^2a(ac-b) \\ (ac-b) & -c^3a & cba(b-ac) \\ a & c^2a & ca^2(ac-b) \end{pmatrix} = T. \quad (2.36)$$

Ensuite, Riedel définit trois autres matrices auxiliaires

$$F = \begin{pmatrix} ac-b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} c & 1 & a \\ a & 0 & -c \\ -c & 0 & c(ac-b)-a \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ac-b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le produit  $AFKL$  est faisable et donne directement une expression que l'on trouve au bas de la page 8 de l'article de Riedel [19]:

$$AFKL = (b-ac)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve ainsi la décomposition de  $A^{-1}$  :

$$FKL = (b-ac)^2 A^{-1}. \quad (2.37)$$

Cette matrice a pour expression

$$FKL = \begin{pmatrix} c(-b+ac) & (-b+ac)^2 & a(-b+ac) \\ a & 0 & -c \\ -c & 0 & -a+c(-b+ac) \end{pmatrix}.$$



Pour finir Riedel introduit une matrice

$$V = \begin{pmatrix} a & -a & c \\ 1 & 0 & -b + ac \\ 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

Elle possède pour inverse

$$V^{-1} = \frac{1}{(b - ac)^2} \begin{pmatrix} c(ac - b) & -b(ac - b) & a(ac - b) \\ a & -a^2 & a(ac - b) - c \\ -c & ac & -a \end{pmatrix},$$

et aussi on a le lien suivant entre  $V$  et  $M$ :

$$\begin{aligned} & (b - ac)^2 V A^{-1} \\ = & \begin{pmatrix} a & -a & c \\ 1 & 0 & -b + ac \\ 0 & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(-b + ac) & (-b + ac)^2 & a(-b + ac) \\ a & 0 & -c \\ -c & 0 & -a + c(-b + ac) \end{pmatrix} \\ = & (b - ac)^2 \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = & (b - ac)^2 M. \end{aligned}$$

On a donc :

$$V = MA. \quad (2.38)$$

Ce qui précède permet aussi de calculer le produit  $VBCD$  :

$$VBCD = VA^{-1}T = MT. \quad (2.39)$$

Riedel nomme  $U$  cette matrice, et on peut l'explicitier :

$$U = MT = \begin{pmatrix} c + a^2c & -a^2c & ac^2(-b + ac) \\ -b + 2ac & 0 & ac(b - ac)^2 \\ a & ac^2 & a^2c(-b + ac) \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Toutes les matrices que l'on vient d'introduire seront utilisées dans la suite. Leur évocation paraît un peu gratuite, et la compréhension serait meilleure si l'on pouvait les interpréter dans le modèle géométrique que l'on a esquissé ci-dessus. Mais ceci reste un travail à faire.

### 3. Résultats sur les orbites

Riedel concentre son attention sur le cadre qu'il a posé au début de son article, c'est à dire qu'il se limite dans la suite de son article à considérer ([19] p. 9) deux triplets distincts définissant une valeur dominante commune

$$m = a_1c_1 - b_1 = a_2c_2 - b_2,$$

où  $a_1, b_1, c_1$ , et  $a_2, b_2, c_2$ , sont les composantes de l'unique triplet voisin de chacun d'eux plus proche de la racine de l'arbre, et définissant chacun une MT-matrice. Il suppose, pour que tout aille bien, que l'on a  $m \neq 3$  et  $m \neq 6$ , ces deux cas se traitant de façon directe par exemple en calculant tous les triplets associés possibles. On n'a aucune difficulté à voir que la conjecture est vraie dans ces deux cas. Hors ces cas particuliers, il utilise alors les matrices qu'il a construites ci-dessus en prenant bien garde de noter par les indices correspondants celles qui sont associées à l'un ou l'autre des triplets.

#### 3.1. Calculs préparatoires

Norbert Riedel introduit

$$\tilde{N} = T(a_2, b_2, c_2)T(a_1, b_1, c_1)^{-1} = T_2T_1^{-1}, \quad (3.1)$$

$$r = \frac{a_1c_1}{a_2c_2}. \quad (3.2)$$

Ceci donne pour le déterminant

$$\det(r\tilde{N}) = r^3 \frac{\det(T_2)}{\det(T_1)} = \left(\frac{a_1c_1}{a_2c_2}\right)^3 \left(\frac{(b_2 - a_2c_2)^3 c_2^3 a_2^3}{(b_1 - a_1c_1)^3 c_1^3 a_1^3}\right) = 1. \quad (3.3)$$

Par la proposition 1.2 de [19] on peut construire une matrice  $N \in SL(3, \mathbb{Z})$  vérifiant 2.10, c'est à dire telle que:

$${}^tNM(a_2, b_2, c_2)N = M(a_1, b_1, c_1).$$

Par le second énoncé de la proposition 2.1 de [19], on a aussi 2.34:

$$N^{-1}H(a_2, b_2, c_2)N = H(a_1, b_1, c_1),$$

c'est à dire avec

$$H(a_1, b_1, c_1) = H_1 = 1 + S_1, \quad H(a_2, b_2, c_2) = H_2 = 1 + S_2,$$

et en développant puis simplifiant :

$$N^{-1}S_2N = S_1.$$

Maintenant Riedel ([19] p. 10) affiche que l'on a aussi

$$(\tilde{N})^{-1}S_2(\tilde{N}) = S_1. \quad (3.4)$$

Or ceci résulte directement de 2.35 qui impose ici  $T_1^{-1}S_1T_1 = T_2^{-1}S_2T_2$ . La comparaison des deux dernières égalités obtenues donne alors le fait que la matrice  $S_2$  commute avec la matrice  $N(\tilde{N})^{-1}$  car on a :

$$S_1 = N^{-1}S_2N = (\tilde{N})^{-1}S_2(\tilde{N}).$$

Riedel en déduit que la matrice  $N(\tilde{N})^{-1}$  est nécessairement décomposable sur la base des matrices  $3 \times 3$  formée de l'unité 1, de  $S_2$  et de  $S_2^2$ . Ceci n'est pas immédiatement évident, même s'il s'agit d'appliquer un résultat assez classique d'algèbre linéaire. On peut ici le démontrer de façon directe en utilisant 2.35. Il suffit de se placer dans la base qui met  $S_2$  sous la forme apparaissant dans cette dernière égalité. Ensuite, on résoud le système :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ceci donne

$$\beta_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3, \quad \alpha_2 = \beta_3.$$

On conclut en remarquant que

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2.$$

Riedel en déduit que l'on peut écrire avec des nombres rationnels  $s$  et  $t$  :

$$N = r(1 + sS_2 + tS_2^2)\tilde{N}.$$

Ceci est bien exact car  $N \in SL(3, \mathbb{Z})$  est une matrice de déterminant 1,  $r$  est non nul, et que l'autre membre de cette égalité donne avec 3.3:

$$\det(r(1 + sS_2 + tS_2^2)\tilde{N}) = \det(r\tilde{N}) \det(1 + sS_2 + tS_2^2) = \det(r\tilde{N}) = 1.$$

En revenant alors à l'expression 3.1 de  $\tilde{N} = T_2T_1^{-1}$ , ainsi qu'à la formule de commutation 2.35, on obtient :

$$\begin{aligned} N &= r(1 + sS_2 + tS_2^2)T_2T_1^{-1} \\ &= rT_2\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2\right)T_1^{-1}. \end{aligned}$$

C'est à dire finalement, et la précision que cette matrice est dans  $M_3(\mathbb{Z})$  que donne Riedel est inutile puisqu'il s'agit par construction d'une matrice  $N$  de  $SL(3, \mathbb{Z})$  :

$$N = r(1 + sS_2 + tS_2^2)T_2T_1^{-1} = rT_2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ t & s & 1 \end{pmatrix}T_1^{-1}. \quad (3.5)$$

Pour ce qui est de son inverse, on a facilement

$$N^{-1} = r^{-1}T_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ -t + s^2 & -s & 1 \end{pmatrix}T_2^{-1}.$$

On peut d'ailleurs donner une autre expression de cette matrice en reconsidérant ce qui précède, mais en y permutant le rôle des indices. Ceci donne, et il suffit pour le vérifier, de calculer  $N^{-1}N$  :

$$N^{-1} = r^{-1}(1 - sS_1 + (s^2 - t)S_1^2)T_1T_2^{-1}. \quad (3.6)$$

En substituant maintenant dans 2.10 mise sous la forme

$$(M_2NM_1^{-1})^{-1} = {}^tN,$$

on obtient alors pour  ${}^tN$  les deux expressions suivantes

$$r {}^t(T_1^{-1})\begin{pmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tT_2 = r^{-1}M_1T_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ -t + s^2 & -s & 1 \end{pmatrix}T_2^{-1}M_2^{-1}, \quad (3.7)$$

et avec 2.40, on en déduit que cette matrice s'écrit aussi [19]

$${}^tN = r^{-1}U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ -t + s^2 & -s & 1 \end{pmatrix} U_2^{-1}. \quad (3.8)$$

La suite de l'article de Riedel ([19] pages 10-12) est un ensemble de calculs destinés à donner des expressions des termes apparaissant dans la décomposition 3.5 de  $N$  et dans celle qui s'en déduit pour  ${}^tN$  par 3.8. Il s'agit plus spécifiquement de comprendre par quelle relation sont éventuellement liés les deux paramètres  $s$  et  $t$ . Remarquons en passant que les calculs du présent paragraphe ne font absolument pas intervenir le fait que les deux triplets  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  définissent une même valeur dominante  $m$ . Remarquons aussi, et ceci est très important, que ces deux triplets étant choisis et la matrice  $N$  vérifiant 2.10 étant choisie,  $s$  et  $t$  sont définis de façon unique. Ceci découle de la décomposition de la matrice  $N(\widetilde{N})^{-1}$  sur la base des matrices  $3 \times 3$  formée de l'unité 1, de  $S_2$  et de  $S_2^2$

### 3.2. Premier jeu de trois expressions

Les trois premiers calculs faits par Riedel dans [19] permettent d'abord d'explicitier toutes les matrices qui sont des produits d'une puissance de  $S_2$  par  $\widetilde{N} = T_2T_1^{-1}$ .

#### 3.2.1. Première expression :

Avec  $m = a_1c_1 - b_1 = a_2c_2 - b_2$ , Riedel ne calcule pas  $rT_2T_1^{-1} = r\widetilde{N}$ , mais  $rm^2\widetilde{N}$ . Il le fait en utilisant les relations 2.36 et 2.37 vérifiées précédemment, et en notant  $F$  au lieu de  $F_1$  et  $L$  au lieu de  $L_1$  car ces matrices ne dépendent que de  $m$  :

$$rm^2\widetilde{N} = rm^2T_2T_1^{-1} = rA_2B_2C_2D_2D_1^{-1}C_1^{-1}B_1^{-1}F_1K_1L_1,$$

et en utilisant les expressions déjà données pour ces matrices, et que l'on a rappellées précédemment, ainsi que 3.2 :

$$\begin{aligned}
& B_2 C_2 D_2 D_1^{-1} C_1^{-1} B_1^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} a_2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 c_2 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 c_2 (-b_2 + a_2 c_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1 c_1} & 0 \\ \frac{1}{-a_1^3 c_1^3 + a_1^2 b_1 c_1^2} & 0 & -\frac{1}{a_1 b_1 c_1 - a_1^2 c_1^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{a_2 c_2}{a_1 c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_2 c_2} & 0 & (-b_2 + a_2 c_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{-a_1^2 c_1^2 + a_1 b_1 c_1} & 0 & -\frac{1}{b_1 - a_1 c_1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_2 c_2} & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{a_1 c_1 m} & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
r m^2 \tilde{N} &= A_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} & 0 & 1 \end{pmatrix} F_1 K_1 L_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & c_2 m - a_2 & c_2 \\ 1 & -c_2^2 & -b_2 \\ 0 & c_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} & 0 & 1 \end{pmatrix} F_1 K_1 L_1 \\
&= \begin{pmatrix} c_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) & -a_2 + m c_2 & c_2 \\ -b_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) + 1 & -c_2^2 & -b_2 \\ a_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) & c_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K_1 L_1 \\
&= \begin{pmatrix} m c_2 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) & m c_2 - a_2 & c_2 \\ m \left( 1 - b_2 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \right) & -c_2^2 & -b_2 \\ m a_2 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) & c_2 & a_2 \end{pmatrix} K_1 L_1,
\end{aligned}$$

où ce dernier produit est calculable explicitement avec :

$$K_1 L_1 = \begin{pmatrix} c_1 & m & a_1 \\ a_1 & 0 & -c_1 \\ -c_1 & 0 & -a_1 + c_1 m \end{pmatrix}.$$

En effectuant ce dernier produit, en l'organisant selon les puissances de  $m$ , et en introduisant les trois matrices suivantes :

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} -(a_1 a_2 + c_1 c_2) & 0 & -(a_1 c_2 - c_1 a_2) \\ -(a_1 c_2 - c_1 a_2) c_2 & 0 & (a_1 c_2 - c_1 a_2) a_2 \\ (a_1 c_2 - c_1 a_2) & 0 & -(a_1 a_2 + c_1 c_2) \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} a_1 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \begin{pmatrix} c_1 c_2 & m c_2 & a_1 c_2 \\ -c_1 b_2 & -m b_2 & -a_1 b_2 \\ c_1 a_2 & m a_2 & a_1 a_2 \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \begin{pmatrix} c_2 \\ -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} (c_1 \quad m \quad a_1), \end{aligned}$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^t \Gamma_2,$$

on vérifie effectivement que l'on a la première relation donnée par Riedel ([19] p. 10) :

$$r m^2 \tilde{N} = \Gamma_0 + m \Gamma_1 + m^2 \Gamma_2. \quad (3.9)$$

On peut le montrer en considérant colonne par colonne les matrices apparaissant des deux côtés de cette égalité. Ainsi pour la première, ceci donne l'égalité facile à vérifier

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -c_1 c_2 + a_1 (-a_2 + m c_2) + m c_1 c_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) \\ b_2 c_1 - a_1 c_2^2 + m c_1 \left( -b_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) + 1 \right) \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 + m a_2 c_1 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(a_1 a_2 + c_1 c_2) + m a_1 c_2 + m c_1 c_2 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \\ -(a_1 c_2 - c_1 a_2) c_2 - m b_2 c_1 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \\ (a_1 c_2 - c_1 a_2) + m a_2 c_1 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour la seconde colonne, on a de même l'égalité facile à vérifier :

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} m^2 c_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) \\ m^2 \left( -b_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) + 1 \right) \\ m^2 a_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} m^2 c_2 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \\ -m^2 b_2 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) + m^2 \\ m^2 a_2 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Enfin pour la troisième colonne, on vérifie aussi facilement que l'on a :

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} c_2 (-a_1 + m c_1) - c_1 (-a_2 + m c_2) + m a_1 c_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) \\ c_1 c_2^2 - b_2 (-a_1 + m c_1) + m a_1 \left( -b_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) + 1 \right) \\ -c_1 c_2 + a_2 (-a_1 + m c_1) + m a_1 a_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -(a_1 c_2 - c_1 a_2) + m a_1 c_2 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \\ (a_1 c_2 - c_1 a_2) a_2 - m a_1 b_2 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \\ -(a_1 a_2 + c_1 c_2) + m c_1 a_2 + m a_1 a_2 \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$



### 3.2.2. Deuxième expression :

De même, Riedel calcule maintenant  $rmS_2\tilde{N}$ . On le fait ici directement ici en appliquant 2.35 puis deux fois 2.36 et enfin 2.37 :

$$\begin{aligned}
 rmS_2\tilde{N} &= rmS_2T_2T_1^{-1} \\
 &= rmT_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1} \\
 &= rmA_2B_2C_2D_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1} \\
 &= rmA_2 \begin{pmatrix} a_2c_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2c_2 & 0 \\ 1 & 0 & a_2c_2(-b_2 + a_2c_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1} \\
 &= rmA_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2c_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2c_2(-b_2 + a_2c_2) & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1}
 \end{aligned}$$

Le calcul se poursuit facilement :

$$\begin{aligned}
 rmS_2\tilde{N} &= ra_2c_2mA_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1} \\
 &= a_1c_1m^{-1}A_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} D_1^{-1}C_1^{-1}B_1^{-1}F_1K_1L_1 \\
 &= a_1c_1m^{-1}A_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{m}{a_1} & \frac{m}{a_1c_1} & \frac{m}{c_1} \\ \frac{m}{c_1} & 0 & -\frac{m}{a_1} \end{pmatrix} L_1 \\
 &= A_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & a_1 \\ a_1 & 0 & -c_1 \end{pmatrix} L_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & c_2m - a_2 & c_2 \\ 1 & -c_2^2 & -b_2 \\ 0 & c_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & a_1 \\ a_1 & 0 & -c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

En effectuant ce dernier produit, on trouve la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1c_2 + c_1(-a_2 + mc_2) & m(-a_2 + mc_2) & -c_1c_2 + a_1(-a_2 + mc_2) \\ -a_1b_2 - c_1c_2^2 & -mc_2^2 & b_2c_1 - a_1c_2^2 \\ a_1a_2 + c_1c_2 & mc_2 & a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière se décompose en introduisant deux matrices ([19] p. 11)

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \begin{pmatrix} a_1c_2 - c_1a_2 & 0 & -c_1c_2 - a_1a_2 \\ -a_1a_2c_2 - c_1c_2^2 & 0 & a_2c_2c_1 - a_1c_2^2 \\ a_1a_2 + c_1c_2 & 0 & a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix}, \\ \Omega_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & 0 \\ a_1 & -c_2^2 & -c_1 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} c_1 & m & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1c_2 & mc_2 - a_2 & a_1c_2 \\ a_1 & -c_2^2 & -c_1 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et en comparant à la matrice suivante à laquelle on constate facilement qu'elle est égale

$$\Omega_0 + m\Omega_1 = \begin{pmatrix} a_1c_2 - c_1a_2 + mc_1c_2 & m(mc_2 - a_2) & -c_1c_2 - a_1a_2 + ma_1c_2 \\ -a_1a_2c_2 - c_1c_2^2 + ma_1 & -mc_2^2 & a_2c_2c_1 - a_1c_2^2 - mc_1 \\ a_1a_2 + c_1c_2 & mc_2 & a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix}.$$

On obtient bien ainsi la seconde expression donnée par Riedel ([19] p. 11) :

$$rmS_2\tilde{N} = \Omega_0 + m\Omega_1. \quad (3.10)$$

### 3.2.3. Troisième expression :

Riedel donne une troisième expression qui est celle de  $rS_2^2\tilde{N}$ . Pour la démontrer, ce que Riedel ne fait pas, on peut procéder comme suit en démarrant avec 2.35

appliquée deux fois suivie de 2.36:

$$\begin{aligned}
 rS_2^2 \tilde{N} &= rS_2^2 T_2 T_1^{-1} \\
 &= rT_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1} \\
 &= rA_2 B_2 C_2 D_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1} \\
 &= rA_2 \begin{pmatrix} a_2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 c_2 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 c_2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1} \\
 &= rA_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_2 c_2 m & 0 & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1} \\
 &= a_1 c_1 m A_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1}.
 \end{aligned}$$

Avec l'égalité 2.36, le calcul se poursuit :

$$\begin{aligned}
rS_2^2 \tilde{N} &= a_1 c_1 m \begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1} \\
&= a_1 c_1 m^{-1} \begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1 c_1} & 0 \\ \frac{1}{-a_1^3 c_1^3 + a_1^2 b_1 c_1^2} & 0 & -\frac{1}{a_1 b_1 c_1 - a_1^2 c_1^2} \end{pmatrix} T_1^{-1} \\
&= a_1 c_1 m^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 c_1} c_2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a_1} b_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1} \frac{a_2}{c_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} F_1 K_1 L_1 \\
&= m^{-1} \begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K_1 L_1 \\
&= \begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & m & a_1 \\ a_1 & 0 & -c_1 \\ -c_1 & 0 & -a_1 + c_1 m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 c_2 & m c_2 & a_1 c_2 \\ -b_2 c_1 & -m b_2 & -a_1 b_2 \\ a_2 c_1 & m a_2 & a_1 a_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En notant alors ([19] p. 11)

$${}^t\Phi = \begin{pmatrix} c_2 \\ -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} (c_1 \ m \ a_1),$$

on obtient la troisième expression de Riedel ([19] p. 11) :

$$rS_2^2 \tilde{N} = {}^t\Phi. \quad (3.11)$$

### 3.2.4. Application du premier jeu de trois expressions

On dispose donc des trois composantes de l'équation 3.5. Remarquons que l'expression de  $\Gamma_1$  donnée avant 3.9 permet d'écrire aussi avec l'expression de  ${}^t\Phi$  calculée juste avant 3.11 :

$$\Gamma_1 = \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) {}^t\Phi. \quad (3.12)$$

Si l'on combine maintenant les égalités 3.9 à 3.11 en les injectant dans 3.5 on en déduit une expression de  $N$  :

$$N = \frac{1}{m^2}(\Gamma_0 + m\Gamma_1 + m^2\Gamma_2) + \frac{s}{m}(\Omega_0 + m\Omega_1) + t({}^t\Phi). \quad (3.13)$$

### 3.3. Second jeu de trois expressions

Les trois calculs suivants de Riedel permettent d'explicitier d'autres matrices données par un produit où apparaît une puissance de la forme de Jordan de  $S_2$ . Dans ce qui précède, on a calculé les trois premiers termes apparaissant dans le premier membre de l'égalité 3.7. Maintenant on calcule les trois termes qui apparaissent dans le second membre de cette égalité.

#### 3.3.1. Première expression :

Le passage de 3.5 à 3.8 se faisant par simple transposition de  $N$  à  ${}^tN$ , on est conduit à considérer un nouvel ensemble de matrices déduites par transposition de celles que l'on a introduites avant. Mais curieusement, en introduisant un signe, Riedel fait le choix de poser [19] (p. 13):

$$\Theta_0 = {}^t\Gamma_0, \quad \Theta_1 = -{}^t\Gamma_1, \quad \Theta_2 = {}^t\Gamma_2. \quad (3.14)$$

L'analogie de l'égalité 3.9 qui s'écrit aussi

$$rm^2\tilde{N} = rm^2T_2T_1^{-1} = \Gamma_0 + m\Gamma_1 + m^2\Gamma_2,$$

est maintenant ([19] p. 11) celle qui est donnée par le premier terme de 3.8

$$r^{-1}m^2U_1U_2^{-1} = \Theta_0 + m\Theta_1 + m^2\Theta_2, \quad (3.15)$$

Riedel ne fait qu'esquisser la démonstration de cette égalité, mais on peut la confirmer par une vérification directe. Pour cela on utilise l'égalité 2.39 :

$$\begin{aligned} r^{-1}m^2U_1U_2^{-1} &= r^{-1}m^2V_1B_1C_1D_1D_2^{-1}C_2^{-1}B_2^{-1}V_2^{-1} \\ &= m^2V_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_1c_1} - \frac{1}{a_2c_2} & 0 & 1 \end{pmatrix} V_2^{-1} \\ &= V_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_1c_1} - \frac{1}{a_2c_2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2m & -b_2m & a_2m \\ a_2 & -a_2^2 & a_2m - c_2 \\ -c_2 & a_2c_2 & -a_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& V_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & -a_1 & c_1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & c_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + c_1 \left( \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \right) & -a_1 & c_1 \\ m \left( \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \right) + 1 & 0 & m \\ a_1 \left( \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \right) & c_1 & a_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Il reste donc seulement à effectuer le produit

$$\begin{pmatrix} a_1 + c_1 \left( \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \right) & -a_1 & c_1 \\ m \left( \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \right) + 1 & 0 & m \\ a_1 \left( \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \right) & c_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 m & -b_2 m & a_2 m \\ a_2 & -a_2^2 & a_2 m - c_2 \\ -c_2 & a_2 c_2 & -a_2 \end{pmatrix},$$

et à montrer qu'il vaut  $\Theta_0 + m\Theta_1 + m^2\Theta_2$ . Or ceci est facile en effectuant le dernier produit, en transposant et comparant comme on l'a fait avec les matrices  $\Gamma$  colonne par colonne. On compare ainsi aux mêmes colonnes que celles issues de la matrice  $\Gamma_0 - m\Gamma_1 + m^2\Gamma_2$  :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -a_1 a_2 - c_1 c_2 + m c_2 \left( a_1 + c_1 \left( \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \right) \right) \\ a_2 c_1 c_2 + a_1 a_2^2 - m b_2 \left( a_1 + c_1 \left( \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \right) \right) \\ -a_2 c_1 - a_1 (-c_2 + m a_2) + m a_2 \left( a_1 + c_1 \left( \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \right) \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a_1 a_2 - c_1 c_2 + m a_1 c_2 - m c_1 c_2 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) \\ -c_2 (a_1 c_2 - a_2 c_1) + m b_2 c_1 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 - m a_2 c_1 \left( -\frac{1}{a_1 c_1} + \frac{1}{a_2 c_2} \right) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -mc_2 + mc_2 \left( m \left( \frac{1}{a_1c_1} - \frac{1}{a_2c_2} \right) + 1 \right) \\ ma_2c_2 - mb_2 \left( m \left( \frac{1}{a_1c_1} - \frac{1}{a_2c_2} \right) + 1 \right) \\ -ma_2 + ma_2 \left( m \left( \frac{1}{a_1c_1} - \frac{1}{a_2c_2} \right) + 1 \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -m^2c_2 \left( -\frac{1}{a_1c_1} + \frac{1}{a_2c_2} \right) \\ m^2 + m^2b_2 \left( -\frac{1}{a_1c_1} + \frac{1}{a_2c_2} \right) \\ -m^2a_2 \left( -\frac{1}{a_1c_1} + \frac{1}{a_2c_2} \right) \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} -a_1c_2 + a_2c_1 + ma_1c_2 \left( \frac{1}{a_1c_1} - \frac{1}{a_2c_2} \right) \\ a_1a_2c_2 - a_2^2c_1 - ma_1b_2 \left( \frac{1}{a_1c_1} - \frac{1}{a_2c_2} \right) \\ -a_1a_2 + c_1(-c_2 + ma_2) + ma_1a_2 \left( \frac{1}{a_1c_1} - \frac{1}{a_2c_2} \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a_1c_2 + a_2c_1 - ma_1c_2 \left( -\frac{1}{a_1c_1} + \frac{1}{a_2c_2} \right) \\ a_2(a_1c_2 - a_2c_1) + ma_1b_2 \left( -\frac{1}{a_1c_1} + \frac{1}{a_2c_2} \right) \\ -a_1a_2 - c_1c_2 + ma_2c_1 - ma_1a_2 \left( -\frac{1}{a_1c_1} + \frac{1}{a_2c_2} \right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ceci donne

$${}^t(r^{-1}m^2U_1U_2^{-1}) = \Gamma_0 - m\Gamma_1 + m^2\Gamma_2.$$

L'égalité 3.15 en résulte de façon évidente par le choix fait en 3.11 sur les relations entre les  $\Gamma$  et les  $\Theta$ . Elle s'écrit aussi :

$$r^{-1}m^2U_1U_2^{-1} = {}^t\Gamma_0 - m {}^t\Gamma_1 + m^2 {}^t\Gamma_2, \quad (3.16)$$

### 3.3.2. Seconde expression :

Bizarrement, les matrices ici introduites par Riedel pour conduire ce nouveau calcul ne sont pas non plus de simples transposées des matrices  $\Omega$  vues avant. La transposition joue un rôle, mais pas aussi direct que dans la liaison entre les matrices  $\Gamma$  et  $\Theta$  considérées précédemment. Riedel pose ([19] p. 13)

$$\Lambda_1 = -{}^t\Omega_1 + \Phi + \begin{pmatrix} 0 & c_1b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1b_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0 = -{}^t\Omega_0 - m \begin{pmatrix} 0 & c_1b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1b_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Ceci donne de façon plus explicite les expressions que l'on retrouve dans [19] (p. 12) :

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= - \begin{pmatrix} c_1 c_2 & a_1 & 0 \\ -a_2 + m c_2 & -c_2^2 & c_2 \\ a_1 c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 c_2 & -b_2 c_1 & a_2 c_1 \\ m c_2 & -m b_2 & m a_2 \\ a_1 c_2 & -a_1 b_2 & a_1 a_2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & c_1 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 b_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & a_2 c_1 \\ a_2 & -m b_2 + c_2^2 & -c_2 + m a_2 \\ 0 & c_1 & a_1 a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 \\ a_2 & -a_2^2 & -c_2 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= - \begin{pmatrix} a_1 c_2 - a_2 c_1 & -a_1 a_2 c_2 - c_1 c_2^2 & a_1 a_2 + c_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a_1 a_2 - c_1 c_2 & a_2 c_1 c_2 - a_1 c_2^2 & a_1 c_2 - a_2 c_1 \end{pmatrix} \\
&\quad - m \begin{pmatrix} 0 & c_1 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 b_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(a_1 c_2 - a_2 c_1) & -m b_2 c_1 + a_1 a_2 c_2 + c_1 c_2^2 & -(a_1 a_2 + c_1 c_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1 a_2 + c_1 c_2 & -m a_1 b_2 - a_2 c_1 c_2 + a_1 c_2^2 & -(a_1 c_2 - a_2 c_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(a_1 c_2 - a_2 c_1) & a_2 (a_1 c_2 - a_2 c_1) & -(a_1 a_2 + c_1 c_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1 a_2 + c_1 c_2 & -a_2 (a_1 a_2 + c_1 c_2) & -(a_1 c_2 - a_2 c_1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



Riedel ([19] p. 12) calcule alors par analogie avec 3.10 :

$$\begin{aligned}
& r^{-1}mU_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1} \\
&= r^{-1}mV_1B_1C_1D_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D_2^{-1}C_2^{-1}B_2^{-1}V_2^{-1} \\
&= r^{-1}mV_1 \begin{pmatrix} a_1c_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1c_1 & 0 \\ 1 & 0 & a_1c_1m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2c_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2c_2} & 0 \\ -\frac{1}{ma_2^2c_2^2} & 0 & \frac{1}{ma_2c_2} \end{pmatrix} V_2^{-1} \\
&= mV_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} V_2^{-1}.
\end{aligned}$$

Ceci conduit à calculer

$$\begin{aligned}
& mV_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} V_2^{-1} \\
&= m \begin{pmatrix} a_1 & -a_1 & c_1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & c_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} V_2^{-1} \\
&= m \begin{pmatrix} -a_1 & mc_1 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 \\ c_1 & ma_1 & 0 \end{pmatrix} V_2^{-1} \\
&= m^{-1} \begin{pmatrix} -a_1 & mc_1 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 \\ c_1 & ma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2m & -b_2m & a_2m \\ a_2 & -a_2^2 & a_2m - c_2 \\ -c_2 & a_2c_2 & -a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a_1c_2 + a_2c_1 & a_1b_2 - a_2^2c_1 & -a_1a_2 + c_1(-c_2 + ma_2) \\ ma_2 & -ma_2^2 & m(-c_2 + ma_2) \\ a_1a_2 + c_1c_2 & -b_2c_1 - a_1a_2^2 & a_2c_1 + a_1(-c_2 + ma_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a_1c_2 + a_2c_1 & -ma_1 + a_2(a_1c_2 - a_2c_1) & -a_1a_2 - c_1c_2 + ma_2c_1 \\ ma_2 & m(-mb_2 + c_2^2) & m(-c_2 + ma_2) \\ a_1a_2 + c_1c_2 & mc_1 - a_2(a_1a_2 + c_1c_2) & -a_1c_2 + a_2c_1 + ma_1a_2 \end{pmatrix} \\
&= \Lambda_0 + m\Lambda_1.
\end{aligned}$$

On a donc la seconde relation recherchée ([19] p. 12)

$$r^{-1}mU_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1} = \Lambda_0 + m\Lambda_1. \quad (3.18)$$

### 3.3.3. Troisième expression :

La dernière égalité, analogue de la relation 3.11, et donnée par Riedel ([19] p. 12) est la suivante :

$$r^{-1}U_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1} = \Phi = \begin{pmatrix} c_1c_2 & -b_2c_1 & a_2c_1 \\ mc_2 & -mb_2 & ma_2 \\ a_1c_2 & -a_1b_2 & a_1a_2 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Le calcul peut se faire comme pour l'expression précédente :

$$\begin{aligned} & r^{-1}U_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1} \\ &= r^{-1}V_1B_1C_1D_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} D_2^{-1}C_2^{-1}B_2^{-1}V_2^{-1} \\ &= r^{-1}V_1 \begin{pmatrix} a_1c_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1c_1 & 0 \\ 1 & 0 & a_1c_1m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2c_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2c_2} & 0 \\ -\frac{1}{ma_2^2c_2^2} & 0 & \frac{1}{ma_2c_2} \end{pmatrix} V_2^{-1} \\ &= V_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix} V_2^{-1}. \end{aligned}$$

On termine de la même façon :

$$\begin{aligned}
& V_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix} V_2^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & -a_1 & c_1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & c_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix} V_2^{-1} \\
&= m \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} V_2^{-1} \\
&= m^{-1} \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 m & -b_2 m & a_2 m \\ a_2 & -a_2^2 & a_2 m - c_2 \\ -c_2 & a_2 c_2 & -a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 c_2 & -b_2 c_1 & a_2 c_1 \\ m c_2 & -m b_2 & m a_2 \\ a_1 c_2 & -a_1 b_2 & a_1 a_2 \end{pmatrix} \\
&= \Phi.
\end{aligned}$$

La dernière égalité de Riedel ([19] p. 12) est donc aussi assurée.

