



COPPE / UFRJ

COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

TOPICOS EM SERIES TEMPORAIS :  
METODOS AUTOMATICOS DE PREVISAO

BASILIO BRAGANÇA PEREIRA

PDD 07/80

TÓPICOS EM SÉRIES TEMPORAIS:  
MÉTODOS AUTOMÁTICOS DE PREVISÃO

Basílio de Bragança Pereira  
junho de 1980

## PREFÁCIO

Este trabalho constitui parte do material utilizado em cursos e seminários de Análise e Previsão de Séries Temporais no Programa de Engenharia de Produção da COPPE e no Departamento de Métodos Estatísticos do Instituto de Matemática desde 1978.

A opção de publicar o material separado em tópicos foi motivada primeiro porque diversos programas da COPPE dão ênfase a diferentes aspectos da Análise de Séries Temporais; segundo para motivar outros pesquisadores a publicar nesta série exposições ou resultados da teoria que sejam mais relevantes a sua área.

Nesta primeira publicação apresenta-se de maneira intuitiva os métodos clássicos de previsão bastante utilizados em Pesquisa Operacional, Administração, Economia etc. Ela serve também como manual para parte do programa de computador SIBYL - RUNNER, adquirido pela COPPEAD e implantado no NCE da UFRJ.

Basilio de Bragança Pereira

## ÍNDICE

	pg.
Capítulo I - Introdução	1
1 - Exemplos	1
2 - Terminologia	2
3 - Objetivo da análise de séries temporais	3
4 - Enfoques para análise de séries temporais	5
5 - Tipos de variação	5
6 - Séries temporais estacionárias	6
7 - Plots	7
8 - Transformações	7
9 - Análise de séries sem tendência na média	8
10 - Análise de séries com tendência na média	9
11 - Tipos de modelos	10
Capítulo II - Métodos Automáticos de Previsão	12
1 - Métodos ingenuos	12
2 - Médias móveis simples	12
3 - Média móvel dupla linear	14
4 - Média móvel linear	14
5 - Amortecimento exponencial simples	15
6 - Amortecimento exponencial duplo linear de Brown	17
7 - Amortecimento exponencial triplo <u>qua</u> drático de Brown	19
8 - Amortecimento exponencial de Holt	20
9 - Amortecimento exponencial multiplicativo de Muir	20
10 - Amortecimento exponencial sazonal multi- plicativo de Holt-Winters	21
11 - Amortecimento exponencial sazonal <u>adi</u> tivo de Holt-Winters	22
12 - Amortecimento exponencial simples adapta- tivo de Trigg e Leach	23
13 - Amortecimento exponencial adaptativo de Chow	24

	pg.
14 - Amortecimento exponencial adaptativo de Roberts e Reed	25
15 - Amortecimento exponencial adaptativo de Montgomery	27
16 - Amortecimento harmônico de Harrison	27
17 - Autoregressão "Step-Wise"	31
18 - Método de decomposição Census II	33

#### APÊNDICE

A1 - Resumo de amortecimento exponencial	36
A2 - Relações com modelos Box-Jenkins	39
A3 - Medidas de comparação e intervalos de confiança	40
A4 - Combinação de previsões	43
A5 - Estimação de $\sigma$ através da amplitude amostral R	46

#### REFERÊNCIAS

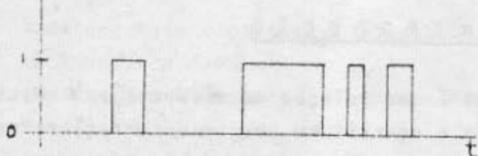
47

## I. INTRODUÇÃO

Uma série temporal é uma coleção de observações feitas sequencialmente no tempo e constituem uma importante área da estatística.

### 1) EXEMPLOS

- a) Séries econômicas - preços de ações em dias sucessivos, valor das exportações mensais, receita média mensal de uma empresa, lucros anuais. Uma série econômica muito utilizada e analisada é a clássica série de preços de trigo de Beveridge, que consiste no preço médio de trigo em perto de 50 locais de vários países nos anos sucessivos de 1500 a 1869.
- b) Séries físicas - precipitação pluviométrica diária, vazões de rio, temperatura diária, medições de marés horárias.
- c) Séries de mercadologia - vendas semanais de um produto, gastos com propaganda. O interesse é relacionar estas duas séries.
- d) Séries demográficas - população anual, nascimentos, mortes.
- e) Controle de processos - medidas de uma variável que mostra a qualidade do produto: viscosidade, grau de metalização. O interesse é manter a variável dentro de limites através de ações corretivas.
- f) Medicina e epidemiologia - pressão uterina durante o parto, pressão sanguínea, batidas do coração durante o parto, número de ocorrência semanais de sarampo.
- g) Processos binários - observações tomando somente valores 0 e 1. Posição de um interruptor: ligado e desligado.



h) Processos pontuais - evento ocorrendo aleatoriamente no tempo. Falhas de um computador, chegadas a uma fila de serviços.



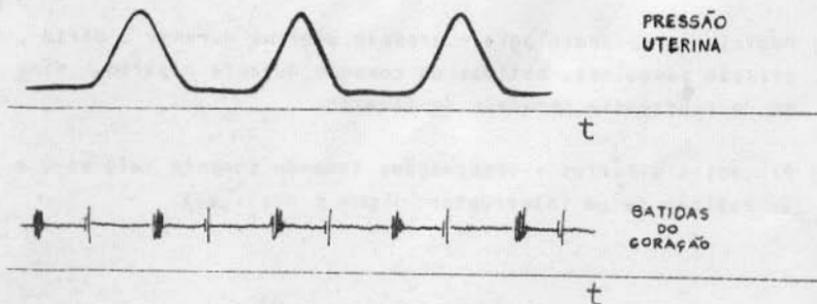
O interesse é estudar a distribuição do número de eventos em determinado período, bem como a distribuição dos intervalos entre ocorrências de eventos.

## 2) TERMINOLOGIA

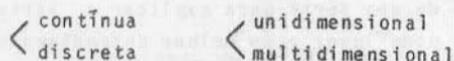
A variável observada pode ser:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{contínua} \\ \text{discreta} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{unidimensional} \\ \text{multidimensional} \end{array} \right.$

Às vezes a variável é discreta (ex: população) mas por sua magnitude pode ser considerada contínua. Um exemplo de série multidimensional é medir ambos: pressão uterina, batidas do coração do bebê. O gráfico obtido por equipamentos médicos são da forma:



variável "tempo" pode ser:



Dado uma série contínua (ex: eletrocardiograma) podemos "a mostrar" a série, isto é, observá-la em determinados instantes, quiespaçados ou podemos agregar (adicionar) os valores em intervalos de tempo iguais. Outras séries são realmente discretas.

Um exemplo de "tempo" multidimensional seria o número de casos de sarampo por semana e por município. No caso o "tempo" (semana, município) é bidimensional. O exemplo esclarece que a variável "tempo" pode ter outra interpretação como área, espaço ou outros.

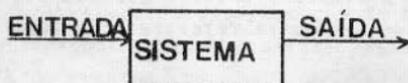
O fato essencial sobre análise de séries temporais é o fato de que observações sucessivas são dependentes e devemos levar em conta a ordem das observações. Isto contrasta com a maioria dos métodos estatísticos que tratam de observações independentes. Quando as observações são dependentes, valores futuros podem ser, previstos dos valores já observados. Se a série temporal pode ser prevista exatamente, a série é dita determinística. A maioria das séries é não determinística ou aleatória, no sentido de que o futuro é só parcialmente determinado pelos valores passados. Para séries aleatórias, previsões exatas são impossíveis e devem ser substituídas pela idéia que futuros valores tem uma distribuição de probabilidades condicionada pelo conhecimento de valores passados.

### 3) OBJETIVOS DA ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

Os objetivos podem ser classificados como:

- a) Descrição - a primeira etapa em uma análise de séries temporais é plotar os dados e obter estatísticas descritivas simples das principais propriedades da série. A análise gráfica fornece informações iniciais sobre tendências, pontos de mudanças, observações espúrias, etc.

- b) Explicação - quando observamos duas ou mais séries, pode ser possível usar a variação de uma série para explicar a variação em outra série. Isto pode levar a um melhor entendimento do mecanismo gerador das séries. Regressão múltipla é útil nesta etapa. Este tipo de problema é também estudado em teoria de sistemas lineares. Dado observações sobre a entrada e a saída de um sistema linear, queremos verificar suas propriedades. Por exemplo, é de interesse saber como o nível do mar é afetado pela temperatura e pressão, como vendas são efetuadas pelo preço e gastos com propaganda, como batidas do coração são afetadas por esforço físico.



- c) Predição - dado uma série temporal, podemos desejar prever futuros valores da série. Isto é importante em diversas áreas onde tomadas de decisão são necessárias. Usaremos os termos predição e previsão como sinônimos. Alguns autores usam o termo previsão significando qualquer método de ver o futuro e predição à maneira sistemática de fazê-lo.
- d) Controle - quando a série temporal é uma medida da "qualidade" do processo de produção, o objetivo da análise pode ser o controle do processo. Os procedimentos de controle são de diferentes tipos. Em controle estatístico da qualidade as observações são plotadas em gráficos de controle, cuja análise indica as ações a serem tomadas. Estratégias de controle mais sofisticadas foram desenvolvidas por Box e Jenkins. Um modelo estocástico é ajustado a série, futuros valores são preditos e então as variáveis de entrada do processo são ajustadas para manter o processo correto.

#### 4) ENFOQUES PARA ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

Em problemas de séries temporais como em qualquer análise de dados, procura-se obter um modelo matemático que descreva o fenômeno de maneira parcimoniosa para o objetivo desejado. Sua forma funcional deve ser simples e o número de parâmetros envolvidos deve ser mínimo. Não só isso, o modelo deve ser parametrizado de tal forma que cada parâmetro possa ser interpretado facilmente e identificado com algum aspecto da realidade. Além disso, sua forma funcional deve permitir uma fácil manipulação matemática necessária para inferências a seu respeito.

Uma ferramenta utilizada para identificar modelos será a função de autocorreção. Inferência baseada nesta função é frequentemente chamada uma análise no domínio do tempo.

Outra ferramenta utilizada é a função de densidade espectral, que é uma transformada da função de autocorreção. Inferência baseada nesta função é frequentemente chamada uma análise no domínio da frequência.

A análise no domínio da frequência em geral é feita quando a estrutura do processo é de interesse. É uma análise da frequência com que certos eventos ocorrem, em distinção a análise no domínio do tempo que mede a magnitude do evento que ocorre em determinado instante de tempo. A análise no domínio do tempo é baseada em um modelo paramétrico, e a análise no domínio da frequência é uma técnica não-paramétrica.

As duas técnicas, portanto, não são alternativas, mas sim complementares, mostrando cada uma diferentes aspectos dos dados.

