



Basilio de Bragança Pereira  
Maria Bernadette Zanusso Pais  
Paulo Roberto de Holanda Sales

# ANÁLISE ESPECTRAL DE SÉRIES TEMPORAIS

*Uma introdução para  
Engenharia, Economia e Estatística*



**Basilio de Bragança Pereira**

B.Sc., M.Sc., DIC, Ph.D., FSS  
IM e COPPE/UFRJ

**Maria Bernadette Zanusso Pais**

B.Sc., M.Sc.  
DM/UFMS

**Paulo Roberto de Holanda Sales**

B.Sc., Eng., M.Sc.  
ELETROBRÁS, UERJ e COPPE/UFRJ

# ANÁLISE ESPECTRAL DE SÉRIES TEMPORAIS

*Uma introdução para  
Engenharia, Economia e Estatística*

1986



**Eletrobras**

**Arte Final**  
Leasing em editoração

© 1986

*Basílio de Bragança Pereira,  
Maria Bernadete Zanusso Pais,  
Paulo Roberto de Holanda Sales*

Reservam-se os direitos desta edição à  
ARTE FINAL LEASING EDITORIAL LTDA.  
Avenida Passos, 101 – 1530  
Rio de Janeiro – 20051 – RJ – Brasil  
*Printed in Brazil/Impresso no Brasil*

CAPA  
*José Francisco Abreu*

PROJETO GRÁFICO  
ARTE FINAL LEASING EDITORIAL LTDA.

1ª ed. – Rio de Janeiro, ARTE FINAL LEASING EDITORIAL LTDA.

CIP – Brasil. Catalogação na fonte  
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

86-0597

Pereira, Basílio de Bragança, 1945 –  
Análise Espectral de Séries Temporais – Uma Introdução para Economia,  
Engenharia e Estatística. / Basílio de Bragança Pereira, Maria Bernadete Za-  
nusso Pais, Paulo Roberto de Holanda Sales. – Rio de Janeiro: Arte Final  
Leasing Editorial; Eletrobrás S.A., 1986.

Bibliografia

1. Séries Temporais – Análise Espectral.  
I. Pais, Maria Bernadete Zanusso 1958 – II. Sales, Paulo CDU – 515.7222  
Roberto de Holanda, 1949 – III. Título. CDU – 519

## SUMÁRIO

### PREFÁCIO

**O** estudo de conjuntos de observações obtidas em instantes sucessivos do tempo tem desempenhado um papel importante na explicação de diversos fenômenos em ciências físicas, biológicas, sociais, etc. A análise das séries temporais ocupa, então, um lugar importante na Metodologia Estatística, bem como nas suas interfaces com diversas áreas do conhecimento. De particular relevância é a Análise Espectral, cujo objetivo básico é a procura de periodicidades em uma série de interesse, mas que tem aplicações em muitos problemas de física, engenharia, geofísica, medicina, economia, biologia, neurofisiologia, etc. É uma ferramenta valiosa para pesquisadores e cientistas que trabalham nestas áreas. Um dos maiores entraves à utilização correta desta técnica é a sua pouca divulgação tanto nos meios acadêmicos como nos ambientes tecnológicos e científicos em geral. É, pois, com satisfação, que vemos um texto em Português, dedicado a estudantes e pesquisadores das diversas áreas de aplicação. Os professores Bragança Pereira, Zanusso Pais e Holanda Sales prestam, portanto, relevante serviço a estes profissionais, no sentido de lhes propiciar os fundamentos de uma teoria fascinante, com inúmeras aplicações e ramificações.

Pedro Alberto Morettin

B.Sc., M.Sc., Ph.D., LD

IME - USP

# SUMÁRIO

<i>PREFÁCIO</i> .....	7
<i>ALFABETO GREGO E GLOSSÁRIO</i> .....	10
<b>CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO À TEORIA DE SÉRIES TEMPORAIS</b> .....	<b>15</b>
1.0 – Considerações Gerais .....	
1.1 – Classificação .....	
1.2 – Objetivos .....	
1.3 – Enfoques .....	
1.4 – Tipos de Variação .....	
1.5 – Fundamentos Probabilísticos .....	
1.6 – Teoremas Gerais de Representação .....	
1.7 – Alguns Modelos de Séries Temporais .....	
<b>CAPÍTULO II – ANÁLISE ESPECTRAL UNIVARIADA</b> .....	<b>35</b>
2.0 – Introdução .....	
2.1 – Análise de Fourier .....	
2.2 – Modelo Senoidal Simples .....	
2.3 – Série de Fourier e a Função de Autocorrelação .....	
2.4 – Representação Espectral de Processos Estocásticos Estacionários .....	
2.5 – Estimação Espectral .....	
2.6 – Espectro de Potência e Função de Densidade Es- pectral .....	
2.7 – Espectro de Alguns Processos Especiais .....	
2.8 – Propriedades do Espectro Amostral .....	
2.9 – Alguns Procedimentos Consistentes de Estimação .....	
2.10 – Transformada Rápida de Fourier .....	
2.11 – Intervalo de Confiança para o Espectro de um Pro- cesso Aleatório Puro .....	
2.12 – Teste de Hipótese para o Espectro de um Processo Aleatório Puro .....	
2.13 – Intervalo de Confiança Aproximado para as Orde- nadas do Espectro .....	

**CAPÍTULO III – ANÁLISE ESPECTRAL MULTIVARIADA 78**

- 3.0 – Introdução . . . . .
- 3.1 – Funções de Covariância e Correlação Cruzadas . . . . .
- 3.2 – Espectro Cruzado . . . . .
- 3.3 – Exemplos. . . . .
- 3.4 – Estimação do Espectro Cruzado . . . . .
- 3.5 – Exemplos de Espectro Cruzado Estimado. . . . .
- 3.6 – Análise Espectral Multivariada . . . . .

**BIBLIOGRAFIA. . . . . 96**

**APÊNDICE I 98**

- I.A – Algumas Identidades Trigonômicas . . . . .
- I.B – Relações Ortogonais. . . . .

**APÊNDICE II – EXEMPLOS DE APLICAÇÃO . . . . . 101**

# PREFÁCIO

A Análise Espectral de Séries Temporais — o estudo da série no domínio da frequência — vem, ultimamente, sendo empregada largamente em muitos ramos da engenharia, das ciências físicas e econômicas, além da estatística. Um aspecto importante na análise de séries temporais é a análise espectral, a qual procura dividir a série de tempo em diferentes componentes de frequência. Daí as aplicações cobrirem um vasto número de problemas e situações práticas.

Em geral, as dificuldades em se entender o assunto são devidas, em parte, ao envolvimento de ciências distintas e, em particular, por se originar de áreas com diferentes tradições, vocabulários e treinamentos. Entretanto, assim que as idéias fundamentais são entendidas, o assunto mostra uma elegante unidade.

A idéia básica de uma série temporal é de uma coleção de observações, feitas em diferentes instantes de tempo e sujeitas a variações aleatórias. Um dos objetivos da análise de séries temporais é construir um modelo que explique os comportamentos determinísticos e aleatórios da série. Um modelo adequado, que forneça uma visão do funcionamento do mecanismo gerador dos dados, pode ser usado, por exemplo, para prever valores futuros da série. Esse objetivo é, em geral, relacionado à Análise no Domínio do Tempo. Outro objetivo ocorre quando a série representa alguma quantidade física (como corrente, voltagem, deslocamento, velocidade, etc.) e, nesse caso, freqüentemente há maior interesse no estudo direto das propriedades físicas que na construção de um modelo estatístico para a série. Aqui, um dos conceitos físicos fundamentais é o da energia e uma importante técnica usada na análise de processos físicos é a separação do processo em diversos componentes, de frequências diferentes, e o conseqüente estudo da maneira pela qual a energia total é distribuída por esses componentes. Descreve-se essa técnica como Análise Espectral ou Análise no Domínio da Frequência.

Como exemplos de aplicação da Análise Espectral, poder-se-ia citar, entre outros: dimensionamento e/ou análise de mercado de serviços e tráfego em telecomunicações; efeito da oscilação de ondas na vibração de navios; influência de ruídos (distúrbios aleatórios) na análise e/ou síntese de sistemas elétricos e/ou eletrônicos e reações químicas; sistemas de controle de processos (servomecanismo); análise de dispositivos para uso médico-hospitalar; determinação da (período) freqüência fundamental e seus harmônicos em séries hidrológicas temporais; verificação de periodicidades relevantes em séries de energia elétrica, econômicas, físicas, etc.

Outro ponto de especial realce prende-se à aplicações envolvendo séries de interesse para o planejamento energético da operação de sistemas hidrotérmicos. Assim é que, as séries de "Carga Própria de Energia", obtidas a partir de um balanço entre geração, fornecimentos e recebimentos de uma empresa, de importância fundamental neste planejamento, podem ter suas características melhor avaliadas e/ou entendidas quando um ferramental complementar, como a Análise Espectral, é utilizado.

A idéia inicial, ao se escrever o presente livro, foi, então, tornar acessível aos profissionais, bem como aos estudantes de graduação e pós-graduação, das áreas de Estatística, Engenharia Civil, Elétrica, Eletrônica com suas ramificações, Física, Biologia e Economia, um texto em português. Os pré-requisitos são Cálculo (Série de Fourier) e Estatística (Testes de Hipóteses e Estimação). O livro aborda a Análise Espectral Univariada e Multivariada, porém não trata da Análise Multidimensional.

Desta forma, para dar uma visão unificada sobre séries temporais, o Capítulo I é dedicado a uma introdução geral sobre o assunto, indicando os fundamentos probabilísticos e os principais enfoques para análise (domínio do tempo x domínio da freqüência), bem como suas justificativas e relacionamento. De especial importância são os Teoremas Gerais de Representação a Alguns Modelos de Séries Temporais. Parafraseando Sir Maurice Kendall: "Esta era a introdução que gostaríamos que tivessem colocado em nossas mãos, quando pela primeira vez nos interessamos por séries temporais". Embora muito importante, este capítulo, exceto por alguns conceitos, não é pré-requisito obrigatório para o entendimento do restante do livro.

O Capítulo II apresenta uma introdução à Análise Espectral Univariada. A abordagem é informal e se inicia com conceitos simples que vão sendo generalizados para os de Espectro, sua interpretação e os métodos de Inferência Estatística na sua estimação, a partir de um número finito de observações. São mostrados, também, a relação entre as séries de Fourier e a Função de Autocorrelação, o Espectro de Alguns Processos Estacionários e certos procedimentos consistentes de estimação, tais como Janelas de Retardo. Uma seção especial é dedicada à Transformada Rápida de Fourier.

No Capítulo III, a Análise Espectral Univariada é estendida à Análise Multivariada. São apresentadas e interpretadas as Funções de Covariância e Correlação Cruzadas e Espectro Cruzado para séries bivariadas. São vistos, também, neste caso, os conceitos de Coerência, Fase e Ganho, bem como métodos de inferência na obtenção dos mesmos. Ao final do capítulo é feita uma extensão do caso bivariado para o multivariado.

No Apêndice I estão relacionadas Algumas Identidades Trigonométricas e Relações Ortogonais importantes ao bom entendimento do texto.

O Apêndice II trata de dois exemplos de aplicação relacionados, respectivamente, com os Capítulos II e III. O primeiro, univariado, refere-se a “Carga Própria Mensal de Energia (MWmed)” da Companhia Energética de São Paulo – CESP – no período de janeiro de 1977 a dezembro de 1984. Os dados foram obtidos dos relatórios “Estatística Mensal de Operação”, emitidos pela Secretaria de Supervisão e Coordenação do GCOI – Grupo Coordenador para Operação Interligada. O segundo, multivariado, refere-se às séries “Taxas Mensais das Variações do Índice IBV” e “Oferta da Moeda”, no período compreendido entre janeiro de 1955 e dezembro de 1971.

Ao escrever o livro, os autores ficaram em débito com diversas pessoas e instituições. Em particular, gostariam de expressar seus agradecimentos a:

i) alunos, principalmente da UFRJ (IM, COPPE, COSE/ELETROBRÁS), aos quais foi introduzido, por um dos autores (B. de B. P.), parte do material deste texto, como experiência de compreensão e absorção de seu conteúdo;

ii) COPPE/UFRJ, IM/UFRJ, IME/UERJ e DEOP/ELETROBRÁS pelo ambiente de ensino, pesquisa e trabalho profissional;

iii) Nicolau Cascão Nassar, engenheiro do Departamento de Operação Energética (DEOP) da Eletrobrás, pelas valiosas contribuições apresentadas na elaboração do exemplo I do Apêndice II;

iv) Professor Claudio R. Contador (COPPEAD-UFRJ) que gentilmente forneceu a aplicação de Análise Espectral Multivariada para o exemplo 2 do Apêndice II;

v) Maria de Lourdes de Almeida e Eliene de Almeida Melo, pelo excelente trabalho de datilografia do manuscrito, e a Oswaldo José da Silva Junior, pela paciência e dedicação com que confeccionou os desenhos.

# ALFABETO GREGO

A  $\alpha$  Alfa  
B  $\beta$  Beta  
Γ  $\gamma$  Gama  
Δ  $\delta$  Delta  
E  $\epsilon$  Epsilon  
Z  $\zeta$  Zeta  
H  $\eta$  Eta  
Θ  $\theta$  Teta

I  $\iota$  Iota  
K  $\kappa$  Capa  
Λ  $\lambda$  Lambda  
M  $\mu$  Mu  
N  $\nu$  Nu  
Ξ  $\xi$  Csi  
O  $\omicron$  Omicro  
Π  $\pi$  Pi

P  $\rho$  Ro  
Σ  $\sigma$  Sigma  
T  $\tau$  Tau  
Υ  $\upsilon$  Upsilon  
Φ  $\phi$  Fi  
X  $\chi$  Qui  
Ψ  $\psi$  Psi  
Ω  $\omega$  Ômega

# GLOSSÁRIO DE SÍMBOLOS

<i>Simbolo</i>	<i>Nome ou Significado</i>
<b>Capítulo I</b>	
$\{X(t), t \in T\}$	Série de Tempo ou família de variáveis aleatórias.
$\{X(1), \dots, X(T)\}$	Observações da série temporal $X(t)$ .
$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$	Função de distribuição acumulada de $X(t)$ .
$\mu(t)$	Função valor médio de $X(t)$ .
$\gamma(t_1, t_2)$	Função de autocovariância teórica de $X(t)$ .
$\rho(t_1, t_2)$	Função de autocorrelação teórica de $X(t)$ .
$f_X(t)(x_t)$	Função de densidade de probabilidade de $X(t)$ .
$m$	Média estimada da série $X(t)$ .
$c(\tau)$	Autocovariância estimada da série $X(t)$ .
$X_t$	Processo estocástico estacionário.
$D_t$	Componente determinística de $X_t$ .
$Z_t$	Processo linear discreto.
$F(w)$	Função de distribuição espectral.
$s_t$	Sinal.
$\epsilon_t$	Ruído.
$B$	Operador atraso.
$\Delta$	Operador diferença.
$F$	Operador adiantamento.

S	Operador soma.
a (B)	Polinômio atraso.
a <sup>-1</sup> (B)	Polinômio atraso sem o termo constante.
<b>Capítulo II</b>	
X(t)	Séries temporais
[X(1), X(2) . . .]	Valores da série X(t).
$\mu$	Média da série X(t).
p	Período da série X(t).
f	Frequência da série X(t).
A	Amplitude da série X(t).
$\theta$	Fase da série X(t).
w	Frequência angular da série X(t).
$A_j$	Amplitude do harmônico j.
$\phi_j$	Fase do harmônico j.
$w_j$	Frequência angular do harmônico j.
$\alpha_j, \beta_j$	Coefficientes de Fourier.
$\hat{A}_j, \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, \hat{\phi}_j, \bar{X}$	Estimadores de mínimos quadrados de $A_j, \alpha_j, \beta_j, \phi_j, \mu$
$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X^2(t)$	Potência média.
$\hat{A}_0^2, \frac{\hat{A}_j^2}{2}, \hat{A}_n^2$	Potência média estimada na frequência correspondente.
$\gamma(k)$	Função de autocovariância de ordem k.
$\rho(k)$	Função de autocorrelação de ordem k.
c(k)	Função de autocovariância de ordem k da amostra.

$r(k)$	Função de autocorrelação de ordem $k$ da amostra.
$f_p(t)$	Sucessão de pulsos retangulares de período $p$ .
$\hat{p}(w_j), \hat{p}(f_j)$	Estimadores da potência média relativa (Densidades Espectrais da Amostra).
$\hat{p}'(w_j), \hat{p}'(f_j)$	Espectro da amostra.
$I(w_j)$	Periodograma de Schuster.
$p(w), p(f)$	Função de densidade espectral.
$p'(w), p'(f)$	Espectro de potências ou espectro.
$P(w)$	Função de distribuição espectral.
$\lambda_k$	Janelas de retardo.
$\nu$	Graus de liberdade.

### Capítulo III

$[X(t), Y(t), t \in T]$	Processo bivariado discreto.
$[(X(1), \dots, X(T), Y(1), \dots, Y(T))]$	Observações do processo bivariado.
$\gamma_{xy}(t, k)$	Função de covariância cruzada de ordem $k$ entre $x$ e $y$ .
$\mu_x$	Valor esperado de $X$ .
$\sigma_x^2$	Variância de $X$ .
$\gamma_{xx}(k)$	Função de autocovariância de ordem $k$ de $X$ .
$\rho_{xy}(k)$	Função de autocorrelação cruzada de ordem $k$ entre $X$ e $Y$ .
$C_{xy}(k)$	Função de covariância cruzada de ordem $k$ da amostra.
$R_{xy}(k)$	Função de correlação cruzada de ordem $k$ da amostra.
$p_{xy}(w)$	Espectro cruzado.
$c(w)$	Co-espectro.

$q(w)$	Espectro de quadratura.
$\alpha_{xy}(w)$	Espectro de amplitude cruzada.
$\phi_{xy}(w)$	Espectro de fase.
$C(w)$	Coerência.
$G_{xy}(w)$	Espectro de ganho.
$\lambda_k$	Janela de atraso.
$\hat{p}_{xy}(w), \hat{c}(w), \hat{q}(w), \hat{\alpha}_{xy}(w)$	
$\hat{\phi}_{xy}(w), \hat{C}(w), \hat{G}_{xy}(w)$	Estimadores.
$\Gamma(w)$	Matriz de autoespectros e espectros cruzados.
$C_{12,k}(w)$	Coerência parcial.
$\Gamma_{1,p}(w)$	Autoespectro parcial.
$M_{1,p}(w)$	Função de coerência múltipla.

## CAPÍTULO I

# INTRODUÇÃO À TEORIA DE SÉRIES TEMPORAIS

### 1.0. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Uma série temporal é um conjunto de observações sequenciais no tempo acerca de um fenômeno; entretanto, a variável tempo pode ser substituída por qualquer outra como espaço, profundidade, etc. As observações vizinhas são, em geral, dependentes e o estudo de uma série temporal consiste, então, em analisar e modelar esta dependência.

Como a maior parte dos procedimentos estatísticos visa a análise de observações independentes, seus resultados não são, então, de todo relevantes na análise de séries temporais. Portanto, novas técnicas vêm sendo desenvolvidas na aplicação específica em séries de tempo, cujo estudo se constitui em uma importante área da estatística. Exemplos ocorrem em vários campos do conhecimento, como economia (preços diários de ações, desemprego mensal, exportação mensal), sociologia (criminalidade mensal, greves anuais), medicina (eletrocardiograma, eletroencefalograma), demografia (população anual, nascimentos e mortes mensais), epidemiologia (ocorrências semanais de sarampo), mercadologia (vendas semanais, gastos semanais com propaganda), meteorologia (precipitação pluviométrica, temperatura diária, velocidade do vento), oceanografia (maré horária).

### 1.1. CLASSIFICAÇÃO

A série temporal é representada por um conjunto de observações  $[X(t), t \in T]$  de uma variável  $X$ , onde  $T$  é um conjunto de índices (tempo, espaço, etc.).

Dependendo da natureza de  $T$  e de  $X$ , a série temporal pode ser:

- i) Discreta, quando  $T$  é um conjunto finito de pontos,  $T = 1, 2, \dots, T$ . Por exemplo, o valor das exportações mensais de 1970 a 1980.
- ii) Contínua, quando  $T$  é um intervalo finito.  $T = [t: 0 < t < T]$ . Por exemplo, medições durante dois minutos de um eletrocardiograma.
- iii) Multivariada (discreta ou contínua),  $[X_1(t), \dots, X_k(t), t \in T]$  ou  $[X(t), t \in T]$ . Por exemplo: vendas ( $X_{1t}$ ) e gastos com propaganda ( $X_{2t}$ ) semanais de um produto; pressão uterina da parturiente ( $X_{1t}$ ) e batidas do coração do feto ( $X_{2t}$ ) em trabalho de parto.
- iv) Multidimensional, quando se tem  $[X(t), t \in T]$  e  $t$  é um vetor. Por exemplo,  $[X(t, r, \ell), t \in T]$  onde  $X$  é a altura de um ponto do oceano,  $t$  o tempo,  $r$  a latitude e  $\ell$  a longitude;  $[X(t, b), t \in T]$  onde  $X$  é o número de casos de meningite semanais ( $t$ ) por bairro ( $b$ ).

A variável  $X$  observada pode, também, ser discreta ou contínua; às vezes, a variável é discreta (ex.: população) mas por sua magnitude pode ser considerada contínua.

Em resumo, a variável observada  $X$  pode ser discreta ou contínua, univariada ou multivariada e o índice "tempo" pode ser discreto ou contínuo, unidimensional ou multidimensional. De forma bastante geral, uma série temporal pode ser  $[X(t), t \in T]$  onde  $X(t)$  é um vetor  $k \times 1$  e  $t$  é um vetor  $p \times 1$ . Diz-se, neste caso, que a série é multivariada e multidimensional.

Em geral,  $t$  será suposto discreto, unidimensional e observado em intervalos equiespaçados.

## 1.2. OBJETIVOS

Existem dois objetivos principais na análise de séries temporais:

- 1) entender o mecanismo do sistema gerador da série temporal e
- 2) prever o comportamento futuro do sistema.

Para isso, os problemas de interesse são:

- a) descrever o comportamento da série. Neste caso, ferramentas úteis são: a construção de gráficos da série, construção de histogramas e diagramas de dispersão, obtenção de estatísticas descritivas simples, verificação de tendências, ciclos e variações sazonais, pontos de mudanças, observações espúrias, etc.;
- b) investigar o mecanismo gerador da série temporal;
- c) fazer previsões de valores futuros da série, a partir de valores passados;
- d) procurar periodicidades relevantes nos dados.

Muitas situações em ciências físicas, biológicas, sociais e em engenharia envolvem o conceito de sistema dinâmico, caracterizado por uma série de entrada  $X(t)$ , uma série de saída  $Y(t)$  e uma função de transferência  $v(t)$ .

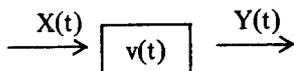


Figura 1.1. Sistema dinâmico

De particular importância são os sistemas lineares, onde a saída é relacionada com a entrada através de um funcional linear envolvendo  $v(t)$ . Um exemplo típico é

$$Y(t) = \sum_{u=0}^{\infty} v(u) X(t-u)$$

também chamado modelo de função de transferência.

Aqui, os problemas de interesse são:

- a) estimar a função de transferência  $v(t)$ , conhecendo-se as séries de entrada,  $X(t)$ , e saída,  $Y(t)$ ;
- b) fazer previsões da série  $Y(t)$ , com o conhecimento de observações da série  $X(t)$  e de  $v(t)$ ;
- c) estudar o comportamento do sistema, simulando-se a série de entrada;
- d) controlar a série de saída  $Y(t)$ , de modo a trazê-la o mais próximo possível de um valor desejado, ajustando-se convenientemente a série de entrada  $X(t)$ ; este controle é necessário, devido às perturbações que normalmente afetam um sistema.

### 1.3. ENFOQUES

Há dois aspectos principais a serem considerados no estudo de séries temporais: análise e modelagem.

A principal razão para se modelar uma série temporal é tornar possível previsões de valores futuros, bem como geração de seqüências sintéticas equiprováveis. Como em qualquer análise de dados, procura-se obter um modelo matemático que descreva o sistema de maneira parcimoniosa para o objetivo desejado. Sua forma funcional deve ser simples e o número de parâmetros deve ser mínimo. Além disso, o modelo deve, se possível, ser parametrizado de tal forma que cada parâmetro possa ser interpretado facilmente e identificado com algum aspecto da realidade. Finalmente, sua forma funcional deve permitir uma fácil manipulação matemática, necessária para inferência a seu respeito.

O objetivo da análise da série temporal é, então, sumarizar as propriedades da série e caracterizar seu comportamento, identificando ou sugerindo um modelo adequado. Há, basicamente, dois enfoques usados nesta análise.

No primeiro, a análise é feita no domínio do tempo, isto é, o interesse reside na magnitude de eventos que ocorrem em determinado instante de tempo e na relação entre observações em diferentes instantes de tempo. A ferramenta utilizada é a função de autocorrelação (e certas funções da mesma) e a análise é baseada em um modelo paramétrico.

No segundo, a análise é feita no domínio da frequência, isto é, o interesse está na frequência com que certos eventos ocorrem em determinado período de tempo (movimentos cíclicos, por exemplo). A ferramenta utilizada é o espectro (que é uma transformada de Fourier da função de autocorrelação) e a análise é baseada em modelos não paramétricos.

As duas formas de análise não são alternativas, mas sim complementares, mos-

trando cada uma diferentes aspectos da natureza da série temporal. Ambos os enfoques, como será visto, são justificados por teoremas de representação (Wold e Cramér, respectivamente). Entretanto, pode-se dizer que a análise no domínio da frequência é conveniente na procura de características determinísticas da série temporal, enquanto a do domínio do tempo é usada na análise de processos não determinísticos.

#### 1.4. TIPOS DE VARIAÇÃO

A análise clássica de séries temporais trata, basicamente, da decomposição da série em quatro componentes: tendência, sazonal, cíclica e aleatória. O interesse por este enfoque vem sendo reativado recentemente.

Os diferentes tipos de variação que se procura analisar são:

- a) **S A Z O N A L** – muitas séries exibem uma variação periódica (diária, semanal, mensal etc.). Este tipo de variação é fácil de entender, podendo ser medida e extraída dos dados, fornecendo uma série dessazonalizada. Por exemplo, medidas de temperatura exibem uma variação anual periódica, baixando durante o inverno e aumentando no verão.
- b) **C I C L I C A** – além de efeitos sazonais, algumas séries exibem outras variações de período fixo. Por exemplo, as variações de temperatura ao longo do dia. Além disso, outras séries apresentam variações cujo período não é fixo, porém possível de ser previsto. Por exemplo, dados econômicos podem ser afetados pelos chamados ciclos econômicos, com períodos variando de 5 a 7 anos, segundo algumas teorias econômicas. Alguns dados hidrológicos parecem obedecer ciclos com períodos em torno de 50 anos e dados de ocorrência de surtos de sarampo obedecem a períodos de 2,5 a 3 anos. Basicamente, variações cíclicas são variações periódicas com período sujeito a pequenas variações, em contraste com sazonalidade cujo período é constante. Por exemplo, aumento nas vendas de TV a cores na época da Copa do Mundo;
- c) **T E N D Ê N C I A** – são os efeitos a longo prazo na média. A dificuldade está em se definir longo prazo. Por exemplo, variáveis climáticas às vezes exibem variações com períodos de 50 anos. Se tivermos 20 anos de dados, esta variação de longo prazo será confundida com tendência. Porém, se tivermos centenas de anos, o ciclo será visível. Outro exemplo seria sobre o desemprego mensal observado durante 2 anos, supondo a existência de ciclos de 7 anos na economia. Novamente seria confundida a variação de longo prazo com tendência.
- d) **I R R E G U L A R** – após remover a sazonalidade, ciclo e tendência obtém-se uma série de resíduos livre de qualquer variação regular. Esta série é, então, analisada a luz de um modelo probabilístico em que a noção de dependência é explorada.

#### 1.5. FUNDAMENTOS PROBABILÍSTICOS

No caso de séries temporais, os sistemas de interesse se desenvolvem no tempo (ou espaço), sujeitos a variações que podem ser descritas por leis probabilísticas. Esse tipo de sistema é, então, objeto de estudo da teoria dos processos estocásticos.

Na teoria estatística de séries temporais, o mecanismo gerador da série é considerada como um processo estocástico e a série temporal observada, uma de suas realizações possíveis. Logo, os conceitos de processos estocásticos e série temporal são análogos, respectivamente, aos conceitos de população e amostra na Estatística Elemental. O que distingue a análise de séries temporais de outras análises estatísticas é o reconhecimento explícito acerca da importância na ordem em que as observações são feitas, isto é, da dependência entre as observações.

## PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Processo estocástico é uma família  $[X(t), t \in T]$  tal que para cada  $t \in T$ ,  $X(t)$  é uma variável aleatória. O conjunto  $T$  é arbitrário e chamado de conjunto índice do processo. O conjunto dos valores que a variável aleatória  $X(t)$  pode assumir é chamado espaço de estados do processo. Se  $X_t = i$ , o processo é dito estar no estado  $i$  ao tempo (transição)  $t$ .

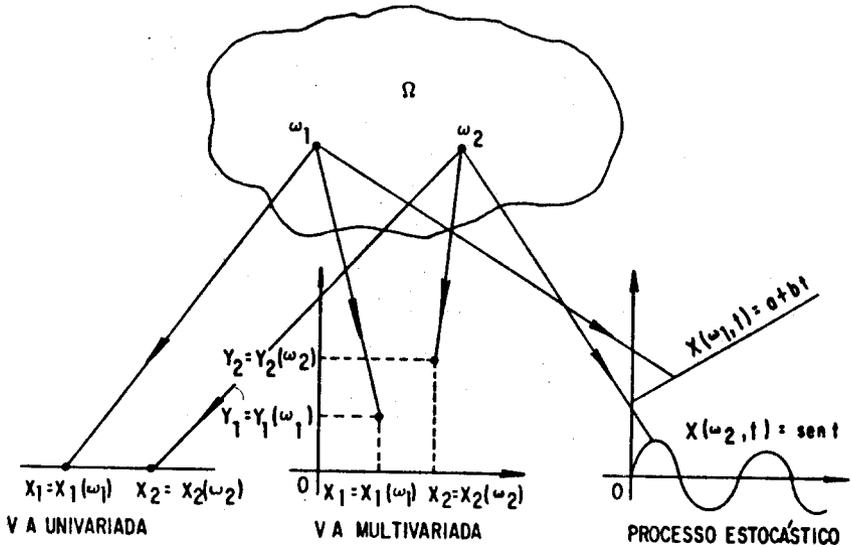


Figura 1.2. Extensão do conceito de variável aleatória para processos estocásticos.  $\Omega$  - espaço amostral do experimento.

Como é visto na Figura 1.2, o conceito é uma extensão daquele para variável aleatória multivariada com dimensão finita. Essa extensão é possível devido a um teorema de Kolmogorov, o qual faz parte da seguinte definição, mais completa:

Uma família de variáveis aleatórias  $[X(t), t \in T]$  constitui um processo estocástico se:

- as variáveis aleatórias  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  são bem definidas, isto é, têm funções de distribuição finito-dimensionais

$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$  conhecidas para todo  $n \geq 1$ . Isto significa que para  $n = 1$  tem-se as distribuições unidimensionais da variável aleatória  $X(t_1)$ ,  $t_1 \in T$ ; para  $n = 2$  tem-se as distribuições bidimensionais da variável aleatória  $(X(t_1), X(t_2))$ ,  $t_1, t_2 \in T$  e assim por diante;

b) estas funções de distribuição satisfazem as condições de

- simetria: tem o mesmo valor quando  $x_j$  e  $t_j$  são submetidos a mesma permutação, por exemplo:

$$F(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3) = F(x_2, x_1, x_3; t_2, t_1, t_3).$$

- convergência:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1})$$

Entretanto, esta definição não é operacional na prática pois o conhecimento das distribuições é muito difícil de ocorrer, senão impossível. Felizmente para o tipo de processo sob interesse bastará que se restrinja aos momentos de 1ª e 2ª ordem destas distribuições, isto é,

- i) função valor médio de  $X(t)$ ,

$$\mu(t) = E\{X(t)\}$$

- ii) função de autocovariância de  $X(t)$ ,

$$\begin{aligned} \gamma(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - \mu(t_1)][X(t_2) - \mu(t_2)]\} = \\ &= E\{X(t_1)X(t_2)\} - \mu(t_1)\mu(t_2). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\gamma(t, t) = \sigma^2(t) = \text{Var}\{X(t)\} = E\{X^2(t)\} - \mu^2(t)$$

além disso, como  $\gamma(t_1, t_2)$  depende da unidade de  $X(t)$ , na maioria das vezes utiliza-se a

- iii) função de autocorrelação de  $X(t)$

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$$

que independe da unidade de medida.

Observe-se que no caso das distribuições finito-dimensionais de  $[X(t), t \in T]$  serem normais, isto é, o processo ser Gaussiano, o conhecimento de  $\mu(t)$  e  $\gamma(t_1, t_2)$  caracteriza toda distribuição do processo.

Como se vê, para cada  $t$ ,  $X(t)$  é uma variável aleatória e esta interpretação é ilustrada na Figura 1.3:

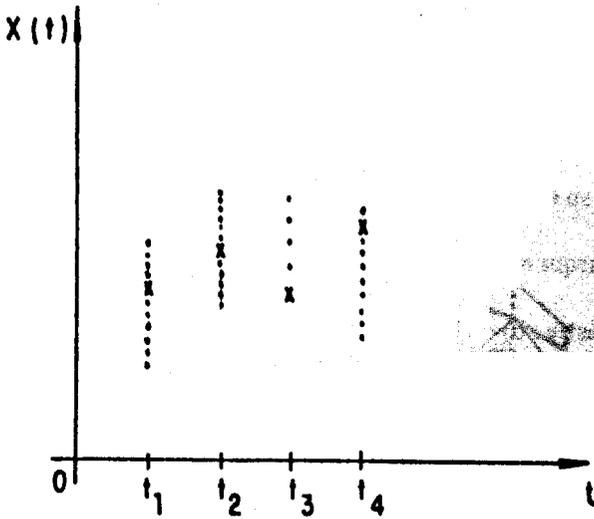


Figura 1.3. Valores observados (x) e valores possíveis de serem observados (.) do processo estocástico  $X(t)$ .

ou, mais genericamente, na Figura 1.4:

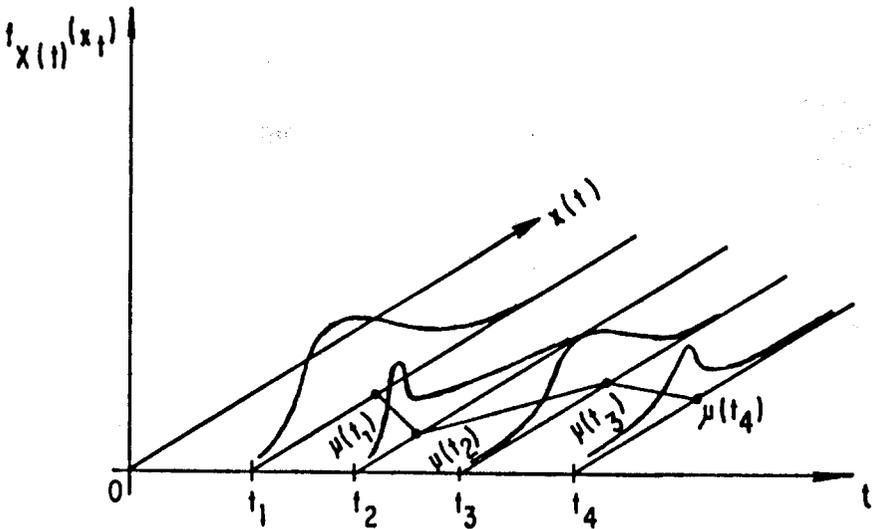


Figura 1.4. Família de variáveis aleatórias e suas densidades.

onde,  $f_{X(t)}(x_t)$  é a função de densidade de  $X(t)$  para  $t$  fixado. É possível que as funções de densidade sejam diferentes para instantes de tempo distintos  $t_1$  e  $t_2$ .

Por outro lado, pode-se considerar o processo em função de  $t$ , ou seja, uma

realização ou trajetória do processo estocástico. Designando por  $X^{(1)}(t)$ ,  $X^{(2)}(t)$ , ... etc. as realizações, o conjunto de todas as possíveis realizações denomina-se *ensemble*. A Figura 1.5 ilustra esta interpretação.

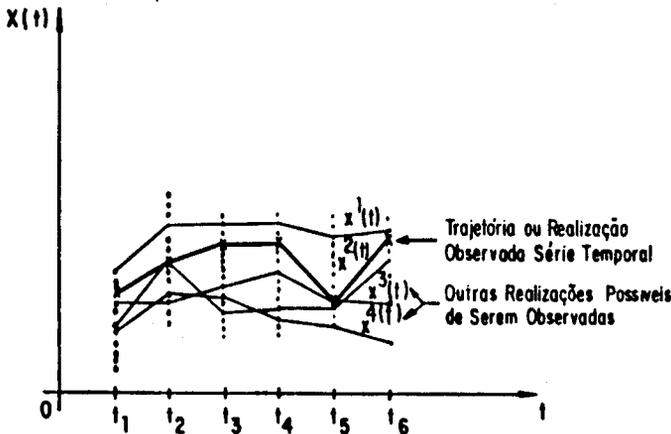


Figura 1.5. "Ensemble" de um processo estocástico.

## PROCESSOS ESTACIONÁRIOS

Foi visto que uma série temporal é uma realização de um processo estocástico. Na maioria das séries temporais da prática não é possível observar outras realizações. Isto é, não se pode repetir o experimento. Por exemplo é impossível voltar no tempo e obter outra seqüência de observações sobre exportações mensais do Brasil no período 1970/1983.

Portanto, a cada instante de tempo  $t$ , em geral tem-se somente uma observação  $x(t)$  de  $X(t)$ . Se, por exemplo, deseja-se fazer alguma inferência sobre  $\mu(t)$  ou  $\sigma^2(t)$  isto será impossível com apenas uma única observação, a menos que se faça alguma suposição adicional sobre o tipo de processo analisado.

A primeira suposição normalmente feita é a estacionariedade. Intuitivamente, um processo é estacionário se ele se desenvolve no tempo de modo que a origem não é importante ou, ainda, se não existe mudanças sistemáticas na média e na variância.

Formalmente, há dois tipos de estacionariedade: forte (ou estrita) e fraca (ou ampla, ou de 2ª ordem, ou em covariância):

a) Diz-se que o processo  $[X(t), t \in T]$  é estritamente estacionário, se suas funções de distribuições finito-dimensionais são invariantes por translações no tempo, isto é,

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) = F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$$

para  $\forall t_1, \dots, t_n, \tau$ .

Isto significa, em particular, que  $F(x; t_1) = F(x; t_2)$  (pois  $t_2 = t_1 + \tau$ ) e logo (se  $\mu(t)$  e  $\sigma^2(t)$  existirem)

$$\mu = \mu(t_1) = \mu(t_2)$$

$$\sigma^2 = \sigma^2(t_1) = \sigma^2(t_2)$$

ou seja, a média ( $\mu(t) = \mu$ ) e a variância ( $\sigma^2(t) = \sigma^2$ ) do processo são constantes.

Também,  $F(x_1, x_2; t_1, t_2) = F(x_1, x_2, t_1 + \tau, t_2 + \tau)$  e  $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 + \tau, t_2 + \tau)$ . Fazendo  $\tau = -t_1$ , vem:

$$\gamma(t) = \gamma(0, t_2 - t_1), \text{ para } t = t_2 - t_1$$

isto é, a função de autocovariância (autocorrelação) só depende da diferença  $t = t_2 - t_1$ .

Mais genericamente, mostra-se que os momentos de ordem superior só dependem das diferenças  $(t_j - t_1)$ .

b) Um processo  $\{X(t), t \in T\}$  é fracamente estacionário (ou estacionário de 2ª ordem ou estacionário em covariância, ou em sentido amplo) se e só se

i)  $E\{X(t)\} = \mu(t) = \mu$ , constante  $\forall t$

ii)  $Var\{X(t)\} = \sigma^2(t) = \sigma^2$ ,  $\forall t$

iii)  $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma(\tau)$  ( $\tau = t_2 - t_1$ )

Como mencionado anteriormente, o maior interesse reside nos momentos de 1ª e 2ª ordem e, portanto, a partir de agora, somente serão tratados os processos fracamente estacionários, os quais serão denominados simplesmente de estacionários.

Observe-se que, se os momentos existem para um processo, estacionariedade forte implica estacionariedade fraca. Entretanto, estacionariedade fraca só implica estacionariedade forte se o processo é Gaussiano, isto é, quando as distribuições finito-dimensionais são normais.

É claro que nem todas as séries temporais são realizações de processos estacionários. O que se faz é uma tentativa de se transformar a série em estacionária e utilizar a teoria dos processos estacionários para a série transformada.

Finalmente, sendo  $\gamma(\tau)$  a função de autocovariância de um processo estacionário  $X(t)$ , as seguintes propriedades são satisfeitas:

a)  $\gamma(0) \geq 0$

b)  $\gamma(-\tau) = \gamma(\tau)$

c)  $|\gamma(\tau)| \leq \gamma(0)$

d)  $\gamma(\tau)$  é positiva definida no sentido que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{K=1}^n a_j a_K \gamma(\tau_j - \tau_K) \geq 0$$

quaisquer reais  $a_1, \dots, a_n$  e  $t_1, \dots, t_n$

A função de autocorrelação de  $X(t)$  é definida por

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$$

e propriedades análogas a a) - d) valem para  $\rho(\tau)$ .

## ERGODICIDADE

Usualmente, em problemas de estimação estatística, tem-se disponível diversas repetições (observações) de um mesmo fenômeno. Portanto, como estimativa da média ( $\mu$ ) de uma variável aleatória  $X$ , toma-se a média da amostra dos valores observados  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . Segundo este procedimento, para se estimar a média  $\mu(t_0)$  e a função de autocovariância (ou autocorrelação),  $\gamma(\tau) = \gamma(t_1, t_2)$  ( $\rho(\tau) = \rho(t_1, t_2)$ ) ter-se-ia que fazer diversas observações  $x^1(t_0), x^2(t_0), \dots, x^n(t_0)$  e  $(x^1(t_1), x^1(t_2)), (x^2(t_1), x^2(t_2)) \dots (x^n(t_1), x^n(t_2))$  e tomar a média e a autocovariância amostral. A figura 1.6 ilustra esse procedimento.

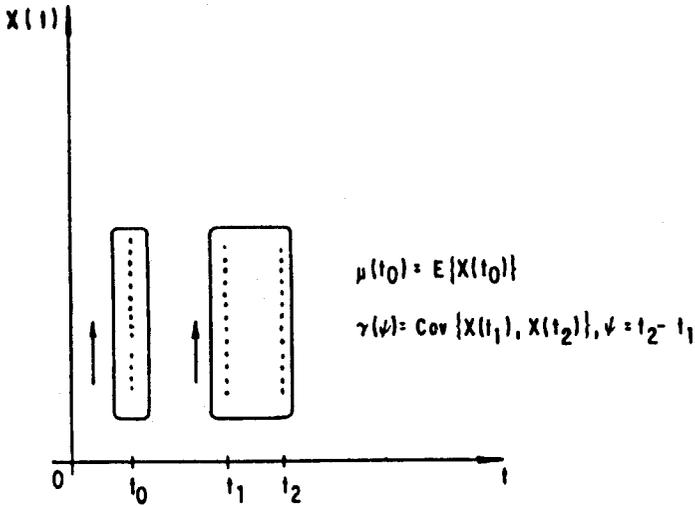


Figura 1.6. Médias estatísticas, tomadas na direção das setas. (.) Valores observados.

Entretanto, como já foi dito, na prática geralmente só se dispõe de uma observação da série temporal e não se pode estimar os parâmetros da forma indicada.

Porém, com a série  $x(1), x(2), \dots, x(T)$ , podem ser calculadas as seguintes médias no tempo (ou em fase):

$$m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x(t) \quad \text{e} \quad c(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x(t)x(t+\tau)$$

ilustradas na Figura 1.7

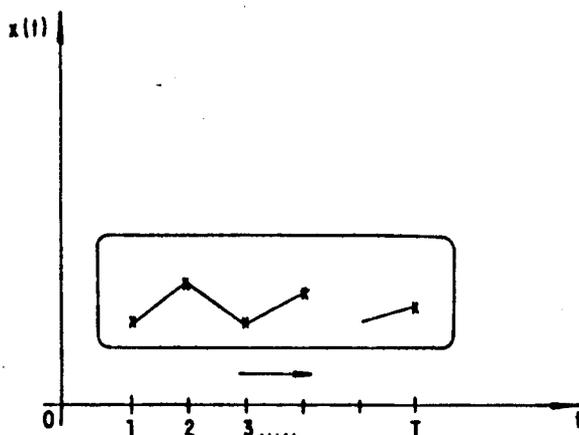


Figura 1.7. Médias em fase, tomadas na direção da seta.

De fato, a importância prática da análise das autocorrelações de processos estacionários é, em grande parte, devida ao fato de que, se  $X(t)$  é um processo estacionário, sua média  $\mu$  e sua função de autocovariância  $\gamma(\tau)$  podem ser estimadas usando somente uma realização de  $X(t)$ . Isto ocorre se  $X(t)$  é ergódico, isto é, satisfaz os chamados teoremas ergódicos.

Se um processo é estacionário e só se pode observar uma de suas realizações, a suposição de que o processo é ergódico pode ser feita já que, neste caso, não há uma maneira operacional de verificar a ergodicidade. Além disso, a maioria dos processos estacionários observados na prática são ergódicos.

Na realidade o que os teoremas em geral requerem é que as variáveis  $X(t)$  e  $X(t+k)$  se tornem independentes quando  $k$  aumenta. Isto é uma suposição bastante razoável em termos práticos; isto é, as observações vão se tornando independentes quanto mais afastadas se encontram uma das outras. Neste caso,

$$\mu = \mu(t) = m \quad \text{e} \quad \gamma(\tau) = \text{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = c(\tau), \quad (\tau = t_2 - t_1)$$

## 1.6. TEOREMAS GERAIS DE REPRESENTAÇÃO

Em trabalhos teóricos e aplicados existe um certo dualismo entre os dois enfoques usados na análise de séries temporais. Isto deve-se, apenas, aos objetivos da análise, visto que, do ponto de vista formal, os dois enfoques são fortemente relacionados. Nesta seção apresenta-se, sem demonstração, alguns resultados que fornecem a justificativa de cada enfoque e seu relacionamento. Será abordado o caso de processos discretos no tempo.

### Decomposição Preditiva (Domínio do Tempo)

Teorema de Wold – todo processo estacionário  $X_t$  admite a representação:

$$X_t = D_t + Z_t$$

onde,

- a)  $D_t$  e  $Z_t$  são não correlacionados,
- b)  $D_t$  é determinístico, no sentido de que valores futuros de  $D_t$  são previstos com precisão, baseados em função linear de valores passados  $D_{t-1}, D_{t-2}, \dots$
- c)  $Z_t$  é um processo linear discreto geral (ou média móvel infinito,  $MA(\infty)$ ), isto é

$$Z_t = \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2} + \dots$$

onde,  $E[\epsilon_t] = 0$  e  $E[\epsilon_t \epsilon_{t+k}] = 0 \forall t, k$ , isto é,  $\epsilon_t$  é um ruído branco.

Observe-se que a decomposição não exclui a possibilidade de um mecanismo não linear representar melhor o processo. A decomposição significa que é razoável esperar que o verdadeiro mecanismo do processo possa ser adequadamente representado por um mecanismo que gera um tipo simples de processo determinístico mais um resíduo  $Z_t$ .

Esta decomposição é de grande importância prática, pois muitas séries temporais, particularmente séries econômicas, contêm componentes de tendência e sazonalidade. Um modelo clássico, envolvendo estas componentes, supõe que a variável econômica é representada por:

$$X_t = D_t + Z_t = T_t + S_t + Z_t$$

onde  $T_t$  é a componente determinística representando a tendência,  $S_t$  é a componente determinística representando a sazonalidade e  $Z_t$  é a componente estocástica.

A decomposição de Wold mostra a importância dos processos lineares discretos, em geral, e indica a razão da grande utilização desses modelos, popularizados e tornados acessíveis por Box e Jenkins em 1970.

### Representação Espectral (Domínio da Frequência)

A análise de uma série temporal no domínio da frequência é feita a partir do seguinte par de teoremas.

- A) Teorema de Bochner-Klitchin — a função de autocorrelação  $\rho(\tau)$  de um processo estacionário discreto no tempo admite a representação

$$\rho(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega) = \int_0^{\pi} [\sin\omega\tau dQ(\omega) + \cos\omega\tau dC(\omega)]$$

onde  $F(\omega)$  tem as propriedades de uma função de distribuição acumulada no intervalo  $(-\pi, \pi)$ , isto é,  $F(-\pi) = 0$  e  $F(\pi) = 1$ . A notação  $dF(\omega)$  significa integração ou soma conforme  $F(\omega)$  seja contínua ou discreta. A função  $F(\omega)$  é denominada função de distribuição espectral.

Como  $\rho(T)$  tem a propriedade de ser positiva-definida então, a demonstração da representação é fundamentada em um teorema de Análise devido a Bochner: uma função  $\rho(\tau)$  é positiva-definida se e somente se admite a representação acima.

De alguns conceitos do cálculo das probabilidades vê-se que a função de autocorrelação  $\rho(T)$  funciona como a função característica da distribuição  $F(\omega)$ , e a função de distribuição espectral  $F(\omega)$ , portanto, admite a decomposição de Lebesgue,

$$F(w) \simeq a_1 F_1(w) + a_2 F_2(w)$$

onde  $F_1(w)$  e  $F_2(w)$  são funções de distribuição do seguinte tipo:

- a)  $F_2(w)$  é contínua,
- b)  $F_1(w)$  é uma função escada com saltos  $p_r$  nos pontos

$$w_r, r = 1, 2, \dots \text{ e } \sum p_r = 1.$$

A Figura 1.8 ilustra uma distribuição espectral na forma geral

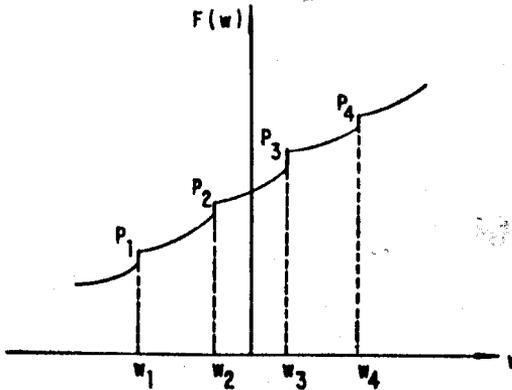


Figura 1.8. Forma geral da distribuição espectral.

No caso de distribuições de probabilidade, a maioria dos problemas práticos envolve apenas uma das componentes, sendo somente contínua ou somente discreta, conforme a variável aleatória seja contínua ou discreta, respectivamente. O mesmo ocorre para distribuições espectrais. Entretanto, ocorre mais frequentemente o caso de ambos os componentes presentes.

Sejam,

$$1) a_1 = 1 \text{ e } a_2 = 0$$

Então,  $F(w) = F_1(w)$  e o espectro consiste apenas de componentes discretos. Diz-se, neste caso, que se tem um espectro de linha. O exemplo principal é o Processo Harmônico

$$X_t = \sum_{i=0}^k A_i \cos(w_i t + \phi_i) = \sum_{i=0}^k (\alpha_i \sin w_i t + \beta_i \cos w_i t)$$

onde  $k$ ,  $A_i$  e  $w_i$  são constantes e  $\phi_i$  são variáveis aleatórias uniformes em  $(-\pi, \pi)$ ; alternativamente,  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são variáveis aleatórias normais não correlacionadas entre si e com média 0 e variância  $\sigma_i^2$ . Neste caso, verifica-se que  $E(X_t) = 0$  e

$$\text{Var}(X_t) = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2. \text{ Portanto, a variância de } X_t \text{ é decomposta na soma das variân-}$$

cias de cada componente harmônico, de uma forma análoga à análise de variância clássica.

$$2) a_1 = 0 \text{ e } a_2 = 1$$

Aqui,  $F(w) = F_2(w)$  e o espectro consiste apenas do componente contínuo. Neste caso,  $dF(w) = f(w)dw$  chama-se função de densidade espectral. Os seguintes modelos são exemplos de processos com espectro contínuo:

- Processo Aleatório Puro ou Ruído Branco
- Processo Linear Discreto
- Processo Autorregressivo – AR
- Processo Média Móvel – MA
- Processo Misto Autorregressivo – Média Móvel – ARMA

$$3) a_1 > 0 \text{ e } a_2 > 0$$

Neste caso,  $F(w)$  é uma mistura de ambas as componentes contínua e discreta. Este corresponde ao caso de uma variável aleatória com uma distribuição de probabilidades mista. Um exemplo de tal processo é obtido tomando-se

$$X_t = D_t + Z_t$$

onde  $D_t$  e  $Z_t$  são não correlacionados,  $D_t$  tem espectro contínuo e  $Z_t$  tem espectro discreto.

B) Teorema de Cramér – Todo processo estacionário discreto no tempo, com função de distribuição espectral  $F(w)$ , admite a representação

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt} dZ(w) = \int_0^{\pi} [\text{sen}w\alpha(w)dw + \text{cos}w\beta(w)dw]$$

onde  $\alpha(w)$  e  $\beta(w)$  são funções estocásticas com propriedades análogas a  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  do processo harmônico. Da mesma forma, a variância de  $X_t$  é decomposta na soma

$\int_{-\pi}^{\pi} dF(w) = F(\pi)$ . Na realidade, esta representação é uma extensão do Processo Harmônico

$$X_t = \sum_{i=0}^k [\alpha_i \text{sen}w_i t + \beta_i \text{cos}w_i t]$$

ao se fazer  $k \rightarrow \infty$  e permitir a inclusão de um número infinito, não enumerável, de termos trigonométricos no intervalo  $[0, \pi]$ . Esta extensão permite que se analise funções estocásticas, isto é, processos não determinísticos. A análise espectral trata do estudo da estrutura da série, identificando componentes (senóides) importantes de  $X_t$  através da análise e estimação de  $F(w)$ .

#### Outras Considerações sobre os Teoremas de Representação

É interessante explicitar as relações e distinções observadas nos dois tipos de decomposição de uma série temporal.

- 1) Da expressão,  $\rho(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$  nota-se uma correspondência um a um entre  $\rho(t)$  e  $F(\omega)$ ; logo, toda a informação sobre o processo contida em  $\rho(t)$  está contida em  $F(\omega)$  e vice-versa.
- 2) Na decomposição de Wold tem-se  $X_t = D_t + Z_t$  e na decomposição da distribuição espectral,  $F(\omega) \sim F_1(\omega) + F_2(\omega)$ . À componente determinística,  $D_t$ , corresponde a função escada,  $F_1(\omega)$ , e à componente não determinística corresponde a função contínua,  $F_2(\omega)$ .
- 3) Mostra-se que a parte determinística na decomposição de Wold é um processo harmônico, isto é,

$$D_t = \sum_{i=0}^K (\alpha_i \text{sen} \omega_i t + \beta_i \text{cos} \omega_i t)$$

correspondendo ao espectro de linha  $F_1(\omega)$ . Mostra-se, também, que dada uma função de distribuição espectral contínua,  $F_2(\omega)$ , sempre se pode encontrar um processo média móvel com distribuição espectral  $F_2(\omega)$ .

- 4) Há uma distinção de tratamento da componente estocástica nos dois enfoques. Na decomposição de Wold a componente estocástica é representada parametricamente por meio da seqüência  $\psi_1, \psi_2, \dots$ . Na representação espectral a componente estocástica tem uma representação não paramétrica em termos da função  $F_2(\omega)$ .
- 5) A decomposição de Wold foi estendida por Cramér, em 1962, para o caso de processos não estacionários e os coeficientes  $\psi_1, \psi_2, \dots$  passam a depender do tempo, isto é,

$$Z_t = \epsilon_t + \psi_1(t)\epsilon_{t-1} + \psi_2(t)\epsilon_{t-2} + \dots$$

A análise espectral de processos não estacionários foi estudada inicialmente por Priestley, em 1966.

- 6) As decomposições de Wold e de Cramér, bem como a expansão de Karhunen-Loeve, podem ser vistas como casos particulares do método de expansão canônica devido a Pugachev, em 1957, e estudado elegantemente por Parzen, em 1961, usando conceitos de espaços de Hilbert. Neste método tenta-se expressar qualquer processo estocástico (função aleatória) em termos de combinações lineares de variáveis aleatórias não correlacionadas.

Nesta abordagem, uma série temporal é tratada como um vetor de um espaço infinito-dimensional e pode ser convenientemente estudada pela sua decomposição ortogonal ou canônica, expressa como soma ou integral. No domínio do tempo, os eixos são variáveis aleatórias não correlacionadas, enquanto os coeficientes formam uma função determinística; no domínio da frequência, os eixos

são funções determinísticas ortogonais, tais como  $e^{i\lambda t}$ , e os coeficientes são variáveis aleatórias.

