EN HOMMAGE À THIERRY AUBIN

Thierry Aubin

(1942 – 2009)

Samy Bahoura, Adnène Ben Abdesselem, Philippe Delanoë,
Olga Gil-Medrano, David Holcman, et d'autres anciens élèves

La mort brutale, le 21 mars dernier, de notre directeur de thèse, à l'âge de 67 ans, nous a tous surpris. Sorti de l'École Polytechnique en 1961, il avait obtenu en 1969 son Doctorat ès Sciences (dirigé par Lichnerowicz), été professeur à Lille de 1968 à 1973, puis à Paris (université Pierre et Marie Curie) où il fut élu à l'Académie, correspondant en 1990, membre en 2003.

La *Gazette des mathématiciens* présente ici une dizaine de textes de collègues, amis, collaborateurs ou anciens élèves, réunis pour lui rendre hommage. De ce recueil émanera la silhouette complexe de l'homme disparu, irréductible au souvenir de chacun.

Notre communauté a perdu un acteur magistral des mathématiques du dernier tiers de siècle. C'est le sens des éloges prononcés d'entrée par Alice Chang et Paul Yang d'une part, par Richard Schoen d'autre part (comme de celui que Paul Malliavin a rédigé pour l'Agenda de l'Académie[1]). Un cœur de textes plus près des mathématiques, par Jerry Kazdan et trois anciens élèves, décrira ensuite à grands traits l'œuvre essentielle et l'enseignement de cet acteur. Enfin, deux collaborateurs (Abbas Bahri et François Coulouvrat), un élève récent et un ami de longue date, son collègue Mark Pinsky, témoigneront sur l'homme que la science les avait amenés à côtoyer.

Mais situons déjà pour le lecteur le domaine de recherches qui fut celui de Thierry Aubin. On en distingue les prémices dans l'approche par l'analyse du Théorème d'uniformisation des surfaces de genre $g > 1$ adoptée en 1907 par Henri Poincaré et dans celle, par la géométrie différentielle, proposée en 1915 par Albert Einstein dans sa théorie de la gravitation. Le problème central est ici celui de déformer d'une certaine façon une métrique riemannienne (ou lorentzienne) pour en rendre une certaine courbure, soit constante, soit égale à un tenseur prescrit. L'ambition d'Aubin fut, dès les années 60 (encore étudiant), de traiter des problèmes riemanniens de ce type sur des variétés compactes sans bord, en résolvant globalement sur celles-ci les EDP non linéaires traductions de ces problèmes. Cette ambition

[1] Voir : `http://www.academie-sciences.fr/membres/A/Aubin_Thierry.htm`

l'a conduit à travailler en thèse sous la direction d'André Lichnerowicz, voici sans doute pourquoi.

D'une part, Lichnerowicz avait inventé une méthode conforme pour résoudre l'équation des contraintes en relativité générale. Or, pour l'uniformisation des surfaces, Poincaré avait employé une méthode analogue, et Yamabe venait d'élargir pareille démarche aux variétés de dimension supérieure – avec une faille désormais célèbre. D'autre part, Lichnerowicz avait contribué à l'étude des variétés kählériennes par la géométrie différentielle ; or sur ces variétés, on peut contrôler la courbure de Ricci[2] par une seule fonction réelle, ce qui offre la perspective d'une possible résolution globale du problème inverse afférent, tel que Calabi l'avait posé en 1954 dans une célèbre conjecture. Enfin, Lichnerowicz avait calculé, pour divers types de tenseurs, des analogues naturels du laplacien et prouvé que leur différence avec le laplacien brut est toujours d'ordre 0 donnée par un terme en courbure, travail préparatoire fondamental pour déduire (par la méthode de Bochner) des résultats de rigidités en courbure positive, mais aussi pour construire des estimations *a priori* sur les-dits tenseurs lorsqu'ils sont, par ailleurs, solutions d'une EDP donnée. Dans ses travaux, Aubin allait s'inspirer de ces techniques d'analyse intrinsèque pour établir de difficiles estimations non linéaires.

Il est temps de donner la parole à nos contributeurs. Puissent leurs voix porter vers le lecteur et vers toute la communauté, l'hommage ici rendu à notre Maître.

Professor Aubin in our Memory

Sun–Yung Alice Chang & Paul Yang[1]

Professor Aubin is widely known for his contribution to the solutions of the Calabi conjecture as well as the Yamabe problem.

His work on the prescribed scalar curvature problem is perhaps not as well known but has had wide influence on the development in this area. To understand the scalar curvature equation on the sphere, he introduced the balancing condition on the conformal factors, and provided an improvement in the Sobolev inequality for such factors. This became the basic tool of the compactness argument for a lot of subsequent work on this equation and later lead to the solution of prescribing curvature problem with no assumption on the symmetry of the curvature.

Professor Aubin has also written several books about geometric PDE that have a wide influence in geometric analysis.

We consider Professor Aubin as one of the anchor in the field of geometric PDE in recent decades. He and his work will be in our memory.

[2] Communément un tenseur symétrique d'ordre 2.

[1] Princeton University, New Jersey, USA.

