Министерство образования и науки
Российской Федерации
Волгоградский государственный университет

В.М. Миклюков

Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения

Волгоград 2005

Рецензенты :

канд. физ.-мат. наук, доц. **А.А. Клячин**
канд. физ.-мат. наук, доц. **А.Н. Кондрашов**

Миклюков В.М.

Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения [Текст]: [монография] /В.М. Миклюков. - Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2005, 273 с./

Монография посвящена изложению результатов исследования конформного отображения двумерных нерегулярных поверхностей в евклидовом пространстве, и в частности, локально липшицевых поверхностей.

Обсуждаются проблемы существования и единственности отображения, граничного поведения отображения; строится теория простых концов поверхности, аналогичная теории Каратеодори; доказываются теоремы типа теорем Альфорса и Варшавского о конформном отображении "угловых"и "полосообразных" областей на канонические области. Даются применения разрабатываемой теории в задаче о допустимой скорости стабилизации решений уравнения газовой динамики и качественных вопросах решений уравнений типа минимальной поверхности.

Для математиков и физиков разных специальностей, студентов и аспирантов.

Предисловие

Это просто удивительно, что при наличии наикрасивейшей и богатейшей теории конформных отображений плоских областей соответствующая теория конформных отображений поверхностей вплоть до настоящего времени так и не представлена связным изложением.

Целью данной работы является введение в теорию конформных отображений нерегулярных поверхностей. Автор ограничился рассмотрением, главным образом, локально липшицевых поверхностей. По-видимому, такой класс поверхностей минимально необходим в обобщениях и в определенной степени достаточен для приложений.

Ниже затрагиваются следующие проблемы: существование и единственность отображения, граничное поведение отображения и простые концы поверхности, теоремы типа теорем Альфорса и Варшавского, применения в задаче о допустимой скорости стабилизации решений уравнения газовой динамики и качественных вопросах решений уравнений типа минимальной поверхности. Более детально с содержанием книги читатель может ознакомиться по оглавлению.

Отметим, что рассматриваемый класс задач не требует применения комплексного переменного. Так что, можно было бы вполне обоснованно дать другое название книги — "Конформное отображение без комплексного переменного". Тем не менее, в тех местах, где применение функций комплексного переменного в достаточной степени оправдано соображениями удобства, язык комплексного переменного используется. Автор пытался сделать изложение максимально простым с тем, чтобы оно было доступно в том числе и молодым математикам, только приступающим к профессиональной работе в данной области.

В основе книги лежит курс лекций, прочитанный автором в 2004/05 учебном году магистрантам кафедры математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета. Поэтому, как правило, при необходимости выбора между изложением результата в максимальной общности и демонстрацией метода его получения предпочтение отдавалось второму и отсылке за общностью к оригинальным работам.

Для начинающих исследователей формулируется ряд нерешенных задач.

Автор глубоко признателен своим замечательным студентам, а именно, А.В. Кочетову, Е.П. Колпакову, С.А. Королькову, О.В. Парьевой, Т.В. Самойленко и Е.С.Шаргар за многочисленные замечания, способствовавшие улучшению текста книги.

Автор благодарен коллегам по кафедре математического анализа и теории функций ВолГУ, где была выполнена бóльшая часть работы, а также администрации университета за поддержку.

Автор хотел бы особо поблагодарить А.Н. Кондрашова, взявшего на себя труд по вычитке рукописи книги и сделавшего целый ряд полезных наблюдений. Им проделана большая работа, связанная с редактированием книги.

Автор надеется, что книга окажется полезной читателю, заинтересованному в том числе и приложениями метода конформных отображений.

Владимир Михайлович Миклюков
Математический факультет
Волгоградского государственного университета
Университетский проспект 100
Волгоград 400062
РОССИЯ
E-mail: miklyuk@mail.ru

Содержание

Глава 1

Инструментарий

Глава посвящена разработке инструментария для исследования конформных отображений нерегулярных поверхностей. Вводятся модуль и емкость конденсатора на абстрактной поверхности, даются их оценки и доказывается совпадение. Доказывается принцип длины и площади на поверхности.

1.1 Абстрактная поверхность

Мы начнем с терминологии. Следуя [155, **1.1**], мы будем пользоваться следующим понятием.

Дилатацией отображения $f : X \to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y называется величина

$$\operatorname{dil}(f) = \sup_{\substack{x,x' \in X \\ x \neq x'}} \frac{r(f(x), f(x'))}{r(x, x')}\,,$$

где символом "r" обозначаются расстояния dist_X в X и dist_Y в Y.

Отображение f называется *липшицевым*, если $\operatorname{dil}(f) < \infty$.

Гомеоморфизм $f : X \to Y$ называется *билипшицевым*, если f и f^{-1} являются липшицевыми.

Если каждая из точек $x \in X$ обладает окрестностью U такой, что сужение $f^* = f|_U$ удовлетворяет условию $\operatorname{dil}(f^*) < \infty$, то f называется *локально липшицевым* и *локально билипшицевыми*, если

$$\operatorname{dil}(f^*) < \infty \quad \text{и} \quad \operatorname{dil}(f^*)^{-1} < \infty\,.$$

Пусть $\mathbf{R}^2$ – двумерная плоскость, $x = (x_1, x_2)$ – точка в $\mathbf{R}^2$, $S(x, r)$ – окружность радиуса $r > 0$ с центром в $x \in \mathbf{R}^2$ и $B(x, r)$ – круг с границей $\partial B(x, r) = S(x, r)$.

Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – область. Определим *абстрактную поверхность* Ω над областью D. Поверхность будет задана, если будут заданы элементы длин кривых, лежащих на ней, и ее элемент площади.

Обозначим через $\Gamma(D)$ множество всевозможных жордановых локально спрямляемых (в евклидовой метрике) дуг или кривых γ, лежащих в D. Будем считать также, что на каждой из γ указано направление (в частности, от одной концевой точки к другой). Каждая из замкнутых дуг $\gamma \in \Gamma(D)$ может быть задана в виде

$$x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)) : [0, \operatorname{length} \gamma] \to D\,,$$

где $0 \le s \le \operatorname{length} \gamma$ – евклидова длина дуги, отсчитываемой от начальной точки $x(0)$ до текущей точки $x(s)$ в указанном вдоль γ направлении. Локально спрямляемые дуги γ могут быть очевидным образом параметризованы посредством длины дуги, отсчитываемой от фиксированной точки в положительном и отрицательном направлениях вдоль γ.

Предположим, что вдоль каждой из дуг $\gamma \in \Gamma(D)$ задана некоторая неотрицательная, измеримая по Лебегу, вещественнозначная функция $h_\gamma(x)$. Совокупность всех таких функций для семейства дуг $\gamma \in \Gamma(D)$ будем обозначать символом $\mathcal{H} = \{h_\gamma\}$.

Будем говорить, что множество функций $\mathcal{H}$ *согласовано* в точке $a \in D$, если для всех кривых $\gamma \in \Gamma(D)$, проходящих через точку a в одном и том же направлении $\xi \in S(a, 1)$[1], значения $h_\gamma(a)$ совпадают.

Предположим, что множество функций $\mathcal{H}$ согласовано почти всюду в области D. Тем самым, для почти всех $x \in D$ и всех направлений $\xi \in S(x, 1)$ определена неотрицательная функция $H(x, \xi)$. Продолжим H по второй переменной на всю плоскость $\mathbf{R}^2$, пользуясь правилом $H(x, \lambda\,\xi) = \lambda\, H(x, \xi)$, $\lambda = \text{const} \ge 0$. В результате такого продолжения, для всякой $\gamma \in \Gamma(D)$ почти всюду вдоль нее выполнено

$$H(x, dx) = h_\gamma(x)\,|dx|\,. \tag{1.1.1}$$

Зафиксируем произвольно неотрицательную функцию σ, определенную почти всюду и измеримую в смысле Лебега в D.

Под *абстрактной поверхностью* Ω далее будем понимать всякую тройку (D, H, σ) описанного вида.

Величину

$$ds_\gamma = h_\gamma(x)\,|dx|\,, \tag{1.1.2}$$

будем называть *элементом длины дуги* $\gamma \in \Gamma(D)$ в точке $x \in D$, а величину

$$d\Omega = \sigma(x)\,dx_1 dx_2 \tag{1.1.3}$$

– *элементом площади* абстрактной поверхности Ω.

[1] То есть имеющих один и тот же касательный вектор в точке a.

Для произвольной пары точек $x', x'' \in D$ определим *расстояние*

$$r_\Omega(x', x'') = \inf \int\limits_\gamma ds_\gamma = \inf \int\limits_\gamma H(x, dx)\,, \tag{1.1.4}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным (ориентированным) дугам $\gamma \in \Gamma(D)$, ведущим из точки x' в точку x''.

Так как плотности $h_\gamma \in \mathcal{H}$ зависят от направления на дуге, то, вообще говоря, $r_\Omega(x', x'') \neq r_\Omega(x'', x')$. Таким образом, абстрактная поверхность моделирует анизотропную среду. При этом, абстрактная поверхность может также и обладать достаточно массивными множествами особых точек, что позволяет с ее помощью моделировать, например, среды с дислокациями[2]. Прекрасные рисунки поверхностей с особенностями, возникающими в синергетике и имеющими ячеистое строение, приводятся в монографии Г. Хакена [116, стр. 25, 326 и др.].

Многочисленные примеры физически содержательных абстрактных метрик можно найти в известной книге Ч.В. Мизнера, К.С. Торна, Д.А. Уилера [63], посвященной вопросам гравитации, а также монографии С. Чандрасекара [117], описывающей математическую теорию черных дыр. Интереснейшие примеры абстрактной поверхности доставляют, так называемые, λ-нормированные плоскости, для которых единичная окружность совпадает с правильным 2λ-угольником, одна из сторон которого лежит на оси абсцисс (см. Д.П. Ильютко [37]). Важными отличиями этих нормированных плоскостей от стандартной плоскости являются отсутствия гладкости единичной окружности и строгой выпуклости, ограничиваемого ею круга.