#### 5) TIPOS DE VARIAÇÃO

Métodos tradicionais de análise de séries temporais tratam principalmente da decomposição da série em: tendência, variação sazonal e outras flutuações irregulares. Embora nem sempre este enfoque seja o mais adequado ele é bastante útil.

Descrevemos agora os diferentes tipos de variações:

- a) Efeito sazonal - muitas séries exibem uma variação periódica (diária, semanal, anual, etc). Este tipo de variação é fácil de entender e pode ser medida e extraída dos dados, fornecendo uma série dessazonalizada. Por exemplo, medidas de temperatura exibem uma variação anual periódica, abaixando durante o inverno e aumentando no verão.
- b) Outros efeitos cíclicos - além de efeitos sazonais, algumas séries exibem outras variações de período fixo. Por exemplo, as variações de temperatura ao longo do dia. Além disso outras séries apresentam variações cujo período não é fixo, porém, são possíveis de ser previsto. Por exemplo; dados econômicos podem ser afetados pelos chamados ciclos econômicos com período variando de 5 a 7 anos, segundo algumas teorias econômicas. Dados de vazões de rios parecem obedecer ciclos com períodos de 50 anos, e dados sobre ocorrências de sarampo obedecem a períodos de 2,5 a 3 anos.
- c) Tendência - são os efeitos a longo prazo na média. A dificuldade é definir longo prazo. Por exemplo, variáveis climáticas às vezes exibem variações em períodos de 50 anos. Se tivermos 20 anos de dados esta variação de longo prazo será confundida com tendência. Porém, se tivermos diversas centenas de anos o ciclo será visível. Entretanto a curto prazo podemos pensar neste ciclo de longo prazo como uma tendência.
- d) Flutuação irregular - após remover a sazonalidade, ciclo e tendência, a série fica reduzida a uma série de resíduos. Existem técnicas para verificar se os resíduos são ou não aleatórios. Caso não sejam aleatórios, talvez alguma das componentes não tenha sido suficientemente removida ou talvez o resíduo possa ser modelado por um modelo estocástico de série temporal.

## 6) SÉRIES TEMPORAIS ESTACIONÁRIAS

Intuitivamente diremos que a série temporal é estacionária se não existe uma mudança sistemática na média (tendência)

na variância e, se as variações cíclicas foram removidas. A maior parte da teoria de séries temporais trata de séries estacionárias, por esta razão, a análise é feita transformando séries não estacionárias em estacionárias para usar a teoria. Por exemplo, podemos remover a tendência e a variação sazonal dos dados e então tentar modelar a variação dos resíduos por um processo estocástico estacionário.

## 7) PLOTS

O primeiro passo ao analisar um conjunto de dados é plotar os dados no eixo dos tempos. Isto em geral indicará as mais importantes propriedades da série. Fatores como tendência, sazonalidade, descontinuidades, são usualmente visíveis se ocorrem na série.

Às vezes é interessante plotar os resíduos dos dados à uma curva ajustada, isto é, plotar as diferenças à uma curva, examinando as flutuações em torno da curva, onde os resíduos são as diferenças entre as observações e os correspondentes valores da curva ajustada. Se a série é aproximadamente estacionária, é útil calcular a média e o desvio padrão das observações.

## 8) TRANSFORMAÇÕES

Plots dos dados podem indicar se é desejável transformar os valores de variáveis observada. As duas principais razões para efetuar transformações são:

- a) Estabilizar a variância - se há uma tendência na série e a variância aparenta crescer com a média, então é indicado fazer uma transformação. Em particular se o desvio padrão é diretamente proporcional a média, a transformação logarítmica é apropriada.
- b) Tornar o efeito sazonal aditivo - se há uma tendência na série e o efeito sazonal aparenta crescer com a média, então é indicado fazer uma transformação. Se o crescimento é diretamente proporcional à média, o efeito sazonal é dito multiplicativo e a transformação logarítmica é apropriada para tor

nar o efeito aditivo. Esta transformação somente estabilizará a variância se o termo aleatório também for multiplicativo.

Os modelos sazonais mais usados são:

$$a) X_t = m_t + S_t + \epsilon_t$$

$$b) X_t = m_t S_t + \epsilon_t$$

$$c) X_t = m_t S_t \epsilon_t$$

onde:

$X_t$  = observação no instante  $t$

$m_t$  = média atual

$S_t$  = efeito sazonal

$\epsilon_t$  = termo aleatório

O modelo a) é aditivo e não requer transformações, o modelo c) é aditivo ao tomarmos logaritmo, o modelo b) é multiplicativo com erro aditivo.

Na prática, frequentemente, ocorre que outro tipo de transformação que não a logarítmica é necessária para tratar dos problemas a) e b). Uma maneira de encontrar o tipo de transformação conveniente é utilizar a análise de transformação de Box - Cox definida por

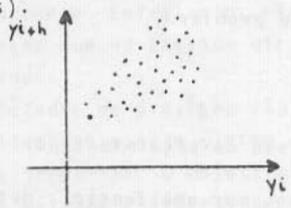
$$Y_t = \begin{cases} \frac{X_t^\lambda - c}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \log X_t & \lambda = 0 \end{cases}$$

onde  $\lambda$  e  $c$  são parâmetros a serem estimados.

## 9) ANÁLISE DE SÉRIES SEM TENDÊNCIA NA MÉDIA

Com dados suficientes, divida os dados em seções, analise cada seção separadamente e combine somente no caso de serem razoavelmente homogêneos. Possivelmente teremos interesse em:

- a) Distribuição de frequência geral - histogramas, plots acumulados, momentos, observações discrepantes. (Para isto abandone a ordem das observações).
- b) Diagramas de dispersão de  $y_{i+h}$  com  $y_i$  para vários  $h$  (pequenos).



Se a série é completamente aleatória, o gráfico não mostra dependência. Se a dependência é linear, defina  $r_1$  (ou em geral  $r_h$ ), coeficiente de correlação serial de lag 1 (ou lag  $h$ ) ou coeficiente de autocorrelação, que é coeficiente de correlação entre  $Y_t$  e  $Y_t + h$ . Possivelmente tome transformações para obter linearidade.

- c) Com dados binários (0,1) para verificar dependência, determine as frequências relativas das seqüências

$(Y_{i+1} = 1/Y_i = 0)$ ,  $(Y_{i+1} = 1/Y_i = 1)$  bem como  $(Y_{i+1} = 1/Y_i = 0, Y_{i-1} = 0)$ , ... etc, e teste se tem propriedades de Markov.

- d) Determine a frequência de pontos de mudança ou de máximos e mínimos locais, a distribuição dos intervalos entre os meses, frequência com que a série cruza certo nível de referência. Para séries completamente aleatórias a distribuição teórica destas características, é conhecida em pelo menos seus momentos e testes de aleatoriedade podem ser utilizados (ver Kendall, 1973, capítulo 2).

10) ANÁLISE DE SÉRIES COM TENDÊNCIA NA MÉDIA

A análise de séries temporais que exibem mudanças na média objetivam (a) medir a tendência e/ou (b) remover a tendência e

analisar flutuações locais. Com dados sazonais é interessante calcular sucessivas médias anuais (se sazonalidade é dentro do ano) que fornecem uma descrição e indicação simples da tendência. Às vezes este enfoque é adequado para o estudo, principalmente se a tendência não é fator importante na série. Em outros casos um enfoque mais sofisticado é necessário. No capítulo II veremos alguns métodos de tratar este problema.

## 11) TIPOS DE MODELOS

Os modelos de séries temporais são do seguinte tipo:

- a) Modelos determinísticos - descritos por uma função determinística adicionada a um erro aleatório. Por exemplo:

$$X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

- b) Modelos estocásticos - o elemento aleatório é a parte dominante na estrutura do modelo. Por exemplo:

$$X_t = \alpha + \beta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Em diversas situações podemos estar interessados em combinar (a) e (b).

Ambos os modelos são considerados nas duas seguintes situações que ocorrem na prática:

- i) Modelos globais - a estrutura do sistema é considerada altamente estável e o modelo é considerado válido para todo o período observado.
- ii) Modelos de validade local - a estrutura do sistema é considerada estável em pequenos períodos de tempo porém, não necessariamente para longos períodos. Pequenas mudanças de estrutura podem ocorrer nos dados mas, não devem alterar muito as previsões a curto prazo. Poderíamos utilizar modelos mais sofisticados que incorporassem essas pequenas mudanças de estrutura. Entretanto, frequentemente é suficiente considerar o modelo com validade local.

Não há diferença na formulação matemática ou estatística dos dois tipos de modelos, global ou local. A diferença é feita pela maneira que utilizamos os mesmos. Por exemplo, ao usarmos um modelo  $X_t = \mu + \epsilon_t$  de média constante, localmente fazemos previsões supondo que a média a curto prazo é a mesma que a média corrente. Entretanto, não desejamos supor que a média atual é a mesma que no passado distante, quando obtivemos os primeiros dados.

Métodos de previsão são classificados em: Qualitativos e Quantitativos e este último em: Econométricos (explicativos) e Séries Temporais. O objetivo deste trabalho é apresentar os principais métodos clássicos de previsão quantitativas de séries temporais unidimensionais. Pretende-se que esta série aborde ainda o método de Box-Jenkins, modelos regressivos unidimensionais e de equações simultâneas, função de transferência e análise de intervenção, espectro cruzado e outras técnicas de análise de séries multidimensionais, como modelos de espaço de estados, de desenvolvimento crescente, bem como métodos qualitativos de previsão ou previsão tecnológica.

## II - MÉTODOS AUTOMÁTICOS DE PREVISÃO

Neste capítulo apresentaremos um resumo dos principais métodos dos automáticos de previsão, isto é, métodos que podem ser programados em computador sem necessitar muita intervenção humana. Para facilitar a exposição, suponhamos que temos dados mensais e que a série  $X_1, \dots, X_t$  represente vendas,  $\bar{S}_{t+T}^*$  representará a previsão em  $t$  para o período  $t + T$ .

### 1) MÉTODOS INGÊNUOS

É o método mais simples e grosseiro, e supõe que as vendas do próximo mês serão as mesmas deste mês.

$$\bar{S}_{t+1}^* = X_t \quad (1.a)$$

Se houver sazonalidade de período  $L$

$$\bar{S}_{t+k}^* = X_{t-L+k} \quad (1.b)$$

Esses métodos são usados, em geral, como padrão para comparação entre métodos mais sofisticados.

### 2) MÉDIAS MÓVEIS SIMPLES

Suponha que  $X_t$  possa ser descrita localmente por

$$X_t = a + \varepsilon_t$$

Poderíamos tomar como previsão para o próximo mês a média da série  $X_1, \dots, X_t$ , entretanto, isto não é razoável pois estaríamos dando o mesmo peso às observações mais antigas que as mais recentes, incluindo observações em que possivelmente o nível  $a$  seja outro. É mais razoável então, tomar a média dos últimos  $N$  períodos, isto é,

$$\bar{S}_{t+1}^* = M_t = \frac{X_t + X_{t-1} + \dots + X_{t-N+1}}{N} = \bar{S}_t^* + \frac{X_t}{N} - \frac{X_{t-N}}{N} \quad (2)$$

Note que quanto maior  $N$ , mais será o amortecimento. Se  $N = 1$  a observação mais recente é usada como previsão (Método ingênuo), e o método acompanha a série. Se  $N = t$  temos a média. Escolhemos  $N$  grande se a aleatoriedade  $\varepsilon_t$  predominar a mudança de nível (modelo é global), e  $N$  pequeno se a mudança de nível

predomina. Na prática  $N$  é obtido por tentativas, minimizando a algumas função objetivo, como o erro quadrático de previsão um passo a frente ou o erro absoluto médio.

