Note sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

Par Kiyoshi OKA

(Communicated by Y. Komatsu)

Introduction. 1. Le champs de fonctions analytiques de variables quelconques s'étend aux champs de : arithmétique et algèbre, analyse, géométrie, sciences exactes et cætera. C'est un fait, très simple mais tout fondamental. On rêvera aux nouveaux problèmes y grégairant. C'est une des raisons que nous avons commencé à l'étudier.

Revenons à l'introduction de notre Mémoire I (Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, 1936, Journal of Science Hiroshima University) [5], où se trouve une famille de problèmes tout fondamentaux, reliés intimement.

Essentiellement dit, c'est H. Behnke et P. Thullen [2] qui ont posé ces problèmes avec des raisons d'être, dont une est historique, et cela par une méthode tout à fait concrète, précisément dit, en exposant un Ouvrage de la mesure convenable. (Voir : Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934, spécialment pages 54, 68, 79.)

Par les Mémoires I–VI (1942, The Tohoku Mathematical Journal), nous avons fait un expériment pour savoir la voie.

Depuis lors, nous nous sommes occupés éfforcément, avant tout, pour prévoir les résultats et méthodes, d'où à partir, dont nous exposerons, une partie dans la Note actuelle, et l'autre partie dans la Note suivante. Dont, nous allons expliquer brièvement la raison.

2. H. Poincaré a repris un problème essentiellement important pour la civilisation, l'éducation étant comprise, par exemple. Un problème depuis la lointaine, mais c'est lui qui en a premièrement parler, explicitement. Mais, sans expliquer la raisons profonde, ni la méthode concrète, nous pensons ainsi. C'est le problème suivant :

Problème (a) — De quelle manière la découverte mathématique se présente ?

Et, il nous semble que, c'est R. Descartes qui a fourni la recherche, que nous sommes en train de faire dévotement, avant tout, d'une méthode convenable de la représentation.

Pareillement, il y a le problème que voici :

Problème (A) — De quelle manière une étude d'une seule et la même branche des sciences mathématiques se pousse de plus en plus par une seule et la même personne au sens propre ?

Naturellement, il y a, un ordre de problèmes, qui nous apparaissons, comme ensemble, arithmétique, c'est-à-dire, dénombrable actuellement, entre (a, A) et s'étand aux deux côtes. Nous avons décidé de les étudier éfforcément possible, pour l'éclaircir *plus ou moins* la matrice de la civilisation.

3. Spécialement, nous semblons que, les problèmes (A), (a) pour fixer l'idée, possèdent une seule et la même partie essentielle, autrememt dit, ces problèmes se ressemblent, à la partie essentielle, comme on le voit à l'exemple célèbre de la zoologie.

Et, c'est pour l'expériment critique, pour affirmer notre idée ci-dessus, visiblement, que nous exposons la présente Note.

4. La présente Note et la Note suivante, comme ensemble, consiste en deux parties, dont : la partie I et la première moitié A de la partie II sont mathématiquememt exactes à nous; mais le reste ne l'est jamais, dont nous expliquerons la raison : quoique nous en avons examiné le mode de raisonnement, c'était sans papier, nous y avons quand même parcouru le champ des logiques mathématiques où l'intuition pure ne demeure plus, sans doute.

5. Donc, naturellement, du présente Note, *ne se présente aucune restriction* pour le lecteur pour étudier le champ actuel et exposer le résultat, nous pensons ainsi.

6. Disant un mot, $\cdots$ est commencé à décider, de décider $\cdots$ coule dans la extase, se forme de plus en plus et s'arrêt à être formulé; nous voyons ainsi. (Je voudrais dire ici le remerciement profond à Fûju-Kai, pour son secours depuis le temps de la Note sur les domaines pseudo-convexes, jusqu'au temps actuel.)

I. Le domaine fini et sans point de ramification.

Comme nous venons de le dire, pour les résultats exposés dans nos Mémoires I–VI, nous avons essaié de les étendre aux domaines du titre, et nous l'avons fini à la fin de 1943.