Ниже мы ограничимся лишь самыми простыми примерами, иллюстрирующими связи с обычной геометрией поверхностей.

Пример 1. Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – область и $E \subset D$ замкнутое относительно D подмножество нулевой линейной меры Хаусдорфа[3]. Пусть $H(x, \xi) \geq 0$ – непрерывная на $D \setminus E$ при любом $\xi \in \mathbf{R}^2$ функция. Для произвольной дуги $\gamma \in \Gamma(D)$ множество $\gamma \cap E$ имеет нулевую линейную меру Хаусдорфа и потому мы можем положить $h_\gamma(x) = H|_\gamma$. Выберем $\sigma(x) \equiv 1$.

Рассмотрим абстрактную поверхность $\Omega = (D, H, 1)$. Такие поверхности ниже обозначаются символом $(D, H(x, ds))$. Здесь расстояние

---

[2] О понятии дислокации см., например, С.К. Годунов, Е.И. Роменский [23, глава II]).

[3] Здесь и ниже символом $\mathrm{mes}_\alpha(E)$ $(0 < \alpha < \infty)$ обозначается α-мера Хаусдорфа множества E (см., например, [208, Ch. 2]).

$r_\Omega(x', x'')$ совпадает с точной нижней гранью величин

$$\int\limits_\gamma H(x,\, dx)\,,$$

где точная нижняя грань берется по всем дугам γ, соединяющих точки x', x'' в области D, и площадь измеримого подмножества $E \subset D$ подсчитывается стандартным образом

$$\mathrm{mes}_2\,(E) = \int\limits_E dx_1 dx_2\,.$$

$\square$

Пример 2. Пусть Ω – поверхность, задаваемая посредством локально липшицевого погруженния

$$f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^m\,, \quad m \geq 3\,.$$

Для произвольной дуги $\gamma \in \Gamma(D)$ сужение $f^* = f|_\gamma$ локально липшицево и потому абсолютно непрерывно вдоль γ. Тем самым, определен элемент длины дуги (1.1.2) , где

$$h_\gamma(x) = \left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)\,\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_j}{ds}\right)^{1/2}$$

и

$$g_{11} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2\,,\ g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right\rangle\,,\ g_{22} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2\,.$$

В качестве функции σ можно выбрать величину

$$\sigma = \sqrt{g}, \quad g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2\,.$$

$\square$

1.2 Псевдометрика

Функция $r_\Omega : D \times D \to \mathbf{R}$ является *псевдометрикой*. Напомним необходимые понятия [51, §21].

Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное непустое множество и пусть $r : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ – функция, обладающая свойствами:

$\alpha)$ $r(x, x) = 0$ и $r(x, y) \geq 0$ при всех $x, y \in \mathcal{X}$;
$\beta)$ $r(x, y) \leq r(x, z) + r(z, y)$ при всех $x, y, z \in \mathcal{X}$.

Пара $(\mathcal{X}, r)$ называется *псевдометрическим пространством,* а функция r – псевдометрикой. Заметим, что здесь мы не предполагаем выполнения симметрии псевдометрики r, то есть, в общем случае $r(x,y) \neq r(y,x)$.

На множестве $\mathcal{X}$ мы вправе ввести топологию, ассоциированную с псевдометрикой r, как топологию, определяемую системой окрестностей

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathcal{X} : r(x,y) < \varepsilon\}.$$

Тем самым, стандартным образом определяются предел функции $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ в точке, ее непрерывность, равномерная непрерывность и т.п. К примеру, последовательность $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, является фундаментальной относительно псевдометрики r тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > m > N(\varepsilon)$ выполнено $r(x_n, x_m) < \varepsilon$.

1.3 Расстояние r_Ω как метрика Финслера

Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – область. Рассмотрим абстрактную поверхность $\Omega = (D, H, \sigma)$. Предположим, что $H(x, \xi)$ – функция, определенная для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbf{R}^2$, подчинена условиям:

a) $c_1|\xi| \leq H(x,\xi) \leq c_2|\xi|$, $\;c_1(D'), c_2(D') = \mathrm{const} > 0$, почти всюду в каждой из подобластей $D' \subset\subset D$;

b) почти в каждой точке $x \in D$ множество

$$\Xi(x) = \{\xi \in \mathbf{R}^2 : H(x,\xi) < 1\}$$

является выпуклым.

Определим двойственную функцию

$$G(x,\eta) = \sup_{\xi \in \Xi(x)} \langle \xi, \eta \rangle, \tag{1.3.5}$$

где $\langle \xi, \eta \rangle$ есть стандартное скалярное произведение векторов ξ и η в $\mathbf{R}^2$.

Положим

$$G^+(x) = \sup_{|\eta|=1} \sup_{G(x,\xi)=1} \langle \xi, \eta \rangle.$$

Несложно проверить, что функция $G(x,\eta)$ обладает свойствами a) и b). При этом почти всюду в D выполнено

$$G(x,\xi) = \sup_{\eta : H(x,\eta) \neq 0} \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{H(x,\eta)} \tag{1.3.6}$$

(см. [99, §15]).

В общем случае функция $G(x,\eta)$ принимает на $D \times \mathbf{R}^2$ значения из $\overline{\mathbf{R}}$. Бесконечные значения $G(x,\eta)$ возникают в случаях, когда выпуклое множество $\Xi(x)$ неограничено. С другой стороны, несложно усмотреть, что множество $\Xi(x)$ ограничено тогда и только тогда, когда $G^+(x) < +\infty$.

Пример 3. Пусть $\{e_1, e_2\}$ – стандартный ортонормальный базис в $\mathbf{R}^2$ и $H(x,\xi) = |\langle e_1, \xi\rangle|$. Тогда

$$\Xi(x) = \{\xi : |\langle e_1, \xi\rangle| < 1\} = \{\xi \in \mathbf{R}^2 : |\xi_1| < 1\}.$$

Здесь двойственная функция имеет вид

$$G(x,\eta) = \begin{cases} |\eta_1| & \text{при } \ \eta_2 = 0\,, \\ +\infty & \text{при } \ \eta_2 \neq 0\,, \end{cases}$$

принимая бесконечные значения. Функция $G^+(x) \equiv +\infty$. □

Теорема 1.3.1. *Если H удовлетворяет условиям a) и b), то функция r_Ω обладает свойствами α) и β) псевдометрики.*

Доказательство. Выполнение условия α) очевидно. Покажем, что выполняется также и условие β). Пусть $x, y, z \in D$ и пусть

$$r_\Omega(x,z), \quad r_\Omega(z,y) < \infty\,.$$

Фиксируем произвольно $\epsilon > 0$. Найдем дуги $\gamma_i(t) : [0,1] \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2$, для которых

$$\gamma_1(0) = x, \quad \gamma_1(1) = z, \quad \int\limits_0^1 H(\gamma_1(t), \dot\gamma_1(t))\, dt < r_\Omega(x,z) + \frac{\epsilon}{2}$$

и

$$\gamma_2(0) = z, \quad \gamma_2(1) = y, \quad \int\limits_0^1 H(\gamma_2(t), \dot\gamma_2(t))\, dt < r_\Omega(z,y) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Положим

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{при } \ t \in [0, \frac{1}{2})\,, \\[2ex] \gamma_2(2t-1) & \text{при } \ t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Тогда, в силу однородности $H(x,\xi)$ по переменной ξ,

$$\begin{aligned} r_\Omega(x,y) &\le \int\limits_0^1 H(\gamma_3(t),\dot\gamma_3(t))\,dt = \\ &= \int\limits_0^1 H(\gamma_1(t),\dot\gamma_1(t))\,dt + \int\limits_0^1 H(\gamma_2(t),\dot\gamma_2(t))\,dt \le \\ &\le r_\Omega(x,z) + r_\Omega(z,y) + \epsilon. \end{aligned}$$

В силу произвола в выборе $\epsilon > 0$ приходим к аксиоме треугольника. В случае обращения в $+\infty$ одной из величин $r_\Omega(x,z)$, $r_\Omega(z,y)$ неравенство α) очевидно. $\square$

Элемент площади в *финслеровой псевдометрике* выбирается неоднозначно (см., например, [100, глава I, §8]). Тем самым, выбор функции σ для Ω в общем случае также неоднозначен.

В случае, когда $H(x,\xi) = |\xi|$, $\sigma \equiv 1$ и

$$r_\Omega(x,y) = \inf_\gamma \int\limits_0^1 |\gamma'(t)|\,dt = \inf_\gamma \int\limits_\gamma |dx|\,, \tag{1.3.7}$$

метрику $r_\Omega(x,y)$ часто называют *внутренней метрикой* (или *расстоянием Мазуркевича*) в области D.

Относительно решений уравнения $H(x,\nabla u) \equiv 1$ см. [181] и ссылки.

1.4 Граница абстрактной поверхности

Полезно дать описание границы абстрактной поверхности. Вообще говоря, граница области в топологии определяется неоднозначным образом, а способ ее введения зависит от задачи, которую она обслуживает. Здесь мы рассмотрим простейший способ – границу как результат пополнения Ω по финслеровой псевдометрике.

Пусть D – область в $\mathbf{R}^2$. Рассмотрим абстрактную поверхность $\Omega = (D,H,\sigma)$. Пусть $r_\Omega(x_1,x_2)$ – финслерова псевдометрика, определяемая соотношением (1.1.4).