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (\bar{S}_i - X_i)^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t e_i^2$$

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t [\bar{S}_i - X_i] = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |e_i|$$

Observe que  $\bar{S}_{t+1}$  é o estimador de mínimos quadrados, isto é, minimizar

$$SS = \sum_{i=t-N+1}^t (X_i - a)^2,$$

e  $\bar{a}$  não viesado, isto é,  $E(\bar{S}_{t+1}) = a$

Algumas desvantagens das médias móveis são:

- É necessário armazenar muitos dados (pelo menos  $N-1$ )
- Para inicializar é necessário esperar  $N$  meses, ou usar a modificação.

$$M_t = X_t$$

$$M_t = \frac{1}{2} (X_t + X_{t-1})$$

⋮

- Não é razoável dar o mesmo peso a última observação  $S_t$  e a mais antiga  $S_{t-N+1}$ . Isto pode ser modificado tomando pesos diferentes, por exemplo:

$$\bar{S}_{t+1} = 0.4X_t + 0.3X_{t-1} + 0.2X_{t-2} + 0.1X_{t-3}$$

- Não é lógico que a observação  $X_{t-N+1}$  tenha peso  $\frac{1}{N}$  e a observação  $X_{t-N}$ , somente um período anterior, não receba peso algum.

O mais razoável, é um sistema de pesos que diminua gradualmente com o tempo ao longo de um período grande.

### 3) MÉDIA MÓVEL DUPLA LINEAR

Suponha que  $X_t$  possa ser descrita localmente por:

$$X_t = a + bt + \varepsilon$$

Neste método calculamos

$$M_t = \frac{X_t + \dots + X_{t-N+1}}{N}$$

$$M_t^{(2)} = \frac{M_t + \dots + M_{t-N+1}}{N}$$

A equação de previsão para T períodos à frente é:

$$\hat{S}_{t+T}^* = 2M_t - M_t^{(2)} + T \frac{2}{N-T} (M_t - M_t^{(2)}) \quad (3)$$

### 4) MÉDIAS MÓVEIS LINEAR

O desenvolvimento do método de médias móveis dupla é feito de maneira heurística e o único critério adotado e que as estimativas de a e b sejam não viesadas (Montgomery e Johnson, p. 35-36). É possível derivar um método aproximadamente equivalente ao modelo localmente linear usando somente as N mais recentes observações, isto é minimizando.

$$SS = \sum_{i=t-N+1}^t (X_i - a - bt)^2$$

A solução das equações normais fica simplificada se mudarmos a origem para o centro dos dados, isto é, de  $T = 0$  para  $T = \bar{t}$  onde

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t i = t - \frac{N-1}{2}$$

A transformação não afeta o parâmetro de tendência, porém, o parâmetro de nível fica

$$a' = a + b\bar{t}$$

As soluções das equações normais no instante  $t$  ficam:

$$\bar{a}' = M_t$$

$$\bar{A}_t = \frac{12}{N(N^2-1)} \left[ \frac{N-1}{2} X_t + \frac{N-3}{2} X_{t-1} + \dots + \frac{N-1}{2} X_{t-N+1} \right] = U_t$$

que podem ser re-estimadas a cada passo por

$$\bar{a}'_t = M_{t-1} + \frac{X_t}{N} - \frac{X_{t-N}}{N}$$

$$\bar{A}_t = U_t = U_{t-1} + \frac{12}{N(N^2-1)} \left[ \frac{N-1}{2} X_t + \frac{N+1}{2} X_{t-N} - N M_{t-1} \right]$$

A equação de previsão para  $T$  período a frente é;

$$\bar{S}_{t+T}^* = M_t + U_t \left( \frac{N-1}{2} + T \right) \quad (4)$$

Os resultados deste método diferem do anterior porque  $\bar{m}_t$  dias móveis duplas utiliza observações mais antigas que  $X_{t-N+1}$  e que se encontram em  $M_t^{(2)}$ .

## 5) AMORTECIMENTO EXPONENCIAL SIMPLES

Suponha que  $X_t$  possa ser descrita localmente por

$$X_t = a + \varepsilon_t$$

Um tipo de média que evita algumas dificuldades encontradas pelo método de médias móveis, é baseada na utilização de pesos que decresce exponencialmente.

A equação de previsão pode ser desenvolvida a partir de expressão (2) para médias móveis.

$$S_{t+1} = M_t = S_t + \frac{X_t}{N} - \frac{X_{t-N+1}}{N}$$

Suponha que  $X_{t-N+1}$  não é disponível e que estimamos por  $S_t = M_{t-1}$ , obtemos

$$M_t = \frac{1}{N} X_t + \left(1 - \frac{1}{N}\right) M_{t-1}$$

Como  $N$  é inteiro positivo,  $\frac{1}{N}$  estará entre 0 ( $N \rightarrow \infty$ ) e 1 ( $N=1$ ) e fazendo  $\alpha = \frac{1}{N}$  obtemos

$$M_t = \alpha X_t + (1-\alpha) M_{t-1} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.a)$$

Substituindo-se  $S_t$ ,  $S_{t-1}$ , ... etc obtem-se

$$M_t = \alpha X_t + \alpha(1-\alpha) X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{t-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^t M_0, \quad (5.b)$$

onde os pesos decrescem exponencialmente.

Uma forma alternativa é:

$$M_t = M_{t-1} + \alpha(X_t - M_{t-1}) = M_{t-1} + \alpha e_t, \quad (5.c)$$

isto é,

$$S_{t+1} = S_t + \alpha e_t, \quad (5.d)$$

A equação de previsão para  $T$  períodos à frente é

$$\bar{S}_{t+T}^* = S_{t+1} = M_t. \quad (5.e)$$

#### Comentários:

- Embora a obtenção das expressões tenha sido feita heurística-mente, as mesmas poderiam ter sido obtidas por mínimos quadrados com desconto (amortecimento direto, Montgomery e Johnson, 1976 ou Brown 1962), isto é, minimizando.

$$SS = \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} (X_i - a)^2 \quad 0 \leq \beta = 1 - \alpha \leq 1$$

- O termo amortecimento exponencial é óbvio tendo em vista a expressão (5.b)
  - Neste método é necessário armazenar apenas  $X_t$ ,  $S_t = M_{t-1}$  e  $\alpha$ , o que torna atrativo quando um nº grande de séries deve ser previsto periodicamente.
  - Da expressão (5.d), vemos que a previsão é dada pela previsão anterior mais uma correção para o erro que ocorreu anteriormente. Se  $\alpha$  está próximo de 1, há uma correção substancial, e  $\alpha$  perto de 0 inclui pouca correção.
  - O efeito de  $\alpha$  grande ou pequeno é análogo (na direção contrária) ao efeito em  $N$  para média móveis.
  - Para iniciar o processo, usamos a primeira observação como  $M_0$  ou a média das 4 ou 5 primeiras.
  - O valor de  $\alpha$  é escolhido análogo a  $N$  para médias móveis, de maneira a minimizar alguma função objetivo que mede a qualidade do ajustamento.
- Pelo desenvolvimento vimos que  $0 \leq \alpha \leq 1$ , e diversos autores sempre sugeriram que  $0,01 \leq \alpha \leq 0,3$  e que para valores fora do intervalo o modelo deve ser questionado. Entretanto, Chatfield (1978) apresenta exemplos onde  $\alpha > 1$  produz previsões comparáveis a métodos mais sofisticados, como Box-Jenkins.
- Mostra-se que o método de amortecimento exponencial com  $\alpha = \frac{2}{N-1}$  fornece previsões comparáveis ao de médias móveis ( $N$ ). para isto, basta igualar a idade média dos dados em cada método, isto é,

$$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i i = \frac{1-\alpha}{\alpha} \text{ e } \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} i = \frac{N-1}{2}$$

## 6) AMORTECIMENTO EXPONENCIAL DUPLO LINEAR DE BROWN

Suponha que  $X_t$  possa ser descrita localmente por

$$X_t = a + bt + \epsilon ,$$

Neste método calculamos

$$M_t = \alpha X_t + (1-\alpha) M_{t-1}$$

$$M_t'' = \alpha M_t + (1-\alpha) M_{t-1}''$$

Mudando a origem para o período atual  $t$ , isto é,  $t = 0$ , a estimativa dos novos parâmetros  $a'$  e  $b'$  são:

$$\bar{a}'_t = 2M_t - M_t'' , \quad (6.a)$$

$$\bar{A}'_t = \frac{\alpha}{1-\alpha} (M_t - M_t'') .$$

A equação de previsão para  $T$  períodos à frente é

$$\bar{S}_{t+T}^* = 2M_t - M_t'' + T \frac{\alpha}{1-\alpha} (M_t - M_t'') . \quad (6.b)$$

Comentários:

- Para iniciar o processo é necessário obter estimativas iniciais  $M_0$ ,  $M_0''$ . Se temos, por exemplo, algumas observações  $X_1, \dots, X_k$  obtemos valores iniciais usando regressão linear simples para estimar  $a$  e  $b$  (ou  $a'$  e  $b'$ ) e resolvemos o sistema (ou (6.a) em  $\bar{a}'_k$  e  $\bar{A}'_k$ ).

$$\bar{a}'_k = 2M_k - M_k'' - k \frac{\alpha}{1-\alpha} (M_k - M_k'') ,$$

$$\bar{A}'_k = \frac{\alpha}{1-\alpha} (M_k - M_k'') ,$$

Se não temos  $k$  observações, estimamos  $a$  e  $b$  subjetivamente e resolvemos as equações acima para  $M_0$ ,  $M_0''$  obtendo

$$M_0 = \bar{a}'_0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} b_0 ,$$

$$M_0'' = \bar{a}'_0 - 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} b_0 .$$

- As equações anteriores podem ser obtidas por mínimos quadrados com desconto. (Montgomery e Johnson 1976 ou Brown, 1962).