### 3.3.4. Application du second jeu de trois expressions

Remarquons qu'avec les expressions données ci-dessus, on a une égalité que mentionne aussi cet auteur à la page 13 de [19], et qui se déduit des expressions vues précédemment 3.12 et 3.14 :

$$\Gamma_1 = -{}^t\Theta_1 = \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) {}^t\Phi. \quad (3.20)$$

Si l'on combine maintenant les égalités 3.16, 3.18, 3.17 en les injectant dans 3.8 on en déduit une expression de  ${}^tN$  :

$${}^tN = \frac{1}{m^2} ({}^t\Gamma_0 - m {}^t\Gamma_1 + m^2 {}^t\Gamma_2) - \frac{s}{m} ({}^t\Omega_0 - m {}^t\Omega_1 + m\Phi) + (-t + s^2)\Phi. \quad (3.21)$$

Si l'on compare avec l'équation 3.13 transposée, il vient avec 3.20 une contrainte entre  $t$  et  $s$  sur laquelle on va revenir dans la suite :

$$t\Phi = \frac{1}{2}(s^2 - s)\Phi - \frac{1}{m} \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \Phi. \quad (3.22)$$

Mais puisque les coefficients de  $\Phi$  ne sont pas nuls, ceci donne la contrainte entre  $s$  et  $t$  suivante :

$$t = \frac{1}{2}(s^2 - s) + \frac{1}{m} \left( \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \right). \quad (3.23)$$

En comparant alors les équations 3.9, 3.16, et 3.20, il apparait que ce dernier nombre est donné par la seule différences des seules premières expressions que l'on a calculées, l'une d'elles étant transposée :

$$r^{-1}(U_1 U_2^{-1}) - r^t(T_2 T_1^{-1}) = 2 \frac{1}{m} \left( \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \right) \Phi. \quad (3.24)$$

### 3.4. Structure des congruences

Ce que Riedel (p. 12) appelle isomorphisme, mais que l'on préfère appeler ici congruence (voir [15]), est la transformation de  $M(a_2, b_2, c_2)$  à  $M(a_1, b_1, c_1)$  donnée par une matrice  $N$  générale vérifiant l'égalité 2.10 issue de la proposition 1.2 de [19]:

$${}^t N M(a_2, b_2, c_2) N = M(a_1, b_1, c_1).$$

On peut dire que  $M(a_1, b_1, c_1)$  est dans l'orbite de  $M(a_2, b_2, c_2)$  pour l'action de la structure algébrique de matrices  $3 \times 3$  dans laquelle se trouve  $N$ ; ou encore que  $M(a_1, b_1, c_1)$  est congrue à  $M(a_2, b_2, c_2)$  modulo  $N$ . Et ce que Riedel (p. 13) appelle à ce niveau automorphisme est une matrice  $N$  du stabilisateur de  $M(a_1, b_1, c_1)$ , c'est à dire telle que

$${}^t N M(a_1, b_1, c_1) N = M(a_1, b_1, c_1).$$

Riedel parvient à donner une expression pour les matrices de congruences qui constituent son arbre dans le cas très limité où les deux triplets  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  définissent même valeur dominante  $m$ . Pour cela il introduit dans [19] (p. 12), en étendant l'anneau  $\mathbb{Z}$  à un corps plus vaste comme  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{R}$  (dans la suite Riedel se limite au corps  $\mathbb{Q}$ ), les matrices de forme suivante, où  $s$  dans ce corps :

$$N(s) = r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right) \tilde{N} - \frac{1}{m} \Gamma_1. \quad (3.25)$$

Il indique d'abord qu'une telle matrice s'écrit aussi

$$N(s) = r \tilde{N} \exp\left(-\frac{R_1}{2}s\right) - \frac{1}{m} \Gamma_1. \quad (3.26)$$

Or ce point n'est assuré que pourvu que l'on ait

$$\exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)\tilde{N} = \tilde{N}\exp\left(-\frac{R_1}{2}s\right),$$

ce qui découle simplement de

$$R_2\tilde{N} = \tilde{N}R_1.$$

Et l'on remarque que cette dernière condition est bien vérifiée car elle est se déduit de 3.4, complétée par les deux égalités qui se déduisent des relations vues entre  $R, H, S$ , notamment 2.33 qui donne ici :

$$R_1 = S_1^2 - 2S_1, \quad R_2 = S_2^2 - 2S_2.$$

### 3.4.1. Le résultat essentiel

Le résultat essentiel établi alors par Riedel dans [19] est le suivant :

**Proposition 3.1.** (*Proposition 3.1 de [19]*) *On a équivalence, pour  $Q \in SL(3, \mathbb{Q})$ , des deux propriétés suivantes:*

$${}^tQM_2Q = M_1, \tag{3.27}$$

$$\exists s \in \mathbb{Q} \text{ tel que } Q = N(s). \tag{3.28}$$

*Ajoutons que  $M_1$  et  $M_2$  étant donnés,  $Q$  vérifiant la condition 3.27 définit  $s$  de façon unique.*

Pour cela, Riedel rappelle que la condition 3.27 implique par ce qui précède la condition 2.34 :

$$Q^{-1}H_2Q = H_1.$$

Et puisque l'on a

$$S_2 = H_2 - 1, \quad S_1 = H_1 - 1,$$

ceci revient à considérer la condition

$$Q^{-1}S_2Q = S_1.$$

Or on a vu par ce qui précède que l'on a aussi 3.4 :

$$\tilde{N}^{-1}S_2\tilde{N} = S_1.$$

On en déduit que  $Q\tilde{N}^{-1}$  commute avec  $S_2$ , et donc s'écrit comme établi ci-dessus avec  $s$  et  $t$  nombres rationnels uniquement définis sous la forme (voir 3.5)

$$Q\tilde{N}^{-1} = r(1 + sS_2 + tS_2^2),$$

c'est à dire que l'on a bien comme l'annonce Riedel

$$Q = r(1 + sS_2 + tS_2^2)\tilde{N}.$$

On suppose dans le cas étudié  $Q \in SL(3, \mathbb{Q})$ , c'est à dire de déterminant égal à 1. Si tel n'était pas le cas il faudrait remplacer la formule précédente par  $Q = \pm r(1 + sS_2 + tS_2^2)\tilde{N}$ . On a, dans le cas ici étudié, une égalité 3.7, qui se vérifie par les mêmes méthodes que ci-dessus, et s'écrit maintenant grâce à 2.40 :

$${}^tQ = r {}^t(T_1^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tT_2 = r^{-1}U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ -t + s^2 & -s & 1 \end{pmatrix} U_2^{-1}.$$

On est donc en position pour utiliser les six expressions 3.9 à 3.19 que l'on a laborieusement calculées précédemment. On doit adapter les trois premières en utilisant  $\tilde{N} = T_2T_1^{-1}$  et la condition 2.35, puis en les transposant. Les trois dernières sont seulement divisées par la puissance adéquate de  $m$ . Pour résumer, il s'agit d'injecter dans la dernière égalité les relations suivantes :

$$r {}^t(T_1^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ({}^tT_2) = \frac{1}{m^2} ({}^t\Gamma_0) + \frac{1}{m} ({}^t\Gamma_1) + ({}^t\Gamma_2),$$

$$r(T_1^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ({}^tT_2) = \frac{1}{m} ({}^t\Omega_0) + ({}^t\Omega_1),$$

$$r(T_1^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ({}^tT_2) = \Phi,$$

$$r^{-1}U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_2^{-1} = \frac{1}{m^2}\Theta_0 + \frac{1}{m}\Theta_1 + \Theta_2,$$

$$r^{-1}U_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1} = \frac{1}{m}\Lambda_0 + \Lambda_1,$$

$$r^{-1}U_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1} = \Phi.$$

Ceci donne l'égalité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m^2}({}^t\Gamma_0) + \frac{1}{m}({}^t\Gamma_1) + ({}^t\Gamma_2) + \frac{s}{m}({}^t\Omega_0) + s({}^t\Omega_1) + t\Phi \\ &= \frac{1}{m^2}\Theta_0 + \frac{1}{m}\Theta_1 + \Theta_2 - \frac{s}{m}\Lambda_0 - s\Lambda_1 + (s^2 - t)\Phi. \end{aligned}$$

On simplifie alors en utilisant les expressions 3.14, 3.17, et le miracle se produit, miracle entrevu ci-dessus avec l'équation 3.22 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m}({}^t\Gamma_1) + \frac{s}{m}({}^t\Omega_0) + s({}^t\Omega_1) + t\Phi \\ &= \frac{1}{m}\Theta_1 - \frac{s}{m}(-{}^t\Omega_0 - m \begin{pmatrix} 0 & c_1b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1b_2 & 0 \end{pmatrix}) \\ & \quad - s(-{}^t\Omega_1 + \Phi + \begin{pmatrix} 0 & c_1b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1b_2 & 0 \end{pmatrix}) + (s^2 - t)\Phi \\ &= \frac{1}{m}\Theta_1 + \frac{s}{m}({}^t\Omega_0) + s \begin{pmatrix} 0 & c_1b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1b_2 & 0 \end{pmatrix} \\ & \quad + s({}^t\Omega_1) - s\Phi - s \begin{pmatrix} 0 & c_1b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1b_2 & 0 \end{pmatrix} + (s^2 - t)\Phi \\ &= \frac{1}{m}\Theta_1 + \frac{s}{m}({}^t\Omega_0) + s({}^t\Omega_1) - s\Phi + (s^2 - t)\Phi. \end{aligned}$$

C'est à dire avec 3.20 :

$$\left(\frac{2}{m} \left(\frac{1}{a_2c_2} - \frac{1}{a_1c_1}\right) + 2t - s^2 + s\right)\Phi = 0.$$

On obtient ainsi,  $\Phi$  n'étant pas nulle, l'expression donnée par Riedel [19] (p.13) qui est :

$$t = \frac{1}{2}(s^2 - s) - \frac{1}{m} \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) \quad (3.29)$$

Avec la partie  $t_0 = \frac{1}{2}(s^2 - s)$  de  $t$  il vient grâce aux relations que l'on a établies avant entre les matrices  $R$  et  $S$  :

$$\begin{aligned} (1 + sS_2 + t_0S_2^2) &= 1 + sS_2 + \frac{s^2 - s}{2}S_2^2 \\ &= 1 - s\frac{S_2^2 - 2S_2}{2} + \frac{s^2}{2}S_2^2 \\ &= 1 - s\frac{R_2}{2} + s^2\frac{R_2^2}{8} \\ &= \exp\left(-s\frac{R_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Et si l'on compare avec la proposition 2.2 de [19], que l'on a vérifiée ci-dessus, on a avec  $x = \frac{s}{2}$  la relation de commutation suivante :

$${}^t(\exp(-s\frac{R_2}{2}))M_2 \exp(-s\frac{R_2}{2}) = M_2.$$

La matrice  $\exp(-sR_2/2)$  est dans le stabilisateur de  $M_2$  et n'apporte donc rien sur le passage de  $M_2$  à  $M_1$ . Ce passage est assuré par le reste de l'expression trouvée pour  $t$ , c'est à dire par la contribution de  $t - t_0$ , qui donne une matrice s'écrivant avec 3.11 et 3.20

$$\begin{aligned} r(t - t_0)S_2^2\tilde{N} &= -\frac{r}{m} \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) S_2^2\tilde{N} \\ &= -\frac{1}{m} \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \right) {}^t\Phi \\ &= -\frac{1}{m}\Gamma_1. \end{aligned}$$

C'est le terme qui figure au second membre de  $N(s) = r \exp(-s\frac{R_2}{2})\tilde{N} - \frac{1}{m}\Gamma_1$ . On a donc en résumé trouvé  $s \in \mathbb{Q}$  tel que  $Q = N(s)$ , et cette expression établit l'implication 3.27  $\implies$  3.28 la proposition 3.1 de [19].

Le raisonnement en sens inverse pour l'implication 3.28  $\implies$  3.27 de la proposition 3.1 de [19] est plus délicat, mais envisageable du fait des égalités matricielles



obtenues précédemment (2.31, 2.32, 2.33, 2.27). On en déduit facilement les égalités

$$\begin{aligned} {}^t(S_2^2)M_2 &= \frac{1}{4} {}^t(R_2^2)M_2 = \frac{1}{4}M_2R_2^2 = M_2S_2^2, \\ {}^t(S_2)M_2 &= -\frac{1}{2} {}^t(R_2)M_2 + \frac{1}{8} {}^t(R_2^2)M_2 = \frac{1}{2}M_2R_2 + \frac{1}{8}M_2R_2^2 = M_2S_2^2 - M_2S_2. \end{aligned}$$

On peut donc calculer

$$\begin{aligned} & {}^tQM_2Q \\ &= {}^t\left(r \exp\left(-s\frac{R_2}{2}\right)\tilde{N} - \frac{1}{m}\Gamma_1\right)M_2\left(r \exp\left(-s\frac{R_2}{2}\right)\tilde{N} - \frac{1}{m}\Gamma_1\right) \\ &= r^2 {}^t\tilde{N} {}^t(1 + sS_2 + tS_2^2)M_2(1 + sS_2 + tS_2^2)\tilde{N} \\ &= r^2 {}^t\tilde{N}(M_2 + s(M_2S_2^2 - M_2S_2) + tM_2S_2^2)(1 + sS_2 + tS_2^2)\tilde{N} \\ &= r^2 {}^t\tilde{N}(M_2 + s(M_2S_2^2 - M_2S_2) + tM_2S_2^2 + sM_2S_2 - s^2M_2S_2^2 + tM_2S_2^2)\tilde{N} \\ &= r^2 {}^t\tilde{N}M_2(1 + (s - s^2 + 2t)S_2^2)\tilde{N} \\ &= r^2 {}^t\tilde{N}M_2\tilde{N} + r^2(s - s^2 + 2t){}^t\tilde{N}M_2S_2^2\tilde{N} \\ &= r^2 {}^t\tilde{N}M_2\tilde{N} - r^2\frac{2}{m}\left(\frac{1}{a_2c_2} - \frac{1}{a_1c_1}\right){}^t\tilde{N}M_2S_2^2\tilde{N}. \end{aligned}$$

Il reste à s'assurer que cette expression donne  $M_1$ . Or en remarquant que tout ce que l'on vient de dire pour  $Q \in SL(3, \mathbb{Q})$  s'applique en particulier à la matrice  $Q = N \in SL(3, \mathbb{Z})$ , qui permet aussi le passage par congruence de  $M_2$  à  $M_1$ , et qui existe par la proposition 1, cette conclusion est évidente. En effet la dernière suite d'égalités déduites de  ${}^tQM_2Q$  donne une dernière expression qui est la même que celle qui se déduit par le même calcul de  ${}^tNM_2N$ . Or cette dernière matrice vaut  $M_1$ . On a donc bien  ${}^tQM_2Q = M_1$ , et la proposition 3.1 de [19] est vraie. L'unicité de  $s$  associée à  $Q$  mentionnée dans cette proposition a été établie dans le courant de sa démonstration.

### 3.5. Généralisation à tous les triplets de l'arbre de Riedel

On va voir maintenant que les calculs de Riedel que l'on vient d'évoquer peuvent être considérablement généralisés et simplifiés.

#### 3.5.1. Une formule valable pour l'ensemble des triplets

Dans le cas où les deux triplets  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  ne définissent plus une même valeur dominante  $m$ , on peut ainsi transposer certain des résultats de [19]

en modifiant d'abord quelques définitions. En partant de  ${}^tQM_2Q = M_1$  on peut encore déduire, avec  $H_1 = 1 + S_1 = (M_1^{-1})({}^tM_1)$  et l'analogie pour  $H_2$ , que l'on a  $Q^{-1}S_2Q = S_1$ . On remarque également avec  $\tilde{N} = T_2T_1^{-1}$  ainsi que 2.35 appliquée à  $S_1$  et  $S_2$  que l'on a  $\tilde{N}^{-1}S_2\tilde{N} = S_1$ . A nouveau  $Q\tilde{N}^{-1}$  commute avec  $S_2$ , et s'écrit donc avec trois paramètres  $r, s, t$ , uniquement définis sous la forme

$$Q\tilde{N}^{-1} = r(1 + sS_2 + tS_2^2).$$

Le déterminant de la matrice  $Q$  étant alors égal à celui de  $r\tilde{N}$ , et valant par construction 1 si l'on se limite à l'hypothèse  $Q \in SL(3, \mathbb{Q})$ , on doit poser de façon générale :

$$r = \frac{a_1c_1(a_1c_1 - b_1)}{a_2c_2(a_2c_2 - b_2)}. \quad (3.30)$$

La matrice  $Q$  s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} Q &= r(1 + sS_2 + tS_2^2)\tilde{N} \\ &= r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)\tilde{N} + r\left(t - \frac{1}{2}(s^2 - s)\right)S_2^2\tilde{N} \\ &= r\tilde{N} \exp\left(-\frac{R_1}{2}s\right) + r\left(t - \frac{1}{2}(s^2 - s)\right)\tilde{N}S_1^2. \end{aligned}$$

On peut maintenant calculer  $rS_2^2\tilde{N}$ , avec l'expression de  $S_2$  qui a mené à 2.33 et 2.35. En fait c'est très facile et donne :

$$\begin{aligned} rS_2^2\tilde{N} &= rS_2^2T_2T_1^{-1} = rT_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_1^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} c_2 \\ -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} (c_1 \quad m_1 \quad a_1). \end{aligned}$$

On note encore  ${}^t\Phi$  cette matrice, avec une définition qui généralise ici celle de Riedel ([19] p. 11) :

$${}^t\Phi = \begin{pmatrix} c_2c_1 & c_2m_1 & c_2a_1 \\ -b_2c_1 & -b_2m_1 & -b_2a_1 \\ a_2c_1 & a_2m_1 & a_2a_1 \end{pmatrix} = rS_2^2\tilde{N} \quad (3.31)$$

Et il reste seulement, en utilisant l'expression de  $Q$  que l'on vient de voir :

$$Q = r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)\tilde{N} + \left(t - \frac{1}{2}(s^2 - s)\right){}^t\Phi. \quad (3.32)$$

On peut maintenant injecter l'expression de  $Q$  trouvée dans l'égalité  ${}^tQM_2Q = M_1$ . Compte tenu que toutes les expressions des matrices intervenant sont connues, on cherche à en déduire une éventuelle contrainte sur les paramètres  $r, s, t$ . Or en développant le produit  ${}^tQM_2Q$ , et en utilisant 2.27, compte tenu du fait que  $S_2 = \frac{1}{8}R_2^2 - \frac{1}{2}R_2$ , on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} M_1 &= {}^tQM_2Q \\ &= r^2 {}^t\tilde{N}(1 + s^tS_2 + t^tS_2^2)M_2(1 + sS_2 + tS_2^2)\tilde{N} \\ &= r^2 {}^t\tilde{N}\left(1 + s\left(-\frac{tR_2}{2} + \frac{tR_2^2}{8}\right) + t\frac{tR_2^2}{4}\right)M_2\left(1 + s\left(-\frac{R_2}{2} + \frac{R_2^2}{8}\right) + t\frac{R_2^2}{4}\right)\tilde{N} \\ &= r^2({}^t\tilde{N}M_2\tilde{N}) - \frac{r^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}(s^2 - s)\right)({}^t\tilde{N}({}^tR_2M_2R_2)\tilde{N}). \end{aligned}$$

On en déduit avec l'expression de  $\tilde{N}$ , en séparant par les indices les matrices :

$$r^2({}^tT_2M_2T_2) - \frac{r^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}(s^2 - s)\right)({}^tT_2({}^tR_2M_2R_2)T_2) = ({}^tT_1M_1T_1). \quad (3.33)$$

Mais par la proposition 1.2 de [19] qui a été redémontrée ci-dessus dans le cas général, on sait construire une matrice  $N \in SL(3, \mathbb{Z})$  vérifiant l'équation 2.10, c'est à dire  ${}^tNM_2N = M_1$ . On peut donc aussi lui appliquer le raisonnement que l'on vient de faire pour écrire avec deux paramètres  $s_N, t_N$ , définis de façon unique :

$$N = r(1 + s_N S_2 + t_N S_2^2)\tilde{N}, \quad (3.34)$$

c'est à dire aussi :

$$N = r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s_N\right)\tilde{N} + r\left(t_N - \frac{1}{2}(s_N^2 - s_N)\right){}^t\Phi.$$

On trouve maintenant avec les deux paramètres  $s_N$  et  $t_N$  :

$$M_1 = {}^tNM_2N = r^2({}^t\tilde{N}M_2\tilde{N}) - \frac{r^2}{2}\left(t_N - \frac{1}{2}(s_N^2 - s_N)\right)({}^t\tilde{N}({}^tR_2M_2R_2)\tilde{N}).$$

On déduit de cette dernière expression, en explicitant  $\tilde{N}$ , l'égalité

$$r^2({}^tT_2M_2T_2) - \frac{r^2}{2}\left(t_N - \frac{1}{2}(s_N^2 - s_N)\right)({}^tT_2({}^tR_2M_2R_2)T_2) = ({}^tT_1M_1T_1). \quad (3.35)$$

Si l'on pose

$$\lambda = \left(t_N - \frac{1}{2}(s_N^2 - s_N)\right) \quad (3.36)$$

nombre uniquement défini à partir de  $N$ , il en résulte par différence de 3.33 et 3.35 l'égalité matricielle :

$$\frac{r^2}{2}(\lambda - (t - \frac{1}{2}(s^2 - s)))({}^tT_2({}^tR_2M_2R_2)T_2) = 0.$$

Disposant d'expressions pour toutes les matrices qui interviennent dans cette égalité, on peut facilement confirmer que  ${}^tT_2({}^tR_2M_2R_2)T_2 \neq 0$ . Ceci est d'ailleurs équivalent, puisque  $T_2$  est inversible et que  ${}^tR_2M_2 + M_2R_2 = 0$ , à vérifier que  $M_2R_2^2 \neq 0$ . Or la condition  $M_2R_2^2 = 0$  donnerait avec  $M_2 \in SL(3, \mathbb{Z})$  la condition  $R_2^2 = 0$ , c'est à dire aussi  $R_2 + 2S_2 = 0$ . Et les expressions des matrices  $R_2$  et  $S_2$  montrent que cette égalité ne peut avoir lieu. Comme  $r$  n'est pas non plus nul, ceci donne une contrainte liant  $t$  à  $s$  qui est la suivante :

$$(t - \frac{1}{2}(s^2 - s)) = \lambda. \quad (3.37)$$

Inversement, lorsque cette contrainte est vérifiée, on voit que le raisonnement précédent marche dans l'autre sens pour donner  $M_1 = {}^tQM_2Q$ . On a donc obtenu une équivalence que l'on peut formuler comme dans [19], mais qui est beaucoup plus générale que celle donnée par Riedel:

**Proposition 3.2.** *Si  $M_1 = M(a_1, b_1, c_1)$  et  $M_2 = M(a_2, b_2, c_2)$  sont deux matrices de l'arbre de Riedel reliées par une matrice  $N \in SL(3, \mathbb{Z})$  vérifiant l'équation 2.10  ${}^tNM_2N = M_1$  et définissant comme indiqué ci-dessus le nombre  $\lambda$  et la matrice  ${}^t\Phi$ , on a équivalence pour toute matrice  $Q \in SL(3, \mathbb{Q})$  des deux conditions suivantes :*

$$1/ {}^tQM_2Q = M_1$$

2/ Il existe un paramètre  $s$  tel que l'on puisse écrire

$$Q = r \exp(-\frac{R_2}{2}s)\tilde{N} + \lambda {}^t\Phi.$$

### 3.5.2. Une formule encore plus générale

Dans le cas qu'il envisage, Riedel donne l'expression du nombre  $\lambda$  (voir [19] page 13, ou ci-dessus dans le présent document 3.29) :

$$\lambda = -\frac{1}{m} \left( \frac{1}{a_2c_2} - \frac{1}{a_1c_1} \right).$$

On veut maintenant donner l'expression de  $\lambda$  dans les cas plus généraux que l'on considère ici. Pour cela il suffit de procéder comme dans [19] en considérant deux expressions adéquates de  ${}^tN$ . D'abord l'égalité 3.5 donne ici, avec les deux paramètres  $s_N$  et  $t_N$  :

$$N^{-1} = r^{-1} \tilde{N}^{-1}(1 - s_N S_2 + (-t_N + s_N^2) S_2^2),$$

$${}^tN = r({}^t\tilde{N})(1 + s_N {}^tS_2 + t_N {}^tS_2^2).$$

Ensuite avec  ${}^tN M_2 N = M_1$  on obtient  ${}^tN = M_1 N^{-1} M_2^{-1}$ , et on retrouve 3.8 avec l'expression de  $N^{-1}$  que l'on vient de rappeler, c'est à dire la seconde expression nécessaire pour  ${}^tN$  :

$$\begin{aligned} {}^tN &= r^{-1} M_1 \tilde{N}^{-1}(1 - s_N S_2 + (-t_N + s_N^2) S_2^2) M_2^{-1} \\ &= r^{-1} (M_1 \tilde{N}^{-1} M_2^{-1})(1 + s_N ({}^tS_2) + (-t_N + s_N^2 - s_N) {}^tS_2^2). \end{aligned}$$

On peut comme avant calculer les deux expressions de  ${}^tN$ , en explicitant les trois matrices qui les composent, puis les comparer. Mais on peut aussi éviter ce calcul très lourd en déduisant de la dernière expression

$${}^tN^{-1} = r(1 - s_N ({}^tS_2) + (t_N + s_N) {}^tS_2^2) M_2 \tilde{N} M_1^{-1},$$

et multipliant avec l'autre expression donnée pour  ${}^tN$ . Ceci donne

$$1 = r({}^t\tilde{N})(1 + s_N {}^tS_2 + t_N {}^tS_2^2) r(1 - s_N ({}^tS_2) + (t_N + s_N) {}^tS_2^2) M_2 \tilde{N} M_1^{-1},$$

c'est à dire

$${}^t\tilde{N}^{-1} M_1 \tilde{N}^{-1} M_2^{-1} = r^2(1 + (2t_N + s_N - s_N^2) {}^tS_2^2),$$

ou plus simplement, en multipliant à gauche par  ${}^t\tilde{N}$  et puisque l'on a vu ci-dessus que  $r S_2^2 \tilde{N} = {}^t\Phi$ , la condition

$$r^{-1}(U_1 U_2^{-1}) = r({}^tT_1^{-1} {}^tT_2) + 2(t_N - \frac{s_N^2 - s_N}{2}) \Phi = r({}^tT_1^{-1} {}^tT_2) + 2\lambda \Phi. \quad (3.38)$$

Il suffit alors de calculer  $r^{-1}(U_1 U_2^{-1}) - r({}^tT_1^{-1} {}^tT_2)$  pour obtenir le nombre  $(2t_N + s_N - s_N^2) = 2\lambda$ . On peut le faire par un calcul direct, en procédant comme dans [19] avec passage par des produits de matrices intermédiaires (comparer aux calculs faits pour parvenir à 3.24). Par cette méthode, on a pour la première expression :

$$r m_1 m_2 (T_2 T_1^{-1}) = \frac{a_1 c_1}{a_2 c_2} A_2 B_2 C_2 D_2 D_1^{-1} C_1^{-1} B_1^{-1} F_1 K_1 L_1,$$

$$\frac{a_1 c_1}{a_2 c_2} B_2 C_2 D_2 D_1^{-1} C_1^{-1} B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{1}{a_1 c_1} \frac{m_2}{m_1} & 0 & \frac{m_2}{m_1} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & c_2 m_2 - a_2 & c_2 \\ 1 & -c_2^2 & -b_2 \\ 0 & c_2 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$F_1 K_1 L_1 = \begin{pmatrix} c_1 m_1 & m_1^2 & a_1 m_1 \\ a_1 & 0 & -c_1 \\ -c_1 & 0 & -a_1 + c_1 m_1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit et en transposant, ceci donne la généralisation de 3.9

$$r m_1 m_2 ({}^t T_1^{-1} {}^t T_2) = {}^t \Gamma_0 + \left( \frac{m_1}{a_2 c_2} - \frac{m_2}{a_1 c_1} \right) \Phi + m_1^2 {}^t \Gamma_2, \quad (3.39)$$

où il faut poser ici de façon très générale

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} -(a_1 a_2 + c_1 c_2 \frac{m_2}{m_1}) + m_2 a_1 c_2 & 0 & -(\frac{m_2}{m_1} a_1 c_2 - c_1 a_2) \\ -a_1 c_2^2 + b_2 c_1 \frac{m_2}{m_1} + c_1 m_1 & 0 & c_1 c_2^2 - \frac{m_2}{m_1} b_2 (-a_1 + c_1 m_1) + a_1 m_1 \\ (a_1 c_2 - a_2 c_1 \frac{m_2}{m_1}) & 0 & -(\frac{m_2}{m_1} a_1 a_2 + c_1 c_2) + m_2 c_1 a_2 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Pour la seconde expression :

$$r^{-1} m_1 m_2 (U_1 U_2^{-1}) = \frac{a_2 c_2}{a_1 c_1} m_2^2 V_1 B_1 C_1 D_1 D_2^{-1} C_2^{-1} B_2^{-1} V_2^{-1},$$

$$\frac{a_2 c_2}{a_1 c_1} B_1 C_1 D_1 D_2^{-1} C_2^{-1} B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_2 c_2} \frac{m_1}{m_2} & 0 & \frac{m_1}{m_2} \end{pmatrix},$$

$$m_2^2 V_2^{-1} = \begin{pmatrix} c_2 m_2 & -b_2 m_2 & a_2 m_2 \\ a_2 & -a_2^2 & a_2 m_2 - c_2 \\ -c_2 & a_2 c_2 & -a_2 \end{pmatrix},$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -a_1 & c_1 \\ 1 & 0 & m_1 \\ 0 & c_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

En faisant le produit de ces trois matrices, on trouve pour  $r^{-1}m_1m_2(U_1U_2^{-1})$  l'expression suivante:

$${}^t\Gamma_0 - \frac{(a_1m_2c_1m_1^2 - a_2m_1c_2m_2^2 - a_1a_2c_1c_2m_1^2 + a_1a_2c_1c_2m_2^2)}{m_2m_1a_2a_1c_1c_2}\Phi + m_1^2 {}^t\Gamma_2. \quad (3.42)$$

Et par différence de 3.42 et 3.39, en utilisant également 3.38 :

$$\begin{aligned} 2\lambda m_1m_2\Phi &= r^{-1}m_1m_2(U_1U_2^{-1}) - rm_1m_2({}^tT_1^{-1} {}^tT_2) \\ &= -\left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} + 2\left(\frac{m_1}{a_2c_2} - \frac{m_2}{a_1c_1}\right)\right)\Phi. \end{aligned}$$

Sachant que  $\Phi$  n'est pas la matrice nulle, on en déduit l'expression qui généralise à tous les cas celle donnée par Riedel dans [19] :

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2}\right) + \left(\frac{1}{a_1c_1m_1} - \frac{1}{a_2c_2m_2}\right). \quad (3.43)$$

Cette valeur étant injectée dans l'expression 3.32 de  $Q$ , et la définition convenable donnée précédemment pour  ${}^t\Phi$  étant utilisée, on obtient ainsi la formule à adopter de façon générale pour  $Q = N(s)$  :

$$N(s) = r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)\tilde{N} + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2}\right) + \frac{1}{a_1c_1m_1} - \frac{1}{a_2c_2m_2}\right){}^t\Phi. \quad (3.44)$$

Remarquons qu'avec  $Q = r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)\tilde{N} + \lambda {}^t\Phi$  et  $N = r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s_N\right)\tilde{N} + \lambda {}^t\Phi$ , on est conduit à considérer le produit

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{R_2}{2}(s - s_N)\right)N &= r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)\tilde{N} + \lambda \exp\left(-\frac{R_2}{2}(s - s_N)\right){}^t\Phi \\ &= r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)\tilde{N} + \lambda r \exp\left(-\frac{R_2}{2}(s - s_N)\right)S_2^2\tilde{N} \\ &= r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)\tilde{N} + \lambda r S_2^2N \\ &= r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)\tilde{N} + \lambda {}^t\Phi = Q. \end{aligned}$$

Ceci donne une expression beaucoup plus simple pour  $Q$  que celle apparaissant dans notre dernière proposition :

**Proposition 3.3.** Avec une matrice  $N \in SL(3, \mathbb{Z})$  telle qu'introduite avant, vérifiant  ${}^tNM_2N = M_1$  et définissant de façon unique  $s_N$ , on a équivalence pour toute matrice  $Q \in SL(3, \mathbb{Q})$  des deux conditions suivantes :

1/ On a  ${}^tQM_2Q = M_1$ .

2/ Il existe un paramètre  $s$  uniquement défini tel que l'on puisse écrire :

$$Q = \exp\left(-\frac{R_2}{2}(s - s_N)\right)N. \quad (3.45)$$

En particulier si deux matrices  $Q_1, Q_2 \in SL(3, \mathbb{Q})$  vérifient la condition 1/, il existe un paramètre  $s_{1,2} = s_2 - s_1$  tel que l'on ait  $Q_2 = \exp\left(-\frac{R_2}{2}(s_{1,2})\right)Q_1$ . D'autre part, si  $M_1 = M_2$  le stabilisateur de  $M_2$  composé des matrices  $Q \in SL(3, \mathbb{Q})$  telles que  ${}^tQM_2Q = M_2$ , contient une infinité de matrices de forme  $\exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)$  au delà de la matrice identique  $N = 1_3$  correspondant à  $s_N = 0$ , et de  $N = H$  correspondant à  $s_N = 1$ .

Pour le cas  $M_1 = M_2$ , on a  $a_1 = a_2$  et  $c_1 = c_2$ . De sorte qu'il vient dans le calcul fait pour la proposition 6 la condition  $t = t_0 = \frac{1}{2}(s^2 - s)$ . Et puisque l'on a aussi  $r = 1$  et  $\tilde{N} = 1$ , grâce à 3.1 et 3.2, il reste seulement avec  $R_1 = R_2$ :

$$Q = \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right).$$

Cette expression est différente de celle fournie dans [19] (p. 13 Remark (a)) sans que ceci ait la moindre importance puisque l'on a déjà vu ci-dessus ce que l'on pouvait dire de telles expressions. En fait on peut vérifier de façon directe que pour la matrice identique  $N = 1_3$  on a  $s_N = 0$ . Pour  $s = 1$  on retrouve pour  $Q$  avec notre dernière égalité la matrice  $H$  dont on a donné l'expression en 2.30. Le fait que le stabilisateur de  $M_2$  dans  $SL(3, \mathbb{Q})$  contienne une infinité de matrices au delà de  $1_3$  et  $H$  en résulte de façon évidente.

### 3.5.3. Les formules les plus générales à considérer

Il est surprenant, arrivé à ce niveau de généralité qui dépasse de beaucoup celui de [19], que l'on n'ait rien su encore dire sur le calcul des valeurs  $s$  et  $s_N$ . En fait, à regarder de près les calculs que l'on vient de faire, on peut reconsidérer l'équation 3.39 que l'on transpose maintenant sous la forme :

$$r\tilde{N} = rT_2T_1^{-1} = \frac{1}{m_1m_2}(\Gamma_0 + m_1^2 \Gamma_2) + \left(\frac{1}{a_2c_2m_2} - \frac{1}{a_1c_1m_1}\right)^t \Phi.$$



Elle donne, en utilisant également 3.43 et en comparant à 3.44 pour  $s = 0$  :

$$N(0) = r\tilde{N} + \lambda {}^t\Phi = \frac{1}{m_1 m_2} (\Gamma_0 + m_1^2 \Gamma_2) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) {}^t\Phi. \quad (3.46)$$

Compte tenu des expressions données ci-dessus pour  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_2$  à partir de 3.39, la matrice  $N(0) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) {}^t\Phi$  vaut :

$$\frac{1}{m_1 m_2} \begin{pmatrix} -(a_1 a_2 + c_1 c_2 \frac{m_2}{m_1}) + m_2 a_1 c_2 & 0 & -(\frac{m_2}{m_1} a_1 c_2 - c_1 a_2) \\ -a_1 c_2^2 + b_2 c_1 \frac{m_2}{m_1} + c_1 m_1 & m_1^2 & c_1 c_2^2 - \frac{m_2}{m_1} b_2 (-a_1 + c_1 m_1) + a_1 m_1 \\ (a_1 c_2 - a_2 c_1 \frac{m_2}{m_1}) & 0 & -(\frac{m_2}{m_1} a_1 a_2 + c_1 c_2) + m_2 a_2 c_1 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Par construction, et ceci peut se vérifier par un calcul assez fastidieux, le déterminant de la matrice  $N(0)$  vaut 1, elle se trouve donc dans  $SL(3, \mathbb{R})$ . Connaissant  $N(0)$ ,  ${}^t\Phi$ ,  $\lambda$ ,  $r$ , on peut en déduire aussi l'expression de  $\tilde{N}$ , puis celle de  $rS_2\tilde{N} = S_2N(0)$  qui donne si  $m_1 = m_2$  à un facteur près la matrice  $\Omega_0 + m\Omega_1$  qui apparaissait dans l'équation 3.10. Remarquons en passant que l'introduction des deux matrices  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  semble ne rien apporter dans l'article [19], de sorte que l'on se dit que l'auteur aurait pu poser plus simplement  $m\Omega_0 = S_2\Gamma_0$  et  $\Omega_1 = S_2\Gamma_2$ . Cependant à y regarder de près, Riedel fait son découpage particulier pour se mettre en situation ultérieure de pouvoir appliquer ses lemmes 3.2, 3.3 et surtout 3.10. On revient plus loin les expressions générales à retenir pour les matrices  $\Omega$ . Avant cela, en comparant les équations 3.44 et 3.46, on voit que l'on peut écrire :

$$Q = N(s) = \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)N(0) = \left(1 + sS_2 + \frac{s^2 - s}{2}S_2^2\right)N(0). \quad (3.48)$$

Cette égalité multipliée à gauche par  $S_2$  permet le calcul effectif du paramètre  $s$  correspondant à la matrice  $Q$ , en donnant avec 3.46 et 3.31:

$$\begin{aligned} S_2^2 Q &= S_2^2 N(0) = S_2^2 \left( N(0) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) {}^t\Phi \right) = r S_2^2 \tilde{N} = {}^t\Phi, \\ S_2(Q - N(0)) &= s S_2^2 N(0) = s {}^t\Phi, \\ S_2 \left( Q - \left( N(0) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) {}^t\Phi \right) \right) &= s \begin{pmatrix} c_1 c_2 & c_2 m_1 & a_1 c_2 \\ -c_1 b_2 & -b_2 m_1 & -a_1 b_2 \\ c_1 a_2 & a_2 m_1 & a_1 a_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Les termes de la dernière matrice ne sont pas nuls, ils permettent donc de calculer l'unique valeur  $s$  correspondant à  $Q$  à partir de son expression et de celle donnée

par 3.47. Remarquons que les coefficients de  $N(0)$ , comme ceux de  ${}^t\Phi$  et  $S_2$  sont rationnels. Si les coefficients de  $Q$  sont entiers ou rationnels, alors le nombre  $s$  correspondant est rationnel. Le nombre  $s_N$  qui correspond à  $N \in SL(3, \mathbb{Z})$  se déduit de même des coefficients de la matrice  $S_2(N - N(0))$  qui est d'ailleurs aussi à coefficients rationnels. Il est évident à partir de là que  $s_N$  est lui-même un nombre rationnel, et que  $t_N$  s'en déduit. Observons que rien n'impose que la matrice  $N(0)$  ait ses coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , donc a fortiori cette matrice est-elle différente de  $N \in SL(3, \mathbb{Z})$ . Il en résulte en particulier que le nombre  $s_N$  qui correspond à  $N$  ne peut pas être nul, et d'ailleurs aussi que  $N(0)$  a un déterminant non nul. Remarquons aussi que 3.48 peut être complétée par une autre expression, facile à établir avec la définition de  ${}^t\Phi$  :

$$N(s) = N(0) \exp\left(-\frac{R_1}{2}s\right) = N(0)\left(1 + sS_1 + \frac{s^2 - s}{2}S_1^2\right).$$

On pourrait donc aussi calculer  $s$  à partir de  $N(0)S_1^2$ . En résumé, on peut énoncer en améliorant notre dernière proposition, et ceci donne les deux formules les plus générales à considérer :

**Proposition 3.4.** *La matrice  $N(0)$  ayant été introduite avant, on a équivalence pour toute matrice  $Q \in SL(3, \mathbb{Q})$  des deux conditions suivantes :*

1/ On a  ${}^tQM_2Q = M_1$ .