Мы будем обозначать символом D_r пополнение области D по псевдометрике r_Ω. Именно, символом D_r мы обозначаем совокупность всевозможных классов эквивалентности фундаментальных по псевдометрике r_Ω последовательностей точек $\{a_n\}$ в области D. Далее, пусть $\partial D_r = D_r \setminus D$ – граница D относительно псевдометрики r.

Граничные значения $\varphi : \partial D_r \to \mathbf{R}$ функции f, определенной в области $D \subset \mathbf{R}^2$, понимаем как пределы f по псевдометрике r_Ω в том смысле, что для всякой точки $x \in \partial D_r$ величина

$$\varphi(x) = \lim_{y \to x,\, y \in D} f(y)\,,$$

если этот предел существует.[4]

В общем случае каких-либо связей между предельными значениями функции $\varphi : D \to \mathbf{R}$ в евклидовом смысле $\varphi|_{\partial D}$ и псевдометрическом смысле $\varphi|_{\partial D_r}$ не имеется.

Относительно сравнения евклидовой границы ∂D области $D \subset \mathbf{R}^2$ с границей ∂D_r см. [153, раздел **4**].

1.5 Модуль семейства кривых на поверхности

Опишем важное для дальнейшего понятие *модуля семейства дуг* на абстрактной поверхности. Пусть $\Omega = (D, H, \sigma)$ – абстрактная поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbf{R}^2$.

Будем говорить, что неотрицательная, локально ограниченная, измеримая по Лебегу функция $\rho \geq 0$ *допустима* для подсемейства Γ дуг $\gamma \in \Gamma(D)$, если ρ измерима вдоль каждой из дуг $\gamma \in \Gamma$ и

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds_\gamma \geq 1 \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \Gamma\,. \tag{1.5.8}$$

Величина

$$\operatorname{mod}_\Omega(\Gamma) = \inf_{\rho} \int\limits_{D} \rho^2\, d\Omega\,, \tag{1.5.9}$$

где точная нижняя грань берется по всем допустимым для Γ функциям ρ, называется *модулем семейства* Γ.

Иногда вместо модуля семейства дуг используют величину

$$\frac{1}{\operatorname{mod}_\Omega(\Gamma)}\,,$$

[4]При этом $y \to x$ тогда и только тогда, когда $r_\Omega(x,y) \to 0$.

называемую *экстремальной длиной* семейства Γ.

В случае, когда метрика $ds_\gamma = |dx|$ евклидова и элемент площади $d\Omega = dx_1 dx_2$ (см. пример 1), используется упрощенное обозначение $\operatorname{mod}\Gamma$.

Отметим следующее полезное свойство.

Теорема 1.5.1. *Для произвольного семейства дуг $\Gamma \subset \Gamma(D)$ выполнено*

$$\operatorname{mod}_\Omega \Gamma = \inf \frac{\int\limits_D \rho^2(x)\, d\Omega}{\left(\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_\gamma \rho(x)\, ds_\gamma\right)^2}, \tag{1.5.10}$$

где точная нижняя грань берется по всем неотрицательным, измеримым по Лебегу в D функциям ρ, измеримым также и вдоль любой дуги $\gamma \in \Gamma$.

Доказательство. Действительно, какова бы ни была неотрицательная, измеримая по Лебегу в D функция ρ, измеримая и вдоль любой дуги $\gamma \in \Gamma$, легко видеть, что

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho(x)}{\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_\gamma \rho(x)\, ds_\gamma}$$

также является допустимой для Γ. Таким образом,

$$\operatorname{mod}_\Omega \Gamma \le \left(\int\limits_D \rho^2(x)\, d\Omega\right) \left(\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_\gamma \rho(x)\, ds_\gamma\right)^{-2}.$$

Переходя к точной нижней грани в правой части этого неравенства, в силу указанного произвола в выборе ρ имеем

$$\operatorname{mod}_\Omega \Gamma \le \inf_\rho \frac{\int\limits_D \rho^2(x)\, d\Omega}{\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_\gamma \rho(x)\, ds_\gamma}. \tag{1.5.11}$$

Обратно, пусть ρ – произвольная допустимая для Γ функция. Тогда

$$\inf_{\gamma\in\Gamma}\int\limits_{\gamma}\rho(x)\,ds_{\gamma}\geq 1$$

и потому

$$\frac{\int\limits_{D}\rho^2(x)\,d\Omega}{\left(\inf_{\gamma\in\Gamma}\int\limits_{\gamma}\rho(x)\,ds_{\gamma}\right)^2}\leq\int\limits_{D}\rho^2(x)\,d\Omega\,.$$

Переходя к точной нижней грани по всем допустимым функциям ρ сначала в левой, а затем в правой части неравенства, находим

$$\inf_{\rho}\frac{\int\limits_{D}\rho^2(x)\,d\Omega}{\left(\inf_{\gamma\in\Gamma}\int\limits_{\gamma}\rho(x)\,ds_{\gamma}\right)^2}\leq \mathrm{mod}_{\Omega}\Gamma\,.$$

Сопоставляя с неравенством (1.5.11), убеждаемся в справедливости соотношения (1.5.10). □

Приведем в удобной для использования форме некоторые свойства введенной величины, хорошо известные для евклидовой метрики [3], [125]. Пусть $\Omega=(D,H,\sigma)$ – абстрактная поверхность и пусть Γ_1 и Γ_2 – произвольные подсемейства кривых семейства $\Gamma(D)$. Если $\gamma_1\in\Gamma_1$, $\gamma_2\in\Gamma_2$, то, следуя Альфорсу [3, глава I, раздел **D**], обозначим через $\gamma_1+\gamma_2$ кривую[5], полученную из γ_1 посредством продолжения ее кривой γ_2. Символ $\Gamma_1+\Gamma_2$ означает, что каждая кривая $\gamma_1\in\Gamma_1$ продолжается некоторой кривой $\gamma_2\in\Gamma_2$ и обратно. Символ $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ означает обычное теоретико-множественное объединение семейств. Если Γ_1 и Γ_2 расположены в непересекающихся измеримых множествах, то, как легко видеть,

$$\frac{1}{\mathrm{mod}_{\Omega}\,(\Gamma_1+\Gamma_2)}\geq\frac{1}{\mathrm{mod}_{\Omega}\,\Gamma_1}+\frac{1}{\mathrm{mod}_{\Omega}\,\Gamma_2}\tag{1.5.12}$$

и

$$\mathrm{mod}_{\Omega}\,(\Gamma_1\cup\Gamma_2)=\mathrm{mod}_{\Omega}\,\Gamma_1+\mathrm{mod}_{\Omega}\,\Gamma_2\,.\tag{1.5.13}$$

[5]Здесь, как и в [3], можно также расширять понятие кривой, допуская не обязательно связные и не обязательно жордановы дуги или кривые.

Для произвольной пары Γ_1 и Γ_2 выполнено

$$\operatorname{mod}_\Omega(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leq \operatorname{mod}_\Omega \Gamma_1 + \operatorname{mod}_\Omega \Gamma_2 \,. \tag{1.5.14}$$

Отметим следующий важный *принцип симметрии.* Пусть $\mathbf{H}$ – верхняя полуплоскость в $\mathbf{R}^2$. Если Γ – семейство дуг (или кривых) в $\mathbf{H}$, то символом $\overline{\Gamma}$ будем обозначать семейство $\{\overline{\gamma}\}$ всевозможных локально спрямляемых дуг (или кривых), лежащих в нижней полуплоскости и симметричных $\gamma \in \Gamma$ относительно горизонтальной оси.

Теорема 1.5.2. *Для произвольного семейства дуг* $\Gamma \subset \mathbf{H}$ *выполнено*

$$\operatorname{mod}(\Gamma) = 2 \operatorname{mod}\left(\Gamma + \overline{\Gamma}\right). \tag{1.5.15}$$

Доказательство. Данное утверждение есть переформулировка теоремы 5 главы I [3]. □

Упражнение. Сформулировать и доказать соответствующее утверждение для кривых на абстрактной поверхности Ω.

1.6 Вычисление модуля

Рассмотрим несколько примеров вычисления модуля семейств дуг в евклидовой плоскости.

Пример 4. Пусть R – прямоугольник со сторонами длин a, b, параллельными осям координат Ox_1, Ox_2. Пусть Γ – семейство всевозможных дуг, соединяющих вертикальные стороны (длины b).

Вычислим модуль данного семейства. Возьмем произвольную функцию $\rho(x_1, x_2)$, допустимую для семейства Γ. Обозначим через l_y прямолинейный отрезок в R, расположенный горизонтально (параллельно оси Ox_1) на высоте $0 < y < b$. Так как ρ допустима для Γ, то

$$1 \leq \int\limits_{l_y} \rho(x_1, x_2)\,|dx| = \int\limits_0^a \rho(x_1, y)\, dx_1 \,.$$

В силу неравенства Коши,

$$\int\limits_0^a \rho\, dx_1 \leq \left(\int\limits_0^a dx_1\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^a \rho^2(x_1, y)\, dx_1\right)^{1/2} .$$

Таким образом,

$$\int_0^a \rho^2(x_1, y)\, dx_1 \geq \frac{1}{a}$$

и мы получаем

$$\begin{aligned}\int_R \rho^2(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 &= \int_0^b dx_2 \int_0^a \rho^2\, dx_1 \geq \\ &\geq \frac{1}{a}\int_0^b dx_2 = \frac{b}{a}\,.\end{aligned}$$

Переходя здесь к точной нижней грани по всем допустимым для Γ функциям ρ, приходим к соотношению

$$\operatorname{mod}\Gamma \geq \frac{b}{a}\,. \tag{1.6.16}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\rho_0(x_1, x_2) = \frac{1}{a}\,.$$

Она допустима для Γ, ибо для всякой дуги $\gamma \in \Gamma$ выполнено

$$\int_\gamma \frac{1}{a}\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2} = \frac{1}{a}\int_\gamma \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2} \geq \frac{1}{a}\,\mathrm{length}(\gamma) \geq 1\,.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}\Gamma &\leq \int_R \rho_0^2\, dx_1 dx_2 = \\ &= \int_R \frac{1}{a^2} dx_1 dx_2 = \frac{b}{a}\,.\end{aligned}$$

Сопоставляя найденное соотношение с неравенством (1.6.16), приходим к равенству

$$\operatorname{mod}\Gamma = \frac{b}{a}\,. \tag{1.6.17}$$

Аналогично, для модуля семейства $\widetilde{\Gamma}$ дуг, соединяющих горизонтальные стороны в R, имеем

$$\operatorname{mod}\widetilde{\Gamma} = \frac{a}{b}$$

и, в силу (1.6.17), приходим к важному соотношению

$$\operatorname{mod}\Gamma \operatorname{mod}\widetilde{\Gamma} = 1\,. \tag{1.6.18}$$

□

Пример 5. Рассмотрим круговое кольцо

$$K = \{(x_1, x_2) : 0 < r < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R\}\,.$$

Пусть Γ – семейство всевозможных спрямляемых дуг γ, лежащих в K и соединяющих граничные окружности.