A tribute to Thierry Aubin

Richard Schoen[1]

Thierry Aubin was a very important mathematician whose work had great influence on the fields of Differential Geometry and Partial Differential Equations. He was instrumental in bringing to bear on geometric problems the powerful methods which were developed to handle nonlinear elliptic and parabolic PDE during the 1950s and 1960s. Aubin applied these methods in novel ways to fully nonlinear equations, and to delicate semilinear variational problems.

My own work was strongly influenced by Aubin's novel contributions to Yamabe-type problems. He uncovered a very deep phenomenon for the Yamabe problem which was the effect of the local geometry on the existence theory in higher dimensions. The many aspects of this phenomenon are still being explored today.

Aubin also emphasized the importance of sharp constants in geometric inequalities for their own beauty as well as for their importance in existence questions for minimizers of variational problems.

The geometric analysis community has sadly lost one of its true leaders with the passing of Thierry Aubin.

Un cours mémorable (Paris VI, DEA 1976-77)

Philippe Delanoë[1]

Thierry Aubin nous a quittés samedi 21 mars 2009. Il avait dirigé mes thèses à l'université Pierre et Marie Curie d'octobre 1977 à juin 1982 après que j'aie suivi son cours de DEA en 1976-77. Je témoignerai ici de ce cours exceptionnel ; il avait alors 34 ans.

Son cours de DEA à l'université Pierre et Marie Curie en 1976-77 visait à présenter plusieurs théorèmes publiés par lui en 1976 ; il fut d'une intensité tout à fait remarquable. Je me souviens qu'Aubin n'exposait que le strict nécessaire, consultant peu ses notes, entrant droit dans la pratique des calculs d'analyse dans des cartes avec des indices, à la manière des physiciens. Grâce à la lecture du merveilleux livre « Théorie des Champs » de Landau et Lifchitz, j'étais en pays de connaissance. Il admettait certains résultats hors du champ de ceux qui nous occupaient directement, donnait peu d'explications ou de commentaires, laissant chaque étudiant travailler seul sur le sens et la portée de son cours.

[1] Stanford University, California, USA.
[1] Université de Nice-Sophia Antipolis, Laboratoire J.-A. Dieudonné.

Tous ses résultats avaient pour cadre une variété riemannienne fermée de dimension n, dont on notera g la métrique. Le cours d'Aubin commençait par des outils de géométrie et d'analyse sur une telle variété : des rudiments riemanniens ; puis un chapitre sur les espaces de Sobolev issu de ses articles [BSM76, JDG76] ; et rapidement expliqué, un théorème sur la fonction de Green du laplacien, tiré de son article [JMPA74]. À ce stade nous devions savoir résoudre l'équation de Poisson $\Delta u = f$.

Puis on passait au problème de Yamabe[2] : en dimension $n > 2$, recherche d'une fonction $u > 0$ telle que la métrique conforme $u^{\frac{4}{n-2}} g$ soit à courbure scalaire constante et de même volume total que g. Ce problème se traduit par une EDP semi-linéaire elliptique du second ordre portant sur le facteur conforme u, avec exposant critique et donc perte de compacité pour l'injection de Sobolev $H_1^2 \hookrightarrow L^{2^*}$ où $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$, un obstacle dans l'utilisation de la méthode variationelle directe. L'équation d'Euler-Lagrange implique pour une métrique conforme minimisante d'être à courbure scalaire constante, donc solution du problème de Yamabe. Dans son cours de DEA, Aubin nous a montré que le minimum μ en question (appelé invariant de Yamabe de la classe conforme) est au plus égal à celui μ_0 de la sphère standard et qu'une métrique minimisante existe dès que $\mu < \mu_0$, car on peut alors pallier au manque de compacité, un résultat qu'il avait publié dans [JMPA76]. Du travail restait à faire pour caractériser toutes les variétés qui vérifient l'inégalité cruciale $\mu < \mu_0$ (Aubin nous donna des exemples).

Le message de cette partie du cours était frappant : la géométrie, en donnant lieu à un exposant critique, apparaît source des problèmes d'analyse les plus pertinents. Un tel message frappe encore quand on lit son article [JFA79] sur la prescription de la courbure scalaire dans la classe conforme de la sphère standard (problème de Nirenberg), par le rôle crucial qu'y jouent les meilleures constantes dans certaines inclusions de type Moser-Sobolev.

Dans les dernières séances du cours, Aubin donnait des notions sur l'existence de métriques d'Einstein-Kähler dans le cas $c_1 < 0$, un résultat qu'il avait publié dans [CRAS76]. Il esquissait, pour l'équation de Monge-Ampère complexe qui traduit cette question, une résolution globale impressionnante de technicité, sur quoi le cours s'achevait.

Thierry Aubin connut bientôt ses premiers graves problèmes de santé. Deux ans après avoir soutenu ma thèse, j'ai été affecté au Laboratoire Dieudonné. De passage à Paris, je lui avais demandé une fois s'il accepterait qu'on organise un colloque en son honneur. Il avait décliné, sa santé ne lui permettant pas d'y participer. Désormais nous réfléchirons peut-être à l'idée d'un colloque sur l'héritage de ses intérêts mathématiques, des intérêts partagés par les meilleurs géomètres-analystes du monde.