2/ Il existe un paramètre  $s$  uniquement défini tel que l'on puisse écrire 3.48 :

$$Q = \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)N(0),$$

ou de façon équivalente

$$Q = N(0) \exp\left(-\frac{R_1}{2}s\right).$$

### 3.5.4. Compléments et formulaire général

La forme donnée à  $Q$  dans 3.48 peut s'écrire, avec les expressions vues en 3.46, et le fait que  $S_2({}^t\Phi) = 0$ , sous la forme :

$$\begin{aligned} Q &= N(s) = \left[ \frac{1}{m_1m_2}(\Gamma_0 + m_1^2 \Gamma_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2}\right){}^t\Phi \right] + sS_2 \left[ r\tilde{N} \right] + \frac{s^2 - s}{2} [{}^t\Phi] \\ &= \frac{1}{m_1m_2}(\Gamma_0 + m_1\left(\frac{1}{a_2c_2} - \frac{m_2}{a_1c_1m_1}\right){}^t\Phi + m_1^2 \Gamma_2) + srS_2\tilde{N} + t [{}^t\Phi]. \end{aligned}$$

Ceci conduit à poser de façon générale pour retrouver 3.13 :

$$\Gamma_1 = \left( \frac{1}{a_2 c_2} - \frac{m_2}{a_1 c_1 m_1} \right)^t \Phi, \quad (3.50)$$

$$r m_1 S_2 \tilde{N} = \Omega_0 + m_1 \Omega_1. \quad (3.51)$$

D'où, avec 3.46

$$S_2 N(0) = r S_2 \tilde{N} = \frac{1}{m_1} (\Omega_0 + m_1 \Omega_1) = \frac{1}{m_1 m_2} S_2 (\Gamma_0 + m_1^2 \Gamma_2), \quad (3.52)$$

ainsi que l'équivalent de l'égalité 3.13 :

$$N(s) = \frac{1}{m_1 m_2} (\Gamma_0 + m_1 \Gamma_1 + m_1^2 \Gamma_2) + \frac{s}{m_1} (\Omega_0 + m_1 \Omega_1) + t({}^t \Phi). \quad (3.53)$$

Le lien entre les valeurs  $s$  et  $t$  qui apparaissent dans cette dernière équation provient de la combinaison des expressions 3.37 et 3.43, et peut être comparé à 3.23 qu'elle redonne avec  $m_1 = m_2 = m$  :

$$t = \frac{1}{2}(s^2 - s) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) + \left( \frac{1}{a_1 c_1 m_1} - \frac{1}{a_2 c_2 m_2} \right). \quad (3.54)$$

En particulier si  $s = 0$ , l'expression 3.53 redonne bien 3.46 grâce à 3.50. On peut compléter par :

$$m_1 {}^t \Phi = r m_1 S_2^2 \tilde{N} = S_2 (\Omega_0 + m_1 \Omega_1) = m_1 S_2^2 N(0) = m_1 S_2^2 N(s) = m_1 S_2^2 Q, \quad (3.55)$$

$$S_2 Q = S_2 N(s) = \frac{1}{m_1 m_2} S_2 (\Gamma_0 + m_1^2 \Gamma_2) + s {}^t \Phi = S_2 N(0) + s {}^t \Phi.$$

Cette dernière égalité s'écrit simplement :

$$S_2 N(s) = \frac{1}{m_1} (\Omega_0 + m_1 \Omega_1) + s {}^t \Phi. \quad (3.56)$$

On a vu au début du présent paragraphe que l'on avait  $Q \tilde{N}^{-1} = r(1 + s S_2 + t S_2^2)$ , ce qui donne en multipliant à gauche par  $S_2$  et simplifiant :

$$S_2 N(s) \tilde{N}^{-1} = (r S_2) + s(r S_2^2), \quad (3.57)$$

puis en multipliant à droite par  $\tilde{N}$  :

$$S_2 N(s) = r S_2 \tilde{N} + s(r S_2^2 \tilde{N}) = r S_2 \tilde{N} + s {}^t \Phi,$$

c'est à dire aussi en comparant à l'égalité 3.56 obtenue avant, une autre forme de 3.52 :

$$\frac{1}{m_1}(\Omega_0 + m_1\Omega_1) = rS_2\tilde{N} = S_2N(0). \quad (3.58)$$

En refaisant les calculs qui ont mené à 3.10, ou en calculant  $S_2N(0)$ , on obtient l'expression :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_1}(\Omega_0 + m_1\Omega_1) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_1c_2m_2+m_1c_1(-a_2+m_2c_2)}{m_1m_2} & \frac{m_1(-a_2+m_2c_2)}{m_2} & \frac{m_1a_1(-a_2+m_2c_2)-m_2c_1c_2}{m_1m_2} \\ -\frac{b_2a_1}{m_1} - \frac{c_1c_2^2}{m_2} & -\frac{m_1c_2^2}{m_2} & \frac{b_2c_1}{m_1} - \frac{a_1c_2^2}{m_2} \\ \frac{a_1a_2}{m_1} + \frac{c_1c_2}{m_2} & \frac{m_1c_2}{m_2} & \frac{a_1c_2}{m_2} - \frac{a_2c_1}{m_1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et pour ses composantes :

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} a_1c_2 - \frac{m_1}{m_2}c_1a_2 & 0 & -c_1c_2 - \frac{m_1}{m_2}a_1a_2 \\ -a_2c_2a_1 - \frac{m_1}{m_2}c_1c_2^2 & 0 & a_2c_2c_1 - \frac{m_1}{m_2}a_1c_2^2 \\ a_1a_2 + \frac{m_1}{m_2}c_1c_2 & 0 & a_1c_2\frac{m_1}{m_2} - a_2c_1 \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} c_1c_2 & \frac{m_1}{m_2}(m_2c_2 - a_2) & a_1c_2 \\ a_1\frac{m_2}{m_1} & -\frac{m_1}{m_2}c_2^2 & -c_1\frac{m_2}{m_1} \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

On dispose donc pour le cas général de l'équivalent de toutes les expressions introduites par N. Riedel dans [19]. Les matrices  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_2$  ont été définies de leur côté par les relations respectives 3.40, 3.41 :

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} -(a_1a_2 + c_1c_2\frac{m_2}{m_1}) + m_2a_1c_2 & 0 & -(\frac{m_2}{m_1}a_1c_2 - c_1a_2) \\ -a_1c_2^2 + b_2c_1\frac{m_2}{m_1} + c_1m_1 & 0 & c_1c_2^2 - \frac{m_2}{m_1}b_2(-a_1 + c_1m_1) + a_1m_1 \\ (a_1c_2 - a_2c_1\frac{m_2}{m_1}) & 0 & -(\frac{m_2}{m_1}a_1a_2 + c_1c_2) + m_2c_1a_2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci donne l'expression suivante :

$$\frac{1}{m_1m_2}(\Gamma_0 + m_1^2\Gamma_2) = \begin{pmatrix} -\frac{a_1a_2}{m_1m_2} - \frac{c_1c_2}{m_1^2} + \frac{a_1c_2}{m_1} & 0 & -\frac{a_1c_2}{m_1^2} + \frac{c_1a_2}{m_1m_2} \\ -\frac{a_1c_2^2}{m_1m_2} + \frac{b_2c_1}{m_1^2} + \frac{c_1}{m_2} & \frac{m_1}{m_2} & \frac{c_1c_2^2}{m_1m_2} + \frac{b_2a_1}{m_1^2} - \frac{b_2c_1}{m_1} + \frac{a_1}{m_2} \\ \frac{a_1c_2}{m_1m_2} - \frac{a_2c_1}{m_1^2} & 0 & -\frac{a_1a_2}{m_1^2} - \frac{c_1c_2}{m_1m_2} + \frac{c_1a_2}{m_1} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

La matrice  $\Gamma_1$  est liée à  ${}^t\Phi$  par 3.50, et  ${}^t\Phi$  est donnée par 3.31 :

$${}^t\Phi = \begin{pmatrix} c_2c_1 & c_2m_1 & c_2a_1 \\ -b_2c_1 & -b_2m_1 & -b_2a_1 \\ a_2c_1 & a_2m_1 & a_2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & m_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

L'expression que ces matrices donnent pour  $N(s)$ , telle que  ${}^tN(s)M_2N(s) = M_1$ , découle de 3.53 et 3.54 :

$$N(s) = \frac{1}{m_1m_2}(\Gamma_0 + m_1^2 \Gamma_2) + \frac{s}{m_1}(\Omega_0 + m_1\Omega_1) + \left( \frac{(s^2 - s)}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) \right)^t \Phi. \quad (3.62)$$

Elle donne la formule générale suivante :

$$m_1m_2N(s) = m_1m_2N(0) + sm_2(\Omega_0 + m_1\Omega_1) + \frac{(s^2 - s)}{2}m_1m_2({}^t\Phi), \quad (3.63)$$

où l'on a

$$N(0) = \frac{1}{m_1m_2}(\Gamma_0 + m_1^2 \Gamma_2) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) ({}^t\Phi).$$

Connaissant les expressions de  $M_1$  et  $M_2$ , c'est à dire les nombres  $a_1, b_1, c_1, m_1, a_2, b_2, c_2, m_2$ , on peut en déduire l'expression de toutes les matrices apparaissant dans cette dernière expression, à savoir  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Omega_0, \Omega_1, {}^t\Phi$ . Ceci permet d'exprimer  $N(0)$  puis  $N(s)$  avec une formule à un paramètre  $s$ . Rappelons que la matrice  $N(0)$  s'écrit également, avec 3.46 et en explicitant  $r$  et  $\lambda$ , sous la forme

$$N(0) = \frac{a_1c_1m_1}{a_2c_2m_2}T_2T_1^{-1} + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) + \left( \frac{1}{a_1c_1m_1} - \frac{1}{a_2c_2m_2} \right) \right) ({}^t\Phi).$$

De façon plus compacte grâce à 3.31, on a aussi :

$$N(0) = r(1 + \lambda S_2^2)T_2T_1^{-1}.$$

Le lien entre  $N(s)$  et  $N(0)$ , outre l'expression 3.62 que l'on vient de donner, s'écrit aussi sous forme de produit par l'égalité 3.48 :

$$N(s) = \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)N(0) = \left(1 + sS_2 + \frac{s^2 - s}{2}S_2^2\right)N(0).$$

Cette dernière redonne, avec la dernière expression donnée pour  $N(0)$ , l'expression dont on est parti dans la présente section avec  $t = \frac{s^2 - s}{2} + \lambda$  :

$$N(s) = r\left(1 + sS_2 + \left(\frac{s^2 - s}{2} + \lambda\right)S_2^2\right)T_2T_1^{-1}.$$

Et la cohérence entre ces dernières expressions de  $N(s)$  se vérifie alors directement à partir de la chaîne des relations suivantes, découlant respectivement de 3.52, 3.55, et  $S_2^3 = 0$  :

$$S_2(\Gamma_0 + m_1^2 \Gamma_2) = m_2(\Omega_0 + m_1\Omega_1), \quad S_2(\Omega_0 + m_1\Omega_1) = m_1({}^t\Phi), \quad S_2({}^t\Phi) = 0.$$

Une situation plus confortable aurait ainsi été de considérer :

$$\Psi_0 = N(0) = \frac{1}{m_1 m_2}(\Gamma_0 + m_1^2 \Gamma_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2}\right){}^t\Phi,$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{m_1}(\Omega_0 + m_1\Omega_1),$$

$$\Psi_2 = ({}^t\Phi).$$

Avec ces nouvelles matrices on a en effet :

$$S_2\Psi_0 = \Psi_1, \quad S_2\Psi_1 = \Psi_2, \quad S_2\Psi_2 = 0,$$

$$N(s) = \Psi_0 + s\Psi_1 + \left(\frac{1}{2}(s^2 - s)\right)\Psi_2 = \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right)N(0) = N(0)\exp\left(-\frac{R_1}{2}s\right).$$

Cette dernière expression n'est autre que 3.62, ou a un facteur près 3.63. On peut de plus vérifier que l'on a aussi :

$$\Psi_0 S_1 = \Psi_1, \quad \Psi_1 S_1 = \Psi_2, \quad \Psi_2 S_1 = 0.$$

Il suffit pour le voir de considérer les cas où  $s = 0$ , puis  $s = 1$ , enfin  $s = 2$ .

## 4. Sur la démonstration de la conjecture par Norbert Riedel

### 4.1. Quelques résultats arithmétiques auxiliaires

N. Riedel ([19] p. 9) considère pour sa démonstration de l'impossibilité de la conjecture qu'il existe deux triplets distincts définissant une valeur dominante commune

$$m = a_1 c_1 - b_1 = a_2 c_2 - b_2,$$

où  $a_1, b_1, c_1$ , et  $a_2, b_2, c_2$ , sont les composantes de l'unique triplet voisin de chacun d'eux plus proche de la racine de l'arbre, et définissant chacun une MT-matrice. Il suppose  $m \neq 3$  et  $m \neq 6$ , les vérifications à la racine de l'arbre étant faciles.

Il établit d'abord quelques lemmes techniques que l'on va examiner maintenant, après avoir rappelé au préalable qu'il est facile de vérifier par récurrence que tout triplet  $(a, b, c)$  vérifiant l'équation de Markoff 2.1 est telle que le plus grand commun diviseur de  $a, b, c$ , vaut 3, tout comme ceux de  $a$  et  $b$ , respectivement de  $b$  et  $c$ , ou encore de  $c$  et  $a$ .

**Proposition 4.1.** (Lemme 3.2 de [19]) *Si  $q \notin \{2, 3\}$  est un facteur premier de  $m$ , alors l'un au moins des deux nombres  $a_1a_2 + c_1c_2$  et  $a_1a_2 - c_1c_2$  n'est pas divisible par  $q$ . Il en est de même de l'un des deux nombres  $a_1c_2 + c_1a_2$  et  $a_1c_2 - c_1a_2$ .*

Supposons qu'au contraire  $q$  divise  $a_1a_2 + c_1c_2$  et  $a_1a_2 - c_1c_2$ , il divise  $2a_1a_2$ , et donc aussi  $a_1a_2$ , c'est à dire  $a_1$  ou  $a_2$ , et donc respectivement  $b_1$  ou  $b_2$  puisqu'il divise également  $m$ . Mais avec l'équation de Markoff 2.1 on aurait alors  $q = 3$ , c'est à dire une contradiction avec l'hypothèse du lemme. Celui-ci est donc établi, sachant que le même raisonnement vaut pour l'autre paire de nombres  $a_1c_2 + c_1a_2$  et  $a_1c_2 - c_1a_2$ .

**Proposition 4.2.** (Lemme 3.3 de [19]) *Si  $q \notin \{3\}$  est un facteur premier de  $m$ , alors :*

- $a/q$  divise  $a_1c_2 - c_1a_2$  si et seulement s'il divise  $a_1a_2 + c_1c_2$ ,*
- $b/q$  divise  $a_1a_2 - c_1c_2$  si et seulement s'il divise  $a_1c_2 + c_1a_2$ .*

Supposons en effet que l'on ait avec  $p$  entier  $a_1c_2 - c_1a_2 = pq$ . On peut alors écrire, avec  $q \neq 3$  diviseur de  $m$ , et donc pas de  $a_1$ , ni de  $b_1$ , ni de  $a_2$  :

$$0 \equiv a_2mb_1 \equiv a_2(a_1^2 + c_1^2) \equiv a_1(a_1a_2 + c_1c_2) - c_1pq \equiv a_1(a_1a_2 + c_1c_2) \pmod{q}.$$

Ceci impose que  $q$  soit un diviseur de  $a_1a_2 + c_1c_2$  et démontre une partie l'énoncé a/ de la dernière proposition. Supposons inversement qu'avec  $p$  entier, on ait  $a_1a_2 + c_1c_2 = pq$ . On peut alors écrire, avec  $q \neq 3$  diviseur de  $m$ , et donc pas de  $a_1$ , ni de  $b_1$ , ni de  $c_2$  :

$$0 \equiv c_2mb_1 \equiv c_2(a_1^2 + c_1^2) \equiv a_1(a_1c_2 - c_1a_2) + c_1pq \equiv a_1(a_1c_2 - c_1a_2) \pmod{q}.$$

Ceci impose que  $q$  soit un diviseur de  $a_1c_2 - c_1a_2$  et démontre complètement l'énoncé a/ de la proposition. L'énoncé b/ se vérifie de même avec  $p$  entier tel que  $a_1a_2 - c_1c_2 = pq$ , puis  $a_1c_2 + c_1a_2 = pq$ .

**Proposition 4.3.** (Lemme 3.4 de [19]) Supposons que l'on ait  $m = nq^l$  avec  $q \notin \{2, 3\}$  facteur premier de  $m$  ne divisant pas  $n$ , alors ou bien  $q^{2l}$  divise  $a_1c_2 - c_1a_2$ , ou bien  $q^{2l}$  divise  $a_1a_2 - c_1c_2$ , mais on n'a pas simultanément ces deux propriétés.

Cet énoncé résulte d'une égalité qu'il convient d'abord de démontrer :

$$(a_1c_2 - c_1a_2)(a_1a_2 - c_1c_2) = m^2(b_1 - b_2). \quad (4.1)$$

Pour cela on développe

$$\begin{aligned} (a_1c_2 - c_1a_2)(a_1a_2 - c_1c_2) &= (a_1^2 + c_1^2)a_2c_2 - (a_2^2 + c_2^2)a_1c_1 \\ &= mb_1a_2c_2 - mb_2a_1c_1 \\ &= m(ma_2c_2 - ma_1c_1) \\ &= m^2(a_2c_2 - a_1c_1) \\ &= m^2(b_1 - b_2). \end{aligned}$$

Si  $b_1 - b_2 = 0$ , l'un des deux termes  $a_1c_2 - c_1a_2$  ou  $a_1a_2 - c_1c_2$  est nul, et donc divisible par  $q^{2l}$ . Supposons que  $a_1c_2 - c_1a_2 = 0$ , et considérons que  $q$  divise  $a_1a_2 - c_1c_2$ . Par une propriété précédente (le lemme 3.3 de [19]),  $q$  divise aussi  $a_1c_2 + c_1a_2$ , donc aussi  $2a_1c_2$ , c'est à dire  $a_1c_2$  parce que  $q \neq 2$ . De sorte que  $q$  divise  $a_1$  ou  $c_2$ , ce qui donne une contradiction car on a aussi  $q \neq 3$ . Donc  $q$ , a fortiori  $q^{2l}$ , ne divise pas  $a_1a_2 - c_1c_2$ . Par un raisonnement équivalent, si  $a_1a_2 - c_1c_2 = 0$ ,  $q^{2l}$  ne divise pas  $a_1c_2 - c_1a_2$ . Ce cas est bien particulier, car il impose  $a_1c_1 = a_2c_2$ . Si  $a_1c_2 = c_1a_2$  on en déduit  $a_1 = c_1$  et  $a_2 = c_2$ , donc  $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$ . Si au contraire  $a_1a_2 = c_1c_2$  on en déduit  $a_1 = c_2$  et  $c_1 = a_2$ , donc  $(a_1, b_1, c_1) = (c_2, b_2, a_2)$ .

Si  $b_1 - b_2 \neq 0$ , l'égalité 4.1 permet de conclure après avoir assuré que le cas où  $q$  divise à la fois  $a_1c_2 - c_1a_2$  et  $a_1a_2 - c_1c_2$  est impossible. Or par l'une des propriétés que l'on vient de voir (le lemme 3.3 de [19]), si tel était le cas,  $q$  diviserait aussi  $a_1c_2 + c_1a_2$  et  $a_1a_2 + c_1c_2$ , donc avec une autre propriété vue (le lemme 3.2 de [19]) on aurait une contradiction. Finalement  $q^{2l}$  qui divise  $m^2$  divise soit  $a_1c_2 - c_1a_2$ , soit  $a_1a_2 - c_1c_2$ , mais pas les deux. La propriété est donc établie.

Si  $b_1 - b_2 \neq 0$ , l'application répétée de la dernière proposition permet avec la décomposition de  $m$  en facteurs premiers  $m = 2^{l_1} 3^{l_2} \prod q_i^{l_i}$  de répartir les nombres  $q_i$  en deux ensembles, ceux divisant  $a_1c_2 - c_1a_2$  et ceux divisant  $a_1a_2 - c_1c_2$ . Ceci permet de vérifier,  $f$  et  $g$  n'ayant pas de facteur premier égal à 2 ou 3, et étant définis de façon unique, une partie de la proposition suivante :



**Proposition 4.4.** (Corollaire 3.5 amélioré de [19]) On peut factoriser  $m$  de façon unique sous la forme  $m = 2^{l_1} 3^{l_2} fg$ , où  $f$  et  $g$  sont deux entiers premiers entre eux et premiers à 6 tels que  $f^2$  divise  $a_1 c_2 - c_1 a_2$  et  $g^2$  divise  $a_1 a_2 - c_1 c_2$ . De plus  $f$  n'a aucun facteur commun avec  $a_1 a_2 - c_1 c_2$ , ni avec  $a_1 c_2 + c_1 a_2$ , et  $g$  n'a aucun facteur premier commun avec  $a_1 c_2 - c_1 a_2$ , ni avec  $a_1 a_2 + c_1 c_2$ . Enfin on a  $2^{l_1} 3^{l_2} = 3$  si  $m$  impair et  $2^{l_1} 3^{l_2} = 6$  si  $m$  pair.

Deux cas manquent qui sont ceux où  $b_1 - b_2 = 0$ . Le cas où  $(a_1, b_1, c_1) = (c_2, b_2, a_2)$  est essentiel pour la suite et justifie la considération des MT-matrices. Si on y factorise  $m$  sous la forme  $m = 2^{l_1} 3^{l_2} \mathbf{m}$ , l'équation de Markoff impose que  $\mathbf{m}$  divise  $a_1^2 + c_1^2$ . Mais alors  $\mathbf{m}$  n'a aucun facteur commun avec  $a_1^2 - c_1^2 = a_1 c_2 - c_1 a_2$ , car on trouverait sinon un nombre premier facteur de  $\mathbf{m}$  divisant  $a_1$  et  $c_1$ , et donc une contradiction. Par contre  $\mathbf{m}^2$  divise  $0 = a_1 a_2 - c_1 c_2$ . On se ramène à l'énoncé de la proposition précédente pourvu que l'on pose ici  $f = 1$ ,  $g = \mathbf{m}$ . Dans l'autre cas où  $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$ , qui ne présente aucun intérêt véritable, on utilise encore la décomposition  $m = 2^{l_1} 3^{l_2} \mathbf{m}$ , par contre on pose cette fois  $f = \mathbf{m}$  et  $g = 1$ . On retrouve ainsi une partie de l'énoncé de la dernière proposition, c'est à dire du corollaire 3.5 de [19]. Il reste à comprendre ce qui peut être dit du facteur  $2^{l_1} 3^{l_2}$  qui apparaît dans la factorisation de  $m$ . On va voir que ce coefficient ne peut effectivement qu'être égal à 3 ou 6, correspondant aux deux possibilités  $m = 3\mathbf{m}$  ou  $m = 6\mathbf{m}$ .

Considérons d'abord le facteur  $3^{l_2}$  de  $m$ . Rappelons que tout triplet  $(a, b, c)$  vérifiant l'équation de Markoff 2.1 est telle que le plus grand commun diviseur de  $a, b, c$  vaut 3. On a donc  $l_2 \geq 1$ . En fait on ne peut avoir  $l_2 > 1$ . Ceci signifierait en effet que  $m$  est divisible par 9, et donc  $m^2$  par 81, avec  $(a_1, m, c_1)$  solution de l'équation de Markoff 2.1, et donc 3 divisant  $a_1$ , respectivement  $c_1$ . Divisant par 9, on retomberait sur l'équation classique 1.1 écrite avec les entiers  $(a_1/3), (m/9), (c_1/3)$ , sous la forme :

$$(a_1/3)^2 + 9(m/9)^2 + (c_1/3)^2 = 9(a_1/3)(m/9)(c_1/3).$$

En considérant cette égalité modulo 3, il resterait :

$$(a_1/3)^2 + (c_1/3)^2 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Or une telle congruence n'est possible que si  $(a_1/3) \equiv 0 \pmod{3}$  et simultanément  $(c_1/3) \equiv 0 \pmod{3}$ . On tombe donc sur une contradiction avec le fait que

le plus grand commun diviseur de  $a_1, m, c_1$  vaut 3. . En retour, ceci montre que l'on a en réalité  $l_2 = 1$  comme seul cas possible.

Considérons ensuite le facteur  $2^{l_1}$  de  $m$ . Procédons comme avant pour montrer que  $l_1 > 1$  est impossible. Dans le cas contraire  $m$  serait divisible par 4 et l'équation de Markoff 2.1 imposerait alors :

$$a_1^2 + c_1^2 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Or une telle congruence n'est possible que si  $a_1 \equiv 0 \pmod{2}$  et simultanément  $c_1 \equiv 0 \pmod{2}$ . On tombe donc sur une contradiction avec le fait que le plus grand commun diviseur de  $a_1, m, c_1$  vaut 3. En retour ceci impose  $l_1 = 0$  ou  $l_1 = 1$ , le premier cas correspondant à  $m$  impair, le second à  $m$  pair, et les triplets de plus bas niveau de l'arbre montrant que les deux cas restent possibles.

Notons pour terminer que la remarque qui suit le corollaire 3.5 à la page 15 de [19] recouvre un cas qui a été traité dans ce qui précède. Avec  $\{a_1, c_1\} = \{a_2, c_2\}$  et donc  $b_1 - b_2 = 0$ , la conclusion que l'on a trouvée peut être écrite sous la forme  $\{f, g\} = \{1, m\}$  comme dit par Riedel dans cette remarque. Dans les autres cas où  $b_1 - b_2 \neq 0$ , la décomposition de  $m$  en facteurs premiers  $m = 2^{l_1} 3^{l_2} \prod q_i^{l_i}$  a permis de répartir les nombres premiers  $q_i$  pour construire les deux nombres  $f$  et  $g$  n'ayant pas de facteur premier égal à 2 ou 3. Imaginons que l'on ait  $g = 1$ , en revenant à l'égalité 4.1 en se souvenant que  $f^2$  divise  $a_1 c_2 - c_1 a_2$ . Il reste

$$\left(\frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{3^2 f^2}\right)(a_1 a_2 - c_1 c_2) = 2^{2l_1} (b_1 - b_2).$$

Ceci montre que  $(3f)^2$ , c'est à dire  $m^2$  ou  $(m/2)^2$ , divise  $(a_1 c_2 - c_1 a_2)$ . Or ce nombre est différent de 0 parce que l'on a par hypothèse  $b_1 - b_2 \neq 0$ . De là on conclut facilement que  $3f$  est moindre que l'un au moins des nombres  $a_1, a_2, c_1, c_2$ , c'est à dire aussi que  $m$  est moindre que l'un au moins des nombres  $2a_1, 2a_2, 2c_1, 2c_2$ . Si l'on a par exemple  $m = c_1 a_1 - b_1 \leq 2a_1$  on en déduit avec  $c_1 \leq a_1 \leq m$ , après avoir vérifié que  $m = 2a_1$  est impossible hors deux cas faciles à expliciter correspondant à  $m = 6$ , que l'on a  $b_1 > (c_1 - 2)a_1 \geq a_1$ . Mais ceci est impossible sur les MT-matrices. Les autres possibilités pouvant se traiter de même, on établit ainsi que le cas  $g = 1$  ne se produit jamais si  $m \neq 6$ , comme supposé dans l'introduction du présent paragraphe. Le cas  $f = 1$  se traite de même, ce qui permet d'énoncer pour deux triplets vérifiant les hypothèse du présent paragraphe, et notamment  $m \notin \{3, 6\}$  :

**Proposition 4.5.** (Lemme 3.6 amélioré de [19]) Dans la factorisation unique de  $m = 2^{l_1}3\mathbf{m} = 2^{l_1}3fg$ , donnée par la précédente proposition, avec  $f$  et  $g$  deux entiers premiers entre eux et premiers à 6 tels que  $f^2$  divise  $a_1c_2 - c_1a_2$  et  $g^2$  divise  $a_1a_2 - c_1c_2$ , on est certain de pouvoir trouver des facteurs premiers  $q_i$  différents de 2 et 3 dans  $f$  et dans  $g$  dès que l'on a  $b_1 \neq b_2$ . Si au contraire  $b_1 = b_2$  on a  $(f, g) = (1, \mathbf{m})$  dans le cas où  $(a_1, b_1, c_1) = (c_2, b_2, a_2)$ , et  $(f, g) = (\mathbf{m}, 1)$  dans le cas où  $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$ .

Les résultats que l'on vient de donner sont un peu plus précis que ceux de [19] comme on le voit par exemple sur l'énoncé de notre dernière proposition comparé au lemme 3.6 de N. Riedel. Ce dernier laisse entendre que ses nombres  $f$  ou  $g$  peuvent contenir des facteurs égaux à 2 ou 3. Tel n'est absolument pas le cas comme on vient de l'établir.

## 4.2. Nouvelles notations et conséquences

Riedel suppose désormais que deux triplets  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  différents de solutions de l'équation de Markoff, correspondant à des MT-matrices, définissent deux autres solutions de l'équation de Markoff de même terme dominant  $m = a_1c_1 - b_1 = a_2c_2 - b_2 \notin \{3, 6\}$ . On fait apparaître ainsi différentes MT-matrices,  $M(a_1, b_1, c_1) = M_1$  et les trois autres MT-matrices de mêmes coefficients dont

$$M(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) = M(c_1, b_1, a_1) = M_{-1},$$

$M(a_2, b_2, c_2) = M_2$  et les trois autres MT-matrices de mêmes coefficients dont

$$M(a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}) = M(c_2, b_2, a_2) = M_{-2},$$

ainsi que les huit MT-matrices suivantes :

$$M(m, a_1, c_1), M(m, c_1, a_1), M(a_1, c_1, m), M(c_1, a_1, m),$$

$$M(m, a_2, c_2), M(m, c_2, a_2), M(a_2, c_2, m), M(c_2, a_2, m).$$

Faisons ici l'hypothèse que l'on ait

$$\{a_1, c_1\} \cap \{a_2, c_2\} \neq \emptyset,$$

et par exemple  $a_1 = a_2$ . Alors à partir de l'équation de Markoff, on a  $c_1 = c_2$  ou  $c_1 = ma_2 - c_2$ . Mais la première égalité donne  $(m, a_1, c_1) = (m, a_2, c_2)$ , c'est à

dire aussi  $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$ , et donc une contradiction avec les hypothèses faites. Et la seconde égalité donne  $(m, a_1, c_1) = (m, a_2, ma_2 - c_2)$ , mais alors aussi l'inégalité  $c_1 > m > a_1$ , et donc encore une contradiction avec le fait que  $m$  soit dominant. Les autres possibilités se traitant de même, on trouve à chaque fois une contradiction. Ceci montre inversement que l'hypothèse faite est impossible. On a donc en réalité

$$\{a_1, c_1\} \cap \{a_2, c_2\} = \emptyset.$$

On peut aussi voir que  $b_1 \neq b_2$ . En effet dans le cas contraire où  $b_1 = b_2$ , on aurait  $a_1c_1 = a_2c_2$ , et avec l'équation de Markoff  $a_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + c_2^2$ , c'est à dire en résolvant une équation du second degré,  $a_1 = a_2$  et  $c_1 = c_2$ , ou  $a_1 = c_2$  et  $c_1 = a_2$ , et donc une contradiction. Par l'égalité 4.1, on a aussi  $a_1c_2 \neq c_1a_2$  et  $a_1a_2 \neq c_1c_2$ .

#### 4.2.1. Des involutions et leurs propriétés

Riedel adopte des notations particulières. Pour  $i \in \{1, 2\}$ , il note

$$T_{-i} = T(a_{-i}, b_{-i}, c_{-i}) = T(c_i, b_i, a_i), R_{-i} = R(c_i, b_i, a_i), S_{-i} = S(c_i, b_i, a_i).$$

Pour  $i, j \in \{\pm 1, \pm 2\}$  il introduit, en liaison avec la proposition 3.1 de [19], la notation  $N_{(i,j)}(s)$  pour désigner toute matrice  $Q$  vérifiant  ${}^tQM_jQ = M_i$ . Par définition, on a donc

$${}^tN_{(i,j)}(s)M_jN_{(i,j)}(s) = M_i.$$

Ainsi, pour  ${}^tQM_2Q = M_1$  comme dans les propositions de la section précédente, on doit noter désormais non plus comme avant  $N(s)$  mais plutôt  $N_{(1,2)}(s)$ . Riedel introduit également, et on remarquera que cette matrice n'est pas dans  $SL(3, \mathbb{Z})$ , puisque son déterminant vaut  $-1$  et non  $1$  :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^tJ = J^{-1}, \quad J_i = JN_{(i,-i)}(0).$$

Ceci permet de donner un certain nombre de résultats. Tout d'abord  $N_{(i,-i)}(s)$  et  $N_{(i,i)}(s)$  sont calculables à partir des relations 3.25 et 3.20 pour donner :

$$\begin{aligned} N_{(i,i)}(s) &= \exp\left(-\frac{R_i}{2}s\right)T_iT_i^{-1}, \quad N_{(i,i)}(0) = \mathbf{1}_3, \\ N_{(i,-i)}(s) &= \exp\left(-\frac{R_{-i}}{2}s\right)T_{-i}T_{-i}^{-1} = \exp\left(-\frac{R_{-i}}{2}s\right)N_{(i,-i)}(0), \end{aligned} \quad (4.2)$$

où  ${}^t N_{(i,-i)}(0)M_{-i}N_{(i,-i)}(0) = M_i$ . L'expression 4.2 n'est d'ailleurs autre que notre équation 3.48. Comme on a déjà établi précédemment, après 2.5, que l'on a  $J({}^t M_i)J = M_{-i}$ , ceci donne

$${}^t(JN_{(i,-i)}(0))({}^t M_i)(JN_{(i,-i)}(0)) = M_i,$$

et en transposant

$${}^t(JN_{(i,-i)}(0))(M_i)(JN_{(i,-i)}(0)) = ({}^t M_i),$$

d'où par substitution :

$${}^t(JN_{(i,-i)}(0))^2(M_i)(JN_{(i,-i)}(0))^2 = M_i.$$

Ceci impose par ce que l'on a vu précédemment l'existence d'un nombre  $s_J$  tel que:

$$(JN_{(i,-i)}(0))^2 = \exp\left(-\frac{R_i}{2}s_J\right).$$

En fait  $s_J = 0$ , car on a :

**Proposition 4.6.** ([19] Remarks 1) p. 16),  $J_i = JN_{(i,-i)}(0)$  est une involution, ce qui revient à dire que l'on a :

$$JT_{-i}T_i^{-1} = T_iT_{-i}^{-1}J.$$

Disposant des expressions de toutes les matrices qui interviennent dans cette égalité, on peut vérifier cette proposition par un calcul direct. Pour cela il suffit de partir de

$$T_i = \begin{pmatrix} c_i & a_i c_i (c_i m - a_i) & a_i c_i^2 m \\ m & a_i c_i (-c_i^2) & a_i c_i m (-b_i) \\ a_i & a_i c_i^2 & a_i^2 c_i m \end{pmatrix},$$

$$T_{-i} = \begin{pmatrix} a_i & a_i c_i (a_i m - c_i) & a_i^2 c_i m \\ m & a_i c_i (-a_i^2) & a_i c_i m (-b_i) \\ c_i & c_i a_i^2 & a_i c_i^2 m \end{pmatrix},$$

et de calculer les deux produits qui s'écrivent tous deux sous la forme suivante :

$$J_i = JN_{(i,-i)}(0) = \frac{1}{(a_i c_i - b_i)^2} \begin{pmatrix} a_i^2 - c_i^2 & 0 & -2a_i c_i + c_i^2 m \\ a_i(-a_i^2 + c_i^2) & (a_i c_i - b_i)^2 & c_i(a_i^2 - c_i^2) \\ -2a_i c_i + a_i^2 m & 0 & c_i^2 - a_i^2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Une vérification directe à partir de cette expression montre alors que l'on a bien affaire à une involution. Ceci confirme que  $s_J = 0$ . On a aussi très facilement avec ce qui précède :

**Proposition 4.7.** ([19] Remarks 1) p. 16) On a :

$$N_{(-i,i)}(0) = J_i J = T_i T_{-i}^{-1} = J J_{-i} = N_{(i,-i)}(0)^{-1}, \quad (4.4)$$

$$J_i R_i + R_i J_i = 0. \quad (4.5)$$

Remarquons qu'avec les notations adoptées  $J J_{-i} = N_{(-i,i)}(0) = T_i T_{-i}^{-1} = N_{(i,-i)}(0)^{-1}$ . D'autre part, avec la proposition antérieure  $J_i J = J T_{-i} T_i^{-1} J = T_i T_{-i}^{-1}$ . On en déduit la première égalité de la proposition précédente. Pour la seconde il suffit de comparer à 0 la somme des deux produits, où l'on rappelle que l'on a d'après 2.28 :

$$R_i = \begin{pmatrix} -c_i^2 & 2a_i - mc_i & 2b_i - a_i c_i \\ b_i c_i - 2a_i & c_i^2 - a_i^2 & 2c_i - a_i b_i \\ a_i c_i - 2b_i & -2c_i + a_i m & a_i^2 \end{pmatrix}.$$

Le calcul est très fastidieux mais a été complètement refait par l'auteur du présent article. Il permet effectivement de conclure, en simplifiant toutes les expressions qui apparaissent grâce à l'équation de Markoff.

#### 4.2.2. Une formule de Chasles

Riedel va plus loin avec les notations qu'il a introduites. Il énonce son lemme 3.7 disant que pour  $i, j \in \{\pm 1, \pm 2\}$  et deux nombres rationnels quelconques  $s$  et  $t$ , on a les égalités suivantes :

$$\exp\left(-\frac{R_i}{2}(s+t)\right) = N_{(i,i)}(s+t) = N_{(j,i)}(s)N_{(i,j)}(t)?$$

$$N_{(i,-i)}(s+t) = N_{(j,-i)}(s)N_{(i,j)}(t).$$

La première égalité a déjà été établie, en effet  $N_{(i,i)}(s+t)$  n'est qu'une matrice du stabilisateur de  $M_i$ , et l'exponentielle correspondante en est la forme connue. La

démonstration des autres égalités est esquissée dans [19] en partant du fait que l'on a pour tous  $i, j \in \{\pm 1, \pm 2\}$  et tout nombre rationnel

$$N_{(i,j)}(s) = \exp\left(-\frac{R_j}{2}s\right)N_{(i,j)}(0) = N_{(i,j)}(0)\exp\left(-\frac{R_i}{2}s\right).$$

Ceci n'est autre que notre expression 3.48 et sa variante par commutation de l'exponentielle.