Вычислим модуль этого семейства. Обозначим через l_θ радиальный отрезок, заключенный между граничными окружностями и выходящий из начала координат под углом θ к оси Ox_1. Для всякой допустимой для Γ функции $\rho(x_1, x_2)$ имеем

$$\begin{aligned} 1 \quad &\le \int\limits_{l_\theta} \rho\,|dx| = \int\limits_r^R \rho(t\cos\theta, t\sin\theta)\,dt \le \\ &\le \left(\int\limits_r^R \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \left(\int\limits_r^R \rho^2\,t\,dt\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда,

$$\int\limits_r^R \rho^2\,t\,dt \ge \frac{1}{\ln\dfrac{R}{r}}\,.$$

Интегрируя по θ от 0 до 2π, находим

$$\int\limits_K \rho^2(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_r^R \rho^2(te^{i\theta})\,tdt \ge \frac{2\pi}{\ln\frac{R}{r}}\,,$$

а потому, в силу произвола в выборе ρ,

$$\operatorname{mod}\Gamma \ge 2\pi\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-1}\,. \tag{1.6.19}$$

Для доказательства обратного неравенства выберем функцию

$$\rho_0(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{-1} .$$

Эта функция допустима для Γ, поскольку

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{\ln \frac{R}{r}} \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{\ln \frac{R}{r}} \int\limits_{\gamma} \frac{|dx|}{|x|} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\ln \frac{R}{r}} \int\limits_{r}^{R} \frac{dt}{t} = 1 .$$

Поэтому

$$\operatorname{mod} \Gamma \leq \int\limits_{K} \rho_0^2 \, dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 \frac{R}{r}} \int\limits_{K} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^2} = \frac{2\pi}{\ln \frac{R}{r}} .$$

Сопоставляя с (1.6.19), приходим к соотношению

$$\operatorname{mod} \Gamma = \frac{2\pi}{\ln \frac{R}{r}} . \tag{1.6.20}$$

□

Пример 6. Пусть $\widetilde{\Gamma}$ – семейство замкнутых жордановых кривых, лежащих в K и разделяющих граничные окружности. Вычислим модуль этого семейства.

Обозначим через C_t, $r < t < R$, окружность $x_1^2 + x_2^2 = t^2$. Для всякой допустимой для $\widetilde{\Gamma}$ функции ρ имеем

$$
\begin{aligned}
1 \quad & \le \int\limits_{C_t} \rho(x)\,|dx| = \int\limits_0^{2\pi} \rho(te^{i\theta})\,td\theta \le \\
& \le \left(\int\limits_0^{2\pi} \rho^2\,d\theta\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{2\pi} t^2\,d\theta\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

откуда

$$\int\limits_0^{2\pi} \rho^2(te^{i\theta})\,d\theta \ge \frac{1}{2\pi t^2}\,.$$

Таким образом, мы находим

$$
\begin{aligned}
\int\limits_K \rho^2\,dx_1dx_2 \; & = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_r^R \rho^2\,t\,dtd\theta = \\
& = \int\limits_r^R t\,dt \int\limits_0^{2\pi} \rho^2\,d\theta \ge \\
& \ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_r^R \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{r}\,.
\end{aligned}
$$

В силу произвола в выборе допустимой функции ρ, приходим к соотношению

$$\operatorname{mod}\widetilde{\Gamma} \ge \frac{1}{2\pi}\,\ln\frac{R}{r}\,. \tag{1.6.21}$$

Положим

$$\rho_0(x_1,x_2) = \left(2\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^{-1}\,.$$

Для произвольной кривой $\gamma \in \Gamma$ имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} \rho_0\,|dx| &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{|dx|}{|x|} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{\sqrt{dt^2+t^2d\theta^2}}{t} \geq \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{t|d\theta|}{t} \geq 1\,.\end{aligned}$$

Отсюда,

$$\operatorname{mod}\widetilde{\Gamma} \leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{K}\frac{dx_1dx_2}{|x|^2} = \frac{1}{2\pi}\,\ln\frac{R}{r}\,.$$

Сопоставляя данное неравенство с неравенством (1.6.21), получаем

$$\operatorname{mod}\widetilde{\Gamma} = \frac{1}{2\pi}\,\ln\frac{R}{r}\,. \tag{1.6.22}$$

Отметим соотношение

$$\operatorname{mod}\widetilde{\Gamma} = \frac{1}{\operatorname{mod}\Gamma}\,, \tag{1.6.23}$$

вытекающее из (1.6.20) и (1.6.22). □

1.7 Оценка модуля в финслеровой метрике

Пусть, как и в примере 5, K – круговое кольцо радиусов $0 < r < R < \infty$. Пусть $\Gamma \subset \Gamma(K)$ – семейство локально спрямляемых дуг в K, соединяющих граничные окружности.

Обозначим через $l_\theta \in \Gamma$ радиальный отрезок, заключенный между граничными окружностями и расположенный под углом θ к оси Ox_1.

Предположим, что над областью K задана абстрактная поверхность $\Omega = (D, H, \sigma)$. Оценим $\operatorname{mod}_\Omega \Gamma$.

Возьмем произвольную допустимую для Γ функцию $\rho(x)$. Для произвольной дуги $l_\theta \in \Gamma$, в силу (1.1.1) имеем

$$1 \le \int\limits_{l_\theta} \rho\, ds_{l_\theta} = \int\limits_r^R \rho(\tau\, e^{i\theta})\, H(\tau\, e^{i\theta},\, e^{i\theta})\, d\tau$$

(здесь обозначено $x = \tau\, e^{i\theta}$).

Отсюда и из неравенства

$$\int\limits_r^R \rho H(\tau\, e^{i\theta},\, e^{i\theta})\, d\tau \le \left(\int\limits_r^R \frac{H^2\, d\tau}{\tau\sigma} \right)^{1/2} \left(\int\limits_r^R \rho^2\, \sigma(\tau\, e^{i\theta})\, \tau\, d\tau \right)^{1/2}$$

вытекает, что

$$\int\limits_K \rho^2\, \sigma\, dx_1 dx_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_r^R \rho^2 \sigma\, \tau\, d\tau \ge \int\limits_0^{2\pi} d\theta \Bigg/ \int\limits_r^R \frac{H^2\, d\tau}{\tau\, \sigma}\,.$$

В силу произвола ρ заключаем, что

$$\int\limits_0^{2\pi} d\theta \Bigg/ \int\limits_r^R \frac{H^2(\tau\, e^{i\theta},\, e^{i\theta})\, d\tau}{\tau\, \sigma(\tau\, e^{i\theta})} \le \operatorname{mod}_\Omega \Gamma\,. \tag{1.7.24}$$

Аналогично, для семейства замкнутых жордановых кривых $\widetilde{\Gamma}$, разделяющих граничные окружности кругового кольца K, имеет место оценка

$$\int\limits_r^R \frac{d\tau}{\tau} \Bigg/ \int\limits_0^{2\pi} \frac{H^2(\tau\, e^{i\theta},\, e^{i\theta})\, d\theta}{\sigma(\tau\, e^{i\theta})} \le \operatorname{mod}_\Omega \widetilde{\Gamma}\,. \tag{1.7.25}$$

Тем самым приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.7.1. *Если область K есть круговое кольцо описанного вида и $\Omega\,(K, H, \sigma)$ – абстрактная поверхность над K, то для модуля семейства Γ дуг, соединяющих граничные окружности в K, и для модуля семейства $\widetilde{\Gamma}$ замкнутых жордановых кривых, разделяющих в K граничные окружности, справедливы, соответственно, оценки* (1.7.24), (1.7.25).

Замечание. Предположим, что

$$H(x,\xi) = \left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \right)^{1/2},$$

а коэффициенты g_{ij} $(i,j=1,2)$ измеримы в K и для всякой подобласти $K' \subset\subset K$ для почти всех $x \in K'$ и всех $\xi \in \mathbf{R}^2$ выполнено

$$c_1(K')\,|\xi| \le H(x,\xi) \le c_2(K')\,|\xi|\,, \tag{1.7.26}$$

где $0 < c_1(K')$, $c_2(K') < \infty$ – постоянные.

При данных условиях могут быть указаны двусторонние оценки $\mathrm{mod}_\Omega\Gamma$. Ниже, в теореме 3.7.2 будет показано, что посредством подходящего квазиконформного гомеоморфизма $y = \varphi(x) : K \to \mathbf{R}^2$ метрика ds^2_Ω может быть преобразована к конформно – евклидову виду, т.е. в метрику вида

$$ds^2 = \lambda^2(y)\,|dy|^2\,,$$

где $\lambda(y)$ – некоторая положительная измеримая функция.