Comme H. Behnke et K. Stein [1] les ont déjà indiqués, le théorème sur le développement (ou approximation) de fonctions holomorphes reste subsister, il en est de même pour les théorèmes concernant les problèmes de P. Cousin pourvu si l'on se restreint aux domaines d'holomorphie de feuilles bornées; et dont le premier fournit le deuxième au cas général d'un lemme suffisant pour le passage à la limite.

Le seul problème qui reste à traiter est donc, ce qui concerne la conception, holomorphe–convexe (regulär–konvex) que H. Behnke a introduite et formulée avec P. Thullen au page 72 de leur Ouvrage [2] dont la partie actuellement importante est que la troisième domaine B_0' ($B_0 \subset B_0' \Subset B$) est par définition de feuilles bornées; or :

Problème — ≪Tout domaine pseudoconvexe (fini, sans point de ramification) est–il holomorphe–convexe?≫

Dont, la conception de F. Hartogs, domaine pseudoconvexe, donnée dans le Mémoire VI [5], peut être immédiatement généralisée (puisque, sans point de ramification). Pour le problème actuel, le théorème de H. Cartan et P. Thullen [4] ne répond plus pour les domaines d'holomorphie, sauf le cas de feuilles bornées. Or, *la réponce est affirmative.*

II. Idéaux holomorphes.

Maintenant, nous allons parler de la deuxième généralisation. Dans ce cas, il faut parler d'abord l'indétermination de la voie à décider. C'est ainsi : ou bien, si l'on faire la généralisation en admettant des points à l'infini, il y a quelques problèmes, mais ils ne semblent pas essentiels; ou bien, si celui des points critiques, c'est-à-dire, de points de ramification, dans ce cas, nous avons arrivé finalement à apercevoir des diverses sortes de difficultés, tout à fait nouvelles à observer, $\cdots$ et nous avons trouvé que :

1° Supposons le domaine $\mathfrak{D}$ sur le plan de la variable z, et la fonction holomorpne $f(z)$ à traiter, et on pourra au cas essentiel, déformer continuement le domaine (de la forme originale à l'intérieur).

2° Au contraire, si c'est pour un domaine contenant le point critique z_0, la déformation continue n'est permise plus.

C'est un fait tout à fait fondamental; nous appelons entre nous, le cas comme la deuxième d'être *arithmétique*, et celui des premier *non–arithmétique*.

Nous sommes ainsi devenus de reconnaitre qu'il est indispensable à nous, d'étudiers d'abord, les idéaux du titre.

A. Eléments de l'idéal et problème à partir.

Nous nous restreindrons aux domaines univalents à l'espace fini de n variables complexes, pour fixer l'idée, toujours sauf le cas où la réciproque est indiquée, explicitement.

En donnant la liberté à l'élément analytique de C. Weierstrass, et en même temps, en prolongeant celui de B. Riemann au champs générale, où même l'intuition physique ne demeure plus; *concevoyons* une paire ordonnée (f, δ), dont δ est le domaine connexe ou non, et f la fonction holomorphe dans δ, et nous conviendrons que $(f, \delta) = 0$, ou bien si $f = 0$, ou bien si $\delta = 0$. Considérons un ensemble (I) des élément (f, δ), et nous *l'exprimerons* aussi en disant que $f \in (I)$ pour δ. L'ensemble (I) sera appelé d'après E. E. Kummer idéal holomorphe, ou selons le cas, simplement idéal, s'il satisfait aux condtions suivantes :

1° Si $(f, \delta) \in (I)$ et (α, δ') quelconque, alors on a $\alpha f \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$.
2° Si $(f, \delta) \in (I)$, $(f', \delta') \in (I)$, alors on a $f + f' \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$.