### 7) AMORTECIMENTO EXPONENCIAL TRIPLO QUADRÁTICO DE BROWN

Suponha que  $X_t$  possa ser descrita localmente por:

$$X_t = a + b_1 t + \frac{1}{2} b_2 t^2 + \varepsilon.$$

Neste método calculamos

$$M_t = \alpha X_t + (1-\alpha) M_{t-1},$$

$$M_t'' = \alpha M_t + (1-\alpha) M_{t-1}'' ,$$

$$M_t''' = \alpha M_t''' + (1-\alpha) M_{t-1}''' .$$

Mudando a origem para o período atual  $t$ , isto é,  $t = 0$  a estimativa dos novos parâmetros  $a'$ ,  $b_1'$  e  $b_2'$  são:

$$a'_t = 3M_t - 3M_t'' + M_t''' ,$$

$$\bar{A}_t = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} [(6-5\alpha)M_t - (10-8\alpha)M_t'' + (4-3\alpha)M_t'''] , \quad (7.a)$$

$$\bar{C}_t = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} (M_t - 2M_t'' + M_t''')$$

A equação de previsão para  $T$  períodos à frente é:

$$\bar{S}_{t+T}^* = \bar{a}'_t + \bar{A}_t T + \frac{1}{2} \bar{C}_t T^2 \quad (7.b)$$

#### Comentários:

- Analogamente ao método anterior, a inicialização é feita usando regressão linear múltipla ou subjetivamente.
- Aqui também os resultados podem ser obtidos por mínimos quadrados com desconto. Os resultados são estendidos para polinômios de maior grau e foram desenvolvidos por Brown (1962).

8) AMORTECIMENTO EXPONENCIAL LINEAR DE HOLT

Suponha que  $X_t$  o possa ser descrita localmente por:

$$X_t = a + bt + \varepsilon$$

Calculamos,

$$\bar{S}_t = \alpha X_t + (1-\alpha) (\bar{S}_{t-1} + \bar{A}_{t-1}) \quad , \quad (8.a)$$

$$\bar{A}_t = \beta (\bar{S}_t - \bar{S}_{t-1}) + (1-\beta) \bar{A}_{t-1} \quad ,$$

onde

A equação de previsão para T períodos à frente é

$$\bar{S}_{t+T}^* = \bar{S}_t + \bar{A}_t T \quad , \quad (8.b)$$

Comentários:

- mostra-se que o método de amortecimento linear de Brown (parâmetro  $\alpha'$ ) pode ser obtido das equações acima com

$$\alpha = 1 - (1-\alpha')^2 \text{ e } \beta = \alpha'^2$$

9) AMORTECIMENTO EXPONENCIAL MULTIPLICATIVO DE MUIR

Suponha que  $X_t$  possa ser descrita localmente por:

$$X_t = ab^t + \varepsilon \quad ,$$

isto é,  $S_t$  aumenta ou diminui aproximadamente de acordo com uma percentagem fixa por período de tempo.

Calculamos:

$$\bar{S}_t = \alpha X_t + (1-\alpha) \bar{S}_{t-1} \bar{B}_{t-1} \quad , \quad (9.a)$$

$$\bar{B}_t = \alpha \frac{X_t}{X_{t-1}} + (1-\alpha) \bar{B}_{t-1}$$

A equação de previsão para T períodos é

$$\bar{S}_{t+T}^* = \bar{S}_t \bar{B}_t^T \quad (9.b)$$

### 10) AMORTECIMENTO EXPONENCIAL SAZONAL MULTIPLICATIVO DE HOLT-WINTERS

Suponha que  $X_t$  possa ser descrito localmente por:

$$X_t = (a+b_t)i_t + \epsilon ,$$

onde  $i_t$  é o fator sazonal. Sendo  $L$  o período da sazonalidade, os  $i_t$ 's são definidos tais que

$$\sum_{t=1}^L i_t = L .$$

Calculamos

$$\bar{S}_t = \alpha \frac{X_t}{\bar{F}_{t-1}} + (1-\alpha) (\bar{S}_{t-1} + A_{t-1}) , \quad (10.a)$$

$$\bar{A}_t = \beta (\bar{S}_t - \bar{S}_{t-1}) + (1-\beta) \bar{A}_{t-1} ,$$

$$\bar{F}_t = \gamma \frac{X_t}{\bar{S}_t} + (1-\gamma) \bar{F}_{t-L} .$$

A equação de previsão para  $T$  períodos à frente é

$$\bar{S}_{t+T} = (\bar{S}_t + \bar{A}_t T) \bar{F}_{t-L+T} . \quad (10.b)$$

Previsões para períodos mais distantes que  $L$  são feitas utilizando novamente o  $\bar{F}_j$  apropriado.

Para inicializar o processo é necessário possuir valores iniciais  $\bar{S}_0$ ,  $\bar{A}_0$  e  $L$  valores iniciais de  $\bar{F}_j$ . Suponha que temos observações de  $m$  períodos e seja

$\bar{X}_j$  = média das observações no período  $j$ ,  $j = 1 \dots m$

Valores iniciais são dados por

$$\bar{A}_0 = \frac{X_m - \bar{X}_1}{(m-1)L} \quad - \text{Componente de tendência em } t = 0$$

$$\bar{S}_0 = \bar{X}_m - \frac{L}{2} \bar{A}_0 \quad - \text{Componente de nível em } t = 0$$

$$F_j = \frac{X_j}{\bar{X}_i - [(L-1)/2-k] \bar{A}_0}, \quad j = 1, \dots, mL,$$

onde  $\bar{X}_i$  - é a média do período onde  $j$  está localizado

$k$  - posição da estação onde  $j$  está localizado, por exemplo, se  $1 \leq j \leq L$  então  $k = 1$ , se  $L + 1 \leq j \leq 2L$  então  $k = 2$  etc.

Temos então  $m$  estimativas de sazonalidade para cada período sazonal (estação), então calculamos

$$F'_i = \frac{1}{m} \sum_{\lambda=0}^{m-1} F_{t+\lambda L}, \quad i = 1, \dots, L.$$

Finalmente para somar  $L$

$$\bar{F}_{0,i} = F'_i \frac{L}{\sum_{i=1}^L F'_i},$$

### 11) AMORTECIMENTO EXPONENCIAL SAZONAL ADITIVO DE HOLT-WINTERS

Suponha que  $X_t$  possa ser descrito localmente por

$$X_t = a + b_t + i_t + c.$$

Aqui os  $i_t$ 's são definidos tais que

$$\sum_{t=1}^L i_t = 0.$$

Calculamos

$$\bar{S}_t = \alpha(X_t - \bar{a}_{t-L}) + (1-\alpha)(\bar{S}_{t-1} + \bar{A}_{t-1}), \quad (11.a)$$

$$\bar{A}_t = \beta(\bar{S}_t - \bar{S}_{t-1}) + (1-\beta)\bar{A}_{t-1},$$

$$\bar{G}_t = \gamma(X_t - \bar{S}_t) + (1-\gamma) \bar{G}_{t-1} .$$

A equação de previsão para T períodos à frente é

$$\bar{S}_{t+T}^* = \bar{S}_t + \bar{A}_t T + \bar{G}_{t-L+T} . \quad (11.b)$$

Previsões para períodos mais distantes que L são feitas utilizando novamente o  $\bar{G}_t$  apropriados. Suponho que temos observações de m períodos, os valores iniciais de  $S_0$ ,  $A_0$  e L, valores para  $\bar{G}_j$  são obtidos resolvendo o sistema (Montgomery e Johnson, 1976, p.111) em  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  e  $\bar{i}_{0,t}$ ,  $t = 1, \dots, L$

$$m\bar{a} + \bar{b} \sum_{t=1}^{mL} t + m \sum_{t=1}^L \bar{i}_{0,t} = \sum_{t=1}^{mL} X_t, \quad t = 1, \dots, L,$$

$$\bar{a} \sum_{t=1}^{mL} t + \bar{b} \sum_{t=1}^{mL} t^2 = \sum_{t=1}^{mL} t X_t,$$

$$m\bar{a} + \bar{b} \frac{(mL+1)mL}{2} = \sum_{t=1}^{mL} X_t,$$

e fazendo

$$\bar{S}_0 = \bar{a} + mL\bar{b},$$

$$\bar{A}_0 = \bar{b},$$

$$\bar{G}_{0,i} = \bar{i}_{0,i}, \quad i = 1, \dots, L.$$

## 12) AMORTECIMENTO EXPONENCIAL SIMPLES ADAPTATIVO DE TRIGG E LEACH

Este método altera o valor de  $\alpha$  de acordo com mudanças nos dados que fazem com que o valor inicial de  $\alpha$  deixe de ser apropriado.

Suponha que  $X_t$  possa ser descrita localmente por

$$X_t = a + c_t .$$

A equação de previsão para T períodos a frente é

$$\bar{S}_{t+T}^* = \bar{S}_{t+1} = \alpha_t X_t + (1-\alpha_t) \bar{S}_t, \quad (12)$$

$$\alpha_t = T_t = \left| \frac{Q_t}{\Delta_t} \right|, \quad ( \quad | \quad \text{módulo} \quad ),$$

$$Q_t = \beta e_t(1) + (1-\beta) Q_{t-1},$$

$$MAD_t = \beta |e_t(1)| + (1-\beta) MAD_{t-1} = \hat{\Delta}_t,$$

e  $e_t(1) = X_t - \bar{S}_t^*$  é o erro de previsão um passo à frente no instante  $t$  e  $\beta$  é um parâmetro de amortecimento, em geral,  $\beta = 0.1$  ou  $0.2$ .

$T_t = |Q_t/\Delta_t|$  é o "Smoothed error tracking signal" e  $\bar{S}$  sempre menor que 1. Se o sistema de previsão é adequado,  $T_t$  estará perto de 0 (dados estáveis), caso contrário, estará próximo de 1.

Alguns autores sugerem usar  $\alpha_t = T_{t-1}$  para evitar a sensibilidade do sistema às observações espúrias.

Trigg e Leach usaram esta idéia para o amortecimento direto de Brown e sugerem que somente deve ser usada na equação do estimador de  $a$  no modelo  $a + bt$ .

### 13) AMORTECIMENTO EXPONENCIAL ADAPTATIVO DE CHOW

O método de Chow pode ser utilizado para amortecimento exponencial simples e amortecimento direto (um parâmetro), e pode ser estendido para modelos com mais de um parâmetro.

O método consiste em escolher valores de  $\alpha$  igualmente espaçados  $\alpha_0, \alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta$  (Chow usou  $\delta = 0.05$ ). Durante  $m$  períodos calcula-se três previsões e

$$MAD_t(j) \quad j = \alpha_0, \alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta \text{ (ou então } \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m (e_1(t) - \bar{e}_1)^2 \text{ ou}$$

$$\frac{1}{m} \sum |e_1(t) - \bar{e}_1| \text{ para cada } j = \alpha_0, \alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta). \text{ Se}$$

$MAD_t(\alpha_0) < MAD_t(\alpha_0 + \delta)$  e  $< MAD_t(\alpha_0 - \delta)$  continua com  $\alpha_0$

$MAD_t(\alpha_0) > MAD_t(\alpha_0 + \delta)$ , novo  $\alpha_0' = \alpha_0 + \delta$

$MAD_t(\alpha_0) > MAD_t(\alpha_0 - \delta)$ , novo  $\alpha_0 = \alpha_0 - \delta$

$MAD_t(\alpha_0) > MAD_t(\alpha_0 - \delta)$  e  $> MAD_t(\alpha_0 + \delta)$ , novo  $\alpha_0$  igual ao que tiver menor  $MAD_t$

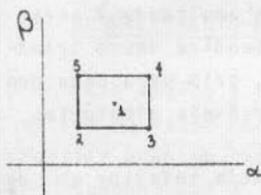
Após cada revisão da constante de amortecimento,  $MAD_t$  é igualado a zero e o processo se reinicia.