При таком отображении для всякого семейства дуг $\Gamma \subset K$ выполнено

$$\mathrm{mod}_\Omega\Gamma = \mathrm{mod}\,\varphi(\Gamma)\,. \tag{1.7.27}$$

В случае конформно – евклидовой метрики в силу (1.6.23) имеем

$$\mathrm{mod}\,\varphi(\Gamma) = 1/\mathrm{mod}\,\widetilde{\varphi(\Gamma)}\,.$$

Отсюда, на основании (1.7.27) заключаем, что аналогичное соотношение верно и для модуля в метрике $d^2_\Omega s$, а потому, пользуясь (1.7.24) и (1.7.25), мы прийдем к двусторонней оценке для $\mathrm{mod}_\Omega\Gamma$:

$$\left(\int\limits_r^R \frac{d\tau}{\tau \int\limits_0^{2\pi} \frac{H^2(\tau\, e^{i\theta},\ e^{i\theta})\, d\theta}{\sigma(\tau\, e^{i\theta})}} \right)^{-1} \ge \mathrm{mod}_\Omega\Gamma \ge \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\int\limits_r^R \frac{H^2(\tau\, e^{i\theta},\ e^{i\theta})\, d\tau}{\tau\, \sigma(\tau\, e^{i\theta})}}\,.$$

При $H(x,\xi) = |\xi|$ и $\sigma \equiv 1$ величины в левой и правой частях неравенства совпадают и мы приходим к известной формуле (1.6.20) для модуля кругового кольца на евклидовой плоскости. □

Задача. Доказать аналогичную двустороннюю оценку для $\mathrm{mod}_\Omega\Gamma$ без предположения о специальном виде $H(x,\xi)$ и без использования вспомогательных квазиконформных отображений.

1.8 Конденсатор на поверхности

Пусть $P, Q \subset D$ – непустые, замкнутые относительно области $D \subset \mathbf{R}^2$, непересекающиеся подмножества. Произвольную тройку $(P, Q; D)$ будем называть *конденсатором.*

Определим *модуль и емкость конденсатора* $(P, Q; D)$.

Рассмотрим абстрактную поверхность $\Omega = (D, H, \sigma)$. Пусть $G(x, \eta)$ – двойственная к $H(x, \xi)$ функция, определяемая равенством (1.3.5).

Модулем (или Ω-модулем) конденсатора $(P, Q; D)$ на поверхности $\Omega = (D, H, \sigma)$ называется модуль семейства $\Gamma(P, Q; D) \subset \Gamma(D)$ дуг γ, лежащих в D и соединяющих множества P и Q. Именно, мы полагаем

$$\operatorname{mod}_\Omega(P, Q; D) = \operatorname{mod}_\Omega \Gamma(P, Q; D)\,. \tag{1.8.28}$$

Емкостью (или Ω-емкостью) конденсатора $(P, Q; D)$ на поверхности $\Omega = (D, H, \sigma)$ будем называть величину

$$\operatorname{cap}_\Omega(P, Q; D) = \inf \int\limits_D G^2(x, \nabla\varphi)\, \sigma\, dx_1 dx_2\,, \tag{1.8.29}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным локально липшицевым в D функциям φ, $\varphi|_P = 0$, $\varphi|_Q = 1$.

Модуль и емкость конденсатора являются двойственными величинами. Они совпадают в случаях евклидовой (см. Б. Фюгледе [148]) и римановой (см. В.М. Миклюков [73], Ю.В. Дымченко [32]) метрик, и выражаются одна через другую при подходящем выборе H, G и σ в случае финслеровой метрики (см. В.Г. Ткачев, А.Н. Ушаков [112]). Выбор между модулем и емкостью в исследовании диктуется, как правило, соображениями удобства.

Теорема 1.8.1. *Пусть $\Omega = (D, H, \sigma)$ – абстрактная поверхность. Если $\Delta \subset D$ – подобласть, то*

$$\operatorname{cap}_\Omega(P,\ Q;\ \Delta) = \operatorname{mod}_\Omega(P,\ Q;\ \Delta) \tag{1.8.30}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ – произвольная функция, допустимая в вариационной задаче (1.8.29). Положим

$$\Lambda(x) = \overline{\lim_{y \to x}} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{|y - x|}\,.$$

Согласно теореме Радемахера[6] $\varphi(x)$ имеет полный дифференциал почти всюду в области ([144, **3.1.6.**]). Положим

$$H_-(x) = \min_{|\xi|=1} H(x, \xi)\,.$$

[6]Теорема (Радемахер). *Всякое локально липшицево в области отображение f*

Обозначим через $\rho(x)$ функцию, совпадающую с функцией $G(x, \nabla\varphi)$ в точках дифференцируемости $\varphi(x)$, принадлежащих Δ, с функцией $\Lambda(x)\,/H_{-}(x)$ – в точках недифференцируемости $\varphi(x)$, принадлежащих Δ, и обращающуюся в 0 на $D \setminus \Delta$.

Покажем, что $\rho(x)$ является допустимой для семейства $\Gamma(P, Q; \Delta)$. Чтобы убедится в этом, заметим, что из соотношения (1.3.6) в каждой точке дифференцируемости функции $\varphi(x)$ выполнено

$$\begin{aligned} |\varphi_{x_1}\,dx_1 + \varphi_{x_2}\,dx_2| &= |\langle \nabla\varphi, dx\rangle| \leq \\ &\leq G(x, \nabla\varphi)\,H(x, dx)\,, \end{aligned}$$

а потому в точках дифференцируемости $\varphi(x)$:

$$|d\varphi(x)| \leq \rho(x)\,H(x, dx)\,. \tag{1.8.31}$$

В каждой же точке недифференцируемости $\varphi(x)$ имеем

$$\Lambda(x)\,|dx| = \rho(x)\,H_{-}(x)\,|dx| \leq \rho(x)\,H(x, \frac{dx}{|dx|})\,|dx|\,.$$

Отсюда и из соотношения (1.8.31) для любой дуги $\gamma \in \Gamma(P, Q; \Delta)$ следует

$$\int\limits_{\gamma} \rho\,ds_{\Omega} \geq \int\limits_{\gamma} |d\varphi(x)| \geq 1\,.$$

Таким образом,

$$\mathrm{mod}_{\Omega}(P, Q; \Delta) \leq \int\limits_{\Delta} G(x, \nabla\varphi)\,\sigma(x)\,dx_1\,dx_2$$

и мы получаем

$$\mathrm{mod}_{\Omega}(P, Q; \Delta) \leq \mathrm{cap}_{\Omega}(P, Q; \Delta)\,.$$

Для доказательства противоположного неравенства предположим сначала, что $\rho(x)$ допустима для семейства $\Gamma(P, Q; \Delta)$, удовлетворяет (1.5.8) для любой кривой в Δ, соединяющей P и Q. Положим

$$\varphi^{*}(x) = \int\limits_{\gamma(x)} \rho\,ds_{\Omega}$$

почти всюду дифференцируемо [144, теорема 3.1.6]. Имеется и более общее утверждение. Теорема (Степанов). *Если отображение f почти всюду в области обладает свойством $\overline{\lim\limits_{y\to x}}\,|f(y) - f(x)|/|y - x| < \infty$, то f почти всюду дифференцируемо в этой области* [144, теорема 3.1.9].

где нижняя грань берется по всем дугам $\gamma(x)$, соединяющим точку $x \in \Delta$ с множеством P в Δ.

Так как $\rho(x)$ локально ограничена в Δ, то функция

$$\varphi(x) = \min\{1, \varphi^*(x)\}$$

принадлежит классу $\mathrm{Lip}D$. Условие (1.5.8) влечет, что $\varphi(x)$ обращается в 0 и 1, соответственно, на множествах P и Q. Если мы покажем, что почти всюду в Δ выполнено

$$G(x, \nabla\varphi) \leq \rho(x)\,, \tag{1.8.32}$$

то

$$\mathrm{cap}_\Omega(P, Q; \Delta) \leq \int\limits_\Delta \rho^2\, \sigma dx_1 dx_2\,,$$

откуда

$$\mathrm{cap}_\Omega(P, Q; \Delta) \leq \mathrm{mod}_\Omega(P, Q; \Delta)$$

и равенство (1.8.30) будет доказано.