Références

[JMPA74] TH. AUBIN, Fonction de Green et valeurs propres du laplacien, *J. Math. Pures Appl.* **53** (1974) 347-371

[2] Pointé du doigt à la communauté (Yamabe étant décédé) par Neil Trudinger [*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **22** (1968) 265-274], alors thésard et qui avait remarqué une erreur grave en lisant la preuve de Yamabe.

[BSM76] Th. Aubin, Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes, *Bull. Sc. Math.* **100** (1976) 149-173
[JDG76] Th. Aubin, Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, *J. Diff. Geom.* **11** (1976) 573-598
[JMPA76] Th. Aubin, Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures Appl.* **55** (1976) 269-296
[CRAS76] Th. Aubin, Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **283** (1976) 119-121
[JFA79] Th. Aubin, Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire, *J. Funct. Anal.* **32** (1979) 148-174

Thierry Aubin's Work on Prescribing Scalar Curvature

Jerry L. Kazdan[1]

In the past fifty years there has been a surge of work on problems that involve the interplay of differential geometry and analysis, particularly partial differential equations. Thierry Aubin was one of the true leaders. He had important insight on how to reduce geometry problems to proving fundamental inequalities. These will have a permanent place in mathematics.

Here I'll give a brief view of just one part of his work: to understand the scalar curvatures of Riemannian metrics that are pointwise conformal to a given metric g. To be more specific, let (M^n, g) be a compact Riemannian manifold of dimension $n \geq 3$ and let $g_1 = u^{4/(n-2)} g$ be a conformal metric (here $u(x) > 0$ is a smooth function and the exponent $4/(n-2)$ is used to make subsequent equations simpler). Let S and S_1 be the scalar curvatures of g and g_1 respectively. They are related by the equation

$$-\gamma \Delta u + Su = S_1 u^{N-1}, \tag{1}$$

where $\gamma = 4(n-1)/(n-2)$ and $N = 2n/(n-2)$. Two problems come to mind immediately:

– The first is to find $u > 0$ so that $S_1 =$ constant. This is the Yamabe problem. It can be thought of as a generalization of the uniformization theorem from complex analysis. Elsewhere in this article others will discuss Aubin's contributions to this question.

– The second is to specify a function S_1 and seek u so that this function S_1 is the scalar curvature of g_1. Thus, one seeks a conformal metric with prescribed scalar curvature. We will discuss Aubin's work on this problem. For convenience we assume that the given metric has constant scalar curvature $S = c$.

[1] Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104-6395, USA.

Equation (1) has the form

$$-\Delta u + cu = hu^{\alpha}, \tag{2}$$

with $\alpha > 1$. Given c and h one seeks a positive solution u. Integrating this equation, since $u > 0$, we get a condition relating h to the sign of c. For instance, if $c > 0$, then $h(x)$ must be positive somewhere. The three cases $c > 0$, $c = 0$, and $c < 0$ are remarkably different.

Case 1 : $\mathbf{c} > 0$. Here the size of the exponent α is important. In equation (1), $\alpha = N - 1$, where $N = 2n/(n-2)$ is the critical case of the Sobolev embedding of H_1 in L_N. Aubin realized that determining the *best* constant in the Sobolev inequality was fundamental. In [1] he found the smallest constant B such that the Sobolev inequality

$$\|u\|_p^q \leqslant B^q \|\nabla u\|_q^q + A\|u\|_q^q$$

holds for all u in H_1^q, with some constant $A(B)$ independent of u. Here $p^{-1} = q^{-1} - n^{-1}$ with $1 \leqslant q < n$. In the application to (1), $q = 2$ so $p = 2n/(n-2)$ which is exactly the constant N.

In a subsequent paper [2], he found that if u satisfies additional natural orthogonality relationships, then the best constant B can be lowered.

He used these best constants to give basic information into when one can solve equation (1).

Case 2: $\mathbf{c} < 0$. In this case the size of the exponent $\alpha > 1$ is not important. A necessary condition is that $\int_M h\,dx < 0$, so $h(x)$ must be negative somewhere. It is easy to show that if $h(x) < 0$ everywhere then one can always solve (2). However in [3] Aubin and S. Bismuth, building on earlier work of Ouyang, Rauzy, Vasquez and Veron, gave important results on how the set where $h(x) \geq 0$ and the size of h there influence the solvability of (2).

For the two dimensional case, $n = 2$, Aubin obtained sharp inequalities analogous to the Sobolev inequalities. He used these to prove similar results for prescribing the Gauss curvature in this case.

References

[1] Aubin, Th., "Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev." *J. Differential Geometry*, **11** (1976), n° 4, 573–598.

[2] Aubin, Th., "Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire." *J. Funct. Anal.* **32** (1979), n° 2, 148–174.

[3] Aubin, Th.; B., Sophie, "Courbure scalaire prescrite sur les variétés riemanniennes compactes dans le cas négatif." *J. Funct. Anal.* **143** (1997), n° 2, 529–541.