## 1.7. ALGUNS MODELOS DE SÉRIES TEMPORAIS

Nesta seção são listados alguns modelos especiais. Inicialmente, será útil escrever os modelos na forma geral

$$\text{dados} = \text{sinal} + \text{ruído}$$

i.e.,

$$X_t = s_t + \epsilon_t.$$

e apresentar alguns operadores:

– Operador atraso

$$BX_t = X_{t-1}, B^m X_t = X_{t-m}$$

– Operador diferença

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1-B)X_t, \Delta = (1-B)$$

– Operador adiantamento

$$FX_t = B^{-1}X_t = X_{t+1}, B^{-m}X_t = X_{t+m}$$

– Operador soma

$$\begin{aligned} SX_t &= \sum_{j=0}^{\infty} X_{t-j} = X_t + X_{t-1} + \dots = (1+B+B^2+\dots)X_t = \\ &= (1-B)^{-1}X_t = \Delta^{-1}X_t. \end{aligned}$$

Representar-se-á, em geral, por  $a(B)$  o polinômio atraso

$$a(B) = \sum_{j=0}^m a_j B^j = a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_m B^m.$$

Os operadores atraso operam linearmente nas variáveis, como por exemplo

$$\begin{aligned} \phi(B)X_t &= (\phi_0 + \phi_1 B + \dots + \phi_p B^p)X_t = \\ &= \phi_0 X_t + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} = \sum_{j=0}^p \phi_j X_{t-j} \end{aligned}$$

e são manipulados como polinômios na variável  $B$  para efeito de multiplicação, divisão e inversão.

Por exemplo:

– Multiplicação

$$X_t = (\phi_0 + \phi_1 B) Y_t \text{ e } Y_t = (\theta_0 + \theta_1 B) \epsilon_t$$

então,

$$\begin{aligned} X_t &= (\phi_0 + \phi_1 B)(\theta_0 + \theta_1 B)\epsilon_t = \\ &= \phi_0\theta_0\epsilon_t + (\phi_1\theta_0 + \phi_0\theta_1)\epsilon_{t-1} + \phi_1\theta_1\epsilon_{t-2} \end{aligned}$$

- Divisão

$$\phi(B)X_t = \epsilon_t, \text{então, } X_t = \phi^{-1}(B)\epsilon_t$$

onde,

$$\phi^{-1}(B) \text{ é o inverso de } \phi(B)$$

- Inversão

Se  $\phi(B)$  é um polinômio,  $\psi(B)$ , seu inverso, é obtido de

$$\phi(B)\psi(B) = 1$$

isto é,

$$(\phi_0 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots)(\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1 + 0B + 0B^2 + \dots$$

$$\text{logo, } \phi_0\psi_0 = 1 \quad \implies \psi_0 = \frac{1}{\phi_0}$$

$$(\phi_0\psi_1 + \phi_1\psi_0)B = 0 \quad \implies \psi_1 = \frac{\phi_1}{\phi_0^2}$$

$$(\phi_0\psi_2 + \phi_1\psi_1 + \phi_2\psi_0)B^2 = 0 \quad \implies \psi_2 = \frac{\phi_1^2}{\phi_0^3} - \frac{\phi_2}{\phi_0^2}$$

- Principais Modelos

i) Aleatório Puro ou Ruído Branco

$$X_t = s_t + \epsilon_t$$

$$s_t = \mu$$

onde o conjunto dos  $\epsilon_t$  é uma seqüência de variáveis aleatórias não correlacionadas.  $X_t$  é estacionário se  $E\{X_t\} = \mu$  e  $E\{X_t - \mu\}^2 = \sigma^2$ . Em geral,  $\mu = 0$  e a seqüência dos  $\epsilon_t$  é o ruído branco. Adotar-se-á esta notação nos exemplos a seguir.

ii) Modelo Linear Discreto Geral - MA( $\infty$ )

$$X_t = s_t + \epsilon_t$$

$$s_t = \psi_1\epsilon_{t-1} + \psi_2\epsilon_{t-2} + \dots = \psi(B)\epsilon_t$$

onde,  $\epsilon_t$  é um ruído branco.

iii) Modelo Autorregressivo de Ordem p – AR(p)

$$X_t = s_t + \epsilon_t$$

$$s_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} = \phi^*(B)X_t$$

iv) Modelo de Médias Móveis de Ordem q – MA(q)

$$X_t = s_t + \epsilon_t$$

$$s_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} = \theta^*(B)\epsilon_t$$

v) Modelo Autorregressivo – Média Móvel – ARMA(p,q)

$$X_t = s_t + \epsilon_t$$

$$s_t = \phi^*(B)X_t + \theta^*(B)\epsilon_t$$

vi) Modelos de Regressão ou de Variáveis Exógenas

$$X_t = s_t + \epsilon_t$$

$$s_t = D_t \beta$$

$D_t$  é uma seqüência de funções determinísticas ou de defasagem

ex.: constante  $X_t = \mu + \epsilon_t$

linear  $X_t = \alpha + \beta_j t^j + \epsilon_t$

polinomial  $X_t = \sum_{j=0}^m \beta_j t^j + \epsilon_t$

regressão  $X_t = \alpha + \beta D_t + \epsilon_t$

harmônico  $X_t = \sum_{j=0}^p \left( \alpha_j \cos \lambda_j t + \beta_j \sin \lambda_j t + \epsilon_t \right)$

onde,  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{p}$ , se o período é p.

defasagem  $X_t = \alpha + \beta_1 D_t + \beta_2 D_{t-1} + \epsilon_t$

$$X_t = \beta_1 D_t + \beta_2 D_{t-1} + \dots + \epsilon_t =$$

$$= B(B)D_t + \epsilon_t$$

vii) Modelo Autorregressivo Exógeno – ARX

$$X_t = s_t + \epsilon_t$$

$$s_t = A^*(B)X_t + B(B)D_t$$

viii) Modelo ARMA + Exógeno – ARMAX

$$X_t = s_t + \epsilon_t$$

$$s_t = A^*(B)X_t + \theta^*(B)\epsilon_t + B(B)D_t$$

A vantagem deste modelo, comparado com os modelos de função de transferência, é sua linearidade.

ix) Modelo de Função de Transferência – Ruído Branco

$$X_t = s_t + \epsilon_t$$

$$s_t = \frac{1}{1+A^*(B)} B^*(B)D_t$$

x) Modelo Função de Transferência – Ruído ARMA

$$X_t = s_t + v_t$$

$$s_t = \frac{1}{1+A^*(B)} B^*(B)D_t$$

$$v_t = \frac{1+\theta(B)}{1+\phi^*(B)} \epsilon_t$$

xi) Modelo de Espaço de Estados ou de Markov

$$X_t = s_t + v_t$$

$$s_t = D_t$$

$$D_{t+1} = FD_t + w_t$$

onde  $v_t$  e  $w_t$  são ruídos brancos com

$$E \left\{ \begin{pmatrix} w_t \\ v_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_t v_t \end{pmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & M \\ M & R \end{bmatrix}$$

Desde que  $M \neq 0$ , existe uma correspondência um a um entre modelos de Markov e modelos ARMA. Entretanto, enquanto um modelo ARMA pode ser escrito em forma de espaço de estados ou de Markov em infinitas maneiras, somente algumas formas têm utilidade prática.

xii) Modelos de Equações Simultâneas

$$X_t' \Gamma + D_t' B = \epsilon_t$$

onde

$X_t$  – vetor  $l \times 1$  de variáveis endógenas.

$D_t$  – vetor  $m \times 1$  de variáveis exógenas.

$\epsilon_t$  – vetor  $l \times 1$  de ruído branco com matriz de covariância  $\Sigma$ .

Sendo  $T$  o tamanho da amostra e, escrevendo,  $X=(X(1), \dots, X(T))$  tem-se,

$$X\Gamma + DB = E.$$

Estas equações são chamadas estruturais.

Se  $\Gamma$  tem posto máximo, as equações,

$$X = DT + W = DB\Gamma^{-1} = E\Gamma^{-1}$$

são chamadas de forma reduzida do modelo.

O modelo dinâmico de equações simultâneas é

$$\Gamma(B)X_t + B'(B)D_t = \epsilon_t$$

onde,  $\Gamma(B)$  e  $B'(B)$  são polinômios matriciais em  $B$ .

Observe-se que todos os modelos anteriores podem ser estendidos para o caso multivariado, bastando considerar as variáveis  $X_t$  como vetores e os polinômios em  $B$  como polinômios matriciais.

## CAPÍTULO II

# ANÁLISE ESPECTRAL UNIVARIADA

### 2.0. INTRODUÇÃO

Neste capítulo faz-se uma introdução à análise de séries temporais estacionárias no domínio da frequência. Estuda-se a decomposição da série temporal em partes associadas a frequências de ocorrência de alguns eventos em lugar da amplitude dos eventos, isto é, em suas componentes cíclicas. Define-se, também, o espectro, que é a ferramenta natural para a análise de um processo estacionário do domínio da frequência. O espectro é uma função que complementa, para um processo estacionário, o estudo feito no domínio do tempo através da função de autocorrelação.

### 2.1. ANÁLISE DE FOURIER

A análise de Fourier estuda, basicamente, a aproximação de qualquer função por uma soma de senos e cossenos.

Pelo teorema de Fourier, qualquer função  $f(x)$ , periódica do período  $p$ , pode ser escrita como uma série de Fourier na forma,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ a_j \cos \left( \frac{2\pi j}{p} x \right) + b_j \sin \left( \frac{2\pi j}{p} x \right) \right\} \quad (1)$$

onde  $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  são constantes que podem ser determinadas a partir de  $f(x)$ .

Para uma função  $f(x)$ , não periódica, pode-se considerá-la como uma função periódica de período infinito.

Neste caso, a distância entre as frequências  $2\pi j/p$  e  $2\pi(j+1)/p$  dos termos consecutivos em (1) tende a zero. Então, por operações de limite, o somatório torna-se uma integral. Deste modo as funções não periódicas poderiam ser escritas como

$$f(x) = \int_0^{\infty} (g(w)\cos wx + k(w)\sin wx) dw$$

onde  $g(w)$  e  $k(w)$  são determinadas a partir de  $f(x)$ .

Entretanto, para que as operações de limite sejam válidas, a função  $f(x)$  deve satisfazer as seguintes condições:

(i) ser absolutamente integrável, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty;$$

(ii) ter um número finito de descontinuidades;

(iii) possuir um número finito de máximos e mínimos.

Mostra-se que a série de Fourier, para uma série temporal discreta,  $X(t)$ , emerge naturalmente. Inicialmente, considerar-se-á um modelo senoidal simples, do qual algumas definições básicas serão extraídas.

## 2.2. MODELO SENOIDAL SIMPLES

Considere a Figura 2.1. Os valores da série  $x(1), x(2), x(3), \dots$  variam em torno do valor médio  $\mu$  e, ainda, as variações se repetem, isto é, a série é periódica.

A série temporal na Figura 2.1 pode ser descrita por quatro elementos básicos que são: período, frequência, amplitude e fase, que são adotados por  $p, f, A$  e  $\theta$ , respectivamente.

$p$ : é o período de tempo necessário para a série temporal se repetir. O período é medido em unidade de tempo por ciclo e não é único, pois se a série tem período  $p$ , terá também período  $2p, 3p, 4p, \dots$ . Em geral a série é periódica se

$$X(t) = X(t+cp) \quad c = 1, 2, \dots$$

$f = 1/p$ ; é o recíproco do período e fornece o número de repetições do ciclo por unidade de tempo. Por exemplo, com 12 meses por ciclo ( $p = 12$ ), a frequência é  $1/12$  ciclos por mês.

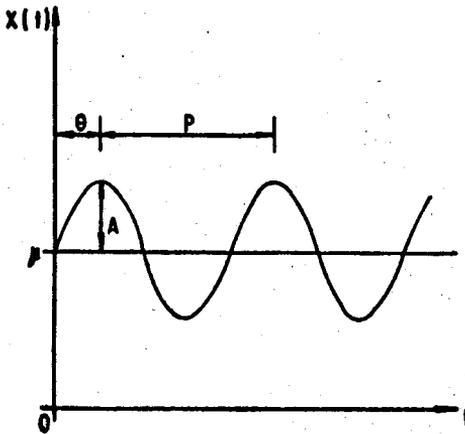


Figura 2.1. Série temporal periódica.

$A$ : A amplitude é a distância da média da série ao pico ou ao “fundo do vale”.

$\theta$ : A fase é a distância entre a origem da série temporal, no caso  $t = 0$ , e o pico (ou fundo do vale) mais próximo.

Para a série constante,  $X(t) = k$ , considera-se  $p = \infty$  e  $f = 0$ .

Portanto; a série temporal periódica e estacionária  $X(t)$  pode ser expressa na forma

$$X(t) = \mu + A \cos 2\pi f(t - \theta), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (3)$$

que é conhecida como representação harmônica. Por exemplo, quando  $t = \theta$ ,  $X(t) = \mu + A$ .

Às vezes é conveniente expressar a função periódica em termos da frequência angular. A frequência angular é medida em termos de radianos por unidade de tempo,

$$w = 2\pi f, \quad 0 \leq w \leq 2\pi$$

Portanto pode-se reescrever o modelo (3) como,

$$X(t) = \mu + A \cos(wt - \phi), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4)$$

onde,

$$\phi = 2\pi f\theta$$

Esta será a representação fundamental e usar-se-á os termos frequência para  $f$ , frequência angular para  $w$  e fase para  $\phi$ .

Da identidade trigonométrica,

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (5)$$

tem-se,

$$\begin{aligned} A \cos(wt - \phi) &= A(\cos wt \cos \phi + \sin wt \sin \phi) \\ &= \alpha \cos wt + \beta \sin wt \end{aligned} \quad (6)$$

onde,

$$\alpha = A \cos \phi \quad (7)$$

$$\beta = A \sin \phi \quad (8)$$

Então, (3) pode também ser escrito como,

$$X(t) = \mu + \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (9)$$

A partir das identidades trigonométricas,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

e,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ e } \arctan x = \tan^{-1} x$$

tem-se,

$$\alpha^2 + \beta^2 = A^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = A^2 \quad (10)$$

e,

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\beta}{\alpha}$$

ou,

$$\arctan \frac{\beta}{\alpha} = \phi \quad (11)$$

O modelo anterior é um modelo simples, mas na prática as mudanças em uma série temporal podem ser causadas por variações em diferentes frequências. Por exemplo, séries de vendas podem conter variações cíclicas semanais, mensais, anuais e outras. Em outras palavras, os dados podem conter variações em altas, médias e baixas frequências.

Então, uma generalização natural é dada por:

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^k A_j \cos(\omega_j t - \phi_j), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (12a)$$

$k = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{T}{2} \rfloor$

ou,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^k (\alpha_j \cos \omega_j t + \beta_j \sin \omega_j t), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (12b)$$

$k = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{T}{2} \rfloor$

que representa um processo harmônico simples.

Note-se que nos modelos (4) e (12a) se  $A$ ,  $\phi$ ,  $A_j$  e  $\phi_j$  são constantes fixas, o processo  $X(t)$  não é estacionário pois  $E[X(t)]$  varia com o tempo. Para aplicar a teoria dos processos estacionários supõe-se que  $A$  e  $A_j$  são variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero ou, de maneira equivalente, que  $\phi$  e  $\phi_j$  são variáveis aleatórias com distribuição uniforme em  $[0, 2\pi]$ , que são fixas para uma única realização do processo. Da mesma forma, para o processo em (12b) ser estacionário deve-se considerar os  $\alpha_j$  e  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero.

Entretanto, pode-se perguntar: por que deve haver somente um número finito  $k$  de frequências envolvidas no modelo para  $X(t)$ ?

Na realidade, um modelo para série temporal estacionária estabelece que ela é composta da soma de infinitas séries periódicas mais uma média.

Assim, pode-se generalizar os modelos em (12) fazendo  $k \rightarrow \infty$  para se obter,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(\omega_j t - \phi_j), t = 1, 2, \dots \quad (13a)$$

com,

$$0 < \omega_j < 2\pi, \text{ ou}$$

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos \omega_j t + \beta_j \sin \omega_j t), t = 1, 2, \dots \quad (13b)$$

Como antes,

$$A_j^2 = \alpha_j^2 + \beta_j^2$$

e,

$$\phi_j = \arctan \frac{\beta_j}{\alpha_j}, j = 1, 2, \dots \quad (14b)$$

Teoricamente pode-se mostrar que qualquer série temporal estacionária pode ser aproximada por uma série infinita de curvas senos e cossenos.

### 2.3. SÉRIE DE FOURIER E A FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO

Considere-se que a série é representada pelo modelo das equações (13). Cada componente é uma função periódica e cada uma pode ser identificada com sua frequência angular  $\omega_j$ . Isto é, uma série temporal observada terá comprimento finito e não se pode estimar, a partir dela, o número infinito de parâmetros das equações (13).

Dados  $T$  observações da série,  $[x(1), x(2), \dots, x(T)]$ , pode-se estimar, no máximo  $T$  parâmetros para, digamos, a equação (13a).

Entretanto, antes de formular o modelo com um número finito de componentes, é preciso mencionar dois pontos:

1) Com unidade de tempo constante, por exemplo, mês, com exceção da média, que tem período infinito, a maior curva senóide periódica (a mais lenta) que pode ser observada é aquela com um período de  $T$  meses, ou de frequência angular  $2\pi/T$ . Isto ocorre porque esta onda pode repetir-se somente uma vez em  $T$  observações se ela tem período  $T$ .

A menor curva senóide periódica (a mais veloz) que pode ser observada é aquela com um período de dois meses, desde que é necessário pelo menos dois meses para uma curva senóide completar um ciclo. Assim, a curva mais veloz que pode ser observada tem frequência angular  $2\pi/2 = \pi$  radianos por mês. Esta frequência é a mais alta e é denominada *frequência Nyquist*.

Estas curvas estão representadas na Figura 2.2.

2) Suponha que  $T$  é um número par, isto é,  $T = 2n$ . Então, a frequência angular da  $j$ -ésima onda é:

$$w_j = \frac{2\pi j}{T}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Quando,

$j = 1, w_1 = \frac{2\pi}{T}$  que é a onda mais "vagarosa" que pode ser observada;

$j = n, w_n = \frac{2\pi n}{T} = \pi$  que é a onda mais "veloz" que pode ser observada;

$j = 0, w_0 = 0$ , é a onda de frequência zero que representa o valor médio.

Desde que  $\text{sen}w_0t=0$  e  $\text{cos}w_0t=1$  o valor médio  $\mu = \alpha_0\text{cos}w_0t = \alpha_0$  fica identificado com a amplitude da onda senóide associada com a frequência angular  $w_0$ .

Tendo em vista o exposto acima, pode-se escrever uma analogia finita das equações (13a) e (13b) como,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^n A_j \text{cos}(w_j t - \phi_j), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (15a)$$

e,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^n (\alpha_j \text{cos}w_j t + \beta_j \text{sen}w_j t), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (15b)$$

onde,

$$n = T/2$$

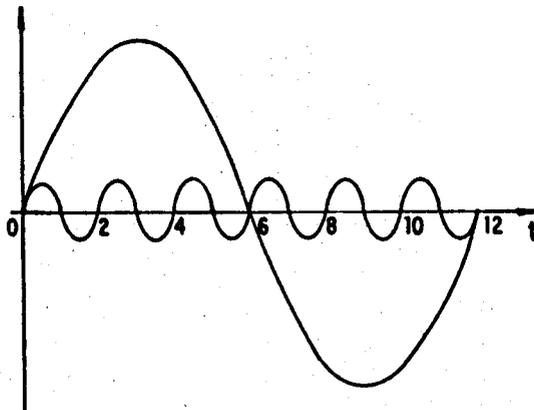


Figura 2.2. Curvas de frequência mais alta (Nyquist) e mais baixa.

Os parâmetros na equação (15a) são  $\mu$ ,  $A_j$  e  $\phi_j$  e na equação (15b) são  $\mu$ ,  $\alpha_j$  e  $\beta_j$ . Esta última parece conter um parâmetro a mais que o número de observa-

ções. Entretanto, é fácil ver que de fato tem-se  $T$  parâmetros em vez de  $T+1$ .

Desde que  $w_n = \pi$ , a  $n$ -ésima componente na equação (15a) é dada por

$$A_n \cos(w_n t - \phi_n) = \alpha_n \cos w_n t + \beta_n \sin w_n t = \alpha_n \cos w_n t$$

pois,  $\sin w_n t = \sin \pi t = 0$ .

Logo,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^{n-1} A_j \cos(w_j t - \phi_j) + \alpha_n \cos w_n t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

ou, ainda,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^n \alpha_j \cos w_j t + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \sin w_j t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

pois,  $\sin w_n t = \sin \pi t = 0$ .

Vê-se, assim, que existem  $T$  parâmetros para serem estimados a partir das  $T$  observações.

Por conveniência inclui-se a onda de frequência zero no somatório. Para isto define-se a fase  $\phi_0 = 0$ , então (15a) pode ser escrita como

$$X(t) = \sum_{j=0}^n A_j \cos(w_j t - \phi_j), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (16a)$$

onde a média  $\mu$  é igual à amplitude  $A_0$ , da onda de frequência zero:  $\mu = A_0$ .  
Correspondente à equação (15b) tem-se,

$$X(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \cos w_j t + \sum_{j=0}^n \beta_j \sin w_j t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (16b)$$

onde, novamente, o valor médio  $\mu = \alpha_0$ .

Lembrando que  $\sin w_n t = 0$ , o último termo da equação (16b) é igual a zero.

As expressões dos estimadores dos parâmetros da equação (16b) podem ser obtidas multiplicando-se ambos os lados desta equação por  $\cos w_j t$  (ou  $\sin w_j t$ ):

$$X(t) \cos w_j t = \sum_{j=0}^n \alpha_j \cos w_j t \cos w_j t + \sum_{j=0}^n \beta_j \sin w_j t \cos w_j t$$

e, somando-se de 1 a  $T$ ,

$$\sum_{t=1}^T X(t) \cos w_j t = \sum_{j=0}^n \alpha_j \sum_{t=1}^T \cos w_j t \cos w_j t +$$

$$+ \sum_{j=0}^n \beta_j \sum_{t=1}^T \text{sen}w_j t \text{cos}w_j t$$

Lembrando as propriedades da ortogonalidade das funções seno e cosseno dadas por:

$$\sum_{t=1}^T \text{sen}w_i t \text{sen}w_j t = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ T/2 & \text{se } i = j \neq 0, n \\ 0 & \text{se } i = j = 0, n \end{cases} \quad (17a)$$

$$\sum_{t=1}^T \text{cos}w_i t \text{cos}w_j t = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ T/2 & \text{se } i = j \neq 0, n \\ T & \text{se } i = j = 0, n \end{cases} \quad (17b)$$

$$\sum_{t=1}^T \text{sen}w_i t \text{cos}w_j t = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (17c)$$

$$\sum_{t=1}^T \text{sen}w_j t = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (17d)$$

$$\sum_{t=1}^T \text{cos}w_j t = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (17e)$$

De (17c) tem-se que,

$$\sum_{t=1}^T X(t) \text{cos}w_j t = \sum_{j=0}^n \alpha_j \sum_{t=1}^T \text{cos}w_j t \text{cos}w_j t$$

e, com (17b), que:

$$\hat{\alpha}_j = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) & \text{para } j = 0 \\ \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \text{cos}w_j t & \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \text{cos}w_j t & \text{para } j = n \end{cases} \quad (18a)$$

Ou, multiplicando-se (16b) por  $\text{sen}w_j t$  e somando-se de 1 a  $T$ , obtém-se:

$$\sum_{t=1}^T X(t) \text{sen} w_j t = \sum_{j=0}^n \alpha_j \sum_{t=1}^T \text{cos} w_j t \text{sen} w_j t +$$

$$+ \sum_{j=0}^n \beta_j \sum_{t=1}^T \text{sen} w_j t \text{sen} w_j t$$

de (17c) vem,

$$\sum_{t=1}^T X(t) \text{sen} w_j t = \sum_{j=0}^n \beta_j \sum_{t=1}^T \text{sen} w_j t \text{sen} w_j t$$

e, com (17a),

$$\hat{\beta}_j = \begin{cases} \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \text{sen} w_j t & \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \text{sen} w_j t = 0 & \text{para } j = 0, n \end{cases} \quad (18b)$$

onde a frequência angular  $w_j = \frac{2\pi j}{T}$ .

Este procedimento não é nada mais do que formar as equações normais de mínimos quadrados. Assim as equações (18) fornecem, realmente, as estimativas de mínimos quadrados de um problema de regressão. Seja, então,

$$X = Z\Theta + \epsilon$$

onde,

$$X = (X(1), \dots, X(T))'$$

$$\Theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \alpha_n)'$$

e

$$Z = \begin{bmatrix} 1 \text{cos} w_1 & \text{sen} w_1 & \text{cos} w_2 & \text{sen} w_2 & \dots & \text{cos} w_{n-1} & \text{sen} w_{n-1} & 1 \\ 1 \text{cos} w_{1,2} & \text{sen} w_{1,2} & \text{cos} w_{2,2} & \text{sen} w_{2,2} & \dots & \text{cos} w_{n-1,2} & \text{sen} w_{n-1,2} & -1 \\ 1 \text{cos} w_{1,3} & \text{sen} w_{1,3} & \text{cos} w_{2,3} & \text{sen} w_{2,3} & \dots & \text{cos} w_{n-1,3} & \text{sen} w_{n-1,3} & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 \text{cos} w_1(T-1) & \text{sen} w_1(T-1) & \text{cos} w_2(T-1) & \text{sen} w_2(T-1) & \dots & \text{cos} w_{n-1}(T-1) & \text{sen} w_{n-1}(T-1) & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & (-1)^{n-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{com, } w_j = \frac{2\pi j}{T} \quad j = 1, \dots, n-1$$

Os estimadores de mínimos quadrados para  $A_j$  e  $\phi_j$  podem ser obtidos diretamente do relacionamento das equações (14).

Assim,

$$\hat{A}_j = \sqrt{\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2} \quad (19a)$$

$$\hat{\phi}_j = \arctan \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\alpha}_j} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (19b)$$

Nas equações (18) e (19) observa-se que:

1 - Quando  $j = 0$ ,  $\hat{\alpha}_0 = \bar{X}$

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t), \quad \hat{\beta}_0 = 0$$

pois  $\cos w_0 t = 1$  e  $\sin w_0 t = 0$ .

Portanto, os estimadores de mínimos quadrados da amplitude e da fase da onda de frequência zero são:

$$\hat{A}_0 = \hat{\alpha}_0 \text{ e } \hat{\phi}_0 = 0$$

2 - Quando  $j = n$ , tem-se:

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (-1)^{t-1} X(t) \quad \hat{\beta}_n = 0$$

pois  $\cos w_n t = (-1)^{t-1}$  e  $\sin w_n t = 0$

E os estimadores de mínimos quadrados da amplitude e da fase da  $n$ -ésima onda de frequência são:

$$\hat{A}_n = \hat{\alpha}_n \text{ e } \hat{\phi}_n = 0$$

Removendo-se a média  $\mu$  do lado esquerdo de (16b) obtém-se:

$$X(t) - \mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cos w_j t + \sum_{j=1}^n \beta_j \sin w_j t \quad (20)$$

onde, agora, os estimadores passam a ter as seguintes expressões:

$$\hat{\alpha}_j = \begin{cases} \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (X(t) - \bar{X}) \cos w_j t & , j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X(t) - \bar{X}) \cos w_j t & , j = n \end{cases} \quad (21a)$$

$$\hat{\beta}_j = \begin{cases} \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (X(t) - \bar{X}) \sin w_j t & , j = 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 & , j = n \end{cases} \quad (21b)$$

### Análise de Variância

Usando-se as relações de ortogonalidade mostra-se que:

$$SD^2 = \sum_{t=1}^T \frac{(X(t) - \bar{X})^2}{T} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \hat{A}_j^2 + \hat{A}_n^2 \quad (22)$$

que é frequentemente conhecido como teorema de Parseval.