#### 14) AMORTECIMENTO EXPONENCIAL ADAPTATIVO DE ROBERTS E REED

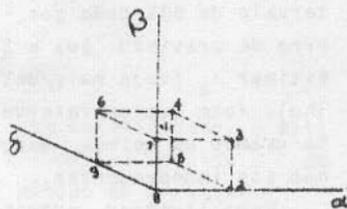
É uma extensão do método de Chow para mais de um parâmetro de amortecimento, por exemplo: Método de Holt ou de Holt - Winters.

O procedimento é baseado na técnica de Operação Evolutória devida a Box e Draper e conhecida como SAFT (Self Adaptive Forecasting Technique). Cada parâmetro é considerado como um fator de um experimento fatorial com dois níveis.

Um experimento fatorial requer que todas as possíveis combinações de níveis altos e baixos sejam investigadas. Além disso a combinação dos parâmetros de previsão no centro também é investigada



Planejamento com 2 parâmetros



Planejamento com 3 parâmetros

Uma replicação completa de cada ponto do planejamento é chamado um ciclo. Se  $k$  parâmetros são controlados  $2^k + 1$  previsões são feitas a cada ciclo.

O quadrado do erro de previsão é usado como função objetivo ,

isto é,  $(X_t - \bar{S}_t^*)^2 = e_1^2(t)$ . Seja  $\overline{SE}_{ij}$  o quadrado do erro de previsão no  $i$ -ésimo ponto no  $j$ -ésimo ciclo. Após  $m$  ciclos

$$\overline{SE}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m SE_{ij} \quad ,$$

é a média dos quadrados dos erros de previsão no  $i$ -ésimo ponto ou erro quadrático médio (E.Q.M.).

O procedimento SAFT, consiste em estimar o efeito de cada parâmetro da mesma maneira que, os efeitos dos fatores na análise de variância em um planejamento com  $2^k$  fatores e alterando o parâmetro de amortecimento (isto é, mudando o planejamento) se o efeito de um ou mais parâmetros for significativo.

Consideremos o caso com dois parâmetros:

Definamos o efeito de  $\alpha$  como o efeito no E.Q.M. ao mudar do menor para o maior valor de  $\alpha$

$$E_\alpha = \frac{1}{2} [(\overline{SE}_3 + \overline{SE}_4) - (\overline{SE}_2 + \overline{SE}_5)] = \frac{1}{2} (\overline{SE}_3 + \overline{SE}_4 - \overline{SE}_2 - \overline{SE}_5)$$

$$E_\beta = \frac{1}{2} (\overline{SE}_4 + \overline{SE}_5 - \overline{SE}_2 - \overline{SE}_3)$$

Os parâmetros são alterados se  $E_\alpha$ ,  $E_\beta$  ou ambos excedem um intervalo de 99% dado por  $\pm 3 \hat{\sigma} \sqrt{1/n}$  onde  $\hat{\sigma}_e$  é uma estimativa do erro de previsão. Box e Draper sugerem usar a amplitude  $R$  para estimar  $\sigma_e$  (veja mais detalhes a seguir no Apêndice deste trabalho). Note que os intervalos são aproximados, pois para cada ponto usamos os mesmos dados  $X_i$ , isto é, as variáveis aleatórias não são independentes.

Para ilustrar, suponha  $E_\beta$  menor que o limite inferior em determinado ciclo,  $E_\beta < -3 \hat{\sigma}_e \sqrt{1/n}$ . Isto significa que  $\overline{SE}_2 + \overline{SE}_3$  é muito maior que  $\overline{SE}_4 + \overline{SE}_5$ , e, portanto, mudamos os pontos para cima adotando o maior valor de  $\beta$ , como centro e não alterando os valores de  $\alpha$ . Após a mudança, os antigos valores de  $\overline{SE}_i$  são abandonados e novos valores calculados após alguns ciclos.

O método pode ser estendido para mais parâmetros e é usado

substituindo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  etc por  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$ ,  $\gamma_t$ , etc, nas fórmulas. Por exemplo, para três parâmetros a estimativa dos efeitos são:

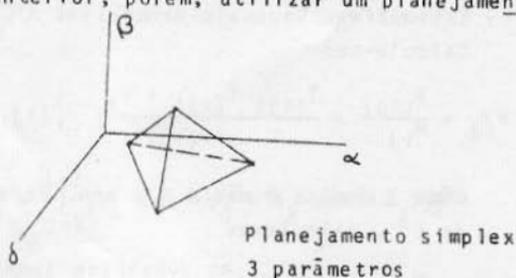
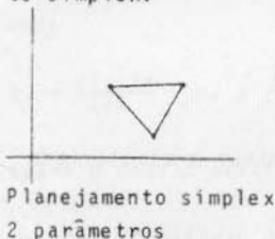
$$E_{\alpha} = \frac{1}{4} (SE_2 + SE_3 + SE_4 + SE_5 - SE_6 - SE_7 - SE_8 - SE_9)$$

$$E_{\beta} = \frac{1}{4} (SE_3 + SE_4 + SE_6 + SE_7 - SE_2 - SE_5 - SE_8 - SE_9)$$

$$E_{\gamma} = \frac{1}{4} (SE_4 + SE_5 + SE_6 + SE_9 - SE_2 - SE_3 - SE_7 - SE_8)$$

### 15) AMORTECIMENTO EXPONENCIAL ADAPTATIVO DE MONTGOMERY

É análogo ao método anterior, porém, utilizar um planejamento simplex.



A maior vantagem é computacional, pois o método usa  $p = k + 1$  pontos onde  $k$  é o número de parâmetros em lugar de  $p = 2^k + 1$  como no método anterior (maiores detalhes ver Montgomery e Johnson, 1976, p 182-186).

### 16) AMORTECIMENTO HARMÔNICO DE HARRISON

Este método é utilizado para dados com sazonalidade. A estimativa do fator sazonal é feita através de uma análise de Fourier e então combinada com qualquer método de previsão.

Suponha que  $X_t$  possa ser descrita localmente por

$$X_t = T_t + i_t + \epsilon_t, \text{ (modelo aditivo)}$$

$$X_t = T_t i_t + \epsilon_t, \text{ (modelo multiplicativo)}$$

onde  $T_t$  é o fator de tendência e  $i_t$  é o fator sazonal. Suponhamos ainda, para efeito de exposição, que escolhemos o modelo mul

tiplicativo e que os dados são mensais com sazonalidade anual .

O método consiste nas seguintes fases:

a) Eliminação da Tendência

Calcula-se a média móvel de comprimento  $N = 12$  ( $L=12$ , período de sazonalidade) obtendo-se:

$$M_t = T_t$$

As observações iniciais e finais (6 cada) que se perdem no processo são igualladas às últimas disponíveis para aqueles meses ou obtidas efetuando uma análise de regressão.

b) Estimativas Sazonais Grosseiras

Calcula-se:

$$r_{ij} = \frac{X(ij)}{M_{ij}} = \frac{T(ij) i(ij) + \epsilon_t}{T(ij)} = i(ij) + \epsilon'_t,$$

onde  $j$  denota o mês e  $i$  o ano. Para eliminar a aleatoriedade de  $\epsilon'$ , calculamos

$$\bar{r}_j = \frac{\sum_{i=1}^m r_{ij}}{m_j}, \quad j = 1, \dots, 12,$$

e  $m_j$  é o número de observações para o mês  $j$ .

Façamos  $r_j$  o valor normalizado de  $\bar{r}$ , tal que

$$\sum_{j=1}^{12} r_j = 12, \quad \text{isto é,}$$

$$r_j = \frac{\bar{r}_j \times 12}{\sum_{j=1}^{12} \bar{r}_j} \quad (16.a)$$

o erro padrão residual de  $r_{ij}$  é estimado por:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i,j} (r_{ij} - r_j)^2}{\sum_{j=1}^{12} m_j - L}, \quad (L=12). \quad (16.b)$$

Para o modelo aditivo  $r_{ij} = X_{(ij)} - M_{(ij)}$  e a restrição seria

$$\sum_{j=1}^{12} r_j = 0 .$$

c) Análise de Fourier para Amortecer  $r_j$

As estimativas amortecidas  $\bar{r}_j$  são dadas pelas funções periódicas que contribuem significativamente para a descrição das estimativas grosseiras  $r_j$ , isto é:

$$\bar{r}_j = 1 + \sum_{k=1}^{L/2} (a_k \cos kd_j + b_k \sin kd_j) , \quad (16.c)$$

onde

$$d_j = \frac{(j-1)\pi}{L/2} - \pi, \quad j = 1, \dots, L; \quad L = 12,$$

$$(\text{para o modelo aditivo } \bar{r}_j = \sum_{j=1}^{L/2} (a_k \cos kd_j + b_k \sin kd_j) )$$

As estimativas de mínimos quadrados de  $a_k$  e  $b_k$  são:

$$\bar{a}_k = \frac{1}{L/2} \sum_{j=1}^{12} r_j \cos (kd_j) ,$$

$$\bar{b}_k = \frac{1}{L/2} \sum_{j=1}^{12} r_j \sin (kd_j) ,$$

A amplitude dos harmônicos é

$$c_k = \sqrt{\bar{a}_k^2 + \bar{b}_k^2} .$$

Das propriedades de mínimos quadrados e de propriedades de senos e cossenos pode-se mostrar que aproximadamente

$$\text{Var}(\bar{a}_k) \sim \frac{2\sigma^2}{T} , \quad \text{Var}(\bar{b}_k) \sim \frac{2\sigma^2}{T}$$

$$\text{Cov}(\bar{a}_k, \bar{b}_k) \sim 0$$

onde  $\sigma^2$  é calculado por (16.b) e  $T$  é número de valores de  $M_t$  em

(a), no caso número total de observações  $-L$  ( $=12$ )

$\bar{a}_k, \bar{b}_k$  tem distribuição normal, logo

$\bar{a}_k, \bar{b}_k$  são independentes.

Portanto, se os parâmetros  $a_k = 0$  e  $b_k = 0$ , (o harmônico  $k$  não contribui em nada) temos

$\frac{\bar{a}_k + \bar{b}_k}{\frac{2\sigma^2}{T}}$  tem distribuição  $\chi^2_{2g.2}$

e é usado para testar se  $a_k = b_k = 0$ .