Aubin's Contribution to Yamabe Problem

Olga Gil-Medrano[1]

If (M,g) is a compact Riemannian manifold without boundary, of dimension $n \geqslant 3$, there is at least one metric g' conformal to g with constant scalar curvature. This statement, that H. Yamabe proved in [9], became a problem once it was detected a weak point in the original proof, as N.Trudinger remarked in [8]. The geometrical problem of finding a metric of the form $g' = \varphi^{4/n-2}g$, with a smooth $\varphi > 0$ and with constant scalar curvature R', is expressed in terms of the existence of solutions of a given elliptic PDE in the manifold M. The equation relating R' with the scalar curvature of g, denoted R, via the Laplace operator of g is

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + R\varphi = R'\varphi^{\frac{n+2}{n-2}}$$

and provides one of the more famous examples of nonlinear equation with critical exponents; if we consider the analogous equation where the exponent $\frac{n+2}{n-2}$ is changed by $q < \frac{n+2}{n-2}$ then the new equation has a solution, but the methods fail exactly for this exponent.

It is easy to see Yamabe equation as the Euler-Lagrange equation of the variational problem corresponding to the functional

$$J(\varphi) = \Big(\|\nabla\varphi\|_2^2 + \int_M R\varphi^2 \, dv_g\Big)\|\varphi\|_N^{-2}$$

with $N = \frac{2n}{n-2}$. Let us consider the Yamabe number $\mu(M,g)$ defined as the infimum of the functional on the set consisting of those elements of the Sobolev space $H_1(M)$ that are everywhere non negative and positive in at least one point.

If there is a smooth function φ, everywhere positive such that $J(\varphi) = \mu(M,g)$ then the conformal metric g' as above has volume 1 and constant scalar curvature equal to $\mu(M,g)$. This is not the only way to find a solution but this has been the method most frequently used and it was Yamabe's program. The gap in his proof can be overcome under certain hypothesis and, ten years after Yamabe's work, contributions by Trudinger and Aubin allowed to be certain that the result is true for $\mu \leqslant 0$. (see [1]).

Aubin's paper [2] has been a key stone for the complete solution of the problem. It is not a surprise to see how many authors have cited it since its publication. Firstly, he showed that for any compact Riemannian manifold of dimension n the infimum of the Yamabe functional verifies $\mu(M,g) \leqslant \mu(S^n, g_0) = n(n-1)Vol(S^n, g_0)^{2/n}$ where (S^n, g_0) is the n-dimensional round sphere of radius 1. This was achieved by using his own result concerning the best constant for Sobolev imbeddings in which he was working at the same time [3]. Secondly and more important, he showed that if for a manifold the inequality is strict then for this manifold there is a solution of the Yamabe problem by a function minimizing the functional J. After showing that this is the case for different classes of manifolds,

1 Universidad de Valencia, Spain.

he proposed what is known afterwards as Aubin's Conjecture: $\mu(M, g) < \mu(S^n, g_0)$ for any manifold not conformal to the sphere.

Although nowadays there are many different solutions of the Yamabe problem, almost all the first ones where obtained by proving Aubin's Conjecture. In [2], Aubin showed that the inequality is strict for any compact Riemannian manifold which is not locally conformally flat and of dimension $n \geqslant 6$. The test functions used to obtain the result where constructed by using the Weyl tensor. More sophisticated test functions were constructed by Schoen [6] to extend the result to manifolds of dimension 3, 4 and 5. For a locally conformally flat manifold which is not conformal to the sphere, the conjecture was proved by Aubin in [2] with the hypothesis of the manifolds having finite fundamental group, some advances were done in [5] by showing Aubin's conjecture for a list of examples and for connected sums and finally the conjecture was proved by Schoen and Yau in [7].

The details can be seen in the good chapter that Aubin dedicates to Yamabe problem in his book [4] that I strongly recommend to anyone interested in the state of the art by the time of his writing in 98.

Let me finish with a personal comment. It was a privilege for me that T. Aubin accepted me among his students. I have always been grateful to him for proposing, as the subject of my Thèse de troisième cycle, in 1983 the study of the open cases on Yamabe problem concerning locally conformally flat manifolds, a subject on which many outstanding geometers were working at that time. This challenge, that I would never had faced without his encouragement, changed for ever my concept of mathematical research.

References

[1] AUBIN,TH., Métriques riemanniennes et courbure. *J. Diff Geo.* 4, (1970) 383–424.

[2] AUBIN,TH., Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl.*, 55 (1976), 269 – 296.

[3] AUBIN,TH., Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire. *J. Funct. Anal.*, 32 (1979) 148 –174.

[4] AUBIN, TH., *Some nonlinear problems in Riemannian geometry.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[5] GIL-MEDRANO,O., On the Yamabe problem concerning the compact locally conformally flat manifolds. *J. Funct. Anal.*, 66 (1986) 42-53.

[6] SCHOEN, R., Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature *J. Differ. Geom.*, 20 (1984) 479–495.

[7] SCHOEN, R. AND YAU, S. T. , Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature *Invent. Math.*, 92 (1988) 47-71.

[8] TRUDINGER, N., Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (3) 22 (1968) 265–274.

