SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES,

VIII. Lemme Fondamental.

Par KIYOSHI OKA.

Introduction. Les problèmes principaux depuis le Mémoire I sont : problèmes de Cousin, problème de développement et problème des convexités[1]. Dans les Mémoires I–VI[2], nous avons vu, disant un mot, que ces problèmes sont résolubles affirmativement pour les domaines univalents finis[3]. Et l'auteur a encore constaté quoique sans l'exposer, que ces résultats restent subsister au moins jusqu'aux domaines finis sans point critiques[4].

Il s'agit donc : ou bien d'introduire l'infini convenable, ou bien de permettre des points critiques; or, on retrouvera que l'on ne sais presque rien

[1]Ces problèmes sont fondés sur H. Behnke et P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer Komplexer Veränderlichen, 1934. Nous allons les expliquer en formes précises. Soient D, D_0 deux domaines connexes ou non sur l'espace de n variables complexes tels que $D_0 \subsetneq D$ (c'est-à-dire que D_0 soit un ≪Teilbereich≫ de D); nous appellerons que D_0 est holomorphe-convexe par rapport à D, s'il existe une fonction holomorphe dans D ayant des éléments de Taylor différents aux points différents de D_0 et encore si, pour tout domaine connexe ou non Δ_0 tel que $\Delta_0 \subset\subset \mathfrak{D}_0$ (c'est-à-dire que Δ_0 soit contenu dans l'intérieur de $\mathfrak{D}_0$ avec sa frontière), on peut trouver un domaine connexe ou non Δ tel que $\Delta_0 \subsetneq \Delta \subset\subset D_0$ de façon qu'à tout point P de $D_0 - \Delta$, il corresponde une fonction f holomorphe dans D telle que $|f(P_0)| > \max|f(\Delta_0)|$. Spécialement, si D_0 est ainsi par rapport à lui-même, nous l'appelons avec H. Behnke d'être holomorphe–convexe (regulär–konvex). Les problèmes sont alors : Problèmes de Cousin. Trouver une fonction méromorphe (ou holomorphe) admettant les pôles (ou les zéros satisfaisant à une certaine condition) donnés dans un domaine holomorphe–convexe. Problème de développement. Soit D_0 un domaine (connexe ou non) holomorphe–convexe par rapport à D; trouver, pour toute fonction holomorphe f une série de fonctions holomorphes dans D, convergente uniformément vers f dans tout domaine connexe ou non Δ_0 tel que $\Delta_0 \subset\subset D_0$. Problème des convexités. Tout domaine pseudoconvexe est-il holomorphe–convexe ? Pour les domaines univalents, on peut remplacer ≪holomorphe-convexe≫ par ≪domaine d'holomorphie≫, grâce au théorème de H. Cartan et P. Thullen.

[2]Les Mémoires précédents sont : I–Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936; II–Domaines d'holomorphie, 1937; III–Deuxième problème de Cousin, 1939 (Journal of Science of the Hiroshima University); IV–Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941; V–L'intégrale de Cauchy, 1941 (Japanese Journal of Mathematics); VI–Domaines pseudoconvexes, 1942 (Tohoku Mathematical Journal); VII–Sur quelques notions arithmétiques, 1950 (Bulletin de la Société Mathématique de France)

[3]Précisément dit, pour le deuxième problème de Cousin, nous avons montrer une condition nécessaire et suffisante pour les zéros; et pour le problème des convexités, nous l'avons expliqué pour les deux variables complexes, pour diminuer la répétition ultérieure inévitable.

[4]L'auteur l'a écrit aux détails en japonais à Prof. T. Takagi en 1943.

sur les domaines intérieurement ramifiés; par exemple, qu'arrive-t-il pour le développement locale? Nous nous occuperons donc, d'abord du deuxième problème.

Or, l'idée fondamentale pour les recherches actuelles s'exprime symboliquement par le théorème II du Mémoire I. Nous venons de l'utiliser en forme du théorème I du Mémoire II[5], à cause que nous n'avons pas pu résoudre le problème (E). Mais, pour les domaines intérieurement ramifiés, la forme originale est indispensable; c'est le lemme fondamental du titre et c'est pour l'établir, que nous avons préparé le Mémoire VII.

Pour établir le lemme fondamental, pour les domaines (finis) sans points critiques, il est visiblement suffisant de résoudre les problèmes (C_2) et (E) et de trouver les pseudobases locales des idéaux géométriques de domaines indéterminés; dont nous avons résolu les problèmes (C_2) et (E) dans le Mémoires VII, et plus récemment H. Cartan a résolu le dernier problème d'après le théorème 4 du Mémoire VII que le problème (K) est toujours résoluble[6]. Mais, quand on permet des points critiques, on rencontre la nouvelle difficulté qu'une fonction holomorphe sur une variété caractéristique n'est pas nécessairement la trace d'une fonction holomorphe à l'espace. Ce qui engendre, comme conséquence, une espèce des problèmes (J), qui contient le problème des idéaux géométriques dans un certain sens, et est plus étendu.

Dans le Mémoire actuel, nous résoudrons ce problème à partir encore du théorème 4 du Mémoire VII (théorème 2), établirons le lemme fondamental et montrerons brièvement comment on l'applique aux problèmes principaux. Et comme appendice, nous exposerons, d'après le même théorème, une condition nécessaire et suffisante pour que le problème (J) d'un idéal donné soit résoluble.

≪Comme nous ne traiterons que l'espace fini de variables complexes

---

[5] H. Behnke et K. Stein ont souvent indiqué que ce théorème est applicable aux domaines multivalents sans point critique.

[6] Nous allons expliquer brièvement sur le cours des recherches des idéaux holomorphes. C'est W. Rückert qui a transplanté la noton "idéal" du champ de fonctions algébriques au champ de fonctions analytiques (1933, Math. Annalen, Vol 107, pp 259-281); et c'est H. Cartan qui a premièrement remarqué la différence essentielle, avec un résultat important (1940, cité dans le Mémoire VII). Cartan a encore exposé : Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes (1944, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, (3), LXI); Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes (1950, Bulletin de la Société Mathématique de France).

Or l'auteur a exposé le Mémoire VII, sans connaître l'existence du premier de ces deux Mémoires de Cartan et du Mémoire du Rückert; nous allons donc examiner le Mémoire–là en comparant avec les Mémoires–ci: Le Mémoire VII consiste des deux parties, dont la première montre que les problèmes (C_1), (C_2) et (E) se réduissent au seul problème (K); ce qui est déjà indiqué par Cartan, sans démonstration, mais avec toutes les préparations. Dans la deuxième partie, l'auteur a d'abord préparé le théorème du reste pour résoudre le problème (K); ce théorème est déjà exposé et utilisé par Rückert.

dans le présent Mémoire, nous supprimerons généralement d'expliquer ces conditions de l'espace.≫

I. Idéaux holomorphes de domaines indéterminés et pseudobases locales.

1. Notions générales.—≪Les domaines considérés dans le présent Mémoire étant *univalents* sans exceptions, nous supprimerons encore, généralement d'expliquer cette condition.≫

Pour les idéaux holomorphes de domaines indéterminés, nous avons expliqué dans No. 2 du Mémoire VII, que nous répéterons tout brièvement. Considérons dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, une couple ordonnée (f, δ), dont δ est un domaine *connexe ou non*, et f, une fonction holomorphe dans δ. Soit (I) un ensemble de couples (toujours ordonnées) (f, δ); au lieu de dire que $(f, \delta) \in (I)$, nous dirons aussi que $f \in (I)$ pour δ. (I) est appelé idéal holomorphe de domaines indéterminés, s'il satisfait aux conditions suivantes ;

1° si $(f, \delta) \in (I)$ et si α est une fonction holomorphe dans un domaine (connexe ou non) δ', alors $\alpha f \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$;
2° si $(f, \delta) \in (I)$, $(f', \delta') \in (I)$, alors $f + f' \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$.

Nous l'appellerons simplement *idéal*, en générale dans le Mémoire actuel. De la définitions, il s'ensuit immédiatement la propriété topologique que : si (I) est un idéal et si $(f, \delta) \in (I)$ et $\delta' \subset \delta$, alors $(f, \delta') \in (I)$; nous pouvons donc dire que $f \in (I)$ en un point P, ou non.

Un point P de l'espace (x) sera appelé *point–lacunaire* de l'idéal (I), si aucune fonction f n'appartient à (I) en P. L'ensemble des points lacunaires de (I) est évidemment fermé. Un point P de l'espace (x) sera appelé *zéro* de l'déal (I), si toute fonction appartenant à (I) en P s'annule à P. L'ensemble des zéros de (I) est évidemment fermé sur le complémentaire de l'ensemble des points lacunaires de (I). Réciproquement, tout ensemble fermé de points de l'espace (x) est évidemment l'ensemble des zéros d'un idéal convenable à cet espace.

Un système fini de fonctions holomorphes F_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ dans un domaine $\mathfrak{D}$ de l'espace (x) sera appelé pseudobase (fini) de l'idéal (I), s'il jouit des propriétés que :

1° toutes les F_i appartiennent à (I) en tout point de $\mathfrak{D}$;
2° pour toute fonction appartenant à (I) en un point quelconque P de $\mathfrak{D}$, on ait $f \equiv 0 \mod (F)$ en P.

Un système (F) est appelé pseudobase de l'idéal (I) en un point P, s'il en est ainsi pour un certain voisinage de P; toute pseudobase de ce caractère est appelée pseudobase locale. Le problème principal à notre point de vue pour les idéaux holomorphes de domaines indéterminés, consiste à trouver les pseudobases locales, que nous appelons problème (J). D'après ce que nous venons de voir pour les ensembles des zéros des idéaux, nous trouvons immédiatement que ce problème n'a toujours pas de solution. Pour ce problème, nous conviendrons un terme; étant donnés deux idéaux $(I_1), (I_2)$ à l'espace (x), s'ils se relient de façon que, en tout point P d'un domaine $\mathfrak{D}$, toute fonction f appartenant à l'un, appartienne nécessairement à l'autre, nous appellerons que ces idéaux sont équivalents dans $\mathfrak{D}$, et le dénoterons par $(I_1) \sim (I_2)$. Nous diront que $(I_1) \sim (I_2)$ en un point P, s'il en est ainsi pour un certain voisinage de P.

Pour les problèmes (J), nous avons vu dans le Mémoire VII que le problème (K) est toujours résoluble (théorème 4). Nous allons partir de ce résultat.

2. Principes généraux. Considérons à l'espace (x) un système des équations fonctionnelles linéaires simultanées de la forme

$$A_{i1}F_{i1} + A_{i2}F_{i2} + \cdots + A_{ip}F_{ip} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

avec quelques identités des formes $A_{ij} = A_{kl}$ $(i, k = 1, \ldots, q;\ j, l = 1, \ldots, p)$, où F_{ij} sont des fonctions données, holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}$, et A_{ij} sont des fonctions inconnues. Soit $(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{qp})$ un système de fonctions holomorphes dans un domaine connexe ou non δ contenu dans $\mathfrak{D}$; s'il satisfait identiquement à la relation indiquée, nous l'appelons solution pour δ. Considérons l'ensemble (I) de tous les (A_{11}, δ) tels que, à chaque (A_{11}, δ), il corresponde une solution de l'équation donnée, de la forme $(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{qp})$ pour δ; (I) forme évidemment un idéal; nous appellerons *idéal* (L) tout idéal de cette sorte. *Le théorème 4 du Mémoire VII* est alors, équivalent à dire que :

Tout idéal (L) dans un domaine $\mathfrak{D}$ possède une pseudobase en tout point de $\mathfrak{D}$.