En nous inspirant alors des calculs de Riedel, on peut développer ici une approche à la fois plus directe et générale. Par définition des matrices  $N_{(i,j)}(s)$  et  $N_{(j,k)}(t)$ , on a :

$${}^tN_{(i,j)}(s)M_jN_{(i,j)}(s) = M_i, \quad {}^tN_{(j,k)}(t)M_kN_{(j,k)}(t) = M_j.$$

De sorte qu'en substituant la seconde égalité dans la première, il vient :

$${}^t(N_{(j,k)}(t)N_{(i,j)})M_k(N_{(j,k)}(t)N_{(i,j)}(s)) = M_i.$$

Ceci impose par ce qui précède l'existence d'un paramètre  $u$  tel que

$$N_{(j,k)}(t)N_{(i,j)}(s) = N_{(i,k)}(u).$$

Toujours avec 3.48, ceci se traduit par

$$\exp\left(-\frac{R_k}{2}t\right)N_{(j,k)}(0)N_{(i,j)}(0)\exp\left(-\frac{R_i}{2}s\right) = N_{(i,j)}(0)\exp\left(-\frac{R_i}{2}u\right),$$

$$\exp\left(-\frac{R_k}{2}t\right)N_{(j,k)}(0)N_{(i,j)}(0)\exp\left(-\frac{R_i}{2}(s-u)\right) = N_{(i,j)}(0),$$

$$\exp\left(-\frac{R_k}{2}t\right)N_{(j,k)}(0)\exp\left(-\frac{R_j}{2}(s-u)\right)N_{(i,j)}(0) = N_{(i,j)}(0),$$

$$\exp\left(-\frac{R_k}{2}(t+s-u)\right)N_{(j,k)}(0)N_{(i,j)}(0) = N_{(i,j)}(0).$$

On est alors conduit à s'assurer que  $N_{(j,k)}(0)N_{(i,j)}(0) = N_{(i,j)}(0)$ , d'où il résultera simplement que l'on a  $u = s + t$ . On pourrait le faire brutalement à partir des expressions données ci-dessus pour la matrice  $N(0)$ , mais outre que c'est compliqué, cela ne donne aucune compréhension de la situation. On va donc plutôt procéder

ici comme le fait [19] page 17, avec des notations évidentes issues de 3.46 :

$$\begin{aligned}
& N_{(j,k)}(0)N_{(i,j)}(0) \\
&= \left( \frac{a_j c_j m_j}{a_k c_k m_k} T_k T_j^{-1} + \lambda_{(j,k)} \begin{pmatrix} c_k \\ -b_k \\ a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j & m_j & a_j \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \times \left( \frac{a_i c_i m_i}{a_j c_j m_j} T_j T_i^{-1} + \lambda_{(i,j)} \begin{pmatrix} c_j \\ -b_j \\ a_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i & m_i & a_i \end{pmatrix} \right) \\
&= \left( \frac{a_i c_i m_i}{a_k c_k m_k} T_k T_i^{-1} + \lambda_{(j,k)} \frac{a_i c_i m_i}{a_j c_j m_j} \begin{pmatrix} c_k \\ -b_k \\ a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j & m_j & a_j \end{pmatrix} T_j T_i^{-1} \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{(i,j)} \frac{a_j c_j m_j}{a_k c_k m_k} T_k T_j^{-1} \begin{pmatrix} c_j \\ -b_j \\ a_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i & m_i & a_i \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{(j,k)} \lambda_{(i,j)} \begin{pmatrix} c_k \\ -b_k \\ a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j & m_j & a_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ -b_j \\ a_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i & m_i & a_i \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

On a d'abord, ce qui élimine le dernier terme de cette dernière somme:

$$\begin{pmatrix} c_j & m_j & a_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ -b_j \\ a_j \end{pmatrix} = c_j^2 - (a_j c_j - b_j) b_j + a_j^2 = 0.$$

Ensuite avec l'expression déjà vue des matrices  $T$  et en calculant leur inverse:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} c_j & m_j & a_j \end{pmatrix} T_j T_i^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} c_j & m_j & a_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j & a_j c_j (c_j m_j - a_j) & a_j c_j^2 m_j \\ m_j & -a_j c_j^3 & -a_j c_j b_j m_j \\ a_j & a_j c_j^2 & a_j^2 c_j m_j \end{pmatrix} T_i^{-1} \\
&= a_j c_j m_j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_i^{-1} \\
&= a_j c_j m_j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{m_i c_i}{m_i^2 a_i c_i} & \frac{1}{a_i c_i} & \frac{a_i m_i}{m_i^2 a_i c_i} \\ \frac{1}{c_i m_i^2} & 0 & -\frac{1}{a_i m_i^2} \\ \frac{b_i - 2a_i c_i}{m_i^3 c_i a_i^2} & -\frac{1}{a_i^2 c_i^2 m_i} & \frac{-a_i m_i + c_i^3 + c_i m_i^2}{m_i^3 c_i^2 a_i^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{a_j c_j m_j}{a_i c_i m_i} \begin{pmatrix} c_i & m_i & a_i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



Ceci donne le second terme de la somme :

$$\begin{aligned} & \lambda_{(j,k)} \frac{a_i c_i m_i}{a_j c_j m_j} \begin{pmatrix} c_k \\ -b_k \\ a_k \end{pmatrix} (c_j \ m_j \ a_j) T_j T_i^{-1} \\ &= \lambda_{(j,k)} \begin{pmatrix} c_k \\ -b_k \\ a_k \end{pmatrix} (c_i \ m_i \ a_i). \end{aligned}$$

Pour le troisième terme, on calcule d'abord:

$$\begin{aligned} & T_k T_j^{-1} \begin{pmatrix} c_j \\ -b_j \\ a_j \end{pmatrix} \\ &= T_k \begin{pmatrix} \frac{m_j c_j}{m_j^2 a_j c_j} & \frac{1}{a_j c_j} & \frac{a_j m_j}{m_j^2 a_j c_j} \\ \frac{1}{c_j m_j^2} & 0 & -\frac{1}{a_j m_j^2} \\ \frac{b_j - 2a_j c_j}{m_j^3 c_j a_j^2} & -\frac{1}{a_j^2 c_j^2 m_j} & \frac{-a_j m_j + c_j^3 + c_j m_j^2}{m_j^3 c_j^2 a_j^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ -b_j \\ a_j \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m_j c_j a_j} T_k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{m_k c_k a_k}{m_j c_j a_j} \begin{pmatrix} c_k \\ -b_k \\ a_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \lambda_{(i,j)} \frac{a_j c_j m_j}{a_k c_k m_k} T_k T_j^{-1} \begin{pmatrix} c_j \\ -b_j \\ a_j \end{pmatrix} (c_i \ m_i \ a_i) \\ &= \lambda_{(i,j)} \begin{pmatrix} c_k \\ -b_k \\ a_k \end{pmatrix} (c_i \ m_i \ a_i). \end{aligned}$$

Il reste pour l'expression globale :

$$\begin{aligned} & N_{(j,k)}(0) N_{(i,j)}(0) \\ &= \frac{a_i c_i m_i}{a_k c_k m_k} T_k T_i^{-1} + (\lambda_{(j,k)} + \lambda_{(i,j)}) \begin{pmatrix} c_k \\ -b_k \\ a_k \end{pmatrix} (c_i \ m_i \ a_i). \end{aligned}$$

Mais facilement

$$\begin{aligned}
\lambda_{(j,k)} + \lambda_{(i,j)} &= \left( \frac{1}{m_j c_j a_j} - \frac{1}{a_k c_k m_k} \right) + \left( \frac{1}{m_i c_i a_i} - \frac{1}{a_j c_j m_j} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_j^2} - \frac{1}{m_k^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_i^2} - \frac{1}{m_j^2} \right) \\
&= \left( \frac{1}{m_i c_i a_i} - \frac{1}{a_k c_k m_k} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_i^2} - \frac{1}{m_k^2} \right) \\
&= \lambda_{(i,k)},
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&N_{(j,k)}(0)N_{(i,j)}(0) \\
&= \frac{a_i c_i m_i}{a_k c_k m_k} T_k T_i^{-1} + \lambda_{(i,k)} \begin{pmatrix} c_k \\ -b_k \\ a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i & m_i & a_i \end{pmatrix} \\
&= N_{(j,k)}(0).
\end{aligned}$$

On note que le calcul que l'on vient de faire est très général, pas seulement valable pour la situation où les valeurs  $m$  considérées sont dominantes et égales, et qu'il donne à comprendre ce qui se passe réellement sur l'arbre de Riedel. En résumant ce à quoi on est parvenu, on peut donc d'énoncer

**Proposition 4.8.** *Pour tous entiers  $i, j, k$ , positifs ou négatifs, et tous paramètres  $s$  et  $t$ , on a :*

$$\begin{aligned}
N_{(j,k)}(0)N_{(i,j)}(0) &= N_{(i,k)}(0), \\
\exp\left(-\frac{R_j}{2}s\right)N_{(i,j)}(0) &= N_{(i,j)}(0)\exp\left(-\frac{R_i}{2}s\right) = N_{(i,j)}(s), \\
N_{(j,k)}(t)N_{(i,j)}(s) &= N_{(i,k)}(t+s). \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Cette proposition montre que les notations adoptées par Riedel pourraient être améliorées en permutant les indices  $i$  et  $j$  dans  $N_{(i,j)}(s)$ . La règle de combinaison de ces matrices serait ainsi plus simple, ramenant 4.6 à une simple relation de Chasles. Remarquons que la relation de Chasles 4.6 donne :

$$N_{(i,j)}(s)^{-1} = N_{(j,i)}(-s).$$

### 4.2.3. Applications

On déduit de la relation de Chasles 4.6, avec  $k = -i$  :

$$N_{(j,-i)}(t)N_{(i,j)}(s) = N_{(i,-i)}(t+s) = N_{(i,-i)}(0) \exp\left(-\frac{R_i}{2}(t+s)\right).$$

On a établi ci-dessus que  $N_{(i,-i)}(0) = JJ_i$ . On peut écrire avec 4.2 l'expression de cette dernière matrice, et ceci permet d'énoncer :

**Proposition 4.9.** (Lemme 3.7 complété de [19]) Pour  $i, j \in \{\pm 1, \pm 2\}$  et deux nombres rationnels quelconques  $s$  et  $t$ , on a les égalités suivantes :

$$N_{(i,i)}(s+t) = \exp\left(-\frac{R_i}{2}(s+t)\right) = N_{(j,i)}(s)N_{(i,j)}(t), \quad (4.7)$$

$$N_{(j,-i)}(t)N_{(i,j)}(s) = N_{(i,-i)}(t+s) = JJ_i \exp\left(-\frac{R_i}{2}(t+s)\right), \quad (4.8)$$

$$N_{(j,i)}(s)N_{(i,j)}(t)N_{(i,-i)}(s+t) = J_i J. \quad (4.9)$$

Il suffit pour établir cette proposition d'appliquer la "relation de Chasles" (4.6) et de combiner avec l'égalité 4.4. On a aussi, dans le même esprit :

**Proposition 4.10.** (Lemme 3.8 de [19]) Pour  $i, j \in \{\pm 1, \pm 2\}$  et un nombre rationnel quelconque  $s$ , on a les égalités suivantes :

$$N_{(j,i)}(s) = N_{(i,j)}(-s)^{-1} \quad (4.10)$$

$$N_{(-i,-j)}(s) = JN_{(i,j)}(-s)J. \quad (4.11)$$

La première des deux égalités résulte de 4.6 avec  $t = -s$ . Il suffit d'ajouter que  $N_{(i,i)}(0) = 1$  pour conclure à 4.10. Pour 4.11, on peut procéder comme le fait Riedel. On a donné en 3.47 l'expression de la matrice  $N_{(i,j)}(0)$ . On peut avec elle calculer  $m_i m_j JN_{(i,j)}(0)J$  :

$$\begin{pmatrix} -c_i c_j + a_j c_i m_j - a_i \frac{a_j}{m_i} m_j & 0 & a_i c_j - a_j \frac{c_i}{m_j} m_j \\ a_i m_i + c_i c_j^2 - \frac{b_j}{m_i} m_j (-a_i + c_i m_i) & m_i^2 & c_i m_i - a_i c_j^2 + b_j \frac{c_i}{m_i} m_j \\ a_j c_i - a_i \frac{c_j}{m_i} m_j & 0 & -a_i a_j + a_i c_j m_j - c_i \frac{c_j}{m_i} m_j \end{pmatrix} + \lambda m_i m_j \begin{pmatrix} a_j \\ -b_j \\ c_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i & m_i & c_i \end{pmatrix}.$$

On peut également calculer  $m_i m_j N_{(-i,-j)}(0)$  en permutant  $a_i$  et  $c_i$ , respectivement  $a_j$  et  $c_j$ . Ceci donne :

$$\begin{pmatrix} -(c_i c_j + a_i a_j \frac{m_j}{m_i}) + m_j c_i a_j & 0 & -(\frac{m_j}{m_i} c_i a_j - a_i c_j) \\ -c_i a_j^2 + b_j a_i \frac{m_j}{m_i} + a_i m_i & m_i^2 & a_i a_j^2 - \frac{m_j}{m_i} b_j (-c_i + a_i m_i) + c_i m_i \\ (c_i a_j - c_j a_i \frac{m_j}{m_i}) & 0 & -(\frac{m_j}{m_i} c_i c_j + a_i a_j) + m_j c_j a_i \end{pmatrix} \\ + \lambda m_i m_j \begin{pmatrix} a_j \\ -b_j \\ c_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i & m_i & c_i \end{pmatrix}.$$

La comparaison des deux dernières matrices montre qu'elles sont égales. En multipliant alors par une exponentielle bien choisie, on obtient :

$$\begin{aligned} N_{(-i,-j)}(s) &= \exp\left(-\frac{R_{-j}}{2}s\right) N_{(-i,-j)}(0) \\ &= \exp\left(-\frac{R_{-j}}{2}s\right) J N_{(i,j)}(0) J \\ &= \left(1 - s \frac{R_{-j}}{2} + s^2 \frac{R_{-j}^2}{8}\right) J N_{(i,j)}(0) J. \end{aligned}$$

Mais on a par une vérification directe

$$-J R_{-j} J = R_j.$$

Il suffit en effet de revenir à l'expression 2.28 en notant  $R_{-j}$  sous la forme

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - abc & 2a + bc - ac^2 & 2b - ac \\ bc - 2a & c^2 - a^2 & 2c - ab \\ ac - 2b & -2c - ab + a^2 c & abc - b^2 - c^2 \end{pmatrix},$$

le calcul de  $-J R_{-j} J$  donne l'expression

$$\begin{pmatrix} c^2 + b^2 - abc & 2c + ab - a^2 c & 2b - ac \\ ab - 2c & a^2 - c^2 & 2a - bc \\ ac - 2b & -2a - bc + ac^2 & abc - b^2 - a^2 \end{pmatrix},$$

et cette dernière se déduit de la précédente en permutant  $c$  et  $a$ , elle vaut donc aussi  $R_j$ . On en déduit que l'on a aussi 4.11, ce qui termine la démonstration de

la dernière proposition, avec

$$\begin{aligned}
N_{(-i,-j)}(s) &= \left(1 - s \frac{R_{-j}}{2} + s^2 \frac{R_{-j}^2}{8}\right) J N_{(i,j)}(0) J \\
&= J \left(1 + s \frac{R_j}{2} + s^2 \frac{R_j^2}{8}\right) N_{(i,j)}(0) J \\
&= J N_{(i,j)}(-s) J.
\end{aligned}$$

Remarquons qu'on peut en tirer d'autres conséquences que ne mentionne pas Riedel dans [19]. Considérons en effet 4.6 écrite sous la forme

$$\begin{aligned}
N_{(k,j)}(t) N_{(i,k)}(-s) &= N_{(i,j)}(t-s), \\
N_{(k,-j)}(s) N_{(-i,k)}(-t) &= N_{(-i,-j)}(s-t).
\end{aligned}$$

Il est important de comparer  $N_{(k,-j)}(s)$  et  $N_{(k,j)}(t)$ , ce que l'on fait avec 4.8 :

$$\begin{aligned}
N_{(k,-j)}(s) &= J J_j \exp\left(-\frac{R_j}{2}s\right) (N_{(j,k)}(0))^{-1} \\
&= J J_j \exp\left(-\frac{R_j}{2}s\right) N_{(k,j)}(0) \\
&= J J_j N_{(k,j)}(s).
\end{aligned}$$

De même mais par un autre chemin (4.6 direct puis 4.4) :

$$N_{(-i,k)}(-t) = N_{(i,k)}(-t) N_{(-i,i)}(0) = N_{(i,k)}(-t) J_i J,$$

ce qui s'énonce aussi en changeant les indices :

$$N_{(k,-j)}(s) = N_{(-k,-j)}(s) J_{-k} J.$$

En comparant les dernières expressions rencontrées

$$N_{(-k,-j)}(s) J_{-k} J = J J_j N_{(k,j)}(s),$$

et avec 4.11

$$J N_{(k,j)}(-s) J = N_{(-k,-j)}(s) = J J_j N_{(k,j)}(s) J J_{-k} = J J_j N_{(k,j)}(s) J_k J,$$

d'où en simplifiant la relation de commutation

$$J_j N_{(k,j)}(s) = N_{(k,j)}(-s) J_k. \quad (4.12)$$

#### 4.2.4. Un lemme technique auxiliaire

Riedel suppose que les deux nombres rationnels  $s^+$  et  $s^-$  sont tels que

$$N_{(2,-1)}(s^+) \in SL(3, \mathbb{Z}), \quad N_{(1,2)}(s^-) \in SL(3, \mathbb{Z}).$$

Cette situation se présente effectivement par la proposition 1 du présent texte, avec des matrices  $N_{(2,-1)} = N_{(2,-1)}(s^+)$  et  $N_{(1,2)} = N_{(1,2)}(s^-)$  reliant les triplets correspondants sur l'arbre comme indiqué au début du présent article. Dans de telles conditions :

**Proposition 4.11.** (*Lemme 3.9 de [19]*) On a :

$$\begin{aligned} N_{(1,-2)}(s^+) &\in SL(3, \mathbb{Z}), & N_{(2,1)}(-s^-) &\in SL(3, \mathbb{Z}), \\ N_{(1,-1)}(s^+ + s^-) &\in SL(3, \mathbb{Z}), & N_{(2,-2)}(s^+ - s^-) &\in SL(3, \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Pour la première appartenance, on combine 4.10 et 4.11, pour écrire ici

$$N_{(1,-2)}(s^+) = JN_{(-1,2)}(-s^+)J = JN_{(2,-1)}(s^+)^{-1}J.$$

Le déterminant de  $J$  valant  $-1$ , et  $J$  ayant ses coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , l'hypothèse  $N_{(2,-1)}(s^+) \in SL(3, \mathbb{Z})$  garantit que l'on a aussi  $N_{(1,-2)}(s^+) \in SL(3, \mathbb{Z})$ . Le même procédé utilisant seulement le fait que  $SL(3, \mathbb{Z})$  est un groupe et

$$N_{(2,1)}(-s^-) = N_{(1,2)}(s^-)^{-1}$$

garantit que cette matrice est aussi dans  $SL(3, \mathbb{Z})$ . Utilisant alors 4.6, on a

$$\begin{aligned} N_{(1,-1)}(s^+ + s^-) &= N_{(2,-1)}(s^+)N_{(1,2)}(s^-) \in SL(3, \mathbb{Z}), \\ N_{(2,-2)}(s^+ - s^-) &= N_{(1,-2)}(s^+)N_{(2,1)}(-s^-) \in SL(3, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

La proposition énoncée est donc établie .

### 4.3. Le coeur de la démonstration de Riedel

Considérant alors une hypothèse plus générale, Riedel donne dans [19] son lemme 3.10, où il indique que si  $N_{(i,j)}(s) \in M_3(\mathbb{Z})$  pour  $i, j \in \{\pm 1, \pm 2\}$  et un nombre rationnel  $s = (p/q)$ , avec  $p, q$ , entiers premiers entre eux, alors les seuls cas possibles sont les suivants :

$$1/ \text{ Si } ij = -1 \text{ ou } ij = -4 \text{ alors } q = 9m,$$

$$2/ \text{ Si } ij = 2 \text{ alors } q = 9g,$$

$$3/ \text{ Si } ij = -2 \text{ alors } q = 9f.$$

Les possibilités correspondantes pour  $(i, j)$  sont à une permutation près de  $i$  et  $j$  sont au nombre de six  $(1, -1), (1, 2), (1, -2), (2, -1), (2, -2), (-1, -2)$ , et les seuls cas vraiment intéressants pour la démonstration de la conjecture sont ceux où  $i \neq \pm j$ , il n'en reste que 4, se réduisant au seul cas  $(1, 2)$  selon l'indexation retenue pour les triplets. L'énoncé de ce dernier lemme qui fait jouer un rôle différent à  $m, g, f$ , paraît un peu obscur, d'autant que les vérifications des différents cas sont complètement omises par l'auteur. Il faut donc y regarder de plus près pour vérifier ce qu'annonce Riedel dans son lemme 3.10. On va voir qu'il y a une erreur dans son énoncé.

#### 4.3.1. Analyse du lemme 3.10 de Riedel

Développons dans le cadre général où  $m_1 = m_2 = m$  l'essence du raisonnement que fait Riedel ([19] page 18) dans l'intention d'établir son lemme. Oubliant des indices trop généraux, notons simplement comme avant  $N(s) = N_{(1,2)}(s) \in M_3(\mathbb{Z})$  une matrice qui vérifie :

$${}^t N(s) M_2 N(s) = M_1.$$

On a vu avec 3.25 et 3.20 que l'on pouvait écrire :

$$N(s) = r \exp\left(-\frac{R_2}{2}s\right) \tilde{N} - \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ a_2 c_2 & a_1 c_1 \end{pmatrix} {}^t \Phi.$$

D'où avec 3.10 et 3.11 ainsi que l'hypothèse sur  $N(s)$ , ou simplement avec 3.56 :

$$\begin{aligned} S_2 N(s) &= r S_2 \left(1 + s S_2 + \frac{s^2 - s}{2} S_2^2\right) \tilde{N} \\ &= r S_2 \tilde{N} + s r S_2^2 \tilde{N} \\ &= \frac{1}{m} (\Omega_0 + m \Omega_1) + s {}^t \Phi \in M_3(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Dans le cas présent on trouve ainsi, avec  $N(s), \Omega_1 \in M_3(\mathbb{Z})$  :

$$\frac{1}{m}\Omega_0 + s^t\Phi \in M_3(\mathbb{Z}). \quad (4.14)$$

Rappelons ici que  $\Omega_0$  s'écrit, d'après 3.59 où  $m_1 = m_2 = m$ , ou simplement l'expression 3.10 donnée avant, on a :

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} a_1c_2 - c_1a_2 & 0 & -a_1a_2 - c_1c_2 \\ -c_2(a_1a_2 + c_1c_2) & 0 & c_2(c_1a_2 - a_1c_2) \\ a_1a_2 + c_1c_2 & 0 & a_1c_2 - c_1a_2 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Avec le corollaire 3.5 de [19], que l'on a vérifié avant en en donnant une formulation plus précise, on sait que l'on peut factoriser  $m$  sous la forme  $m = 2^{l_1}3fg$ , avec  $f$  et  $g$  sont deux entiers impairs premiers entre eux et premiers à 6 tels que  $f^2$  divise  $a_1c_2 - c_1a_2$  et  $g^2$  divise  $a_1a_2 - c_1c_2$ . De plus  $f$  n'a aucun facteur commun avec  $a_1a_2 - c_1c_2$ , et  $g$  n'a aucun facteur premier commun avec  $a_1c_2 - c_1a_2$ . Ceci permet d'écrire

$$\frac{1}{m}\Omega_0 = \frac{1}{2^{l_1}3g} \begin{pmatrix} ((a_1c_2 - c_1a_2)f^{-1}) & 0 & -((a_1a_2 + c_1c_2)f^{-1}) \\ -c_2((a_1a_2 + c_1c_2)f^{-1}) & 0 & -c_2((a_1c_2 - c_1a_2)f^{-1}) \\ ((a_1a_2 + c_1c_2)f^{-1}) & 0 & ((a_1c_2 - c_1a_2)f^{-1}) \end{pmatrix},$$

où par construction de  $f$  on a  $((a_1c_2 - c_1a_2)f^{-1})$  entier. On se demande d'ailleurs si  $((a_1a_2 + c_1c_2)f^{-1})$  entier, ce qui dans [19] page 18 (bas de page) semble aller de soi par application du lemme 3.3.a de [19], vérifié ci-dessus. Or pour cela il faut disposer d'un résultat un peu plus large que l'on énonce maintenant :

**Proposition 4.12.** *Si  $f$  et  $g$  nombres impairs premiers à 6 sont des diviseurs de  $m$ , alors :*

- a/  $f$  divise  $a_1c_2 - c_1a_2$  si et seulement s'il divise  $a_1a_2 + c_1c_2$ ,*
- b/  $g$  divise  $a_1a_2 - c_1c_2$  si et seulement s'il divise  $a_1c_2 + c_1a_2$ .*

Supposons en effet que l'on ait avec  $h$  entier  $a_1c_2 - c_1a_2 = fh$ . On peut alors écrire, avec  $f$  diviseur de  $m$  et premier à 3, donc premier à  $a_1$ , premier à  $b_1$ , et premier à  $a_2$  :

$$0 \equiv a_2mb_1 \equiv a_2(a_1^2 + c_1^2) \equiv a_1(a_1a_2 + c_1c_2) - c_1fh \equiv a_1(a_1a_2 + c_1c_2) \pmod{f}.$$



Ceci impose que  $f$  soit un diviseur de  $a_1a_2 + c_1c_2$  et démontre une partie de l'énoncé a/ de la dernière proposition. Supposons inversement qu'avec  $h$  entier, on ait  $a_1a_2 + c_1c_2 = fh$ . On peut alors écrire, avec  $f$  diviseur de  $m$  et premier à 3, donc premier à  $a_1$ , premier à  $b_1$ , et premier à  $c_2$  :

$$0 \equiv c_2mb_1 \equiv c_2(a_1^2 + c_1^2) \equiv a_1(a_1c_2 - c_1a_2) + c_1fh \equiv a_1(a_1c_2 - c_1a_2) \pmod{f}.$$

Ceci impose que  $f$  soit un diviseur de  $a_1c_2 - c_1a_2$  et démontre complètement l'énoncé a/ de la proposition. L'énoncé b/ se vérifie de même.

Appliquant la proposition 21 à la situation précédente, on a donc  $((a_1a_2 + c_1c_2)f^{-1})$  entier. On a dit aussi que  $g$  n'a aucun facteur premier commun avec  $a_1c_2 - c_1a_2$ , donc aussi avec l'entier  $((a_1c_2 - c_1a_2)f^{-1})$ . Supposons par ailleurs qu'un facteur premier  $p$  de  $g$  divise  $((a_1a_2 + c_1c_2)f^{-1})$ , il diviserait aussi  $(a_1a_2 + c_1c_2)$ , donc par la dernière proposition, il diviserait également  $a_1c_2 - c_1a_2$ . Mais ceci est contradictoire avec ce que l'on vient de voir sur  $g$  qui n'a donc aucun facteur premier avec l'entier  $((a_1a_2 + c_1c_2)f^{-1})$ . On a donc pour le moment établi que l'on a, ceci dans le cas le plus général, et sans que  $g$  puisse être diminué :

$$\frac{1}{m}\Omega_0 \in \frac{1}{2^{l_1}3g}M_3(\mathbb{Z}).$$

Il reste à comprendre ce qui peut être dit du facteur  $2^{l_1}3$  de  $m$  qui reste au dénominateur. On voit d'abord que l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}\Omega_0 &= \frac{1}{2^{l_1}g} \begin{pmatrix} ((a_1c_2 - c_1a_2)(3f)^{-1}) & 0 & -((a_1a_2 + c_1c_2)(3f)^{-1}) \\ -c_2((a_1a_2 + c_1c_2)(3f)^{-1}) & 0 & -c_2((a_1c_2 - c_1a_2)(3f)^{-1}) \\ ((a_1a_2 + c_1c_2)(3f)^{-1}) & 0 & ((a_1c_2 - c_1a_2)(3f)^{-1}) \end{pmatrix} \\ &\in \frac{3}{2^{l_1}g}M_3(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Considérons alors le facteur  $2^{l_1}$  de  $m$  du dénominateur. On a vu précédemment que l'on a  $l_1 = 1$  ou  $l_1 = 0$ , les triplets de plus bas niveau de l'arbre montrant d'ailleurs que les deux cas restent possibles. Le premier impose  $m$  pair et donc  $a_1, c_1, a_2, c_2$ , impairs, donc aussi  $a_1c_2 - c_1a_2$  et  $a_1a_2 + c_1c_2$  pairs, et encore puisque  $3f$  impair,  $(a_1c_2 - c_1a_2)(3f)^{-1}$  et  $(a_1a_2 + c_1c_2)(3f)^{-1}$  pairs. Finalement, on peut

écrire, avec une matrice  $3 \times 3$  dont tous les coefficients sont entiers :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}\Omega_0 &= \frac{1}{g} \begin{pmatrix} ((a_1c_2 - c_1a_2)(2^{l_1}3f)^{-1}) & 0 & -((a_1a_2 + c_1c_2)(2^{l_1}3f)^{-1}) \\ -c_2((a_1a_2 + c_1c_2)(2^{l_1}3f)^{-1}) & 0 & -c_2((a_1c_2 - c_1a_2)(2^{l_1}3f)^{-1}) \\ ((a_1a_2 + c_1c_2)(2^{l_1}3f)^{-1}) & 0 & ((a_1c_2 - c_1a_2)(2^{l_1}3f)^{-1}) \end{pmatrix} \\ &\in \frac{3}{g}M_3(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

La même conclusion est bien entendu vraie pour le cas  $l_1 = 0$ . En concrétisant le fait que les termes  $a_1, c_1, a_2, c_2$ , sont multiples de 3, on peut donc énoncer :

**Proposition 4.13.** *La condition  $N(s) \in M_3(\mathbb{Z})$  étant assurée, on peut factoriser  $m$  sous la forme  $m = 2^{l_1}3fg$ , avec  $l_1 \in \{0, 1\}$ ,  $f$  et  $g$  deux entiers impairs premiers entre eux et premiers à 6 tels que  $f^2$  divise  $a_1c_2 - c_1a_2$  et  $g^2$  divise  $a_1a_2 - c_1c_2$ . De plus  $g$  n'a aucun facteur commun avec  $(a_1c_2 - c_1a_2)(2^{l_1}3f)^{-1}$  qui est un entier, et  $g$  n'a aucun facteur premier commun avec  $(a_1a_2 + c_1c_2)(2^{l_1}3f)^{-1}$  qui est un autre entier. Et l'on a, avec des entiers  $\alpha_1 = (a_1/3), \gamma_1 = (c_1/3), \alpha_2 = (a_2/3), \gamma_2 = (c_2/3)$  :*

$$\begin{aligned} \frac{g}{3m}\Omega_0 &= \begin{pmatrix} ((\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2)(2^{l_1}f)^{-1}) & 0 & -((\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2)(2^{l_1}f)^{-1}) \\ -c_2((\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2)(2^{l_1}f)^{-1}) & 0 & -c_2((\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2)(2^{l_1}f)^{-1}) \\ ((\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2)(2^{l_1}f)^{-1}) & 0 & ((\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2)(2^{l_1}f)^{-1}) \end{pmatrix} \\ &\in M_3(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Avec les notations introduites dans la dernière proposition, et avec l'expression vue ci-dessus pour  ${}^t\Phi$  :

$$s^t\Phi = 9s \begin{pmatrix} \gamma_2\gamma_1 & \gamma_2(m/3) & \gamma_2\alpha_1 \\ -\beta_2\gamma_1 & -\beta_2(m/3) & -\beta_2\alpha_1 \\ \alpha_2\gamma_1 & \alpha_2(m/3) & \alpha_2\alpha_1 \end{pmatrix} \in 9sM_3(\mathbb{Z}).$$

En effet le plus grand commun diviseur des coefficients de la matrice  ${}^t\Phi$  est égal à 9. Ceci se voit facilement avec ce que l'on a rappelé sur le le plus grand commun diviseur des termes de tout triplet vérifiant l'équation de Markoff 2.1 qui vaut 3, ce qui introduit les entiers premiers entre eux  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ . Revenant maintenant à la relation 4.14, on voit alors avec notre dernière proposition, et en

appliquant le théorème de Bezout aux termes de  ${}^t\Phi$  pour identifier une combinaison linéaire à coefficients entiers adéquate, que l'on peut écrire avec des entiers  $u, v$  :

$$\frac{3}{g}u + 9s = v,$$

donc :

$$9sg = gv - 3u \in \mathbb{Z}.$$

Ceci permet de poser  $s = \frac{n}{9g}$ , avec  $n = gv - 3u$  entier. Supposons d'ailleurs que  $n$  et  $g$  aient un facteur premier commun  $p$ , nécessairement impair et différent de 3 car divisant  $g$ , on aurait dans  $M_3(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} & (g/p)\left(\frac{1}{m}\Omega_0 + s{}^t\Phi\right) \\ = & \frac{1}{p} \begin{pmatrix} ((a_1c_2 - c_1a_2)(2^{l_1}3f)^{-1}) & 0 & -((a_1a_2 + c_1c_2)(2^{l_1}3f)^{-1}) \\ -c_2((a_1a_2 + c_1c_2)(2^{l_1}3f)^{-1}) & 0 & -c_2((a_1c_2 - c_1a_2)(3f)^{-1}) \\ ((a_1a_2 + c_1c_2)(2^{l_1}3f)^{-1}) & 0 & ((a_1c_2 - c_1a_2)(2^{l_1}3f)^{-1}) \end{pmatrix} \\ & + (n/p)\frac{1}{9}{}^t\Phi, \end{aligned}$$

et donc, puisque les coefficients de  $\frac{1}{9}{}^t\Phi$  sont entiers, nécessairement  $p$  diviseur  $(a_1c_2 - c_1a_2)(2^{l_1}3f)^{-1}$ , donc facteur commun de  $g$  et de  $(a_1c_2 - c_1a_2)$ . Or ceci est contradictoire avec la proposition 13 et la définition adoptée pour  $g$ , et garantit donc que  $n$  et  $g$  n'ont aucun facteur commun. On a donc établi dans ce cas qui correspond à  $(i, j) = (1, 2)$ , soit  $ij = 2$  le résultat suivant :

**Proposition 4.14.** (Lemme 3.10 révisé de [19]) Avec  $N(s) \in M_3(\mathbb{Z})$  vérifiant

$${}^tN(s)M_2N(s) = M_1,$$

on a

$$s \in \frac{1}{9g}\mathbb{Z},$$

où  $g$  diviseur de  $m = 2^{l_1}3fg$ , avec  $l_1 \in \{0, 1\}$ ,  $f$  et  $g$  entiers impairs premiers entre eux et premiers à 6, et  $g$  tel que  $g^2$  divise  $a_1a_2 - c_1c_2$ . De plus le nombre  $f^2$  divise  $a_1c_2 - c_1a_2$ , le nombre  $g$  n'a aucun facteur commun avec  $(a_1c_2 - c_1a_2)(2^{l_1}3f)^{-1}$  qui est un entier, et  $g$  n'a aucun facteur premier commun avec  $(a_1a_2 + c_1c_2)(2^{l_1}3f)^{-1}$  qui est un autre entier. Enfin on peut écrire

$$s = \frac{n}{9g},$$

avec  $n$  premier à  $g$ .

Il est un cas particulier qui rentre à la limite dans cette proposition, mais que l'on peut examiner de façon directe, c'est celui où  $(a_2, b_2, c_2) = (a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) = (c_1, b_1, a_1)$ . Avec 4.15 et en écrivant  $m = 2^{l_1}3\mathfrak{m}$ , il donne seulement, avec  $a_1$  et  $c_1$  multiples de 3 :

$$\frac{1}{m}\Omega_0 = \frac{3}{2^{l_1}\mathfrak{m}} \begin{pmatrix} ((a_1/3)^2 - (c_1/3)^2) & 0 & -2(a_1/3)(c_1/3) \\ -2a_1(a_1/3)(c_1/3) & 0 & a_1((c_1/3)^2 - (a_1/3)^2) \\ 2(a_1/3)(c_1/3) & 0 & ((a_1/3)^2 - (c_1/3)^2) \end{pmatrix}.$$

Deux cas sont à considérer  $l_1 = 1$  ou  $l_1 = 0$ . Le premier donne  $m$  pair, et donc  $a_1$  et  $c_1$  impairs, donc  $(a_1/3)^2 - (c_1/3)^2$  pair permettant une simplification par  $2^{l_1}$ . Le cas  $l_1 = 0$  donne plus simplement la même conclusion. Tout autre facteur premier  $p$  de  $\mathfrak{m}$ , ne pourrait ni diviser  $a_1c_1$ , ni diviser  $a_1^2 - c_1^2$  par ce que l'on a dit sur les solutions de l'équation de Markoff 2.1. On retrouve donc la propriété précédente avec  $g = \mathfrak{m}$  et  $f = 1$ . Les conditions de divisibilité se vérifient en utilisant le fait que la matrice  $\frac{1}{m}\Omega_0 + s^t\Phi$  est à coefficients entiers. Sur le terme de la première ligne et première colonne de cette matrice, on a avec des entiers  $u_{11}$ ,  $((a_1/3)^2 - (c_1/3)^2)2^{-l_1}$ ,  $(c_2/3)$ ,  $(c_1/3)$  :

$$3(((a_1/3)^2 - (c_1/3)^2)2^{-l_1}) + 9\mathfrak{m}s(c_2/3)(c_1/3) = \mathfrak{m}u_{11}.$$

Mais  $\mathfrak{m}s \in \mathbb{Q}$ , et donc cette égalité n'impose nullement que  $u_{11}$  soit multiple de 3. En écrivant les égalités équivalentes sur les autres termes de la matrice et en utilisant le théorème de Bezout pour construire une combinaison des coefficients de  ${}^t\Phi$  égale à 9, il reste facilement dans ce cas particulier

$$s \in \frac{1}{9\mathfrak{m}}\mathbb{Z}.$$

On vérifie donc bien que l'on peut écrire  $s = \frac{n}{9\mathfrak{m}}$ , avec  $n$  entier. Supposons que  $n$  et  $\mathfrak{m}$  aient un facteur premier commun  $p$ , nécessairement impair, différent de 3 car divisant  $\mathfrak{m}$ , on aurait dans  $M_3(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{m}/p)\left(\frac{1}{m}\Omega_0 + s^t\Phi\right) \\ &= \frac{1}{p} \begin{pmatrix} ((a_1^2 - c_1^2)(2^{l_1}3)^{-1}) & 0 & -((2a_1c_1)(2^{l_1}3)^{-1}) \\ -a_1((2a_1c_1)(2^{l_1}3)^{-1}) & 0 & -a_1((a_1^2 - c_1^2)(3)^{-1}) \\ ((2a_1c_1)(2^{l_1}3)^{-1}) & 0 & ((a_1^2 - c_1^2)(2^{l_1}3)^{-1}) \end{pmatrix} + (n/p)\frac{1}{9}\Phi, \end{aligned}$$

et donc, puisque les coefficients de  $\frac{1}{9} {}^t \Phi$  sont entiers comme  $(n/p)$ , nécessairement  $p \neq 3$  facteur premier de  $(a_1^2 - c_1^2)$  et de  $a_1 c_1$ , donc aussi de  $a_1$  et  $c_1$ . Or ceci est contradictoire avec ce que l'on a dit sur les solutions de l'équation de Markoff 2.1. Donc  $n$  et  $m$  sont premiers entre eux. On a donc établi dans ce cas qui correspond à  $(i, j) = (1, -1)$ , soit  $ij = -1$  :

**Proposition 4.15.** (Lemme 3.10 révisé de [19]) Avec  $N(s) \in M_3(\mathbb{Z})$  vérifiant

$${}^t N(s) M_{-1} N(s) = M_1,$$

on a

$$s \in \frac{1}{9m} \mathbb{Z},$$

où  $m = 2^{l_1} 3m$ , avec  $l_1 \in \{0, 1\}$ . Enfin on peut écrire

$$s = \frac{n}{9m},$$

avec  $n$  premier à  $m$ .

En permutant le rôle des indices  $i$  et  $j$  dans les deux dernières propositions les autres cas du lemme 3.10 de [19] se vérifient aisément. De sorte que ce lemme est complètement révisé à la remarque près, par rapport à l'énoncé de Riedel, qu'il reste à comprendre si  $n$  est ou non divisible par 3. Il y a là une imprécision dans [19] qui part de  $s = \frac{p}{q}$ , avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux, pour en conclure à l'expression de  $q$  donnée par son lemme 3.10 ( $q = 9g$ , respectivement  $q = 9m$ , dans les cas de nos deux dernières propositions). Nos deux derniers énoncés ne prétendent pas que  $p = n$  soit premier à 3. Ils donnent une décomposition du dénominateur  $9g = q$  en deux facteurs premiers entre eux  $9 = 3^2$  et  $g$ , dont seul le dernier est premier au numérateur  $n = p$ . S'il advient que  $n$  soit divisible par 3, en simplifiant l'énoncé du lemme 3.10 par Riedel deviendrait faux.