[9] YAMABE, H., Conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Math. J.* ,12 (1960), 21–37

Aperçu sur les travaux de Thierry Aubin en géométrie kählérienne

Adnène Ben Abdesselem[1]

Suivant Calabi [1, 2], étant donnée une variété kählérienne compacte (M, g), on cherche un changement de métriques kählérien, c'est-à-dire une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$ telle que $g'_{\lambda\overline{\mu}} = g_{\lambda\overline{\mu}} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^\lambda \partial \overline{z}^\mu}$ définisse une métrique kählérienne[2], et tel que la métrique g' ainsi définie soit d'Einstein-Kähler, c'est-à-dire vérifie :

$$\mathrm{R}icci\,(g') = kg' \quad (*).$$

Le premier constat est d'ordre topologique. En effet, l'équation (*) impose à la première classe de Chern de M (notée c_1) d'être ou bien positive ($k > 0$), ou bien négative ($k < 0$) ou bien nulle ($k = 0$).

Dans sa thèse [3], T. Aubin met en équation le problème précité et en ramène l'étude à celle de l'existence d'une solution φ admissible de l'équation de type Monge-Ampère complexe suivante, qu'on peut appeler équation d'Aubin :

$$\det(g' g^{-1}) = e^{-k\varphi+f} \quad (E),$$

où f provient d'une donnée géométrique. Une normalisation restreint l'étude respectivement aux cas $k = 1$, $k = 0$ et $k = -1$ suivant le fait que c_1 est positif, nul ou négatif. Le cas nul est un cas particulier de la conjecture de Calabi [1, 2] selon laquelle tout représentant de c_1 est le Ricci d'une métrique obtenue par changement kählérien comme ci-dessus. Soulignons que des idées essentielles pour la résolution de l'équation (E) avec $k \leqslant 0$ se trouvent dans [3]. La preuve complète du cas $k = -1$ (ou $c_1 < 0$) est donnée par Aubin dans [4] et détaillée dans son article [5]. Ce dernier contient aussi une preuve presque complète de la conjecture de Calabi. La méthode[3] utilisée est la méthode de continuité. Pour le cas $k = -1$, l'équation de continuité considérée est

$$\det(g' g^{-1}) = e^{\varphi+tf} \quad (E_t),$$

et pour la conjecture de Calabi, Aubin considère l'équation

$$\det(g' g^{-1}) - 1 = t(e^f - 1) \quad (E'_t).$$

Dans les deux cas, on en cherche une solution[4] admissible φ_t pour $t \in [0, 1]$, et l'opérateur linéarisé de $\varphi \to \det(g' g^{-1})$ en $\varphi = \varphi_t$ issu de ces équations est inversible.

Il existait une forte concurrence internationale sur le sujet. La médaille Fields récompensa Shing-Tung Yau pour sa résolution [7] de la conjecture de Calabi, conjecture qu'Aubin avait démontrée dans [3] sous l'hypothèse que la métrique

[1] Université Paris VI.
[2] On dira alors que la fonction φ est *admissible*.
[3] Alternativement, Aubin propose aussi une méthode variationelle inaugurée dans [3].
[4] Connue pour $t = 0$, elle sera la solution désirée pour $t = 1$.

kählérienne de départ g est à courbure bisectionelle holomorphe non-négative, hypothèse presque levée dans [5] où seule manquait l'estimation C^0 des solutions de (E'_t), qui fut l'apport de Yau par rapport aux travaux d'Aubin.

Le cas $k = 1$ (ou $c_1 > 0$) présente des difficultés d'une autre nature. En effet, si certains espaces, à l'instar du projectif complexe, sont dotés de métriques d'Einstein-Kähler naturelles, les obstructions de Lichnerowicz[5] et de Matsushima montrent que certaines variétés à c_1 positif ne peuvent posséder de métriques d'Einstein-Kähler. Par ailleurs, la méthode de continuité semblait inapplicable car l'opérateur linéarisé n'était plus inversible, du moins si l'on gardait le paramètre t au même endroit que dans les deux premiers cas. Comme pour ces derniers, T. Aubin allait trouver l'idée essentielle, celle qui permet d'appliquer, encore une fois, la méthode de continuité. Il considéra l'équation

$$\det(g'g^{-1}) = e^{-t\varphi+f} \quad (E''_t),$$

et eût l'idée de recourir pour elle à un analogue complexe de l'inégalité de Lichnerowicz qui porte sur la première valeur propre du laplacien lorsque le Ricci est plus grand que la métrique à une constante multiplicative près. L'utilisation de cette inégalité allait lui permettre d'inverser l'opérateur linéarisé pour des petites valeurs de t et de poursuivre la preuve en utilisant le fait que pour $t = 0$, une solution est donnée par la conjecture de Calabi. Comme dans les deux premiers cas, il construit des estimées a priori (souvent très compliquées) et ramène l'étude du cas positif à la recherche de conditions permettant d'établir l'estimée C^0 des solutions de (E''_t). Il en fournit une portant sur l'intégrale des exponentielles des fonctions admissibles dans [6]. Son idée ainsi que les deux fonctionnelles qu'il introduit dans cet article s'avéreront cruciales et sont à l'origine d'importants travaux sur la question, dont la célèbre constante de Tian.