(erroneamente, Harrison, 1965, p.114, sugere o uso da distribuição  $t$  para  $C\sqrt{T}/2\sigma$ )

#### d) Rejeição e Substituição de Observações Expúrias

Seja  $d_{ij} = X_{ij} - \bar{r}_j$ . Se  $|d_{ij}| > 2,5\sigma$ ,  $X_{(ij)}$  é considerada uma observação espúria e substituída por  $\bar{X}_{(ij)} = \bar{r}_j T_{(ij)}$ .

O efeito destas substituições é eliminar eventos como greves, guerras, etc.

Reinicia-se as operações a) a d) de novo se observações espúrias são detetadas no 1º ciclo. No 2º ciclo somente a) até c) são efetuadas antes de prosseguir para e).

#### e) Adequabilidade do Ajustamento

Isto é obtido através de Tabela de Análise de Variância associada à regressão (16.c):

Fonte de Variância	SS	GL	MS
Sazonalidade resíduo	Diferença $\sum_{ij} (r_{ij} - \bar{r}_j)^2$	$2n$ $T-2n-1$	$M_S$ $M_R$
Total	$\sum_{ij} r_{ij}^2 - (\sum_{ij} r_{ij})^2 / T$	$T-1$	

onde  $T$  é o número de  $r_{ij}$  calculados e  $n$  o número de harmônicos significantes (após o teste  $\chi^2$ ).

A adequabilidade é verificada usando

$F = \frac{M_S}{M_R}$  que tem distribuição  $F(2n, T-2n-1)$ .

#### f) Re-estimação dos Parâmetros

Harrison, (1965), sugere alguns métodos para re-estimar os parâmetros em cada instante que novas observações são recebidas. Um dos métodos é a combinação com o método de amortecimento direto de Brown. Por exemplo, se tendência é linear temos:

$$\hat{\lambda}_t = a + bt + (a_2 + b_2 t) \text{ sen } kd_1 + (a_3 + b_3 t) \text{ cos } kd_1 + \dots$$

que pode ser analisado usando o método de amortecimento de Brown, (1962).

#### 17) AUTOREGRESSÃO STEP-WISE

Este método é sugerido por Granger e Newbold em diversos artigos e em Granger e Newbold (1977) e foi desenvolvido na tese de Payne, 1973, na University of Nottingham. Aqui apresentamos um resumo baseado no relatório sem data de Newbold. Maiores detalhes são apresentados em Granger e Newbold, (1977), p. 176-179. Procura-se ajustar o modelo

$$X_t = \alpha + \sum_{j=1}^k B_j X_{t-j} + \epsilon_t$$

A escolha de  $k$  e quais  $X_{t-j}$  entram no modelo é feita:

- i) Introduzindo o valor atrasado de  $X_{t-j}$  que mais contribui para "explicar"  $X_t$ , na 2<sup>a</sup>. etapa, introduzindo o outro valor atrasado que produz a maior melhora no ajustamento da regressão anterior e assim sucessivamente.
- ii) Introduzir  $k'$  variáveis e retirar a variável atrasada que menos contribuir, e assim sucessivamente até que a retirada de qualquer variável piore consideravelmente o ajustamento.
- iii) Combinar i) e ii) de acordo com a sugestão de Payne (Granger e Newbold, 1977, p. 177).

#### Comentários:

- Granger e Newbold sugerem  $k = 13$  para variações sazonais de menos de um ano (trimestral etc), e  $k = 25$  para variações sazonais mais longas. Nos testes de significância em cada estágio sugerem usar o nível de 5% e a estatística

$$F' = \frac{m-r}{k-r} \frac{MS_r}{MS_k} - \frac{m-k}{k-r},$$

que tem distribuição  $F(k-r, m-k)$  onde

$$MS_j = \frac{\text{soma dos quadrados dos resíduos quando } j \text{ termos são excluídos na regressão}}{m-j}$$

$m$  = número efetivo de observações usadas

$r$  = número de termos incluídos na regressão

- Os programas de computador usualmente disponíveis para regressão contêm, em geral, o método de regressão step-wise e facilmente podem ser utilizados para o método autoregressão step-wise.

- O método pode ser facilmente adaptado para o caso multivaria

do relacionando  $X_t$  com  $Z_t$ ,  $W_t$ , etc.

O modelo geral é:

$$X_t = \alpha + \sum_{j=1}^{k_1} \beta_j X_{t-j} + \sum_{j=1}^{k_2} \gamma_j Z_{t-j} + \sum_{j=1}^{k_3} \lambda_j W_t + \dots + \varepsilon_t$$

### 18) MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO CENSUS II

O método Census II é um método de decomposição clássica, desenvolvido pelo Bureau of Census do U.S. Department of Commerce. O método é aplicável principalmente a séries macroeconômicas e supõe que a série possa ser representada por um dos modelos:

ou  $X_t = T_t i_t C_t + \varepsilon_t$  modelo multiplicativo

$X_t = T_t + i_t + C_t + \varepsilon_t$  modelo aditivo

onde

$T_t$  = fator de tendência

$C_t$  = fator cíclico

$i_t$  = fator sazonal

$\varepsilon_t$  = aleatoriedade

O modelo misto  $X_t = T_t + i_t + T_t i_t + C_t + \varepsilon_t$  foi estudado recentemente por Durbin e Murphy, em (1975), porém, não está amplamente disponível.

O método, embora bastante sofisticado, é baseado em operações aritméticas simples e consiste de quatro fases:

- 1a. fase - faz ajustamentos para as variações de dias úteis.
- 2a. fase - estimação preliminar da sazonalidade e ajustamento sazonal da série.
- 3a. fase - refina a estimação da sazonalidade bem como estima a tendência, o fator cíclico e a aleatoriedade.
- 4a. fase - prepara estatísticas descritivas para verificar a qualidade do ajustamento sazonal, bem como informações sobre a tendência e ciclo, objetivando previsões.

As seguintes operações são realizadas. A apresentação é feita para o modelo multiplicativo, entre parênteses indica-se a operação correspondente para o modelo aditivo.

- i) Calcule a razão (diferença) entre a série original, e a média móvel 13 pontos  $= 2 \times 12$ , isto é,  $[1, 2, \dots, 2, 1]$  como uma 1a. estimativa de sazonalidade e aleatoriedade.
 

13 ptos.
- ii) Aplique uma média móvel  $3 \times 3$  para cada mês separadamente para obter uma estimativa da componente sazonal
- iii) Normalise a componente sazonal para somar 1200 (somar 0) no período de 12 meses, dividindo (subtraindo) uma média móvel 13 pontos  $= 2 \times 12$ , dos mesmos
- iv) Para obter a série dessazonalizada preliminar, divida (subtraia) a componente sazonal da série original.
- v) Aplique a média móvel de Spencer 15 pontos  $= 5 \times 5 \times 4 \times 4$  à série dessazonalizada e divida (subtraia) a série de tendência e ciclo resultante da série original para obter uma 2a. estimativa da sazonalidade e da aleatoriedade.
- vi) Aplique uma média móvel 7 pontos  $= 3 \times 5$  para cada mês separadamente para obter a 2a. estimativa da sazonalidade.
- vii) repita (iii).
- viii) Divida (subtraia) esta estimativa final da componente sazonal, da série original, obtendo a série dessazonalizada.

As seguintes observações ao efetuar i) e v) são feitas:

- cada estimativa do componente irregular é comparada com o desvio padrão estimado por uma média móvel 5 pontos, para verificar se é uma observação espúria, caso seja, é substituída por um valor estimado.
- cada vez que uma média móvel é calculada, os valores perdidos

nos extremos da série são estimados.

Além disso, após a série final ser obtida, as seguintes estatísticas e testes são feitos:

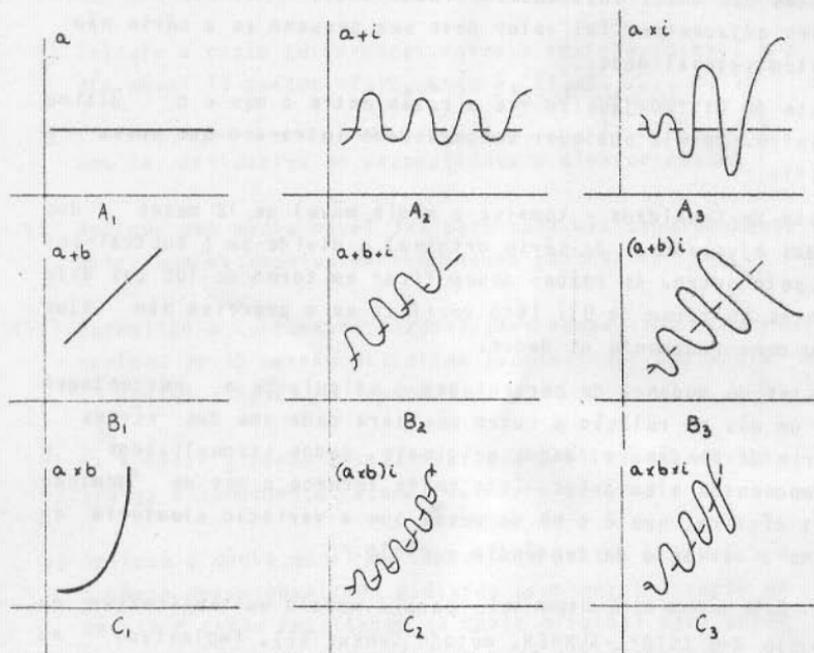
- a) Testes dos meses adjacentes - razão entre o mês e a média dos meses adjacentes. Tal valor deve ser pequeno se a série não contém sazonalidade.
- b) Teste do último janeiro - é a razão entre o mês e o último janeiro. Revela qualquer sazonalidade intra-ano que possa existir.
- c) Teste de igualdade - toma-se a média móvel de 12 meses dos dados ajustados, da série original e divide-se (subtrai-se) um pelo outro. As razões devem ficar em torno de 100 (as diferenças em torno de 0). Isto verifica se o processo não ajustou demasiadamente os dados.
- d) Testes de mudança de percentagem - calcula-se a percentagem de um mês em relação a outro mês para cada uma das séries: série de tendência, dados originais, dados sazonalizados e componentes aleatórios. Este teste fornece o mês de dominância cíclica, que é o nº de meses que a variação aleatória excede a variação da tendência - ciclo.

Este método está disponível para o modelo multiplicativo na versão X-9 (SIBYL-RUNNER, método Census II), implantado na UFRJ. Uma versão X-11 já está disponível no Bureau de Census e difere da versão X-9 somente nos pontos:

- a) O ajustamento para dias úteis é feito por regressão.
- b) A exclusão de observações espúrias é feita mais sofisticadamente.
- c) No item (ii) escolhe-se entre médias móveis de Henderson com 5, 9, 13 ou 23 pontos, dependendo da aleatoriedade.
- d) Pode-se escolher entre o modelo aditivo e multiplicativo.
- e) Mais estatísticas descritivas são fornecidas.