De fato,

$$X(t) - \bar{X} = \sum_{j=1}^n (\hat{\alpha}_j \cos w_j t - \hat{\beta}_j \sin w_j t)$$

Assim,

$$\begin{aligned} (X(t) - \bar{X})^2 &= \left\{ \sum_{i=1}^n (\hat{\alpha}_i \cos w_i t + \hat{\beta}_i \sin w_i t) \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j \cos w_j t + \hat{\beta}_j \sin w_j t \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \cos w_i t \cos w_j t + \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j \cos w_i t \sin w_j t + \\ &\quad + \hat{\beta}_i \hat{\alpha}_j \sin w_i t \cos w_j t + \hat{\beta}_i \hat{\beta}_j \sin w_i t \sin w_j t) \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{t=1}^T (X(t) - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \sum_{t=1}^T \cos w_i t \cos w_j t + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j \sum_{t=1}^T \cos w_i t \sin w_j t + \hat{\beta}_i \hat{\alpha}_j \sum_{t=1}^T \sin w_i t \cos w_j t + \\
 & + \hat{\beta}_i \hat{\beta}_j \sum_{t=1}^T \sin w_i t \sin w_j t \quad \left. \vphantom{\sum_{t=1}^T} \right] \quad (23)
 \end{aligned}$$

Logo, usando (17c), a segunda e a terceira parcelas em (23) desaparecem e como para  $i \neq j$  as outras parcelas se anulam resta para  $i = j = n$ . Vê-se, usando-se (17a), que a quarta parcela é nula e usando-se (17b), que a primeira parcela será  $T \hat{\alpha}_n^2$ . Para  $i = j \neq n$ , usando-se (17a) e (17b) tem-se que a primeira mais a

$$\text{quarta parcela é } \frac{T}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2).$$

Portanto,

$$\sum_{t=1}^T \frac{(X(t) - \bar{X})^2}{T} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2) + \hat{\alpha}_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \hat{A}_j^2 + \hat{A}_n^2$$

Agora, pelo fato que  $\hat{A}_0 = \bar{X} = \hat{\alpha}_0$  pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^T \frac{X^2(t)}{T} &= \hat{\alpha}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2) + \hat{\alpha}_n^2 = \\
 &= \hat{A}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \hat{A}_j^2 + \hat{A}_n^2.
 \end{aligned}$$

Aqui, a quantidade  $\sum_{t=1}^T X^2(t)/T$  é denominada *potência média* e as quanti-

dades  $\hat{A}_j^2/2$ ,  $\hat{A}_0^2$  e  $\hat{A}_n^2$  são denominadas *estimadores da potência média* na frequência angular correspondente.

Verificou-se, assim, que a variância total da série pode ser decomposta em uma combinação linear dos quadrados das amplitudes de cada componente periódica. Portanto, a análise de Fourier fornece nada mais do que uma análise de variância da série temporal amostral.

Na realidade, tem-se o modelo II da análise de variância, associado ao modelo linear,

$$X(t) = \sum_{j=1}^n (\alpha_j \cos w_j t + \beta_j \sin w_j t) + \epsilon_t$$

onde  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  são variáveis aleatórias.

É claro que deveria existir alguma relação entre as amplitudes das séries periódicas das quais  $X(t)$  é composta e a variância de  $X(t)$ , desde que quanto maior a amplitude das séries que compõe  $X(t)$ , maior será a flutuação de  $X(t)$ .

Nas ciências físicas as palavras *potência* e *variância* são usadas com o mesmo significado.

### Espectro de Linha

É o gráfico de  $\frac{1}{2} \hat{A}_j^2$ ,  $\hat{A}_n^2$  e  $\hat{A}_0^2$  contra a frequência  $f_j$ ,  $f_j = \frac{w_j}{2\pi}$

A figura 2.3 mostra o espectro de linha para uma série artificial  $X(t)$  e fornece uma análise visual da variância da série. Portanto, vê-se que a potência média da série  $X(t)$  pode ser explicada por quatro curvas senóides localizadas nas frequências 0,05; 0,10; 0,25 e 0,50.

Outros nomes também são utilizados, a saber *Periodograma*, para o gráfico de  $\hat{A}_j^2$  contra  $p_j$  (período); *Espectograma*, para o gráfico de  $\hat{A}_j^2$  contra  $f_j$  (frequência).

Box e Jenkins chamam de periodograma o gráfico de  $T\hat{A}_j^2/2$  contra  $f_j$  e  $T\hat{A}_j^2/2$  de intensidade.

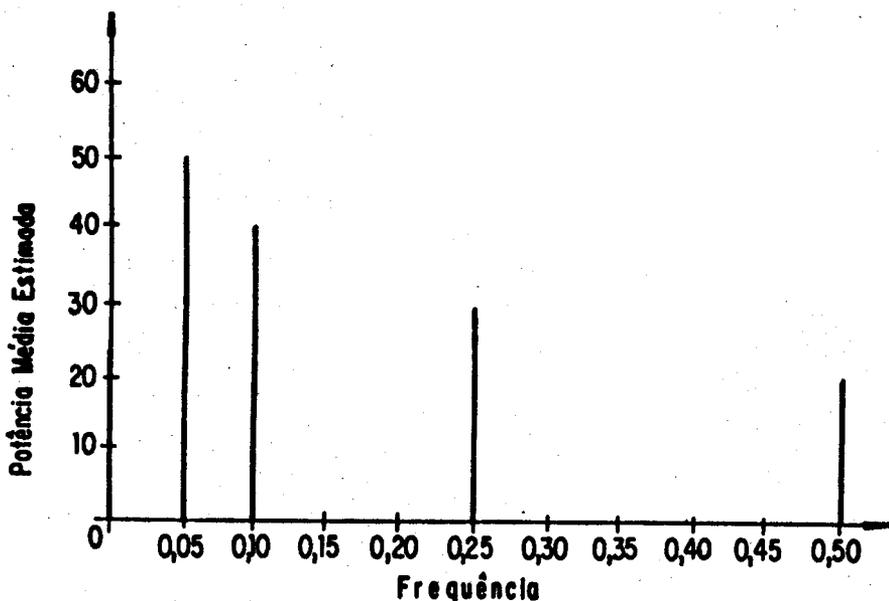


Figura 2.3. Espectro de linha.

## Função de Autocorrelação

A função de autocovariância, para uma série temporal estacionária com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , é definida como

$$\gamma(k) = E \left[ (X(t) - \mu)(X(t+k) - \mu) \right] \quad (25)$$

onde  $k = 0, 1, 2, \dots$  e  $\gamma(k)$  é função somente do atraso  $k$ .

Desde que a variância  $\sigma^2$  de  $X(t)$  é igual a  $\gamma(0)$ , a função de autocorrelação é dada por

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Usualmente, a correlação entre  $X(t)$  e  $X(t+k)$  é definida por

$$\rho(k) = \frac{\text{cov}[X(t), X(t+k)]}{\sqrt{\text{var}[X(t)]\text{var}[X(t+k)]}} \quad (27)$$

Como a série é estacionária, vem:

$$\text{var} [X(t)] = \text{var} [X(t+k)] = \gamma(0)$$

e, desde que,

$$\text{cov} [X(t), X(t+k)] = \gamma(k),$$

vê-se que (26) e (27) são iguais.

A função de autocovariância para a amostra é definida por,

$$c(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \bar{X}] [X(t+k) - \bar{X}] \quad (28)$$

Nota-se que quando  $k = 0$ ,  $c(0) = SD^2$ .

Para  $T$  observações de uma série temporal, só é possível calcular  $T-1$  coeficientes de autocorrelação. O divisor  $T$  é usado porque fornece uma estimativa, apesar de tendenciosa, mas com erro médio quadrado menor do que quando se divide por  $T-k$ . Além disso,  $c(k)$  na equação (28) é uma função semi-definida positiva e conveniente na relação para o teorema de Parseval.

Mostra-se que  $c(k)$ , dada pela equação (28), é um estimador assintoticamente não tendencioso de  $\gamma(k)$  da equação (25).

De fato, ignorando os efeitos de estimação da média  $\mu$ , tem-se:

$$\begin{aligned} E [c(k)] &= E \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \mu] [X(t+k) - \mu] \right\} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} E [X(t) - \mu] [X(t+k) - \mu] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} \gamma(k) = \left(1 - \frac{k}{T}\right) \gamma(k). \quad (29)$$

Portanto,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E [c(k)] = \gamma(k).$$

Agora, considerando o efeito de estimar  $\mu$  por

$\bar{X} = \sum_{t=1}^T X(t)/T$  a tendência do estimador  $c(k)$  pode ser avaliada ao escrever

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \mu][X(t+k) - \mu] = \\ &= \sum_{t=1}^{T-k} \left\{ [X(t) - \bar{X}] + [\bar{X} - \mu] \right\} \left\{ [X(t+k) - \bar{X}] + [\bar{X} - \mu] \right\} \\ &= \sum_{t=1}^{T-k} \left\{ [X(t) - \bar{X}][X(t+k) - \bar{X}] \right\} + (T-k) (\bar{X} - \mu)^2 \end{aligned}$$

Ignorando-se os efeitos finais, isto é, supondo-se que

$$\sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \bar{X}] \sim \sum_{t=1}^T [X(t) - \bar{X}] = 0$$

Agora, dividindo por  $T$  e usando (29) tem-se

$$E [c(k)] = \left(1 - \frac{k}{T}\right) \gamma(k) - \frac{(T-k)}{T} \text{var} [\bar{X}]$$

mas,

$$\text{var} [\bar{X}] \sim \left( \frac{2\pi\sigma^2}{T} \right) p(0)$$

$$\text{com, } p(0) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k).$$

Portanto,

$$E [c(k)] = \gamma(k) - \frac{k}{T} \gamma(k) - \frac{2\pi\sigma^2(T-k)}{T^2} p(0). \quad (30)$$

Assim, quando  $T \rightarrow \infty$

$$E \left[ c(k) \right] \rightarrow \gamma(k).$$

A função de autocorrelação amostral é definida por:

$$r(k) = \frac{c(k)}{c(0)}.$$

O gráfico de  $r(k)$  contra o atraso  $k$  é denominado função de autocorrelação da amostra ou correlograma.

### Relação entre o Espectro de Linha e a Função de Autocorrelação Amostral

Mostra-se que o espectro de linha está diretamente relacionado à função de autocorrelação.

Considere a seguinte expressão para a potência média da  $j$ -ésima onda de frequência:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{A}_j^2 &= \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T [X(t) - \bar{X}] \cos w_j t \right\}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T [X(t) - \bar{X}] \sin w_j t \right\}^2 \end{aligned} \quad (32)$$

para  $j = 1, 2, \dots, n-1$ .

A expressão (32) segue das equações (21) e (14a).

A potência média da  $n$ -ésima onda pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \hat{A}_n^2 &= (\hat{\alpha}_n^2 + \hat{\beta}_n^2) = \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [X(t) - \bar{X}] \cos w_n t \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [X(t) - \bar{X}] \sin w_n t \right\}^2 \end{aligned} \quad (33)$$

lembrando que  $\hat{\beta}_n = 0$  e  $\sin w_n t = 0$ .

Fazendo uso da identidade:

$$\left[ \sum_{t=1}^T X(t) \right]^2 = \sum_{t=1}^T X^2(t) + 2 \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{t=1}^{T-k} X(t) X(t+k)$$

pode-se escrever a expressão (32) como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{A}_j^2 &= \frac{2}{T^2} \left\{ \sum_{t=1}^T [X(t) - \bar{X}]^2 \cos^2 w_j t + \right. \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \bar{X}] [X(t+k) - \bar{X}] \cos w_j t \cos w_j (t+k) \\ &+ \frac{2}{T^2} \left[ \sum_{t=1}^T [X(t) - \bar{X}]^2 \sin^2 w_j t + \right. \\ &\left. \left. + 2 \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \bar{X}] [X(t+k) - \bar{X}] \sin w_j t \sin w_j (t+k) \right] \right\} \end{aligned}$$

Lembrando que  $\cos^2 w_j t + \sin^2 w_j t = 1$  e que  $\cos w_j t \cos w_j (t+k) + \sin w_j t \sin w_j (t+k) = \cos w_j k$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{A}_j^2 &= \frac{2}{T^2} \left\{ \sum_{t=1}^T [X(t) - \bar{X}]^2 + \right. \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \bar{X}] [X(t+k) - \bar{X}] \cos w_j k \left. \right\} \end{aligned}$$

Agora, usando-se a equação (28) tem-se a expressão final:

$$\frac{1}{2} \hat{A}_j^2 = \frac{2}{T} [c(0) + 2 \sum_{k=1}^{T-1} c(k) \cos w_j k] \quad (34)$$

para,  $j = 1, 2, \dots, n-1$ .

Analogamente, a potência média para a  $n$ -ésima onda é dada por:

$$\hat{A}_n^2 = \frac{1}{T} [c(0) + 2 \sum_{k=1}^{T-1} c(k) \cos w_n k] \quad (35)$$

Lembrando que :

$$e^{iw_j k} = \cos w_j k + i \operatorname{sen} w_j k,$$

$$\cos w_j k = \frac{e^{iw_j k} + e^{-iw_j k}}{2}$$

$$\operatorname{sen} w_j k = \frac{e^{iw_j k} - e^{-iw_j k}}{2}$$

e usando o fato que  $c(k) = c(-k)$  tem-se que

$$\begin{aligned} c(0) + 2 \sum_{k=1}^{T-1} c(k) \cos w_j k &= c(0) + \sum_{k=1}^{T-1} c(k) \left[ e^{iw_j k} + \right. \\ &\left. + e^{-iw_j k} \right] = c(0) + \sum_{k=1}^{T-1} c(k) e^{iw_j k} + \sum_{k=1}^{T-1} c(k) e^{-iw_j k} \end{aligned}$$

Fazendo  $k = -m$  na segunda parcela tem-se,

$$\sum_{m=-1}^{-(T-1)} c(-m) e^{-iw_j m} = \sum_{m=-(T-1)}^{-1} c(m) e^{-iw_j m}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{A}_j^2 &= \frac{2}{T} \left[ c(0) + \sum_{k=-(T-1)}^{-1} c(k) e^{-iw_j k} + \sum_{k=1}^{T-1} c(k) e^{-iw_j k} \right] \\ &= \frac{2}{T} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} c(k) e^{-iw_j k} \end{aligned} \quad (36)$$

para  $j = 1, 2, \dots, n-1$

e,

$$\hat{A}_n^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} c(k) e^{-iw_n k} \quad (37)$$

Isto é, o espectro de linha é a transformada de Fourier das autocovariâncias amostrais. Assim o conhecimento de um equivale a conhecer o outro.

Nota-se pela equação (22) que a soma dos coeficientes  $\hat{A}_j^2/2$  e  $\hat{A}_n^2$  é igual a variância amostral da série. Assim a *potência média relativa* em cada frequência é dada por  $\hat{A}_j^2/2c(0)$  e  $\hat{A}_n^2/c(0)$ . Tem-se então as relações:

$$\frac{\hat{A}_j^2}{2c(0)} = \frac{2}{T} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} r(k)e^{-iw_j k}, \quad j=1, 2, \dots, n-1 \quad (38a)$$

e,

$$\frac{\hat{A}_n^2}{c(0)} = \frac{1}{T} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} r(k)e^{-iw_n k}, \quad j = n. \quad (38b)$$

Vê-se, assim, que a representação no domínio do tempo de uma série temporal pelo uso da função de autocorrelação é equivalente, em termos de informação, a representação no domínio da frequência através do espectro de linha.

#### 2.4. REPRESENTAÇÃO ESPECTRAL DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONÁRIOS

Considerou-se até agora que a potência está concentrada em frequências angulares distintas  $w_j, j = 0, 1, 2, \dots$ . Também notou-se que, com um número finito de observações pode-se estimar a potência somente em um número finito de frequências angulares.

O modelo para a série temporal foi expresso por:

$$X(t) = \sum_{j=0}^n (\alpha_j \cos w_j t + \beta_j \sin w_j t) \quad (39)$$

Entretanto, é razoável supor que possam existir curvas periódicas cuja frequência está entre  $w_j$  e  $w_{j+1}$ , isto é, que a frequência angular varie no domínio  $[0, \pi]$ .

Sabe-se que a série de Fourier é uma ferramenta poderosa para tratar problemas envolvendo funções periódicas. Entretanto, problemas de processos estocásticos estacionários não envolvem funções exatamente periódicas, exceto no caso particular do processo harmônico. Além disso, tem-se observações da função num período finito de tempo. É necessário então desenvolver um método de análise que inclua estes processos não periódicos.

Fazendo uso do resultado fundamental da análise de Fourier, o qual diz: sobre um intervalo  $(0; T)$  uma função analítica pode ser aproximada, com qualquer grau de precisão, por uma combinação linear de senos e cossenos. Quando o intervalo  $T$  cresce, a aproximação pode ser melhorada aumentando  $n$ , o número de componentes senoidais e reduzindo as diferenças  $(w_{j+1} - w_j)$  na expressão (39).

Por um procedimento de limite apropriado mostra-se que a série  $X(t)$ ,  $t = 1, \dots, T$  tem a representação espectral resultante:

$$X(t) = \int_0^{\infty} (\alpha(w)\cos wtdw + \beta(w)\sen wtdw) \quad (40)$$

Esta também é denominada representação de Cramér.

As funções  $\alpha(w)$  e  $\beta(w)$  são estocásticas com propriedades análogas àquelas de  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  na representação discreta.

Para processos de parâmetro contínuo os limites de integração seriam de  $0$  a  $+\infty$ , mas, para processos discretos medidos em intervalos unitários de tempo, não existe perda de generalidades em restringir  $w$  ao domínio  $[0, \pi]$ , desde que

$$\cos(wt+k\pi) = \begin{cases} \cos wt, & k \text{ e } t \text{ inteiros, } k \text{ par.} \\ \cos w(t-k), & k \text{ e } t \text{ inteiros, } k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Assim, variações em frequências maiores do que  $\pi$  não podem ser diferenciadas de variações nas frequências correspondentes em  $[0, \pi]$ .

Portanto, a razão principal da introdução da representação espectral na equação (40) é mostrar que toda frequência no domínio  $[0, \pi]$  pode contribuir para a variação do processo.

Também pode-se dizer que a representação na equação (40) é o resultado de uma extensão do procedimento para processos periódicos, por exemplo de período  $p$ , para processos não periódicos ao se fazer  $p \rightarrow \infty$  e reduzindo as diferenças  $(w_{j+1} - w_j)$ .

A Figura 2.4. ilustra o que ocorre no processo limite, isto é, ao fazer  $p \rightarrow \infty$

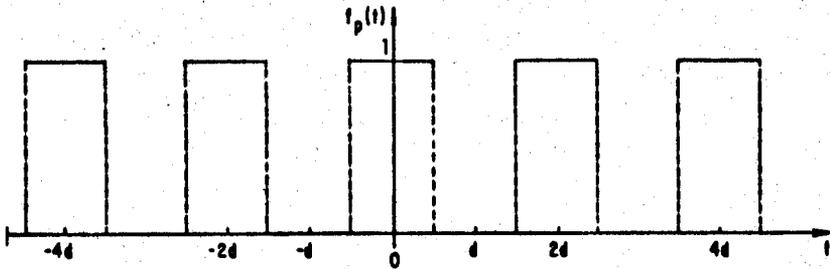
$$f_p(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{p}{2} < t < -\frac{1}{2}d \\ 1, & -\frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}d \\ 0, & \frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}p \end{cases}$$

e,  $f(t+p) = f(t)$ ,  $p > d$

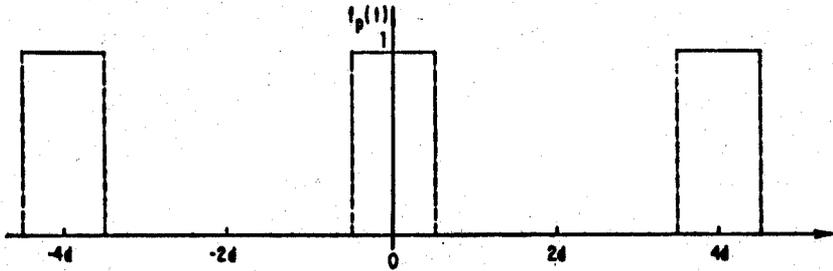
Para  $p \rightarrow \infty$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para  $p = 2d$ :



Para  $p = 4d$ :



Para  $p \rightarrow \infty$ :

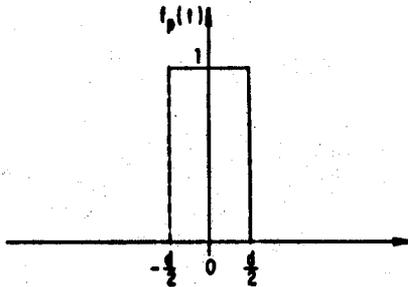


Figura 2.4. Gráfico da função  $f_p(t)$

## 2.5. ESTIMAÇÃO ESPECTRAL

Uma maneira de estimar as potências para o domínio contínuo de frequências angulares em  $[0, \pi]$  é transformar o espectro de linha em um histograma, isto é, distribuir a potência sobre uma "banda" em torno das respectivas frequências.

Para o espectro de linha expresso como função de frequência angular a distância entre duas estimativas quaisquer é  $2\pi/T$ . Assim, ao se dividir cada ordenada da potência por  $2\pi/T$ , transforma-se cada ordenada em uma barra de um histograma, tal que área sobre cada barra é a potência, antes expressa como altura. A Figura 2.5 ilustra este caso.

Agora cada barra do histograma é uma estimativa da potência correspondente às frequências nas bandas entre  $w_j - (\pi/T)$  e  $w_j + (\pi/T)$ .

Dividindo-se ambos os lados da equação (38) por  $2\pi/T$ , tem-se uma nova estimativa da potência média relativa como uma função da frequência angular, dada por

$$\hat{p}(w_j) = \frac{1}{\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{T-1} r(k) \cos w_j k \right] \quad (41)$$

para  $j = 1, 2, \dots, n-1$

Para  $j = n$  esta expressão deveria ser dividida por 2 mas isto, em geral, não é feito na prática.

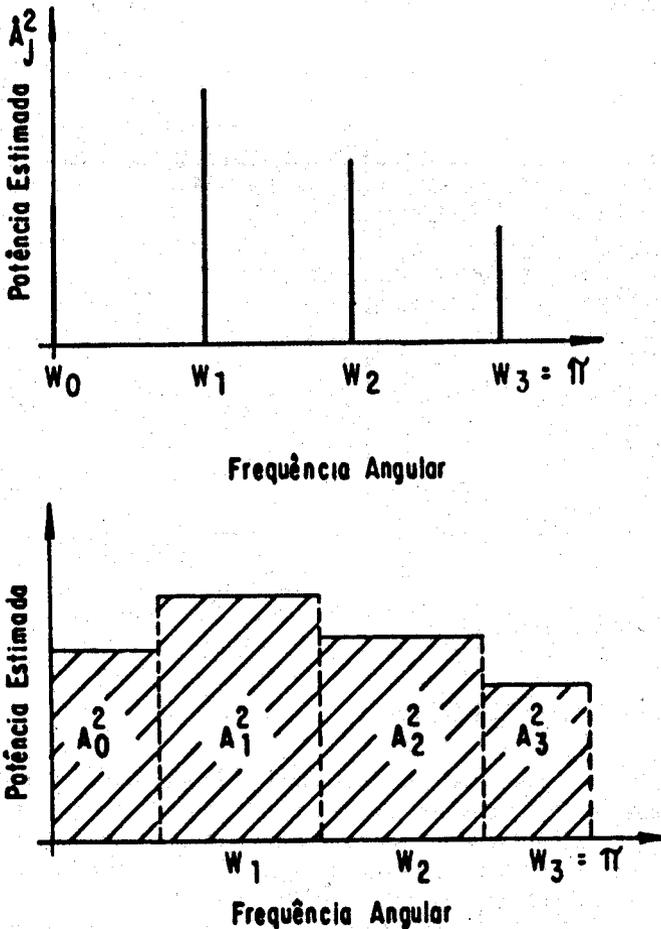


Figura 2.5. (a) Espectro de linha  
(b) Histograma

De maneira similar, a distância entre duas ordenadas expressa em termos da frequência é  $1/T$ . Logo, ao se dividir a potência dada pela equação (38) por  $1/T$  e lembrando que  $w_j = 2\pi f_j$  tem-se,

$$\hat{p}(f_j) = 2 \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{T-1} r(k) \cos(2\pi f_j k) \right] \quad (42)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Finalmente, usando-se a série original,  $x(t)$ , em lugar da série  $x(t) - \bar{x}$ , existirá uma estimativa na frequência zero. Sendo os estimadores da potência para as frequências no domínio  $[0, \pi]$  ou  $[0, 1/2]$ , funções contínuas.

As funções  $\hat{p}(w_j)$  e  $\hat{p}(f_j)$  são chamadas *densidade espectral amostral*.  $\hat{p}(w_j)$  é mais usado em trabalhos teóricos.

Analogamente pode-se obter, repetindo o procedimento acima:

$$\hat{p}'(w_j) = \frac{1}{\pi} [c(0) + 2 \sum_{k=1}^{T-1} c(k) \cos w_j k] \quad (43)$$

e,

$$\hat{p}'(f_j) = 2 [c(0) + 2 \sum_{k=1}^{T-1} c(k) \cos(2\pi f_j k)]$$

para  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Denomina-se  $\hat{p}'(w_j)$  e  $\hat{p}'(f_j)$  de espectro amostral.

A equação (43) está estreitamente relacionada ao periodograma de Schuster, nas frequências  $w_j, j = 1, 2, \dots, n$  dado por

$$I(w_j) = \frac{1}{T\pi} \left[ \left( \sum_{t=1}^T X(t) \cos w_j t \right)^2 + \left( \sum_{t=1}^T X(t) \sin w_j t \right)^2 \right] \quad (45)$$

De fato,

$$\hat{p}'(w_j) = \left( \frac{T}{2\pi} \right) \left( \frac{1}{2} \hat{A}_j^2 \right) = I(w_j)$$

onde,  $\frac{1}{2} \hat{A}_j^2$  é dado pela equação (34).

Pela equação (19a),  $\hat{A}_j^2 = \hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2$

onde,

$$\hat{\alpha}_j^2 = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \cos w_j t$$

e,

$$\hat{\beta}_j^2 = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \sin w_j t$$

para,  $j = 1, 2, \dots, n-1$

Logo,

$$\begin{aligned} \hat{p}'(w_j) &= \frac{T}{4\pi} \left[ \left( \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \cos w_j t \right)^2 + \left( \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \sin w_j t \right)^2 \right] \\ &= \frac{T}{4\pi} \left( \frac{2}{T} \right)^2 \left[ \left( \sum_{t=1}^T X(t) \cos w_j t \right)^2 + \left( \sum_{t=1}^T X(t) \sin w_j t \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{T\pi} \left[ \left( \sum_{t=1}^T X(t) \cos w_j t \right)^2 + \left( \sum_{t=1}^T X(t) \sin w_j t \right)^2 \right] \\ &= I(w_j) \end{aligned} \tag{46}$$

Lembrando que se  $Z = a + ib$  então  $|Z|^2 = a^2 + b^2$ , tem-se:

$$I(w_j) = \frac{1}{T\pi} \left[ \sum_{t=1}^T X(t) e^{-iw_j t} \right]^2 \tag{47}$$

e lembrando ainda que  $|Z|^2 = \bar{Z} Z$ , tem-se:

$$I(w_j) = \frac{1}{T\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T X(t) e^{-iw_j t} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T X(t) e^{iw_j t} \right] \tag{48}$$

Logo,

$$\hat{p}(w_j) = \left[ \frac{1}{\sqrt{T\pi}} \sum_{t=1}^T X(t) e^{-iw_j t} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{T\pi}} \sum_{t=1}^T X(t) e^{iw_j t} \right] \tag{49}$$

onde,

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T X(t)e^{-iwt}, \quad 0 \leq w \leq \pi \quad (50)$$

é definida como a transformada de Fourier finita das observações  $X(t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ .

## 2.6. ESPECTRO DE POTÊNCIA E FUNÇÃO DE DENSIDADE ESPECTRAL

Para um processo discreto, as funções  $\hat{p}(w)$  e  $\hat{p}(f)$  são contínuas no domínio de frequências  $[0, \pi]$  e  $[0, 1/2]$  respectivamente. Pode-se supor, então, que  $\hat{p}(w)$  e  $\hat{p}(f)$  são estimadores das funções  $p(w)$  e  $p(f)$  respectivamente, definidas por:

$$p(w) = \frac{1}{\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho(k) \cos wk \right] \quad (51)$$

$$p(f) = 2 \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho(k) \cos(2\pi fk) \right] \quad (52)$$

ou, em termos das autocovariâncias,

$$p'(w) = \frac{1}{\pi} \left[ \gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \cos wk \right] \quad (53)$$

$$p'(f) = 2 \left[ \gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \cos(2\pi fk) \right]. \quad (54)$$

No caso de processo contínuo, em vez de soma infinita tem-se a integral, pois as funções  $\rho(k)$  e  $\gamma(k)$  são definidas para todo  $k$  real, isto é,

$$p(w) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \rho(k) \cos(wk) dk$$

$$p'(w) = 2 \int_0^{\infty} \gamma(k) \cos(wk) dk$$

para  $0 < w < \infty$ .