Voici donc, résumées en quelques lignes, les contributions de mon Maître dans ce domaine. Ces dernières, bien qu'essentielles, sont pour moi secondaires devant l'amitié que l'on se témoignait.

Puisse le Tout Puissant recevoir dans son infinie miséricorde celui qui m'a tant appris.

Références

[1] Calabi, E., The space of Kähler metrics, *Proceedings Internat. Congress Math. Amsterdam* **2** (1954) 206-207

[2] Calabi, E., On Kähler manifolds with vanishing canonical class, in : *Algebraic Geometry and Topology. A Symposium in Honor of S. Lefschetz*, Princeton Univ. Press (1955), 78-89

[3] Aubin, Th., Métriques riemanniennes et courbure, *J. Diff Geom.* **4** (1970) 383-424

[4] Aubin, Th., Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **283** :3 (1976) 119-121

[5] Aubin, Th., Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *Bull. Sci. Math.* **102** :1 (1978) 63-95

[6] Aubin, Th., Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité, *J. Funct. Anal.* **57** :2 (1984) 143-153

[7] Yau, S.-T., On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978) 339-411

[5] Qui dirigea la thèse de T. Aubin.

Grand salut au maître et à l'ami

Abbas Bahri[1]

C'est avec tristesse que j'ai appris la nouvelle de la disparition de Thierry Aubin, qui fut un collaborateur et un ami.

Ses travaux sur la conjecture de Yamabe et sur l'équation de Monge-Ampère complexe (métrique de Kähler-Einstein) sont une page de l'histoire des mathématiques. Je suis sûr que d'autres ici la détailleront.

Thierry Aubin et moi avons eu une collaboration intense pendant cinq à six années. Nous avons écrit en collaboration deux articles sur la courbure scalaire et nous en avions un troisième en préparation, difficile, dont seulement les grandes lignes étaient tracées. Je dois maintenant le terminer seul, en restant fidèle à ces grandes lignes que nous avions pensées (cela prendra du temps).

Thierry Aubin était un excellent mathématicien, un grand géomètre. Sa pensée était claire, son exposition permettait à ses lecteurs d'aborder d'emblée des sujets difficiles et leur donnait l'illusion de faire tout de suite de la recherche avancée dans des domaines très techniques et compliqués. Ses livres montrent le talent d'un magicien qui vous invite dans un domaine comme si vous y aviez toujours été, comme si vous n'aviez pas besoin d'y pénétrer.

C'est une qualité qui s'est perdue dans la géométrie d'aujourd'hui, trop touffue et complexe (sans doute parce qu'elle se cherche, mais pas seulement), celle d'exhiber la beauté si naturelle à une pensée claire et incisive. Cette façon d'être appartenait à Thierry, elle est visible dans tous ses travaux et dans ses livres.

Thierry Aubin était aussi un être humain complexe, à la recherche de nouveaux horizons. Il a cherché, et trouvé je crois, des amis partout dans le monde : il a eu des élèves (plusieurs d'entre eux sont des amis personnels) français, mais aussi maghrébins. Il a bien sûr voyagé dans le monde entier, son nom et ses travaux étant partout connus et réputés.

Il m'a souvent rendu visite en Tunisie, où il a aussi séjourné de manière indépendante à l'invitation d'autres mathématiciens tunisiens, à celle de la

[1] Rutgers University, New Jersey, USA.

Société Mathématique de Tunisie. Je crois qu'il s'y plaisait, pour des raisons mathématiques, mais aussi pour des raisons de sympathie naturelle.

Je garde le souvenir d'un collaborateur précieux, d'un grand maître des équations de la géométrie ; et aussi d'un ami apprécié et bon vivant. Je regrette sa disparition et je la ressens comme une grande perte.

Ses livres et ses recherches resteront dans l'histoire de la connaissance et des mathématiques. Nous ne pouvons, c'est bien clair, tous en dire autant.

Alors, un grand salut à un maître consommé dans un art difficile, la Géométrie et plus généralement les Mathématiques, qui nous a brusquement quittés ; et un grand salut à l'ami qui est parti.

C'était mon patron

David Holcman[1]

T. Aubin nous a quittés le 21 mars 2009 après avoir combattu dignement la maladie pendant plusieurs années. Ce qui, lui comme beaucoup, l'embêtait le plus dans cette histoire, c'était d'avoir cotisé pour rien ; on devrait demander au fisc de nous rembourser. Sans doute, là où il est, et je l'espère, prend-on soin de lui avec le service qu'il attendait : les macarons de Ladurée, les chemises Yves Saint-Laurent, les parfums Guerlain et Chanel, tout ce qui fait, en fait, la grandeur de la France.

Aubin, comme nous l'appelions, ou le Biterrois, comme disait Cherrier, avait une personnalité complexe ; homme de grand talent mathématique, il était plutôt de cette génération de matheux qui cosignaient peu. Très malin, c'était un homme original, plutôt secret, qui parlait peu, mais savait aller à l'essentiel. Dans ses cours ou ses livres, il manquait un certain nombre d'étapes de calculs, ce qui donnait des couleurs et de la sueur à qui voulait entrer dans l'univers ludique mais assez fermé de l'analyse sur les variétés.