Commençons par rechercher des principes généraux qui seront immédiatement issus de ce théorème.

1° Corollaire de H. Cartan. *Soient (I_1), (I_2) deux idéaux holomorphes de domaines indéterminés à l'espace (x), et soit $(I) = (I_1) \cap (I_2)$; (I) est évidemment un idéal de la même nature. Pour que (I) ait une pseudobase en un point (x^0), il suffit qu'il en est ainsi pour (I_1) et pour (I_2).* (La démonstration est immédiate).

2° **Corollaire 1.** *Etant donnés à l'espace* (x) *un idéal holomorphe de domaines indéterminés* $(I) = \{(f, \delta)\}$ *et un point* (x^0)*; on transforme* (I) *à l'aide des fonctions* $F(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_p(x)$ *holomorphes au voisinage* V *de* (x^0)*, et forme* $(J) = \{(\varphi, \delta')\}$*, comme ce qui suit :*

$$\varphi = fF + A_1\Phi_1 + \cdots + A_p\Phi_p, \quad \delta' = V \cap \delta \cap \alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_p,$$

dont A_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *est une fonction holomorphe quelconque dans* α_i*.* (J) *forme évidemment un idéal. Supposons que* (J) *ait une pseudobase en le point* (x_0)*, et encore que l'équation fonctionnelle*

$$A_0F + A_1\Phi_1 + \cdots + A_p\Phi_p = 0$$

jouisse de la propriété que, si $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ *est une solution en un point de* V*,* A_0 *appartienne nécessairement à* (I) *en ce point;* (I) *possède alors, une pseudobase en* (x^0)*.*

En effet, Ψ_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ étant une pseudobase de (J) au voisinage V' du point (x^0) $(V' \subseteq V)$, considérons l'équation fonctionnelle

$$B_1\Psi_1 + \cdots + B_q\Psi_q = A_0F + A_1\Phi_1 + \cdots + A_p\Phi_p,$$

dont l'idéal (L) : $\{(A_0, \delta)\} = (K)$ sera comparé avec (I) dans V' : d'après la définition de (J), toute fonction appartenant à (I) en un point, appartient nécessairement à (K); réciproquement, d'après la deuxième hypothèse, toute fonction appartenant à (K) en un point, appartient nécessairement à (I) en ce point; donc, $(K) \sim (I)$. (I) possède donc, une pseudobase en (x^0), d'après le théorème. C.Q.F.D.

3°. Soit $(I) = \{(f, \delta)\}$ un idéal à l'espace (x), et soit $\Phi(x)$ une fonction holomorphe dans un domaine V; considérons $(J) = \{(\varphi, \delta')\}$ tels que $\varphi = f + A\Phi$, $\delta' = V \cap \delta \cap \alpha$, dont A est une fonction holomorphe quelconque dans le domaine quelconque (connexe ou non) α, et l'appelons *adjoint*; considérons un autre (J) tel que $\varphi\Phi = f$, et l'appelons *quotient*.

Si l'idéal (I) *possède une pseudobase en un point* (x^0) *de* V*, il en est de même pour l'adjoint et pour le quotient.*

Pour l'adjoint, il est clair, et pour le quotient, on peut le constater immédiatement, d'après le théorème. Qu'arrive-t-il pour la réciproque ?

Exemple.—Considérons à l'espace de deux variables complexes (x, y), l'idéal (I) engendré par les 2 éléments (xy, Δ), $(1, \Delta')$, dont Δ signifie l'espace (x, y) et Δ' est donné par $|y| > 0$. (I) n'a pas de pseudobase en l'origine. Au contraire, l'adjoint de (I) par (y, Δ) possède la pseudobase

(y) pour Δ, et il en est de même pour le quotient de (I) par (x, Δ). Ainsi, la réciproque n'est pas vraie, ni pour l'adjoint, ni pour le quotient. Mais, si l'on les observe comme ensemble, on trouvera que : pour (y, Δ), le quotient n'a pas de pseudobase en l'orgine, et pour (x, Δ), l'adjoint ne l'est pas. — Où, il y a un fait que voici :

Corollaire 2. *Etant donnés un idéal holomorphe (I) de domaines indéterminés à l'espace (x) et une fonction holomorphe $\Phi(x)$ au voisinage V d'un point (x^0), si l'adjoint et le quotient de (I) par (Φ, V) possèdent ses pseudobases en (x^0), l'idéal original (I) l'est aussi.*

En effet, soit $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p)$ une pseudobase de l'adjoint au voisinage V' du point (x^0) $(V' \subseteq V)$. Si l'on choisi V' suffisamment petit, on a identiquement $\Phi_i = F_i + A_i \Phi$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, où $F_i \in (I)$ pour V' et A_i sont des fonctions holomorphes dans V'. Soit f une fonction appartenant à (I) en un point (x') de V', mais d'ailleurs quelconque. On a identiquement en (x'),

$$f = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_p F_p + (\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p)\Phi,$$

a_i étant des fonctions holomorphes. Désignons le quotient de (I) par (J) et $(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p)$ par B, il faut alors que $B\Phi \in (I)$, c'est-à-dire que $B \in (J)$ en (x'). Réciproquement, si une fonction holomorphe f satisfait en (x') à ces deux conditions, on a nécessairement $f \in (I)$ en (x'). Or, soit $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_q)$ une pseudobase de (J) pour V' (repris suffisamment petit); la deuxième de la condition nécessaire et suffisante s'exprime par

$$\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p = \beta_1 \Psi_1 + \cdots + \beta_q \Psi_q,$$

β_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ étant des fonctions holomorphes. L'idéal (I), étant ainsi équivalent à un idéal (L), possède une pseudobase en (x^0). C.Q.F.D.

3. Idéaux géométriques. Etant donnés à l'espace (x) un domaine $\mathfrak{D}$ et une variété caractéristique (ou analytique) Σ dans $\mathfrak{D}$[7], considérons l'ensemble (I) des (f, δ) tels que $\delta \subseteq \mathfrak{D}$ et f soit identiquement nulle sur $\Sigma \cap \delta$; (I) forme évidemment un idéal; nous l'appelons idéal géométrique de domaines indéterminés (attaché à Σ et défini dans le domaine $\mathfrak{D}$).

Théorème de H. Cartan. *Tout idéal géométrique de domaine indéterminés possède les pseudobases locales.*

Nous allons le reprouver d'après *le corollaire 1.* Soit (x^0) un point quelconque de Σ; il suffit de montrer que (I) ait une pseudobase en (x^0). D'après

[7]Une variété caractéristique est un ensemble de points qui s'exprime localement par l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions holomorphes.

un théorème de Weierstrass, nous savons que la partie de Σ au voisinage de (x^0) consiste d'un nombre fini d'éléments. Sans appeler à la connaissance que ces éléments sont aussi des variétés caractéristiques, on peut définir pour chaque élément un idéal comme ci-dessus et convenir de l'appeler pour le moment par le même mot. (I) étant au voisinage de (x^0) l'intersection de ces idéaux, d'après *le corollaire de Cartan*, il suffit de dire que chacun d'eux ait une pseudobase en (x^0). Ceci est évident, quand Σ est un point ou une surface.

Considérons donc, à nouveau à l'espace $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ tel que $n > 0$, $m > 1$, un élément Σ à n dimensions (toujours *complexes* dans ce Mémoire) d'une variété caractéristique, au voisinage d'un point (x^0, y^0) de Σ, et l'idéal géométrique (I) correspondant; nous allons montrer que (I) ait une pseudobase en (x^0, y^0). Grâce à *Weierstrass*, on peut choisir les coordonnées (x, y), tracer un polycylindre $[(\gamma), (\gamma')]$ de la forme,

$$\begin{aligned} (\gamma) \ &: \ |x_i - x_i^0| < r \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \\ (\gamma') \ &: \ |y_j - y_j^0| < \rho \qquad (j = 1, 2, \dots, m), \end{aligned}$$

et définir Σ et (I) dans $[(\gamma), (\gamma')]$ de façon que la projection[8] de Σ sur l'espace (y) soit $\Subset (\gamma')$, et que (I) ait pour $[(\gamma), (\gamma')]$ les fonctions holomorphes comme suivantes :

$$F_i(x, y_i), \ \Psi_j(x, y_1, y_j) = y_j \frac{\partial F_1(x, y_1)}{\partial y_1} - \Phi_j(x, y_1) \ \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 2, \dots, m \end{pmatrix}$$

où $F_i(x, y_i)$ est un polynome de y_i tel que le coefficient de la plus haute puissance soit 1, $\Phi_j(x, y_1)$ est un polynome de y_1 et spécialement $F_1(x, y_1)$ jouit de la propriété que la projection de Σ sur l'espace (x, y_1) coïncide à $F_1(x, y_1) = 0$, et que l'intersection de Σ et $\dfrac{\partial F_1(x, y_1)}{\partial y_1} = 0$, si elle existe, soit à $n-1$ dimensions. (Par suite F_1 n'a pas de facteur multiple.)

Soit (x', y') un point quelconque de $[(\gamma), (\gamma')]$, et soit $f(x, y)$ une fonction appartenant à (I) en (x', y'), mais d'ailleurs quelconque. D'après *le théorème du reste* expliqué au Mémoire VII, on peut trouver une fonction holomorphe $\varphi(x, y)$ telle que $f \equiv \varphi \mod (F_2, F_3, \dots, F_m)$ en (x', y'), et que φ soit un polynome en $y_2, y_3, \dots, y_m$, admettant une borne supérieure de degrés indépendant de f et de (x', y'). On peut donc choisir un entier positif λ indépendant de f et de (x', y') de façon que

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^\lambda f \equiv \psi \mod (F_2, \dots, F_m, \Psi)$$

[8]La projection de l'ensemble des pojnts (x', y') sur l'espace (x) est l'ensemble des points (x').

en (x', y'), ψ étant une fonction holomorphe de (x, y_1), $\psi(x, y_1)$, appartenant à (I), est évidemment divisible par $F_1(x, y_1)$ en (x', y'). Donc,

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^\lambda f \equiv 0 \mod (F, \Psi)$$

en (x', y').

Maintenant, selon du corollaire 1, formons $(J) = \{(\varphi, \delta')\}$ en transformant $(I) = \{(f, \delta)\}$ comme ce qui suit :

$$\varphi = f \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^\lambda + A_1 F_1 + \cdots + A_{2m-1}\Psi_m, \ \delta' = \delta \cap \alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_{2m-1}$$

(J) possèdant une pseudobase en (x^0, y^0), il ne reste qu'a examiner la deuxième condition. Considérons l'équation fonctionnelle

$$A_0 \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^\lambda + A_1 F_1 + \cdots + A_{2m-1}\Psi_m = 0;$$

soit $(A_0, A_1, \ldots, A_{2m-1})$ une solution quelconque en un point quelconque (x', y') de $[(\gamma), (\gamma')]$; A_0 est alors, nécessairement nulle sur Σ, puisqu'il l'est pour $F_1, \ldots, \Psi_m$, sans l'être pour $\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}$; donc $A_0 \in (I)$ en (x', y'). C.Q.F.D.

Il est maintenant clair que l'élément Σ est une variété caractéristique, car l'ensemble des zéros communs des fonctions de la pseudobase doit coïncider à Σ au voisinage de (x^0, y^0), puisque l'idéal actuel est celui de domaines indéterminés.