APÊNDICE

A-1 Resumo de amortecimento exponencial



onde: a - nível  
 b - tendência  
 c - sazonalidade

Suponha T observações,  $X_1, X_2, \dots, X_t$  de uma série temporal. As fórmulas de amortecimento para os novos modelos podem ser resumidas em:

$$\bar{S}_t = w_{e,t} d_{s,t} + (1-w_{e,t}) d_{T,t}$$

onde

$\bar{S}_t$  é a previsão do nível no período t

$w_{e,t}$  é um peso ( $0 \leq w_{e,t} < 1$ ) e

$d_{s,t}$  e  $d_{T,t}$  dados na tabela

L - período de sazonalidade

	SÍMBOLOS	1 sem sazonalidade	2 efeito sazonalidade aditiva	3 efeito sazonalidade multipli- cativa.
A	sem tendência $d_{s,t}$ $d_{T,t}$	$x_t$ $\bar{s}_{t-1}$	$x_t + \bar{G}_{t-L}$ $\bar{s}_{t-1}$	$x_t / \bar{F}_{t-L}$ $\bar{s}_{t-1}$
B	efeito de ten- dência aditi- va. $d_{s,t}$ $d_{T,t}$	$x_t$ $\bar{s}_{t-1} + \bar{A}_{t-1}$	$x_t - \bar{G}_{t-L}$ ✓ $\bar{s}_{t-1} + \bar{A}_{t-1}$	$x_t / \bar{F}_{t-L}$ $\bar{s}_{t-1} + \bar{A}_{t-1}$
C	efeito tendên- cia multipli- cativa. $d_{s,t}$ $d_{T,t}$	$x_t$ $\bar{s}_{t-1} \bar{B}_{t-1}$	$x_t + \bar{G}_{t-L}$ $\bar{s}_{t-1} \bar{B}_{t-1}$	$x_t / \bar{F}_{t-L}$ $\bar{s}_{t-1} \bar{B}_{t-1}$

	PREVISÕES	1	2	3
		sem sazonalidade	com sazonalidade aditiva	com sazonalidade multipli- cativa
A	Sem tendência	$\bar{s}_t$	$\bar{s}_t + \bar{G}_{t-L+T}$	$\bar{s}_t \bar{F}_{t-L+T}$
B	Com tendência aditiva	$\bar{s}_t + T\bar{A}_t$	$\bar{s}_t + T\bar{A}_t + \bar{G}_{t-L+T}$	$(\bar{s}_t + T\bar{A}_t) \bar{F}_{t-L+T}$
C	Com tendência multiplicativa	$\bar{s}_t \bar{B}_t^T$	$\bar{s}_t \bar{B}_t^T + \bar{G}_{t-L+T}$	$\bar{s}_t \bar{B}_t^T \bar{F}_{t-L+T}$

Comentários sobre os símbolos  $d_{s,t}$  e  $d_{T,t}$ .

1 - Observação no período  $t$ :  $X_t$ .

2 - Componente de tendência aditiva:  $\bar{A}_t$ ,

$$\bar{A}_t = \beta_{a,t} (\bar{S}_t - \bar{S}_{t-1}) + (1 - \beta_{a,t}) \bar{A}_{t-1},$$

e representa a estimativa da componente de tendência linear para o período  $t$ , e  $\beta_{a,t}$  é um peso,  $0 \leq \beta_{a,t} \leq 1$ .

3 - Componente de tendência multiplicativa:  $\bar{B}_t$ ,

$$\bar{B}_t = \beta_{m,t} \bar{S}_t / \bar{S}_{t-1} + (1 - \beta_{m,t}) \bar{B}_{t-1},$$

e representa a estimativa da componente de tendência linear para o período  $t$  e  $\beta_{m,t}$  é um peso,  $0 \leq \beta_{m,t} \leq 1$ .

4 - Componente sazonal aditiva:  $G_t$ ,

$$\bar{G}_t = \gamma_{a,t} (\bar{S}_t - X_t) + (1 - \gamma_{a,t}) \bar{G}_{t-L},$$

e representa a estimativa da componente sazonal para o período  $t$  e  $\gamma_{a,t}$  é um peso  $0 \leq \gamma_{a,t} \leq 1$ .

5 - Componente sazonal multiplicativa:  $\bar{F}_t$ ,

$$\bar{F}_t = \gamma_{m,t} X_t / \bar{S}_t + (1 - \gamma_{m,t}) \bar{F}_{t-L},$$

e representa a estimativa da componente sazonal para o período  $t$  e  $\gamma_{m,t}$  é um peso,  $0 \leq \gamma_{m,t} \leq 1$ .

Observe que todos os pesos dependem de  $t$ ,

( $w_{e,t}$ ;  $\beta_{e,t}$ ;  $\gamma_{e,t}$ , etc)

incluem-se, portanto, os modelos adaptativos. Finalmente no instante  $t$  a previsão para o período  $t+T$  é

$$\bar{S}_{t+T} = g_t$$

e  $g_t$  são elementos da segunda tabela.

## A2 - Relações com modelos Box-Jenkins

Embora a metodologia de Box-Jenkins somente seja apresentada possivelmente em outras publicações, é conveniente mencionar que pode-se mostrar que muitos dos métodos apresentados são ótimos (no sentido de erro quadrados mínimos), se o modelo para  $X_t$  é caso particular dos modelos Box-Jenkins.

Por exemplo, sendo  $B^j X_t = X_{t-j}$  temos:

- a) Amortecimento exponencial simples é ótimo se  $X_t$  é gerado por  $(1-B)X_t = [1-(1-\alpha)B] \varepsilon_t$ , isto é,

$$X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t - (1-\alpha) \varepsilon_{t-1}$$

- b) Amortecimento exponencial sazonal aditivo de Holt-Winters é ótimo se  $X_t$  é gerado por:

$$(1-B)^2 (1-B^2)X_t = (1-b_1B + b_2B^2 + b_L B^L + b_{L+1} B^{L+1} + b_{L+2} B^{L+2}) \varepsilon_t$$

onde  $b_1, b_2, b_L, b_{L+1}$  e  $b_{L+2}$  são funções dos parâmetros de amortecimento  $\alpha, \beta, \gamma$  (Granger e Newbold 1977, p. 172).

- c) Amortecimento exponencial linear de Holt é ótimo se  $X_t$  é gerado por:

$$(1-B)^2 X_t = (1-b_1B - b_2B^2) \varepsilon_t \text{ [ARIMA (0,2,2)], onde } b_1, b_2 \text{ são funções de } \alpha, \beta \text{ (Granger e Newbold, 1977, p.172)}$$

- d) Amortecimento exponencial (Polinômio de grau  $m$ ) de Brown é ótimo se  $X_t$  é gerado por ARIMA (0,  $m+1$ ,  $m+1$ ). (Granger e Newbold, 1977, p. 172)

- e) Método Census II versão X-11 para o modelo aditivo é ótimo se  $X_t$  é gerado por:

$$(1-B)(1-B^{12})X_t = (1-0.337B + 0.144B^2 + 0.141B^3 + 0.139B^4 + 0.136B^5 + 0.131B^6 + 0.125B^7 + 0.117B^8 + 0.106B^9 + 0.093B^{10} + 0.077B^{11} - 0.417B^{12} + 0.032B^{13} - 0.001B^{20} - 0.003B^{21} - 0.004B^{22} + 0.006B^{23} + 0.035B^{24} - 0.021B^{25}) \varepsilon_t \text{ (Cleveland e Tiao, 1976).}$$

### A3 - Medidas de Comparação e Intervalos de Confiança

Na comparação da precisão de métodos alternativos de previsão, dividimos a série em duas partes. Na primeira parte ajustamos o modelo e fazemos previsões para a segunda parte. Algumas medidas utilizadas são:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - P_t)^2$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[ \frac{X_t - P_t}{X_t} \right] \times 100$$

$$U_2^2 - \text{Theil} = \frac{\sum (X_t - P_t)^2}{\sum X_t^2}$$

É importante observar que as comparações tem sentido se feitas com o mesmo nº de passos à frente, isto é, o método 1 pode ser melhor que o método 2 para previsões um passo à frente, porém, pior para 12 passos à frente.

#### Intervalos de Confiança:

De resultados de análise de regressão temos

$$\text{Modelo: } X_i = b_1 Z_{1i} + \dots + b_k Z_{ki} + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{Estimativa de } V(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n (X_i - b_1 Z_{1i} - \dots - b_k Z_{ki})^2 \quad (A)$$

Seja um valor  $Z_0$  com correspondente  $X_0$

Intervalos com  $1-\alpha$  de confiança:

$$\text{Para } E(X_0): \quad Z_0 \hat{\sigma} \pm \hat{\sigma}_\varepsilon t_{n-k} \left( \frac{1}{2} \alpha \right) \sqrt{Z_0 (ZZ)^{-1} Z_0} \quad (B)$$

$$\text{Para } \gamma_0 : \quad \bar{z}_0 \bar{b} \pm \bar{\sigma}_e t_{n-k} \left( \frac{1}{2} \alpha \right) \sqrt{1 + Z_0(ZZ)^{-1} Z_0'} \quad (C)$$

Para amortecimento direto:

$$V\{\bar{X}_{t+T}\} = \bar{z}'(T) WZ(T) \quad (D)$$

$$V\{e_t(T)\} = \sigma_e^2 + Z'(T) WZ(T) \quad (E)$$

Além disso, se a previsão  $\bar{e}$  não viciada, isto é,

$$E(e_t(T)) = 0 \text{ temos em geral}$$

$$P\{U_{\alpha/2} \sigma e_t(T) < e_t(T) < U_{\alpha/2} \sigma e_t(T)\} = 1 - \alpha$$

$$\text{onde, } e_t(T) = X_{t+T} - S_{t+T}^*$$

$$P\{S_{t+T}^* - U_{\alpha/2} \sigma e_t(T) < X_{t+T} < S_{t+T}^* + U_{\alpha/2} \sigma e_t(T)\} = 1 - \alpha$$

onde  $U_{\alpha/2}$  é a ordenada de uma distribuição normal ou t-student.

Por simplicidade dizemos que um intervalo com  $1 - \alpha$  de confiança para  $X_{t+T}$  é dada por:

$$S_{t+T}^* \pm U_{\alpha/2} \sigma e_t(T) \quad (F)$$

Para os modelos estudados temos:

a) Médias móveis simples, Médias móveis linear e Autorregressão Step-wise.

Como esses métodos são obtidos através de mínimos quadrados, intervalos de confiança aproximados para  $S_{t+T}^*$  são obtidos como na expressão (C), tomando-se somente o cuidado de identificar corretamente os regressores  $Z$ 's.

b) Amortecimento exponencial simples, linear e quadrático de Brown.

Como esses métodos são obtidos através de amortecimento direto, intervalos de confiança aproximados para  $S_{t+T}^*$  são obtidos usando (E) e (F), tomando-se o cuidado de identificar corretamente os regressores  $Z(t)$ 's (ver Montgomery e John

son, 1976 e Brown 1962).