Aubin, c'était aussi mon patron de thèse, pas facile, plutôt exigent. Tout commença pour moi, fin 1995 : à peine arrivé en thèse, il m'avait demandé de borner l'énergie des solutions de l'équation de la courbure scalaire, ce qui n'était pas une mince affaire pour un étudiant fraîchement sorti du service militaire. Après un an d'errance, la thèse tourna dans une autre direction, celle de trouver des solutions de l'équation de Yamabe qui changent de signe. Mes discussions avec le maître pendant ces années furent brèves, assez peu fréquentes mais mémorables. En fait, la tradition dans l'équipe était que Cherrier supervisait les étudiants allant du côté de l'analyse complexe (Monge-Ampère) et Vaugon (Michel pour les intimes) aidait ceux qui travaillaient sur Yamabe, la concentration ou la masse, dont il était le spécialiste.

Aubin était imprédictible sur beaucoup de choses, mais il soutenait avec conviction ceux qu'il avait choisis. Chez Aubin, il fallait savoir calculer dans tous les sens, savoir aussi s'économiser par des astuces de calcul, utiliser les nablas, et ne pas se mettre en coordonnées, sinon à quoi cela servait d'avoir inventé ce symbole ? Aubin perpétuait cette idée que l'analyse ne peut se faire sans calculs, mais

[1] École Normale Supérieure, Paris.

avant ça, il fallait savoir quoi calculer, et là, il rappelait qu'il fallait apprendre la géométrie sérieusement, avant, pas après. Son cours de géométrie n'était pas facile et une génération d'étudiants se souvient de ceux qui parvenaient à dépasser la moyenne en Maîtrise. Heureusement que Vaugon s'occupait des TD, garnissait le cours d'Aubin d'exemples fondamentaux, ce qui permettait de comprendre le fond du problème.

Si Aubin s'accommodait assez bien de son isolement sur la place des mathématiques et de la géométrie riemannienne, c'est parce qu'il lui était indifférent, ce qui faisait aussi sa force. Si je dois ajouter quelque chose, c'est simplement qu'il savait apprécier la beauté sous ces formes les plus diverses.

Sa disparition laisse le vide d'une personnalité originale, solitaire, en marge des groupes de tendances, qui disait ce qu'il pensait. Derrière lui survit une petite collection d'élèves que nous sommes. Mais son message tel que je l'ai compris et appliqué est qu'en recherche, on se doit de faire ce qu'on veut, de toute façon, on fera ce qu'on peut.

Thierry Aubin, ou les incursions d'un mathématicien curieux en mécanique des fluides

François Coulouvrat[1]

« Mano sanem in corpore sanum ». J'ai choisi cette célèbre locution latine pour illustrer les circonstances de ma rencontre avec Thierry Aubin. Loin des sévères amphis de l'université Pierre et Marie Curie, ou des boiseries séculaires de l'Académie des Sciences, c'est... dans une piscine que nos chemins (ou plutôt, en l'occurrence, nos lignes) se croisèrent. Non pas pour d'audacieuses expériences de mécanique des fluides mais, plus prosaïquement à l'occasion de cours de natation dispensés au personnel de l'université dans le bassin de l'ancienne École Polytechnique. Thierry Aubin y pratiquait assidûment le dos crawlé pour apaiser certaines douleurs persistantes. J'étais alors un jeune chargé de recherche au CNRS, en « Sciences pour l'Ingénieur ».

Depuis quelques mois seulement, je m'intéressais à la propagation des ondes de choc acoustiques. À l'époque, le programme de recherche « ATSF » (Avion de Transport Supersonique du Futur) portait sur la faisabilité d'un successeur à Concorde. Parmi les nombreux défis soulevés par un tel projet, les contraintes environnementales ne sont pas les moindres. Entre autres, le bang sonique, ou détonation balistique, est la brutale compression sonore de l'air produite au sol par le survol d'un objet qui vole plus vite que la vitesse du son. Cette onde de choc n'est autre que la trace lointaine du système d'ondes de choc aérodynamiques plus intenses suscitées par la géométrie et la portance d'un avion. Bien qu'atténuées par l'éloignement, ces détonations persistent au sol et sont suffisamment gênantes pour interdire encore aujourd'hui le survol des terres à vitesse supersonique. Un des défis à relever est donc de modifier sensiblement la conception des avions

[1] Université Paris VI.

pour en réduire suffisamment la nuisance au sol. Parmi les principaux paramètres contrôlant celle-ci, figure le temps de montée, ou « raideur » des chocs. En effet, ceux-ci s'avèrent n'être pas des discontinuités strictes au sens mathématique du terme, mais des zones de variation continue, quoique très rapide. En mécanique des fluides classique, ce phénomène est décrit par l'équation de Burgers, archétype de l'équation de propagation diffusion non linéaire, selon laquelle la raideur du choc est contrôlée par un équilibre entre non-linéarités et viscosité : c'est la structure de choc établie par Taylor en 1910.