Чтобы установить справедливость (1.8.32), заметим, что $\varphi(x)$ имеет полный дифференциал почти всюду в D, а согласно известной теореме Лебега для почти всех точек $y \in D$ выполнено

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \int\limits_{|x-y|<r} |\rho(x) - \rho(y)|\, dx_1\, dx_2 = 0\,. \tag{1.8.33}$$

Поэтому нам достаточно проверить (1.8.32) лишь на множестве, где имеет место каждое из отмеченных свойств. Пусть y – произвольная точка этого множества, в которой $0 < \varphi(y) < 1$, и пусть $\gamma(y, \theta)$ – отрезок длины h, выходящий из точки y под углом θ к прямой $x_1 = 0$. Тогда

$$|\varphi_{x_1}(y)\cos\theta + \varphi_{x_2}(y)\sin\theta| \leq \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{\gamma(y,\theta)} \rho\, ds_F \tag{1.8.34}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int\limits_{\gamma(y,\theta)} \rho\, ds_\Omega \;&\leq \rho(y)\, \frac{1}{h} \int\limits_{\gamma(y,\theta)} H(\tau\, e^{i\theta},\, e^{i\theta})\, d\tau + \\ &+ \frac{1}{h} \int\limits_{\gamma(y,\theta)} |\rho(\tau\, e^{i\theta}) - \rho(y)|\, H(\tau\, e^{i\theta},\, e^{i\theta})\, d\tau\,. \end{aligned} \tag{1.8.35}$$

Полагая h достаточно малым и интегрируя по θ, будем иметь

$$\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_{\gamma(y,\theta)} |\rho(\tau\, e^{i\theta}) - \rho(y)|\, H(\tau\, e^{i\theta},\, e^{i\theta})\, d\tau \leq$$

$$\leq c_1 \int\limits_{|x-y|<h} |\rho(x) - \rho(y)| \frac{dx_1 dx_2}{|x-y|} \leq$$

$$\leq c_2 h^{1/3} \left(\int\limits_{|x-y|<h} |\rho(x) - \rho(y)|^3 dx_1 dx_2 \right)^{1/3}$$

где c_1, c_2 – некоторые постоянные. Отсюда, учитывая локальную ограниченность функции $\rho(x)$ и равенство (1.8.33), получаем

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_0^{2\varphi} d\theta \int\limits_{\gamma(y,\theta)} |\rho(x) - \rho(y)| ds_F = 0$$

и для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$ выполнено

$$\underline{\lim}_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{\gamma(y,\theta)} |\rho(x) - \rho(y)| ds_F = 0$$

Таким образом, из (1.8.34) и (1.8.35) для почти всех и, следовательно, для всех направлений θ в точке y имеем

$$|\varphi_{x_1} \cos\theta + \varphi_{x_2} \sin\theta| \leq \rho(y)\, H(y, e^{i\theta})\,.$$

Сопоставляя данное соотношение с (1.3.6), убеждаемся в справедливости (1.8.32) при $0 < \varphi(y) < 1$.

Пусть теперь R – множество точек $x \in D$, в которых $\varphi(x) = 1$, и пусть T – такое его подмножество, в каждой точке которого контингенция множества R не является полной плоскостью. Множество R имеет нулевую меру (см. [101] стр. 384), а в каждой точке дифференцируемости $\varphi(x)$, принадлежащей множеству $R \setminus T$, выполнено $\nabla\varphi = 0$ и тем самым (1.8.32). Те же аргументы пригодны для точек множества Q, где $\varphi(x) = 0$, и неравенство (1.8.32) полностью доказано. □

1.9 Принцип длины и площади

Докажем специальный вариант знаменитого "принципа длины и площади", широко используемого в теории функций и отображений с обобщенными производными (см., например, Р. Курант [50, §4, глава I], Ж. Лелон-Ферран [182, p. 7], Г.Д. Суворов [106, с. 252 – 260], В.М. Миклюков [68], Б.П. Куфарев [52] и др.). Следующая версия принадлежит А.А. Клячину и В.М. Миклюкову.

Рассмотрим абстрактную поверхность $\Omega = (D, H, \sigma)$, заданную над областью $D \subset \mathbf{R}^2$. Пусть P, Q – подмножества области D, замкнутые в D и обладающие свойством $P \cap Q = \emptyset$. Пусть $\varphi : G \to \mathbf{R}$ — локально липшицева функция со свойствами: $\varphi|_P = 0$, $\varphi|_Q = 1$ и

$$\operatorname{ess}\inf_U |\nabla\varphi| > 0 \quad \text{для любого} \quad U \subset\subset D\,. \tag{1.9.36}$$

Обозначим через $E_t = \{x \in D : \varphi(x) = t\}$ множество t-уровня функции φ. В силу [144, теорема **3.2.15**], множества E_t локально спрямляемы для почти всех t. Мы будем предполагать также, что E_t связны при всех t.

Пусть $G(x, \eta)$ – двойственная $H(x, \xi)$ функция. Положим

$$\zeta^{\pm} = (\pm\varphi_{x_2}, \mp\varphi_{x_1})\,/|\nabla\varphi|\ , \quad G_{0,\varphi}(x) = \max\{G(x,\zeta^+), G(x,\zeta^-\}\,.$$

Следующая теорема выражает "принцип длины и площади" в метрике поверхности Ω.

Теорема 1.9.1. *Пусть $\Omega = (D, H, \sigma)$ – абстрактная поверхность. Тогда для всякой локально липшицевой функции $f : D \to \mathbf{R}$ выполнено*

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{osc}^2(f; E_t)\, dt}{\int\limits_{E_t} H^2(x, \nabla\varphi)|\nabla\phi|^{-1}\,\sigma\,|dx|} \le \int\limits_{D\setminus(P\cup Q)} G^2(x, \nabla f)\sigma(x)\, dx_1 dx_2\,. \tag{1.9.37}$$

В частности, если

$$\sigma(x) = \frac{G_{0,\varphi}(x)\,|\nabla\varphi(x)|}{H(x, \nabla\varphi)}\,,$$

то

$$\inf_{\varphi} \inf_{0\le t\le 1} \operatorname{osc}^2(f; E_t) \le \operatorname{cap}_\Omega(P, Q; D) \int\limits_D \Phi^2(x, \nabla f)\sigma(x)\, dx_1 dx_2\,. \tag{1.9.38}$$

Доказательство соотношения (1.9.37) несложно. Пользуясь соотношением (1.3.6) и замечая, что почти всюду вдоль E_t выполнено

$$\frac{dx}{|dx|} = (\pm\varphi_{x_2}, \mp\varphi_{x_1})\,/|\nabla\varphi| = \zeta^{\pm}\,,$$

мы имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{osc}(f;E_t) \;&\le \int\limits_{E_t} |\langle \nabla f, dx\rangle| \le \\ &\le \int\limits_{E_t} G(x,\nabla f)\,H(x,dx) \le \\ &\le \left(\int\limits_{E_t} H^2(x,\nabla\varphi)\,|\nabla\varphi|\,\frac{|dx|}{\sigma}\right)^{1/2} \left(\int\limits_{E_t} G^2(x,\nabla f)\,\frac{\sigma\,|dx|}{|\nabla\varphi|}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Интегрированием по переменной t, находим

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{osc}^2(f;E_t)\,dt}{\int\limits_{E_t} H^2(x,\nabla\phi)\,|\nabla\varphi|\,\frac{|dx|}{\sigma}} \le \int\limits_0^1 dt \int\limits_{E_t} G^2(x,\nabla f)\,\frac{\sigma\,|dx|}{|\nabla\varphi|}\,. \tag{1.9.39}$$

Воспользуемся известной формулой Кронрода – Федерера для коплощади

$$\int\limits_0^1 dt \int\limits_{E_t} A(x)\,\frac{|dx|}{|\nabla\varphi|} = \int\limits_{D\setminus(P\cup Q)} A(x)\,dx_1dx_2\,, \tag{1.9.40}$$

справедливой для произвольной измеримой по Лебегу функции $A : D\setminus(P\cup Q) \to \mathbf{R}$ и всякой локально липшицевой в D функции φ со свойством (1.9.36) (см., например, [144, теорема **3.2.5**]).

На основании формулы (1.9.40) имеем

$$\int\limits_0^1 dt \int\limits_{E_t} G^2(x,\nabla f)\,\frac{\sigma\,|dx|}{|\nabla\varphi|} = \int\limits_{D\setminus(P\cup Q)} G^2(x,\nabla f)\,\sigma\,dx_1dx_2\,.$$

Данное соотношение вместе с (1.9.39), с очевидностью, влекут (1.9.37).

Для доказательства (1.9.38) воспользуемся специальным выбором функции σ. Имеем

$$G_{0,\varphi}^2(x)\,|\nabla\varphi|\,\frac{|dx|}{\sigma} = G^2(x,\nabla\varphi)\,|\nabla\varphi|^{-1}\,\sigma\,|dx|\,.$$

Тем самым, на основании (1.9.39) находим

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{osc}^2(f;E_t)\,dt}{\int\limits_{E_t} G^2(x,\nabla\varphi)\,|\nabla\varphi|^{-1}\,\sigma\,|dx|} \leq \int\limits_0^1 dt \int\limits_{E_t} G^2(x,\nabla f)\,\frac{\sigma\,|dx|}{|\nabla\varphi|}\,. \tag{1.9.41}$$

Покажем теперь, что (1.9.37) влечет (1.9.38). Пользуясь неравенством Коши и формулой Кронрода – Федерера для ко-площади, имеем

$$\begin{aligned} 1 \quad &\leq \int\limits_0^1 dt \int\limits_{E_t} G^2(x,\nabla\varphi)\,|\nabla\phi|^{-1}\,\sigma\,|dx| \cdot \int\limits_0^1 \frac{dt}{\int\limits_{E_t} G^2(x,\nabla\varphi)\,|\nabla\varphi|^{-1}\,\sigma\,|dx|} = \\ &= \int\limits_{D\setminus(P\cup Q)} G^2(x,\nabla\phi)\sigma(x)dx_1dx_2 \cdot \int\limits_0^1 \frac{dt}{\int\limits_{E_t} G^2(x,\nabla\phi)\,|\nabla\varphi|^{-1}\,\sigma} |dx|\,. \end{aligned}$$

Таким образом, на основании соотношения (1.9.37), получаем

$$\begin{aligned} \inf_{0\leq t\leq 1}\operatorname{osc}^2(f;E_t) \quad &\leq \int\limits_D G^2(x,\nabla\phi)\sigma(x)dx_1dx_2 \times \\ &\times \int\limits_{D\setminus(P\cup Q)} G^2(x,\nabla f)\sigma(x)\,dx_1dx_2\,. \end{aligned} \tag{1.9.42}$$

Переходя в правой части (1.9.42) к точной нижней грани по всем функциям φ описанного вида, приходим к (1.9.38). $\Box$

Задачи: 1) Указать условия (необходимые, достаточные) равенства нулю Ω-емкости множества, аналогичные соответствующим результатам для (l,p)-емкости [25, **5.3**]. 2) Изучить границу ∂D_{r_Ω} области

$D \subset \mathbf{R}^2$. 3) Указать условия обращения в нуль Ω-емкости граничного множества $E \subset \partial D_{r_\Omega}$. 4) Исследовать возможности изометрического погружения абстрактной поверхности в псевдоевклидово пространство. (Относительно проблемы изометрического погружения пространственных форм см. А.А. Борисенко [15, раздел **5**].)