#### 4.3.2. Défaillance de l'argument décisif

L'idée que suggère la fin de l'article [19] de Norbert Riedel est la possibilité d'exploiter le dernier lemme considéré. Partant d'un  $(a_1, b_1, c_1)$  correspondant à une valeur  $m$ , on en trouve un autre correspondant à  $m$  qui est  $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) = (c_1, b_1, a_1)$ , associé pour l'application de la propriété précédente à  $m$ . Le cas que l'on doit approfondir est celui où il existe un troisième triplet  $(a_2, b_2, c_2)$  différent

de  $(a_1, b_1, c_1)$  et de  $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1})$ , correspondant à la même valeur  $m$ , associé quant à lui pour l'application du lemme 3.10 à un diviseur  $g$  de  $\mathfrak{m}$ . Il existe dans ce cas un quatrième triplet  $(a_{-2}, b_{-2}, c_{-2})$  correspondant à la même valeur  $m$ . Il s'agit pour démontrer la conjecture de Frobenius d'établir que cette situation est impossible. Pour y parvenir, l'idée de Riedel est d'utiliser les contraintes induites sur les différentes matrices  $N$  apparaissant dans ce cas pour en déduire une contradiction. Considérons donc les deux matrices  $N_{(1,2)}(s^-) \in SL(3, \mathbb{Z})$  et  $N_{(2,-1)}(s^+) \in SL(3, \mathbb{Z})$  vérifiant respectivement

$${}^t N_{(1,2)}(s^-) M_2 N_{(1,2)}(s^-) = M_1, \quad (4.16)$$

$${}^t N_{(2,-1)}(s^+) M_{-1} N_{(2,-1)}(s^+) = M_2. \quad (4.17)$$

Par la proposition 1 (la proposition 1.2 de [19]) de telles matrices existent, et on a rappelé comment les construire au début du présent article. On a aussi vu ci-dessus, autour de notre proposition 9, comment construire les nombres rationnels associés  $s^-$  et  $s^+$ . En appliquant alors notre proposition 23 à 4.16 avec  $m = 2^{l_1} 3fg$ , où  $f = f^-$ ,  $g = g^-$ ,  $g^2$  divisant  $a_1 a_2 - c_1 c_2$ , et  $f^2$  divisant  $a_1 c_2 - c_1 a_2$ , on obtient :

$$s^- \in \frac{1}{9g} \mathbb{Z}.$$

En appliquant encore notre proposition 22 à 4.17 avec  $m = 2^{l_1} 3f^+ g^+$ ,  $(g^+)^2$  divisant  $a_2 a_{-1} - c_2 c_{-1} = a_2 c_1 - c_2 a_1$ , et  $(f^+)^2$  divisant  $a_2 c_{-1} - c_2 a_{-1} = a_2 a_1 - c_2 c_1$ , on observe d'abord par les conditions sur les facteurs premiers communs que l'on a nécessairement  $f^+ = g$  et  $g^+ = f$ . Ceci donne :

$$s^+ \in \frac{1}{9f} \mathbb{Z}.$$

On note, en cohérence avec la proposition 23 (lemme 3.10 de [19]) :

$$s^+ = \frac{n^+}{9f}, \quad s^- = \frac{n^-}{9g}, \quad \text{où } n^+, n^- \in \mathbb{Z}, \quad (4.18)$$

où  $n^+$  et  $f$  sans facteur commun, de même que  $n^-$  et  $g$ . Maintenant la combinaison des égalités 4.16 et 4.17 donne avec 4.6 :

$$\begin{aligned} & {}^t N_{(1,2)}(s^-) N_{(2,-1)}(s^+) M_{-1} N_{(2,-1)}(s^+) N_{(1,2)}(s^-) \\ &= {}^t N_{(1,-1)}(s^+ + s^-) M_{-1} N_{(1,-1)}(s^+ + s^-) \\ &= M_1 \end{aligned}$$

En notant  $s_1 = s^+ + s^-$  comme dans le lemme 3.9 de [19] et en observant que  $N_{(1,-1)}(s_1)$  est dans  $SL(3, \mathbb{Z})$  on conclut avec notre propriété 23 que l'on a

$$s_1 = s^+ + s^- = \frac{n^+g + n^-f}{9\mathfrak{m}} \in \frac{1}{9\mathfrak{m}}\mathbb{Z}.$$

De sorte que si l'on note ce nombre  $s_1 = (n_1/9\mathfrak{m})$ , avec  $n_1$  entier et  $n_1$  et  $\mathfrak{m} = fg$  sans facteur commun, on a :

$$n_1 = n^+g + n^-f. \quad (4.19)$$

Riedel fait alors intervenir dans sa démonstration ([19] bas de la page 19) la matrice  $N_{(2,-2)}(s^+ - s^-)$ . Résumons sur un schéma les relations que l'on peut considérer dans la situation étudiée :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & N_{(1,2)}(s^-) & & \\
 & M_1 & \longleftarrow & & M_2 \\
 N_{(1,-1)}(s^+ + s^-) & \uparrow & \nearrow N_{(2,-1)}(s^+) & \uparrow & N_{(2,-2)}(s^+ - s^-) \\
 = N_{(1,-1)}(s_1) & & & & = N_{(2,-2)}(s_2) \\
 & M_{-1} & \longleftarrow & & M_{-2} \\
 & & N_{(-1,-2)}(-s^-) & & \\
 & & \text{fig.9} & & 
 \end{array}$$

Dans les calculs que l'on vient de faire, on a simplement appliqué la "relation de Chasles" (4.6) sur le triangle supérieur du diagramme :

$$N_{(2,-1)}(s^+)N_{(1,2)}(s^-) = N_{(1,-1)}(s^+ + s^-).$$

Maintenant intervient le triangle inférieur du diagramme, où on peut considérer grâce à 4.11 une nouvelle matrice de  $SL(3, \mathbb{Z})$

$$N_{(-1,-2)}(-s^-) = JN_{(1,2)}(s^-)J.$$

On a encore une "relation de Chasles" (4.6) définissant la matrice  $N_{(2,-2)}(s^+ - s^-)$  de  $SL(3, \mathbb{Z})$  :

$$N_{(-1,-2)}(-s^-)N_{(2,-1)}(s^+) = N_{(2,-2)}(s^+ - s^-).$$

Comme dans le lemme 3.9 de Riedel, en posant cette fois  $s_2 = s^+ - s^-$ , avec  $N_{(2,-2)}(s_2) \in SL(3, \mathbb{Z})$  on conclut avec notre propriété 23 que l'on a

$$s_2 = s^+ - s^- = \frac{n^+g - n^-f}{9\mathfrak{m}} \in \frac{1}{9\mathfrak{m}}\mathbb{Z}.$$

De sorte que si l'on note ce nombre  $s_2 = (n_2/9\mathfrak{m})$ , avec  $n_2$  entier premier à  $\mathfrak{m} = fg$ , on a cette fois :

$$n_2 = n^+g - n^-f. \quad (4.20)$$

Les nombres  $n_2$  et  $g$  sont premiers entre eux. On peut vérifier de même que  $n_1$  et  $f$  sont premiers entre eux. L'égalité 4.20 permet d'écrire avec 4.18 et l'expression  $m = 2^{l_1}3fg$  :

$$s^+ - s_2 = s^- = \frac{n^-}{9g} = 2^{l_1} \frac{n^-f}{3m} = 2^{l_1} \frac{n^+g - n_2}{3m} = \frac{n^+g - n_2}{9\mathfrak{m}}, \quad (4.21)$$

$$s_1 = 2^{l_1} \frac{n_1}{3m} = \frac{n_1}{9\mathfrak{m}}, \quad s_2 = 2^{l_1} \frac{n_2}{3m} = \frac{n_2}{9\mathfrak{m}}.$$

Considérons maintenant

$$m^2 N_{(1,2)}(s^-) = m^2 N_{(1,2)}(s^+ - s_2).$$

Combinant les expressions auxquelles on est parvenu pour préciser l'expression 3.5 grâce aux égalités 3.9, 3.10 et 3.11, ainsi que 3.29, on retrouve de façon générale :

$$N(s) = \frac{1}{m^2}(\Gamma_0 + m\Gamma_1 + m^2\Gamma_2) + \frac{s}{m}(\Omega_0 + m\Omega_1) + \frac{(s^2 - s)}{2} {}^t\Phi - \frac{1}{m} \left( \frac{1}{a_2c_2} - \frac{1}{a_1c_1} \right) {}^t\Phi.$$

Cette expression peut plus directement être obtenue avec 3.53 et 3.54, ou 3.63 L'appliquant à la matrice que l'on considère ici, elle donne :

$$\begin{aligned} m^2 N_{(1,2)}(s^-) &= m^2 N_{(1,2)}(s^+ - s_2) \\ &= (\Gamma_0 + m\Gamma_1 + m^2\Gamma_2) + (s^+ - s_2)m(\Omega_0 + m\Omega_1) \\ &\quad + \frac{((s^+ - s_2)^2 - (s^+ - s_2))}{2} m^2 ({}^t\Phi) - m \left( \frac{1}{a_2c_2} - \frac{1}{a_1c_1} \right) ({}^t\Phi). \end{aligned}$$

On trouve en réalité une expression différente de celle que donne Riedel dans [19] (p. 19), notamment parce qu'il oublie le dernier terme de l'expression que l'on



vient de donner. Pour le voir il suffit d'utiliser 4.21 et de remplacer  $(s^+ - s_2)$  par son expression (Riedel se limite au cas  $l_1 = 0$  alors qu'on traite ici le cas général) :

$$\begin{aligned} & m^2 N_{(1,2)}(s^-) \\ = & (\Gamma_0 + m\Gamma_1 + m^2\Gamma_2) + \frac{2^{l_1}}{3}(\Omega_0 + m\Omega_1)(n^+g - n_2) \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{2^{2l_1}}{9}(n^+g - n_2)^2 - \frac{2^{l_1}}{3}(n^+g - n_2)m \right) ({}^t\Phi) - m \left( \frac{1}{a_2c_2} - \frac{1}{a_1c_1} \right) ({}^t\Phi). \end{aligned}$$

On ne peut donc conclure comme le fait Norbert Riedel, même en ayant recours aux quatre termes qu'il définit ensuite  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$ . Au demeurant son imprécision revient pour lui à supposer implicitement que  $a_1c_1 = a_2c_2$ , c'est à dire puisque  $m_1 = m_2$  que  $b_1 = b_2$ , et avec l'équation de Markoff  $a_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + c_2^2$ , donc facilement  $a_1 = a_2$  et  $c_1 = c_2$ , ou  $a_1 = c_2$  et  $c_1 = a_2$ . En d'autres termes, sans même entrer dans le détail des développements donnés par Norbert Riedel à partir des termes  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$ , on voit qu'il induit sa conclusion par une imprécision dans le calcul qu'il mène. Sa démonstration de la conjecture de Frobenius est donc défailante à cet endroit précis (milieu de la page 19).

## 5. Evaluation des paramètres $s$ et applications

L'idée que l'on cherche à mettre en oeuvre ici pour corriger le travail de Norbert Riedel consiste à mieux connaître l'expression du paramètre  $s$  pour en déduire une réponse négative à la conjecture.

### 5.1. Perfectionnement d'un résultat arithmétique déjà vu

Pour tout triplet  $(a_1, b_1, c_1)$  de l'arbre de Riedel posons  $m_1 = a_1c_1 - b_1$ . On peut en toute généralité examiner la factorisation  $m_1 = 2^{l_1}3\mathfrak{m}_1$  où  $\mathfrak{m}_1$  premier à 6. Si  $l_1 = 1$ , avec  $m_1 = a_1c_1 - b_1$  il faut distinguer plusieurs cas. Si  $a_1$  pair, alors  $b_1$  pair et par l'équation de Markoff  $c_1$  pair, donc une contradiction avec le fait que le plus grand commun diviseur de  $a_1, b_1, c_1$ , ne peut être égal à 2. De même le cas  $c_1$  pair est impossible. De sorte que la seule possibilité est alors  $a_1, b_1$  et  $c_1$  impairs. Inversement dans ce cas  $m_1$  est pair et donc nécessairement  $l_1 = 1$ . Ceci permet d'énoncer de façon générale :

**Proposition 5.1.** *Pour tout triplet  $(a_1, b_1, c_1)$  de l'arbre de Riedel on a  $m_1 = a_1 c_1 - b_1 = 2^{l_1} 3 m_1$ , où  $m_1$  nombre premier à 6, et  $l_1 \in \{0, 1\}$ . De plus on a équivalence de  $l_1 = 1$  et du fait que  $a_1, b_1$  et  $c_1$  sont impairs.*

## 5.2. Une première extension du lemme 3.10 de Riedel

### 5.2.1. Autour de la racine de l'arbre

On part de la racine de l'arbre de Riedel  $(a_0, b_0, c_0) = (3, 3, 3)$ , on s'intéresse aux matrices  $N(s) = N_{(1,0)}(s)$  qui l'envoient sur un autre triplet de l'arbre  $(a_1, b_1, c_1) = (a, b, c)$ . Par définition la matrice  $N(s)$  est dans  $SL(3, \mathbb{Z})$  et vérifie :

$${}^t N(s) M_0 N(s) = M_1.$$

Par ce que l'on a vu en 3.48, on peut écrire

$$N(s) = \exp\left(-\frac{R_0}{2}s\right) N(0),$$

où l'expression de  $N(0) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{36}\right) {}^t \Phi$  a été donnée en 3.47 et se simplifie ici en

$$\frac{1}{2m_1} \begin{pmatrix} 5a_1 - (c_1 \frac{6}{m_1}) & 0 & c_1 - (\frac{6}{m_1} a_1) \\ -3a_1 + c_1 \frac{6}{m_1} + \frac{1}{3} c_1 m_1 & \frac{1}{3} m_1^2 & 3c_1 + \frac{6}{m_1} (a_1 - c_1 m_1) + \frac{1}{3} a_1 m_1 \\ (a_1 - c_1 \frac{6}{m_1}) & 0 & 5c_1 - (\frac{6}{m_1} a_1) \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

On a dans le cas présent :

$${}^t \Phi = \begin{pmatrix} 3c_1 & 3m_1 & 3a_1 \\ -3c_1 & -3m_1 & -3a_1 \\ 3c_1 & 3m_1 & 3a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} (c_1 \quad m_1 \quad a_1) \in 9M_3(\mathbb{Z}).$$

Avec 2.28, on a dans le cas présent :

$$R_0 = \begin{pmatrix} -9 & -12 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 12 & 9 \end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 6 \\ -6 & -9 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\exp\left(-s \frac{R_0}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{9}{2}s + \frac{9}{2}s^2 & 6s + 9s^2 & \frac{3}{2}s + \frac{9}{2}s^2 \\ -\frac{3}{2}s - \frac{9}{2}s^2 & 1 - 9s^2 & \frac{3}{2}s - \frac{9}{2}s^2 \\ -\frac{3}{2}s + \frac{9}{2}s^2 & -6s + 9s^2 & 1 - \frac{9}{2}s + \frac{9}{2}s^2 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Ceci permet de donner, en effectuant le produit des matrices précédentes, une expression de la matrice  $N(s) = \exp(-sR_0/2)N(0)$ . D'où aussi la matrice  $S_0N(s)$ . Avec  $S_0^2N(0) = {}^t\Phi$  et  $S_0{}^t\Phi = 0$  la matrice  $S_0N(s)$  s'écrit en effet facilement sous la forme suivante permettant d'utiliser 5.1

$$\begin{aligned} S_0N(s) &= S_0N(0) + sS_0^2N(0) = S_0(N(0) - \frac{1}{2}(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_0^2}){}^t\Phi) + s{}^t\Phi \\ &= \frac{1}{2m_1} \begin{pmatrix} (6a_1 + 5c_1m_1) & 5m_1^2 & (5a_1m_1 - 6c_1) \\ (-3)(2a_1 + c_1m_1) & -3m_1^2 & (-3)(a_1m_1 - 2c_1) \\ (6a_1 + c_1m_1) & m_1^2 & (a_1m_1 - 6c_1) \end{pmatrix} \\ &\quad + s \begin{pmatrix} 3c_1 & 3m_1 & 3a_1 \\ -3c_1 & -3m_1 & -3a_1 \\ 3c_1 & 3m_1 & 3a_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où l'on voit apparaître en cohérence avec 3.58

$$\begin{aligned} S_0N(0) &= \frac{1}{m_1}(\Omega_0 + m_1\Omega_1) \\ &= \frac{1}{2m_1} \begin{pmatrix} (6a_1 + 5c_1m_1) & 5m_1^2 & (5a_1m_1 - 6c_1) \\ (-6a_1 - 3c_1m_1) & -3m_1^2 & (-3a_1m_1 + 6c_1) \\ (6a_1 + c_1m_1) & m_1^2 & (a_1m_1 - 6c_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut alors regarder comment se traduit dans le contexte présent le lemme 3.10 de Riedel. La condition  $N(s) \in SL(3, \mathbb{Z})$  impose  $S_0N(s) \in M_3(\mathbb{Z})$ . Celle-ci impose d'abord  $s$  rationnel. Et même en fabriquant une combinaison linéaire adéquate des coefficients des matrices  $\frac{1}{m_1}(\Omega_0 + m_1\Omega_1)$  et  ${}^t\Phi$ , issue du théorème de Bezout appliqué aux termes de la matrice  ${}^t\Phi$  (dont le plus grand commun diviseur vaut 9), on trouve des entiers  $u$  et  $v$  tels que

$$\frac{u}{2m_1} + 9s = v,$$

donc

$$18m_1s \in \mathbb{Z}.$$

Mieux encore, en regardant la seconde colonne des matrices précédentes, on trouve une matrice à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  qui s'écrit :

$$\frac{1}{2m_1} \begin{pmatrix} 5m_1^2 \\ -3m_1^2 \\ m_1^2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3m_1 \\ -3m_1 \\ 3m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}m_1 + 3m_1s \\ -\frac{3}{2}m_1 - 3m_1s \\ \frac{1}{2}m_1 + 3m_1s \end{pmatrix},$$

Si  $m_1$  pair ceci impose  $3m_1s \in \mathbb{Z}$ , et si  $m_1$  impair ceci impose  $6m_1s \in \mathbb{Z}$ . On est donc assuré dans les deux cas que l'on peut écrire avec un entier  $\alpha \in \mathbb{Z}$  :

$$s = \frac{\alpha}{6m_1}.$$

Cette écriture est différente de celle donnée dans notre proposition 23 (le lemme 3.10 révisé de [19]). Il faut donc en savoir plus sur la façon dont se construisent ces valeurs  $s$ . Allons plus loin en posant  $s = \frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux, il vient avec l'expression de  $S_0N(s)$  précédente :

$$\begin{pmatrix} \frac{q(6a_1+5c_1m_1)+6pm_1c_1}{2m_1q} & \frac{5qm_1+6pm_1^2}{2q} & \frac{q(5a_1m_1-6c_1)+6pm_1a_1}{2m_1q} \\ \frac{q(-6a_1-3c_1m_1)-6pm_1c_1}{2m_1q} & \frac{-3qm_1-6pm_1^2}{2q} & \frac{q(-3a_1m_1+6c_1)-6pm_1a_1}{2m_1q} \\ \frac{q(6a_1+c_1m_1)+6pm_1c_1}{2m_1q} & \frac{qm_1+6pm_1^2}{2q} & \frac{q(a_1m_1-6c_1)+6pm_1a_1}{2m_1q} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}).$$

Il est facile de s'assurer que cette condition d'appartenance se réduit seulement à trois conditions, où  $u, v, w$ , entiers :

$$q(6a_1 + 5c_1m_1) + 6pm_1c_1 = 2m_1qu,$$

$$5qm_1 + 6pm_1^2 = 2qv,$$

$$q(5a_1m_1 - 6c_1) + 6pm_1a_1 = 2m_1qw.$$

La première égalité montre que  $m_1 = 2^{l_1}3\mathbf{m}_1$  divise  $6qa_1$ , la dernière montre que  $m_1$  divise  $6qc_1$ . Ceci impose, puisque  $a_1, m_1$  et  $c_1$ , ont un plus grand commun diviseur égal à 3, et que  $\mathbf{m}_1$  nombre premier à 6, que  $\mathbf{m}_1$  divise  $q$ . Or on a vu précédemment que l'on pouvait aussi écrire

$$s = \frac{\alpha}{2m_1} = \frac{\alpha}{2^{1+l_1}3\mathbf{m}_1} = \frac{p}{q}, \text{ où } \mathbf{m}_1 \text{ divise } q \text{ et } q \text{ premier à } p,$$

on a donc  $q = 2^{k_1}3^{k_2}\mathbf{m}_1$  avec  $k_1 \in \{0, 1, 2\}$  inférieur à  $1 + l_1$  et  $k_2 \in \{0, 1\}$ . On peut incorporer ces expressions dans les précédentes égalités et simplifier

$$(2^{1-l_1}a_1 + 5c_1\mathbf{m}_1) 2^{l_1} + 2^{1+l_1-k_1}3^{1-k_2}c_1p = 2^{1+l_1}\mathbf{m}_1u, \quad (5.3)$$

$$5 + 2^{l_1+1-k_1}3^{2-k_2}p = 2^{1-l_1}(v/3\mathbf{m}_1), \quad (5.4)$$

$$2^{k_1} (5a_1\mathbf{m}_1 - 2^{1-l_1}c_1) + 2 \times 3^{1-k_2}a_1p = 2^{1+k_1}\mathbf{m}_1w. \quad (5.5)$$

Si  $k_1 = 2$ , alors  $l_1 = 1$ . On a nécessairement  $p$  impair car  $q$  premier à  $p$ . La troisième de ces conditions impose  $a_1$  pair, et la première impose  $c_1$  pair, d'où une contradiction. Ce cas est donc impossible. Il en résulte que l'on a établi :

**Proposition 5.2.** *Toute matrice  $N(s) \in SL(3, \mathbb{Z})$  vérifiant*

$${}^t N(s) M(3, 3, 3) N(s) = M(a_1, b_1, c_1)$$

*est telle que l'on puisse écrire  $s = \frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux. Si  $m_1 = a_1 c_1 - b_1 = 2^{l_1} 3 m_1$ , où  $m_1$  premier à 6 et  $l_1 \in \{0, 1\}$ , on a de plus la condition  $q = 2^{k_1} 3^{k_2} m_1$  avec  $k_1, k_2 \in \{0, 1\}$ . Ceci assure que l'on a*

$$s \in \frac{1}{2^{k_1} 3^{k_2} m_1} \mathbb{Z}.$$

On remarquera que ce résultat n'est qu'en apparence contradictoire, à cause du facteur 2 du dénominateur, avec la proposition 22. En effet, on avait supposé dans ce qui précède  $m \notin \{3, 6\}$ . Notre dernière proposition correspond en fait à un cas où  $m = 6$ .

### 5.2.2. Premier exemple $P : (3, 3, 3) \rightarrow (3, 3, 6)$

On peut illustrer la proposition précédente sur un exemple. Ceci montrera que le cas  $k_1 = k_2 = 1$  est possible, et qu'améliorer l'expression donnée pour le dénominateur de  $s$  dans la dernière proposition est impossible. Avec  $(a_1, b_1, c_1) = (3, 3, 6)$  la matrice de passage que l'on considère est calculable grâce à 2.2, et la valeur correspondant à  $Q = P(3)$  est en fait  $s = s_N$ . Pour calculer cette valeur on procède étape par étape après avoir vérifié que  ${}^t P(3) M_0 P(3) = M_1$ , c'est à dire  $P(3) = N_{(1,0)}(s)$ , simplement noté ici  $N(s)$  :

$$Q = N(s) = P(3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs de  $(a_0, b_0, c_0) = (3, 3, 3)$  et  $(a_1, b_1, c_1) = (3, 3, 6)$  permettent de calculer:

$$T_0 = \begin{pmatrix} 3 & 135 & 162 \\ 6 & -81 & -162 \\ 3 & 27 & 162 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1566 & 1620 \\ 15 & -648 & -810 \\ 3 & 108 & 810 \end{pmatrix},$$

$$\det(T_0) = -(54)^3, \quad \det(T_1) = -(270)^3, \quad r = \sqrt[3]{\frac{\det(T_1)}{\det(T_0)}} = 5,$$

$$\tilde{N} = T_0 T_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{103}{750} & \frac{2}{15} & \frac{22}{375} \\ \frac{77}{750} & \frac{30}{15} & -\frac{750}{375} \\ \frac{43}{750} & \frac{2}{15} & \frac{82}{375} \end{pmatrix}.$$

On utilise ici  $S_0 N(s) \tilde{N}^{-1} = r(S_0 + sS_0^2)$  pour calculer  $s$  en résolvant un système d'équations. On en déduit :

$$s = -\frac{1}{2 \times 3 \times 5}, \quad k_1 = k_2 = 1, \quad m_1 = 5,$$

En multipliant à droite la système précédent par  $\tilde{N}$ , on se ramène à l'égalité  $S_0 N(s) = r(S_0 \tilde{N} + sS_0^2 \tilde{N})$  qui donne

$$rS_0 \tilde{N} = \frac{1}{m_1} (\Omega_0 + m_1 \Omega_1) = \begin{pmatrix} \frac{78}{5} & \frac{75}{2} & \frac{63}{10} \\ -\frac{48}{5} & -\frac{45}{2} & -\frac{33}{10} \\ \frac{18}{5} & \frac{15}{2} & \frac{3}{10} \end{pmatrix},$$

$$rS_0^2 \tilde{N} = {}^t \Phi = \begin{pmatrix} 18 & 45 & 9 \\ -18 & -45 & -9 \\ 18 & 45 & 9 \end{pmatrix}.$$

La valeur trouvée pour  $s$  permet de calculer de façon directe avec 5.2

$$\exp\left(-s \frac{R_0}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{171}{200} & -\frac{19}{100} & -\frac{9}{200} \\ \frac{9}{200} & \frac{99}{100} & -\frac{11}{200} \\ \frac{11}{200} & \frac{100}{21} & \frac{231}{200} \end{pmatrix},$$

Comme on connaît les expressions de la matrice  $Q = N(s) = P(3)$ , de  $r$ , de  $\exp(-s \frac{R_0}{2})$ , de  $\tilde{N}$  et de  ${}^t \Phi$ , on déduit de la valeur de  $\lambda$  à partir de l'égalité

$$N(s) = r \exp\left(-s \frac{R_0}{2}\right) \tilde{N} + \lambda {}^t \Phi.$$

On obtient ainsi une valeur cohérente avec l'expression donnée par 3.43

$$\lambda = -\frac{143}{5400},$$

ce qu'un calcul a posteriori confirme bien :

$$\begin{aligned}
N(s) &= r \exp(-s \frac{R_0}{2}) \tilde{N} + \lambda^t \Phi \\
&= 5 \begin{pmatrix} \frac{171}{200} & -\frac{19}{100} & -\frac{9}{200} \\ \frac{200}{9} & \frac{100}{99} & -\frac{200}{11} \\ \frac{11}{200} & \frac{21}{100} & \frac{231}{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{103}{750} & \frac{2}{15} & \frac{22}{375} \\ \frac{750}{77} & \frac{15}{11} & -\frac{375}{29} \\ \frac{43}{750} & \frac{30}{15} & \frac{82}{375} \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{143}{5400} \begin{pmatrix} 18 & 45 & 9 \\ -18 & -45 & -9 \\ 18 & 45 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P(3).
\end{aligned}$$

On en déduit également l'expression de la matrice  $N(0)$  en extrayant l'exponentielle de ce dernier calcul :

$$N(0) = r \tilde{N} + \lambda^t \Phi = \begin{pmatrix} \frac{21}{100} & -\frac{21}{40} & \frac{11}{200} \\ \frac{100}{99} & \frac{121}{40} & \frac{200}{9} \\ \frac{100}{19} & \frac{40}{40} & \frac{200}{171} \end{pmatrix}.$$

Si on soustrait  $\frac{1}{2}(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_0^2})^t \Phi = -\frac{7}{600}^t \Phi$  comme le suggère 3.46 on retrouve l'expression donnée par 3.47 pour  $\frac{1}{m_1 m_2}(\Gamma_0 + m_1^2 \Gamma_2)$  :

$$N(0) + \frac{7}{600}^t \Phi = \begin{pmatrix} \frac{21}{50} & 0 & \frac{4}{25} \\ \frac{39}{50} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{50} \\ \frac{1}{50} & 0 & \frac{24}{25} \end{pmatrix}.$$

On vient donc de vérifier sur cet exemple l'essentiel des formules données ci-dessus dans le présent article pour généraliser celles de [19] à tout l'arbre des triplets de Riedel. Tout est bien calculable sur cet exemple, et l'on a en particulier obtenu une expression de  $s$  vérifiant notre dernière proposition, et montrant aussi que celle-ci est optimale avec  $n = -1$  dans l'expression qu'elle donne pour le nombre  $s$ .

### 5.3. Une seconde extension du lemme 3.10 de Riedel

#### 5.3.1. Permutation des valeurs extrêmes des triplets

On considère ici une autre situation. On part d'un triplet  $(a_1, b_1, c_1)$  correspondant à une valeur  $m_1$ , on en trouve un autre correspondant à  $m_1$  qui est  $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) =$

$(c_1, b_1, a_1)$ . Le cas qui nous intéresse ici concerne le passage entre les deux, avec

$${}^t N_{(1,-1)}(s) M_{-1} N_{(1,-1)}(s) = M_1.$$

On doit dans ce cas considérer la matrice  $\tilde{N} = T_{-1} T_1^{-1}$  qui donne  $r = 1$ , et confirme 4.4. Il est de plus évident avec 3.43 que dans ce cas  $\lambda = 0$ . Avec 3.46 il vient donc  $N_{(1,-1)}(0) = \tilde{N} = T_{-1} T_1^{-1} = \frac{1}{m_1^2} (\Gamma_0 + m_1^2 \Gamma_2)$ , et avec 3.47 ou 4.3 :

$$N_{(1,-1)}(0) = \frac{1}{m_1^2} \begin{pmatrix} -2a_1 c_1 + a_1^2 m_1 & 0 & -a_1^2 + c_1^2 \\ a_1 (-a_1^2 + c_1^2) & m_1^2 & c_1 (a_1^2 - c_1^2) \\ a_1^2 - c_1^2 & 0 & -2a_1 c_1 + c_1^2 m_1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas dans  $M_3(\mathbb{Z})$  dans le cas général. On étudie donc encore les valeurs  $s$  telles que  $N_{(1,-1)}(s) \in M_3(\mathbb{Z})$ . Pour cela on utilise

$$S_{-1} = \begin{pmatrix} -(a_1^2 + b_1^2 - a_1 b_1 c_1) & c_1 a_1^2 - b_1 a_1 - c_1 & a_1 c_1 - b_1 \\ c_1 - b_1 a_1 & -a_1^2 & -a_1 \\ b_1 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} & S_{-1} N_{(1,-1)}(0) \\ &= \frac{1}{m_1} (\Omega_0 + m_1 \Omega_1) \\ &= \frac{1}{m_1} \begin{pmatrix} a_1^2 - c_1^2 + m_1 a_1 c_1 & -m_1 (c_1 + a_1 b_1 - a_1^2 c_1) & -2c_1 a_1 + m_1 a_1^2 \\ -b_1 a_1 - c_1 a_1^2 & -m_1 a_1^2 & b_1 c_1 - a_1^3 \\ 2a_1 c_1 & m_1 a_1 & a_1^2 - c_1^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans ce cas il est facile d'expliciter :

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} a_1^2 - c_1^2 & 0 & -2c_1 a_1 \\ -2c_1 a_1^2 & 0 & a_1 c_1^2 - a_1^3 \\ 2a_1 c_1 & 0 & a_1^2 - c_1^2 \end{pmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{pmatrix} a_1 c_1 & m_1 a_1 - c_1 & a_1^2 \\ a_1 & -a_1^2 & -c_1 \\ 0 & a_1 & 9 \end{pmatrix}.$$

L'équation 3.44 se simplifie pour donner seulement

$$N_{(1,-1)}(s) = \exp\left(-s \frac{R_{-1}}{2}\right) N_{(1,-1)}(0),$$

$$S_{-1}^2 N_{(1,-1)}(s) = S_{-1}^2 N_{(1,-1)}(0) = {}^t \Phi = \begin{pmatrix} c_1 a_1 & m_1 a_1 & a_1^2 \\ -c_1 b_1 & -m_1 b_1 & -a_1 b_1 \\ c_1^2 & m_1 c_1 & a_1 c_1 \end{pmatrix},$$



$$\begin{aligned}
& S_{-1}N_{(1,-1)}(s) \\
= & S_{-1}N_{(1,-1)}(0) + s^t\Phi \\
= & \frac{1}{m_1} \begin{pmatrix} a_1^2 - c_1^2 & 0 & -2c_1a_1 \\ -2c_1a_1^2 & 0 & a_1c_1^2 - a_1^3 \\ 2a_1c_1 & 0 & a_1^2 - c_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1c_1 & m_1a_1 - c_1 & a_1^2 \\ a_1 & -a_1^2 & -c_1 \\ 0 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \\
& + s \begin{pmatrix} c_1a_1 & m_1a_1 & a_1^2 \\ -c_1b_1 & -m_1b_1 & -a_1b_1 \\ c_1^2 & m_1c_1 & a_1c_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Cette matrice est elle-même dans  $M_3(\mathbb{Z})$  pour les valeurs  $s$  que l'on considère, qui sont donc aussi telles que la matrice colonne du milieu soit à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  :

$$\begin{pmatrix} -c_1 + a_1m_1 + sm_1a_1 \\ -a_1^2 - sm_1b_1 \\ a_1 + sm_1c_1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $(a_1/3)$ ,  $(b_1/3)$  et  $(c_1/3)$  sont premier entre eux, il reste seulement en considérant ces termes avec un entier  $\alpha \in \mathbb{Z}$  :

$$s = \frac{\alpha}{3m_1} = \frac{\alpha}{2^{l_1}9\mathbf{m}_1}.$$

En fait on peut faire mieux. Considérons par exemple avec le terme de la première ligne et première colonne :

$$((a_1/3)^2 - (c_1/3)^2) + 2^{l_1}9\mathbf{m}_1s(c_1/3)(a_1/3) = 2^{l_1}\mathbf{m}_1u_{11}.$$

Si  $l_1 = 1$ , ce qui est équivalent à dire que  $m_1$  est pair, alors  $a_1$  et  $c_1$  impairs; de sorte que l'on peut simplifier en une expression qui vaut aussi avec  $l_1 = 0$

$$\left(\frac{(a_1/3)^2 - (c_1/3)^2}{2^{l_1}}\right) + 9\mathbf{m}_1s(c_1/3)(a_1/3) = \mathbf{m}_1u_{11}.$$

En faisant un calcul équivalent avec tous les termes de la matrice, puis en utilisant le théorème de Bezout pour construire la combinaison linéaire adéquate, il vient avec un entier  $\alpha' \in \mathbb{Z}$  :

$$s = \frac{\alpha'}{9\mathbf{m}_1} \in \frac{1}{9\mathbf{m}_1}\mathbb{Z}.$$

On trouve donc l'équivalent du lemme 3.10 de Riedel. Pour préciser les choses on pose encore  $s = \frac{p}{q}$ , avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux et  $q$  diviseur de  $9\mathbf{m}_1$ , donc de

$3m_1$ . Il en résulte que la matrice suivante est dans  $M_3(\mathbb{Z})$

$$\begin{pmatrix} \frac{q(a_1^2 - c_1^2) + m_1 c_1 a_1 p}{m_1 q} & \frac{m_1^2 a_1 p}{m_1 q} & \frac{-q(2c_1 a_1) + m_1 a_1^2 p}{m_1 q} \\ \frac{-q a_1(2c_1 a_1) - m_1 c_1 b_1 p}{m_1 q} & \frac{-m_1^2 b_1 p}{m_1 q} & \frac{q a_1(c_1^2 - a_1^2) - m_1 a_1 b_1 p}{m_1 q} \\ \frac{q(2a_1 c_1) + m_1 c_1^2 p}{m_1 q} & \frac{m_1^2 c_1 p}{m_1 q} & \frac{q(a_1^2 - c_1^2) + m_1 a_1 c_1 p}{m_1 q} \end{pmatrix}.$$

En désignant par  $u_{lc}$  les entiers de cette matrice et en utilisant encore la décomposition  $m_1 = 2^{l_1} 3\mathfrak{m}_1$ , où  $\mathfrak{m}_1$  premier à 6 et  $l_1 \in \{0, 1\}$ , on trouve sur la première colonne et troisième ligne que

$$2q a_1 c_1 + m_1 c_1^2 p = u_{31} m_1 q.$$

Ceci impose que  $\mathfrak{m}_1$  divise  $2q a_1 c_1$  et donc  $q$ . Mais on a vu aussi que  $q$  est un diviseur de  $9\mathfrak{m}_1$ . Il n'y a donc pas beaucoup de possibilités pour les facteurs de  $q$  ne divisant pas  $\mathfrak{m}_1$ . Les seules possibilités sont 1, 3 et 9, qui permettent d'écrire  $q = 3^{k_2} \mathfrak{m}_1$  avec  $k_2 \in \{0, 1, 2\}$ . Sans chercher à raffiner cette dernière contrainte, on peut donc énoncer dans ce cas un résultat analogue, mais différent, de la proposition précédente :

**Proposition 5.3.** *Toute matrice  $N(s) \in SL(3, \mathbb{Z})$  vérifiant la condition*

$${}^t N(s) M(c_1, b_1, a_1) N(s) = M(a_1, b_1, c_1)$$

*est telle que l'on puisse écrire  $s = \frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux. Si  $m_1 = a_1 c_1 - b_1 = 2^{l_1} 3\mathfrak{m}_1$ , où  $\mathfrak{m}_1$  premier à 6 et  $l_1 \in \{0, 1\}$ , on a de plus la condition  $q = 3^{k_2} \mathfrak{m}_1$  avec  $k_2 \in \{0, 1, 2\}$ . Ceci assure que l'on a*

$$s \in \frac{1}{3^{k_2} \mathfrak{m}_1} \mathbb{Z}.$$

La comparaison avec la propriété 24 laisse ici imaginer que le cas  $k_2 = 2$  est possible, mais ceci reste à confirmer.