Por exemplo:

Para o modelo linear, (E) fica:

$$V(e_t(T)) = \sigma_e^2 + \frac{\alpha}{(1+\beta)^T} [(1+4\beta+5\beta^2) + 2\alpha(1+3\beta)T + 2\alpha^2 T^2] \sigma_e^2$$

e  $\sigma_e^2$  é estimado por (A) e  $\beta = 1-\alpha$

Para amortecimento exponencial simples (E) fica:

$$V(e_t(1)) = \sigma_e^2 + \frac{2}{2-\alpha} \sigma_e^2$$

Intervalos de predição são fornecidos por Montgomery e Johnson em 1976 (p. 161-162).

c) Amortecimento Harmônico de Harrison.

Se este método é combinado com o método de re-estimação do amortecimento direto de Brown, os intervalos são obtidos como em (b) anteriormente e com o auxílio das tabelas de Brown, (1962, p. 178-194).

d) Médias Móveis Dupla

Embora este método seja desenvolvido heurísticamente, ele produz previsões equivalentes ao método de médias móveis linear e intervalos obtidos para este são aproximadamente válidos.

e) Amortecimento de Muir e de Holt-Winters.

Uma crítica a esses métodos é que eles são modificações intuitivas do amortecimento exponencial duplo e não há uma teoria estatística suportando os mesmos. Entretanto, recentemente, para o método multiplicativo de Holt-Winters, intervalos de confiança heurísticos foram desenvolvidos por Bowerman e O'Connel (1978).

Esses resultados são:

$$\bar{S}_{t+T}^* \pm U_{\alpha/2} d_{t,W}^{\Delta}(t)$$

onde

$U_{\alpha/2}$  - ordenada de dist. normal

$$d_T = 1.25 \left[ \frac{1 + \frac{\theta}{(1+v)^T} |(1+4v+5v^2) + 2\theta(1+3v)T + 2\theta^2 T|}{1 + \frac{\theta}{(1+v)^T} |(1+4v+5v^2) + 2\theta(1+3v) + 2\theta^2|} \right]^{1/2}$$

$$\Delta_w(t) = \frac{\sum_{i=1}^t [X_i / \bar{F}_{t-L} - (\bar{S}_{t-1} + A_{t-1})]}{t}$$

e  $\theta$  é igual ao máximo de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $v = 1-\theta$

observe que parece intuitivo que modificando em  $\Delta_w(t)$ ,

$X_t - \bar{G}_{t-L}$  em lugar de  $X_i / \bar{F}_{t-L}$  temos um intervalo de confiança para o modelo aditivo.

#### A-4 - Combinação de Previsão

Na tentativa de conseguir melhorar previsões, podemos combinar previsões obtidas por dois ou mais métodos. Suponha que temos duas previsões  $P_1$  e  $P_2$  de  $X_t$  com erros

$$e_{1T} = X_T - P_1 \quad e_{2T} = X_T - P_2$$

e que sabemos que as funções são não viciadas, isto é,

$$E(e_{1,T}) = 0 \quad E(e_{2,T}) = 0$$

e que

$$\text{Var}(e_{1T}) = \sigma_1^2, \text{Var}(e_{2T}) = \sigma_2^2 \text{ e } \text{Cov}(e_{1T}e_{2T}) = \rho\sigma_1\sigma_2$$

onde  $\rho$  é a correlação entre  $e_{1T}$  e  $e_{2T}$

Considere-se a previsão combinada

$$P_c = kP_1 + (1-k)P_2$$

que têm variância

$$\text{Var}(p_c) = k^2\sigma_1^2 + (1-k)^2\sigma_2^2 + 2k(1-k)\rho\sigma_1\sigma_2$$

Esta variância é minimizada para

$$k = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

e toma o valor

$$\text{Var}_{\min}(P_c) = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

Pode-se mostrar que esta variância é menor ou igual a cada uma  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$

Entretanto, a expressão para  $k$ , acima, não é útil na prática pois desconhecemos  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$ ,  $\rho$ . Porém, podemos usar estimativas da seguinte maneira. Suponha que em  $p-1$  períodos anteriores ob tivemos previsão  $P_{1,t}$  e  $P_{2,t}$  e observamos os erros  $e_{1t}$  e  $e_{2t}$ , então escolhemos

$$\bar{k}_T = \frac{\sum_{t=T-N}^{p-1} (e_{2t}^2 - e_{1t}e_{2t})}{\sum_{t=T-N}^{p-1} (e_{1t}^2 + e_{2t}^2 - 2e_{1t}e_{2t})}$$

Outros valores sugeridos são

$$\bar{k}'_T = \frac{\sum_{t=T-N}^{p-1} e_{2t}^2}{\sum_{t=T-N}^{p-1} (e_{1t}^2 + e_{2t}^2)}$$

$$\bar{k}''_T = \alpha \bar{k}'_{T-1} + (1-\alpha)\bar{k}'_T, \text{ (ou com } \bar{k}_T)$$

O primeiro, sugerido pela dificuldade em estimar  $\rho$  em amostras pequenas e então prefere-se supor  $\rho=0$ , na esperança que isto não afete muito. O segundo supõe que a precisão de cada método possa se alterar com o tempo.

Outros valores sugeridos são encontrados em Granger e Newbold, (1977 p. 272) A extensão para a combinação de diversas previsões é devida a Dickson J.P. (1973, 1975), que apresenta tam

bem, intervalos de confiança para as previsões combinadas. Nelson (1973, p. 211), apresenta um método que pode ser usado para combinar previsões.

Observe que os métodos podem ser utilizados com as técnicas; Box-Jenkins, Filtro Adaptativo, etc bem como podem servir para combinar uma ou mais previsões quantitativas  $P_1, \dots, P_e$  com uma ou mais previsões subjetivas  $S_1, \dots, S_m$ .

O apêndice A5 a seguir apresenta um método que pode ser útil para estimar  $\sigma$  também para o caso subjetivo.

#### A5 - Estimativa de $\sigma$ através de amplitude R.

Suponha as observações  $X_1, \dots, X_n$ . O estimador usual do desvio padrão de  $X_i$  é

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2}.$$

Um outro estimador de  $\sigma$  pode ser obtido usando a amplitude

$$R_n = X_{\max} - X_{\min},$$

onde  $X_{\max}$  é a maior observação e  $X_{\min}$  a menor.

Pode-se mostrar que para população normal:

$$E(R_n) = \alpha_n \sigma,$$

$$\text{Var}(R_n) = \beta_n \sigma^2,$$

onde  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  são funções de  $n$  somente e, portanto,  $R_n/\alpha_n$  é um estimador não viciado de  $\sigma$ , isto é:

$$E(R_n/\alpha_n) = \sigma, \text{ com}$$

$$\text{Var}(R_n/\alpha_n) = \sigma^2 \left( \frac{\beta_n}{\alpha_n^2} \right)$$

Para decidir se usamos  $S$  ou  $R_n/\alpha_n$  para estimar  $\sigma$  comparamos suas variâncias. A tabela A1 fornece os valores de

$$ef = \frac{\text{Var}(R_n/\alpha_n)}{\text{Var}(S)}.$$

Tabela 1

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
ef.	1.00	1.01	1.02	1.05	1.08	1.10	1.12	1.15	1.17	1.30	1.43

Para  $n \leq 10$  a eficiência de  $R_n/\alpha_n$  é razoável e como  $R_n$  é mais simples de calcular, o mesmo é preferível para amostras pequenas.

A tabela A2 fornece os valores para converter a amplitude  $R_n$  a um estimador de  $\sigma$ . ( $\gamma_n = \frac{1}{\alpha_n}$ )

n	$\gamma_n$	n	$\gamma_n$	n	$\gamma_n$	n	$\gamma_n$
2	0.886	6	0.395	10	0.325	14	0.294
3	0.591	7	0.370	11	0.315	15	0.288
4	0.486	8	0.351	12	0.307	16	0.283
5	0.430	9	0.337	13	0.300	17	0.268

Para ilustrar o procedimento, suponhamos que 9 observações obtivemos  $x_{\max} = 43.6$  e  $x_{\min} = 39.2$  temos

$$R_9 = 43.6 - 39.4 = 4.2,$$

$$\gamma_9 = 0.0337.$$

$$\text{Estimativa de } \sigma, \hat{\sigma} = 4.2 \times 0.337 = 1.42.$$

Se temos mais de 10 observações é aconselhável dividir os dados arbitrariamente em conjuntos de 6 ou 7, e calcular  $R$  para cada conjunto e então multiplicar por  $\gamma_n$ . Por exemplo, se temos 28 dados suponha que dividimos em 7 conjuntos de 4 dados e que os  $R$ 's de cada conjunto são:

10.53-1.70-4.65-5.18-2.73-1.92-1.18 : cuja a média é 3.98. A estimativa de  $\sigma$  é :

$$\hat{\sigma} = 3.98 \times 0.486 = 1.93.$$

## REFERÊNCIAS

- Bowerman, B.L. e O'Connell, R.T. - 1978 - Predictions intervals for Winter's method - Apresentado no Business Econ. Stat. Section Meeting da Am. Statist Assoc. , San Diego, California
- Brown, R.G. - 1962 - Smoothing , Forecasting and Predictions of Discrete Time Series, Prentice - Hall.
- Chatfield, C. - 1975 - The Analysis of Time Series: Theory and Practice, Chapman and Hall
- Chatfield, C. - 1978 - The Holt-Winters forecasting procedure. App. Statist, 27, p. 264-279.
- Cleveland W.P e Tiao, G.C. - 1976 - Decomposition of seasonal time series: a model for the Census X-II program. J.Am. Statist. Assoc. , 71, p. 581-587.
- Dickinson, J.P. - 1973 - Some statistical results on the combination of forecasts. Op. Res. Quartely, 24, p. 253-260.
- Dickinson, J.P. - 1975 - Some comments on the combination of forecasts. Op. Res. Quartely, 26, p. 205-210.
- Durbin, J. e Murphy, M.J. - 1975 - Seasonal adjustment based on a mixed additive - multiplicative model. J.R. Statist. Soc. A, 138, p. 385-410.
- Gilchrist, W. - 1976 - Statistical Forecasting, Wiley
- Granger, C.W.J. e Newbold, P. - 1977 - Forecasting Economic Time Series, Academic Press.
- Harrison, P.J. 1965 - Short term sales forecasting. App. Statist, 14, p. 102-139.
- Kendall, M.G. - 1973 - Time Series, Griffins
- Lewis, C.D. - 1973 - Abbreviated notes on short term forecasting. The University of Aston Management Center.
- Montgomery, D.J. e Johnson, L.A. - 1976 - Forecasting and Time Series Analysis, Mc Graw Hill
- Nelson, C.R. - 1973 - Applied Time Series Analysis for Managerial Forecasting, Holden-Day

Newbold, P. - On step-wise regression and time series forecasting. Note 7. Nottingham Forecasting Project.

Pegels, C.C. - 1969 - Exponential forecasting: some new variations. Man. Science, 15, p. 311-314.

Wetherill, G.B. - 1972 - Elementary Statistical Methods. Chapman and Hall (2a. edição).