As funções acima definidas têm as propriedades:

1) Em termos das autocorrelações

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} p(f)df &= 2 \int_0^{1/2} [1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho(k) \cos(2\pi fk)] df \\ &= 2 \left[ \int_0^{1/2} df + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho(k) \int_0^{1/2} \cos(2\pi fk) df \right] \\ &= 2 \left[ \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho(k) \left( \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi k} \cos f df \right) \right] = 1 \end{aligned}$$

2) Em termos das autocovariâncias

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} p'(f)df &= 2 \int_0^{1/2} [\gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \cos(2\pi fk)] df \\ &= \gamma(0) = \text{var} [X(t)] \end{aligned}$$

3) Se,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\rho(k)] < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\gamma(k)] < \infty$$

as funções são contínuas.

Geralmente as funções  $p(w)$  e  $p(f)$ , que são expressas em termos das autocorrelações, são conhecidas como *função de densidade espectral* e, as expressas em termos das autocovariâncias, isto é,  $p'(w)$  e  $p'(f)$  são conhecidas como *espectro de potências ou espectro*.

## 2.7. ESPECTRO DE ALGUNS PROCESSOS ESPECIAIS

Embora alguns dos processos a serem vistos não tenham nenhuma componente determinística de senos e cossenos formalmente pode-se determinar o seu espectro de potência ou sua função de densidade espectral. Isto permite uma outra maneira de identificar estes processos.

1) Processo aleatório puro

$$X(t) = \epsilon(t), \quad t = 1, \dots, T$$

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2 & , k = 0 \\ 0 & , k = 1, 2, \dots, T-1 \end{cases}$$

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}$$

Então,

$$p'(w) = \frac{\sigma^2}{\pi} \text{ e } p(w) = \frac{1}{\pi},$$

veja Figura 2.6.

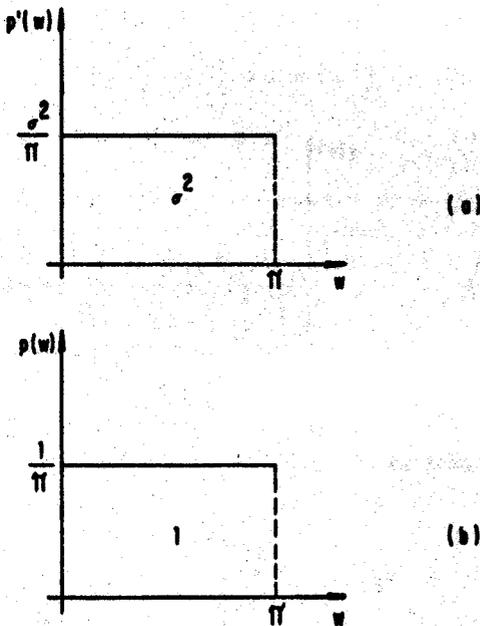


Figura 2.6. Espectro (a) e função de densidade espectral (b) para o processo aleatório puro.

## 2) Processo médias móveis de primeira ordem – $MA(1)$

$$X(t) = \epsilon(t) - \theta\epsilon(t-1)$$

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & , \quad k=0 \\ -\frac{\theta}{1+\theta^2} & , \quad k = \pm 1 \\ 0 & , \quad \text{outros casos} \end{cases}$$

$$p(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[ 1 + 2 \frac{\theta}{1+\theta^2} \cos \omega \right]$$

Logo, para  $\theta > 0$  a potência está concentrada em frequências baixas, e para  $\theta < 0$  a potência está concentrada em frequências altas.

A figura 2.7 ilustra como seria o gráfico de um processo  $MA(1)$  e a figura 2.8 mostra um exemplo da densidade espectral para  $\theta = \pm 1$ .

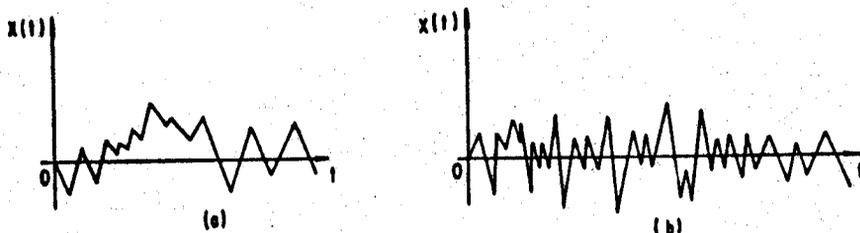


Figura 2.7. Exemplos de processos  $MA(1)$  com (a)  $\theta > 0$ ; (b)  $\theta < 0$ .

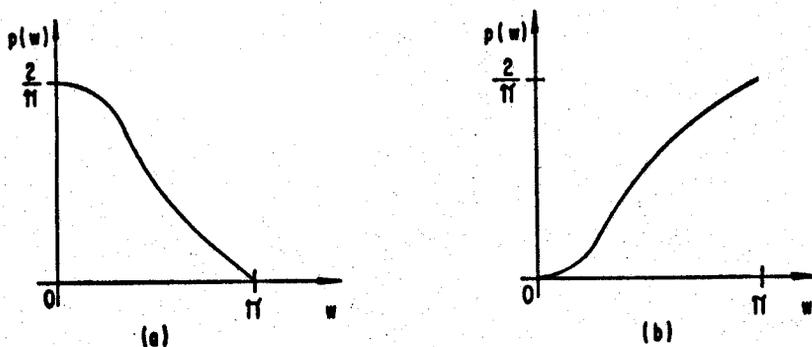


Figura 2.8. Exemplos de densidade espectral de um processo  $MA(1)$  com (a)  $\theta = 1$ ; (b)  $\theta = -1$ .

### 3) Processo autorregressivo de primeira ordem-AR(1)

$$X(t) = \phi X(t-1) + \epsilon(t)$$

$$\gamma(k) = \sigma_x^2 \phi^{|k|} \quad , \quad k=0, \pm 1, \dots, \pm(T-1)$$

$$p'(w) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k e^{-ikw} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k e^{ikw} \right\}$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\phi e^{-iw}}{1 - \phi e^{-iw}} + \frac{\phi e^{iw}}{1 - \phi e^{iw}} \right\} \quad , \quad w \in [0, \pi]$$

Após algumas simplificações algébricas,

$$p'(w) = \sigma_x^2 (1 - \phi^2) / [\pi (1 - 2\phi \cos w + \phi^2)]$$

$$= \sigma_\epsilon^2 / [\pi (1 - 2\phi \cos w + \phi^2)] \quad , \quad w \in [0, \pi]$$

onde,  $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_x^2 (1 - \phi^2)$

A forma do espectro depende do valor de  $\phi$ . Quando  $\phi > 0$  a potência está concentrada em frequências baixas e quando  $\phi < 0$  a potência está concentrada em frequências altas. As formas do espectro na figura 2.9 são intuitivas. Por exemplo, se  $\phi$  é negativo os valores de  $X(t)$  tendem a oscilar, isto é, a um valor positivo de  $X(t)$  seguirá um valor negativo e vice-versa. Estas oscilações rápidas correspondem a variações em frequências altas.

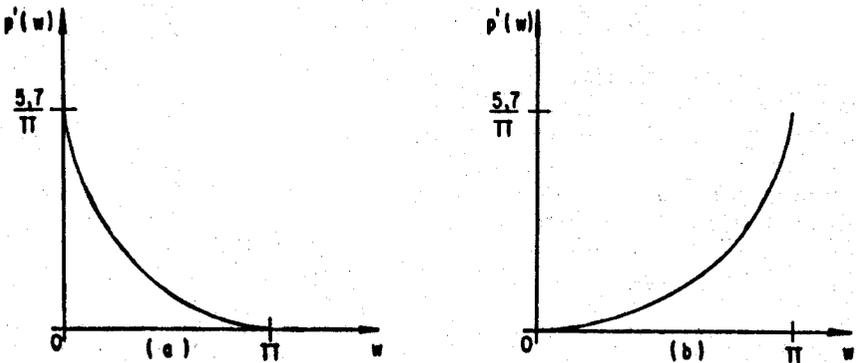


Figura 2.9. Exemplos de espectro do processo autorregressivo AR(1) com (a)  $\phi = 0,7$ ; (b)  $\phi = -0,7$ .

### 4) Processo autorregressivo de segunda ordem-AR(2)

$$X(t) = \phi_1 X(t-1) + \phi_2 X(t-2) + \epsilon(t)$$

$$p'(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1(1-\phi_2)\cos\omega - 2\phi_2\cos 2\omega} \right]$$

$$, \omega \in [0, \pi]$$

A Figura 2.10 mostra o espectro para um processo AR(2) em que  $\phi_1 = 0,7$  e  $\phi_2 = -0,5$ . O pico indica uma tendência para um ciclo na frequência em torno de  $\omega^*$ .

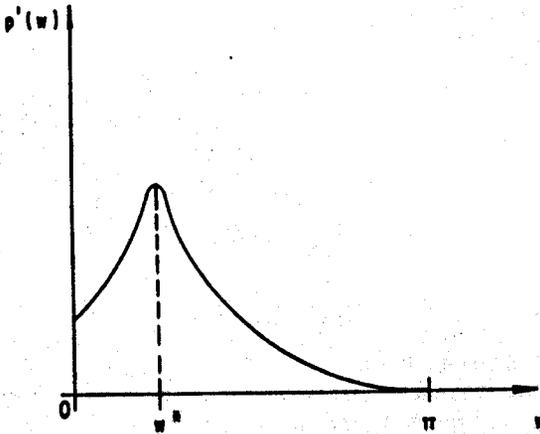


Figura 2.10. Espectros de potência de um processo AR(2) com  $\phi_1 = 0,7$  e  $\phi_2 = -0,5$ .

### 5) Perturbação Determinística Senoidal

$$X(t) = \cos(\omega_* t + \phi) \quad (55)$$

onde  $\omega_*$  é uma constante em  $(0, \pi)$  e  $\phi$  é uma variável aleatória uniformemente distribuída em  $[0, 2\pi]$

Pela equação (55) vê-se que a potência do processo está concentrada na frequência  $\omega_*$ .

Considerando-se  $p'(\omega)$  uma função de densidade e definindo  $P(\omega)$  como a função de distribuição espectral associada, mostra-se que  $P(\omega)$  é uma função escada com salto em  $\omega_*$ , isto é,

$$P(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_* \\ \frac{1}{2}, & \omega \geq \omega_* \end{cases}$$

Ao se tentar escrever  $p'(\omega)$  encontrar-se-ia  $p'(\omega) = 0$  para  $\omega \neq \omega_*$ . Para  $\omega = \omega_*$ ,  $\sum \gamma(k) \cos \omega k$  não converge, pois

$$\gamma(k) \cos \omega k \not\rightarrow 0 \text{ quando } T \rightarrow \infty.$$

6. Considere o processo não determinístico

$$X^*(t) = \cos(w_*t + \phi) + \epsilon(t) = X(t) + \epsilon(t)$$

onde  $X(t)$  foi definido na equação (55) e  $\epsilon(t)$  é o ruído branco.

Supondo que  $E[X^*(t)] = 0$  e que  $X(t)$  e  $\epsilon(t)$  são não correlacionados

$$\gamma_{X^*}(0) = \gamma_X(0) + \gamma_\epsilon(0) = \frac{1}{2} + \sigma^2$$

e, para  $k \neq 0$ ,

$$\gamma_{X^*}(k) = \gamma_X(k) + \gamma_\epsilon(k) = \frac{1}{2} \cos w_*k, k = \pm 1; \pm 2, \dots$$

Agora,

$$P^*(w) = P(w) + P_\epsilon(w)$$

$$P(w) = \begin{cases} 0, & w < w_* \\ \frac{1}{2}, & w \geq w_* \end{cases}$$

e,

$$P_\epsilon(w) = \frac{\sigma^2}{\pi} w \quad \text{para } 0 \leq w \leq \pi.$$

Portanto,

$$P(w) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{\pi} w, & 0 \leq w < w_* \\ \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{\pi} w, & w_* \leq w \leq \pi \end{cases}$$

e  $p'(w)$  não é definida em  $w_*$ .

## 2.8. PROPRIEDADES DO ESPECTRO AMOSTRAL

Considere novamente o modelo para a série  $X(t)$ ,  $t = 1, \dots, T$  dado por,

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^n (\alpha_j \cos w_j t + \beta_j \sin w_j t) \quad (56)$$

com ,  $\beta_n = 0$  pois  $\sin w_n t = 0$

Sabe-se que o modelo na forma da equação (56) está baseado na suposição de que se pode observar tal processo com perfeita precisão. Mas, isto não ocorre na realidade. Então, um modelo mais real é aquele obtido supondo a existência de erros nas observações. Seja o modelo:

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^n (\alpha_j \cos w_j t + \beta_j \sin w_j t) + \epsilon_t. \quad (57)$$

Aqui o processo  $\epsilon_t$  é análogo ao "termo de erro" no modelo de regressão padrão.

Portanto, definindo-se o vetor  $T \times 1$ ,

$$\Theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n)$$

pode-se escrever o modelo em notação de matriz como

$$X = Z\Theta + \epsilon,$$

onde

$$X = [X(1), X(2), \dots, X(T)]$$

com

$$Z_t = [1, \cos w_1 t, \sin w_1 t, \cos w_2 t, \sin w_2 t, \dots, \cos w_n t],$$

para  $t = 1, \dots, T$ .

Dado o vetor de observações  $X = (X(1), \dots, X(T))$  problema de se estimar os parâmetros no modelo (56) foi apresentado na seção 2.3. O estimador de mínimos quadrados ordinários de  $\Theta$  é dado por:

$$\hat{\Theta} = (Z'Z)^{-1}Z'X. \quad (59)$$

Como observado na seção 2.3., os coeficientes de Fourier da série na equação (56) coincidem com as estimativas de mínimos quadrados ordinários.

Agora, considere  $[X(1), \dots, X(T)]$  observações de um processo aleatório puro discreto, independentes e com distribuição  $N(\mu, \sigma^2)$ . As propriedades da densidade espectral amostral são facilmente derivadas quando se usa as propriedades da distribuição dos estimadores dos parâmetros em  $\Theta$ .

Aqui,  $\hat{\Theta}$  tem distribuição normal, pois é combinação linear de variáveis normalmente distribuídas. Mas se  $X$  não tem distribuição normal, sob certas condições de regularidade, o teorema central do limite pode ser aplicado e, então,  $\hat{\Theta}$  é assintoticamente normal.

Do mesmo modo, para os coeficientes de Fourier, os resultados a seguir são exatos ou assintóticos dependendo da distribuição dos erros, isto é, das observações.

1) Os coeficientes de Fourier  $\hat{\alpha}_j$  e  $\hat{\beta}_j$  têm distribuição normal com  $E(\hat{\alpha}_j) = E(\hat{\beta}_j) = 0$ .

De fato, usando (17e),

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}_j) &= E\left[\frac{2}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \cos w_j t\right] = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T E[X(t)] \cos w_j t \\ &= \frac{2}{T} \mu \sum_{t=1}^T \cos w_j t = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

para  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Analogamente, usando (17d),

$$E(\hat{\beta}_j) = 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, n.$$

Os coeficientes têm distribuição normal, pois são combinações lineares de variáveis aleatórias normais.

2) Os coeficientes de Fourier são não correlacionados.

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j) &= \text{cov} \left\{ \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \cos w_j t, \frac{2}{T} \sum_{s=1}^T X(s) \sin w_j s \right\} \\ &= \frac{4}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \text{cov}[X(t), X(s)] \cos w_j t \sin w_j s \end{aligned}$$

Para  $s=t$  e usando (17c),

$$\text{cov}(\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j) = \frac{4}{T^2} \sigma^2 \sum_{t=1}^T \cos w_j t \sin w_j t = 0$$

e, para  $s \neq t$ ,

$$\text{cov}(\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j) = 0 \quad (61)$$

pois,  $\text{cov}[X(t), X(s)] = 0$  desde que  $X(t)$  e  $X(s)$  são variáveis independentes e normalmente distribuídas.

$$3) \text{var}(\hat{\alpha}_j) = \text{var}(\hat{\beta}_j) = \frac{2\sigma^2}{T} \text{ para } j \neq n = \frac{T}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\alpha}_j) &= \text{cov}(\hat{\alpha}_j, \hat{\alpha}_j) = \text{cov} \left\{ \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \cos w_j t, \frac{2}{T} \sum_{s=1}^T X(s) \cos w_j s \right\} \\ &= \frac{4}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \text{cov}[X(t), X(s)] \cos w_j t \cos w_j s. \end{aligned}$$

Para  $s = t$  e usando (17b),

$$\text{var}(\hat{\alpha}_j) = \frac{4}{T^2} \sigma^2 \sum_{t=1}^T \cos^2 w_j t = \frac{4}{T^2} \cdot \frac{T}{2} \sigma^2 = \frac{2\sigma^2}{T} \quad (62)$$

e, para  $s \neq t$ ,  $var(\hat{\alpha}_j) = 0$ .  
 Analogamente,  $var(\hat{\beta}_j) = \frac{2\sigma^2}{T}$

Logo, como  $\hat{\alpha}_j$  e  $\hat{\beta}_j$  são variáveis aleatórias normais e  $cov(\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j) = 0$ , tem-se que  $\hat{\alpha}_j$  e  $\hat{\beta}_j$  são independentes, isto é,

$$\hat{\alpha}_j \sim N(0, 2\sigma^2/T) \Rightarrow \hat{\alpha}_j \sqrt{\frac{T}{2\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$

$$\hat{\beta}_j \sim N(0, 2\sigma^2/T) \Rightarrow \hat{\beta}_j \sqrt{\frac{T}{2\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$

e  $\hat{\alpha}_j$  é independente de  $\hat{\beta}_j$ .

Além disso, se  $Y$  e  $W$  são variáveis aleatórias independentes e  $N(0, 1)$ , então  $Y^2 + W^2$  tem distribuição  $\chi_2^2$

Portanto,

$$\frac{T(\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2)}{2\sigma^2} \sim \chi_2^2$$

das equações (19a) e (41) tem-se:

$$\frac{2\pi_i}{\sigma^2} \hat{p}(w_j) \sim \chi_2^2 \tag{63}$$

Lembrando que  $E(\chi_v^2) = v$  e  $var(\chi_v^2) = 2v$ , tem-se,

$$E[\hat{p}(w_j)] = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot 2 = \frac{\sigma^2}{\pi} = p(w) \tag{64}$$

e

$$var[\hat{p}(w_j)] = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right)^2 \cdot 4 = \left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^2 = p^2(w) \tag{65}$$

Então, para cada  $w_j$ , o espectro amostral é um estimador não tendencioso de  $p(w)$ . Entretanto, sua variância não depende de  $T$  e, assim, não fornece um estimador convergente do espectro de potência em uma dada frequência. Além disso, mostra-se que

$$cov(\hat{p}(w_i), \hat{p}(w_j)) = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Assim, as ordenadas sucessivas do espectro amostral são independentes, o que explica a grande flutuação do mesmo, como na Figura 2.11. Tal forma persiste quando se aumenta o tamanho da amostra.

Intuitivamente a razão para isto é que o espectro de linha corresponde a se usar um intervalo de classe no domínio da frequência, cuja amplitude é muito pequena. Isto é análogo a se usar um intervalo de classe muito pequeno na estimação de uma distribuição de probabilidades, onde o número de classes depende do número de dados.

Analogamente, viu-se que o espectro de linha é a transformada de Fourier da função de autocovariância amostral em cada frequência  $\omega_j, j = 1, \dots, n$ , porém, é evidente que a precisão de  $c(k)$  decresce quando  $k$  cresce, e isto afeta a precisão da estimativa do espectro de potência.

Considere-se, agora, as observações geradas por qualquer processo estocástico estacionário com espectro contínuo.

Mostra-se que a estimativa,  $\hat{p}(\omega)$ , do espectro continua tendo a aparência irregular notada no modelo de ruído branco.

De fato, seja o espectro amostral  $\hat{p}(\omega)$  o estimador do espectro de potência, expresso por:

$$\hat{p}(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} c(k)e^{-i\omega k}, \quad 0 \leq \omega \leq \pi.$$

Mostra-se que  $\hat{p}(\omega)$  é um estimador assintoticamente não tendencioso do espectro. Entretanto, é não convergente no sentido que  $var[\hat{p}(\omega)]$  não tende a zero quando  $T \rightarrow \infty$  e, ainda,  $\hat{p}(\omega)$  tem ordenadas sucessivas assintoticamente não correlacionadas.

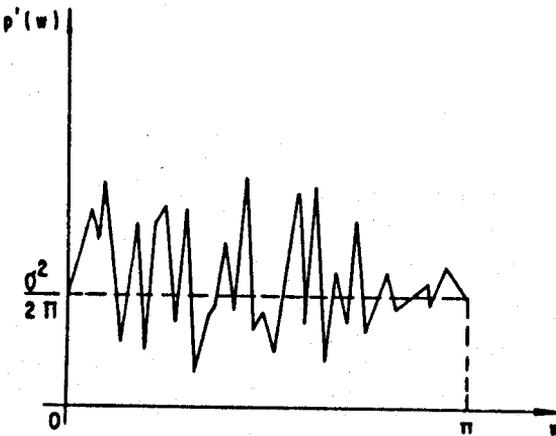


Figura 2.11. Densidade espectral amostral para um processo de ruído branco.

1) Segue da equação (66) e usando (29) que.

$$E(\hat{p}(w)) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} E(c(k)) e^{-iwk}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} \left[1 - \frac{k}{T}\right] \gamma(k) e^{-iwk}.$$

Quando  $T \rightarrow \infty$  o fator  $(1-k/T) \rightarrow 1$  para cada  $k$ , daí

$$E(\hat{p}(w)) \rightarrow p(w).$$

2) Se

$$\sum |k| |\gamma(k)| < \infty,$$

então,  $\hat{p}(w)$  possui distribuição quiquadrado assintótica,,

$$\hat{p}(w) \sim \frac{p(w)}{4} \chi_2^2$$

Assim, a variância assintótica do estimador espectral será

$$\text{var}(\hat{p}(w)) = \frac{p^2(w)}{4}.$$

Portanto não importa quão grande toma-se  $T$ , a variância do estimador permanece ao nível de  $p^2(w)$ . Logo vê-se que o estimador  $\hat{p}(w)$  não é um estimador convergente do espectro de potência  $p(w)$ . É esta inconsistência que força o uso de janelas espectrais ou de médias do espectro amostral.

3) Além disso,

$$\text{cov}(\hat{p}(w_i), \hat{p}(w_j)) = O(T^{-1}), \text{ para } i \neq j.$$

Logo,  $\hat{p}(w)$  não fornece um diagrama suave no domínio  $[0, \pi]$ .

Na seção 2.9 considera-se maneiras alternativas de estimar o espectro, que são essencialmente maneiras de suavizar o espectro amostral.

## 2.9. ALGUNS PROCEDIMENTOS CONSISTENTES DE ESTIMAÇÃO

1) Transformada de Fourier da função de autocovariância truncada

A expressão

$$\hat{p}(w) = \frac{1}{\pi} \left[ c(0) + 2 \sum_{k=1}^{T-1} c(k) \cos w k \right]$$

é a transformada de Fourier da função de autocovariância. Mas, como a precisão de  $c(k)$  decresce quando  $k$  cresce, é razoável atribuir menor peso a estes valo-

res quando  $k$  cresce. O estimador será então:

$$\hat{p}(w) = \frac{1}{\pi} [\lambda_0 c(0) + 2 \sum_{k=1}^M \lambda_k c(k) \cos w k] \quad (67)$$

onde  $\lambda_k$  é um conjunto de pesos chamados janelas de retardo e  $M(<T)$  é chamado ponto de truncamento.

Para usar este estimador deve-se escolher uma janela de atraso e um ponto de truncamento adequado. As janelas mais utilizadas são:

i) Janela de Tukey

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi k}{M} \right], \quad k=0,1,\dots,M.$$

ii) Janela de Parzen

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 - 6 \left[ \frac{k}{M} \right]^2 + 6 \left[ \frac{k}{M} \right]^3, & 0 \leq k \leq \frac{M}{2} \\ 2 \left[ 1 - \frac{k}{M} \right]^3, & \frac{M}{2} < k \leq M. \end{cases}$$

iii) Janela de Bartlett

$$\lambda_k = 1 - \frac{k}{M}, \quad k = 0,1,\dots,M.$$

iv) Janela de Blackman-Tukey (Hanning).

Equivalente ao procedimento de Tukey havendo, porém, um amortecimento com pesos (1/4; 1/2; 1/2). Ou seja, toma-se as transformadas de Fourier das funções  $c(k)$  e  $\lambda_k$  e, em seguida, forma-se as combinações lineares das transformadas. Isto é possível devido a equivalência da multiplicação e convolução sob a transformada de Fourier.

$$\hat{p}^*(\varrho) = \frac{1}{4} \hat{p}(\varrho-1) + \frac{1}{2} \hat{p}(\varrho) + \frac{1}{2} \hat{p}(\varrho+1)$$

onde

$$\hat{p}(-1) = \hat{p}(1)$$

$$\hat{p}(M+1) = \hat{p}(M-1)$$

e

$$\hat{p}(\varrho) = 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{M-1} r_k \cos \frac{k \varrho \pi}{M} \right\}, \quad \varrho = 0, \dots, M$$

v) Janela de Hamming.

Similar ao procedimento anterior mas com pesos (0,23; 0,54; 0,23). Para as frequências  $w=0$  e  $w=\pi$ , os pesos são 0,54 e 0,46.

Alguns comentários sobre as janelas e o ponto de truncamento são feitos a seguir.

i) A janela de Parzen é mais usada pois não produz estimativas negativas.

ii) A janela de Bartlett não é muito usada.

iii) A escolha de  $M$  é muito difícil. Ele deve ser escolhido subjetivamente, de modo a balancear a resolução contra a variância. Quanto menor o  $M$ , menor será a variância de  $\hat{p}(w)$ , mas será maior a tendência.

iv) Em princípio  $\hat{p}(w)$  na equação (67) pode ser calculado para qualquer  $w \in [0, \pi]$ . Entretanto, calcula-se nos pontos  $w = \frac{\pi j}{Q}$ ;  $j = 0, \dots, Q$ , onde  $Q$  é suficientemente grande para dar uma boa visão de  $\hat{p}(w)$ . Em geral,  $Q = M$ .

2) Suavização do espectro amostral

Neste procedimento agrupam-se  $m$  ordenadas do espectro amostral e encontra-se a média,

$$\hat{p}_m(w) = \frac{1}{m} \sum_j \hat{p}(w_j) \tag{68}$$

onde  $w_j = 2\pi j/T$  e "j" varia sobre  $m$  inteiros consecutivos de modo que  $w_j$  seja simétrico em relação a  $w$ .

Para estimar  $p(w)$  em  $w = 0$  e  $w = \pi$  deve-se considerar

$$\hat{p}_m(0) = \left[ 2 \sum_{j=1}^{m^*} \hat{p} \left[ \frac{2\pi j}{T} \right] \right] / m, \quad m^* = \frac{m-1}{2}$$

e

$$\hat{p}_m(w) = \left[ \hat{p}(\pi) + 2 \sum_{j=1}^{m^*} \hat{p} \left( \pi - \frac{2\pi j}{T} \right) \right] / m.$$

Mostra-se que este procedimento é idêntico a usar-se a janela,

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \frac{\text{sen}(m\pi/T)}{m \text{sen}(\pi k/T)} & , k = 1, 2, \dots, T-1. \end{cases}$$

Observações:

i) Desde que as ordenadas adjacentes do espectro amostral são assintoticamente não correlacionadas, a variância de  $\hat{p}(w)$  é de ordem  $1/m$ .

O estimador  $\hat{p}(w)$  pode ser tendencioso, desde que

$$E(\hat{p}(w)) \doteq \frac{1}{m} \sum p(w_j)$$

que é igual ao espectro somente se este é linear no intervalo  $[0, \pi]$ .

Assim, aumentar  $m$ , diminui a variância, mas aumenta a tendenciosidade.

ii) Uma sugestão seria tentar diversos valores de  $m$  em torno de  $T/40$ .

Em geral, o procedimento de suavização do espectro amostral é também denominado média de periodogramas, pois desde que  $\hat{p}(w_j) = I(w_j)$ ,  $\hat{p}_m(w)$  pode ser modificado para

$$\hat{p}_m(w) = \frac{1}{m} \sum_j I(w_j).$$

## 2.10. TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Na seção 2.9 foi considerada a estimação do espectro pela transformada de Fourier da função de autocovariância amostral ponderada.

Calcular o espectro amostral pela equação

$$\hat{p}(w) = \frac{1}{T\tau} \left[ \left( \sum_{t=1}^T X(t)\cos wt \right)^2 + \left( \sum_{t=1}^T X(t)\sen wt \right)^2 \right]$$

em  $w_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, T/2$ , requer cerca de  $T^2/2$  operações aritméticas (cada uma tem uma multiplicação e uma adição), enquanto que na equação (67) menos que  $MT$  operações são exigidas na obtenção de  $c(k)$ . Assim o número total de operações é somente da ordem  $M(T+M)$ , se  $Q = M$ .