Глава 2

Локально минимальные поверхности

В данной главе определяются основные понятия, связанные с минимальными поверхностями в евклидовом пространстве. Показано, что функция высоты локально липшицевой, локально минимальной поверхности является обобщенным решением уравнения Лапласа – Бельтрами в метрике поверхности.

2.1 Поверхности в $\mathbf{R}^m$

Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ — односвязная область и пусть Ω — двумерная поверхность в $\mathbf{R}^m$, $m \geq 2$, заданная посредством локально липшицевой вектор-функции

$$\xi = f(x_1, x_2) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) : D \to \mathbf{R}^m\,. \tag{2.1.1}$$

В общем случае поверхность Ω может иметь самопересечения. Будем говорить, что поверхность Ω *вложена* в $\mathbf{R}^m$, если вектор-функция f реализует гомеоморфное отображение области D на множество $f(D)$ с метрикой (и, тем самым, топологией !), индуцированной из $\mathbf{R}^m$. Поверхность Ω *погружена* в $\mathbf{R}^m$, если вектор-функция f обладает описанным свойством локально в D.

Ясно, что Ω является вложенной, если она билипшицева, и погруженной, если она локально билипшицева.

Так как вектор-функция f локально липшицева, то по теореме Радемахера почти всюду в D существует полный дифференциал $df(x)$.

Пусть $(x_1, x_2) \in D$ – точка, где f имеет дифференциал. Символом

$$f' = \begin{pmatrix} f'_{1x_1}\, f'_{2x_1}\, \ldots\, f'_{mx_1} \\ \\ f'_{1x_2}\, f'_{2x_2}\, \ldots\, f'_{mx_2} \end{pmatrix}$$

мы обозначаем производную f в точке $x = (x_1, x_2)$, где такая производная существует. Пользуясь стандартными обозначениями

$$g_{11} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2, \quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle, \quad g_{22} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2,$$

определяем первую квадратичную форму поверхности Ω в области D

$$ds_\Omega^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2 \,.$$

Наиболее простой вид первая квадратичная форма поверхности Ω имеет в изотермических координатах. На вопрос – что есть изотермические координаты на негладкой поверхности – достаточно хорошего ответа в настоящее время не существует. Мы будем пользоваться следующим определением.

Определение 2.1.1. *Пусть Ω — поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbf{R}^2$ посредством локально липшицевой вектор-функции* (2.1.1). *Переменные $x = (x_1, x_2)$ называются изотермическими координатами на поверхности Ω, если*

$$g_{11}(x) = g_{22}(x)\,, \quad g_{12}(x) = 0 \quad \textit{почти всюду в} \quad D\,. \tag{2.1.2}$$

При этом, в случае, когда $x = (x_1, x_2)$ — изотермические координаты на поверхности Ω, мы имеем

$$ds_\Omega^2 = \lambda(x)\,(dx_1^2 + dx_2^2)$$

почти всюду в области D. Здесь $\lambda = g_{11} = g_{22}$.

Первое из условий (2.1.2) означает, что растяжения f вдоль линий x_1, $x_2 = \text{const}$ совпадают в точках, где df существует. Второе условие влечет взаимную ортогональность образов этих линий в соответствующих точках $\xi = f(x_1, x_2)$. Так что, в каждой точке $x \in D$, где существует полный дифференциал df и одновременно выполняются соотношения (2.1.2), отображение $f : D \to \Omega$ конформно, т.е. сохраняет углы между кривыми.

Существование изотермических координат на нерегулярных поверхностях исследовано весьма не полно. Для поверхностей класса $W^{l,p}$, где $l \geq 3$ и $p > 2$, существование изотермических координат может быть получено из известных результатов Боярского и Векуа (см. [16, §6 главы II]). Близкие утверждения для липшицевых графиков принадлежит Ч.Б. Морри [198], а для локально липшицевых графиков могут быть получены (при различных предположениях относительно областей определения графиков) из результатов Л. Берса [134], П.П. Белинского [8, теорема 9], О. Мартио и В.М. Миклюкова [185].

Общий случай непараметрических локально липшицевых поверхностей рассматривался в работе [79]. Мы вернемся к этой проблеме ниже в главе 3.

2.2 Уравнение Лапласа – Бельтрами

Пусть Ω – поверхность, погруженная в $\mathbf{R}^m$ посредством локально липшицевой вектор-функцией (2.1.1). Положим

$$g = \det\left(g_{ij}\right).$$

Элемент площади на Ω определяется выражением

$$d\sigma_\Omega = \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\,.$$

Если в некоторой точке $x = (x_1, x_2) \in D$ величина $g(x) > 0$, то определена обратная матрица $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Таким образом, если почти всюду в области D выполнено $g(x) > 0$, то мы вправе записать уравнение Лапласа в метрике ds_Ω. Именно, мы полагаем

$$\Delta_\Omega h = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} \sum_{j=1}^{2} g^{ij}(x) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = 0\,. \tag{2.2.3}$$

Уравнение (2.2.3) называется *уравнением Лапласа – Бельтрами* в метрике ds_Ω (относительно мотивировки см. [121, §1, глава 1]).

Удобно пользоваться следующим определением обобщенного решения уравнения Лапласа в метрике ds_Ω.

Определение 2.2.1. *Локально липшицева в D функция h называется обобщенным решением уравнения Лапласа (или гармонической в метрике ds_Ω функцией), если для произвольной липшицевой функции $\varphi : D \to \mathbf{R}$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset\subset D$ выполнено*

$$\int\limits_D \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \varphi'_{x_i}\, h'_{x_j}\, \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2 = 0\,. \tag{2.2.4}$$

Введем понятия субгармонической и супергармонической в метрике ds_Ω функций.

Определение 2.2.2. *Локально липшицева в D функция h называется обобщенным субрешением (суперрешением) уравнения Лапласа – Бельтрами (или субгармонической, соответственно, супергармонической* *в метрике ds_Ω функцией), если для произвольной неотрицательной (неположительной) липшицевой функции $\varphi : D \to \mathbf{R}$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset\subset D$ выполнено*

$$\int\limits_D \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\varphi'_{x_i}\, h'_{x_j}\, \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2 \le 0\,. \tag{2.2.5}$$

Поясним сказанное. Пусть D – произвольная ограниченная область с гладкой границей. Предположим, что $h \in C^2(D)$ есть обобщенное субрешение уравнения Лапласа в метрике ds_Ω, причем коэффициенты g^{ij} суть класса $C^1(D)$. На основании формулы Грина для произвольной функции $\varphi \in C^1(\overline{D})$ имеем

$$\int\limits_{\partial D} \varphi \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\mathbf{n}_{x_i}\, h'_{x_j}\, \sqrt{g}\, |dx| = \int\limits_D \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\varphi'_{x_i}\, h'_{x_j}\, \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2 + \\ + \int\limits_D \varphi \Delta_\Omega h\, \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\,,$$

где $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_{x_1}, \mathbf{n}_{x_2})$ есть единичный вектор внешней нормали к границе ∂D.

Если h – субрешение и $\varphi|_{\partial D} = 0$, то условие (2.2.5) влечет

$$\int\limits_D \varphi \Delta_\Omega h\, \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2 \ge 0\,.$$

Поскольку данное соотношение выполнено для всякой неотрицательной функции φ, то согласно основной лемме вариационного исчисления получаем

$$\Delta_\Omega h \ge 0\,.$$

Тем самым, *всякое субрешение уравнения Лапласа – Бельтрами в классическом смысле является обобщенным субрешением.*

В точности так же рассматриваются случаи обобщенного суперрешения и обобщенного решения.

2.3 Функция высоты

Ниже мы предполагаем, что

$$\frac{1}{g} \in L^{\frac{3}{2}}_{\mathrm{loc}}(D). \tag{2.3.6}$$

В частности, это означает, что $g > 0$ почти всюду на D.

Пусть g^{ij} – коэффициенты обратной матрицы $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Условие (2.3.6) влечет, что

$$(g^{ij}) = \frac{\operatorname{adj}(g_{ij})}{g}$$

почти всюду на D.

Локально липшицевы поверхности в $\mathbf{R}^m$ обладают многими интересными (и весьма экзотичными !) свойствами. В частности, их внутренняя геометрия может быть не связана с внешней (см., например, Д. Нэш [91] и Н.Х. Кейпер [40]).

Поверхность (2.1.1) называется локально минимальной, если для всякой подобласти $D' \subset\subset D$ с жордановой границей $\partial D'$ и всякой липшицевой вектор-функции

$$\xi = \varphi(x_1, x_2) : D \to \mathbf{R}^m\,, \quad \varphi|_{D \setminus D'} = f\,,$$

выполнено

$$\int\limits_D \sqrt{\left|f'_{x_1}\right|^2 \, \left|f'_{x_2}\right|^2 - \left\langle f'_{x_1}\,, f'_{x_2}\right\rangle^2} \; dx_1 dx_2 \le$$

$$\le \int\limits_D \sqrt{\left|\varphi_{x_1}\right|^2 \, \left|\varphi_{x_2}\right|^2 - \left\langle \varphi_{x_1}\,, \varphi_{x_2}\right\rangle^2} dx_1 dx_2\,.$$

Следующее утверждение — центральное в настоящей главе. В частности, оно обеспечивает применимость к функции высоты стандартных методов теории эллиптических уравнений с частными производными, что является узловым моментом при использовании в задаче Плато прямых методов вариационного исчисления (А. Лебег [179], Е.Дж. МакШэн [192]). В определенной мере, оно очерчивает границы справедливости замечания Куранта, относительно преимуществ в задаче Плато параметрических методов сравнительно с прямыми методами (см. §1 главы III в [50]), тем более, что естественный класс минимальных поверхностей в $\mathbf{R}^m$ содержит и негладкие поверхности (см., например, теорему 24.1.1 монографии А.Т. Фоменко [114], теорему 11.8 монографии Дж. Джусти [29]), либо главу 8 монографии Ф. Моргана [197].

