Annales de l'institut Fourier

Edward Wagneur

Formes de Pfaff à singularités non dégénérées

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 3 (1978), p. 165-176.
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_3_165_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 3 (1978), 165-176

FORMES DE PFAFF A SINGULARITÉS NON DÉGÉNÉRÉES *

par E. WAGNEUR

1. Introduction.

Soit M une variété différentiable de dimension $n \geqslant 3$, paracompacte connexe et ω une un-forme complètement intégrable sur M $(\omega \wedge d\omega = 0)$. Pour simplifier, on se place dans le cas C^∞.

En situation générique, les singularités de ω sont des sous-variétés de codimension deux de M et des points isolés en lesquels la matrice jacobienne de ω est de rang maximum n (cf. Kupka [3]).

Dans la suite, nous supposerons que ω n'a que des singularités isolées. Au voisinage d'un tel point, on peut écrire :

$$\omega(x) = a_{ij}\, x^i\, dx^j + 0(|x|^2),$$

où les a_{ij} sont les coefficients de la matrice jacobienne de ω.

On sait que (cf. G. Reeb [6] p. 142) la forme approchée

$$\omega = a_{ij}\, x^i\, dx^j$$

est exacte lorsque $\det(a_{ij}) \neq 0$. Il existe donc une fonction de Morse locale f telle que

$$\omega_1(x) = df(x) + 0(|x|^2)$$

au voisinage de chacun de ses points singuliers. On dit alors qu'il s'agit d'un point singulier *non dégénéré*. Son indice ι est défini par $\min\{k, n-k\}$ si $k \neq 2$ et $n-k \neq 2$ et par l'entier 2 dans le cas contraire, où k est l'indice de f au point considéré.

(*) Ce travail est un résumé de résultats rédigés avec davantage de détails sous forme de rapports scientifiques (cf. [7]) alors que l'auteur bénéficiait d'une bourse de recherches du Gouvernement du Québec.

DÉFINITION 1.1. – *Un point singulier non dégénéré de* ω *est dit* sphérique *si* $\iota = 0$ *et* conique *dans tous les autres cas.*

La un-forme ω étant complètement intégrable sur M, ses variétés intégrales maximales définissent un feuilletage à singularités, transversalement orientable, de codimension un de M.

On convient que les points singuliers coniques appartiennent à des feuilles singulières. Plus précisément, si S désigne l'ensemble des points singuliers de ω et $\mathfrak{F}$ le feuilletage régulier défini par $\omega \mid M - S$, on peut poser la définition suivante qui m'a été suggérée par J. Milnor.

DÉFINITION 1.2. – *Une* feuille singulière *de* ω *est l'union d'une feuille* $F \in \mathfrak{F}$ *et de tout point singulier* $a \in S$ *tel que* $F \cup \{a\}$ *est connexe par arcs.*

On remarque immédiatement qu'une feuille singulière peut contenir plusieurs points singuliers (nécessairement coniques) et un tel point appartenir à plus d'une feuille singulière.

Nous dirons souvent qu'une feuille du feuilletage défini par ω est une feuille de ω.

La notion classique d'holonomie (cf. [2]) dans le cas des feuilletages réguliers s'étend de manière naturelle aux feuilletages à singularités. Il suffit de définir l'holonomie d'une feuille singulière F' par celle de la feuille régulière $F = F' \dot{-} (S \cap F')$.

Nous aurons encore besoin de la notion de champ de vecteurs transverse à une un-forme ω du type considéré. On peut toujours supposer que M est munie d'une métrique riemannienne, donc que TM est pourvu d'un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$. On pose alors :

DÉFINITION 1.3. – *Un champ de vecteurs* X *sur* M *est transverse à* ω *si*

i) $\langle X , \omega \rangle > 0$ *sur* $M - S$

ii) $X(a) = 0$ *en tout point* $a \in S$.

La suite de ce travail consiste en deux parties. Dans la première, je présente des résultats locaux qui sont relativement connus des spécialistes mais, à ma connaissance, encore inédits. Dans la seconde, j'énonce quelques résultats globaux dont l'un (cf. théorème 3) généralise un théorème bien connu de G. Reeb ([6] p. 147) au cas où ω

admet des points singuliers coniques. On en déduit facilement un énoncé analogue pour les fonctions de Morse.