4. Projections. Etant donné à l'espace $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ un ensemble des points (x', y'), l'ensemble des points (x') est appelé la projection de l'ensemble donné, sur l'espace (x). Soit $\mathfrak{D}$ un domaine de l'espace (x), soit $\mathfrak{D}'$ un domaine connexe ou non de l'espace (y) et soit (I) un idéal holomorphe de domaines indéterminés à l'espace (x, y), sans point lacunaire dans $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$, dont l'ensemble de zéros dans le domaine $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ est Σ. Supposons que pour tout (x) dans $\mathfrak{D}$, la projection de Σ sur l'espace (y) soit $\Subset \mathfrak{D}'$, et considérons à l'espace (x) l'ensemble $(J) = \{(f, \delta)\}$ tel que $\delta \subseteq \mathfrak{D}$ et f appartienne à (I) en tout point de $(\delta, \mathfrak{D}')$; (J) forme évidemment un idéal, nous l'appellerons *la projection de l'idéal* (I) sur l'espace (x) par rapport à $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$.

Théorème 1. *Si l'idéal (I) a une pseudobase en tout point de $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$, sa projection (J) l'est pour $\mathfrak{D}$.*

En effet, soit (x^0) un point quelconque de $\mathfrak{D}$, il suffit de montrer que (J) possède une pseudobase en (x^0). Grâce à *Weierstrass*, l'intersection de

Σ et la variété $x_i = x_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est évidemment un nombre fini de points; soit (x^0, y^0) un quelconque de ces points (s'ils existent). Traçons autour de (y^0) un polycylindre $\Delta' \Subset \mathfrak{D}'$, et autour de (x^0) un polycylindre Δ suffisamment petit pour que $\Delta \Subset \mathfrak{D}$ et la porjection de $\Sigma \cap (\Delta, \Delta')$ sur l'espace (y) soit $\Subset \Delta'$, et considérons la projection (K) de (I) sur l'espace (x) par rapport à (Δ, Δ'). Dans Δ (suffisamment petit) (J) étant évidemment l'intersection d'un nombre fini des idéaux comme (K), en vertu du *corollaire de Cartan,* il suffit de légitimer la proposition pour (K).

Soit (K_1) la projection de (I) sur l'espace $(x, y_1, \ldots, y_{m-1})$ par rapport à (Δ, Δ'). Si la proposition est vraie pour ce cas, elle est évidemment, aussi vraie pour (K). Supposons donc, que $m = 1$, et désignons y_1 par y. Δ' est alors un cercle. Nous allons constater dans ces circonstance que (K) ait une pseudobase en (x^0).

L'idéal (I), ayant une pseudobase en tout point au voisinage de (Δ, Δ'), possède une pseudobase globale au voisinage de (Δ, Δ'), *d'après le théorème 3 du Mémoire VII,* que nous désignerons par $(F, \Phi_1, \ldots, \Phi_p)$. L'ensemble des zéros communs de ces fonctions holomorphes coïncide nécessairement à Σ. Nous pouvons supposer donc, que $F(x^0, y) \not\equiv 0$, puisque, si non, l'une des Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ doit l'être. Nous pouvons encore supposer que l'équation $F(x^0, y) = 0$ n'ait pas de racine sur la frontière de Δ', puisqu'il en est ainsi pour Σ; diminuons la mesure de Δ pour que l'on ait $F = \omega F_1$ au voisinage de (Δ, Δ'), dont ω signifie une fonction holomorphe non nulle et F_1 un polynome de y tel que les coefficients soient des fonctions holomorphes de (x) au voisinage de Δ, et que celui de la plus haute puissance soit 1, et encore que pour tout (x) au voisinage de Δ l'équation $F_1 = 0$ n'ait de racines que dans Δ'. Supposons qu'il le soit pour F même. Soit λ le degré du polynome F; d'après *le théorème du reste*, nous pouvons supposer que Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ soient des polynomes de y_1, $< \lambda$ en degrés.

Soit (x') un point quelconque de Δ, soit $\varphi(x, y)$ un polynome de y, $\leq 2\lambda - 2$ en degrés et appartenant à (I) en tout point au voisinage de $[(x'), \Delta']$, mais d'ailleurs quelconque. Si l'on trace un polycylindre δ suffisamment petit autour de (x'), on a $\varphi \equiv 0 \mod (F, \Phi)$ en tout point au voisinage de (δ, Δ'), par suite, d'après *le théorème 1 du Mémoire VII,* φ s'exprime de la forme,

$$\varphi = C_0 F + C_1 \Phi_1 + \cdots + C_p \Phi_p,$$

C_i $(i = 0, 1, \ldots, p)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de (δ, Δ'). D'après le théorème du reste, on peut choisir pour C_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ des polynomes de y de degrés $\leq \lambda - 1$. Nous disons que C_0 est alors, aussi un polynome de y. En effet, on a $C_0 = \Psi / F$, Ψ étant un polynome de

y dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de (x) au voisinage de δ, pour tout (x') au voisinage de δ, l'équation $F = 0$ n'a de racine que dans Δ'; et C_0 est holomorphe au voisinage de (δ, Δ'). D'un autre côté, soit $a(x)$ le coefficient de la plus haute puissance de y de Ψ et soit $\eta(x)$ une quelconque des racines de l'équation $\Psi = 0$ par rapport à y, la fonction analytique $a(x) \cdot \eta(x)$ n'admet de point singulier que des points critiques au voisinage de δ. De là, il s'ensuit que C_0 est un polynome de y, par suite, de degrés $\leq \lambda - 2$.

Nous avons ainsi vu que toute fonction $\varphi(x, y)$ qui est un polynome de y de degrés $\leq 2\lambda - 2$ et qui appartient à (I) en tout point au voisinage de $[(x'), \Delta']$, peut être représentée de la forme ci-dessus, dont $C_0, C_1, \dots, C_p$ jouissent des propriétés indiquées. La réciproque est évidemment, aussi vraie. Posons

$$F = y^\lambda + A_1 y^{\lambda-1} + \cdots + A_\lambda, \qquad \Phi_i = A_{i1} y^{\lambda-1} + \cdots + A_{i\lambda},$$
$$C_0 = u_2 y^{\lambda-2} + \cdots + u_\lambda, \qquad C_i = u_{i1} y^{\lambda-1} + \cdots + u_{i\lambda}$$
$$(i = 1, 2, \dots, p),$$
$$\varphi = B_0 y^{2\lambda-2} + \cdots + B_{2\lambda-2};$$

la condition nécessaire et suffisante est alors, équivalente à dire que

$$B_0 = u_2 + \sum A_{i1} u_{i1}, \ \dots, \ B_{2\lambda-2} = u_\lambda A_\lambda + \sum u_{i\lambda} A_{i\lambda}$$
$$(i = 1, 2, \dots, p).$$

Comme cas spécial, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $f(x) \in (K)$ en (x') est que f satisfasse en (x') avec (u) le système d'équations fonctionnelles simultanées

$$u_2 + \sum u_{i1} A_{i1} = 0, \ \dots, \ f = u_\lambda A_\lambda + \sum u_{i\lambda} A_{i\lambda}$$
$$(i = 1, 2, \dots, p)$$

dont (x') est un point quelconque de Δ, et A_j, A_{ij} $(j = 1, 2, \dots, \lambda)$ sont des fonctions holomorphes données dans Δ. L'idéal (K), étant ainsi équivalent à un idéal (L), possède une pseudobase en (x^0). C.Q.F.D.

II. Domaines intérieurement ramifiés.

5. Définitions. Selon l'Ouvrage de H. Behnke et P. Thullen, considérons sur l'espace fini de n variables complexes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les domaines qui n'ont pas de point critique comme point intérieur, les points frontières, les points critiques comme points frontières etc. Nous allons définir les domaines intérieurement ramifiés.

Soit M un point critique d'un domaine $\mathfrak{D}$, nous l'appellerons *point critique non-transcendant*, s'il satisfait aux conditions que :

1° l'ordre soit fini[9].

2° Soit $\underline{M}$ le base-point (Grundpunkt) de M, il existe un domaine univalent $\underline{\delta}$ contenant $\underline{M}$ tel que, δ étant la composante connexe ayant M comme point frontière, de la portion de $\mathfrak{D}$ sur $\underline{\delta}$, l'ensemble des base-points des points frontières de δ dans $\underline{\delta}$ soit une surface caractéristique.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine quelconque défini comme ci-dessus; considérons un ensemble de points $\mathfrak{D}'$, en adjoignant à $\mathfrak{D}$ une partie de ses points critiques non transcendants qui peut être nulle, ou bien consister de tous de façon que, pour tout point critique M de $\mathfrak{D}$ appartenant à $\mathfrak{D}'$, il existe un domaine univalent $\underline{\delta}$ contenant le base-point $\underline{M}$ de M tel que, δ étant la composante connexe ayant M comme point frontière de la portion de $\mathfrak{D}$ sur $\underline{\delta}$, tout point critique non-transcendant de δ appartienne à $\mathfrak{D}'$; et désormais, nous appellerons $\mathfrak{D}'$ *domaine*. Tout point du domaine $\mathfrak{D}'$ qui n'est pas point critique sera appelé *régulier*. Pour la relation et l'intersection de deux domaines ainsi étendus, il suffit de définir au moyen des domaines consistant des points réguliers des domaines donnés.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine, soit $\mathfrak{D}_0$ l'ensemble des points réguliers de $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{D}$ sera appelé *pseudoconvexe*, si $\mathfrak{D}_0$ est ainsi.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine, soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$ dont les coordonnées seront généralement désignées par (x) dans la suivante; une fonction $f(P)$ est appelée *holomorphe* dans $\mathfrak{D}$, si elle satisfait aux conditions que :

1° à tout point P de $\mathfrak{D}$, il corresponde une valeur finie de f et une seule;

2° $f(P)$ soit une fonction continue de P;

3° au voisinage de tout point régulier de $\mathfrak{D}$, $f(P)$ soit une fonction holomorphe de (x).

Un domaine $\mathfrak{D}$ sera appelé *domaine d'holomorphie*, s'il existe une fonction telle qu'elle soit holomorphe dans $\mathfrak{D}$ sans l'être pour tout autre domaine contenant $\mathfrak{D}$.

Nous appellerons avec H. Cartan[10], *domaine polyédral* tout ensemble de points Δ qui peut s'exprimer de la forme suivante :

$$\Delta \Subset (R), \quad f_i(P) \in A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

dont (R) signifie un domaine partiel (Teilbereich, connexe ou non) d'un domaine d'holomorphie, $f_i(P)$, des fonctions holomorphes dans (R) et A_i,

[9] Nous appellerons ordre du point critique le nombre $m - 1$, au lieu du nombre de feuilles m de la page 13 de l'Ouvrage.

[10] H. Cartan, 1950, (cité à p. 128) No. 21.

des domaines *fermés* bornés et *simplement connexes* du plan. Les domaines (fermés connexes ou non) de ce type ont été considérés pour la première fois par A. Weil[11]; c'est sur eux que nous avons établi le lemme fondamental (Théorème II) dans le Mémoire I, et que nous somme en train de la rétablir.