Logo, usar média de periodogramas para estimar o espectro requer muito mais tempo de computador que a transformada de Fourier da função de autocovariância amostral truncada.

Entretanto, um fator que tem colaborado para aumentar o uso dos periodogramas suavizados é a descoberta da técnica conhecida como Transformada Rápida de Fourier (TRF), a qual reduz consideravelmente o tempo de computação do periodograma. Esta técnica reduz o tempo de computação dos coeficientes de Fourier da ordem  $T^2$  para a ordem  $T \log_2 T$ .

A idéia básica da TRF pode ser ilustrada no caso em que  $T$  pode ser fatorado na forma  $T = rs$ . Supondo que  $T$  é par, no mínimo um dos fatores, digamos  $r$ , será par.

Os coeficientes de Fourier das equações (18) podem ser escritos como

$$\hat{\alpha}_p + i\hat{\beta}_p = \frac{2}{T} \left[ \sum_{t=1}^T X(t) \exp(2\pi i p t / T) \right] \quad (69)$$

para  $p = 0, 1, 2, \dots, T/2 - 1$ .

É conveniente denotar as observações por  $X(0), X(1), \dots, X(T-1)$ , de modo que a soma em (69) seja de  $t = 0$  a  $(T-1)$ .

Pode-se escrever  $t$  na forma

$$t = r t_1 + t_0$$

onde  $t_1 = 0, 1, \dots, (s-1)$  e

$$t_0 = 0, 1, \dots, (r-1)$$

desde que  $t$  vai de  $0$  a  $(T-1)$  e pelo fato que  $T = rs$ .

Da mesma maneira pode-se decompor  $p$  na forma

$$p = s p_1 + p_0$$

onde  $p_1 = 0, 1, \dots, (r/2 - 1)$  e

$$p_0 = 0, 1, \dots, (s-1)$$

desde que  $p$  vai de  $0$  a  $(T/2 - 1)$ .

A soma na equação (69) pode ser escrita como

$$\sum_{t_0=0}^{r-1} \exp(2\pi i p t_0 / T) \sum_{t_1=0}^{s-1} X(r t_1 + t_0) \exp(2\pi i p r t_1 / T)$$

mas

$$\begin{aligned} \exp(2\pi i p r t_1 / T) &= \exp(2\pi i (s p_1 + p_0) r t_1 / T) \\ &= \exp(2\pi i p_0 r t_1 / T) \end{aligned}$$

pois,

$$\exp(2\pi i s p_1 r t_1) = \exp(2\pi i r p_1 t_1) = 1$$

para todo  $p_1$  e  $t_1$ ;

Dai,

$$\sum_{t_1=0}^{s-1} X(r t_1 + t_0) \exp(2\pi i p r t_1 / T)$$

não depende de  $p_1$  e é assim uma função de  $p_0$  e  $t_0$  somente, digamos  $A(p_0, t_0)$ .

Logo a equação (69) pode ser escrita como

$$\hat{\alpha}_p + i\hat{\beta}_p = \frac{2}{T} \sum_{t_0=0}^{r-1} A(p_0, t_0) \exp(2\pi i p t_0 / T).$$

Existem  $rs$  funções do tipo  $A(p_0, t_0)$ . Para ser calculada, cada uma requer  $s$  multiplicações e adições dando no total  $rs^2$  operações. Também requer  $r$  adições e multiplicações para cada  $p$ , e existem  $T/2$  valores de  $p$  a considerar. Então, o número total de operações exigidas é

$$rs^2 + Tr/2 = Ts + Tr/2 = T(s + r/2)$$

que, em geral, é menor que as  $T^2/2$  operações exigidas no cálculo de (69) diretamente. Por exemplo, se  $T = 414$  então o cálculo direto requer 85.698 operações. Por outro lado, escrevendo  $414 = 18 \cdot 23$ , o algoritmo descrito acima requer somente 13.248 operações.

Por uma extensão do procedimento acima, pode-se reduzir ainda mais os cálculos quando  $T$  é altamente composto, isto é, tem muitos fatores pequenos. Em particular, se  $T$  é da forma  $2^q$ , o número de operações é da ordem  $T_q$  (ou  $T \log_2 T$ ) em vez de  $T^2$ . Uma redução considerável pode ser feita quando  $T$  tem vários fatores, por exemplo  $T = 2^q \cdot 3^q \cdot s^r \dots$

Na prática, quando  $T$  não é da forma  $2^n$ , pode-se fazer  $T$  altamente composto omitindo algumas observações. Também pode-se adicionar zeros à amostra observada e aumentar o valor  $T$  até um inteiro adequado.

Adicionar zeros aos dados originais, naturalmente não afetará o valor numérico dos coeficientes de Fourier, mas afetará as frequências em que os coeficientes são calculados. Assim, ao se adicionar zeros para aumentar  $T$ , digamos para  $T'$ , os coeficientes serão calculados nas frequências  $w'_p = 2\pi p/T'$  e não em  $w_p = 2\pi p/T$ . Isto deveria ser acompanhado por um esquema chamado *tapering* para "suavizar" os dados.

Para exemplificar, suponha que  $T = 382$ . Este valor de  $T$  não é altamente composto. Então deve-se proceder como se segue.

(a) Remover qualquer tendência linear dos dados e usar os resíduos (que devem ter média zero) para as análises subseqüentes. Se não existir tendência, simplesmente subtrair a média total de cada observação.

(b) Aplicar um *taper* linear em cerca de 5% dos dados em cada extremo. Neste exemplo, denotando-se os dados corrigidos por  $X_0, X_1, \dots, X_{381}$  a série *tapered* é dada por

$$X_t^* = \begin{cases} (t+1)X_t/20 & , t = 0, 1, \dots, 18 \\ (382-t)X_t/20 & , t = 363, \dots, 381 \\ X_t & , t = 19, 20, \dots, 362 \end{cases}$$

(c) Adicionar  $(512-382) = 130$  zeros em um extremo da série *tapered*, de forma que  $T' = 512 = 2^9$ .

(d) Aplicar a TRF aos dados e calcular os coeficientes de Fourier,  $(\hat{\alpha}_p + i\hat{\beta}_p)$ .

De fato, com  $T$  tão baixo como 382, a vantagem computacional da TRF é limitada, neste caso é melhor calcular o periodograma diretamente, o que evita a

necessidade do *tapering* e da adição de zeros. A TRF é realmente válida para  $T > 1000$ .

## 2.11. INTERVALO DE CONFIANÇA PARA O ESPECTRO DE UM PROCESSO ALEATÓRIO PURO

De maneira geral, para o processo :

$$X(t) = \mu + \sum (\alpha_j \cos w_j t + \beta_j \sin w_j t) + \epsilon_t$$

o espectro não é definido para os  $w_j$  correspondente aos harmônicos, isto é, ele é  $\infty$  nesses pontos e nos pontos restantes é o espectro de um processo aleatório puro, correspondente a  $\epsilon : p(w) = \frac{\sigma^2}{\pi}$ .

Na seção 2.8 mostrou-se que

$$\frac{T\hat{A}_j^2}{2\sigma^2} = \frac{2\pi}{\sigma^2} \hat{p}(w_j) \sim \chi_2^2,$$

logo,  $2 \frac{\hat{p}(w_j)}{p(w)} \sim \chi_2^2.$

Assim, um intervalo  $(1-\alpha)$  para  $p(w)$  é dado por :

$$2\hat{p}(w)/\chi_{2, \frac{\alpha}{2}}^2 < p(w) < 2\hat{p}(w)/\chi_{2, 1-\frac{\alpha}{2}}^2.$$

Para  $\hat{p}(w)$ , calculado através das janelas de retardo, tem-se que o intervalo é dado por

$$\left\{ v\hat{p}(w)/\chi_{\nu, \frac{\alpha}{2}}^2, \frac{\alpha}{2} ; v\hat{p}(w)/\chi_{\nu, 1-\frac{\alpha}{2}}^2, \frac{1-\alpha}{2} \right\}$$

onde,

$$v = 2T / \sum_{k=-M}^M \lambda_k^2$$

é chamado o número de graus de liberdade da janela de atraso.

Para as janelas de Tukey e Parzen os graus de liberdade são  $2,67T/M$  e  $3,71T/M$ , respectivamente. Quando  $\hat{p}(w)$  é calculado agrupando  $m$  ordenadas tem-se  $v = (2m)$ .

## 2.12. TESTE DE HIPÓTESE PARA O ESPECTRO DE UM PROCESSO ALEATÓRIO PURO

Seja a Figura 2.12 :

Sabe-se que o verdadeiro espectro de um processo ruído branco é uma linha horizontal, isto é, a potência está uniformemente distribuída sobre todas as frequências. Ele é  $1/\pi$  em  $[0, \pi]$  ou  $2$  em  $[0, 1/2]$ .

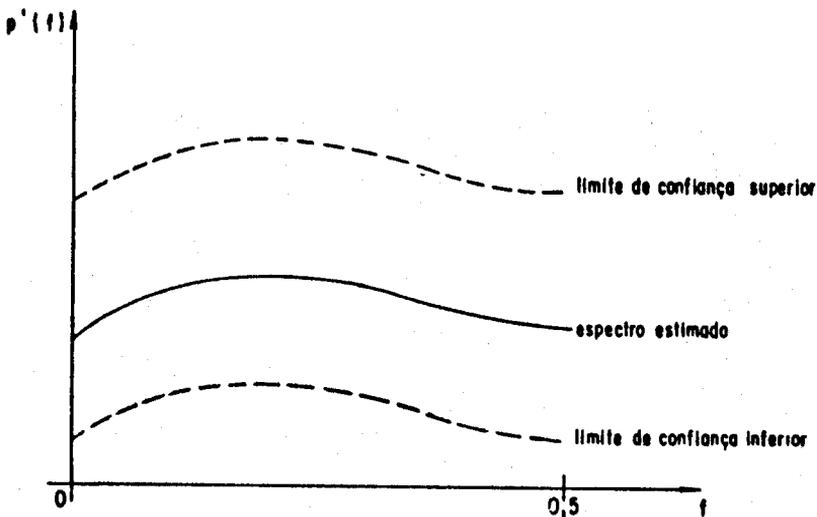


Figura 2.12. Limites de confiança para o espectro de um processo aleatório puro.

Uma maneira de testar se uma série é ruído branco é tentar passar uma linha horizontal dentro dos limites de confiança. Se isto não é possível, não se pode rejeitar a hipótese que o verdadeiro espectro difere do espectro de um ruído branco. Na Figura 2.12 pode-se passar esta linha, então, possivelmente, tem-se o espectro de um processo aleatório puro.

### 2.13. INTERVALO DE CONFIANÇA APROXIMADO PARA AS ORDENADAS DO ESPECTRO

A aproximação  $\chi^2_2$  para a distribuição de  $4\hat{p}(w)/p(w)$  pode ser usada na construção de um intervalo de confiança aproximado para valores do espectro,  $p(w)$ , em uma particular frequência  $w$ .

Sejam  $a(\alpha)$  e  $b(\alpha)$ , respectivamente, os limites inferior e superior do intervalo  $(1-\alpha/2)$  da distribuição  $\chi^2_2$ , isto é,  $a(\alpha)$  e  $b(\alpha)$  são definidos por

$$p(\chi^2_2 \leq a(\alpha)) = p(\chi^2_2 \geq b(\alpha)) = \frac{\alpha}{2}.$$

Então, aproximadamente tem-se que,

$$p(a(\alpha) \leq 4\hat{p}(w)/p(w) \leq b(\alpha)) = 1 - \alpha,$$

daí, um intervalo aproximado  $(1-\alpha)$  de confiança para  $p(w)$  é dado por:

$$[4\hat{p}(w)/b(\alpha), \quad 4\hat{p}(w)/a(\alpha)].$$

Deve ficar claro que tal procedimento é válido somente para uma particular frequência  $w$ .

Entretanto, uma banda de confiança para  $p(w)$  sobre um domínio inteiro de frequências, pode ser construída considerando-se a distribuição do desvio máximo de  $\hat{p}(w)$  em relação a  $p(w)$ .

## CAPÍTULO III

# ANÁLISE ESPECTRAL MULTIVARIADA

### 3.0. INTRODUÇÃO

O interesse e, conseqüentemente o estudo de séries temporais bivariadas,  $[X(t), Y(t)]$ , sofre realce quando há uma relação de causa entre as séries, isto é, quando por exemplo, a série  $Y$  pode ser melhor explicada usando os valores passados de  $X$  e de  $Y$ , do que só os valores de  $Y$ . Tem-se, neste caso, interesse nos chamados Sistemas Dinâmicos. Em geral, a variável  $X$  é a variável independente, chamada de entrada do sistema, e a variável  $Y$ , a variável dependente, chamada de saída do sistema.

Seja, então, duas séries de tempo estacionárias. A análise espectral bivariada é uma extensão natural da análise univariada. Por analogia, é definido o espectro cruzado, o qual contém as informações sobre o relacionamento entre duas séries temporais no domínio da frequência. A partir do espectro cruzado, são definidas algumas medidas relacionadas com o grau de associação entre as componentes de frequência, bem como comportamentos de causalidade entre as séries. Ao final do capítulo é feita uma extensão para o caso multivariado.

### 3.1. FUNÇÕES DE COVARIÂNCIA E CORRELAÇÃO CRUZADA

Considere  $T$  observações de duas variáveis  $X$  e  $Y$  no intervalo de tempo unitário, sobre o período amostral. As observações são denotadas por  $(X(1), Y(1))$ ,  $(X(2), Y(2))$ , ...,  $(X(T), Y(T))$ . Estas observações podem ser reconhecidas como a realização finita de um processo bivariado discreto  $[X(t), Y(t), t \in T]$ .

Para um processo estocástico bivariado, os momentos até segunda ordem consistem da média e função de autocovariância de cada uma das componentes mais uma nova função, denominada função de covariância cruzada, que é dada por

$$\gamma_{xy}(t, k) = \text{cov}(X(t), Y(t+k)).$$

Um processo estocástico bivariado  $[X(t), Y(t), t \in T]$  é dito estacionário de segunda ordem se e só se

i) suas componentes são estacionárias de segunda ordem;

ii)  $\text{cov}[X(t_1), Y(t_2)] = \gamma_{xy}(t_1, t_2)$  é uma função somente de  $(t_1 - t_2)$ .

Portanto, se o processo  $[X(t), Y(t), t \in T]$  é estacionário ele pode ser identificado pelos momentos de primeira e segunda ordem:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \mu_x, & E[Y(t)] &= \mu_y \\ \text{Var}[X(t)] &= \sigma_x^2, & \text{Var}[Y(t)] &= \sigma_y^2 \\ \text{cov}[X(t), X(t+k)] &= \gamma_{xx}(k) \\ \text{cov}[Y(t), Y(t+k)] &= \gamma_{yy}(k) \\ \text{cov}[X(t), Y(t+k)] &= \gamma_{xy}(k) \\ \text{cov}[Y(t), X(t+k)] &= \gamma_{yx}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

A função de covariância cruzada difere da função de autocovariância por não ser uma função par, isto é,

$$\gamma_{xy}(k) \neq \gamma_{xy}(-k).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(k) &= \text{cov}[X(t), Y(t+k)], \\ &= \text{cov}[X(t^* - k), Y(t^*)], \text{ se } t = t^* - k \\ &= \text{cov}[Y(t^*), X(t^* - k)] \\ &= \gamma_{yx}(-k) \end{aligned}$$

A função de correlação cruzada  $\rho_{xy}(k)$  é definida por:

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sqrt{\gamma_{xx}(0)\gamma_{yy}(0)}}, \quad k \in T \quad (2)$$

Esta função mede a correlação entre  $X(t)$  e  $Y(t+k)$  e tem as propriedades:

i)  $\rho_{xy}(k) = \rho_{yx}(-k)$ ;

ii)  $|\rho_{xy}(k)| \leq 1$ .

Sabe-se que  $\rho_{xx}(0)$  e  $\rho_{yy}(0)$  são ambos iguais a um, mas o valor de  $\rho_{xy}(0)$  não é necessariamente igual a um.

Uma maneira natural de estimar a covariância cruzada e a correlação cruzada é por meio das correspondentes funções amostrais. Com  $T$  pares de observações,  $[X(t), Y(t)], i = 1, \dots, T$ , a função de covariância cruzada da amostra é dada por

$$C_{xy}(k) = \begin{cases} \sum_{t=1}^{T-k} [X(t) - \bar{X}][Y(t+k) - \bar{Y}] / T & \text{para } k=0, 1, \dots, (T-1) \\ \sum_{t=1-k}^T [X(t) - \bar{X}][Y(t+k) - \bar{Y}] / T & \text{para } k=-(T-1), \dots, -1 \end{cases} \quad (3)$$

A função de correlação cruzada amostral é,

$$R_{xy}(k) = \frac{C_{xy}(k)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}} \quad (4)$$

onde,  $C_{xx}(0)$  e  $C_{yy}(0)$  são as variáveis amostrais das observações sobre  $X(t)$  e  $Y(t)$  respectivamente,  $\hat{\sigma}_x^2$  e  $\hat{\sigma}_y^2$ .

Mostra-se que estes estimadores são assintoticamente não tendenciosos e consistentes e, ainda, que estimativas sucessivas são autocorrelacionadas entre si.

Então, para testar se as correlações entre as duas séries é diferente de zero, é necessário, primeiro, transformar as séries em ruído branco. Este procedimento é conhecido como pré-branqueamento. Para séries pré-branqueadas e não correlacionadas pode-se mostrar que:

$$E[R_{xy}(k)] \doteq 0$$

$$Var[R_{xy}(k)] \doteq \frac{1}{T}$$

### 3.2. ESPECTRO CRUZADO

A função de correlação cruzada é a ferramenta natural para examinar o relacionamento entre duas séries temporais no domínio do tempo. No domínio da frequência, a função que complementa o estudo feito no domínio do tempo é o espectro cruzado.

Por analogia com a função de densidade espectral da análise univariada dada por

$$p(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i w k} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\pi} [\gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \cos w k]$$

define-se o espectro cruzado de um processo bivariado discreto, medido em intervalos de tempo unitário, como a transformada de Fourier da função de covariância cruzada, a saber:

$$p_{xy}(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(k) e^{-i w k} \quad (6)$$

sobre o domínio  $0 \leq w \leq \pi$ .

Note-se que  $p_{xy}(w)$  é uma função complexa, pois  $\gamma_{xy}(k)$ , ao contrário de  $\gamma(k)$ , não é uma função par.

Alguns autores preferem definir o espectro cruzado em  $[-\pi, \pi]$ ,

$$p_{xy}(w) = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(k) e^{-i w k} \right] \quad (7)$$

em analogia a,

$$p(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i w k} \quad (8)$$

Da equação (7), vem :

$$\gamma_{xy}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i w k} p_{xy}(w) dw \quad (9)$$

Nota-se, também, que  $p_{xy}(-w)$  é complexo conjugado de  $p_{xy}(w)$ .

A equação (6) pode ser escrita como

$$p_{xy}(w) = c(w) - i q(w) \quad (10)$$

onde  $c(w)$  e  $q(w)$  são funções reais.

Uma outra maneira de expressar o espectro cruzado é na forma polar

$$p_{xy}(w) = \alpha_{xy}(w) e^{i \phi_{xy}(w)} \quad (11)$$

onde  $\alpha_{xy}$ , a amplitude, e  $\phi_{xy}(w)$ , a fase, são funções reais.

Pode-se, agora, definir algumas funções derivadas do espectro cruzado, úteis para a sua interpretação.

**i) Co-espectro**

É definido pela parte real do espectro cruzado na equação (10), isto é,

$$c(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(k) \cos wk \quad (12)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \gamma_{xy}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} [\gamma_{xy}(k) + \gamma_{yx}(k)] \cos wk \right\}$$

**ii) Espectro de Quadratura**

É definido pela parte complexa do espectro cruzado na equação (10) com sinal negativo, isto é,

$$q(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(k) \sin wk \quad (13)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [\gamma_{xy}(k) - \gamma_{yx}(k)] \sin wk \right\}$$

**iii) Espectro de Amplitude Cruzada**

É definido pela amplitude do espectro cruzado, na equação (11) :

$$\alpha_{xy}(w) = \sqrt{c^2(w) + q^2(w)} = |p_{xy}(w)| \quad (14)$$

**iv) Espectro de Fase**

É definido pela fase do espectro cruzado, na equação (11) :

$$\phi_{xy}(w) = \tan^{-1}(-q(w)/c(w)) \quad (15)$$

A fase é usualmente zero em  $w = 0$  e é função contínua de  $w$  no intervalo  $[0, \pi]$ .

**v) Coerência**

É definido por

$$C(w) = \frac{c^2(w) + q^2(w)}{p_x(w)p_y(w)} = \frac{\alpha_{xy}^2(w)}{p_x(w)p_y(w)} = \frac{|p_{xy}(w)|^2}{p_x(w)p_y(w)} \quad (16)$$

onde  $p_x(w)$  e  $p_y(w)$  são os espectros dos processos individuais para  $X(t)$  e  $Y(t)$ , respectivamente.

Mostra-se que  $0 \leq C(w) \leq 1$  e que  $C(w)$  mede a correlação linear entre as duas componentes do processo bivariado em cada frequência  $w$ . É análogo ao quadrado do coeficiente de correlação usual.

Quanto mais próximo  $C(w)$  está de um, mais relacionados estão os dois processos, na frequência  $w$ .

#### vi) Espectro de Ganho

É definido por

$$G_{xy}(w) = \sqrt{\frac{p_y(w) C(w)}{p_x(w)}} = \frac{\alpha_{xy}(w)}{p_x(w)} = \frac{|p_{xy}(x)|}{p_x(w)} \quad (17)$$

que é o coeficiente de regressão do processo  $Y(t)$  sobre o processo  $X(t)$  na frequência  $w$ . Um segundo ganho,  $G_{yx}(w)$ , pode também ser definido, onde  $Y(t)$  é a entrada e  $X(t)$  é a saída.

### 3.3. EXEMPLOS

Nos exemplos a seguir calcula-se o espectro cruzado e suas funções derivadas, tentando dar-lhes uma interpretação.

#### i) Processos Não Correlacionados

Suponha que  $X(t)$  e  $Y(t)$  são processos não correlacionados, isto é,  $cov[X(t), Y(s)] = 0$ , para todo  $t$  e  $s$ . Isto inclui, evidentemente, o caso de dois processos independentes. Então,

$$\gamma_{xy}(k) = cov[X(t), Y(t+k)] = 0, \text{ para todo } k.$$

Assim,

$$p_{xy}(w) = 0, \text{ para todo } w.$$

Conseqüentemente,

$$c(w) = 0, \quad q(w) = 0, \quad \alpha_{xy}(w) = 0 \text{ e } C(w) = 0, \text{ isto é,}$$

todas as funções derivadas do espectro cruzado são nulas, em todas as frequências.

## ii) Regressão Linear

Suponha que

$$Y(t) = aX(t) + \epsilon(t)$$

onde  $\epsilon(t)$  é um processo de ruído branco, não correlacionado com  $X(t)$ .

Então,

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(k) &= \text{cov}[X(t), Y(t+k)] = \text{cov}[X(t), aX(t+k) + \epsilon(t)] \\ &= \text{cov}[X(t), aX(t+k)] + \text{cov}[X(t), \epsilon(t+k)] \\ &= a \text{cov}[X(t), X(t+k)] \\ &= a \gamma_{xx}(k).\end{aligned}$$

Assim,

$$p_{xy}(w) = ap_x(w)$$

e

$$p_y(w) = a^2 p_x(w) + p_\epsilon(w).$$

Portanto, para este modelo:

$$C_{xy}(w) = a p_x(w) \quad , \quad q(w) = 0$$

$$\alpha_{xy}(w) = a p_x(w) \quad , \quad \phi(w) = 0$$

e

$$\begin{aligned}C(w) &= [a p_x(w)]^2 / p_x(w) [a^2 p_x(w) + p_\epsilon(w)] \\ &= 1 / \left[ 1 + \frac{p_\epsilon(w)}{a^2 p_x(w)} \right]\end{aligned}$$

Note que se  $\epsilon_t \equiv 0$ , então  $C(w) = 1$ , isto é, a coerência entre  $X(t)$  e  $Y(t)$  é unitária em todas as frequências, como se esperava desde que entre  $Y(t)$  e  $X(t)$  existe uma relação linear exata quando  $\epsilon(t) = 0$ .

## iii) Regressão Linear com Atraso

Suponha que

$$Y(t) = a X(t-d) + \epsilon(t).$$

Neste caso,

$$\gamma_{xy}(k) = \text{cov}[X(t), Y(t+k)] = a \gamma_{xx}(k-d).$$

Assim, tem-se:

$$p_{xy}(w) = \frac{a}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(k-d)e^{-iwk}$$

$$= a e^{-iwd} p_x(w)$$

e

$$p_y(w) = a^2 p_x(w) = p_e(w), \text{ como no exemplo anterior.}$$

Dai,

$$c(w) = (a \cos wd) p_x(w) / \pi$$

$$q(w) = (a \sen wd) p_x(w) / \pi$$

$$\alpha_{xy}(w) = a p_x(w) / \pi$$

$$\phi_{xy}(w) = \tan^{-1} \left[ \frac{-(a \sen wd) p_x(w)}{(a \cos wd) p_x(w)} \right] = - wd$$

e a coerência  $C(w)$  é a mesma do exemplo anterior.

A forma do espectro de fase tem uma importância particular neste exemplo, pois mostra que quando existe um atraso de tempo o espectro de fase é uma função linear da frequência, onde a amplitude do atraso,  $(-d)$ , representa a inclinação; veja Figura 3.1.

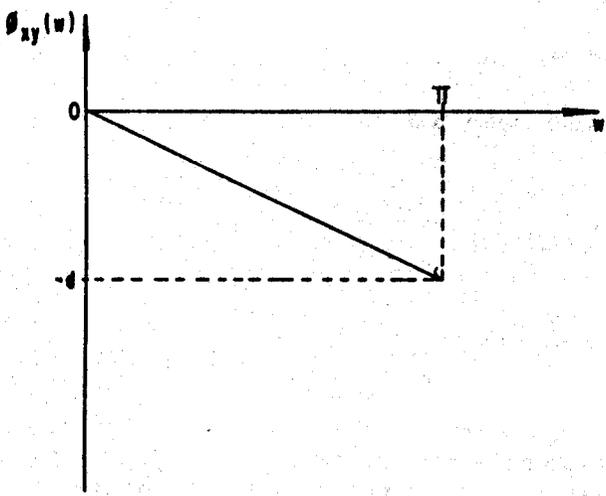


Figura 3.1. Espectro de fase para o exemplo (iii).

iv) Suponha que

$$X(t) = e_1(t)$$

$$Y(t) = X(t-d) + e_2(t)$$

onde  $e_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , são variáveis aleatórias com média zero e variância  $\sigma_e^2$  e  $d$  é um inteiro.

Então,

$$\gamma_{xy} = \begin{cases} \sigma_e^2 & , \quad k = d \\ 0 & , \quad \text{outros casos} \end{cases}$$

$$\rho_{xy}(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & , \quad k = d \\ 0 & , \quad \text{outros casos.} \end{cases}$$

Dai,

$$p_{xy}(w) = \sigma_e^2 e^{-iwd/\pi}$$

$$c(w) = \sigma_e^2 \cos wd/\pi$$

$$q(w) = \sigma_e^2 \sin wd/\pi$$

$$\alpha_{xy}(w) = \sigma_e^2/\pi$$

$$\phi_{xy}(w) = -wd.$$

Desde que os dois espectros são dados por:

$$p_x(w) = \sigma_e^2/\pi$$

$$p_y(w) = 2\sigma_e^2/\pi$$

tem-se

$$C(w) = \frac{1}{2}.$$

Como no exemplo anterior a fase é uma linha reta com inclinação  $(-d)$ . Quando  $\phi(w)$  não está restrita, seu gráfico contra  $w$  é uma função contínua, começando com fase nula no atraso zero, veja Figura 3.2(a). Entretanto, se a fase está restrita ao intervalo  $[-\pi, \pi]$  tem-se um gráfico como na Figura 3.2(b) a seguir.

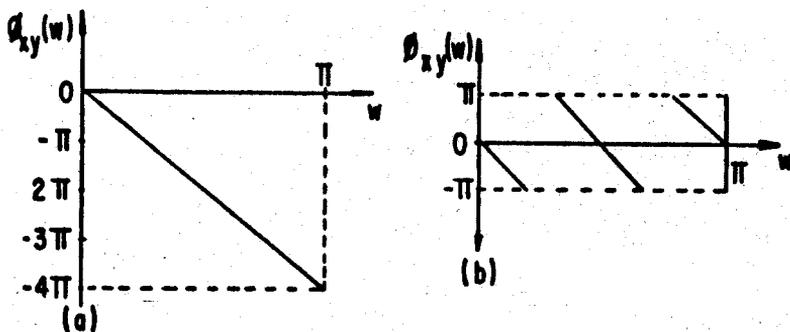


Figura 3.2. Espectro de fase para exemplo (iv) com  $d = 4$ , (a) fase não restrita, (b) fase restrita.