### 5.3.2. Second exemple $Q^{-1}P : (6, 3, 3) \rightarrow (3, 3, 6)$

On s'intéresse ici au triplet  $(a_1, b_1, c_1) = (3, 3, 6)$  correspondant à la valeur  $m_1 = 15$ , et à l'autre triplet correspondant à  $m_1 = 15$  qui est  $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) = (6, 3, 3)$ . On introduit avec ce qui précède

$$N_{(1, -1)}(0) = \frac{1}{225} \begin{pmatrix} 99 & 0 & 27 \\ 81 & 225 & -162 \\ -27 & 0 & 504 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{25} & 0 & \frac{3}{25} \\ \frac{9}{25} & 1 & -\frac{18}{25} \\ -\frac{3}{25} & 0 & \frac{56}{25} \end{pmatrix}.$$

Par construction on a bien  ${}^t N_{(1,-1)}(0)M_{-1}N_{(1,-1)}(0) = M_1$ , ici :

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{25} & \frac{9}{25} & -\frac{3}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{25} & -\frac{18}{25} & \frac{56}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{25} & 0 & \frac{3}{25} \\ \frac{9}{25} & 1 & -\frac{18}{25} \\ -\frac{3}{25} & 0 & \frac{56}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs de  $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1})$  et  $(a_1, b_1, c_1)$  permettent de calculer:

$$T_{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 702 & 810 \\ 15 & -162 & -810 \\ 6 & 54 & 1620 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1566 & 1620 \\ 15 & -648 & -810 \\ 3 & 108 & 810 \end{pmatrix},$$

$$\det(T_{-1}) = -(270)^3, \quad \det(T_1) = -(270)^3, \quad r = \sqrt[3]{\frac{\det(T_1)}{\det(T_{-1})}} = 1,$$

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= T_{-1}T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 702 & 810 \\ 15 & -162 & -810 \\ 6 & 54 & 1620 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{45} & \frac{1}{18} & \frac{1}{90} \\ \frac{1}{1350} & 0 & -\frac{1}{675} \\ -\frac{11}{60750} & -\frac{1}{4860} & \frac{189}{121500} \end{pmatrix} \\ &= N_{(1,-1)}(0). \end{aligned}$$

Dans le présent cas  $\lambda = 0$ , et il reste seulement  $N(s) = \exp(-s\frac{R_{-1}}{2})\tilde{N}$ , avec :

$$S_{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 39 & 15 \\ -3 & -9 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\exp(-s\frac{R_{-1}}{2}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{9}{2}s + \frac{9}{2}s^2 & \frac{33}{2}s + \frac{45}{2}s^2 & 6s + 9s^2 \\ \frac{3}{2}s - \frac{9}{2}s^2 & 1 + \frac{27}{2}s - \frac{45}{2}s^2 & 6s - 9s^2 \\ -6s + 9s^2 & -42s + 45s^2 & 1 - 18s + 18s^2 \end{pmatrix},$$

$$N(s) = N_{(1,-1)}(s) = \begin{pmatrix} \frac{11}{25} + \frac{36}{5}s + 9s^2 & \frac{33}{2}s + \frac{45}{2}s^2 & \frac{3}{25} + \frac{21}{10}s + \frac{9}{2}s^2 \\ \frac{9}{25} + \frac{24}{5}s - 9s^2 & 1 + \frac{27}{2}s - \frac{45}{2}s^2 & -\frac{18}{25} + \frac{39}{10}s - \frac{9}{2}s^2 \\ -\frac{3}{25} - \frac{78}{5}s + 18s^2 & -42s + 45s^2 & \frac{56}{25} - \frac{54}{5}s + 9s^2 \end{pmatrix}.$$

Il reste à identifier les valeurs rationnelles  $s$  telles que  $N(s)$  soit à coefficients entiers. Trouver un algorithme pour y parvenir est un problème en soi que l'on n'étudie pas ici car on n'en a pas besoin. En effet il suffit de se souvenir que  $P(3)$  envoie  $(3, 3, 3)$  sur  $(3, 3, 6)$  et que  $Q(3)$  envoie  $(3, 3, 3)$  sur  $(6, 3, 3)$ . Une solution à

notre problème est donc de considérer la valeur  $s$  définie par la matrice  $Q(3)^{-1}P(3)$  qui par construction envoie  $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) = (6, 3, 3)$  sur  $(a_1, b_1, c_1) = (3, 3, 6)$  :

$$N(s) = Q(3)^{-1}P(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

avec  $Q(3)^{-1}P(3) = N_{(1,-1)}(s) = N(s)$  vérifiant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En calculant  $S_{-1}^2 N(s) = {}^t \Phi$  puis  $S_{-1}(N(s) - N(0)) = s {}^t \Phi$ , on parvient aux valeurs suivantes :

$$s = -\frac{1}{3 \times 5}, \quad m_1 = 5, \quad k_2 = 1.$$

et l'on vérifie facilement que l'on a bien  $\exp(-s \frac{R-1}{2})N(0) = N(s)$ , ici :

$$\begin{pmatrix} \frac{18}{25} & -1 & -\frac{9}{25} \\ -\frac{3}{25} & 0 & -\frac{11}{25} \\ \frac{11}{25} & 3 & \frac{57}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{25} & 0 & \frac{3}{25} \\ \frac{9}{25} & 1 & -\frac{18}{25} \\ -\frac{3}{25} & 0 & \frac{56}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarquons maintenant, en faisant la comparaison avec la proposition 24 que si l'on voulait écrire  $s = \frac{n}{9m_1}$  que  $n$  ne serait pas premier à 3. Ceci confirme une lacune dans l'énoncé de Riedel dans son lemme 3.10 de [19]. On le confirmera dans la suite. Remarquons qu'avec la valeur  $s = \frac{1}{3}$  l'expression précédente fournie pour  $N(s)$  donne

$$N\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & -9 & -3 \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{Z}),$$

$${}^t N\left(\frac{1}{3}\right)M(6, 3, 3)N\left(\frac{1}{3}\right) = M(6, 3, 3).$$

La valeur  $(1/3)$  comme d'autres valeurs de  $s$  donnent des matrices du stabilisateur de  $M(6, 3, 3)$ . C'est en fait la valeur appelée  $s_N$  dans ce qui précède (voir proposition 8) qui vaut  $-\frac{1}{3 \times 5}$ .

### 5.3.3. Troisième exemple $Q : (3, 3, 3) \rightarrow (6, 3, 3)$

On a considéré les triplets  $(a_0, b_0, c_0) = (3, 3, 3)$ ,  $(a_1, b_1, c_1) = (3, 3, 6)$ , et enfin  $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) = (6, 3, 3)$ . On a trouvé les deux décompositions suivantes, où  $m_0 = 6$ ,  $m_1 = 15$ ,  $\lambda_{(1,0)} = -\frac{143}{5400}$ ,  $\lambda_{(1,-1)} = 0$  :

$$\begin{aligned}
 & P(3) \\
 = & \exp\left(\frac{1}{2 \times 3 \times 5} \frac{R_0}{2}\right) \begin{pmatrix} a_1 c_1 m_1 \\ a_0 c_0 m_0 \end{pmatrix} T_0 T_1^{-1} \\
 & + \lambda_{(1,0)} \begin{pmatrix} c_0 \\ -b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & m_1 & a_1 \end{pmatrix} \\
 = & \exp\left(-s_{(1,0)} \frac{R_0}{2}\right) N_{(1,0)}(0), \\
 \\
 & Q(3)^{-1} P(3) \\
 = & \exp\left(\frac{1}{3 \times 5} \frac{R_{-1}}{2}\right) \begin{pmatrix} a_1 c_1 m_1 \\ a_{-1} c_{-1} m_{-1} \end{pmatrix} T_{-1} T_1^{-1} \\
 & + \lambda_{(1,-1)} \begin{pmatrix} c_{-1} \\ -b_{-1} \\ a_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & m_1 & a_1 \end{pmatrix} \\
 = & \exp\left(-s_{(1,-1)} \frac{R_{-1}}{2}\right) N_{(1,-1)}(0).
 \end{aligned}$$

En combinant ces expressions, il vient avec 4.10 et la "relation de Chasles" 4.6 :

$$\begin{aligned}
 Q(3)^{-1} \exp\left(-s_{(1,0)} \frac{R_0}{2}\right) N_{(1,0)}(0) &= \exp\left(-s_{(1,-1)} \frac{R_{-1}}{2}\right) N_{(1,-1)}(0), \\
 \\
 Q(3) &= \exp\left(-s_{(1,0)} \frac{R_0}{2}\right) N_{(1,0)}(0) N_{(1,-1)}(0)^{-1} \exp\left(s_{(1,-1)} \frac{R_{-1}}{2}\right) \\
 &= \exp\left(-s_{(1,0)} \frac{R_0}{2}\right) N_{(1,0)}(0) N_{(-1,1)}(0) \exp\left(s_{(1,-1)} \frac{R_{-1}}{2}\right) \\
 &= \exp\left(-s_{(1,0)} \frac{R_0}{2}\right) N_{(-1,0)}(0) \exp\left(s_{(1,-1)} \frac{R_{-1}}{2}\right) \\
 &= \exp\left(-s_{(1,0)} \frac{R_0}{2}\right) \exp\left(s_{(1,-1)} \frac{R_0}{2}\right) N_{(-1,0)}(0) \\
 &= \exp\left((s_{(1,-1)} - s_{(1,0)}) \frac{R_0}{2}\right) N_{(-1,0)}(0).
 \end{aligned}$$

D'où naturellement l'expression de la valeur  $s$  qui correspond à  $Q(3) = N_{(-1,0)}(0)$

:

$$s_{(-1,0)} = -s_{(1,-1)} + s_{(1,0)} = \frac{1}{3 \times 5} - \frac{1}{2 \times 3 \times 5} = \frac{1}{2 \times 3 \times 5}.$$

Sur cet exemple on a pu directement calculer la valeur  $s$  sans passer par de fastidieuses décompositions, uniquement en utilisant notre "relation de Chasles" 4.6. On a vu ci-dessus, lors de la démonstration de cette relation, la formule de combinaison des valeurs  $\lambda$ . Appliquée ici cette dernière permet d'écrire :

$$\lambda_{(-1,0)} = -\lambda_{(1,-1)} + \lambda_{(1,0)} = -\frac{143}{5400}$$

Une vérification directe permet alors de s'assurer que l'on a

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{1}{2 \times 3 \times 5} \frac{R_0}{2}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{231}{200} & \frac{21}{100} & \frac{11}{200} \\ -\frac{11}{200} & \frac{99}{100} & \frac{200}{9} \\ -\frac{9}{200} & -\frac{19}{100} & \frac{171}{200} \end{pmatrix}, \\ \frac{a_{-1}c_{-1}m_{-1}}{a_0c_0m_0} T_0 T_{-1}^{-1} + \lambda_{(-1,0)} \begin{pmatrix} c_0 \\ -b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} (c_{-1} \ m_{-1} \ a_{-1}) & \\ = \begin{pmatrix} \frac{171}{200} & -\frac{21}{40} & -\frac{19}{100} \\ \frac{9}{200} & \frac{121}{40} & \frac{99}{100} \\ \frac{11}{200} & -\frac{21}{40} & \frac{100}{21} \end{pmatrix}, & \end{aligned}$$

et par produit des deux matrices précédentes :

$$\begin{aligned} &Q(3) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2 \times 3 \times 5} \frac{R_0}{2}\right) \left( \frac{a_{-1}c_{-1}m_{-1}}{a_0c_0m_0} T_0 T_{-1}^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{(-1,0)} \begin{pmatrix} c_0 \\ -b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} (c_{-1} \ m_{-1} \ a_{-1}) \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut en déduire facilement la structure de la matrice  $P(3)^{-1}Q(3)$  qui envoie le triplet  $(a_1, b_1, c_1) = (3, 3, 6)$  sur  $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) = (6, 3, 3)$ . On dispose ainsi de la structure complète des matrices qui interviennent à la racine de l'arbre de Riedel.

## 5.4. Calcul des valeurs $s = s_N$ pour tout l'arbre de Riedel

L'idée se présente naturellement d'étendre les observations que l'on vient de faire à tout l'arbre, en généralisant les calculs précédents. De façon précise, il s'agit de calculer les valeurs  $s = s_N$  qui correspondent aux matrices  $N \in SL(3, \mathbb{Z})$ . C'est l'objectif que l'on se fixe dans le présent paragraphe

### 5.4.1. Précisions dans les notations

Pour atteindre notre objectif, il est utile de préciser les notations, en introduisant des indices nécessaires pour distinguer les triplets de l'arbre de Riedel (Fig. 7). Il peut s'agir de simples marqueurs si l'on veut simplement distinguer les triplets. Il peut s'agir, si l'on veut travailler sur des chemins de cet arbre, de niveaux ou hauteurs avec  $i = 0$  pour le triplet  $(3, 3, 3)$ ,  $i = 1$  pour le triplet  $(3, 3, 6)$ ,  $i = -1$  pour le triplet  $(6, 3, 3)$ . Il peut s'agir d'indices dyadiques si l'on veut bijectivement désigner tous les triplets de cet arbre. On pose ici en raisonnant par niveaux de l'arbre de Riedel :

$$\begin{aligned}
 {}^t N_{(i,j)}(s_{(i,j)}) M_j N_{(i,j)}(s_{(i,j)}) &= M_i, \\
 N_{(i,j)}(s_{(i,j)}) &= \exp\left(-\frac{R_j}{2} s_{(i,j)}\right) N_{(i,j)}(0) = N_{(i,j)}(0) \exp\left(-\frac{R_i}{2} s_{(i,j)}\right) \\
 &= (1 + s_{(i,j)} S_j + \frac{s_{(i,j)}^2 - s_{(i,j)}}{2} S_j^2) N_{(i,j)}(0) \\
 &= N_{(i,j)}(0) \left(1 + s_{(i,j)} S_i + \frac{s_{(i,j)}^2 - s_{(i,j)}}{2} S_i^2\right), \\
 s_{(i,j)} + s_{(j,k)} &= s_{(i,k)}, \\
 N_{(i,j)}(0) &= \left(\frac{a_i c_i m_i}{a_j c_j m_j} T_j T_i^{-1} + \lambda_{(i,j)} \begin{pmatrix} c_j \\ -b_j \\ a_j \end{pmatrix} \right) (c_i \ m_i \ a_j), \\
 r_{(i,j)} &= \frac{a_i c_i m_i}{a_j c_j m_j}, \quad r_{(j,k)} r_{(i,j)} = r_{(i,k)}, \\
 \tilde{N}_{(i,j)} &= T_j T_i^{-1}, \quad \tilde{N}_{(j,k)} \tilde{N}_{(i,j)} = \tilde{N}_{(i,k)} \\
 \lambda_{(i,j)} &= \left(\frac{1}{a_i c_i m_i} - \frac{1}{a_j c_j m_j}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_i^2} - \frac{1}{m_j^2}\right), \quad \lambda_{(i,j)} + \lambda_{(j,k)} = \lambda_{(i,k)}.
 \end{aligned}$$

$${}^t\Phi_{(i,j)} = \begin{pmatrix} c_j \\ -b_j \\ a_j \end{pmatrix} (c_i \ m_i \ a_i),$$

$${}^t\Phi_{(j,k)} \times {}^t\Phi_{(i,j)} = \begin{pmatrix} c_k \\ -b_k \\ ak \end{pmatrix} (c_j \ m_j \ a_j) \begin{pmatrix} c_j \\ -b_j \\ a_j \end{pmatrix} (c_i \ m_i \ a_i) = 0,$$

Il ne reste qu'à appliquer ces formules à tous les niveaux de l'arbre de Riedel.

#### 5.4.2. Calcul des valeurs $s_{(i+1,i)}$ pour $i \geq 0$

On a vu au début de l'article comment se construit l'arbre de Riedel avec les formules 2.2 à 2.9, et comment ces dernières pouvaient se déduire avec des permutations de deux d'entre elles. On considère donc ces deux dernières, en commençant par :

$${}^tP(a_i)M(a_i, b_i, c_i)P(a_i) = M(a_i, c_i, a_i c_i - b_i) = M(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}).$$

On peut écrire ainsi, avec ici  $s = s_{(i+1,i)}$  pourvu que l'on soit dans la partie supérieure de la figure 7, c'est à dire dans des niveaux de l'arbre supérieurs à celui de (3, 3, 3), c'est à dire du côté de (3, 3, 6) :

$$P(a_i) = N_{(i+1,i)}(s_{(i+1,i)}) = \exp(-s_{(i+1,i)} \frac{R_i}{2}) N_{(i+1,i)}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les triplets permettent de calculer, avec  $m_i = (a_i c_i - b_i)$ ,  $m_{i+1} = (a_i m_i - c_i)$  :

$$T_i = \begin{pmatrix} c_i & a_i c_i (c_i (a_i c_i - b_i) - a_i) & a_i c_i (a_i c_i - b_i) c_i \\ (a_i c_i - b_i) & a_i c_i (-c_i^2) & a_i c_i (a_i c_i - b_i) (-b_i) \\ a_i & a_i c_i^2 & a_i c_i (a_i c_i - b_i) a_i \end{pmatrix},$$

$$\det(T_i) = -(a_i c_i m_i)^3,$$

$$T_{i+1} = \begin{pmatrix} m_i & a_i m_i (-a_i - m_i c_i + a_i m_i^2) & a_i m_i^2 (-c_i + a_i m_i) \\ -c_i + a_i m_i & -a_i m_i^3 & -a_i c_i m_i (-c_i + a_i m_i) \\ a_i & a_i m_i^2 & a_i^2 m_i (-c_i + a_i m_i) \end{pmatrix},$$

$$\det(T_{i+1}) = -(a_i m_i (a_i m_i - c_i))^3,$$



$$r^{(i+1,i)} = \frac{a_{i+1}c_{i+1}m_{i+1}}{a_i c_i m_i} = \frac{(a_i m_i - c_i)}{c_i},$$

$$\lambda_{(i+1,i)} = \left( \frac{1}{(a_i m_i - c_i) m_i a_i} - \frac{1}{a_i c_i m_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(a_i m_i - c_i)^2} - \frac{1}{m_i^2} \right)$$

$$= \frac{(2c_i - a_i m_i)(3a_i m_i - a_i c_i - 2c_i + a_i^2 m_i)}{2a_i c_i m_i (a_i m_i - c_i)^2},$$

$$S_i = \begin{pmatrix} -(a_i^2 + b_i^2 - a_i b_i c_i) & a_i c_i^2 - b_i c_i - a_i & a_i c_i - b_i \\ a_i - b_i c_i & -c_i^2 & -c_i \\ b_i & c_i & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul du produit  $T_i T_{i+1}^{-1}$  donne une expression assez compliquée, mais on peut s'en passer pour calculer  $s$  en utilisant directement les expressions 3.47 et 3.49 :

$$S_i(P(a_i) - (N_{(i+1,i)}(0) - \frac{1}{2}(\frac{1}{m_{i+1}^2} - \frac{1}{m_i^2})^t \Phi_{(i+1,i)}))$$

$$= s_{(i+1,i)} \begin{pmatrix} m_i c_i & (a_i m_i - c_i) c_i & a_i c_i \\ -m_i b_i & -(a_i m_i - c_i) b_i & -a_i b_i \\ m_i a_i & (a_i m_i - c_i) a_i & a_i^2 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité donne par exemple sur la dernière ligne la valeur de  $s_{(i+1,i)}$ , et cette expression est cohérente avec notre premier exemple :

$$s = s_{(i+1,i)} = -\frac{a_i}{(a_i m_i - c_i) m_i} = -\frac{a_i}{m_i m_{i+1}}.$$

Avec  $N_{(i,j)}(s)^{-1} = N_{(j,i)}(-s)$ , on en déduit aussi :

$$s_{(i,i+1)} = \frac{a_i}{m_i m_{i+1}}.$$

On considère maintenant, toujours sur la partie supérieure de l'arbre :

$${}^t Q(c_i) M(a_i, b_i, c_i) Q(c_i) = M(a_i c_i - b_i, a_i, c_i) = M(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}).$$

On peut encore écrire avec  $s = s_{(i+1,i)}$  :

$$Q(c_i) = N_{(i+1,i)}(s_{(i+1,i)}) = \exp(-s_{(i+1,i)} \frac{R_i}{2}) N_{(i+1,i)}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les triplets permettent de calculer, avec  $m_i = (a_i c_i - b_i)$ ,  $m_{i+1} = (m_i c_i - a_i)$  :

$$T_i = \begin{pmatrix} c_i & a_i c_i (c_i (a_i c_i - b_i) - a_i) & a_i c_i (a_i c_i - b_i) c_i \\ (a_i c_i - b_i) & a_i c_i (-c_i^2) & a_i c_i (a_i c_i - b_i) (-b_i) \\ a_i & a_i c_i^2 & a_i c_i (a_i c_i - b_i) a_i \end{pmatrix},$$

$$\det(T_i) = -(a_i c_i m_i)^3,$$

$$T_{i+1} = \begin{pmatrix} c_i & m_i c_i (c_i (m_i c_i - a_i) - m_i) & m_i c_i (m_i c_i - a_i) c_i \\ (m_i c_i - a_i) & m_i c_i (-c_i^2) & m_i c_i (m_i c_i - a_i) (-a_i) \\ m_i & m_i c_i^2 & m_i c_i (m_i c_i - a_i) m_i \end{pmatrix},$$

$$\det(T_{i+1}) = -(c_i m_i (c_i m_i - a_i))^3,$$

$$r^{(i+1,i)} = \frac{a_{i+1} c_{i+1} m_{i+1}}{a_i c_i m_i} = \frac{(c_i m_i - a_i)}{a_i},$$

$$\begin{aligned} \lambda^{(i+1,i)} &= \left( \frac{1}{(c_i m_i - a_i) m_i c_i} - \frac{1}{a_i c_i m_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(c_i m_i - a_i)^2} - \frac{1}{m_i^2} \right) \\ &= - \frac{(a_i^3 c_i + 4a_i^2 m_i - 7a_i c_i m_i^2 + 2c_i^2 m_i^3 - 2a_i^2 c_i^2 m_i + a_i c_i^3 m_i^2)}{2a_i c_i m_i^2 (c_i m_i - a_i)^2}, \end{aligned}$$

On utilise encore directement les expressions 3.47 et 3.49 :

$$\begin{aligned} &S_i(Q(c_i) - (N_{(i+1,i)}(0) - \frac{1}{2}(\frac{1}{m_{i+1}^2} - \frac{1}{m_i^2})^t \Phi_{(i+1,i)})) \\ &= s_{(i+1,i)} \begin{pmatrix} m_i c_i & (a_i m_i - c_i) c_i & a_i c_i \\ -m_i b_i & -(a_i m_i - c_i) b_i & -a_i b_i \\ m_i a_i & (a_i m_i - c_i) a_i & a_i^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ceci donne les valeurs de  $s_{(i+1,i)}$  et de  $s_{(i,i+1)}$  :

$$s = s_{(i+1,i)} = \frac{c_i}{(c_i m_i - a_i) m_i} = \frac{c_i}{m_i m_{i+1}},$$

$$s_{(i,i+1)} = -\frac{c_i}{m_i m_{i+1}}.$$

Remarquons que si on traitait plutôt de la partie inférieure de l'arbre de Riedel, s'est à dire des niveaux négatifs de ces arbres, on devrait remplacer  $s_{(i+1,i)}$  par  $s_{(i-1,i)}$ , avec des formules analogues. Par exemple la dernière écrite donnerait, cette expression étant cohérente avec ce qui a été calculé à l'issue de notre troisième exemple pour  $Q(3)$  :

$$s_{(i-1,i)} = \frac{c_i}{m_{i-1} m_i}.$$

### 5.4.3. Signe des valeurs $s_{(i+1,i)}$ pour $i \geq 0$ et observations

Finalement, en reprenant les deux résultats obtenus pour  $i \geq 0$ , et en les complétant pour les autres équations vues au début du présent article, en permutant les termes pour donner les formules correspondantes, on obtient pour les valeurs  $s$  associées :

$${}^tP(a_i)M(a_i, b_i, c_i)P(a_i) = M(a_i, c_i, a_i c_i - b_i) = M(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}). \quad (5.6)$$

$$s = -\frac{a_i}{(a_i m_i - c_i) m_i} = -\frac{a_i}{m_i m_{i+1}}. \quad (5.7)$$

$${}^tQ(c_i)M(a_i, b_i, c_i)Q(c_i) = M(a_i c_i - b_i, a_i, c_i) = M(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}). \quad (5.8)$$

$$s = \frac{c_i}{(c_i m_i - a_i) m_i} = \frac{c_i}{m_i m_{i+1}}. \quad (5.9)$$

$${}^tP(c_i)M(c_i, b_i, a_i)P(c_i) = M(c_i, a_i, a_i c_i - b_i) = M(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}). \quad (5.10)$$

$$s = -\frac{c_i}{(c_i m_i - a_i) m_i} = -\frac{c_i}{m_i m_{i+1}}. \quad (5.11)$$

$${}^tQ(a_i)M(c_i, b_i, a_i)Q(a_i) = M(a_i c_i - b_i, c_i, a_i) = M(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}). \quad (5.12)$$

$$s = \frac{a_i}{(a_i m_i - c_i) m_i} = \frac{a_i}{m_i m_{i+1}}. \quad (5.13)$$

$${}^tP(b_i)M(b_i, a_i, c_i)P(b_i) = M(b_i, c_i, b_i c_i - a_i) = M(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}). \quad (5.14)$$

$$s = -\frac{b_i}{(b_i m_i - c_i) m_i} = -\frac{b_i}{m_i m_{i+1}}. \quad (5.15)$$

$${}^tQ(c_i)M(b_i, a_i, c_i)Q(c_i) = M(b_i c_i - a_i, b_i, c_i) = M(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}). \quad (5.16)$$

$$s = \frac{c_i}{(c_i m_i - b_i) m_i} = \frac{c_i}{m_i m_{i+1}}. \quad (5.17)$$

$${}^tP(c_i)M(c_i, a_i, b_i)P(c_i) = M(c_i, b_i, b_i c_i - a_i) = M(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}). \quad (5.18)$$

$$s = -\frac{b_i}{(b_i m_i - c_i) m_i} = -\frac{b_i}{m_i m_{i+1}}. \quad (5.19)$$

$${}^tQ(b_i)M(c_i, a_i, b_i)Q(b_i) = M(b_i c_i - a_i, c_i, b_i) = M(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}). \quad (5.20)$$

$$s = \frac{b_i}{(b_i m_i - c_i) m_i} = \frac{b_i}{m_i m_{i+1}}. \quad (5.21)$$

Ainsi peut-on calculer toutes les valeurs  $s$  qui correspondent aux chemins de l'arbre de Riedel. On donne celles qui sont liées à notre figure 6 :

$${}^tP(3)M(3, 3, 3)P(3) = M(3, 3, 6). \quad (5.22)$$

$$s = -\frac{1}{3 \times 2 \times 5}. \quad (5.23)$$

$${}^tP(3)M(3, 3, 6)P(3) = M(3, 6, 15). \quad (5.24)$$

$$s = -\frac{3}{(3 \times 15 - 6) \times 15} = -\frac{1}{3 \times 5 \times 13}. \quad (5.25)$$

$${}^tQ(6)M(3, 3, 6)Q(6) = M(15, 3, 6). \quad (5.26)$$

$$s = \frac{6}{(6 \times 15 - 3) \times 15} = \frac{2}{3 \times 5 \times 29}. \quad (5.27)$$

$${}^tP(6)M(6, 3, 3)P(6) = M(6, 3, 15). \quad (5.28)$$

$$s = -\frac{6}{(6 \times 15 - 3) \times 15} = -\frac{2}{3 \times 5 \times 29}. \quad (5.29)$$

$${}^tQ(3)M(6, 3, 3)Q(3) = M(15, 6, 3). \quad (5.30)$$

$$s = \frac{3}{(3 \times 15 - 6) \times 15} = \frac{1}{3 \times 5 \times 13}. \quad (5.31)$$

$${}^tQ(3)M(3, 3, 3)Q(3) = M(6, 3, 3). \quad (5.32)$$

$$s = \frac{3}{(3 \times 15 - 6) \times 15} = \frac{1}{3 \times 2 \times 5}. \quad (5.33)$$

Ces expressions permettent d'énoncer plusieurs propositions évidentes pour la partie supérieure de l'arbre de Riedel :

**Proposition 5.4.** *Les matrices  $P$  donnent des valeurs  $s$  négatives, tandis que les matrices  $Q$  donnent des valeurs  $s$  positives.*

La vérification se fait de façon évidente avec 5.6 à 5.21. Ceci introduit le signe  $\varepsilon_s$  de  $s$  qui vaut  $-1$  avec  $P$  et  $+1$  avec  $Q$ . On a aussi :

**Proposition 5.5.** *Toute matrice  $P$  ou  $Q$  correspondant à une arête élémentaire de l'arbre de Riedel, correspond aussi à une infinité d'autres arêtes de cet arbre, et possède donc une infinité de décompositions du type  $\exp(-sR/2)N(0)$ .*

La vérification se fait à partir 2.2 à 2.9 en observant qu'une telle matrice apparaissant entre les niveaux  $i$  et  $i + 1$  de l'arbre de Riedel apparaît aussi entre les niveaux  $j$  et  $j + 1$  pour  $j \geq i$ . Il suffit à chaque niveau de décomposer cette matrice avec ce qui précède. Avec 2.28 on observe que l'on ne trouvera pas aux différents niveaux les mêmes matrices  $R$ , ni donc a fortiori les mêmes valeurs  $s$ , et avec par exemple 3.47, pas non plus la même matrice  $N(0)$ .

**Proposition 5.6.** *Les termes  $s$  donnés par les relations 5.6 à 5.21, qui correspondent à un passage d'un niveau de l'arbre de Riedel au niveau suivant et des matrices  $N_{(i+1,i)} \in SL(3, \mathbb{Z})$ , s'écrivent sous la forme*

$$s = \varepsilon_s \frac{\alpha_i}{3(m_i/3)(m_{i+1}/3)},$$

où  $\alpha_i$ ,  $(m_i/3)$ ,  $(m_{i+1}/3)$  sont des entiers positifs, deux à deux premiers entre eux et premiers à 3, correspondant à une solution de l'équation 1.1 :

$$\alpha_i^2 + (m_i/3)^2 + (m_{i+1}/3)^2 = 3\alpha_i(m_i/3)(m_{i+1}/3).$$

Remarquons à partir de là que la condition  ${}^t N_{(i,i+1)}(s) M_{i+1} N_{(i,i+1)}(s) = M_i$  donne aussi l'autre condition  ${}^t N_{(i,i+1)}(s)^{-1} M_i N_{(i,i+1)}(s)^{-1} = M_{i+1}$ . Mais avec 4.10, on a  $N_{(i,i+1)}(s)^{-1} = N_{(i+1,i)}(-s)$ . Cette dernière relation s'écrit donc aussi  ${}^t N_{(i+1,i)}(-s) M_i N_{(i+1,i)}(-s) = M_{i+1}$  avec cette fois :

$$-s = -\varepsilon_s \frac{\alpha_i}{3(m_i/3)(m_{i+1}/3)}.$$

On peut poser  $\varepsilon_{-s} = -\varepsilon_s$ , cependant la formule précédente ne mentionne pas  $\alpha_{i+1}$  mais  $\alpha_i$ . Ceci ne pose pas vraiment de problème car en regardant de près les relations 5.6 à 5.21, on observe qu'en réalité  $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ . Qu'on augmente de niveau ou qu'on diminue dans l'arbre de Riedel, on peut donner une expression de  $s$  applicable dans les deux cas, analogue à celle de la dernière proposition. En regardant de près ce qui précède, on n'a aucune peine à s'assurer qu'avec la valeur convenable  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  la dernière proposition est transposable à tout l'arbre de Riedel.

#### 5.4.4. Calcul des valeurs $s_{(0,j)}$ pour tous les triplets de l'arbre

Considérons ici un chemin de l'arbre de Riedel reliant un triplet  $(a_i, b_i, c_i)$  à un autre triplet  $(a_j, b_j, c_j)$  de plus haut niveau ( $j > i$ ). Il donne les relations suivantes, arête par arête de l'arbre entre les deux extrémités du chemin considéré, et en utilisant notre "relation de Chasles" :

$$\begin{aligned}
 {}^t N_{(i,i+1)}(s_{(i,i+1)}) M_{i+1} N_{(i,i+1)}(s_{(i,i+1)}) &= M_i, \\
 {}^t N_{(i+1,i+2)}(s_{(i+1,i+2)}) M_{i+2} N_{(i+1,i+2)}(s_{(i+1,i+2)}) &= M_{i+1}, \\
 s_{(i,i+2)} &= s_{(i,i+1)} + s_{(i+1,i+2)}, \\
 {}^t N_{(i+2,i+3)}(s_{(i+2,i+3)}) M_{i+3} N_{(i+2,i+3)}(s_{(i+2,i+3)}) &= M_{i+2}, \\
 s_{(i,i+3)} = s_{(i,i+2)} + s_{(i+2,i+3)} &= s_{(i,i+1)} + s_{(i+1,i+2)} + s_{(i+2,i+3)}, \\
 &\dots, \\
 {}^t N_{(j-1,j)}(s_{(j-1,j)}) M_j N_{(j-1,j)}(s_{(j-1,j)}) &= M_{j-1}, \\
 s_{(i,j)} = s_{(i,j-1)} + s_{(j-1,j)} &= \dots = \sum_{k=i}^{k=j-1} s_{(k,k+1)}, \\
 {}^t N_{(i,j)}(s_{(i,j)}) M_j N_{(i,j)}(s_{(i,j)}) &= M_i.
 \end{aligned}$$

On obtient par ce qui précède une expression où  $\sigma_{(i,j)} \in \mathbb{Z}$

$$s_{(i,j)} = \sum_{k=i}^{k=j-1} \frac{\varepsilon_{s_{(k,k+1)}} \alpha_k}{3(m_k/3)(m_{k+1}/3)} = \frac{\sigma_{(i,j)}}{3 \prod_{k=i}^{k=j} (m_k/3)}.$$

Nos résultats antérieurs montrent alors qu'il est vraisemblable que numérateur et dénominateur de cette dernière expression aient des facteurs communs, entraînant une possibilité de simplification.

Illustrons sur un exemple, où  $i = 0$ . Pour  $(a_0, b_0, c_0) = (3, 3, 3)$ , on voit apparaître un premier terme qui s'écrit avec  $\varepsilon_{s_{(0,1)}} = -1$  pour  $P(3)$  et avec  $\varepsilon_{s_{(0,1)}} = 1$  pour  $Q(3)$  :

$$s_{(0,1)} = \varepsilon_{s_{(0,1)}} \frac{1}{3 \times 2 \times (m_1/3)},$$

où  $\alpha_0 = 1$ ,  $m_0 = 6$ ,  $(a_1, b_1, c_1) = (3, 3, 6)$ ,  $m_1 = 15$  et  $\mathbf{m}_1 = 5$ . Au niveau suivant de l'arbre, on a :

$$s_{(0,2)} = \frac{\varepsilon_{s_{(0,1)}} \alpha_0}{3 \times 2 \times (m_1/3)} + \frac{\varepsilon_{s_{(1,2)}} \alpha_1}{3(m_1/3)(m_2/3)} = \frac{(m_2/3)\varepsilon_{s_{(0,1)}} \alpha_0 + 2\varepsilon_{s_{(1,2)}} \alpha_1}{3 \times 2 \times (m_1/3)(m_2/3)}.$$

Par exemple avec  $(a_2, b_2, c_2) = (15, 3, 6)$  donné par  $P(3)$  suivi de  $Q(6)$ , on obtient :

$$(m_2/3)\alpha_0 + 2\alpha_1 = (29 \times -1) + (2 \times 2) = -25,$$

$$s_{(0,2)} = \frac{-25}{3 \times 2 \times 5 \times 29} = -\frac{5}{3 \times 2 \times 29}.$$

On a donc une simplification par un facteur 5 qui construit bien la cohérence avec nos résultats antérieurs. Dans ce cas  $m_2 = 87$  et  $\mathbf{m}_2 = 29$ .

On est conduit à imaginer une hypothèse de récurrence qui pourrait être :

$$s_{(0,j-1)} = \frac{n_{(0,j-1)}}{3 \times 2 \times (m_{j-1}/3)}.$$

Au début de la récurrence cette expression vaut avec :

$$n_{(0,1)} = \varepsilon_{s_{(0,1)}} \alpha_0 = \pm 1, \quad m_1 = 15.$$

Comme dans ce qui précède on peut noter  $s_{(0,j-1)} = \frac{n_{j-1}}{g_{j-1}}$  avec :

$$m_{j-1} = a_{j-1}c_{j-1} - b_{j-1} = 2^{l_{j-1}} \times 3 \times \mathbf{m}_{j-1},$$

$$g_{j-1} = 2^{k_{1,j-1}} \times 3^{k_{2,j-1}} \times \mathbf{m}_{j-1},$$

$$2^{k_{1,j-1}} \times 3^{k_{2,j-1}} \times n_{(0,j-1)} = 2^{1+l_{j-1}} \times 3 \times n_{j-1}.$$

Mais on a aussi :

$$s_{(0,j)} = \frac{n_{(0,j-1)}}{3 \times 2 \times (m_{j-1}/3)} + \frac{\varepsilon_{s_{(j-1,j)}} \alpha_{j-1}}{3(m_{j-1}/3)(m_j/3)}$$

$$= \frac{n_{(0,j-1)}(m_j/3) + 2\varepsilon_{s_{(j-1,j)}} \alpha_{j-1}}{3 \times 2 \times (m_{j-1}/3)(m_j/3)}.$$

Ceci impose donc que  $\mathbf{m}_{j-1}$  défini par  $m_{j-1} = 2^{l_{j-1}} \times 3 \times \mathbf{m}_{j-1}$  divise  $n_{(0,j-1)}(m_j/3) + 2\varepsilon_{s_{(j-1,j)}} \alpha_{j-1}$ . Une telle expression laisse supposer que l'on pourrait avoir mieux :

$$(m_{j-1}/3)n_{(0,j)} = (m_j/3)n_{(0,j-1)} + 2\varepsilon_{s_{(j-1,j)}} \alpha_{j-1}, \quad (5.34)$$

avec encore l'équation 1.1 :

$$\alpha_{j-1}^2 + (m_{j-1}/3)^2 + (m_j/3)^2 = 3\alpha_{j-1}(m_{j-1}/3)(m_j/3).$$

Si tel était le cas la récurrence envisagée fonctionnerait, et elle permettrait le passage au niveau suivant de l'arbre. Il faut donc, pour s'assurer que ce que l'on vient d'imaginer est valide, comprendre comment se construisent les nombres  $n_{(0,1)}, \dots, n_{(0,j)}$  par des équations 5.34 se succédant les unes aux autres et s'articulant correctement. Ceci n'est pas tout à fait évident au premier coup d'oeil. Mais la lecture de [5] (Lemma 7 p. 30) ou [17] (Chapitre 1) permet d'associer à une telle solution de l'équation 1.1 trois nombres entiers  $k_{j-1,2}, k_{j-1,1}, k_{j-1}$ , tels que

$$\begin{aligned} (m_j/3)k_{j-1,2} - \alpha_{j-1}k_{j-1} &= (m_{j-1}/3), \\ (m_{j-1}/3)k_{j-1} - (m_j/3)k_{j-1,1} &= \alpha_{j-1}, \\ (m_{j-1}/3)k_{j-1,2} - \alpha_{j-1}k_{j-1,1} &= 3\alpha_{j-1}(m_{j-1}/3) - (m_j/3). \end{aligned}$$

La seconde de ces égalités donne aisément avec un entier  $\omega_{j-1}$  :

$$n_{(0,j)} = 2\varepsilon_{s_{(j-1,j)}}k_{j-1} + \omega_{j-1}(m_j/3), \quad n_{(0,j-1)} = 2\varepsilon_{s_{(j-1,j)}}k_{j-1,1} + \omega_{j-1}(m_{j-1}/3).$$

On voit ainsi comment l'articulation entre les différents niveaux pourrait se faire avec

$$n_{(0,j)} = 2\varepsilon_{s_{(j,j+1)}}k_{j,1} + \omega_j(m_j/3) = 2\varepsilon_{s_{(j-1,j)}}k_{j-1} + \omega_{j-1}(m_j/3), \quad (5.35)$$

mais évidemment il reste à comprendre ce que sont les nombres  $\omega_{j-1}$ .