6. Propriété (H). Traçons à l'espace (x) un domaine univalent $\mathfrak{D}$ et considérons dans $\mathfrak{D}$ une variété caractéristique S; une fonction u sur S sera appelée *holomorphe*, si elle satisfait aux conditions que :

1° pour tout point régulier de S, il corresponde une valeur déterminée de u, de façon que u soit localement la trace d'une fonction holomqrphe à l'espace (x);

2° u soit bornée pour les points réguliers au voisinage d'un point quelconque de S.

u sera appelée holomorphe en un point de S, si elle est holomorphe dans un voisinage de ce point.

Soit M un point de S, et soit u une fonction holomorphe sur S en M; si u est la trace d'une fonction holomorphe à l'espace (x), sauf peut être aux points singuliers, nous appellerons que u jouit de la propriété (H). Si toute u jouit de la propriété (H), nous appellerons que le point M possède la propriété (H)[12]. Pour étudier cette propriété, introduisons le lemme suivant :

Lemme de H. Cartan (*Théorème des trois anneaux*) *Considérons à l'espace* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 3)$ *les trois domaines univalents* $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ *des formes suivantes* :

$$
\begin{array}{lllll}
(\Delta_1) & \rho_1 < |x_1| < r_1, & |x_2| < r_2, & |x_3| < r_3, & (x_4, \ldots, x_n) \in \mathfrak{D} \\
(\Delta_2) & |x_1| < r_1, & \rho_2 < |x_2| < r_2, & |x_3| < r_3, & \quad '' \qquad '' \\
(\Delta_3) & |x_1| < r_1, & |x_2| < r_2, & \rho_3 < |x_3| < r_3, & \quad '' \qquad ''
\end{array}
$$

où $\mathfrak{D}$ *est un damaine univalent,* r_i $(i = 1, 2, 3)$ *des nombres positifs et* ρ_i *des nombres positifs ou nuls. Etant données des fonctions* $g_i(x)$ *holomorphes dans* $\Delta_j \cap \Delta_k$*, respectivement,* (i, j, k) *étant un échange circulaire quelconque de* $(1, 2, 3)$*, telles que l'on ait identiquement*

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0,$$

[11] A. Weil, 1932 (C. R.), 1935 (Math. Annalen).

[12] Par exemple, pour la surface $y^2 = x^3$ à l'espace (x, y), le point $(0,0)$ n'a pas de la propriété (H).

on peut trouver des fonctions $h_i(x)$ holomorphes dans Δ_i, respectivement, de façon que l'on ait identiquement

$$g_1 = h_2 - h_3, \quad g_2 = h_3 - h_1, \quad g_3 = h_1 - h_2.$$ [13]

Lemme 1. *Etant données dans un domaine univalent $\mathfrak{D}$ à l'espace fini $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 3)$, une surface caractéristique S, une fonction holomorphe u sur S et une variété caractéristique S_0 sur S, à $(n-3)$ dimensions (complexes), si u jouit de la propriété (H) en tout point de $(S - S_0)$, il en est de même pour S_0.*

En effet, soit (x^0) un point quelconque de S_0; il suffit de montrer que u possède la propriété (H) en (x^0); nous regarderons (x^0) comme l'origine, et nous ne parlerons dans la suivante que dans un voisinage suffisamment petit de l'origine. S_0 étant à $(n-3)$ dimensions, nous pouvons choisir les coordonnées (x) et les nombres positifs ρ, r, r', et former selon le lemme de Cartan, les domaines $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, dont $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$, $r_1 = r_2 = r_3 = r$ et $\mathfrak{D}$ s'exprime par $|x_i| < r'$ $(i = 4, \ldots, n)$, de telle façon qu'il n'y ait pas de point de S_0 au voisinage de chaque Δ_j $(j = 1, 2, 3)$.

u possède alors, la propriété (H) en tout point de S au voisinage de Δ_1. D'après *le théorème 2 du Mémoire VII* concernant le problème (C_2), on peut donc, facilement trouver une fonction holomorphe $F_1(x)$ au voisinage de Δ_1 telle que la trace sur S soit u[14] (toujours, aux points singuliers de S près). Pareillement pour Δ_2 et Δ_3 on peut trouver les fonctions $F_2(x)$ et $F_3(x)$, respectivement.

Pour $\Delta_1 \cap \Delta_2$, $F_1 - F_2$ s'annule identiquement sur S. Soit $F(x) = 0$ l'équation de S, $F(x)$ étant une fonction holomorphe sans facteur multiple pour $(C) : |x_i| < r$, $|x_j| < r'$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 4, \ldots, n)$; on a donc, identiquement

$$F_1 - F_2 = g_3 F,$$

g_3 étant une fonction holomorphe pour $\Delta_1 \cap \Delta_2$. Pareillement, pour $\Delta_2 \cap \Delta_3$, $\Delta_3 \cap \Delta_1$, on a respectivement

$$F_2 - F_3 = g_1 F, \qquad F_3 - F_1 = g_2 F.$$

Comme

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0,$$

[13] H. Cartan : Note sur le premier problème de Cousin, 1938, C.R.

[14] Pour appliquer le théorème concernant le polycylindre fermé au cas actuel, il suffit de considérer $y = 1/x_1$, d'après l'habitude.

en vertu du *lemme de Cartan*, on peut trouver des fonctions holomorphes $h_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ pour Δ_i, respectivement, de façon que l'on ait identiquement

$$g_1 = h_2 - h_3, \quad g_2 = h_3 - h_1, \quad g_3 = h_1 - h_2.$$

Posons

$$\Phi_i = F_i - h_i F \qquad (i = 1, 2, 3);$$

chaque Φ_i est alors une fonction holomorphe dans Δ_i, et devient à u sur S; on a identiquement

$$\Phi_i - \Phi_j = (F_i - F_j) - (h_i - h_j)F = g_k F - g_k F = 0$$

donc, Φ_i ne sont que des parties d'une seule fonction holomorphe $\Phi(x)$ dans $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$.

Grâce à Hartogs, $\Phi(x)$ doit alors être holomorphe pour le polycylindre (C). Soit v la trace de $\Phi(x)$ sur S; sur la portion de S dans $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ on a identiquement $u = v$. Or, chaque composante (irréductible) de S dans (C), pouvant être regarder comme la position des pôles d'une fonction méromorphe dans (C), possède nécessairement des points dans $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$, d'après Hartogs. On a donc, $u = v$, identiquement sur S dans (C). u est ainsi la trace de $\Phi(x)$ en l'origine. C.Q.F.D.

7. Fonctions (W). Considérons à l'espace (fini) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un domaine univalent $\underline{\mathfrak{D}}$ et un domaine multiple (Überlagerungsbereich) $\mathfrak{D}$ de $\underline{\mathfrak{D}}$, dont $\mathfrak{D}$ n'est pas nécessairement connexe. Supposons que $\mathfrak{D}$ soit d'un nombre fini de feuilles; $\mathfrak{D}$ est alors d'un même nombre, ν de feuilles. Soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$ ayant les coordonnées (x), soient $\eta_1(P), \eta_2(P), \ldots,$ $\eta_m(P)$ des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$. Supposons *que, pour toute paire de points réguliers de $\mathfrak{D}$ ayant les mêmes coordonnées, les éléments analytiques de $\eta_1(P)$ soient différents.* Considérons à l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1,$ $y_2, \ldots, y_m)$ la variété caractéristique Σ donnée par

$$y_i = \eta_i(P) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

A un point P de $\mathfrak{D}$, il correspond un point M de Σ ayant les coordonnées (x, η); et réciproquement, à un point régulier de Σ, il correspond un point de $\mathfrak{D}$ et un seul, d'après la propriété de η_1.

Soit Δ un domaine univalent à l'espace (x, y), contenu dans le domaine donné par $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$, et contenant des points de Σ; considérons une fonction holomorphe $F(x, y)$ dans Δ jouissant de la propriété que, pour toute fonction holomorphe u sur Σ en un point quelconque M de $\Sigma \cap \Delta$, uF ait de la propriété (H); et nous l'appellerons *fonction* (W). Il est évident que les fonctions (W) par rapport à Σ pour Δ, forment un idéal holomorphe du domaine déterminé Δ.

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ les points de $\mathfrak{D}$ sur le point (x); formons la fonction

$$F_1(x, y_1) = \prod [y_1 - \eta_1(P_i)] \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Grâce à Weierstrass, on sait bien que :

≪A toute fonction holomorphe $u(P)$ sur $\mathfrak{D}$, il correspond un polynome de y_1, $\Phi(x, y_1)$ dont les coefficient sont des fonctions holomorphes de (x) dans $\underline{\mathfrak{D}}$, de façon que $u = \dfrac{\Phi}{(\partial/\partial y_1)F_1}$ sur $F_1 = 0$.≫

La démonstration usuelle[15] s'applique, n'importe si $\mathfrak{D}$ est connexe ou non. Autrement dit :

$\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}$ *est une fonctian* (W) *par rapport à* Σ *dans le domaine* $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$.

Envisageons la fonction η_1. Soit σ l'ensemble des points critiques du domaine $\mathfrak{D}$; σ est une surface caractéristique sur $\mathfrak{D}$ (c'est-à-dire, l'image d'une variété caractéristique à $(n-1)$ dimensions sur Σ); σ est donc appelé *surface critique*. Soit σ_0 une composante (irréductible) quelconque de σ dans $\mathfrak{D}$, et soit P' un point de σ_0 tel que l'ensemble $\underline{\sigma}_0$ des base-points des points de σ_0 (que nous appellerons base-ensemble de σ_0), soit régulier en $\underline{P}'$ et qu'aucune des autres composantes de σ ne passe par P', mais d'ailleurs quelconque. En appliquant une transformation pseudoconforme biunivoque au voisinage de $\underline{P}'$ de l'espace (x), $\underline{P}'$ étant le base-point de P', on peut regarder la surface caractéristique $\underline{\sigma}_0$ comme être donnée par $x_1 = 0$. Soit $\mu - 1$ l'ordre de la surface critique σ_0; on a au voisinage de P',

$$\eta_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots, \qquad t = (x_1)^{\frac{1}{\mu}}$$

a_i $(i = 0, 1, \ldots)$ étant des fonctions holomorphes de $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Selon la nature de a_1, deux cas se présentent :

Cas 1 où $a_1 \not\equiv 0$. Soit S la surface caractéristique à l'espace (x, y_1) donnée par $F_1(x, y_1) = 0$, soit M' le point sur S correspondant à P', et soit S_0 la composante (irréductible) de S dans un voisinage suffisamment petit de M' correspondant aux feuilles de $\mathfrak{D}$ où se situe P'. Si $a_1 \neq 0$ pour P', S_0 est évidemment régulier en M'. Donc, dans ce cas, l'ensemble des points singuliers de S_0 est à $(n-2)$ dimensions au plus; par suite, d'après *le lemme 1*, tout point de S_0 possède la propriété (H). Toute surface critique ayant cette propriété sera appelée *de première espèce* par rapport à η_1.

Cas 2 où $a_1 \equiv 0$ *sur* σ_0. Soit T_0 l'ensemble de points de S_0 correspondant à σ_0. Dans ce cas, la fonction $(x_1)^{\frac{1}{\mu}}$ montre qu'aucun point de T_0 ne

[15] Voir : W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1, 1929, pp. 116, 117.

possède la propriété (H) par rapport à S_0. Nous appellerons toute surface critique de cette propriété d'être *de deuxième espèce* par rapport à η_1.