2. Propriétés locales.

On suppose que ω est définie au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$. Soit ω_1 la forme approchée de ω et X un champ de vecteurs transverse à ω. A l'aide des trajectoires de X, on montre par récurrence la

PROPOSITION 1. – *Les feuilles de ω sont des revêtements de feuilles de ω_1. De plus toute feuille singulière de ω est un revêtement à un seul feuillet d'une feuille singulière de ω_1.*

Rappelons que, dans le cas des feuilletages réguliers de codimension un d'une variété M, le groupe d'holonomie d'une feuille est dit C^r-plat si tout générateur a même jet d'ordre r à l'origine que l'application identique de $\mathbf{R}$. On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2. – *Au voisinage d'un point singulier (conique) le groupe d'holonomie (local) d'une feuille singulière est C^∞-plat.*

Démonstration. – On montre facilement que les générateurs du groupe d'holonomie d'une feuille singulière sont toujours l'identité sur une demi-droite.

DEFINITION 2.1. – *Deux un-formes complètement intégrables ω, ω' admettant une singularité non dégénérée en 0, $0'$ respectivement sont dites (localement) C^r-équivalentes s'il existe des voisinages U, U' de 0, $0'$ respectivement et un difféomorphisme de classe C^r ϕ : $U \longrightarrow U'$ tel que $\phi(0) = 0'$ et qui envoie les feuilles de ω sur celles de ω', $r = 0, 1, \ldots, \infty$ (on a alors $\phi^* \omega' \wedge \omega = 0$ si $r \geqslant 1$).*

L'espace des un-formes intégrables définies et admettant un point singulier non dégénéré au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$ peut être muni de la C^1-topologie de Whitney. Désignons par σ cet espace.

DEFINITION 2.2. – *$\omega \in \sigma$ est dite r-*stable *s'il existe un voisinage V de ω dans σ tel que toute un-forme $\omega' \in V$ est C^r-équivalente à*

$\omega (r = 0, 1, \ldots, \infty)$. *Pour* $r = 0$, *on dit aussi que* ω *est structurellement stable.*

THEOREME 1. — $\omega \in \sigma$ *est* 1-*stable si et seulement si sa singularité est d'indice* $\iota \neq 2$.

Démonstration (esquissée).

a) *Nécessité.*

Soit $\omega = df + g(f)(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1)/x_1^2 + x_2^2$, où $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_n^2$, et g est une fonction de classe C^∞, plate à l'origine et nulle pour $f \leqslant 0$. On a $\iota = 2$ et ω est structurellement instable (le revêtement de la proposition 1 comporte en général plusieurs feuillets).

b) *Suffisance.*

Si $\omega' \in \sigma$ est voisine de ω, les formes approchées ω_1' et ω_1 sont C^∞-équivalentes. Il suffit donc de montrer que ω est C^1-équivalente à ω_1 dans un voisinage U assez petit de l'origine.

Pour cela, on considère un champ X orthogonal à ω_1 et l'on construit le difféomorphisme ϕ cherché à l'aide des trajectoires de X (et en posant $\phi(0) = 0$). Il est à peu près évident que $\phi \mid U - \{0\}$ est de classe C^∞ (d'après la proposition 1, les feuilles régulières de $\omega \mid U$ sont donc difféomorphes aux variétés de niveau d'une fonction de Morse définie sur U). On montre ensuite facilement que les dérivées partielles premières de ϕ sont continues à l'origine.

Remarques.

1) Dans le cas des points singuliers sphériques et lorsque ω est de classe C^2, le résultat est dû à G. Reeb [6, p. 145].

2) Il est clair que si l'on suppose ω de classe C^k au voisinage de l'origine le théorème 1 reste vrai pour tout $k \geqslant 2$.

3) La stabilité structurelle (locale) des points singuliers d'indice $\neq 2$ a été obtenue indépendemment par A.S. Medeiros [5] et l'auteur [7].