De la définition, la suivante :

≪ Si $(f, \delta) \in (I)$, $\delta \supset \delta_0$, alors on a $(f, \delta_0) \in (I)$. ≫

— Donc, on peut dire que $f \in (I)$ ou non en un point.— Etant donnés un idéal (I) et un domaine $\mathfrak{D}$, nous dirons que la combinaison *ne pas ordonnée* $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ est une pseudobase de (I) pour $\mathfrak{D}$, si elle consiste d'un nombre fini de fonctions holomorphes, c'est-à-dire, uniformes dans $\mathfrak{D}$ et appartienant à (I) en tout point P de $\mathfrak{D}$, et si, pour toute fonction f appartenant à (I) en tout point au voisinage de P, on a toujours, identiquement

$$f = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p$$

en P, α_i étant des fonctions holomorphes. Et, nous avons :

Problème I. — ≪ Trouver une pseudobase d'un idéal donné (I) pour un domaine donné $\mathfrak{D}$. ≫

La partie essentielle de ce problème est, comme nous le verrons plus tard (voir le problème (E)), la suivante :

Problème II — ≪ Trouver une pseudobase de (I) pour un point donné P de $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire, pour un voisinage déterminé de P. ≫

Nous appellerons toute base comme ci-dessus, base locale. On ne peut pas résoudre les problèmes II sans condition, puisqu'il y a *des divers* *exemples*. Or, parmis les problèmes de II, ce qui est à traiter pour la première fois, est la suivante :

$$A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0, \tag{1}$$

et nous appellerons tout système $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ consistant des fonctions holomorphes dans un domaine (connexe ou non) δ contenu dans $\mathfrak{D}$ satisfaisant identiquement à la relation (1), d'être une solution de l'équation (1) pour δ. Considérons l'ensemble (I) consistant de toutes les paires ordonnées (A_1, δ) des solutions de (1), (I) est un idéal, et le problème dit plus haut. C'est :

Problème III — ≪ Trouver pour un point donné de $\mathfrak{D}$ une base locale pour l'idéal expliqué ci-dessus, $(I) = \{(A_1, \delta)\}$. ≫

Avec H. Cartan, nous allons expliquer la signification de ce problème. Rassemblons une sorte de problèmes, seulement *en respectant à fixer l'idée, à la sensation, et à l'allure propre d'histoire.*

D'abord, soient $F_1, F_2, \ldots, F_p, f, \varphi$ fonctions holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}$; s'il existe une solution de la forme

$$f - \varphi = \alpha_1F_1 + \alpha_2F_2 + \cdots + \alpha_pF_p,$$

α_i étant des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$, nous appelons avec P. G. L. Dirichlet que les fonctions f, φ sont congruentes dans $\mathfrak{D}$, par rapport à (F), et avec lui, nous le désignerons par $f \equiv \varphi \mod (F)$. Soit P un point de $\mathfrak{D}$, deux fonctions holomorphes sont appelées congruentes en P, s'il en est ainsi pour un voisinage de P; et :

Problème de A. Weil — ≪ Etant donnés un domaine univalent, fermé et borné Δ à l'espace de n variables complexes, une combinaison (ne pas ordonée) $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ de fonctions holomorphes au voisinage de Δ et une fonction Φ de la même nature; et cela de telle façon que $\Phi \equiv 0 \mod (F)$ en tout point P de Δ; trouver un système de fonctions A_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) holomorphes au voisinage de Δ, tel que

$$\Phi = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p,$$

identiquement.≫

Nous avons rencontré ce problème dans le Mémoire V [5], à l'hypothèse de A. Weil (1932–1935) [6].

Problème (C) — $\ll$ Reprenons au sens ci-dessus, Δ, $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$, supposons qu'à tout point P de Δ, il correspond un polycylindre élémentaire (γ) et une fonction φ holomorphe dans (γ), et cela de façon que, pour toute paire de (γ) contigus, les fonctions correspondantes soient congruentes par rapport à (F) en tout point de la partie commune; et nous proposerons de trouver une fonction holomorphe Φ au voisinage de Δ de manière que $\Phi \equiv \varphi \mod (F)$ en tout point P de Δ. $\gg$

Nous avons rencontré ce problème déjà au Mémoire I [5].