Soit P un point de $\mathfrak{D}$; s'il existe un autre point P' de $\mathfrak{D}$ ayant les mêmes coordonées que P, telle que $\eta_1(P) = \eta_1(P')$, nous appellerons P *point équivoque* par rapport à η_1. Soit τ l'ensemble des points équivoques de $\mathfrak{D}$ par rapport à η_1; τ est évidemment une surface caractéristique sur $\mathfrak{D}$, que nous appellerons *surface équivoque*. Soit M le point de S correspondant à un point équivoque P de $\mathfrak{D}$ par rapport à η_1; il existe au moins deux branches de S passant par M. M ne possède pas la propriété (H) par rapport à S. Considérons en effet, une fonction u sur S au voisinage de M, qui est identiquement nulle sur une des branches et 1 sur les autres; d'après la définition, u est une fonction holomorphe sur S, mais, il n'y a aucune fonction holomorphe de (x, y_1) au voisinage de M devenant à u aux points réguliers de S.

Nous avons ainsi vu qu'aucun des points de S qui correspondent les points critiques de la deuxième espèce ou les points équivoques de $\mathfrak{D}$ par rapport à η_1, ne possède la propriété (H). Tout autre point de S jouit évidemment de cette propriété. D'où, il en résulte que :

Soit Δ un domaine univalent borné à l'espace (x, y) contenu avec sa frontière dans le domaine $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$, et soit $U(x, y)$ une fonction holomorphe dans Δ telle que, si l'on pose

$$u_0(P) = U(x_1, \ldots, x_n, \eta_1(P), \ldots, \eta_m(P)),$$

la fonction u_0 soit identiquement nulle sur la surface critique de deuxième espèce σ' et sur la surface équivoque τ de $\mathfrak{D}$ par rapport à η_1. On peut alors, trouver un entier positif λ tel gue U^λ soit une fonction (W) par rapport à Σ dans Δ.

En effet, soit $\mathfrak{D}_0$ le domaine dans $\mathfrak{D}$ correspondant à $\Delta \cap \Sigma$; en substituant $y_i = \eta_i(P)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ dans $\partial F_1/\partial y_1$, on obtient $v_0(P)$; pour $\mathfrak{D}_0$, on peut trouver un entier positif λ tel que u_0^λ soit divisible par v_0 sur σ' et τ, sauf peut être à une variété caractéristique (sur $\mathfrak{D}$) à moindres dimensions. Soit M un point quelconque de Σ dans Δ, soit u une fonction holomorphe quelconque sur Σ en M. Grâce à Weierstrass, uU^λ jouit alors de la propriété (H) en tout point au voisinage de M, sauf peut-être à une variété à $(n-2)$ dimensions sur Σ, par suit sans exception, d'après *le lemme 1*.

Soit (x^0) un point quelconque de $\underline{\mathfrak{D}}$, traçons autour de (x^0) un polycylindre $(C) \Subset \underline{\mathfrak{D}}$; soit R un nombre positif tel que pour tout (x) dans (C)

on ait $|\eta_i| < R$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, traçons avec le rayon R le polycylindre (Γ) autour de l'origine de l'espace (y) et désignons $[(C), (\Gamma)]$ par Δ.

Soit T l'ensemble des zéros communs des fonctions (W) par rapport à Σ dans Δ et soit S_0 l'ensemble des points singuliers de Σ dans Δ, alors $T \subseteq S_0$.

En effet, on a d'abord $T \subseteq \Sigma$. Car, l'idéal géométrique (de domaines indéterminés) attaché à Σ pour $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ possède une pseudobase en tout point au voisinage de Δ, d'après *le théorème de Cartan*, par suite, une pseudobase $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p)$ pour Δ, d'après *le théorème 3 du Mémoire VII.* L'ensemble des zéros communs des fonctions Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ est Σ dans Δ; or, toute Φ_i est une fonction (W), puisqu'elle s'annule identiquement sur Σ; donc, $T \subseteq \Sigma$.

Considérons une transformation linéaire non-singulière L de l'espace (x, y) de la forme suivante,

$$x'_i = \sum A_{i,k} x_k + \sum A_{i,n+l} y_l, \quad y'_j = \sum A_{n+j,k} x_k + \sum A_{n+j,n+l} y_l,$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n;\ j, l = 1, 2, \ldots, m),$$

$$|A_{pp} - 1| < \varepsilon,\ |A_{pq}| < \varepsilon \quad (p \neq q;\ p, q = 1, 2, \ldots, n + m),$$

ε étant un nombre positif dont nous expliquerons plus tard. Les images à l'espace (x', y') de Σ, Δ seront désignées par les mêmes lettres. Considérons pour $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ la variété caractéristique Σ_1 donnée par $F_i(x, y_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, dont

$$F_i(x, y_i) = \prod [y_i - \eta_i(P_j)] \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

P_j étant les points de $\mathfrak{D}$ sur le plan (x). Σ consiste des composantes de Σ_1. Traçons le polycylindre $|x_i - x_i^0| < r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $\Subset \underline{\mathfrak{D}}$ et $\Supset (C)$, et prenons un nombre positif $R' > R$ de façon que pour tout (x) dans le polycylindre on ait $|\eta_i| < \rho < R'$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, ρ étant un nombre déterminé; alors, il n'y a pas de point de Σ_1 au voisinage de chacun des m ensembles de points $|x_i - x_i^0| < r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. $|y_p| = R'$ dont p représente un quelconque de $1, 2, \ldots, m$. Choisissons ε suffisamment petit pour qu'il en soit de même pour (x', y'), précisément dit, que les fonctions $F_j(x', y') = F_j(x, y_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ soient définies et holomorphes au voisinage de $|x'_i - x_i^{'0}| < r_i$, $|y'_j| < R'$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$, $(x^{'0})$ étant l'image de (x^0), et de plus qu'il n'y aura pas de zéro commun de ces fonctions $F_j(x', y')$ au voisinage de chacun des m ensembles de points $|x'_i - x_i^{'0}| < r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $|y'_p| = R'$. Dans ces circonstances, grâce à Weierstrass, on peut facilement résoudre le système des équations simultanées $F_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ par rapport à (y') dans $|x'_i - x_i'^0| < r_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Σ étant une somme des composantes (irréductibles) de Σ_1 dans le polycylindre $|x'_i - x_i'^0| < r_i$, $|y'_j| < R'$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$, il en est évidemment de même pour l'équation représentant Σ. Soit $\mathfrak{D}'$ le domaine multivalent (connexe ou non) sur $|x'_i - x_i'^0| < r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ correspondant à Σ, et soit $y'_j = \eta'_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ l'équation de Σ, η'_j étant des fonctions holomorphes sur $\mathfrak{D}'$. Prenons ε encore petit pour que Δ soit $\Subset$ le polycylindre $|x'_i - x_i'^0| < r_i$, $|y'_j| < R'$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$.

Considérons $(A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{n+m,n+m})$ comme point du polycylindre de rayon ε indiqué ci-dessus (à l'espace de $(n+m)^2$ variables complexes). Il est évident que η'_1 jouit de la même propriété que η_1, sauf peut-être pour des points (A) de la première catégorie. Soit M un point régulier de Σ dans Δ, mais d'ailleurs quelconque; il est facile à voir que le point correspondant est un point régulier de $\mathfrak{D}'$ et n'est pas un point équivoque par rapport à η'_1, sauf peut-être pour des points (A) de la première catégorie. On peut donc trouver (x', y') remplissant ces conditions.

Grâce au théorème de Cartan et au théorème 3 du Mémoire VII, on peut trouver une fonction holomorphe $\Psi(x)$ dans Δ telle que l'image sur $\mathfrak{D}'$ de la trace de Ψ sur Σ soit nulle identiquement sur la surface critique de la deuxième espèce et sur la surface équivoque par rapport à η'_1, sans s'annuler à M. D'après ce que nous venons de voir, Ψ^λ est une fonction (W) par rapport à Σ pour Δ, λ étant un certain entier positif. Donc, $T \Subset S_0$.

8. Nullstellensatz. II y a un lemme que voici :

Lemme de Hilbert-Rückert. *Soient $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, $f(x)$ des fonctions holomorphes en un point (x^0); si f s'annule identiquement sur l'ensemble des zéros communs de toutes les F_i, on pout trouver un entier positif λ tel que $f^\lambda \equiv 0 \mod (F)$*[16].

Si F_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ et f sont holomorphes et se relient de la manière indiquée dans un polycylindre (C) autour de (x^0), le lemme subsiste en tout point de (C); par suite, d'après *le théorème 1 du Mémoire VII, le lemme subsiste dans tout polycylindre $(C_0) \Subset (C)$.*

En appliquant ce lemme au résultat précédent, on a :

Lemme 2 *Soit $F(x, y)$ une fonction holomorphe daus Δ s'annulant identiquement sur l'ensemble des points singuliers S_0 de Σ, soit Δ' un domaine $\Subset \Delta$; alors, on peut trouver un entier positif λ tel que F^λ soit une fonction (W) par rapport à Σ pour Δ'.*

[16] Voir : S. Bochner and W. Martin, Several complex variables, 1948, Chapter X.

Or le caractère essentiel de nos recherches consiste à *trouver* des solutions; donc, pour éclaircir comment on peut trouver le nombre λ dans le Nullstellensatz, nous allons le reprouver directement.

1° *Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des fonctions holomorphes en un point (x^0, y^0) de l'espace $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ $(n \geq 0, m > 0)$, dont aucune ne s'annule pas identiquement, et soit Σ l'ensemble des zéros communs de ces fonctions. Supposons que les composantes (irréductibles) de Σ soient à n dimensions; alors, pour toute fonction holomorphe $f(x, y)$ s'annulant identiquement sur Σ au voisinage de (x^0, y^0), on peut trouver un entier positif μ et une fonction holomorphe $H(x, y)$ qui ne s'annule pas identiquement sur aucune composante de Σ, de façon que l'on ait $Hf^\mu \equiv 0 \mod (F)$, au vaisinage de (x^0, y^0).*

Supposons, pour l'effet, que (x^0, y^0) soit un point de Σ. Dans le suivant, nous nous placerons toujours dans un voisinage de (x^0, y^0) où les circonstances données subsistent. En choisissant les coordonnées et les nombres positifs r, ρ, ρ' $(\rho > \rho')$ traçons le polycylindre $\Delta = [(\gamma), (\gamma')]$ dont (γ) est donné par $|x_i - x_i^0| < r$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et (γ') par $|y_j - y_j^0| < \rho$ $(j = 1, \ldots, m)$, de façon que, lorsque (x) se situe dans (γ), Σ n'ait pas de point sur $|y_q - y_q^0| \geq \rho'$, q étant un quelconque de $1, 2, \ldots, m$. D'après Weierstrass, on a alors, m fonctions $\Phi_j(x, y_j)$ comme suivante : $\Phi_j(x, y_j)$ est un polynome de y_j, sans facteur multiple, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de (x) dans (γ) et le coefficient de la plus haute puissance est 1, et telle que la projection de Σ sur l'espace (x, y_j) soit donnée par $\Phi_j = 0$ pour $(x) \in (\gamma)$.