Considérons donc à nouveau l'exemple vu ci-dessus avec  $j = 2$ ,  $n_{(0,2)} = -5$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $(m_1/3) = 5$ ,  $(m_2/3) = 29$ . A partir du formalisme développé dans [17], le triplet  $(2, 5, 29)$  est lié à la décomposition matricielle

$$M_{(2,2,2,1,1)} = \begin{pmatrix} 29 & 17 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} M_{(2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M_{(2,2)} M_{(2)} M_{(1,1)},$$

et cette dernière donne directement  $\omega_1 = -1$  grâce aux valeurs

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s_{(1,2)}} &= 1, \quad k_1 = 12, \quad k_{1,1} = 2, \quad k_{1,2} = 1, \\ n_{(0,2)} &= (2 \times 12) + (29 \times \omega_1), \quad n_{(0,1)} = (2 \times 2) + (5 \times \omega_1). \end{aligned}$$



Sur le même exemple le cas  $j = 1$  est limite. Mais avec  $n_{(0,1)} = -1$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $(m_0/3) = 2$ ,  $(m_1/3) = 5$ , il donne  $\omega_0 = 1$  grâce aux valeurs

$$\begin{aligned}\varepsilon_{s_{(0,1)}} &= -1, & k_0 &= 3, & k_{0,1} &= k_{0,2} = 1, \\ n_{(0,1)} &= -(2 \times 3) + (5 \times \omega_0).\end{aligned}$$

Le triplet  $(1, 2, 5)$  est lié à la décomposition matricielle

$$M_{(1,1,2)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M_{(2)} = M_{(1,1)} M_{(2)} M_{\emptyset}.$$

On a d'ailleurs  $\omega_0 = -\varepsilon_{s_{(0,1)}}$  et la formule suivante vaut également pour  $Q(3)$  qui permet de passer de  $(3, 3, 3)$  à  $(6, 3, 3)$  :

$$n_{(0,1)} = 2\varepsilon_{s_{(0,1)}} k_0 - \varepsilon_{s_{(0,1)}} (m_1/3).$$

Pour passer au niveau suivant, la formule d'articulation 5.35 s'écrit :

$$n_{(0,1)} = 2\varepsilon_{s_{(1,2)}} k_{1,1} + \omega_1 (m_1/3) = 2\varepsilon_{s_{(0,1)}} k_0 - \varepsilon_{s_{(0,1)}} (m_1/3).$$

On remarque sur l'exemple que l'on vient d'évoquer que l'on a  $\omega_1 = -\varepsilon_{s_{(1,2)}}$ . Une vérification sur tous les autres cas de la figure 6 donne la même observation avec  $(m_1/3) = 5$  et le tableau suivant :

triplet	$s_{1,2}$	$(m_2/3)$	$s_{0,2}$	$n_{(0,2)}$	$\alpha_1$	$\varepsilon_{s_{(1,2)}}$	$k_1$	$\omega_1$
$(3, 6, 15)$	$-\frac{1}{3 \times 5 \times 13}$	13	$-\frac{3}{3 \times 2 \times 13}$	-3	1	-1	8	1
$(15, 3, 6)$	$\frac{2}{3 \times 5 \times 29}$	29	$-\frac{5}{3 \times 2 \times 29}$	-5	2	1	12	-1
$(6, 3, 15)$	$-\frac{2}{3 \times 5 \times 29}$	29	$\frac{5}{3 \times 2 \times 29}$	5	2	-1	12	1
$(15, 6, 3)$	$\frac{1}{3 \times 5 \times 13}$	13	$\frac{3}{3 \times 2 \times 13}$	3	1	1	8	-1

L'idée qui s'impose est de supposer que l'on a, à tous les niveaux de l'arbre de Riedel :

$$\omega_{j-1} = -\varepsilon_{s_{(j-1,j)}} \in \{-1, +1\}.$$

La formule d'articulation s'écrit alors seulement

$$n_{(0,j)} = 2\varepsilon_{s_{(j,j+1)}} k_{j,1} - \varepsilon_{s_{(j,j+1)}} (m_j/3) = 2\varepsilon_{s_{(j-1,j)}} k_{j-1} - \varepsilon_{s_{(j-1,j)}} (m_j/3). \quad (5.36)$$

Elle signifie très simplement, si  $\varepsilon_{s(j,j+1)} = \varepsilon_{s(j-1,j)}$  que l'on a  $k_{j,1} = k_{j-1}$ , et si  $\varepsilon_{s(j,j+1)} = -\varepsilon_{s(j-1,j)}$  que l'on a  $k_{j,1} + k_{j-1} = (m_j/3)$ . L'hypothèse de récurrence que l'on retient s'écrit maintenant :

$$s_{(0,j-1)} = \frac{2\varepsilon_{s(j-1,j)}k_{j-1,1} - \varepsilon_{s(j-1,j)}(m_{j-1}/3)}{3 \times 2 \times (m_{j-1}/3)} = \frac{2\varepsilon_{s(j-2,j-1)}k_{j-2} - \varepsilon_{s(j-2,j-1)}(m_{j-1}/3)}{3 \times 2 \times (m_{j-1}/3)}.$$

Pour  $j = 2$  et  $j = 3$  on peut explicitement vérifier avec nos exemples précédents que cette expression est vraie. Le passage au niveau suivant s'effectue alors grâce à 5.36 :

$$\begin{aligned} s_{(0,j)} &= \frac{2\varepsilon_{s(j-1,j)}k_{j-1,1} - \varepsilon_{s(j-1,j)}(m_{j-1}/3)}{3 \times 2 \times (m_{j-1}/3)} + \frac{\varepsilon_{s(j-1,j)}\alpha_{j-1}}{3(m_{j-1}/3)(m_j/3)} \\ &= \frac{(2\varepsilon_{s(j-1,j)}k_{j-1,1} - \varepsilon_{s(j-1,j)}(m_{j-1}/3))(m_j/3) + 2\varepsilon_{s(j-1,j)}\alpha_{j-1}}{3 \times 2 \times (m_{j-1}/3)(m_j/3)} \\ &= \frac{(2\varepsilon_{s(j-1,j)}k_{j-1,1} - \varepsilon_{s(j-1,j)}(m_{j-1}/3))(m_j/3)}{3 \times 2 \times (m_{j-1}/3)(m_j/3)} \\ &\quad + \frac{2\varepsilon_{s(j-1,j)}((m_{j-1}/3)k_{j-1} - (m_j/3)k_{j-1,1})}{3 \times 2 \times (m_{j-1}/3)(m_j/3)} \\ &= \frac{-\varepsilon_{s(j-1,j)}(m_{j-1}/3)(m_j/3) + 2\varepsilon_{s(j-1,j)}(m_{j-1}/3)k_{j-1}}{3 \times 2 \times (m_{j-1}/3)(m_j/3)} \\ &= \frac{2\varepsilon_{s(j-1,j)}k_{j-1} - \varepsilon_{s(j-1,j)}(m_j/3)}{3 \times 2 \times (m_j/3)} \\ &= \frac{2\varepsilon_{s(j,j+1)}k_{j,1} - \varepsilon_{s(j,j+1)}(m_j/3)}{3 \times 2 \times (m_j/3)}. \end{aligned}$$

La dernière expression établit que la récurrence fonctionne, de sorte que l'on vient de démontrer que l'expression donnée pour  $s_{(0,j-1)}$  est vraie. En résumant ce qui précède, on peut donc énoncer un résultat beaucoup plus précis :

**Proposition 5.7.** *Considérons un chemin de l'arbre de Riedel reliant le triplet  $(a_0, b_0, c_0) = (3, 3, 3)$  à un autre triplet  $(a_j, b_j, c_j)$  où  $j > 1$ , et notons la transformation associée  $N_{(0,j)}(s_{(0,j)}) \in SL(3, \mathbb{Z})$  :*

$${}^t N_{(0,j)}(s_{(0,j)})M(a_j, b_j, c_j)N_{(0,j)}(s_{(0,j)}) = M(a_0, b_0, c_0),$$

La valeur du paramètre  $s_{(0,j)}$  est égale à

$$s_{(0,j)} = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\varepsilon_{s_{(k,k+1)}} \alpha_k}{3 \times (m_k/3) \times (m_{k+1}/3)},$$

où pour tout  $k = 0, \dots, j-1$ , les paramètres intervenant dans le terme générique de cette somme donnent une solution de l'équation 1.1 :

$$\alpha_k^2 + (m_k/3)^2 + (m_{k+1}/3)^2 = 3\alpha_k(m_k/3)(m_{k+1}/3),$$

avec

$$\varepsilon_{s_{(k,k+1)}} \in \{-1, +1\}.$$

De plus cette expression de  $s_{(0,j)}$  se simplifie sous la forme suivante :

$$s_{(0,j)} = \varepsilon_{s_{(j-1,j)}} \frac{2k_{j-1} - (m_j/3)}{3 \times (m_0/3) \times (m_j/3)},$$

où  $m_0 = 6$  et où le paramètre  $k_{j-1}$  provient de la suite  $S^*$  du développement du nombre de Markoff associé à l'équation 1.1 rencontrée pour  $k = j-1$ , et vérifie (cf. [17] (Ch. 1)) :

$$[S^*] = \frac{(m_j/3)}{k_{j-1}},$$

$$(m_{j-1}/3)k_{j-1} - (m_j/3)k_{j-1,1} = \alpha_{j-1}.$$

Et si l'on pose

$$m_j = 2^{l_j} \times 3 \times \mathbf{m}_j,$$

où  $\mathbf{m}_j$  premier à 6 et  $l_j \in \{0, 1\}$ , il reste

$$s_{(0,j)} = \varepsilon_{s_{(j-1,j)}} \frac{2^{1-l_j} \times k_{j-1} - \mathbf{m}_j}{3 \times 2 \times \mathbf{m}_j} = \frac{n_{(0,j)}}{3 \times 2 \times \mathbf{m}_j},$$

avec le fait supplémentaire que  $\mathbf{m}_j$  est premier à  $n_{(0,j)}$ .

En comparant à une proposition précédente, et en remarquant que l'on peut écrire à partir de la dernière expression de la proposition précédente

$$n_{(0,j)} = \varepsilon_{s_{(j-1,j)}} (2^{1-l_j} \times k_{j-1} - \mathbf{m}_j),$$

on a facilement, avec  $\mathbf{m}_j$  premier à 6,  $\varepsilon_{s_{(j-1,j)}} = \pm 1$ , et  $[S^*] = \frac{2^{l_j} \times \mathbf{m}_j}{k_{j-1}}$ , la condition  $\mathbf{m}_j$  premier à  $n_{(0,j)}$ . Ceci complète la démonstration de notre dernière proposition. On en déduit que le nombre  $s_{(0,j)}$  ne peut pas être nul, sans quoi on aurait  $m_j = 6k_{j-1}$ , et donc aussi  $k_{j-1}$  facteur commun de  $m_j$  et de  $\alpha_{j-1}$ , d'où nécessairement  $k_{j-1} = 1$ ,  $m_j = 6$ ,  $j = 0$ .

### 5.4.5. Nouvelle généralisation

On peut maintenant se demander aussi ce qui se passe si au lieu de partir de  $i = 0$  dans la proposition précédente, on part de  $i$  quelconque. Une façon de traiter cette question consiste à utiliser notre "relation de Chasles" pour donner avec  $i < j$  :

$$\begin{aligned}
s_{(i,j)} &= s_{(0,j)} - s_{(0,i)} \\
&= \varepsilon_{s_{(j-1,j)}} \frac{2k_{j-1} - (m_j/3)}{3 \times (m_0/3) \times (m_j/3)} - \varepsilon_{s_{(i-1,i)}} \frac{2k_{i-1} - (m_i/3)}{3 \times (m_0/3) \times (m_i/3)} \\
&= \frac{(2\varepsilon_{s_{(j-1,j)}} k_{j-1} - \varepsilon_{s_{(j-1,j)}} (m_j/3)) \times (m_i/3)}{3 \times (m_0/3) \times (m_i/3) \times (m_j/3)} \\
&\quad - \frac{(2\varepsilon_{s_{(i-1,i)}} k_{i-1} - \varepsilon_{s_{(i-1,i)}} (m_i/3)) \times (m_j/3)}{3 \times (m_0/3) \times (m_i/3) \times (m_j/3)} \\
&= \frac{2((\varepsilon_{s_{(j-1,j)}} k_{j-1} \times (m_i/3) - (\varepsilon_{s_{(i-1,i)}} k_{i-1} \times (m_j/3)))}{3 \times (m_0/3) \times (m_i/3) \times (m_j/3)} \\
&\quad + \frac{((m_i/3) \times (m_j/3))(\varepsilon_{s_{(i-1,i)}} - \varepsilon_{s_{(j-1,j)}})}{3 \times (m_0/3) \times (m_i/3) \times (m_j/3)} \\
&= \frac{((\varepsilon_{s_{(j-1,j)}} k_{j-1} \times (m_i/3) - (\varepsilon_{s_{(i-1,i)}} k_{i-1} \times (m_j/3)))}{3 \times (m_i/3) \times (m_j/3)} \\
&\quad + \frac{((m_i/3) \times (m_j/3)) \frac{(\varepsilon_{s_{(i-1,i)}} - \varepsilon_{s_{(j-1,j)}})}{2}}{3 \times (m_i/3) \times (m_j/3)}.
\end{aligned}$$

On voit alors que le terme  $\frac{(\varepsilon_{s_{(i-1,i)}} - \varepsilon_{s_{(j-1,j)}})}{2}$  est toujours un entier, que donc là encore une simplification se produit. On voit aussi que le cas  $i > j$  peut être traité avec 4.10, permettant d'annoncer de façon générale :

**Proposition 5.8.** *Pour tous indices  $i$  et  $j$  correspondant à des niveaux différents quelconques de l'arbre de Riedel on a pour le paramètre  $s_{(i,j)}$  une expression :*

$$s_{(i,j)} = \frac{n_{(i,j)}}{3 \times (m_i/3) \times (m_j/3)} = \frac{n_{(i,j)}}{2^{l_i+l_j} \times 3 \times m_i \times m_j},$$

où  $m_i$  et  $m_j$  entiers premiers à 6, où  $n_{(i,j)} \in \mathbb{Z}$  et  $l_i, l_j \in \{0, 1\}$ .

Appliquée au cas  ${}^t N(s)M(c_1, b_1, a_1)N(s) = M(a_1, b_1, c_1)$  considéré précédemment, cette dernière expression montre que le cas  $k_2 = 2$  qui était envisagé ci-dessus dans la proposition 27 ne peut en réalité pas se produire.

Notons que l'on a si  $i < j$ , on peut utiliser :

$$n_{(i,j)} = ((\varepsilon_{s_{(j-1,j)}} k_{j-1} \times (m_i/3) - (\varepsilon_{s_{(i-1,i)}} k_{i-1} \times (m_j/3)) + ((m_i/3) \times (m_j/3)) \frac{(\varepsilon_{s_{(i-1,i)}} - \varepsilon_{s_{(j-1,j)}})}{2}.$$

Par construction, le plus grand commun diviseur de  $m_i$  et de  $n_{(i,j)}$  est égal au plus grand commun diviseur de  $m_i$  et de  $k_{i-1} \times m_j$ . Or  $m_i$  et  $k_{i-1}$  n'ont aucun facteur commun car il existe pour l'indice  $i$  une relation analogue à l'égalité  $[S^*] = \frac{2^{l_j} \times m_j}{k_{j-1}}$ . Donc le plus grand commun diviseur de  $m_i$  et de  $n_{(i,j)}$  est égal au plus grand commun diviseur de  $m_i$  et de  $m_j$ . C'est aussi le plus grand commun diviseur de  $m_j$  et de  $n_{(i,j)}$ . Cette remarque s'étend au cas où  $i > j$ .

Remarquons également que l'on peut comparer les calculs intermédiaires donnant  $s_{(i,j)}$  et  $s_{(-i,-j)}$ . Supposons d'abord  $i < j$ . D'un côté on part de  $(a_i, b_i, c_i)$ , de l'autre on part de  $(a_{-i}, b_{-i}, c_{-i}) = (c_i, b_i, a_i)$ . Lorsque du premier côté on applique une matrice  $P$  (resp.  $Q$ ), on applique de l'autre côté  $Q$  (resp.  $P$ ), donc les valeurs  $\varepsilon$  obtenues à chaque étape des deux côtés sont opposées, par définition même de ces derniers nombres. Par contre les valeurs  $m$  sont les mêmes des deux côtés, de même que les valeurs  $\alpha$  et  $k$  associées. Au final, ceci donne un résultat que l'on peut comparer à  $(a_1 c_2 - c_1 a_2)(a_1 a_2 - c_1 c_2) = m^2(b_1 - b_2)$ . :

**Proposition 5.9.** *Pour tous indices  $i < j$  correspondant à des niveaux différents de l'arbre de Riedel on a pour les paramètres  $s_{(i,j)}$  et  $s_{(-i,-j)}$  la relation :*

$$s_{(i,j)} = -s_{(-i,-j)}.$$

La proposition s'étend facilement avec notre "relation de Chasles" au cas général pour  $i$  et  $j$ . D'autre part, si on la considère pour  $i = 0$ , on obtient  $s_{(0,j)} = -s_{(0,-j)}$ . En remarquant alors que l'on a  $s_{(j,-j)} = s_{(0,-j)} + s_{(j,0)}$ , avec  $s_{(j,0)} = -s_{(0,j)}$ , il reste seulement  $s_{(j,-j)} = -2s_{(0,j)}$ . Ceci permet de préciser :

**Proposition 5.10.** *A un niveau  $j$  quelconque de l'arbre de Riedel, considérons les deux triplets  $(a_j, b_j, c_j)$  et  $(a_{-j}, b_{-j}, c_{-j}) = (c_j, b_j, a_j)$ , et notons la transformation associée  $N_{(-j,j)}(s_{(-j,j)}) \in SL(3, \mathbb{Z})$ :*

$${}^t N_{(-j,j)}(s_{(-j,j)}) M(a_j, b_j, c_j) N_{(-j,j)}(s_{(-j,j)}) = M(c_j, b_j, a_j) = M(a_{-j}, b_{-j}, c_{-j}),$$

On a :

$$s_{(-j,j)} = 2s_{(0,j)} = \varepsilon_{s_{(j-1,j)}} \frac{2^{1-l_j} \times k_{j-1} - \mathbf{m}_j}{3 \times \mathbf{m}_j}.$$

où pour tout  $j$ , les paramètres intervenant dans cette expression ont été définis précédemment. On peut aussi écrire à partir de la dernière expression de la proposition précédente

$$s_{(-j,j)} = \frac{n_{(-j,j)}}{3 \times \mathbf{m}_j},$$

où  $\mathbf{m}_j$  est premier à  $n_{(-j,j)} = \varepsilon_{s_{(j-1,j)}}(2^{1-l_j} \times k_{j-1} - \mathbf{m}_j)$ .

Notons également que l'on a :

$$s_{(j,-j)} = -\frac{n_{(-j,j)}}{3 \times \mathbf{m}_j}.$$

Ceci confirme la faiblesse du lemme 3.10 donné par Riedel dans [19].

## 5.5. Application à la conjecture

Considérons de nouveau la situation étudiée par Norbert Riedel à la lumière des expressions que l'on vient de donner. On part d'un triplet  $(a_1, b_1, c_1)$  correspondant à une valeur  $m_1$ , on en trouve un autre correspondant à  $m_1$  qui est  $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) = (c_1, b_1, a_1)$ . Le cas qui nous intéresse est celui où il existe un troisième triplet  $(a_2, b_2, c_2)$  différent de  $(a_1, b_1, c_1)$  et de  $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1})$ , correspondant à la même valeur  $m_2 = m_1$  notée aussi  $m$ . Dans ce cas, il existe un quatrième triplet  $(a_{-2}, b_{-2}, c_{-2})$  correspondant à cette même valeur. On s'intéresse avec ce qui précède aux valeurs  $s_{(0,1)}$  correspondant à  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $s_{(0,-1)}$  correspondant à  $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1})$ ,  $s_{(0,2)}$  correspondant à  $(a_2, b_2, c_2)$ , éventuellement  $s_{(0,-2)}$  correspondant à  $(a_{-2}, b_{-2}, c_{-2})$ . Ces valeurs  $s$  sont ici celles qui résultent de l'application des résultats que l'on vient d'obtenir, de sorte que les calculs que l'on va pouvoir faire sont plus précis que ceux de Riedel. D'où la possibilité d'examiner plus en détail les calculs qui concluent l'article [19].

### 5.5.1. Des propriétés de divisibilité plus fortes

On note comme avant  $(a_0, b_0, c_0) = (3, 3, 3)$ . On part donc des quatre relations suivantes, où  $N_{(0,1)}(s_{(0,1)})$ ,  $N_{(0,-1)}(s_{(0,-1)})$ ,  $N_{(0,2)}(s_{(0,2)})$ ,  $N_{(0,-2)}(s_{(0,-2)})$ , sont des matrices de  $SL(3, \mathbb{Z})$  :

$${}^t N_{(0,1)}(s_{(0,1)}) M_1 N_{(0,1)}(s_{(0,1)}) = M_0,$$

$$\begin{aligned}
{}^t N_{(0,-1)}(s_{(0,-1)}) M_{-1} N_{(0,-1)}(s_{(0,-1)}) &= M_0, \\
{}^t N_{(0,2)}(s_{(0,2)}) M_2 N_{(0,2)}(s_{(0,2)}) &= M_0, \\
{}^t N_{(0,-2)}(s_{(0,-2)}) M_{-2} N_{(0,-2)}(s_{(0,-2)}) &= M_0.
\end{aligned}$$

On construit comme Riedel  $N_{(1,2)}(s^-) \in SL(3, \mathbb{Z})$  et  $N_{(2,-1)}(s^+) \in SL(3, \mathbb{Z})$  :

$$\begin{aligned}
{}^t N_{(1,2)}(s^-) M_2 N_{(1,2)}(s^-) &= M_1, \\
{}^t N_{(2,-1)}(s^+) M_{-1} N_{(2,-1)}(s^+) &= M_2.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&{}^t (N_{(1,2)}(s^-) N_{(0,1)}(s_{(0,1)})) M_2 (N_{(1,2)}(s^-) N_{(0,1)}(s_{(0,1)})) \\
&= {}^t N_{(0,2)}(s^- + s_{(0,1)}) M_2 N_{(0,2)}(s^- + s_{(0,1)}) = M_0 \\
&= {}^t N_{(0,2)}(s_{(0,2)}) M_2 N_{(0,2)}(s_{(0,2)}),
\end{aligned}$$

de sorte que l'on peut expliciter ici

$$\begin{aligned}
s^- &= s_{(0,2)} - s_{(0,1)}, \\
N_{(1,2)}(s^-) &= N_{(0,2)}(s_{(0,2)}) N_{(0,1)}(s_{(0,1)})^{-1} \in SL(3, \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
&{}^t (N_{(2,-1)}(s^+) N_{(0,2)}(s_{(0,2)})) M_{-1} (N_{(2,-1)}(s^+) N_{(0,2)}(s_{(0,2)})) \\
&= {}^t N_{(0,-1)}(s^+ + s_{(0,2)}) M_{-1} N_{(0,-1)}(s^+ + s_{(0,2)}) = M_0 \\
&= {}^t N_{(0,-1)}(s_{(0,-1)}) M_{-1} N_{(0,-1)}(s_{(0,-1)}),
\end{aligned}$$

de sorte que l'on peut aussi expliciter

$$\begin{aligned}
s^+ &= s_{(0,-1)} - s_{(0,2)}, \\
N_{(2,-1)}(s^+) &= N_{(0,-1)}(s_{(0,-1)}) N_{(0,2)}(s_{(0,2)})^{-1} \in SL(3, \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Résumons sur un nouveau schéma les relations que l'on considère dans la situation étudiée, en remarquant au préalable que l'on a ici  $s_{(0,-1)} = -s_{(0,1)}$  et  $s_{(0,-2)} = -s_{(0,2)}$ , et que l'on peut ci expliciter tous les paramètres  $s$  en fonction de  $s_{(0,1)}$  et

$s_{(0,2)}$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 & M_0 & & M_0 & \\
 N_{(0,1)}(s_{(0,1)}) & \uparrow & N_{(1,2)}(s^-) & \uparrow & N_{(0,2)}(s_{(0,2)}) \\
 & M_1 & \longleftarrow & M_2 & \\
 N_{(1,-1)}(-2s_{(0,1)}) & \uparrow & N_{(2,-1)}(s^+) \nearrow & \uparrow & N_{(2,-2)}(-2s_{(0,2)}) \\
 & M_{-1} & \longleftarrow & M_{-2} & \\
 N_{(0,-1)}(-s_{(0,1)}) & \downarrow & N_{(-1,-2)}(-s^-) & \downarrow & N_{(0,-2)}(-s_{(0,2)}) \\
 & M_0 & & M_0 & 
 \end{array}$$

fig.10

On a alors mieux que les conditions de divisibilité utilisées par Riedel dans [19], car ce que l'on vient de voir permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 s_{(0,1)} &= \frac{n_{(0,1)}}{3 \times 2 \times \mathbf{m}}, & s_{(0,2)} &= \frac{n_{(0,2)}}{3 \times 2 \times \mathbf{m}}, \\
 s^- &= -s_{(0,1)} + s_{(0,2)} = \frac{((n_{(0,2)} - n_{(0,1)})/2)}{3 \times \mathbf{m}}, \\
 s^+ &= -s_{(0,1)} - s_{(0,2)} = -\frac{((n_{(0,2)} + n_{(0,1)})/2)}{3 \times \mathbf{m}}.
 \end{aligned}$$

Par ce qui précède, on peut écrire avec  $m = 2^l \times 3 \times \mathbf{m}$  :

$$\frac{(n_{(0,2)} - n_{(0,1)})}{2} = \frac{\varepsilon_2 \times k_{j_2-1} - \varepsilon_1 \times k_{j_1-1}}{2^l} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \mathbf{m}.$$

Le terme  $((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2)$  est un entier, car  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ . Si  $l = 0$  ce nombre est un entier de façon évidente. Si au contraire  $l = 1$  les deux conditions de type  $[S^*] = ((2^{l_j} \times \mathbf{m}_j)/k_{j-1})$  imposent que les nombres  $k_{j_1-1}$  et  $k_{j_2-1}$  soient impairs, c'est à dire que  $((\varepsilon_2 \times k_{j_2-1} - \varepsilon_1 \times k_{j_1-1})/2)$  soit un entier. En résumé, on vient de s'assurer que le nombre  $n_{(-)} = ((n_{(0,2)} - n_{(0,1)})/2)$  est un entier. De même, le nombre  $n_{(+)} = -((n_{(0,2)} + n_{(0,1)})/2)$  est un entier. On peut donc noter avec ces deux derniers entiers :

$$\begin{aligned}
 s^- &= -s_{(0,1)} + s_{(0,2)} = \frac{n_{(-)}}{3 \times \mathbf{m}}, \\
 s^+ &= -s_{(0,1)} - s_{(0,2)} = \frac{n_{(+)}}{3 \times \mathbf{m}}.
 \end{aligned}$$



Si l'on compare au raisonnement de N. Riedel qui a été développé ci-dessus, et dont on adopte les notations, on peut simplifier les expressions que l'on vient d'utiliser à partir d'une décomposition  $\mathbf{m} = fg$  et de 4.18 :

$$s^- = \frac{n_{(-)}}{3 \times \mathbf{m}} = \frac{n^-}{9g}, \quad s^+ = \frac{n_{(+)}}{3 \times \mathbf{m}} = \frac{n^+}{9f}.$$

Ces deux conditions imposent puisque  $\mathbf{m}$  entier premier à 6 que l'on a 3 diviseur de  $n^-$  et de  $n^+$ . Et l'on a alors avec  $(n^-/3) \in \mathbb{Z}$  et  $(n^+/3) \in \mathbb{Z}$  des conditions meilleures que celles utilisées par Riedel:

$$n_{(-)} = \left(\frac{n^-}{3}\right) f, \quad n_{(+)} = \left(\frac{n^+}{3}\right) g,$$

$$s^- = \frac{(n^-/3)}{3g} \in \frac{1}{3g}\mathbb{Z}, \quad s^+ = \frac{(n^+/3)}{3f} \in \frac{1}{3f}\mathbb{Z}.$$

En notant encore  $s_1 = s^+ + s^-$  on constate maintenant que l'on a  $s_1 = -2s_{(0,1)}$ . Et en observant que  $N_{(1,-1)}(s_1)$  est dans  $SL(3, \mathbb{Z})$  on a conclu antérieurement que l'on a  $s_1 = \frac{n^+g+n^-f}{9\mathbf{m}} \in \frac{1}{9\mathbf{m}}\mathbb{Z}$ . De sorte que l'on a noté ce nombre  $s_1 = (n_1/9\mathbf{m})$ , avec  $n_1$  entier et  $n_1$  et  $\mathbf{m}$  sans facteur commun. Or on a mieux avec  $\left(\frac{n^+}{3}\right)g + \left(\frac{n^-}{3}\right)f \in \mathbb{Z}$  :

$$n_1 = 3\left(\frac{n^+}{3}g + \frac{n^-}{3}f\right), \quad (n_1/3) \in \mathbb{Z},$$

$$s_1 = \frac{n_1}{9\mathbf{m}} = \frac{\left(\frac{n^+}{3}\right)g + \left(\frac{n^-}{3}\right)f}{3 \times \mathbf{m}} = \frac{2^l n_1}{3m} \in \frac{1}{3\mathbf{m}}\mathbb{Z}.$$

Cette expression est parfaitement cohérente avec ce que l'on a vu avant, sachant que  $s_1 = -2s_{(0,1)} = s_{(1,-1)}$  intervient dans la matrice  $N_{(1,-1)}(-2s_{(0,1)})$ . En posant maintenant  $s_2 = s^+ - s^-$ , on constate que l'on a  $s_2 = -2s_{(0,2)}$ . Avec  $N_{(2,-2)}(s_2) \in SL(3, \mathbb{Z})$  on a également conclu que l'on a  $s_2 = \frac{n^+g-n^-f}{9\mathbf{m}} \in \frac{1}{9\mathbf{m}}\mathbb{Z}$ . De sorte que si l'on note ce nombre  $s_2 = (n_2/9\mathbf{m})$ , avec  $n_2$  entier et premier à  $\mathbf{m}$ , on a cette fois avec  $\left(\frac{n^+}{3}\right)g - \left(\frac{n^-}{3}\right)f \in \mathbb{Z}$  :

$$n_2 = 3\left(\frac{n^+}{3}g - \frac{n^-}{3}f\right), \quad (n_2/3) \in \mathbb{Z},$$

$$s_2 = \frac{n_2}{9\mathbf{m}} = \frac{\left(\frac{n^+}{3}\right)g - \left(\frac{n^-}{3}\right)f}{3 \times \mathbf{m}} = \frac{2^l n_2}{3m} \in \frac{1}{3\mathbf{m}}\mathbb{Z}.$$

Cette expression est aussi parfaitement cohérente avec ce qui précède, sachant que  $s_2 = -2s_{(0,2)} = s_{(2,-2)}$  intervient dans la matrice  $N_{(2,-2)}(-2s_{(0,2)})$ . Les nombres  $n_2$  et  $g$  sont premiers entre eux. De même  $n_1$  et  $f$  sont premiers entre eux. Résumons les points essentiels pour la suite que l'on vient de trouver :

**Proposition 5.11.** *Les nombres  $n^+$ ,  $n^-$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  sont tous multiples de 3, et on a avec  $m = 2^l 3fg$  et  $\mathfrak{m} = fg$  :*

$$s^- = \frac{(n^-/3)}{3g} \in \frac{1}{3g}\mathbb{Z}, \quad s^+ = \frac{(n^+/3)}{3f} \in \frac{1}{3f}\mathbb{Z}, \quad s_1, s_2 \in \frac{1}{3\mathfrak{m}}\mathbb{Z}.$$

Arrivé à ce stade, on est maintenant en mesure de réexaminer de façon plus précise la situation qui se présente, en ayant recours aux compléments que l'on vient d'acquérir.