4) On peut conjecturer qu'en général, si $\omega = f_i\, dx^i$ est de classe C^k, elle sera $(k-1)$-stable au voisinage de chacun de ses points singuliers d'indice $\neq 2$. Remarquons cependant que la classe de

différentiabilité du difféomorphisme ϕ ci-dessus tombe brusquement à l'origine. En effet si ϕ était de classe C^4, d'après de Rham [1] l'équation $\phi^*\omega_1 \wedge \omega = 0$ permettrait de définir une fonction g de classe C^2 au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$, jamais nulle et telle que $\phi^*\omega_1 = g\omega$. D'autre part, dans tout p-plan π (passant par l'origine) où ω a une singularité sphérique, ϕ est de la forme $\phi(x) = \lambda(x)x$, où λ est une fonction qui tend vers 1 lorsque x tend vers 0. En restriction à π, on a $\phi^*\omega_1 = |x|^2 \lambda d\lambda + \lambda^2 \omega_1$ et le coefficient quadratique de dx_i du développement limité de $\phi^*\omega_1$ ne contient aucun terme en $x_j x_k$ si $j \neq k \neq i \neq j$. Mais le coefficient correspondant du développement limité de $\omega|_\pi$ est donné par $g(0) \dfrac{\partial^2 f_i(0)}{\partial x_j \partial x_k}$ qui n'est en général pas nul.

Il est facile d'illustrer la remarque 3 par un exemple. De plus, ω étant exacte, on sait qu'elle est C^∞-équivalente à sa partie linéaire ω_1.

Exemple 1.

$$\omega = d \sum_{i,j,k} \epsilon_i x_i^2 + x_i x_j x_k \,, \qquad \epsilon_i = \pm \frac{1}{2} \,.$$

On a $$\frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial x_j \partial x_k} = 1 \quad \text{si} \quad i \neq j \neq k \neq i \,.$$

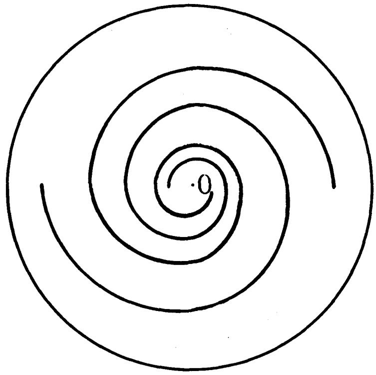
COROLLAIRE. – *Pour* $\iota \neq 2$, ω *admet toujours un facteur intégrant continu.*

L'exemple 2 ci-dessous m'a été suggéré par Ngo van Qué. Il illustre la non généricité des un-formes à singularités non dégénérées ([2]).

Exemple 2.

$M = D^2 \times S^1$ et ω est définie par la rotation du feuilletage indiqué sur la figure ci-dessous. Son ensemble singulier est le cercle $\{0\} \times S^1$. Il est à peu près évident qu'à l'ordre 1, aucune perturbation de ω ne peut avoir un ensemble de points isolés pour seules singularités.

Soient g et h des fonctions de classe C^∞ qui s'annulent ainsi que toutes leurs dérivées sur la demi-droite négative (0 inclus). Désignons par x, y, z, t les coordonnées de $\mathbf{R}^4$.



Exemple 3. – Soit $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - z^2 - t^2$. Alors

$$\omega = df + g(f)\,(ydx - xdy)/x^2 + y^2 + h(-f)\,(tdz - zdt)/z^2 + t^2$$

est complètement intégrable. Le choix de g et h permet d'obtenir autant de feuilletages (avec une singularité conique d'indice $\iota = 2$) topologiquement distincts que l'on veut. En particulier, si $h(s) = g(-s)$ avec $g(s) = \exp\left(-\frac{1}{s}\right)$ pour $s > 0$, la un-forme $i^*\omega$ définit le feuilletage de Reeb classique de S^3 avec une seule feuille compacte, où i est l'injection canonique de la sphère unité de $\mathbf{R}^4$.