Nous allons montrer que $\Phi_j^\nu \equiv 0 \mod (F)$ en (x^0, y^0), ν étant un certain entier positif indépendant de j. Considérons l'idéal (I) de domaines indéterminés engendré par (F_k, Δ) $(k = 1, 2, \ldots, p)$, et sa projection (J) sur l'espace (x, y_j) par rapport à Δ. Soit Σ' la projection de Σ sur l'espace (x, y_j), alors pour $(x) \in (\gamma)$, Σ' est une surface caractéristique. Or, d'après *le théorème 1*, (J) possède une pseudobase en tout point de $[(x) \in (\gamma),\ |y_j - y_j^0| < \rho]$; donc, Σ' est nécessairement l'ensemble de zéros de (J). Par suite, Φ_j s'annulant identiquement sur Σ', on peut trouver un nombre entier ν' tel que $\Phi_j^{\nu'} \in (J)$ en (x^0, y^0). Alors $\Phi_j^{\nu'} \in (I)$ en (x^0, y^0). Soit ν le plus grand de ν' pour $j = 1, 2, \ldots, m$, on a $\Phi_j^\nu \equiv 0 \mod (F)$ en (x^0, y^0).

Considérons la variété caractéristique T donnée par $\Phi_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ dans Δ. Σ consiste dans Δ des composantes (irréductibles) de T, soit Σ' la somme des composantes de T qui n'appartiennent pas à Σ. Considérons l'idéal géométrique (K) de domaines indéterminés attaché à T, défini dans

Δ; il est facile à voir que $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m)$ *donne une pseudobase de* (K) *pour* Δ (d'après *le théorème du reste,* par exemple)[17]. Soit φ une fonction holomorphe dans Δ qui s'annule identiquement sur Σ', sans l'être pour aucune composante de Σ; on a alors, $f\varphi \equiv 0 \mod (\Phi)$ en (x^0, y^0). Or $\Phi_j^\nu \equiv 0 \mod (F)$ en (x^0, y^0) . Donc, $(f\varphi)^\mu \equiv 0 \mod (F)$ en (x^0, y^0), où $\mu = m(\nu - 1) + 1$; ce qui légitime la proposition.

2° Nous allons constater le Nullstellensatz formulé ci-dessus. Supposons qu'aucune des $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ ne s'annule identiquement. Nous allons d'abord montrer que, si ce théorème subsiste pour le cas où Σ consiste des composantes à un même nombre de dimensions, il subsiste toujours. Par exemple, soit $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dont Σ_1 est à λ dimensions $(0 < \lambda < n)$ et Σ_2 est à $(\lambda - 1)$ dimensions. Supposant que Σ_2 est donné comme l'ensemble des zéros communs des fonctions holomorphes $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_q(x)$, au voisinage de (x^0), considérons

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_p(x),\ y\Phi_1(x),\ y\Phi_2(x),\ \ldots,\ y\Phi_q(x),$$

au voisinage du point $(x^0, 0)$ de l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$; dont l'ensemble des zéros communs consiste évidemment des composantes à λ dimensions. $f(x)$ restant satisfaire à la condition, la proposition est vrai pour le nouveau système de fonctions, d'après l'hypothèse; par suite, en posant $y = 0$, elle est aussi vraie pour (F). Le même mode de raisonnement s'applique sans doute au cas général.

Supposons donc, que les composantes de Σ soient à dimensions r $(< n)$. D'après la proposition précédente, on a $Hf^\mu \equiv 0 \mod (F)$ en (x^0) $(H,\ \mu$ ayant les significations indiquées). Or alors, si $f^\nu \equiv 0 \mod (H, F)$ en (x^0), ν étant un certain entier positif, on a nécessairement $f^{\nu+\mu} \equiv 0 \mod (F)$ en (x^0). Soit Σ' l'intersection de Σ et $H = 0$; d'après la propriété de H, Σ' consiste des composantes à $(r - 1)$ dimensions (s'il existe). Par suite, si la proposition est vraie pour $r - 1$, elle est aussi vrai pour r. Et, la proposition est évidemment vraie pour $r = 0$ (d'après la proposition précédente). Elle est donc, toujours vraie.

[17] En effet, soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe s'annulant identiquement sur T au voisinage d'un point (a, b) de T. Traçons un polycylindre δ à l'espace (x) autour de (a), et un polycylindre δ' à l'espace (y) autour de (b), dont la composante sur le plan y_j sera désignée par δ'_j, de façon que les circonstance subsistent dans (δ, δ'), et que, pour tout (x) dans δ, $\Phi_j(x, y_j) = 0$ ait λ_j racines dans δ'_j. On a alors, identiquement (1) $f = f_0 + \varphi\Phi_1$ dans (δ, δ') où f_0, φ sont des fonctions holomorphes et f_0 est un polynome de y_1, $< \lambda_1$ en degré. Choisissons (x') dans δ tel que $\Phi_1(x', y_1) = 0$ ait λ_1 racines, $\eta_1, \ldots, \eta_{\lambda_1}$ dans δ_1 et y'_k $(k = 2, \ldots, m)$ dans δ'_k tel que $\Phi_k(x', y'_k) = 0$. En posant ces valeurs dans (1), on a $f' = f'_0 + \varphi'\Phi'_1$. Or, si l'on encore pose $y_1 = \eta_l$ $(l = 1, \ldots, \lambda_1)$ on a $\Phi'_1 = 0$, $f' = 0$, et par suit, $f'_0 = 0$. f'_0 étant un polynome de y_1, $< \lambda_1$ en degré, ce qui veut dire que $f'_0 \equiv 0$. Donc, tous les coefficients de f_0 doivent s'annuler identiquement sur $\Phi_k(x, y_k) = 0$ $(k = 2, \ldots, m)$.

9. Idéaux (Z). Reprenons le domaine $\mathfrak{D}$ à l'espace (x) et la variété Σ correspondante à l'espace (x, y), expliqués au commencement de No. 7. Proposons-nous à définir une *distribution de zéros* $(\mathfrak{z})$ sur $\mathfrak{D}$, en étendant la donnée du *deuxième problème de Cousin* pour le domaine univalent et nous rencontrons immédiatement une circonstance nouvelle que voici :

En général, une surface caractéristique sur un domaine intérieurement ramifié ne peut pas se représenter même localement comme l'ensemble des zéros d'une seule fonction holomorphe sur le domaine.

L'exemple que l'auteur a construit, n'étant pas si simple, sera exposé dans un Mémoire ultérieur.

Soit σ une surface caractéristique irréductible dans un domaine $\Delta \subseteq \mathfrak{D}$, soit u une fonction holomorphe dans Δ s'annulant identiquement sur σ; nous commençons par définir *l'ordre de zéros de u sur σ* :

Cas 1 où σ n'est pas une surface critique de Δ. Soit P_0 un point de σ différent des points critiques de $\mathfrak{D}$; au voisinage de P_0, $u(P)$ est une fonction holomorphe de (x), (x) étant les coordonnées de P; par suite, on sait l'ordre λ de zéros de u sur σ; λ ne dépend pas de P_0, nous l'appellerons ordre de zéros de u sur σ. (Si $u \equiv 0$, $\lambda = \infty$; si u ne s'annule pas identiquement sur σ, $\lambda = 0$).

Cas 2 où σ est une surface critique de Δ. Soit P_0 un point de σ qui n'appartient à aucune autre composante de la surface critique; au voisinage de P_0, σ peut se représenter par $f(x) = 0$, dont f est une fonction holomorphe de (x), sans facteur multiple; soit $\mu - 1$ l'ordre de la surface critique σ; alors, si $u \not\equiv 0$ on peut trouver un entier positif λ tel que $u/f^{\lambda/\mu}$ soit finie au voisinage de P_0, sans l'être pour $u/f^{(\lambda+1)/\mu}$; λ ne dépend pas de P_0, nous l'appellerons ordre de zéros de u sur σ. (Si $u \equiv 0$, l'ordre est infini; si u ne s'annule pas identiquement sur σ, l'ordre est nul.)

Soit σ une surface caractéristique dans un domaine $\Delta \subseteq \mathfrak{D}$, soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ les composantes (irréductibles) de σ (dans Δ) et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ des entiers positifs; nous définirons une distribution de zéros $(\mathfrak{z})$ dans Δ par $\{(\sigma_i, \lambda_i)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ comme ce quit suit : soit u une fonction holomorphe dans Δ, nous appellerons que *u prend au moins les zéros* $(\mathfrak{z})$, si l'ordre de zéros de u sur σ_i est au moins λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

Soit P_0 un point sur σ et soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ un système fini de fonctions holomorphes au voisinage de P_0 nous appellerons que (u) *définit les zéros* $(\mathfrak{z})$ en P_0 si l'ensemble des zéros communs de ces fonctions est σ, aux points à moindres dimensions près, et si le plus petit ordre de zéros de ces fonctions sur σ_i est λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$, au voisinage de P_0.

Soit ensuite, u une fonction holomorphe sur $\mathfrak{D}$ en un point P_0 de $\mathfrak{D}$, soit M_0 le point de Σ correspondant à P_0; s'il existe une fonction holomorphe $U(x, y)$ à l'espace (x, y) en M_0, telle que l'image (sur $\mathfrak{D}$) de la trace de U (sur Σ) soit u, c'est-à-dire que $U(x, \eta) = u$, nous dirons que u possède *la propriété* (H) par rapport à Σ en P_0.

Considérons maintenant, une distribution de zéros $(\mathfrak{z})$ sur $\mathfrak{D}$; supposons *que* $(\mathfrak{z})$ *soit partout localement définie par un système fini de fonctions holomorphes sur* $\mathfrak{D}$ *ayant la propriété* (H) *par rapport à* Σ; et considérons à l'espace (x, y) l'ensemble (I) de (f, δ), tel que $\delta \subseteq$ le domaine $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$, et (f', δ') étant l'image (sur $\mathfrak{D}$) de la trace de (f, δ) (sur Σ), f' prenne au moins $(\mathfrak{z})$ dans δ'; (I) forme évidemment un idéal; que nous appellerons généralement un *idéal* (Z).

Théorème 2. *L'idéal* (Z) (*expliqué ci-dessus*) *possède une pseudobase en tout point de* $[(x) \in \underline{\mathfrak{D}}]$.

1°. Partons, pour l'effet, d'un *cas spécial* où il existe une fonction (W), $W(x, y)$ par rapport à Σ pour $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$, telle que, T étant l'ensemble des zéros de l'idéal (I), $W(x, y)$ ne soit identiquement nulle sur aucune composante de T.

Soient $F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots, F_p(x, y)$ un système de fonctions holomorphes en un point quelconque M_0 de T définissant $(\mathfrak{z})$ en l'image P_0 de M_0[18], soit τ l'image de T, il est facile à voir que l'on peut choisir les constantes c_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ de façon que l'image F' de la trace de la fonction $F = \sum c_i F_i$, ait le même ordre de zéros que $(\mathfrak{z})$ sur τ, sans s'annuler identiquement sur toute autre composente de $\underline{\tau}$, $\underline{\tau}$ étant le base-ensemble de τ. Soit τ' la somme des composantes de $F' = 0$, n'appartenant pas à τ, et soit $\Phi(x)$ une fonction holomorphe de (x) telle qu'elle prenne au moins le même ordre de zéros que F' sur τ', sans s'annuler en dehors de $\underline{\tau'}$.

