# »Ruhemasse« und »relativistische Masse« eines Körpers

## 1 Transversale und longitudinale Masse, Ruhemasse

Schon einige Jahre vor der Veröffentlichung von Albert Einsteins Aufsatz »Zur Elektrodynamik bewegter Körper« (Annalen der Physik, Jg. 17, 1905), womit er die Spezielle Relativitätstheorie begründete, war bekannt, dass schnell bewegte Elektronen bei Beschleunigung in Richtung ihrer Geschwindigkeit (longitudinal) eine größere Trägheit besitzen als bei Beschleunigung senkrecht dazu (transversal). H. A. Lorentz hat zur Charakterisierung dieser Phänomene die Begriffe »longitudinale und transversale Masse« eingeführt.

Ferner war bekannt, dass selbst die kleinere der beiden Massen, die transversale Masse, größer ist als die Masse eines ruhenden Elektrons, seine so genannte »Ruhemasse«.

Nach den experimentellen Befunden hat ein Elektron der Ruhemasse $\mu$ bei der Geschwindigkeit $v$ die

$$\text{transversale Masse } m_t = \frac{\mu}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

und die

$$\text{longitudinale Masse } m_l = \frac{\mu}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \qquad (2)$$

wobei $c$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Dabei wurde die Masse gemessen, indem die wirkende Kraft durch die erzielte (transversale bzw. longitudinale) Beschleunigung dividiert wurde:

$$m = \frac{F}{a}. \qquad (3)$$

Dieser Messvorschrift liegt das dynamische Grundgesetz $F = m\,a$ zugrunde.

## 2 Die Masse eines Körpers in der Speziellen Relativitätstheorie

Im oben genannten Aufsatz (S. 919) zeigte A. Einstein, dass aus der Hypothese der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit die Gruppe der Lorentz-Transformationen abgeleitet werden kann. Daraus wiederum konnte er Transformationsgleichungen für das elektrische und das magnetische Feld gewinnen und schließlich zeigen, dass ein bewegtes Elektron der »Ruhemasse« $\mu$ unter der Wirkung eines in seiner Bewegungsrichtung wirkenden elektrischen Feldes sich so verhält, als hätte es die Masse

$$m = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \qquad (4),$$

also genau die Masse, die oben als longitudinale Masse bezeichnet wurde. Für die »transversale Masse« fand Einstein infolge eines Fehlers den falschen Wert

$$m = \frac{\nu}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

(Siehe dazu:
http://home.vrweb.de/~si.pe/Zur%20Elektrodynamik%20bewegter%20Koerper.pdf §10)
Ohne diesen Fehler ergibt sich aus der Relativitätstheorie auch für die »transversale Masse« der richtige Wert.

## 3 Die kinetische Energie eines bewegten Körpers und deren Masse

Bei transversaler Beschleunigung eines Körpers bewegt dieser sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreis. Dabei bleiben seine kinetische Energie und deren Masse unverändert. Die transversal wirkende Kraft muss dabei die Masse $\mu$ des Körpers und die Masse $m_E$ seiner kinetischen Energie beschleunigen. Also gilt für die so genannte transversale Masse:

$$m_{\text{trans}} = \mu + m_E.$$

Daraus folgt

$$m_E = m_{\text{trans}} - \mu,$$

und wegen

$$E = m_E c^2$$

ist

$$E = \left(m_{\text{trans}} - \mu\right) c^2.$$

Für die transversale Masse liefert die Spezielle Relativitätstheorie in Übereinstimmung mit experimentellen Befunden den Wert

$$m_{\text{trans}} = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Folglich ist die kinetische Energie des Körpers bei der Geschwindigkeit $v$

$$E = \mu c^2 \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1 \right).$$

Bei longitudinaler Beschleunigung dagegen nimmt die Geschwindigkeit $v$ des Körpers zu, und damit auch seine kinetische Energie und deren Masse. Die dafür erforderliche Energie muss von der beschleunigenden Kraft $F$ zusätzlich aufgebracht werden. Nach dem Energiesatz ist

$$F \cdot \mathrm{d}s = \mathrm{d}E \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v} a \frac{1}{v}.$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$F = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} a.$$

Der Faktor vor der Beschleunigung $a$ ist genau die so genannte longitudinale Masse.

Damit ist die Abhängigkeit der Trägheit der Körper von der Geschwindigkeit und von der Richtung der Beschleunigung durch die Trägheit ihrer kinetischen Energie erklärt. Die früher als »Ruhemasse« $\mu$ bezeichnete Größe ist die unveränderliche und vom Bezugssystem unabhängige *Masse des Körpers*. Alle weiteren Begriffe wie relativistische Masse und Impulsmasse sind unnötig und irreführend.

Anmerkung: Man beachte, dass diese Ergebnisse gewonnen werden können, ohne wie üblich die Gleichung

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)$$

zu benutzen, deren Gültigkeit auch für veränderliche Massen in der Literatur einfach ohne Beweis angenommen wird. (Häufig wird dabei auf Newton als Kronzeugen verwiesen, für den aber die Masse unveränderlich war.) Im Folgenden wird gezeigt, wie man ohne diese unbewiesene „Verallgemeinerung des dynamischen Grundgesetzes" zu richtigen Ergebnissen kommt.

## 4 Relativistischer Impuls, relativistische Bewegungsgleichungen

Die Summe aus der Masse $m$ eines Körpers und der Masse $m_E$ seiner kinetischen Energie bei der Geschwindigkeit $v$ ist nach dem oben Gezeigten

$$m + m_E = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Dementsprechend beträgt der Impuls $\boldsymbol{p}$ eines Körpers der Masse $m$ bei der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{p} = (m + m_E)\boldsymbol{v} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Die dynamische Grundgleichung $\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ der klassischen Mechanik wird – da $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{a}$ nicht notwendig dieselbe Richtung haben (siehe unten) – ersetzt durch

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Die Komponentengleichungen lauten dann

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = m\frac{1}{\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{m a_x}{\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

$$F_y = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = m\frac{a_y}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}},$$

$$F_z = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = m\frac{a_z}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}.$$

Die Beschleunigung ist folglich

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_1 + a_y\boldsymbol{e}_2 + a_z\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{m}\left[F_x\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\boldsymbol{e}_1 + F_y\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}\boldsymbol{e}_2 + F_z\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}\boldsymbol{e}_3\right]$$

oder

$$\boldsymbol{a} = \frac{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{m}\left[F_x\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\boldsymbol{e}_1 + F_y\boldsymbol{e}_2 + F_z\boldsymbol{e}_3\right].$$

Die Beschleunigung hat also nicht immer dieselbe Richtung wie die Kraft.

Home Rückmeldungsformular/Gästebuch