On sait que pour $n \geqslant 3$, S^n admet une décomposition de la forme $(D^{n-1} \times S^1) \cup (D^2 \times S^{n-2})$. Soit encore $i : S^n \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ l'injection canonique. On voit facilement comment modifier l'exemple précédent pour se donner une un-forme ω au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^{n+1}$ telle que $i^*\omega$ définisse un feuilletage de Reeb du tore solide $D^{n-1} \times S^1 \subset S^n$ dont le bord est une feuille (donnée par l'image réciproque de la trace sur $i(S^n)$ de la feuille singulière de ω). D'après la proposition 2 ci-dessus, son groupe d'holonomie est C^∞-plat . Nous dirons que $i^*\omega \mid D^{n-1} \times S^1$ est une forme de Reeb sur le tore.

Exemple 4. – Soient $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées canoniques de $\mathbf{R}^n$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, $t^2 = x_3^2 + \ldots + x_n^2$, et

$$f(x) = \frac{1}{2}\left\{\frac{r^2}{2}\,(2 - r^2) - t^2\right\}.$$ Les variétés $\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \geqslant -1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = c < 0\}$ et $\left\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \geqslant \frac{1}{8}\right\}$ sont respectivement

difféomorphes au disque unité D^n, à la sphère S^{n-1} et au tore solide $D^{n-1} \times S^1$. La un-forme définie par $df = r(1 - r^2)\, dr - tdt$ sur $\left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid -1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{8} \right\}$ et par une forme de Reeb sur le tore $\left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \geqslant \frac{1}{8} \right\}$ détermine un feuilletage du disque D^n (dont le bord est une feuille) avec un point singulier conique pour seule singularité.

4. Quelques propriétés globales.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que M est une variété compacte. L'existence de un-formes intégrables à singularités non dégénérées sur M se déduit immédiatement de celle des fonctions de Morse. D'autre part, les singularités d'une un-forme ω du type considéré doivent vérifier le théorème de l'indice, comme on le voit immédiatement à l'aide d'un champ de vecteurs transverse à ω.

Comme ω définit un feuilletage à singularités (transversalement orientable) de M, on peut se demander si un tel feuilletage admet des transversales fermées (ne passant par aucun point singulier). Le cas le plus simple se présente lorsque les singularités de ω sont toutes coniques. Nous allons voir que cette condition est suffisante et que, pour $n \geqslant 3$ toute variété compacte M admet un tel feuilletage. Plus précisément, on a la

PROPOSITION 3

i) *Pour* $n \geqslant 3$ *il existe toujours une un-forme complètement intégrable sur* M *dont toutes les singularités sont coniques.*

ii) *Pour une telle un-forme, on peut toujours trouver un champ de vecteurs qui lui est transverse admettant des trajectoires périodiques.*

Démonstration

i) On se donne une fonction de Morse f sur M. Au voisinage de chaque point singulier sphérique, on choisit un disque difféomorphe au disque unité de $\mathbf{R}^n$ dont le bord est une feuille de df et l'on définit ω sur ce disque par la un-forme de l'exemple 4 du paragraphe précédent.

ii) Si X est transverse à ω, ses points singuliers sont ceux de ω et sont tous hyperboliques. La dimension des variétés stables et instables correspondantes est alors strictement inférieure à la dimension de M. Par compacité, ces variétés sont en nombre fini et X admet nécessairement des trajectoires n'en rencontrant aucune, donc ne passant par aucun point singulier. On sait alors comment fermer une telle trajectoire (cf. [4], p. 388 par exemple).

Désignons par $\sigma(M)$ l'espace des un-formes à singularités non dégénérées sur M muni de la C^1-topologie et considérons les propriétés suivantes :

P1 Tout point singulier conique d'indice 1 appartient à deux feuilles distinctes.

P2 Chaque feuille singulière contient un seul point singulier.

Remarque. – D'après la proposition 1 du paragraphe 3 ci-dessus, les points singuliers coniques d'indice $\iota > 1$ appartiennent toujours à une seule feuille.

PROPOSITION 4. – *Pour tout* $n \geqslant 3$ (resp. $n \neq 4$) *la propriété* P1 (*resp.* P2) *définit un ouvert partout dense dans* $\sigma(M)$.