### 5.5.2. Retour sur l'insuffisance de l'argument de Norbert Riedel

On reprend ici l'analyse de [19] au niveau où on l'a arrêtée ci-dessus après avoir détecté une erreur de calcul redhibitoire. On pose pour simplifier  $l = l_1$ , et on écrit avec 3.63 pour la matrice  $N_{(1,2)}(s^-) \in SL(3, \mathbb{Z})$  :

$$\begin{aligned} & m^2 N_{(1,2)}(s^-) \\ &= (\Gamma_0 + m^2 \Gamma_2) + \frac{2^l}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1)(n^+g - n_2) \\ & \quad + \frac{1}{2} \left( \frac{2^{2l}}{9} (n^+g - n_2)^2 - \frac{2^l}{3} (n^+g - n_2)m \right) ({}^t\Phi). \end{aligned}$$

On se démarque un peu de ce que fait Riedel pour la définition de ses termes  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$ . La différence avec sa prépublication [19] provient de la volonté de ne faire apparaître que des matrices valables pour le cas général et pas seulement pour le cas  $l = 0$ . On pose donc ici :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^* &= (\Gamma_0 + m^2 \Gamma_2) + 2^l \frac{n_2}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1) + \frac{1}{2} \left( (2^l \frac{n_2}{3})^2 + (2^l \frac{n_2}{3} m) \right) {}^t\Phi, \\ \mathfrak{B}^* &= 2^{2l} \left( \frac{1}{2} \left( \left( \frac{n^+}{3} \right)^2 - (n^+f)g^2 \right) \right) {}^t\Phi \\ &= \left( \frac{1}{2} \left( (2^l g \frac{n^+}{3})^2 - (2^l m g \frac{n^+}{3}) \right) \right) {}^t\Phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}^* &= 2^l \frac{1}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1 - 2^l \frac{n_2^t}{3} \Phi) n^+ g - 2fg\Omega_1 (2^{2l} n_2) \\
&= 2^l g \frac{n^+}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1) - \left( 2^{2l} g \frac{n^+ n_2}{9} \right)^t \Phi - (2^{1+2l} \frac{n_2}{3} fg) 3\Omega_1 \\
&= 2^l g \frac{n^+}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1) - \left( 2^{2l} g \frac{n^+ n_2}{3 \cdot 3} \right)^t \Phi - (2^{1+l} \frac{n_2}{3} m) \Omega_1, \\
\mathfrak{D}^* &= -2^l \Omega_0 \frac{2n_2}{3}.
\end{aligned}$$

Ces expressions se réduisent si  $l = 0$  exactement à celles de [19] à l'exception de  $\mathfrak{A}$  qui ne comprend plus le terme  $m\Gamma_1$ , et de  $\mathfrak{C}$  qui est différent au niveau de son dernier terme, c'est à dire sans le facteur  $n_2 fg(t\Phi)$  qui figure dans [19]. De façon précise, pour  $l = 0$ , les expressions de Riedel valent par rapport aux nôtres :

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^* + m\Gamma_1, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}^* + n_2 fg(t\Phi), \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*. \quad (5.37)$$

Avec nos expressions, on a dans le cas le plus général pour  $l$  :

$$\begin{aligned}
& m^2 N_{(1,2)}(s^-) \\
&= (\Gamma_0 + m^2 \Gamma_2) + \frac{2^l}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1) (n^+ g - n_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{2^{2l}}{9} (n^+ g - n_2)^2 - \frac{2^l}{3} (n^+ g - n_2) m \right) (t\Phi) \\
&= (\Gamma_0 + m^2 \Gamma_2) \\
&\quad + 2^l \frac{n^+ g}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1) - 2^l \frac{n_2}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1) \\
&\quad + \frac{1}{2} (2^l \frac{n^+ g}{3})^2 (t\Phi) - (2^{2l} \frac{n^+ g n_2}{9}) (t\Phi) + \frac{1}{2} (2^l \frac{n_2}{3})^2 (t\Phi) \\
&\quad - \frac{1}{2} (2^l m \frac{n^+ g}{3}) (t\Phi) + \frac{1}{2} (2^l m \frac{n_2}{3}) (t\Phi) \\
&= \mathfrak{A}^* + 2^l \frac{n^+ g}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1) - 2^{1+l} \frac{n_2}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1) \\
&\quad - \frac{1}{2} (2^l m \frac{n^+ g}{3}) (t\Phi) + \frac{1}{2} (2^l \frac{n^+ g}{3})^2 (t\Phi) - (2^{2l} \frac{n^+ g n_2}{9}) (t\Phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}^* + 2^l \frac{n^+ g}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1) - 2^{1+l} \frac{n_2}{3} (\Omega_0 + m\Omega_1) - (2^{2l} \frac{n^+ g n_2}{9}) ({}^t\Phi) \\
&= \mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}^* + \mathfrak{C}^* - 2^{1+l} \frac{n_2}{3} (\Omega_0) \\
&= \mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}^* + \mathfrak{C}^* + \mathfrak{D}^*.
\end{aligned}$$

La matrice  $\mathfrak{B}^*$  est dans  $M_3(\mathbb{Z})$  parce que  $(n^+/3) \in \mathbb{Z}$  de même parité que  $fn^+$ , elle est nulle modulo  $g^2$ , ce qui veut dire que tous ses coefficients sont congrus à 0 modulo  $g^2$ . Mieux, en remarquant que les termes de  ${}^t\Phi$  ont un facteur commun égal à 9, la matrice  $\mathfrak{B}^*$  est nulle modulo  $9g^2$ . Mieux encore :

$$\mathfrak{B}^* \equiv 0 \pmod{2^{2l}9g^2}.$$

Avec  $(n^+/3) \in \mathbb{Z}$  et  $(n_2/3) \in \mathbb{Z}$ , la matrice  $\mathfrak{C}^*$  est aussi dans  $M_3(\mathbb{Z})$ , et on voit qu'elle est nulle modulo  $g$ . Mieux, en remarquant que les termes de  $\Omega_0$  ont un facteur commun égal à 9, qu'il en est de même de ceux de  $m\Omega_1$  ou de ceux de  $3\Omega_1$ , ou encore de ceux de  ${}^t\Phi$ , la matrice  $\mathfrak{C}^*$  est nulle modulo  $9g$ . Mieux encore :

$$\mathfrak{C}^* \equiv 0 \pmod{2^l 9g}.$$

En se limitant à raisonner modulo  $g$  comme le fait Riedel dans [19] (bas de la page 19 et haut de la page 20), on a :

$$m^2 N_{(1,2)}(s^-) \equiv \mathfrak{B}^* \equiv \mathfrak{C}^* \equiv 0 \pmod{g},$$

et comme on vient de voir que  $m^2 N_{(1,2)}(s^-) = \mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}^* + \mathfrak{C}^* + \mathfrak{D}^*$ , il vient :

$$\mathfrak{A}^* + \mathfrak{D}^* \equiv 0 \pmod{g}. \tag{5.38}$$

Avec  $(n_2/3) \in \mathbb{Z}$ , la matrice  $\mathfrak{A}^*$  est aussi dans  $M_3(\mathbb{Z})$ . Il suffit pour le confirmer de s'assurer que le terme  $\frac{1}{2}((2^l \frac{n_2}{3})^2 + (2^l \frac{n_2}{3} m))$  est un entier. Or c'est évident si  $l = 1$ , et de même si  $l = 0$  car on a alors  $m$  impair, donc  $((n_2/3)m)$  de même parité que  $(n_2/3)$  et aussi que  $(n_2/3)^2$ . L'argument décisif de Riedel à ce niveau est que  $\mathfrak{A} \equiv 0$  modulo  $g^2$ . Il énonce cette propriété en comparant la matrice  $\mathfrak{A}$  à  $m^2 N_{(2,-2)}(s_2)$ . On doit maintenant transposer cet argument avec les définitions adoptées ici. Raisonnant modulo  $g$  sur  $\mathfrak{A}^*$ , et non  $\mathfrak{A}$ , on a d'abord (on garde

intentionnellement ici le terme  $(2^l m \frac{n_2}{3})$  qui est en réalité congru à 0 modulo  $g$  :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}^* &= (\Gamma_0 + m^2 \Gamma_2) + 2^l \frac{n_2}{3} (\Omega_0 + m \Omega_1) + \frac{1}{2} ((2^l \frac{n_2}{3})^2 + (2^l m \frac{n_2}{3})) ({}^t \Phi) \\
&\equiv \Gamma_0 + 2^l \frac{n_2}{3} \Omega_0 + \frac{1}{2} ((2^l \frac{n_2}{3})^2 + (2^l m \frac{n_2}{3})) ({}^t \Phi) \\
&\equiv \begin{pmatrix} -(a_1 a_2 + c_1 c_2) & 0 & -(a_1 c_2 - c_1 a_2) \\ -(a_1 c_2 - c_1 a_2) c_2 & 0 & (a_1 c_2 - c_1 a_2) a_2 \\ (a_1 c_2 - c_1 a_2) & 0 & -(a_1 a_2 + c_1 c_2) \end{pmatrix} \\
&\quad + 2^l \frac{n_2}{3} \begin{pmatrix} (a_1 c_2 - c_1 a_2) & 0 & -(a_1 a_2 + c_1 c_2) \\ -c_2 (a_1 a_2 + c_1 c_2) & 0 & -c_2 (a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ (a_1 a_2 + c_1 c_2) & 0 & (a_1 c_2 - a_2 c_1) \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2} ((2^l \frac{n_2}{3})^2 + (2^l m \frac{n_2}{3})) \begin{pmatrix} c_1 c_2 & 0 & a_1 c_2 \\ -b_2 c_1 & 0 & -a_1 b_2 \\ a_2 c_1 & 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Modulo  $g$  s'introduisent les matrices:

$$\Gamma_{0, \text{mod } g} = \begin{pmatrix} -(a_1 a_2 + c_1 c_2) & 0 & -(a_1 c_2 - c_1 a_2) \\ -(a_1 c_2 - c_1 a_2) c_2 & 0 & (a_1 c_2 - c_1 a_2) a_2 \\ (a_1 c_2 - c_1 a_2) & 0 & -(a_1 a_2 + c_1 c_2) \end{pmatrix} \equiv \Gamma_0, \quad (5.39)$$

$$\Omega_{0, \text{mod } g} = \begin{pmatrix} (a_1 c_2 - c_1 a_2) & 0 & -(a_1 a_2 + c_1 c_2) \\ -c_2 (a_1 a_2 + c_1 c_2) & 0 & -c_2 (a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ (a_1 a_2 + c_1 c_2) & 0 & (a_1 c_2 - a_2 c_1) \end{pmatrix} \equiv \Omega_0, \quad (5.40)$$

$$({}^t \Phi_{\text{mod } g}) = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & 0 & a_1 c_2 \\ -b_2 c_1 & 0 & -a_1 b_2 \\ a_2 c_1 & 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix} \equiv ({}^t \Phi). \quad (5.41)$$

On peut transformer maintenant 5.39 avec notre proposition 13 (Corollaire 3.5 de Riedel) qui indique que l'on a  $g$  diviseur de  $a_1 a_2 - c_1 c_2$ . On en déduit facilement modulo  $g$  :

$$c_2(\Gamma_{0, \text{mod } g}) \equiv a_1 \begin{pmatrix} -2a_2 c_2 & 0 & -(c_2^2 - a_2^2) \\ -(c_2^2 - a_2^2) c_2 & 0 & (c_2^2 - a_2^2) a_2 \\ (c_2^2 - a_2^2) & 0 & -2a_2 c_2 \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Si l'on traite de même 5.40, on obtient facilement :

$$c_2(\Omega_{0, \text{mod } g}) \equiv a_1 \begin{pmatrix} (c_2^2 - a_2^2) & 0 & -2a_2 c_2 \\ -(2a_2 c_2) c_2 & 0 & -c_2 (c_2^2 - a_2^2) \\ 2a_2 c_2 & 0 & (c_2^2 - a_2^2) \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Enfin, on peut procéder de même avec 5.41, et on trouve :

$$c_2({}^t\Phi_{\text{mod } g}) \equiv a_1 \begin{pmatrix} a_2 c_2 & 0 & c_2^2 \\ -b_2 a_2 & 0 & -b_2 c_2 \\ a_2^2 & 0 & a_2 c_2 \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

Mais  $c_2$  est par construction de  $g$  premier à ce nombre, tout comme  $a_1$  d'ailleurs. On peut donc trouver un entier  $\gamma_2$  également premier à  $g$  tel que  $c_2 \gamma_2 \equiv 1 \pmod{g}$ . Ceci permet d'écrire modulo  $g$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^* &\equiv a_1 \gamma_2 \begin{pmatrix} -2a_2 c_2 & 0 & -(c_2^2 - a_2^2) \\ -(c_2^2 - a_2^2) c_2 & 0 & (c_2^2 - a_2^2) a_2 \\ (c_2^2 - a_2^2) & 0 & -2a_2 c_2 \end{pmatrix} \\ &+ 2^l \frac{n_2}{3} a_1 \gamma_2 \begin{pmatrix} (c_2^2 - a_2^2) & 0 & -2a_2 c_2 \\ -(2a_2 c_2) c_2 & 0 & -c_2 (c_2^2 - a_2^2) \\ 2a_2 c_2 & 0 & (c_2^2 - a_2^2) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \left( (2^l \frac{n_2}{3})^2 + (2^l m \frac{n_2}{3}) \right) a_1 \gamma_2 \begin{pmatrix} a_2 c_2 & 0 & c_2^2 \\ -b_2 a_2 & 0 & -b_2 c_2 \\ a_2^2 & 0 & a_2 c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mais à ce stade apparaît un nouveau problème par rapport à la prépublication v4 de Riedel [19]. En effet, si l'on considère avec 3.63 le développement de la matrice  $N_{(2,-2)}(s_2) \in SL(3, \mathbb{Z})$ , il s'écrit :

$$\begin{aligned} &m^2 N_{(2,-2)}(s_2) \\ &= (\Gamma_0^\# + m^2 \Gamma_2^\#) + s_2 m (\Omega_0^\# + m \Omega_1^\#) + \frac{((s_2)^2 - s_2)}{2} m^2 ({}^t\Phi^\#) \\ &= (\Gamma_0^\# + m^2 \Gamma_2^\#) + 2^l \frac{n_2}{3} (\Omega_0^\# + m \Omega_1^\#) + \frac{1}{2} \left( (2^l \frac{n_2}{3})^2 - 2^l \frac{n_2}{3} m \right) ({}^t\Phi^\#), \end{aligned}$$

où  $(a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}) = (c_2, b_2, a_2)$  donne les matrices  $(\Gamma_0^\# + m^2 \Gamma_2^\#)$ ,  $(\Omega_0^\# + m \Omega_1^\#)$  et  $({}^t\Phi^\#)$  à partir ses expressions que l'on a fournies antérieurement dans notre formulaire du paragraphe 3.5.4. Or modulo  $g$  on a cette fois :

$$\Gamma_0^\# \equiv \begin{pmatrix} -2a_2 c_2 & 0 & -(a_2^2 - c_2^2) \\ -(a_2^2 - c_2^2) a_2 & 0 & (a_2^2 - c_2^2) c_2 \\ (a_2^2 - c_2^2) & 0 & -2a_2 c_2 \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

$$\Omega_0^\# \equiv \begin{pmatrix} (a_2^2 - c_2^2) & 0 & -2a_2 c_2 \\ -2c_2 a_2^2 & 0 & -a_2 (a_2^2 - c_2^2) \\ 2a_2 c_2 & 0 & (a_2^2 - c_2^2) \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

$$({}^t\Phi^\#) \equiv \begin{pmatrix} c_2 a_2 & 0 & a_2^2 \\ -b_2 c_2 & 0 & -a_2 b_2 \\ c_2^2 & 0 & a_2 c_2 \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

Modulo  $g$ , l'expression de  $m^2 N_{(2,-2)}(s_2)$  que l'on vient de donner se simplifie donc pour donner seulement

$$0 \equiv \Gamma_0^\# + 2^l \frac{n_2}{3} \Omega_0^\# + \frac{1}{2} \left( (2^l \frac{n_2}{3})^2 - 2^l \frac{n_2}{3} m \right) ({}^t\Phi^\#).$$

On ne trouve pas les bonnes matrices, c'est à dire celle qui apparaissent dans  $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} - m\Gamma_1$ . Cependant on voit que l'on trouve plutôt celles qui correspondent à l'indice  $-2$  plutôt qu'à l'indice  $2$ , car  $a_2$  et  $c_2$  sont permutés par rapport à ce qui serait nécessaire. En d'autres termes il faut plutôt considérer ici avec 3.63, le développement de la matrice  $N_{(-2,2)}(-s_2) \in SL(3, \mathbb{Z})$  :

$$\begin{aligned} & m^2 N_{(-2,2)}(-s_2) \\ &= (\Gamma_0^{\#\#} + m^2 \Gamma_2^{\#\#}) - s_2 m (\Omega_0^{\#\#} + m \Omega_1^{\#\#}) + \frac{((s_2)^2 + s_2)}{2} m^2 ({}^t\Phi^{\#\#}) \\ &= (\Gamma_0^{\#\#} + m^2 \Gamma_2^{\#\#}) - 2^l \frac{n_2}{3} (\Omega_0^{\#\#} + m \Omega_1^{\#\#}) + \frac{1}{2} \left( (2^l \frac{n_2}{3})^2 + 2^l \frac{n_2}{3} m \right) ({}^t\Phi^{\#\#}), \end{aligned}$$

c'est à dire modulo  $g$  :

$$0 \equiv \Gamma_0^{\#\#} - 2^l \frac{n_2}{3} \Omega_0^{\#\#} + \frac{1}{2} \left( (2^l \frac{n_2}{3})^2 \right) ({}^t\Phi^{\#\#}), \quad (5.48)$$

où les expressions de notre formulaire du paragraphe 3.5.4 conduisent à introduire ici modulo  $g$  :

$$\Gamma_0^{\#\#} \equiv \begin{pmatrix} -2a_2 c_2 & 0 & -(c_2^2 - a_2^2) \\ -(c_2^2 - a_2^2) c_2 & 0 & (c_2^2 - a_2^2) a_2 \\ (c_2^2 - a_2^2) & 0 & -2a_2 c_2 \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

$$\Omega_0^{\#\#} \equiv \begin{pmatrix} (c_2^2 - a_2^2) & 0 & -2a_2 c_2 \\ -(2a_2 c_2) c_2 & 0 & -c_2 (c_2^2 - a_2^2) \\ 2a_2 c_2 & 0 & (c_2^2 - a_2^2) \end{pmatrix}, \quad (5.50)$$

$${}^t\Phi^{\#\#} \equiv \begin{pmatrix} a_2 c_2 & 0 & c_2^2 \\ -b_2 a_2 & 0 & -b_2 c_2 \\ a_2^2 & 0 & a_2 c_2 \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

Remarquons que la matrice  $\Gamma_0^{\#\#}$  est précisément celle qui apparaissait dans 5.42,  $\Omega_0^{\#\#}$  est celle qui apparaissait dans 5.43, et  ${}^t\Phi^{\#\#}$  celle qui apparaissait dans 5.44.

En remplaçant dans l'expression donnée pour  $\mathfrak{A}^*$ , et toujours modulo  $g$ , on trouve cette fois :

$$\mathfrak{A}^* \equiv a_1 \gamma_2 \Gamma_0^{\#\#} + 2^l \frac{n_2}{3} a_1 \gamma_2 \Omega_0^{\#\#} + \frac{1}{2} \left( (2^l \frac{n_2}{3})^2 \right) a_1 \gamma_2 ({}^t \Phi^{\#\#}),$$

et en comparant avec 5.48

$$\mathfrak{A}^* \equiv 2^{l+1} \frac{n_2}{3} a_1 \gamma_2 \Omega_0^{\#\#}.$$

Maintenant, si l'on compare à 5.38 et à l'expression définissant  $\mathfrak{D}^*$ , on obtient au final :

$$2^{l+1} \frac{n_2}{3} a_1 \gamma_2 \Omega_0^{\#\#} - 2^l \Omega_0 \frac{2n_2}{3} \equiv 0 \pmod{g},$$

c'est à dire aussi, en inversant  $\gamma_2$  modulo  $g$  :

$$c_2 \Omega_0 \equiv a_1 \Omega_0^{\#\#} \pmod{g}. \quad (5.52)$$

Or cette condition est très précisément celle que l'on a donnée ci-dessus en traitant modulo  $g$  la matrice apparaissant dans 5.40, de façon précise c'est une combinaison de 5.40, 5.50 et 5.43. On voit d'ailleurs que l'on a aussi, en combinant 5.39, 5.49 et 5.42, respectivement 5.41, 5.51 et 5.44 :

$$c_2 \Gamma_0 \equiv a_1 \Gamma_0^{\#\#} \pmod{g}. \quad (5.53)$$

$$c_2 ({}^t \Phi) \equiv a_1 ({}^t \Phi^{\#\#}) \pmod{g}. \quad (5.54)$$

Donc loin de donner une congruence fautive impliquant une contradiction, l'argument final de la prépublication [19] de Riedel donne une congruence vraie lorsque les calculs sont faits de façon précise. Et l'on s'est assuré ici que toutes les congruences modulo  $g$  mises en évidence sont cohérentes. Ceci confirme d'une nouvelle façon notre affirmation de défaillance déjà affichée ci-dessus dans la démonstration de Norbert Riedel [19].

Mais on peut être encore plus précis dans notre dernière remarque, en utilisant les notations de Riedel auxquelles on revient ici, en considérant de nouveau le cas où  $l = 0$  et en utilisant 5.37. Nos calculs montrent que l'on a, avec 5.38 :

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{D} \equiv m \Gamma_1 \equiv 0 \pmod{g}. \quad (5.55)$$

Mais la dernière congruence modulo  $g$  obtenue pour  $\mathfrak{A}^*$  donne maintenant :

$$\mathfrak{A} \equiv 2 \frac{n_2}{3} a_1 \gamma_2 \Omega_0^{\#\#} \equiv 2 \frac{n_2}{3} a_1 \begin{pmatrix} (c_2^2 - a_2^2) \gamma_2 & 0 & -2a_2 \\ -(2a_2 c_2) & 0 & -(c_2^2 - a_2^2) \\ 2a_2 & 0 & (c_2^2 - a_2^2) \gamma_2 \end{pmatrix}.$$



La congruence à 0 modulo  $g^2$  de  $\mathfrak{A}$  mise en avant [19] (alinéa 29 page 19) dans ne peut avoir lieu car il est facile de vérifier simplement modulo  $g$ , à partir de l'équation 2.1 ainsi que de ce qui a été dit sur  $n_2$  et  $g$ , que l'on n'a pas :

$$4n_2 \frac{a_1 a_2}{3} \equiv 0 \pmod{g}.$$

Ceci confirme à nouveau la défaillance de la démonstration de Norbert Riedel. Il reste d'ailleurs, avec l'expression de  $\mathfrak{D}$  :

$$\mathfrak{D} = -\Omega_0 \frac{2n_2}{3} \equiv -\frac{2n_2}{3} a_1 \gamma_2 \Omega_0^{\#\#} \pmod{g}.$$

Cette dernière congruence est une égalité directement déductible de 5.52. Si  $\mathfrak{A}$  était congru à 0 modulo  $g$ ,  $\mathfrak{D}$  le serait aussi. Or l'expression de  $\Omega_0$  que l'on a donnée ci-dessus, et le fait que  $n_2$  est premier à  $g$ , confirme que tel n'est pas le cas. Ainsi, l'équivalent rectifié des expressions utilisées dans [19] est

$$\begin{aligned} m^2 N_{(1,2)}(s^-) &= \mathfrak{A} - m\Gamma_1 + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - n_2 f g({}^t\Phi) + \mathfrak{D} \\ &\equiv \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} \equiv 0 \pmod{g}, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C} \equiv 0 \pmod{g},$$

$$m^2 N_{(2,-2)}(s_2) \equiv 0 \pmod{g^2},$$

d'où

$$\mathfrak{D} \equiv -\mathfrak{A} \equiv -2 \frac{n_2}{3} a_1 \begin{pmatrix} (c_2^2 - a_2^2)\gamma_2 & 0 & -2a_2 \\ -(2a_2 c_2) & 0 & -(c_2^2 - a_2^2) \\ 2a_2 & 0 & (c_2^2 - a_2^2)\gamma_2 \end{pmatrix} \not\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod{g}.$$

### 5.5.3. Deux observations complémentaires

Si l'on reconsidère ce que l'on vient de faire, apparait de façon essentielle la condition 5.48, qui en posant  $x = 2^l(n_2/3) \in \mathbb{Z}$  s'écrit aussi, multipliée par 2 et modulo

le diviseur impair  $g$  de  $a_2c_2 - b_2 = m$ :

$$0 \equiv 2 \begin{pmatrix} -2a_2c_2 & 0 & -(c_2^2 - a_2^2) \\ -(c_2^2 - a_2^2)c_2 & 0 & (c_2^2 - a_2^2)a_2 \\ (c_2^2 - a_2^2) & 0 & -2a_2c_2 \end{pmatrix} \\ -2x \begin{pmatrix} (c_2^2 - a_2^2) & 0 & -2a_2c_2 \\ -(2a_2c_2)c_2 & 0 & -c_2(c_2^2 - a_2^2) \\ 2a_2c_2 & 0 & (c_2^2 - a_2^2) \end{pmatrix} \\ +x^2 \begin{pmatrix} a_2c_2 & 0 & c_2^2 \\ -b_2a_2 & 0 & -b_2c_2 \\ a_2^2 & 0 & a_2c_2 \end{pmatrix}.$$

Cette condition matricielle se réduit à un ensemble de conditions numériques en réalité non indépendantes les unes des autres. On voit facilement que l'on peut en extraire un ensemble équivalent de trois équations qui n'est d'ailleurs pas le meilleur possible :

$$(-4c_2) + x(4a_2) + x^2c_2 \equiv 0, \\ (-4a_2) - x(4c_2) + x^2a_2 \equiv 0, \\ (4c_2a_2) + 2x(c_2^2 - a_2^2) - x^2b_2 \equiv 0.$$

Maintenant si l'on considère le déterminant de la matrice des coefficients de ce système, on trouve :

$$\det \begin{pmatrix} -4c_2 & 4a_2 & c_2 \\ -4a_2 & -4c_2 & a_2 \\ 4c_2a_2 & 2(c_2^2 - a_2^2) & -b_2 \end{pmatrix} = 16 (a_2^2 + c_2^2) (a_2c_2 - b_2) = 0 \pmod{g}.$$

En fait la troisième équation se déduit modulo  $g$  de la première multipliée par  $-a_2$ . Egalement en inversant  $c_2$  modulo  $g$  en  $\gamma_2$ , la première équation se réduit à

$$(-4) + x(4a_2\gamma_2) + x^2 \equiv 0,$$

et elle redonne la seconde en multipliant simplement par  $a_2$ . La relation 5.48 se réduit donc finalement à une seule condition numérique équivalente qui est :

$$(-4c_2) + (2^l \frac{n_2}{3})(4a_2) + (2^l \frac{n_2}{3})^2(c_2) \equiv 0 \pmod{g}. \quad (5.56)$$

Par l'expression de  $n_2$  qui a conduit à la proposition 35, on a de façon équivalente, avec  $(n^-/3) \in \mathbb{Z}$

$$(-4c_2) - 4a_2(2^l f)\left(\frac{n^-}{3}\right) + c_2(2^l f)^2\left(\frac{n^-}{3}\right)^2 \equiv 0 \pmod{g}. \quad (5.57)$$

Cette condition est assez remarquable puisqu'elle fait intervenir le triplet de solution  $(a_2, b_2, c_2)$ , des facteurs issus de  $m = a_2c_2 - b_2 = 2^l 3fg$ , et qu'en résolvant une équation binomiale modulo  $g$  elle semble donner le nombre  $s^- = (n^-/9g)$ . Multipliant par  $c_2$  premier à  $g$ , avec  $ms^- = 2^l f(n^-/3) \in \mathbb{Z}$ , on peut écrire de façon équivalente :

$$(-4c_2^2) - 4a_2(c_2ms^-) + (c_2ms^-)^2 \equiv 0 \pmod{g}.$$

Mais puisque  $a_2^2 + c_2^2 = mb_2 \equiv 0 \pmod{g}$  et  $(2^l f)$  inversible modulo  $g$ , on a simplement, de façon équivalente :

$$\left((n^-/3) - 2a_2\gamma_2(2^l f)^{-1}\right)^2 \equiv 0 \pmod{g}. \quad (5.58)$$

Cette condition permet d'identifier très facilement les possibilités pour  $(n^-/3)$  à partir d'un entier  $\alpha$  tel que  $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{g}$ , et avec un entier  $\lambda \in \mathbb{Z}$  :

$$(n^-/3) = 2a_2\gamma_2(2^l f)^{-1} + \alpha + \lambda g.$$

Tout facteur premier  $p$  de  $g$  est un facteur premier de  $\alpha$  et est aussi premier à  $2a_2\gamma_2(2^l f)^{-1}$ , donc est également premier à  $(n^-/3)$  d'après cette dernière congruence. Ainsi  $g$  est lui même premier à  $(n^-/3)$ , ce qui confirme que l'expression de  $s^-$  donnée par la proposition 35 n'est pas simplifiable, sauf éventuellement par un facteur 3 si et seulement si  $(n^-/3)$  est divisible par 3. En échangeant éventuellement les indices 1 et 2, le même résultat vaut pour  $(n^+/3)$  :

**Proposition 5.12.** *Les expressions données dans la proposition 35*

$$s^- = \frac{(n^-/3)}{3g}, \quad s^+ = \frac{(n^+/3)}{3f},$$

*sont telles que l'entier  $(n^-/3)$  est premier à  $g$ , et  $(n^+/3)$  est premier à  $f$ .*

Cette conclusion était d'ailleurs évidente de façon directe par simple application de la proposition 23.

Au delà de la proposition précédente, le raisonnement qui l'a donnée a attiré l'attention sur les deux équations 5.56 et 5.57. On doit d'abord pouvoir trouver des équations équivalentes modulo  $f$ , et il suffit de permuter le rôle des indices 1 et 2 pour les exhiber. Il n'y a pas de difficulté sur ce point. La structure même de la condition de divisibilité par  $g$  donnée par 5.56 conduit à se dire que si  $(a_2, b_2, c_2)$  est supposé connu ne vérifiant pas la conjecture, et que l'on cherche  $(a_1, b_1, c_1)$  supposé existant de même valeur dominante  $m$ , la valeur  $g$  correspondante est un diviseur du premier membre de 5.56. Les valeurs  $a_2$  et  $c_2$  sont alors des données,  $l$  vaut 0 ou 1, et la seule valeur sur laquelle on semble ne rien savoir est  $n_2$ . Or ce nombre est défini par le paramètre  $s_2 = (n_2/9\mathbf{m})$  qui apparaît dans les matrices  $N_{(2,-2)}(s_2)$  et  ${}^tN_{(-2,2)}(-s_2)$ , la dernière étant celle qui a conduit à l'équation 5.48 équivalente à 5.56, et vérifiant :

$${}^tN_{(-2,2)}(-s_2)M(a_2, b_2, c_2)N_{(2,-2)}(s_2) = M(a_2, b_2, c_2) = M(c_2, b_2, a_2).$$

Avec les notations des propositions 31 et 34 on a une expression, où  $\varepsilon_2 = \pm 1$  et  $[S^*] = (m/3k)$  :

$$s_2 = \frac{n_2}{9\mathbf{m}} = -s_{(-2,2)} = -\frac{n_{(-2,2)}}{3 \times \mathbf{m}} = \varepsilon_2 \frac{2^{1-l} \times k - \mathbf{m}}{3 \times \mathbf{m}} = \varepsilon_2 \frac{2 - [S^*]}{3 \times [S^*]}. \quad (5.59)$$

Elle donne

$$n_2 = 3\varepsilon_2(2^{1-l} \times k - \mathbf{m}), \quad (5.60)$$

et en remplaçant dans 5.56, il reste seulement :

$$(-4c_2) + \varepsilon_2(2k - 2^l\mathbf{m})(4a_2) + (2k - 2^l\mathbf{m})^2c_2 \equiv 0 \pmod{g},$$

et puisque  $g$  est un diviseur de  $\mathbf{m}$ , en simplifiant par 4 :

$$(-c_2) + 2\varepsilon_2k(a_2) + k^2(c_2) \equiv 0 \pmod{g}.$$

Dans la théorie de Markoff classique on a des relations supplémentaires, comme celle-ci donnée dans [5] p.30 :

$$k^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2^l\mathbf{m}}.$$

Introduite dans la précédente égalité, elle donne de façon équivalente, en simplifiant par 2 et par 3 :

$$\varepsilon_2k(a_2/3) \equiv (c_2/3) \pmod{g}.$$

En fait, une telle congruence se déduit directement de [5] Lemma 7 p.30, la valeur de  $\varepsilon = \pm 1$  résultant naturellement du choix fait par rapport aux notations utilisées dans l'ouvrage cité. Son lemme 7 affiche en effet l'existence d'une égalité plus générale s'écrivant avec les présentes notations :

$$\varepsilon_2(a_2/3)k \equiv (c_2/3) \pmod{2^l \mathbf{m}}.$$

On a donc complètement compris d'où provient la condition 5.48 et pourquoi elle est toujours assurée pour toute diviseur  $g$  de  $\mathbf{m}$ . Mais celle-ci était bien évidente par son équivalence à la condition

$$m^2 N_{(-2,2)}(-s_2) \equiv 0 \pmod{g}.$$

Remarquons qu'en notant l'avant dernière congruence sous la forme équivalente

$$\varepsilon_2 a_2 k \equiv c_2 \pmod{m},$$

les nombres  $a_2, c_2, m$ , étant connus, la résolution de cette congruence en  $\varepsilon_2 k$  est facile. Elle permet d'identifier  $k$  avec  $\varepsilon_2 = \pm 1$ , donc  $[S^*] = (m/3k)$ , et enfin  $s_2$  avec la condition 5.59, et donc  $n_2 = 3(m/2^l)s_2$ . Si l'on regarde de près les calculs qui ont conduit à la proposition 35, on a  $s_2 = (n_2/9\mathbf{m}) = -2s_{(0,2)} = -(n_{(0,2)}/3\mathbf{m})$ . Et il reste aussi  $n_{(0,2)} = -(n_2/3) = -\varepsilon_2(2^{1-l} \times k - \mathbf{m})$ . Donc loin de donner une contradiction, les calculs que l'on vient de faire permettent d'accéder aux paramètres utilisés dans l'exposé de Riedel [19].

## 6. Conclusion

Dans ce qui précède, on a détecté et confirmé l'erreur qui compromet la fin de la prépublication de Norbert Riedel [19]. Néanmoins, ceci ne remet pas en cause le très grand intérêt de la démarche développée par cet auteur. Il est possible au demeurant qu'une correction puisse intervenir et qu'elle règle la question de la validité de la conjecture de Frobenius. Mais le défaut précédent invalide aujourd'hui complètement la fin de la prépublication [19]. De sorte que cette conjecture reste ouverte, et aucune voie de correction ne semble émerger de ce qui précède.

Cette limite à l'intérêt du travail de Norbert Riedel ne doit pas faire négliger certains autres aspects de son texte sur lesquels on n'a pas insisté ci-dessus, mais sur lesquels on voudrait maintenant revenir brièvement. Dans [19] (p.6) figure une remarque très intéressante sur une interprétation de  $H$  en tant que matrice

de monodromie issue de la théorie quantique des champs topologiques (TQFT). Les vues pénétrantes auxquelles cette dernière théorie a conduit ont fait émerger la  $tt^*$ -géométrie, un domaine en plein développement sur la base des travaux de Sergio Cecotti et Cumrun Vafa et de leur  $tt^*$ -équation [3] [9]. Une partie de l'article [4] développe quelques conséquences de cette équation, notamment ses auteurs l'utilisent pour classer différentes théories des cordes supersymétriques. Ils mettent à cette occasion en évidence un lien avec la classification des singularités de fonctions holomorphes  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  (graphes de Dynkin  $ADE$ ). Plus particulièrement, si l'on considère

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & b - ac \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aP + cQ + (ac - b)I = 1 - M^{-1},$$

on vérifie que l'on a comme dans [4] (p. 605) :

$$H = (1 - \mathbf{A})(1 - {}^t \mathbf{A})^{-1}.$$

Les valeurs propres de  $H$  sont des nombres complexes de module 1 dès que l'on a la condition  $0 \leq d \leq 4$ . Elles s'écrivent :

$$1, 1 - \frac{d}{2} \pm \frac{\sqrt{d(d-4)}}{2}.$$

La classification des graphes de Dynkin  $ADE$  est obtenue (voir [4] p. 616) par l'identification des matrices (de Coxeter) possibles de déterminant  $8 - 2d$  :

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A} - {}^t \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -a & -b + ac \\ -a & 2 & -c \\ -b + ac & -c & 2 \end{pmatrix}.$$

Or ces dernières redonnent facilement  $\mathbf{A}$ , d'où  $H$  et finalement le lien évoqué précédemment. Cette remarque à connotation physique faite par Riedel dans [19] est d'un très grand intérêt. Elle confirme la pertinence des perspectives qui ont été présentées dans [18]. Riedel en a ouvert une voie d'approfondissement dont l'existence était imaginée à la suite des travaux pionniers de Cohn [7]. Ceci est très prometteur, par exemple pour présenter de façon directe l'interprétation géométrique de la conjecture de Frobenius donnée dans [20], ou encore pour étudier les actions qui en résultent du groupe  $SL(3, \mathbb{Z})$  sur  $GL(3, \mathbb{Z})$ . Le travail de Riedel montre comment la nilpotence de certaines matrices joue un rôle à ce niveau, et

donc permet la maîtrise d'un contexte géométrique qui apparaissait jusque là assez difficile à pénétrer. Bref, la prépublication de Norbert Riedel mérite un travail complémentaire, soit de correction si l'objectif reste de démontrer la validité de la conjecture de Frobenius, soit de réorganisation et d'approfondissement si l'objectif devient plus géométrique et plus général, en liaison avec la théorie des noeuds ou les développements récents de la  $tt^*$ -géométrie ([3] [4] [9]).

## References

- [1] A. Baragar, On the unicity conjecture for Markoff numbers, *Canad. Math. Bull.*, 1996, n°39, pp. 3-9
- [2] J. O. Button, Markoff numbers, principal ideals and continued fractions expansions, *Journal of Number Theory*, 2001, n°87, pp. 77-95
- [3] S. Cecotti, C. Vafa, Topological antitopological fusion, *Nucl. Phys. B* 367, 1991, pp. 359-461
- [4] S. Cecotti, C. Vafa, On classification of  $N=2$  supersymmetric theories, *Commun. Math. Phys.* 158, 1993, pp. 569-644
- [5] J.W.S. Cassels, *An introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge Univ. Press., 1957, Chapitre 2
- [6] H. Cohn, Markoff forms and Primitive Words, *Math. Ann.* 196, 1972, pp. 8-22
- [7] H. Cohn, Ternary forms as invariants of Markoff forms and other  $SL_2(\mathbb{Z})$ -bundles, *Linear algebra and its applications*, n°21, 1978, pp. 3-12
- [8] T.W. Cusick, M.E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra*, *Mathematical Surveys and Monographs*, 30, American Mathematical Society, 1989
- [9] R.Y. Donagi, K. Wendland (ed.), *From Hodge theory to integrability and TQFT ( $tt^*$ - geometry)*, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 78, A.M.S., 2007
- [10] F.G. Frobenius, Über die Markoffschen Zahlen, *Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsber.*, 1913, pp. 458-487

- [11] R.K. Guy, Unsolved problems in number theory, Vol1, Problem books in Mathematics, Springer Verlag, 1981
- [12] R. Howe, On the role of the Heisenberg group in harmonic analysis, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) Vol. 3, n°2, 1980, pp. 821-843
- [13] M. L. Lang, S. P. Tan, A simple proof of the Markoff conjecture for prime powers, arXiv:0508443v1 [math.NT] 24 aug 2005
- [14] A.A. Markoff, Sur les formes quadratiques indéfinies, partie 1: Math. Ann. 6, 1879, pp. 381-406, partie 2: Math. Ann. 17, 1880, pp. 379-399
- [15] R. Mneimné, Réduction des endomorphismes, Calvage et Mounet, 2006
- [16] S. Perrine, L'interprétation matricielle de la théorie de Markoff classique, Int. J. Math. Sci. 32, 2002, n°4, pp.193-262
- [17] S. Perrine, La théorie de Markoff et ses développements, Tessier & Ashpool, 2002
- [18] S. Perrine, Recherches autour de la théorie de Markoff, arXiv:0307032v1 [math-ph] 16 Jul 2003
- [19] N. Riedel, Markoff equation and nilpotent matrices, arXiv:0709.1499v1 [math.NT] 10 Sep 2007, revu plusieurs fois jusqu'à 1499v4 [math.NT] 5 Aug 2008, <http://arxiv.org/abs/0709.1499>
- [20] A. N. Rudakov, Markov numbers and exceptional bundles on  $P^2$ , english translation in Math. USSR Izv. 32, 1989, n°1, pp. 99-112
- [21] P. Schmutz, Systoles of arithmetic surfaces and the Markoff spectrum, Math. Ann., 1996, 305 n°1, pp. 191-203
- [22] A. Srinivasan, A really simple proof of the Markoff conjecture for prime powers, [www.numbertheory.org/pdfs/simpleproof.pdf](http://www.numbertheory.org/pdfs/simpleproof.pdf)
- [23] Ch. Torossian, La conjecture de Kashiwara-Vergne [d'après Alekseev et Meinrenken] Séminaire Bourbaki, 59ème année, 2006-2007 n°980, juin 2007, arXiv:00706.2595 v1 [math QA] 1\_ jun 2007
- [24] M. F. Vigneras, Arithmétique des corps de quaternions, Lectures Notes in Mathematics n°800, Springer Verlag, 1980



- [25] M. Waldschmidt, Open diophantine problems, *Moscow Mathematical Journal* 4 (2004), n°1, pp. 245-305
- [26] M. Waldschmidt, Autout de l'équation de Markoff  $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ , Rencontres stéphanoises en théorie de nombres, Approximation diophantienne et théorie analytique des nombres, St Etienne, 5 au 7 juin 2008, <http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/MarkoffBeamerFrVI.pdf>
- [27] K.B. Wolf, The Heisenberg-Weyl ring in quantum mechanics, Group theory and its applications, E.M. Loebl ed., tome 3, Academic Press, 1975
- [28] D. Zagier, On the number of Markoff numbers below a given bound, *Mathematics of Computations*, 39, 1982, n°160, pp. 709-723
- [29] Y. Zhang, An elementary proof of Markoff conjecture for prime powers, arXiv:math/0606283v2 [math.NT] 1 Feb 2007
- [30] Y. Zhang, Congruence and uniqueness of certain Markoff numbers, arXiv:math/0612620v2 [math.NT] 29 Dec 2006