### OBSERVAÇÕES:

1) A relação entre duas séries não é sempre a de um simples atraso no tempo. É possível alguns pares de componentes estarem atrasados no tempo por diferentes quantidades do que outros pares. Assim, por exemplo, na Figura 3.3 as componentes de cada série consistindo de frequências entre 0 e  $w^*$  têm um tempo de atraso entre elas e as componentes consistindo das outras frequências têm um tempo de atraso diferente.

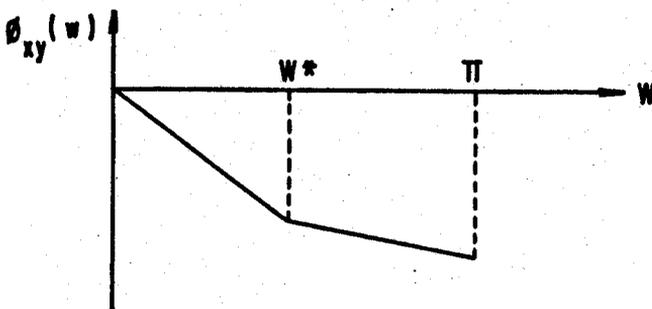


Figura 3.3. Espectro de fase.

Em termos econômicos, se a inclinação está aumentando com o crescimento da frequência, então componentes de frequências altas (flutuações a curto prazo) estão mais atrasadas no tempo que as de frequências baixas.

Por outro lado, se a inclinação está decrescendo, quando cresce a frequência, então componentes de frequências baixas estão mais atrasadas no tempo do que componentes de frequências altas.

Se a curva tem inclinação constante então o tempo de atraso é uniforme em cada frequência.

Logo, o atraso pode ser estimado através do exame da inclinação de  $\phi_{xy}(w)$ . E, ainda, se não há atraso entre as séries, a fase é zero.

2) Não há razão para procurar estrutura de atraso entre séries não correlacionadas; por isto, analisa-se primeiro a coerência, antes de se tentar interpretar a fase. Isto porque se a coerência é baixa a fase se torna errática e de difícil interpretação.

3) No caso de *feedback* é muito difícil interpretar a fase e não há, ainda, ferramenta disponível.

### 3.4. ESTIMAÇÃO DO ESPECTRO CRUZADO

De maneira análoga ao caso univariado, existem dois procedimentos básicos na estimação do espectro cruzado; truncamento e suavização do espectro cruzado da amostra.

#### 1) TRUNCAMENTO

Toma-se a transformada de Fourier da função de covariância cruzada amostral.

O co-espectro é estimado por:

$$\hat{c}(w) = \left[ \begin{array}{c} M \\ \sum_{k=-M} \end{array} \lambda_k C_{xy}(k) \cos wk \right] \quad (18)$$

onde,  $M$  é o ponto de truncamento e  $\lambda_k$  é a janela de atraso.

O espectro de quadratura estimado é dado por:

$$\hat{q}(w) = \frac{1}{\pi} \left[ \sum_{k=-M}^M \lambda_k C_{xy}(k) \sin wk \right] \quad (19)$$

O ponto de truncamento  $M$  e a janela de atraso são escolhidos de modo análogo ao caso univariado.

A partir dos estimadores do co-espectro e do espectro de quadratura, obtêm-se os estimadores do espectro de amplitude cruzada, fase, coerência e ganho:

$$\hat{\alpha}_{xy}(w) = \sqrt{\hat{c}^2(w) + \hat{q}^2(w)} \quad (20)$$

$$\hat{\phi}_{xy}(w) = \tan^{-1} [-\hat{q}(w)/\hat{c}(w)] \quad (21)$$

$$\hat{C}(w) = \frac{\hat{\alpha}_{xy}^2(w)}{\hat{p}_x(w)\hat{p}_y(w)} \quad (22)$$

$$\hat{G}_{xy}(w) = \frac{\hat{\alpha}_{xy}(w)}{\hat{p}_x(w)} \quad (23)$$

Estimativas consistentes do ganho, fase e coerência só podem ser obtidas se alguma suavização é efetivada. Isto pode ser feito diretamente no domínio da frequência, efetuando uma média sobre as frequências adjacentes, ou no domínio do tempo, usando uma janela de atraso apropriada para ponderar a covariância cruzada amostral.

Antes de se estimar a coerência é importante alinhar as duas séries. Se isto não é feito, pode ser mostrado que as estimativas da coerência serão tendenciosas se a fase muda rapidamente. Se a função de correlação cruzada amostral tem seu maior valor no atraso  $S$ , então o alinhamento é feito trasladando-se uma das séries de uma distância  $S$ , de tal forma que o pico na função de correlação cruzada das séries alinhadas esteja no instante zero.

## 2) Suavização do Espectro Cruzado Amostral

O espectro amostral univariado da série  $X(t)$  pode ser escrito na forma

$$\hat{p}(w_j) = \left[ \sum_{t=1}^T X(t)e^{-iw_j t} \right] \left[ \sum_{t=1}^T X(t)e^{iw_j t} \right] / T\pi$$

$$= T(\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2)/4\pi \quad (24)$$

que é idêntica à equação (49) da análise univariada.

Por analogia com a equação (24) pode-se definir o espectro cruzado amostral de duas séries  $X(t)$  e  $Y(t)$  como

$$\hat{p}_{xy}(w_j) = \left[ \sum_{t=1}^T X(t)e^{-iw_j t} \right] \left[ \sum_{t=1}^T Y(t)e^{iw_j t} \right] / T\pi. \quad (25)$$

Mostra-se que a parte real e imaginária de  $\hat{p}_{xy}(w_j)$  são dadas por:

$$T(\hat{\alpha}_{jx} \hat{\alpha}_{jy} + \hat{\beta}_{jx} \hat{\beta}_{jy})/4\pi \quad (26)$$

e

$$T(\hat{\alpha}_{jx} \hat{\beta}_{jy} - \hat{\alpha}_{jy} \hat{\beta}_{jx})/4\pi \quad (27)$$

respectivamente, onde  $(\hat{\alpha}_{jx}, \hat{\beta}_{jx})$  e  $(\hat{\alpha}_{jy}, \hat{\beta}_{jy})$  são os coeficientes de Fourier de  $X(t)$  e  $Y(t)$  em  $w_j$ .

Estas componentes podem ser suavizadas com o objetivo de se obter estimativas consistentes do co-espectro e do espectro de quadratura:

$$\hat{c}(w_j) = \sum_{q=p-m}^{p+m} (\hat{\alpha}_{jx} \hat{\alpha}_{jy} + \hat{\beta}_{jx} \hat{\beta}_{jy})/4\pi m \quad (28)$$

$$\hat{q}(w_j) = T \sum_{q=p-m^*}^{p+m^*} (\hat{\alpha}_{jx} \hat{\alpha}_{jy} - \hat{\beta}_{jy} \hat{\beta}_{jx}) / 4\pi m \quad (29)$$

onde  $m = 2m^* + 1$

Pode-se, então, utilizar (28) e (29) na estimação do espectro de amplitude cruzada, fase, etc., como antes.

Este procedimento apresenta uma vantagem computacional, pois uma vez que a análise do espectro amostral foi feita para as séries individuais, quase tudo está feito, pois as estimativas de  $c(w)$  e  $q(w)$  somente envolvem coeficientes de Fourier já calculados das duas séries. Entretanto, o alinhamento deve ser feito separado.

### 3.5. EXEMPLOS DE ESPECTRO CRUZADO ESTIMADO

1) As Figuras 3.4 e 3.5 mostram os diagramas de coerência e fase entre a taxa de bônus em um ano e taxa de bônus em quatro anos.

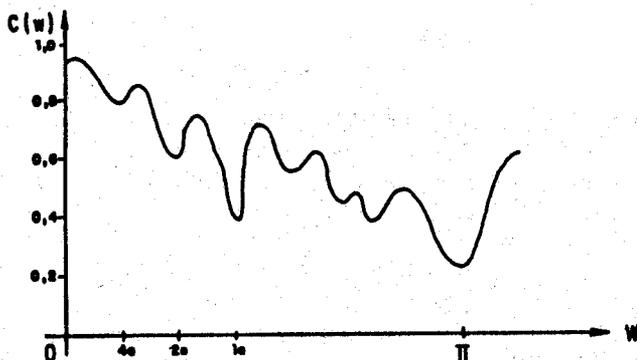


Figura 3.4. Coerência entre taxa de bônus em um ano e taxa de bônus em quatro anos.

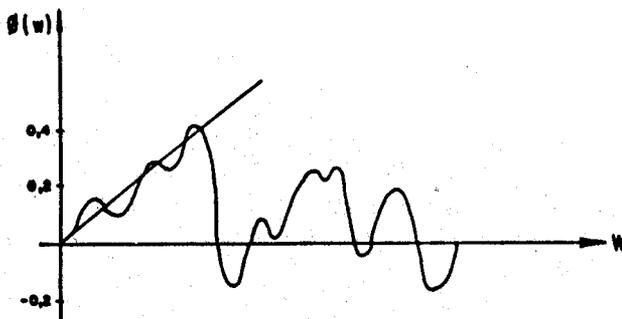


Figura 3.5. Diagrama de fase entre taxas de bônus em um ano e taxa de bônus em quatro anos.

Observa-se que a coerência está decaindo enquanto a frequência está aumentando, sugerindo que as componentes de frequências baixas se movem juntas mais do que as componentes de frequências altas.

No diagrama de fase observa-se que para frequências baixas, onde a coerência é maior, a taxa de um ano parece guiar a taxa de quatro anos, desde que o diagrama de fase seja visto como linear. A inclinação do diagrama de fase sugere uma defasagem de aproximadamente nove semanas. Entretanto, para frequências altas não há estrutura de atraso e nem de adiantamento, desde que a fase é aproximadamente nula.

2) A Figura 3.6 mostra a coerência, ganho e fase amostral para uma série de entrega de pedidos e uma de estoques.

Observa-se que a coerência alta em frequências baixas sugere uma forte associação linear. A coerência amostral muito baixa na frequência  $\pi/3$  sugere que o ciclo de seis meses em entrega de pedidos não é altamente correlacionado com o ciclo de seis meses em estoques. O ganho amostral mostra que baixas frequências são amplificadas e altas frequências são atenuadas. Isto significa que aumentos a longo prazo na entrega de pedidos são associados com maiores aumentos nos estoques, enquanto aumentos a curto prazo em entregas de pedidos são associados com aumentos relativamente pequenos nos estoques. Nota-se, também, que a curva de ângulos de fase apresenta diversas mudanças.

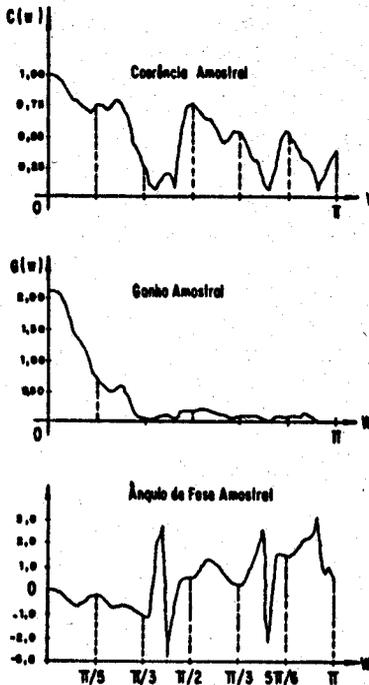


Figura 3.6. *Série de entrega de pedidos e estoques de bens duráveis, não ajustados sazonalmente.*

3) A Figura 3.7 é típica da relação que parece existir entre séries de preços de ações e séries de falências. Enquanto a coerência em geral não é muito alta, a fase varia consistentemente em torno de  $\pi$ . Isto implica que as duas séries estão exatamente fora de fase, quando uma sobe a outra desce sem nenhuma defasagem definida:

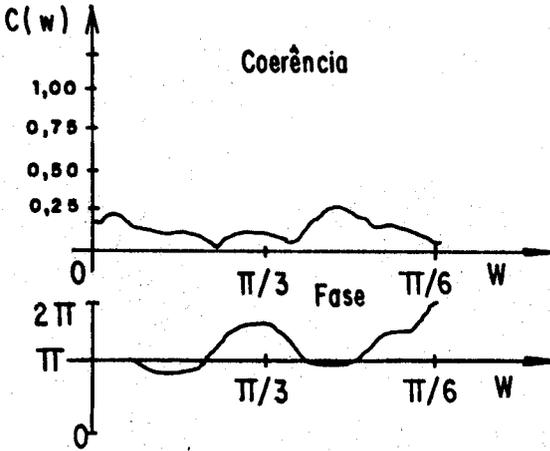


Figura 3.7. Coerência e fase entre série de falências e preço de ações da Standard Oil of California.

4) A Figura 3.8 é típica de relação entre ações individuais. O valor médio da coerência varia para diferentes pares de ações. Entretanto, para qualquer par, a coerência é razoavelmente constante com as freqüências. O diagrama de fase mostra que não há atraso ou adiantamento entre as séries de preços de ações.

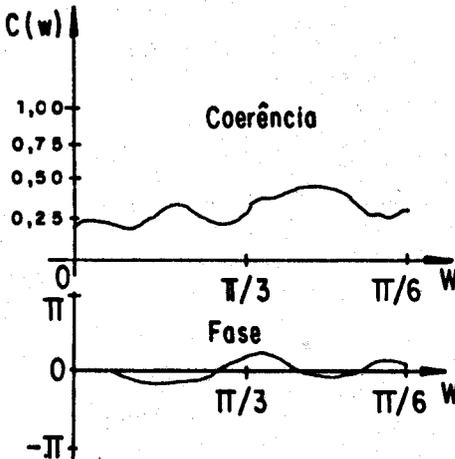


Figura 3.8. Coerência e fase entre a série de preços da Standard Oil of California versus U. S. Steel.

### 3.6. ANÁLISE ESPECTRAL MULTIVARIADA

A análise espectral multivariada é uma extensão natural do caso bivariado e é uma analogia da análise estatística multivariada, exceto que ela é aplicada em cada frequência.

Freqüentemente, se quer investigar a relação entre duas séries temporais após remover o efeito de uma ou mais séries. Para isto, usa-se o conceito de análise espectral parcial.

#### Espectro Cruzado Parcial

Considere  $X(t) = [X_1(t); X_2(t), \dots, X_m(t)]$  um vetor de séries temporais e seja a matriz  $m \times m$  de autoespectros e espectros cruzados dada por:

$$\Gamma(w) = [p_{ij}(w)] \quad (30)$$

onde,  $p_{ii}$  representa o espectro de  $X_i(t)$ , e  $p_{ij}$  o espectro cruzado de  $X_i(t)$  e  $X_j(t)$ .

Fixando temporariamente a frequência em  $w$ , pode-se derivar de  $\Gamma$ , quantidades como correlações entre componentes e correlações parciais.

Considere que a componente de  $X_i(t)$  na frequência  $w$  seja representada por  $X_i(w)$ . Seja  $p_{12}(w)$  a correlação parcial de  $X_1(w)$ , e  $X_2(w)$  dado  $X_j(w)$  para  $j > 2$ .

Primeiro deve-se particionar  $\Gamma$  em submatrizes como se segue:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & | & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & | & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \quad (31)$$

onde as linhas que particionam estão entre as segunda e terceira linhas e segunda e terceira colunas.

Forma-se, após, a matriz  $2 \times 2$  :

$$\Gamma_{12.k} = \Gamma_{11} - \Gamma_{12} \Gamma_{22}^{-1} \Gamma_{21} \quad (32)$$

então,

$$\Gamma_{12.k} = \begin{bmatrix} p_{11,k}(w) & p_{12,k}(w) \\ p_{21,k}(w) & p_{22,k}(w) \end{bmatrix} \quad (33)$$

é a matriz de autoespectros e espectros cruzados parcial para as séries  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$ , e  $k$  denota o conjunto  $2, \dots, m$ .

A coerência parcial é dada por:

$$C_{12,k}(w) = \frac{|p_{12,k}(w)|^2}{p_{11,k}(w)p_{22,k}(w)} \quad (34)$$

e, de maneira semelhante, pode-se definir a *fase parcial*.

### Espectro Cruzado Múltiplo

É de interesse considerar a generalização do coeficiente de correlação múltiplo. Suponha, ainda, a partição anterior e que uma combinação linear ótima das séries  $X_3(t), \dots, X_m(t)$  foi subtraída de  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$ , deixando  $X_1(t)$  e  $\tilde{X}_2(t)$ , isto é,  $\tilde{X}_i(t) = X_i(t) - \beta_i X_{j>2}(t)$ , onde  $X_{j>2} = [X_3(t), \dots, X_m(t)]$ . Então as funções acima podem ser interpretadas como sendo o espectro, coerência e fase para as duas séries  $\tilde{X}_1(t)$  e  $\tilde{X}_2(t)$ .

É também possível medir a relação entre uma série e uma combinação ótima das demais. A matriz  $\Gamma(w)$  é, agora, particionada em submatrizes como

$$\Gamma(w) = \begin{bmatrix} p_{11}(w) & \Gamma_{12}(w) \\ \Gamma_{21}(w) & \Gamma_{22}(w) \end{bmatrix} \quad (35)$$

onde as linhas que particionam estão entre as primeira e segunda linhas e as primeira e segunda colunas. A função

$$\Gamma_{1,p}(w) = p_{11}(w) - \Gamma_{12}(w) \Gamma_{22}^{-1}(w) \Gamma_{21}(w) \quad (36)$$

é o autoespectro parcial da série  $\tilde{X}_1(t)$ , onde  $\tilde{X}_1(t)$  é  $X_1(t)$  menos a combinação ótima de  $X_{j>2}(t)$ . Assim,  $\tilde{X}(t)$  é o processo residual quando toda informação (linear) sobre  $X_1(t)$ , contida em  $X_2(t), X_3(t), \dots, X_m(t)$ , foi removida.

A função de coerência múltipla  $M_{1,p}(w)$  é definida por:

$$M_{1,p}(w) = 1 - \frac{\Gamma_{1,p}(w)}{p_{11}(w)} \quad (37)$$

que é uma generalização direta do quadrado do coeficiente de correlação múltiplo,  $R^2$ , e pode ser interpretado da mesma maneira em cada frequência. Quando  $m = 2$ , somente dois processos são envolvidos e  $M_{1,2}(w) = C(w)$ .

Finalmente, outras técnicas de análise multivariada, como análise de componentes principais e análise fatorial, podem, também, ser generalizadas para séries temporais no domínio da frequência quando aplicadas na matriz  $\Gamma$ .

NOTAS: 1) Quando  $\beta_i$  é a  $i$ -ésima linha de  $\Gamma_{12} \Gamma_{22}^{-1}$  tem-se uma combinação linear ótima.

2) O coeficiente de correlação múltiplo,  $R$ , entre  $X_i$ ,  $i=1,2$  e  $X_{j>2}$  é definido pela correlação máxima entre  $X_i$  e a combinação linear  $\alpha X_{j>2}$ . Sabe-se que a correlação entre  $X_i$  e  $\alpha X_{j>2}$  assume o máximo quando  $\alpha$  é a  $i$ -ésima linha de  $\Gamma_{12} \Gamma_{22}^{-1}$ .

Uma fórmula útil é dada por:

$$R = 1 - \frac{|\Sigma^*|}{\sigma_{ii} |\Sigma_{22}|}, \quad (38)$$

onde

$$\Sigma^* = \begin{vmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{(i)} \\ \sigma_{(i)} & \Sigma_{22} \end{vmatrix}, \quad (39)$$

$\sigma_{ii} = \text{var}[X_i(t)]$ ,  $\Sigma_{22}$  matriz de covariância do vetor  $X_{j>2} = [X_2(t), \dots, X_m(t)]$  e  $\sigma_{(i)}$  é o vetor de covariâncias entre  $X_i$  e as componentes de  $X_{j>2}$ .

## BIBLIOGRAFIA

- 1) Bloomfield, P. — *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction*, John Wiley & Sons, 1976.
- 2) Bolch, B.W. e Huang, C.J. — *Multivariate Statistical Methods for Business and Economics*, Prentice Hall, 1974.
- 3) Chatfield, C. — *The Analysis of Times Series. Theory and Practice*, Chapman and Hall, 1975.
- 4) Contador, C.R. — *Uma Análise Espectral dos Movimentos da Bolsa de Valores do Rio de Janeiro*, Revista Brasileira de Mercado de Capitais 1 (1): 67-92, 1975.
- 5) Eletrobrás, SSC-GCOI — *Estatística Mensal da Operação*.
- 6) Fishman, G.S. — *Spectral Methods in Econometrics*, Harvard University Press, 1968.
- 7) Gourieroux, C. e Monfort, A. — *Cours de Series Temporelles*, Economica, 1983.
- 8) Granger, G.W.J. e Hatanaka, M. — *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton University Press, 1964.
- 9) Granger, C.W.J. e Morgerstern, O. — *Predicability of Stock Market Prices*, Heath Lexington Books, 1970.
- 10) Harvey, A.C. — *Time Series Models*, Philip Allan, 1981.
- 11) Holanda Sales, P.R. — *Um Modelo Determinístico Estocástico para Previsão de Séries Hidrológicas Temporais*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
- 12) Holanda Sales, P.R., Saboia, J.L.M., Guerreiro-Salazar, P. e Lattari Barretto, L.A. — *Um Modelo Determinístico Estocástico para Previsão de Vazões com Vistas à Operação de Sistemas Hidroelétricos*, IV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Rio de Janeiro, RJ, 1977.
- 13) Holanda Sales, P.R. e Vieira, A.M. — *Previsão de Vazões no Planejamento da Operação Energética*, VII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Brasília, DF, 1983.
- 14) Holanda Sales, P.R. e Vieira A.M. — *Modelagem de Vazões Médias Mensais Tendo em Vista a Obtenção de Previsões Segundo a Metodologia Yevjevich/Box & Jenkins*, Seminário Internacional de Hidrologia e Hidráulica, Assunção, Paraguai, 1984.
- 15) Jenkins, G.M. e Watts, D.C. — *Spectral Analysis and its Applications*. Holden Day, 1968.
- 16) Labys, W.C. e Granger, C.W.J. — *Speculation Hedging and Comodity Prices Forecasts*, Heath Lexington Books, 1970.
- 17) McLeod, A.I. e Holanda Sales, P.R. — *An Algorithm for Approximate Likelihood Calculation of ARMA and Seasonal ARMA Models.*

*Algorithm AS 191*, Journal of the Royal Statistical Society, Series C, 1983.

- 18) Morettin, P.A. — *Análise Harmônica de Processos Estocásticos*, 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, Texto de Minicurso, Poços de Caldas, MG, 1979.
- 19) Newbold, P. e Granger, C.W.J. — *Forecasting Economic Time Series*, Academic Press, 1977.
- 20) Pereira, B. de B. — *Introdução à Análise Espectral*. Notas de Aula, IM e COPPE/UFRJ, 1979.
- 21) Pereira, B. de B. — *Some Applied Time Series Work at UFRJ, Brazil*. 2nd International Symposium of Forecasting, Istambul, Julho, 6-9, 1982 e Pesquisa Operacional 5,1:19-33, 1985.
- 22) Pereira, B. de B. — *Séries Temporais Multivariadas*, 6º SINAPE, Texto de Minicurso, RJ, 1984.
- 23) Priestey, M.B. — *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, 1981.
- 24) Reyner, J.M. — *An Introduction to Spectral Analysis*, Pion, 1971.
- 25) Zanusso Pais, M.B. — *Análise Espectral e Regressão no Domínio da Frequência*, Tese de M.Sc., IM-UFRJ, 1984.

# APÊNDICE I

## I.A. ALGUMAS IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

$$i) \sum_{t=0}^{T-1} \exp(i\lambda t) = \frac{\exp(iT\lambda) - 1}{\exp(i\lambda) - 1} = \exp\left[\frac{i(T-1)\lambda}{2}\right] \frac{\exp(iT\lambda/2) - \exp(-iT\lambda/2)}{\exp(i\lambda/2) - \exp(-i\lambda/2)}$$

ii) Relação de Euler

$$\exp(i\lambda) = \cos\lambda + i\operatorname{sen}\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!}$$

$$iii) \cos\lambda = \frac{1}{2} [\exp(i\lambda) + \exp(-i\lambda)]$$

$$\operatorname{sen}\lambda = \frac{1}{2i} [\exp(i\lambda) - \exp(-i\lambda)]$$

$$iv) \sum \cos\lambda t = \cos\left[\frac{(T-1)\lambda}{2}\right] \frac{\operatorname{sen}T\lambda/2}{\operatorname{sen}\lambda/2}$$

$$\sum \operatorname{sen}\lambda t = \operatorname{sen}\left[\frac{(t-1)\lambda}{2}\right] \frac{\operatorname{sen}T\lambda/2}{\operatorname{sen}\lambda/2}$$

v) Fórmulas de Adição e Inversas

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen}y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen}x \operatorname{sen}y$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \operatorname{sen}y = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)]$$

$$\operatorname{sen}x \operatorname{sen}y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$vi) \sum (\cos\omega t)^2 = \frac{T}{2} [1 + D_T(2\omega)\cos(T-1)\omega]$$

$$\Sigma (\text{sen } w t)^2 = \frac{T}{2} [(1 - D_T(2w) \cos(T-1)w)]$$

$$\Sigma \cos w t \text{ sen } w t = \text{sen } w t = \frac{T}{2} [D_T(2w) \text{sen}(T-1)w]$$

onde,

$$D_T = \frac{\text{sen } Tw/2}{T \text{ sen } w/2} \quad (\text{Dirichlet Kernel}).$$

## I.B. RELAÇÕES ORTOGONAIS

i) Com respeito a somação. Seja  $w_j = \frac{2\pi j}{T}$ .

$$\sum_{t=1}^T \cos w_j t = 0, \quad j = 1, 2, \dots, [T/2]$$

$$\sum_{t=1}^T \text{sen } w_j t = 0, \quad j = 0, 1, \dots, [T/2]$$

$$\sum_{t=1}^T \cos w_j t \cdot \cos w_k t = \begin{cases} 0 & , 0 \leq k \neq j \leq [T/2] \\ T/2 & , 0 < k = j < T/2 \\ T & , k = j = 0, T/2 \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^T \text{sen } w_j t \cdot \text{sen } w_k t = \begin{cases} 0 & , 0 \leq k \neq j \leq [T/2] \\ T/2 & , 0 < k = j < T/2 \\ 0 & , k = j = 0, T/2 \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^T \cos w_j t \cdot \text{sen } w_k t = 0, \quad k, j = 0, 1, \dots, [T/2]$$

$$\sum_{t=1}^T \exp(iw_j t) \exp(-iw_k t) = \begin{cases} T & , j = k \pmod{T} \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

ii) Com Respeito aos Pontos Médios

Seja um intervalo  $(-\pi, \pi)$ , dividido em  $T$  subintervalos. Sejam, também,  $x_j, j = 1, \dots, T$ , os pontos médios desses intervalos e  $t \in \mathbb{Z}$ .

$$\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \cos tx_j = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \pmod{T} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \sin tx_j = 0, \quad \forall t$$

iii) Com Respeito a Integração. Sejam  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \begin{cases} 2\pi, & n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0, \quad \forall n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 2\pi, & m = n = 0 \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx = 0, \quad \forall m, n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(imx) \exp(-inx) \, dx = \begin{cases} 2\pi & m = n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

# APÊNDICE II

## EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### EXEMPLO I

A série temporal analisada refere-se a carga própria mensal de energia (MWmed) da CESP – Companhia Energética de São Paulo – no período de janeiro de 1977 a dezembro de 1984.

Da análise da Figura II.1 observa-se que a série é *não estacionária*; o gráfico da série original – Figura II.1 (a) – mostra a existência de tendência e sazonalidade o que, de certa forma, é corroborado na Figura II.1 (b), isto é, a função de autocorrelação estimada decresce linearmente, sendo este decréscimo acompanhado de uma oscilação.

A Figura II.2 mostra as funções de densidade espectral e densidades espectrais amortecidas – janelas de Tukey, Parzen e Blackman-Tukey – para a série original. A tendência é visualizada pelo pico no lag zero, enquanto que um suave pico no lag seis – período de 12 meses – sugere, também, a presença de sazonalidade.