Toutefois, en atmosphère réelle, les phénomènes de dissipation dominants ne sont pas la viscosité, mais la relaxation des molécules diatomiques d'azote et d'oxygène possédant un degré interne de vibration qui, excitées par l'onde acoustique, « relaxent » avec une cinétique chimique connue. La propagation d'une onde de choc dans un tel milieu est décrite par une équation de Burgers généralisée. En présentant celle-ci à Thierry Aubin, il en a d'emblée saisi l'intérêt du point de vue mathématique : d'une part en démontrer rigoureusement l'existence et l'unicité des solutions pour une condition initiale quelconque, d'autre part en étudier le comportement local au voisinage des chocs en fonction de leur amplitude.

Dans un premier temps, Thierry Aubin montre l'existence locale des solutions en écrivant l'équation comme une équation de la chaleur modifiée, et en en déduisant la solution sous forme d'une suite itérative de solutions de cette dernière. Dans un second temps, il établit l'existence globale de ces solutions : celles-ci existent à tout instant, sont bornées par leur valeurs initiales et tendent vers zéro aux valeurs et aux temps infinis. Enfin, dans un dernier temps, Thierry Aubin étudie le comportement limite de ces solutions lorsque les paramètres visqueux et de relaxation sont petits, et que le rapport des temps de relaxation est petit également, toutes hypothèses parfaitement satisfaites dans l'atmosphère.

Après plusieurs résultats intermédiaires faisant appel à un vaste appareil mathématique d'analyse fonctionnelle et une série d'estimations et de majorations subtiles, Thierry Aubin démontre finalement le résultat principal de notre étude (Théorème 8). Suivant l'amplitude du choc, il existe un double « blow-up » (suivant la terminologie mathématique) ou double structure de choc (comme on dirait plutôt en mécanique) faisant intervenir, soit la viscosité et le mécanisme de relaxation le plus rapide (celle de l'oxygène) pour les chocs d'amplitude les plus fortes, soit uniquement les deux relaxations (azote puis oxygène) dans le cas médian. Seuls les chocs les plus faibles présentent un simple « blow-up » déterminé par la relaxation de l'azote seul. Certains de ces résultats, en présence d'un seul mécanisme de relaxation, avaient été anticipés intuitivement par une approche heuristique des plus grands mécaniciens des fluides. Les résultats obtenus par Thierry Aubin avec deux mécanismes de relaxation sont eux totalement originaux.

Dans tous les cas, Thierry Aubin a su apporter la puissance et la rigueur d'une démonstration élégante et sans faille, au modeste « physicien » que je suis. Ses démonstrations ont été publiées dans un article au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées [1], revue chère à son cœur. Cet article est cosigné, mais l'essentiel de la contribution est de la main de Thierry Aubin.

À travers cette collaboration ponctuelle mais fructueuse, j'ai pu ô combien apprécier et admirer la curiosité de Thierry Aubin, soucieux des applications de son expérience de mathématicien de haut vol à la réalité physique, la vivacité de son esprit brillant appréciant immédiatement la richesse des comportements physiques derrière l'obtuse équation, et son enthousiasme pour les défis intellectuels. Et tout cela en travaillant au coin de son bureau en toute simplicité avec un jeune chercheur d'une autre discipline croisé par hasard, et après 45 minutes d'efforts natatoires prolongés.

Chapeau bas, Monsieur Thierry Aubin !

Références

[1] AUBIN, TH. & COULOUVRAT, F. , Ondes acoustiques non linéaires dans un fluide avec relaxation, *J. Math. Pures Appl.* **77** (1998) 387–413

In Memory of Thierry Aubin

Mark A. Pinsky[1]

Thierry Aubin was one of the pioneers in what is now called *geometric analysis* – the use of partial differential equations to study problems in global differential geometry.

His most recent book "A Course in Differential Geometry" [AMS01], was published by the American Mathematical Society in 2001, following several months of negotiations with other publishers, who asked for "more words in the index", "more pictures", etc. Prior to 1999 I had been aware of the course notes which later evolved into the book. Since I was a Consulting Editor of the AMS, it was natural to nominate Aubin's book manuscript for publication, overlooking the petty criticism from other publishers. He was very pleased to be invited, formally through the offices of Sergei Gelfand, then Associate Publisher of the AMS. In turn, I was pleased and honored when Aubin wrote to me to help edit the text, much of this involving proper translation from French to "American English" in a form appropriate for graduate students. Working together by e-mail, we were able to make the necessary changes within one month.

On this note, we comment on the philosophy of the text, in the author's words. "The aim of this book is to facilitate the teaching of differential geometry. This material is useful in other fields of mathematics such as partial differential equations – to name one. We feel that workers in PDE would be more comfortable with the covariant derivative if they had studied it in a course such as the present one. Given that this material is rarely taught, we feel that it requires a substantial amount of effort, especially since there is a shortage of good references." Now we have an excellent reference for this interface.

References

[AMS01] AUBIN, TH., *A course in Differential Geometry*, Graduate Studies in Math. **27**, American Mathematical Society, Providence, R.I. (2001)

[1] Northwestern University, Evanston, IL, USA.