Démonstration. – Il est clair que P1 et P2 définissent des ouverts de $\sigma(M)$. Soit alors a un point singulier conique de $\omega \in \sigma(M)$ et U un voisinage assez petit de a. Le groupe d'holonomie de la feuille singulière de $\omega \mid U$ étant C^∞-plat on peut "épaissir" cette feuille dans un voisinage $V \subset U$ de a. Ceci revient à se donner une forme $\omega' \in \sigma(V)$ aussi C^1-voisine que l'on veut de $\omega \mid V$ et dont la feuille singulière est sans holonomie. On montre ensuite assez facilement qu'on peut toujours recoller les feuilles de ω' avec celles de $\omega \mid M - U$ de telle manière que

i) le point a appartienne à deux feuilles distinctes si son indice est 1,

ii) la (les) feuille(s) singulière(s) contenant a ne contienne(nt) pas d'autre singularité.

Remarques

1) L'exemple 2 du paragraphe précédent suggère que lorsque $\iota = 2$ et $n = 4$ le recollement envisagé dans la démonstration ci-dessus n'est pas toujours possible.

2) Si l'on affaiblit P2 en :

P'2 Toute feuille singulière dont le groupe d'holonomie est C^∞-plat contient un seul point singulier

on peut supprimer la restriction $n \neq 4$ dans la proposition 4. (Il suffit "d'épaissir" les feuilles singulières en question et de déplacer les singularités excédentaires sur les feuilles voisines.)

Soit τ une courbe transversale au feuilletage défini par $\omega \in \sigma(\mathrm{M})$. Désignons par $\nu(\tau)$ l'union des feuilles qui rencontrent τ. On montre facilement que si τ est fermée et si $\partial\overline{\nu}(\tau) = \overline{\nu}(\tau) - \nu(\tau)$ contient des feuilles non fermées, on peut construire une transversale fermée τ' telle que $\nu(\tau) \subset \nu(\tau')$. M étant compacte, on en déduit facilement que si ω n'admet aucune feuille compacte il existe une transversale fermée coupant toutes les feuilles. Considérons alors la propriété suivante :

P3 ω n'a pas de feuille compacte.

THEOREME 2. – *Si le premier nombre de Betti rationnel de* M *est nul,* P3 *définit un ouvert de* $\sigma(\mathrm{M})$.

Démonstration. – Il existe une transversale fermée τ qui rencontre toutes les feuilles de ω. Il est à peu près évident que τ rencontre encore toutes les feuilles d'une forme ω' assez voisine de ω dans $\sigma(\mathrm{M})$. On conclut alors en utilisant la proposition classique de Haefliger, d'après laquelle τ ne peut rencontrer de feuille fermée ([2], p. 385).

Soit $\omega \in \sigma(\mathrm{M})$ et p (resp. q) le nombre de ses points singuliers sphériques (resp. coniques). Pour tout point singulier sphérique a, on désigne par $\Omega(a)$ l'union de a et de toutes les feuilles difféomorphes à S^{n-1} telle que $\Omega(a)$ est le plus grand connexe de M contenant a. Il est clair que $\partial\overline{\Omega}(a) = \overline{\Omega}(a) - \Omega(a)$ est réunion de feuilles singulières lorsque $\overline{\Omega}(a) \neq \mathrm{M}$.

LEMME. — *Soient* a_1, a_2 *deux points singuliers sphériques distincts tels que* $\bar{\Omega}(a_i) \neq \mathrm{M}$, $i = 1,2$. *Si l'intersection* $\bar{\Omega}(a_1) \cap \bar{\Omega}(a_2)$ *est non vide, elle contient un point singulier conique. De plus, l'indice d'un tel point est toujours égal à un.*

Démonstration. — Il est clair que le groupe d'holonomie d'une feuille $\mathrm{F} \subset \bar{\Omega}(a_1) \cap \bar{\Omega}(a_2)$ est toujours trivial. On peut donc supposer que ω vérifie la propriété $\mathrm{P}'2$. On montre alors facilement par l'absurde que l'indice d'un point singulier conique $b \in \mathrm{F}$ est nécessairement égal à un. Le corollaire suivant est immédiat.

COROLLAIRE. — *Dans la situation du lemme ci-dessus,* $\partial\bar{\Omega}(a_i)$ *consiste en une seule feuille pour l'un des* a_i *au moins* $(i = 1,2)$. *De plus une telle feuille est homéomorphe à la sphère* S^{n-1}.