Avec ces fonctions W, F, Φ, selon *le corollaire 1*, transformons l'idéal $(I) = \{(f, \delta)\}$ et formons $(J) = \{(\varphi, \delta')\}$ comme ce qui suit :

$$\varphi = f\Phi W + A_0 F + A_1 \Psi_1 + \cdots + A_r \Psi_r, \quad \delta' = V \cap \delta \cap \alpha_0 \cap \alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_r,$$

dont V est un voisinage (univalent) de M_0 où F, Φ et W sont holomorphe, (Ψ) est une pseudobase pour V de l'idéal géométrique (de domaines indéterminés) attaché à Σ (qui existe d'après *le théorème de Cartan*). Nous désignerons généralement l'image de la trace d'une fonction holomorphe $\psi(x, y)$ par ψ'; la relation ci-dessus devient alors sur $\mathfrak{D}$, comme la suivante,

$$\varphi' = f' \Phi W' + A_0' F'$$

[18] C'est-à-dire, un système tel que, F_i' étant l'image de la trace de F_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, (F') définisse $(\mathfrak{z})$ au voisinage de P_0.

φ'/F' est donc, holomorphe (dans l'image de la trace de δ, δ') et possède la propriété (H) par rapport à Σ. On a donc, $\varphi \equiv 0 \mod (F, \Psi_1, \dots, \Psi_r)$ en M_0. (J) possèdant ainsi une pseudobase locale en M_0, il ne reste qu'à examiner la deuxième condition du corollaire 1.

Considérons donc, l'équation fonctionnelle

$$B\Phi W + A_0 F + A_1 \Psi_1 + \cdots + A_r \Psi_r = 0$$

pour V. Soit $(B, A_0, \dots, A_r)$ une solution quelconque de l'équation en un point quelconque (x', y') de V, il suffit de constater que $B \in (I)$ en (x', y'). Ceci est clair, si (x', y') n'est pas un point de Σ. Supposons donc que (x', y') soit un point de Σ, et posons $\Psi_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, on a alros, l'identité

$$B'\Phi W' + A_0' F' = 0.$$

Or, l'ordre de zéros sur τ de la fonction $\Phi W'$ est nul. B' prend donc sur τ, au moins le même ordre de zéros que F', par suite, $B \in (I)$ en (x', y'), d'après la définition. La proposition est ainsi vraie pour ce cas spécial.

Le cas général peut se réduire au cas ci-dessus, d'après *le théorème 1,* que nous allons expliquer.

2°. Soit $\underline{\Delta}$ un polycylindre tel que $\underline{\Delta} \Subset \underline{\mathfrak{D}}$, mais d'ailleurs quelconque et soit Δ une quelconque des composantes connexes de la portion de $\mathfrak{D}$ sur $\underline{\Delta}$; il est évidemment suffisant de vérifier la proposition pour Δ, d'après *le corollaire de Cartan.* Soit σ la surface critique de $\mathfrak{D}$ et soit $\underline{\sigma}$ son base-ensemble; parmi les composantes (irréductibles) de $\underline{\sigma}$ dans $\underline{\mathfrak{D}}$, il n'y a qu'un nombre fini qui passent par $\underline{\Delta}$, que nous désignerons par $\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2, \dots, \underline{\sigma}_q$. Grâce à Cousin, pour $\underline{\sigma}_1$, on peut trouver une fonction holomorphe $f(x)$ dans $\underline{\Delta}$ admettant le premier ordre de zéros sur $\underline{\sigma}_1$, sans s'annuler d'ailleurs. Soit r le plus petit multiple de $s_1 + 1, s_2 + 1, \dots,$ $s_1, s_2, \dots$ étant des ordres des surfaces critiques de Δ situées sur $\underline{\sigma}_1$, considérons

$$S(x) = (f(x))^{\frac{1}{r}}.$$

Soit Δ' une quelconque des composantes connexes de l'intersection de Δ et le domaine d'holomorphie de $S(x)$. Considérons à l'espace $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z)$, la variété caractéristique Σ'

$$y_i = \eta_i(P), \quad z = S(P) \qquad (P \in \Delta', \, \underline{P} = (x) \in \Delta, \, i = 1, 2, \dots, m),$$

$\underline{P}$ étant le base-point de P.

Le système de fonctions holomorphes à l'espace (x, y) qui définit une distribution de zéros sur Δ', puisqu'on peut considérer le système pour être à l'espace (x, y, z), nous le désignerons par $(\mathfrak{z}')$; soit (I') l'idéal (Z) à l'espace (x, y, z) défini par (Σ, Δ') et $(\mathfrak{z}')$. Il est facile à voir que pour $(x) \in \underline{\Delta}$, (I) est *la projection* de (I') sur l'espace (x, y); donc, d'après *le théorème 1*, il nous suffit de montrer que (I') possède une pseudobase en tout point du domaine $(x) \in \underline{\Delta}$. Or, si l'on choisi la constante c et forme $\eta_1' = \eta_1 + cS$, cette fonction possède Δ' comme une partie de son domaine d'holomorphie, sans posséder de surface critique de la deuxième espèce sur $\underline{\sigma}_1$. Autrement dit, nous pouvons supposer, sans perdre la généralité, que Δ n'admette pas de surface critique de la deuxième espèce sur $\underline{\sigma}_1$ par rapport à η_1. En raisonnant pareillement pour $\underline{\sigma}_2, \underline{\sigma}_3, \ldots, \underline{\sigma}_q$, successivement, nous pouvons supposer que η_1 n'admette pas de surface critique de la deuxième espèce.

3° Reprenons la transformation linéaire L de l'espace (x, y) expliquée à la fin de No. 7; si l'on choisit ε suffisamment petit, Δ sera transformé à un domaine Δ' sur l'espace (x'); il est facile à voir que la relation est *biunivoque et pseudoconforme*. Donc, au lieu d'étudier l'idéal (I) au moyen de Δ, on peut le faire au moyen de Δ'. Donc n'ayant pas de surface critique de la deuxième espèce, nous pouvons supposer *que la surface critique de Δ et la surface équivoque de η_1 n'aient pas de composante commune.*

Soient P_1, P_2 une paire de points réguliers de $\mathfrak{D}$ sur le même base-point (x) tel que sur (x), il n'y ait pas de point de l'intersection des deux surfaces ci-dessus, mais d'ailleurs quelconques; il s'agit de trouver une fonction holomorphe $S(P)$ sur $\mathfrak{D}$ telle que $S(P_1) \neq S(P_2)$; dont nous entendrons à nouveau par $\underline{\mathfrak{D}}$ un polycylindre $\Subset$ le domaine ancien. Supposons qu'aux points P_1, P_2, il corresponde un seul et même point M sur Σ, puisque, si non, une des fonctions η_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ remplira la condition; d'après l'hypothèse, M ne peut pas se situer sur l'image de la surface critique sur Σ. Les dérivées de η_1 par rapport à x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont holomorphe sur $\mathfrak{D}$, excepté à la surface critique σ; et pour σ, il est évident qu'elles n'admettent que des pôles.[19] Or, $\mathfrak{D}$ étant une partie du domaine d'holomorphie de η_1, parmi les dérivées de η_1, il y a certainement une, soit $\xi(P)$, telle que $\xi(P_1) \neq \xi(P_2)$. Soit (Γ) un polycylindre autour de l'origine telle que pour $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ la projection de Σ sur l'espace (y) soit $\Subset (\Gamma)$. D'après *le théorème de Cartan* et *le théorème 3 du Mémoire VII,* on peut trouver une fonction $f(x, y)$ holomorphe dans le polycylindre $[\underline{\mathfrak{D}}, (\Gamma)]$ telle que l'image f' de la trace de f soit identiquement nulle sur σ et $f(M) \neq 0$. Choisissant un entier positif λ suffisamment grand, posons $f'^{\lambda}\xi = S$, S sera alors holomorphe sur $\mathfrak{D}$, et on aura $S(P_1) \neq S(P_2)$.

[19]Un pôle d'une fonction sur D est un point de D où la fonction n'est pas holomorphe, mais elle peut se représenter localement par un rapport de deux fonctions holomorphes sur D.

Comme pour Δ, la surface critique et la surface équivoque de η_1 n'ont pas de composante commune, et que η_1 n'a pas de surface critique de la deuxième espèce dans Δ, d'après ce qui précéde, on peut facilement choisir une fonction holomorphe $S(P)$ sur Δ et construire à l'espace (x, y, z) la variété caractéristique Σ' donnée par

$$y_i = \eta_i(P), \quad z = S(P) \qquad (P \in \Delta, \ \underline{P} = (x), \ i = 1, 2, \ldots, m)$$

de façon que l'ensemble de points singuliers de Σ' soit à $(n-2)$ dimensions au plus.

D'après le théorème 1, nous pouvons encore supposer que ce soit le cas actuel, précisément dit que la portion de Σ correspondant à Δ n'ait de points singuliers qu'à $(n-2)$ dimensions au plus. Alors, d'après *le lemme 2*, on peut trouver une fonction (W) par rapport à Σ telle qu'elle ne soit identiquement nulle sur aucune composante de T, T étant l'ensemble des zéros de l'idéal (I), au voisinage d'un point quelconque de la portion de Σ. Cela étant le cas spécial, (I) possède une pseudobase en tout point de la portion de Σ. C.Q.F.D.

III. Lemme fondamental et ses applications.

10. Lemme fondamental. Considérons à l'espace fini de n variables complexes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, un domaine polyédral Δ tel que $\Delta \Subset (R)$, (R) étant une portion (Teilbereich, connexe ou non) du domaine d'holomorphie d'une fonction analytique $f_1(x)$; considérons que Δ est de la forme,

$$x_i \in A_i, \quad f_j(P) \in B_j, \quad P \in (R), \quad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m),$$

où $f_j(P)$ sont des fonctions holomorphes sur (R), A_i, B_j sont des domaines fermés, bornés, univalents et simplement connexes sur le plan, et P possède les coordonnées (x). Considérons à l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ le domaine cylindrique fermé (A, B) et la variété caractéristique

$$\Sigma \ : \ y_j = f_j(P), \qquad (j = 1, \ldots, m);$$

Δ correspond alors à la portion de Σ sur (A, B) de façon que les frontières correspondent. Les théorèmes du Mémoire VII (que nous dénotons dans la suivante, simplement par VII) pour le polycylindre fermé, s'appliquent à (A, B), puisque le voisinage de chacun de A_i et B_j peut se représenter conformément au voisinage d'un cercle.

Considérons l'ensemble Δ_0 de points de Δ satisfaisant à

$$x_i \in A_i^0, \quad f_j(P) \in B_j^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, m),$$

où A_i^0, B_j^0 sont des domaines fermés simplement connexes tels que $A_i \supset A_i^0$, $B_j \supset B_j^0$. Dans la suivante, nous considérons Δ pour être déterminé, et Δ_0 quelconque.

Soit u une fonction holomorphe quelconque sur (R) au voisinage de Δ_0; que l'on peut regarder comme une fonction holomorphe sur Σ. Soit $U(x,y)$ une fonction holomorphe de (x,y) au voisinage de (A,B) qui s'annule identiquement sur l'ensemble S_0 des points singuliers de Σ, sans l'être pour Σ; $U(x,y)$ existe d'après *le théorème de Cartan* et *le théorème 3 de VII*; par suite, d'après *le lemme 2*, on peut choisir un entier positif λ de façon que U^λ soit une fonction (W) par rapport à Σ dans un certain voisinage de (A,B). Comme l'idéal géométrique de domaines indéterminés attaché à Σ possède une pseudobase au voisinage de (A,B) (d'après le théorème de Cartan et le théorème 3 de VII), d'après *le théorème 2 de VII*, on peut trouver une fonction holomorphe $F(x,y)$ au voisinage de (A^0,B^0) telle que $F = U^\lambda u$ sur Σ.