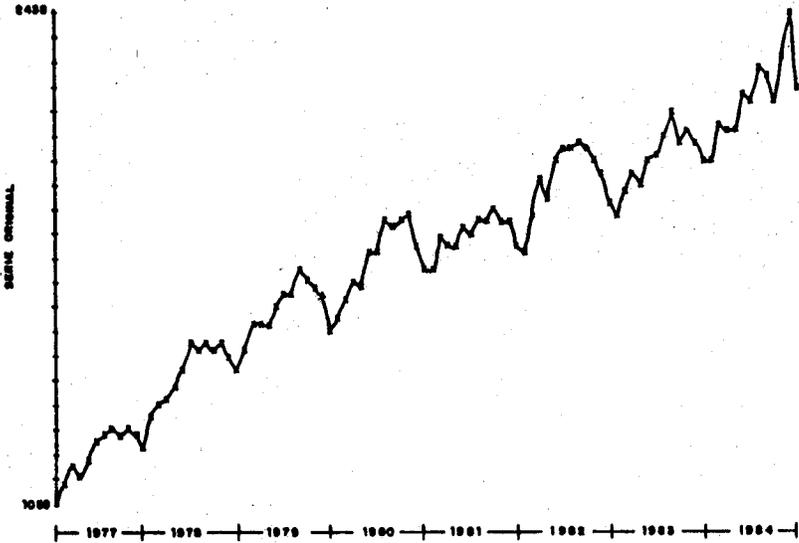
A Figura II.3 mostra as mesmas funções anteriores quando aplicadas à diferença primeira do  $\ln$  da série original. Tomou-se o  $\ln$  da série no sentido de se diminuir a variância da série com o tempo. A aplicação de um operador diferença de ordem 1 implica a obtenção da série com *ausência* de tendência; isto pode ser notado pela redução sensível do espectro no lag zero. Entretanto, deve-se notar que a série continua não estacionária – pico na frequência correspondente a 12 meses.

Na Figura II.4 as mesmas funções foram obtidas após se tomar a diferença sazonal de ordem 1 do  $\ln$  da série original. Observa-se, neste caso, a *ausência* de picos nas frequências correspondentes a 12 meses. Por outro lado, como a diferença primeira não foi aplicada, a série continua não estacionária. Isto pode ser visualizado pelo pico correspondente ao lag zero, indicando a presença de tendência.

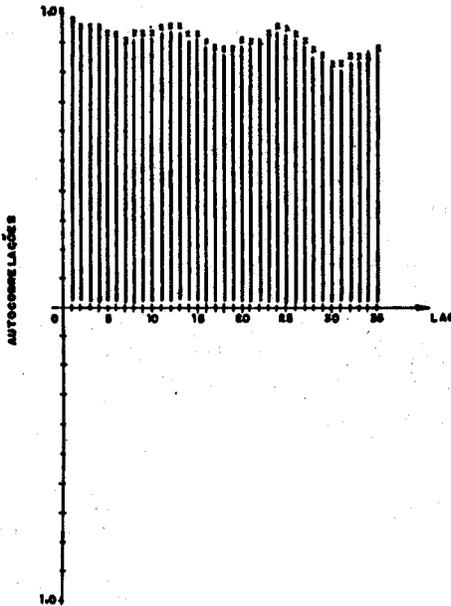
Finalmente, a Figura II.5 apresenta a função de densidade espectral e densidades espectrais amortecidas, após a aplicação da diferença simples e sazonal de ordem 1 ao  $\ln$  da série original. Fica claro, neste caso, as ausências de tendência e sazonalidade na série logaritmada.

FIGURA II.1 - CARGA PRÓPRIA MENSAL DE ENERGIA - MW med - da CESP no PERÍODO JAN / 77 a DEZ / 84

II.1(a)



II.1(b)



LAG	AUTOCORRELAÇÕES
0	1.0000
1	0.9883
2	0.9733
3	0.9549
4	0.9326
5	0.9077
6	0.8809
7	0.8528
8	0.8233
9	0.7924
10	0.7614
11	0.7298
12	0.6980
13	0.6671
14	0.6368
15	0.6070
16	0.5783
17	0.5508
18	0.5248
19	0.4999
20	0.4763
21	0.4540
22	0.4328
23	0.4126
24	0.3934
25	0.3752
26	0.3578
27	0.3413
28	0.3257
29	0.3109
30	0.2969
31	0.2834
32	0.2707
33	0.2586
34	0.2471
35	0.2362

FIGURA II.2 - FUNÇÕES DE DENSIDADE ESPECTRAL e DENSIDADES ESPECTRAIS AMORTECIDAS DA SÉRIE ORIGINAL

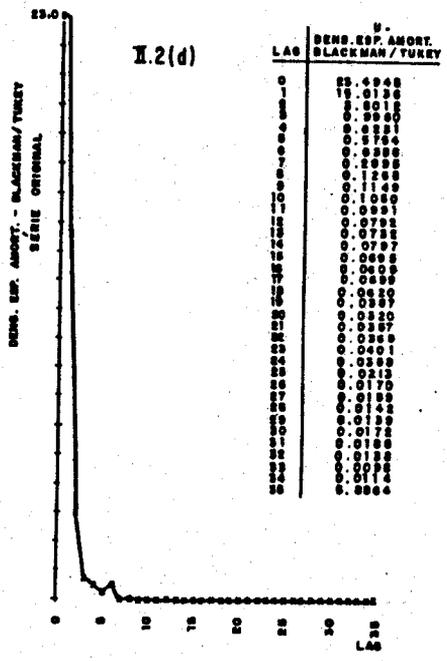
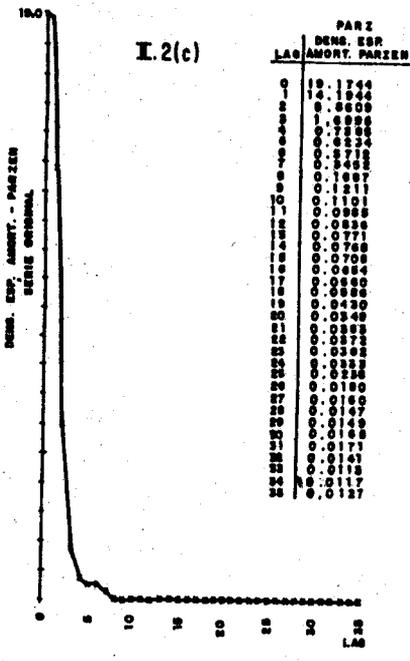
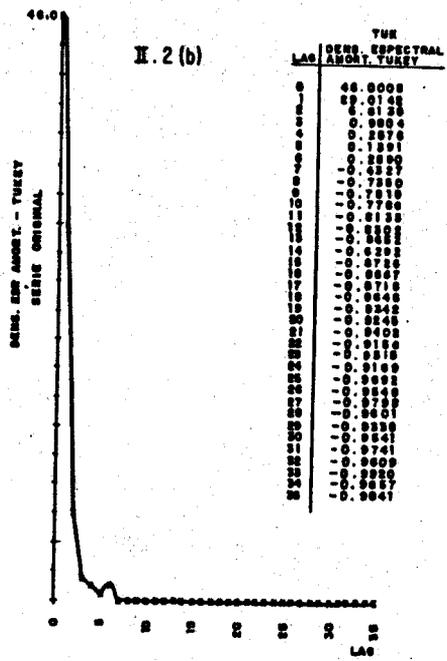
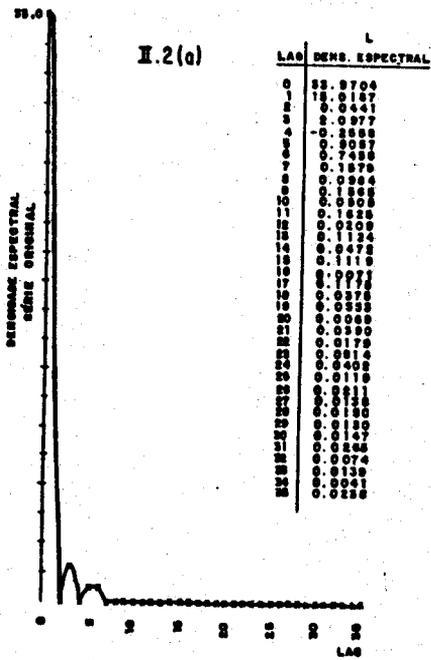


FIGURA II.3 - FUNÇÕES DE DENSIDADE ESPECTRAL e DENSIDADES ESPECTRAIS AMORTECIDAS DA DIF. PRIM. DO LN DA SÉRIE ORIGINAL.

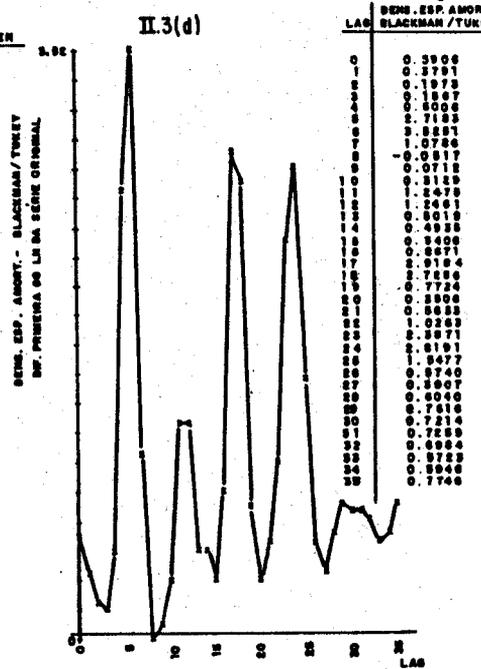
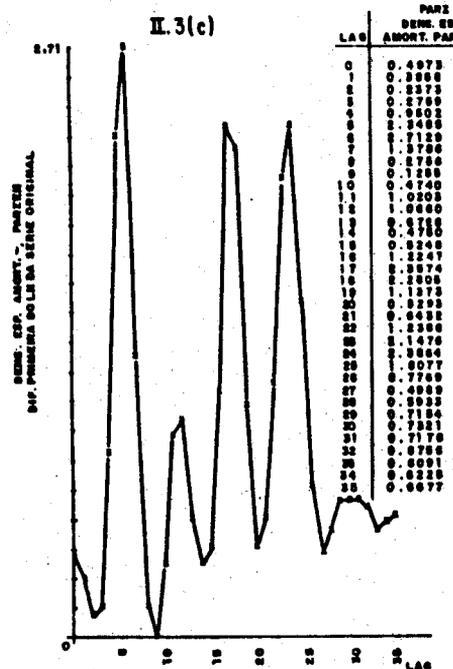
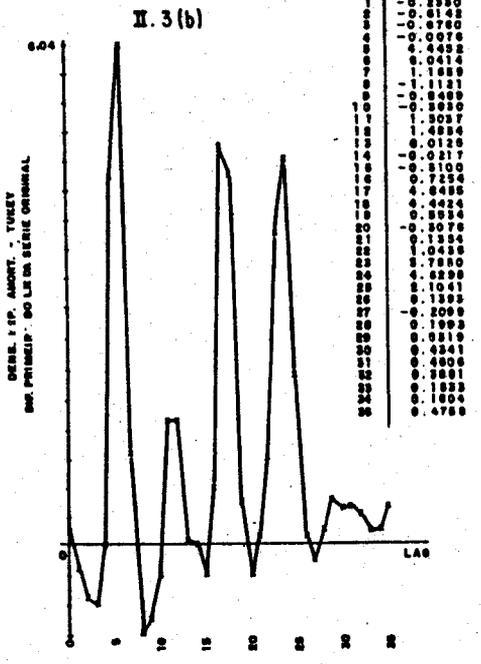
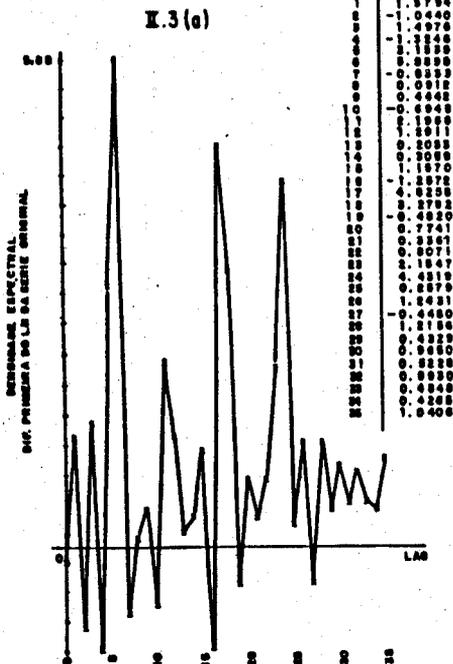


FIGURA II.4 - FUNÇÕES DE DENSIDADE ESPECTRAL e DENSIDADES ESPECTRAIS AMORTECIDAS DA DIF. SAZONAL DO LN DA SÉRIE ORIGINAL

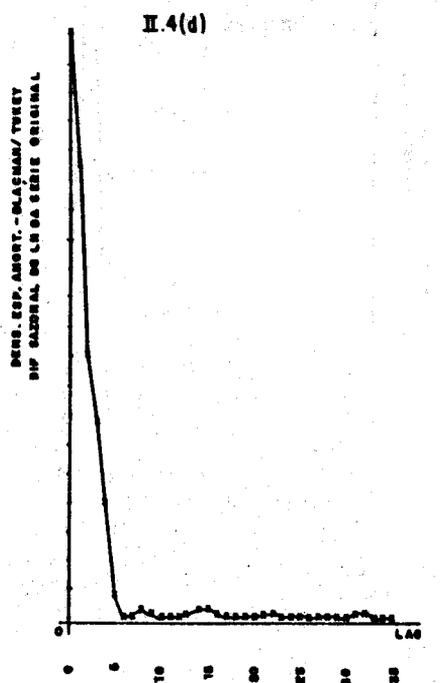
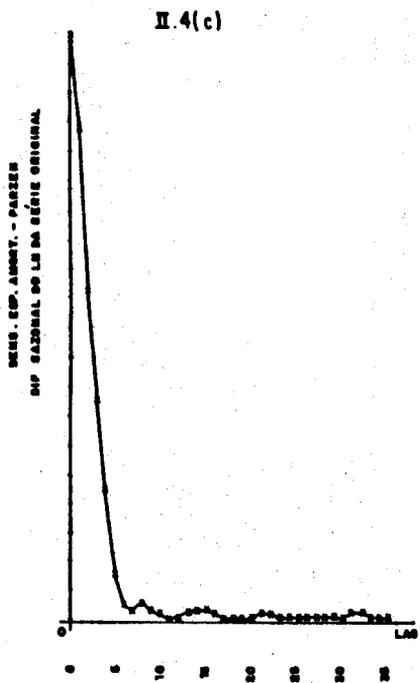
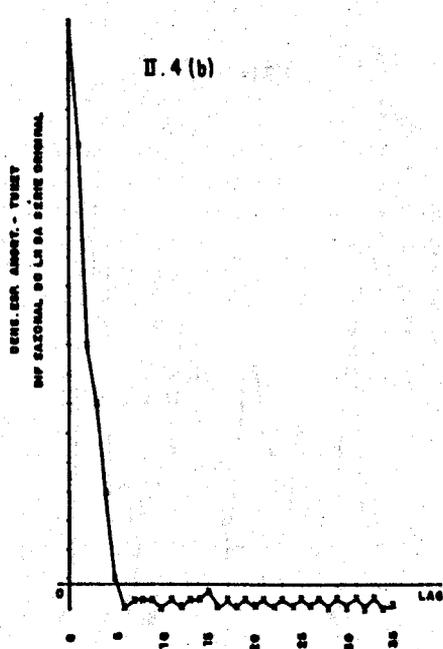
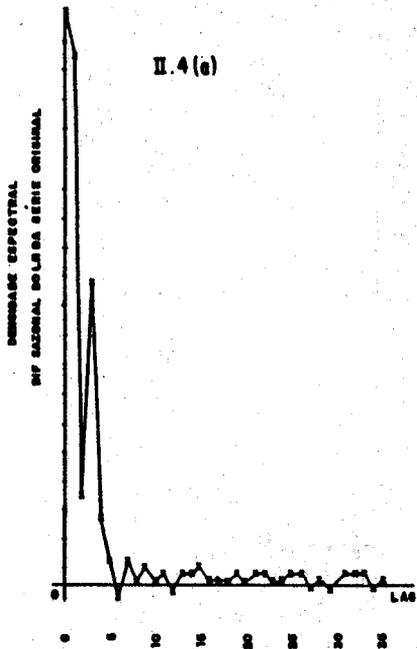
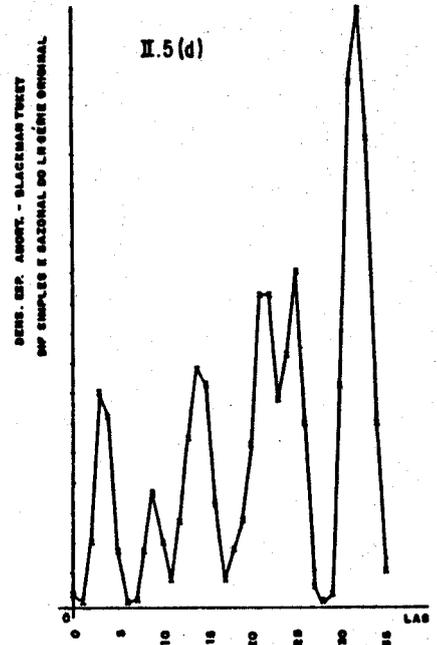
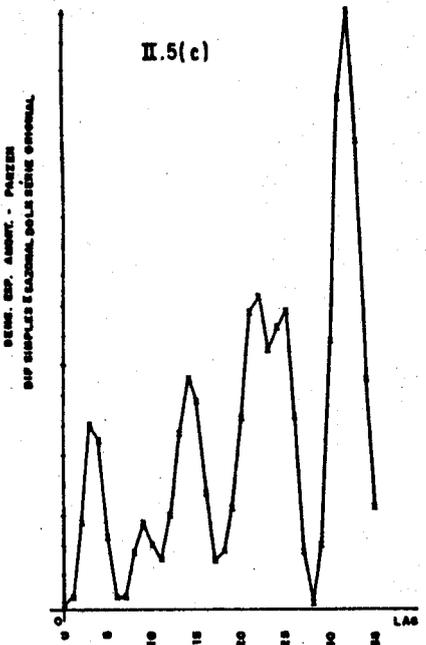
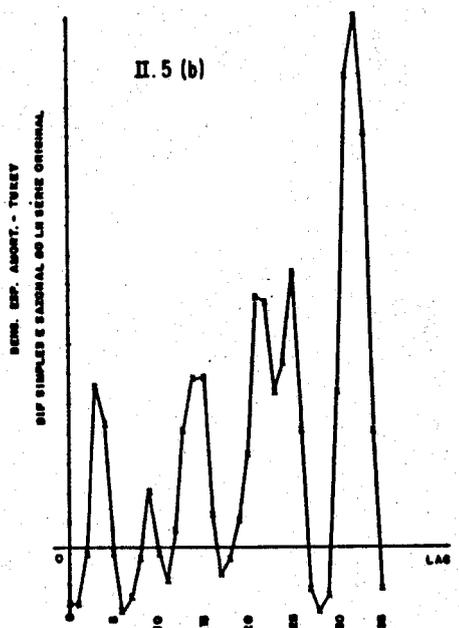
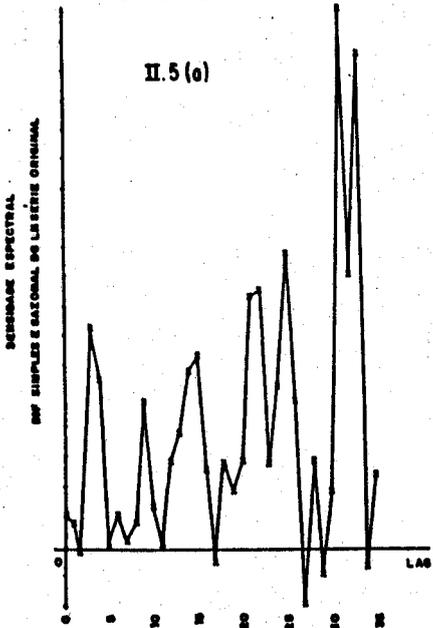


FIGURA II.5 - FUNÇÕES DE DENSIDADE ESPECTRAL e DENSIDADES ESPECTRAIS AMORTECIDAS DA DIF. SIMPLS e SAZONAL DO LN DA SÉRIE ORIGINAL

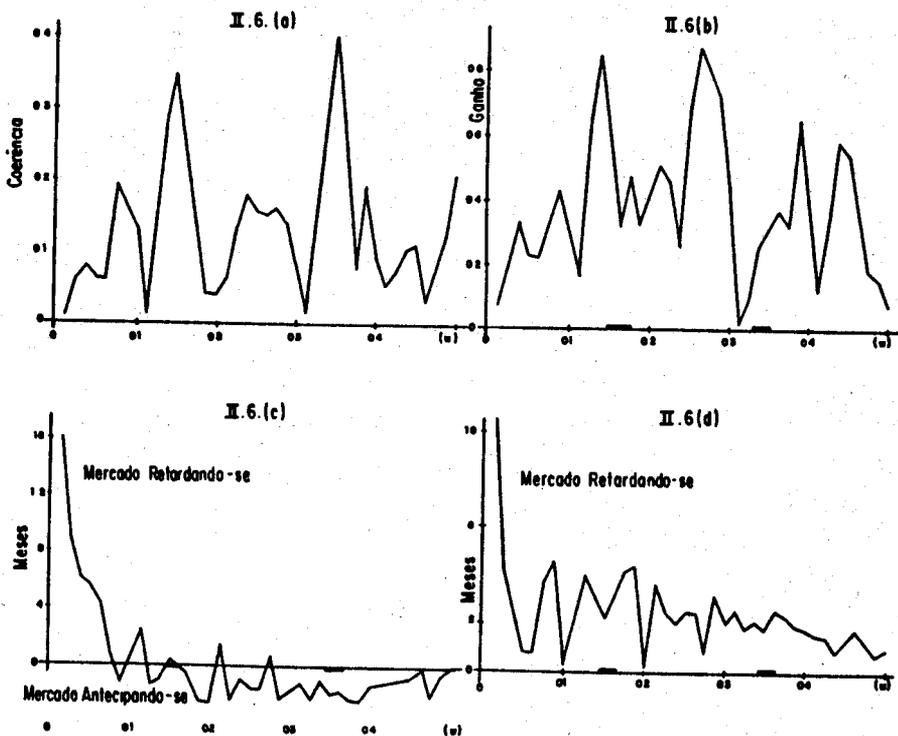


## EXEMPLO II

Este exemplo de aplicação, gentilmente cedido por Claudio R. Contador, foi extraído do artigo "Uma Análise Espectral dos Movimentos da Bolsa de Valores do Rio de Janeiro", publicado na Revista Brasileira de Mercado de Capitais 1(1): 67-92 de jan/abr 1975. Refere-se às séries "Taxas Mensais das Variações do Índice IBV" e "Oferta de Moeda", no período de janeiro/1955 a dezembro/1971.

As Figuras II.6 (a) e II.6 (b) mostram, respectivamente, as funções Coerência e Ganho entre as séries. Nota-se que a coerência é significativamente diferente de zero nas frequências correspondentes a ciclos de dois a três meses e de cinco a seis meses. O ganho nestas frequências mostra que variações de 1% na oferta de moeda tendem a produzir uma variação de 0,3% a 0,6% no índice de mercado na frequência de cinco a seis meses, e uma variação de 0,3% nas frequências mais altas.

FIGURA II.6 COERÊNCIA, GANHO e FUNÇÃO TAU entre o ÍNDICE BV e OFERTA de MOEDA ( $M_1$ ) no BRASIL



Nas Figuras II.6(c) e II.6(d) são mostradas, respectivamente, as funções Tau e Tau Modificada, definidas por

$$\tau(w) = \frac{\phi_{xy}(w)}{w} \quad \text{e} \quad \tau'(w) = \frac{2\pi - \tau(w)}{w}$$

onde,  $\phi_{xy}(w)$  é o Espectro de Fase, definido pela equação (15) do Capítulo III.

A vantagem de se utilizar a função Tau prende-se ao fato de que, a divisão da fase  $\phi_{xy}(w)$  pela frequência  $w$ , transforma a primeira numa medida real de tempo, isto é, em medidas de tempo em dias, semanas, meses etc. Quando esta função é constante, diz-se que a relação entre os processos é uma relação de puro atraso. Entretanto, a interpretação do ângulo de fase cria outro tipo de problema, pois o processo "x", antecipando-se ao processo "y" em uma dada frequência, pode ser consistente com o processo "X", atrasando-se ao processo "Y" na mesma frequência. Este problema surge porque a fase é um ângulo derivado do arco-tangente e, desse modo, pode ser alterado pela simples adição ou subtração de um múltiplo de  $2\pi$ . Daí, o motivo de se utilizar, também, a função Tau Modificada.

A função Tau mostra que os movimentos na Bolsa de Valores do Rio de Janeiro coincidem, em parte, com as mudanças da política monetária nas frequências correspondentes a um período de seis meses; no entanto, a política monetária retarda-se, em relação aos preços de mercado, em um mês nas frequências mais altas. Por outro lado, a função Tau Modificada sugere que a política monetária antecipe-se ao mercado em dois ou três meses na frequência mais baixa, e em dois meses na frequência mais alta.

## —BASILIO DE BRAGANÇA PEREIRA

- nasceu no Rio de Janeiro em 29 de abril de 1945. Cursou o Comercial, o Técnico e o Bacharelado em Ciências Estatísticas na ENCE. É M. Sc. em Pesquisa Operacional pela COPPE/UFRJ e D. I. C. e Ph. D. em Estatística pelo Imperial College, University of London.

É pesquisador Titular do Programa de Engenharia de Produção da COPPE/UFRJ e Professor do Departamento de Métodos Estatísticos do IM/UFRJ. Membro atuante em várias sociedades científicas, é Editor Associado da *Pesquisa Operacional*, Revisor de *Mathematical Reviews*, e Ex-Editor Associado do *Journal of Forecasting*.

Autor de *Séries Temporais Multivariadas*, monografia de mini-curso do 6<sup>o</sup> SINAPE. Preparou recentemente, em co-autoria, a monografia *Análise Econométrica de Séries Temporais* financiado pelo PNPE. E autor de diversos artigos publicados em revistas nacionais e estrangeiras.

## — MARIA BERNADETE ZANUSSO PAIS

- nasceu em José Bonifácio, São Paulo, em 13 de julho de 1958. É formada em Matemática pela UNESP; M. Sc. em Estatística Aplicada pelo IM/UFRJ. Prestou serviços de Consultoria para o Instituto de Desenvolvimento Econômico e Social do Pará (IDESP). Atualmente é Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS).

## — PAULO ROBERTO DE HOLANDA SALES

- nasceu em São Gabriel, Rio Grande do Sul, em 18 de agosto de 1949. É Bacharel em Ciências Estatísticas pela ENCE e Engenheiro Eletricista pela UERJ; M. Sc. em Engenharia de Sistemas e Computação pela COPPE/UFRJ. Em 1981/1982 foi pesquisador na The University of Western Ontario, Canadá.

Doutorando em Pesquisa Operacional na COPPE/UFRJ, é Professor do Instituto de Matemática e Estatística do IME/UERJ. É engenheiro do Departamento de Operação Energética da Eletrobrás e autor de diversos artigos em *Séries Temporais* e *Hidrologia Estocástica* no Brasil e no exterior.

Em 1985, participou do 14<sup>th</sup> Annual Franz Edelman Award Competition, patrocinado pelo The Institute of Management Sciences (TIMS), em Boston, USA, como um dos autores do trabalho "Coordinating the Energy Generation of the Brazilian System", contemplado com o segundo prêmio.

ANÁLISE ESPECTRAL DE SÉRIES TEMPORAIS. Uma  
Introdução para Engenharia, Economia e Estatística  
(Spectral Analysis of Time Series - An Introduction  
for Engineering, Economy and Statistics.) (In  
Portuguese.) B. de B. Pereira, M.B.Z. Pais and  
P.R. de H. Sales; Eletrobras. Rio de Janeiro,  
Brazil; Centrais Eléctricas Brasileiras S/A -  
Electrobrás, 1986, pp. 108.

Contents:

1. Introduction to the theory of time-series
2. Univariate spectral analysis
3. Multivariate spectral analysis

References

Appendix I: Trigonometric identities and orthogonal relations

Appendix II: Examples of applications

Readership: An introduction, presupposing calculus and basic statistics, for students of engineering, physics, biology, economics and statistics

A clear exposé of the basic ideas related to spectral analysis of stationary time series after removal of seasonality and trend. Its essential topics are given in the table of contents. The treatment is elementary. To clarify the ideas some examples of spectra are given for the usual cases. Various examples give an idea of how to understand and use spectral analysis. Also the multivariate time series are dealt within the same lines, cross-correlations and cross-spectrum being considered.

In what is regarded as univariate time series, for instance their spectral representation is stated, estimation procedures for the spectrum are given, the usage of the Fast Fourier Transform is described and the pure time-series spectrum is studied. Applications are given, with some elementary case studies.