Il est bien connu (cf. [6], p. 147) que si $q = 0$ alors $p \leqslant 2$ et $p = 2$ entraîne que M est homéomorphe à la sphère S^n et (d'après la théorie de Morse classique et la démonstration du théorème 1) les feuilles sont difféomorphes à la sphère standard S^{n-1}.

THEOREME 3. — *On a toujours* $p \leqslant q + 2$. *De plus, en cas d'égalité on a :*

i) M *est homéomorphe à* S^n.

ii) *L'indice de tout point singulier conique est égal à un.*

iii) *Les feuilles régulières (resp. singulières) sont difféomorphes (resp. homéomorphes) à* S^{n-1}.

iv) ω *admet une intégrale première globale de classe* C^1.

v) *En situation générique,* ω *est 1-stable.*

Démonstration. — L'hypothèse $p \geqslant q + 2$ entraîne l'existence de deux points singuliers sphériques dans la situation de lemme ci-dessus. On réduit alors deux à deux singularités sphériques et coniques comme dans ([8] p. 9) pour se ramener au cas $q = 0$. D'où $p \leqslant q + 2$ et i) et ii) sont vérifiées. iii) se déduit assez facilement du cas $q = 0$ en remarquant que la réduction des singularités revient essentiellement à supprimer un ensemble $\bar{\Omega}(a)$ dont le bord est homéomorphe à S^{n-1}.

iv) Résulte du corollaire du théorème 1 et du lemme de de Rham ([1] p. 364). En effet, ω admet des intégrales premières locales de classe C^1 au voisinage de chacun de ses points singuliers. Si a est un point singulier sphérique, la fonction f définie au voisinage de a se prolonge facilement à $\overline{\Omega(a)}$, puis à tout ensemble $\overline{\Omega(a')}$ qui rencontre $\overline{\Omega}(a)$ et ainsi de suite. On pourra donc construire une fonction globale f de classe C^1 sur $M\left(= \bigcup_{i=1}^{p} \overline{\Omega(a_i)}\right)$ vérifiant la condition de de Rham $\omega \wedge df = 0$.

v) Si $p = q + 2$, ω vérifie toujours la condition P1. De plus, P'2 est équivalente à P2. On montre alors que si P2 est satisfaite l'"espace des feuilles" obtenu en identifiant les points d'une même feuille lorsqu'elle est régulière et les points de toute feuille contenant une même singularité autrement, caractérise la classe de C^1-équivalence de ω. Si ω' est assez C^1-voisine de ω, son "espace des feuilles" peut être identifié à celui de ω.

Remarque. – Le théorème 2 fournit aussi des précisions sur le comportement d'une fonction de Morse quelconque sur une variété compacte.

Remerciements. – Je tiens à remercier particulièrement M. Ngo Van Qué qui a su éveiller mon intérêt pour le sujet présenté et qui ne m'a ménagé ni son temps ni ses conseils.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. de RHAM, Sur la division des formes et des courants par une forme linéaire, *Com. Math. Helv.*, 28 (1954).

[2] A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, *An. Sc. Norm. Sup. Pisa,* IV, 16 (1962).

[3] I. KUPKA, The singularities of integrable structurally stable Pfaffian forms, *Proc. N.A.S.*, 52 (1964).

[4] H.B. LAWSON, Foliations, *B.A.M.S.*, 80 (1974).

[5] A.S. MEDEIROS, Thèse, Inst. de Mat. Pura e Apl. Rio de Janeiro (1974).

[6] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, *A.S.I.*, 1 183 (1952).

[7] E. WAGNEUR, Rapports de recherche CRM-450, CRM-473 et CRM-509, Université de Montréal (1974-75).

[8] E. WAGNEUR, Réduction des points singuliers des feuilletages à singularités non dégénérées de M^3, *Bull. Can. Math.*, Vol. 20 (2) (1976).

Manuscrit reçu le 19 avril 1977
Proposé par G. Reeb.

E. WAGNEUR,
Centre de Recherches Mathématiques
Université de Montréal
C.P. 6 128
Montréal P.Q. (Canada).