Soit u_0 l'image (sur (R)) de la trace (sur Σ) de U^λ, et soit $(I) = \{(f,\delta)\}$ l'idéal (Z) défnie dans un voisinage de (A,B) de façon que (f',δ') étant l'image de la trace de (f,δ), f' soit divisible par u_0 dans δ'. D'après *le théorème 2 et le théorème 3 de VII*, (I) possède une pseudobase, au voisinage de (A,B), nous désignerons par $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu)$; l'image de la trace de chaque Φ_i est divisible par u_0 au voisinage de Δ. Comme $F \in (I)$ au voisinage de (A^0,B^0), on a $F \equiv 0 \mod (\Phi)$ en tout point au voisinage de (A^0,B^0); par suite, il en est globalement ainsi, d'après *le théorème 1 de VII*. Nous allons formuler brièvement ce que nous avons vu :

Lemme fondamental. *Correspondant à un domaine polyédral Δ donné comme une portion d'un domaine multivalent (connexe ou non) (R) sur l'espace fini (x), de la forme ci-dessus, considérons à l'espace (x,y) le domaine cylindrique fermé (A,B) et la variété caractéristique Σ comme ci-dessus; on peut trouver alors, une fonction holomorphe u_0 sur (R) au voisinage de Δ et un système fini de fonctions holomorphes $\Phi_i(x,y)$ $(i = 1,2,\ldots,\mu)$ au voisinage de (A,B), dont l'image sur (R) de la trace sur Σ de chaque $\Phi_i(x,y)$ est divisible par u_0, qui jouent le rôle que : soit Δ_0 $(\Delta_0 \subset \Delta)$ un domaine polyédral expliqué ci-dessus, mais d'ailleurs quelconque, soit (A_0,B_0) le domaine cylindrique fermé correspondant et soit u une fonction holomorphe quelconque sur (R) au voisinage de Δ_0; il y ait alors, une fonction holomorphe $F(x,y)$ au voisinage de (A_0,B_0) telle que $F = uu_0$ sur Σ et que $F \equiv 0 \mod (\Phi)$, globalement.*

Nous allons montrer brièvement comment on l'applique aux problèmes principaux depuis le Mémoire I.

11. Problème de Cousin. Prenons pour A_1 un cercle fermé; soit Δ_1 la partie de Δ telle que $X \leq \varepsilon$, dont X signifie la partie réelle de x_1 et ε est un nombre positif suffisamment petit, soit Δ_2 celle de $X \geq -\varepsilon$; supposons que $\Delta_1 \ni 0,\ \Delta_2 \ni 0$; soit $\Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2$.

Théorème 3. *Dans cette configuration, étant donnée une fonction u holomorphe sur (R) au voisinage de Δ_0, on peut trouver des fonctions u_1, u_2 holomorphes sur (R) au voisingae de Δ_1 et au voisinage de Δ_2, respectivement, de façon que l'on ait identiquement $u_1 - u_2 = u$.*

En effet, la partie de A_1 telle que $-\varepsilon \leq X \leq \varepsilon$ est simplement connexe, que nous désignerons par A_1^0; soient $A_k^0 = A_k,\ B_j^0 = B_j$ $(k = 2, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$; le domaine polyédral correspondant à (A^0, B^0) est alors Δ_0 indiqué ci-dessus. Le lemme subsiste pour ces $\Delta_0,\ u$, et on a identiquement

$$F = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \cdots + c_\mu\Phi_\mu$$

au voisinage de (A^0, B^0), c_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ étant des fonctions holomorphes. Soit $\mathfrak{D}'$ la partie de (A, B) telle que $X \leq \varepsilon$ et soit $\mathfrak{D}''$ celle de $X \geq -\varepsilon$. Grâce à Cousin, on peut trouver des fonctions holomorphes c_i' c_i'' au voisinage de $\mathfrak{D}'$ et au voisinage $\mathfrak{D}''$, respectivement, telle que l'on ait identiquement

$$c_i' - c_i'' = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Posons

$$F' = \sum c_i'\,\Phi_i, \qquad F'' = \sum c_i''\,\Phi_i;$$

F' et F'' sont alors des fonctions holomorphes au voisinage de $\mathfrak{D}'$ et au voisinage de $\mathfrak{D}''$, respectivement, et on a

$$F' - F'' = F.$$

Désignons les images sur (R) des traces sur Σ de F' et F'' par f' et f'', respectivement, on a alors,

$$f' - f'' = u_0 u.$$

Posons

$$f' = u_0 u_1, \qquad f'' = u_0 u_2;$$

d'après la propriété de $\Phi_i,\ u_1, u_2$ sont alors, des fonctions holomorphes sur (R) au voisinage de Δ_1 et au voisinage de Δ_2, respectivement, et telle que $u_1 - u_2 = u$. C.Q.F.D.

12. Développement des fonctions holomorphes.

Théorème 4. *Dans les circonstances du lemme fondamental, pour une fonction donnée $u(P)$ holomorphe sur (R) au voisinage de Δ_0 et pour un nombre positif donné ε, on peut trouver une fonction $v(P)$ holomorphe sur (R) au voisinage de Δ, telle que l'on ait $|u(P) - v(P)| < \varepsilon$ au voisinage de Δ_0.*

En effet, la fonction $F(x, y)$ du lemme fondamental s'exprime de la forme $F = \sum c_k \Phi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$ au voisinage de (A^0, B^0), c_k étant des fonctions holomorphe. A_i^0, B_j^0 $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ \ldots, m)$ étant simplement connexes, pour tout nombre positif ε', on peut trouver des fonctions entières $c'_k(x, y)$, telle que l'on ait

$$|c_k(x, y) - c'_k(x, y)| < \varepsilon'$$

au voisinage de (A^0, B^0). Posons $G(x, y) = \sum c'_k \Phi_k$, dont l'image sur (R) de la trace sur Σ sera désignée par $g(P)$; $g(P)$ est alors, holomorphe au voisinage de Δ et divisible par u_0. Donc, si l'on pose

$$g = u_0 v,$$

v est holomorphe au voisinage de Δ. L'image de la trace de F étant $u_0 u$, il est évident que, si l'on choisit ε' suffisamment petit, on a $|u - v| < \varepsilon$ au voisinage de Δ_0. C.Q.F.D.

IV. Appendice.

13. Une condition pour le problème (J). Soit (I) un idéal holomorphe de domaines indéterminés à l'espace (x) et soit Σ son ensemble de zéros; nous appellerons que (I) possède *la propriété* (R) en point (x^0), si Σ s'exprime par l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions de (I) au voisinage de (x^0).

Un ensemble $(\mathfrak{F})$ d'idéaux holomorphes de domaines indéterminés à l'espace (x) sera appelé de former *une famille* (A) en un point (x^0), s'il jouit des propriétés suivantes :

1° Si un idéal (I) appartient à $(\mathfrak{F})$, et si $\Phi(x)$ est une fonction holomorphe en (x^0), l'adjoint et le quotient de (I) par rapport à Φ, pour un voisinage suffisamment petit de (x^0), appartiennent encore à $(\mathfrak{F})$.

2° Tout idéal (I) de $(\mathfrak{F})$ possède la propriété (R) en (x^0).

Théorème 5. *Pour qu'un idéal holomorphe (I) de domaines indéterminés à l'espace fini (x) ait une pseudobase en un point (x^0), il faut et il suffit qu'il y ait en (x^0) une famille (A) contenant (I).*

En effet, la condition est nécessaire, puisque l'ensemble des idéaux possédant des pseudobases en (x^0), forme évidemment une famille (A) en (x^0).

Supposons donc, qu'il y ait en (x^0) une famille (A), $(\mathfrak{F})$ contenant l'idéal (I); nous allons montrer que (I) possède une pseudobase en (x^0); dont le mot ≪en (x^0)≫ sera généralement supprimé dans la suivante. Soit Σ l'ensemble des zéros de (I), dont le nombre de dimensions sera supposé plus petit que n. D'après *le théorème de Cartan*, l'idéal géométrique de domaines indéterminés attaché à Σ possède une pseudobase, que nous désignerons par $(F_1, F_2, \dots, F_p)$. Comme Σ est donné par l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions de (I), grâce au lemme de *Hilbert–Rückert*, on peut trouver un entier positif λ tel que $F_1^{\lambda} \in (I)$.

Selon *le corollaire 2*, considérons l'adjoint et le quotient de (I) par rapport à F_1 (pour un voisinage suffisamment petit de (x^0)); dont, si tous les deux possèdent des pseudobases, (I) l'est aussi. Or, l'adjoint possède F_1 et le quotient possède $F_1^{\lambda-1}$. Si $\lambda - 1 > 1$, nous appliquerous le même procédé au quotient, et ainsi de suite. Nous procéderons pareillement pour $F_2, F_3, \dots, F_p$, successivement, et nous arriverons à un système d'idéaux $[(J_1), (J_2), \dots, (J_q)]$ tel qu'à partir de (I), on puisse atteindre à chaque (J_j) $(j = 1, 2, \dots, q)$ par un nombre fini d'opérations, adjoindre ou diviser au moyen d'une des fonctions F_i $(i = 1, 2, \dots, p)$, et que, lorsque tous les (J_j) possèdent des pseudobases, (I) le soit aussi, et encore que chaque (J_j) ait (F).

Soit (J) un quelconque du système et soit Σ' son ensemble de zéros; il se présente deux cas possibles : Ou bien $\Sigma' = \Sigma$, (J) admet alors, (F) comme pseudobase. Ou bien $\Sigma' \neq \Sigma$, dans ce cas il est facile à voir que $\Sigma' \subset \Sigma$. Considérons le système partiel (S) consistant des (J) tel que $\Sigma' \subset \Sigma$.

Considérons généralement une variété caractéristique T passant par le point (x^0); d'après Weierstrass, la portion de T au voisinage de (x^0) consiste d'un nombre fini d'éléments; si le nombre des éléments à i dimensions est ν_i $(i = n-1, n-2, \dots, 0)$, nous ferons correspondre à T $\alpha = (\nu_{n-1}, \nu_{n-2}, \dots, \nu_0)$. Considérons l'ensemble A de tous les α (n étant déterminé), et l'ordonnons comme ce qui suit : Soit $\alpha' = (\nu'_{n-1}, \nu'_{n-2}, \dots, \nu'_0)$ un élément de A différent de α; nous appellerons $\alpha < \alpha'$, ou bien si $\nu_{n-1} < \nu'_{n-1}$, ou bien si $\nu_{n-1} = \nu'_{n-1}, \dots, \nu_i = \nu'_i$, $\nu_{i-1} < \nu'_{i-1}$ $(i = n-1, n-2, \dots, 1)$.

A l'idéal (I) nous ferons correspondre l'élément α de l'ensemble ordonné A, correspondant à l'ensemble des zéros Σ en (x^0); et au système (S), s'il existe, le plus grand β des éléments pareillement attachés aux idéaux de (S). Comme $\Sigma' \subset \Sigma$, on a $\beta < \alpha$.

Chaque idéal (J) de (S) appartient à $(\mathfrak{F})$, on peut donc, l'appliquer le même procédé et obtenir un système d'idéaux qui correspond à (S) de (I); soit (S_1) la somme de ces systèmes, lorsque (J) parcourt (S). Si (S_1) existe, l'élément γ de A pareillement correspondant à (S_1), satisfait à $\gamma < \beta < \alpha$. Par suite, on ne peut procéder qu'un nombre fini de fois. (I) possède donc, une pseudobase en (x^0). C.Q.F.D.

(Reçu le 15 mars, 1951.)