Ensuite, soient $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$, $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q)$ deux combinaisons de fonctions holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}$; elles serons appelées équivalentes dans $\mathfrak{D}$, s'il existe deux relations des formes

$$\varphi_i = \alpha_{i1} f_1 + \alpha_{i2} f_2 + \cdots + \alpha_{ip} f_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

et

$$f_j = \beta_{j1} \varphi_1 + \beta_{j2} \varphi_2 + \cdots + \beta_{jq} \varphi_q \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

et nous le désignerons par $(f) \sim (\varphi)$. Nous appellerons que $(f) \sim (\varphi)$ en un point P de $\mathfrak{D}$, s'il en est ainsi pour un voisinage de P :

Problème (E) — $\ll$ Dans les circonstances géométriques du problème (C), supposons qu'il corresponde à chaque (γ) une combinaison finie (f) de fonctions holomorphes, de façon que, pour toute paire de (γ) contigus, les combinaisons correspondantes soient équivalentes en tout point de la partie commune; et nous proposerons de trouver une combinaison finie (F) de fonctions holomorphes au voisinage de Δ, de façon que $(F) \sim (f)$ en tout point P de Δ. $\gg$

Nous avons rencontré ce problème au Mémoire II [5], et nous l'avons évité en trouvant une autre voie, le théorème I; c'est sur cette voie que H. Behnke et K. Stein ont atteint aux résultats expliqués à I.

Ce théorème I du Mémoire II [5] peut être constaté plus simplement, pour le lecteur, mais notre fois, la voie originale à la démonstration, est *la coulée d'un élément (1931)*, de la Note exposée en 1934; nous l'expliquerons dans un Mémoire ultérieur, au temps propre; la Note consiste en quelques éléments, qui seront publiés aux temps propres, aux détails, quoique ne pas tout prochainement.

Ce sont la famille de problèmes dite plus haut. Or, H. Cartan a indiqué dans un Mémoire tout récent (Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Ann. Ecole Norm. Sup., (3), LXI — Fasc. 3) [3], que

≪ Si le problème III est toujours résoluble, il en est de même pour les problèmes, de A. Weil, (C) et (E), pourvu si l'on se restreint aux domaine fermés Δ extérieurement holomorphe–convexes.≫

Cela, sans démonstration, mais avec toutes les préparations. Donc, désormais, *le problème III sera appelé d'après le nom de H. Cartan*, puisque, c'est lui qui a premièrement donné au problème la raison d'être, suffisante.

C'est le problème de H. Cartan que nous cherchions, pour faire le point de départ. Or nous disons que : *Le problème de H. Cartan est toujours résoluble.*

Dans la Note suivante, nous parlerons d'une forme commode de conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de bases locaux d'idéaux holomorphes, d'un exemple et un sous–exemple très important à nous.

(Fin de la première Note, le 1 Décembre 1949.)

(*) Received Dec. 19, 1949.

[1] H. Behnke–K. Stein, Approximation analytisher Funktionen in vorgegebenen Bereichen der Raumes von n komplexen Veränderlichen. Göttingen Nachrichten, neue Folge 1 (1939) 195–202.

[2] H. Behnke–P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Erg. Math. III 3, (1934) Berlin.

[3] H. Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Annals Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 61 (1944) 149–197. voir aussi : Jour. de Math. (9) 19 (1940) 1– 26.

[4] H. Cartan–P. Thullen, Regularitäts- und Konvergenz Bereiche. Math. Ann. 106 (1932) 617–647.

[5] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables,

(I) Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles. Jour. of Sci. Hiroshima Univ. 6 (1936) 244–255.

(II) Domaines d'holomorphie. ibid. 7 (1937), 115–130.

(III) Deuxième problème de Cousin. ibid. 9 (1939) 7–19.

(IV) Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles. Jap. Jour. of Math. 17 (1941) 517–521.

(V) L'intégrale de Cauchy. Jap. Jour. of Math. 17 (1941) 523–531.

(VI) Domaines pseudoconvexes. Tohoku Math. J. 49 (1942) 15–52; voir aussi : Proc. Imp. Acad. Tokyo. 17 (194) 7–10.

[6] A. Weil,

(1) Sur les séries de polynomes de deux variables complexes, C. R. Paris 194 (1932) 1304–1305.

(2) L' intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. Math. Ann. 111 (1935) 178–182.