Теорема 2.3.1. *Если $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ – двумерная, локально минимальная, локально липшицева поверхность, задаваемая вектор-функцией* (2.1.1) *со свойством* (2.3.6)*, то для всякого единичного вектора* $\mathbf{e}$ *функция высоты $h(m) = \langle f(m), \mathbf{e}\rangle$ является гармонической в метрике ds_Ω.*

Доказательство. Мы следуем [82]. Так как функция высоты есть линейная комбинация компонент вектор-функции $\xi = f(x) : D \to \mathbf{R}^m$, нам достаточно показать, что гармонической является компонента $f_1 = f_1(x)$. Фиксируем достаточно малую область $D' \subset\subset D$ и локально липшицеву функцию φ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset D'$. Рассмотрим вектор-функцию

$$f(x,\varepsilon) = (f_1 + \varepsilon\varphi, f_2, \ldots, f_m) : D \to \mathbf{R}^m\,,$$

где $\varepsilon \in (-1,1)$ – произвольное число.

Данная вектор-функция определяет поверхность Ω_ε над D. Мы имеем

$$\operatorname{area}\Omega_\varepsilon = \int\limits_D \sqrt{g(x,\varepsilon)}\,dx, \quad dx = dx_1\,dx_2\,.$$

Так как поверхность Ω является локально минимальной, мы вправе записать

$$\operatorname{area}\Omega_\varepsilon - \operatorname{area}\Omega = \int\limits_D \sqrt{g(x,\varepsilon)}\,dx - \int\limits_D \sqrt{g(x)}\,dx \geq 0.$$

Здесь мы обозначили

$$g(x,\varepsilon) = \det\left(g_{ij}(x,\varepsilon)\right)$$

и

$$\begin{aligned} g_{ij}(x,\varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,\varepsilon), \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,\varepsilon)\right\rangle = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) + \\ &\quad + \textstyle\sum_{k=2}^m \displaystyle\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j} + \varepsilon\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) + \\ &\quad + \varepsilon^2\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = g_{ij} + \varepsilon\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\operatorname{area}\Omega_\varepsilon - \operatorname{area}\Omega\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{D'} \left.\frac{dg}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}}\,, \tag{2.3.7}$$

где $D' = \operatorname{supp}\varphi$.

Так как $f,\ \varphi \in \operatorname{Lip} D$, то величина $\frac{dg}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ ограничена, и соотношение (2.3.6) гарантирует, что правый интеграл существует.

Мы имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\operatorname{area}\Omega_\varepsilon - \operatorname{area}\Omega\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{D'}\left(\sqrt{g(x,\varepsilon)} - \sqrt{g(x)}\right)\,dx \tag{2.3.8}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{D'}\frac{g(x,\varepsilon)-g(x)}{\sqrt{g(x,\varepsilon)}+\sqrt{g(x)}}\,dx\,.$$

Для почти всех $x \in D'$ можно записать

$$g(x,\varepsilon) - g(x) = \varepsilon\ \frac{dg}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \int\limits_0^\varepsilon d\eta \int\limits_0^\eta \frac{d^2 g}{d\varepsilon^2}(x,\tau)\,d\tau. \tag{2.3.9}$$

Раскладывая определитель $g(x,\varepsilon)$ на множители и вычисляя каждый раз производную $dg/\,d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$, мы видим, что

$$\frac{dg}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)\operatorname{adj} g_{ij}(x). \tag{2.3.10}$$

Аналогично,

$$\int\limits_0^\varepsilon d\eta \int\limits_0^\eta \frac{d^2 g}{d\varepsilon^2}(x,\tau)\,d\tau = \varepsilon^2\,\alpha(x,\varepsilon), \tag{2.3.11}$$

где

$$|\alpha(x,\varepsilon)| \le C(q), \quad \text{при} \quad |\varepsilon| \le 1,$$

и

$$q = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D'} \max\{|\nabla f_1(x)|,\ldots,|\nabla f_n(x)|,\,|\nabla\varphi(x)|\}.$$

Далее, объединяя (2.3.9), (2.3.10) и (2.3.11), находим

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{D'}\frac{g(x,\varepsilon)-g(x)}{\sqrt{g(x,\varepsilon)}+\sqrt{g(x)}}\,dx = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{D'}\left(g(x,\varepsilon)-g(x)\right)\frac{dx}{\sqrt{g(x)}}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{D'}\left(g(x,\varepsilon)-g(x)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{g(x,\varepsilon)}+\sqrt{g(x)}} - \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{D'} \frac{dg}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{D'} \alpha(x,\varepsilon)\frac{dx}{\sqrt{g(x)}}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{D'} \left(\frac{dg}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \varepsilon\alpha(x,\varepsilon)\right) \frac{\sqrt{g(x)} - \sqrt{g(x,\varepsilon)}}{\sqrt{g(x)}\left(\sqrt{g(x,\varepsilon)} + \sqrt{g(x)}\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{D'} \frac{dg}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{D'} \alpha(x,\varepsilon)\,\frac{dx}{\sqrt{g(x)}}$$

$$-\varepsilon\int\limits_{D'} \left(\frac{1}{2}\,\frac{dg}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \varepsilon\alpha(x,\varepsilon)\right)^2 \frac{dx}{\sqrt{g(x)}\left(\sqrt{g(x,\varepsilon)} + \sqrt{g(x)}\right)}.$$

Так как для последнего интеграла выполнено

$$\left|\int\limits_{D'} \left(\frac{1}{2}\,\frac{dg}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \varepsilon\alpha(x,\varepsilon)\right)^2 \frac{dx}{\sqrt{g(x)}\left(\sqrt{g(x,\varepsilon} + \sqrt{g(x)}\right)}\right|$$

$$\leq \frac{1}{8}\int\limits_{D'} \left(\frac{1}{2}\,\frac{dg}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \varepsilon\alpha(x,\varepsilon)\right)^2 \frac{dx}{g^{\frac{3}{2}}(x)},$$

условие (2.3.6) влечет из (2.3.8), что (2.3.7) действительно имеет место.

Поскольку поверхность (2.1.1) локально минимальна, первая вариация ее площади равна нулю, другими словами, соотношение (2.3.7) влечет

$$\int\limits_{D'} \frac{dg}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{D'} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) \operatorname{adj} g_{ij}(x)\,\frac{dx}{\sqrt{g(x)}} = 0.$$

Напомним, что

$$g^{ij} = \frac{\operatorname{adj} g_{ij}}{g}, \quad i,j = 1,\,2.$$

Тем самым, мы можем переписать последний интеграл в виде

$$\int\limits_{D'} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) g^{ij}(x)\,\sqrt{g(x)}\,dx = 0,$$

или

$$\int\limits_{D'} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{2} g^{ij}(x)\, \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \sqrt{g(x)}\, dx = 0\,.$$

Таким образом, функция $f_1(x)$ является обобщенным решением уравнения (2.2.3). $\square$

Теорема 2.3.2. *Если локально липшицева поверхность Ω в $\mathbf{R}^m$, заданная в непараметрической форме*

$$\xi = f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f_1(x), \ldots, f_{m-2}(x)) : D \to \mathbf{R}^m\,, \qquad (2.3.12)$$

локально минимальна, то вектор-функция f удовлетворяет (в обобщенном смысле) системе дифференциальных уравнений с частными производными

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} \sum_{j=1}^{2} g^{ij}(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) = 0\,, \quad 1 \le k \le m-2. \qquad (2.3.13)$$

Для **доказательства** достаточно заметить, что в случае непараметрического задания (2.3.12) для коэффициентов 1-ой основной квадратичной формы поверхности Ω выполнено

$$g_{11} = 1 + \sum_{k=1}^{m-2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1} \right)^2, \quad g_{12} = \sum_{k=1}^{m-2} \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \frac{\partial f_k}{\partial x_2}\,, \quad g_{22} = 1 + \sum_{k=1}^{m-2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_2} \right)^2.$$

Так как

$$g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \ge 1 + \sum_{k=1}^{m-2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1} \right)^2 + \sum_{k=1}^{m-2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_2} \right)^2 \ge 1\,,$$

то предположение (2.3.6) всегда выполнено. Теорема 2.3.1 влечет справедливость системы (2.3.13). $\square$

Следствие 2.3.1. *Если поверхность Ω в $\mathbf{R}^3$, задана в виде графика локально липшицевой функции $x_3 = f(x_1, x_2)$ и локально минимальна, то f является обобщенным решением уравнения*

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f'_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0\,. \qquad (2.3.14)$$

Задачи: 1) Выяснить является ли существенным для справедливости теоремы 2.3.1 условие (2.3.6). 2) Заменить условие (2.3.6) менее ограничительным. 3) Найти аналоги теоремы 2.3.1 для нерегулярных поверхностей классов, более широких, чем локально липшицевы.
4) Найти аналоги теоремы 2.3.1 для нерегулярных поверхностей в псевдоевклидовых пространствах (А.Н. Кондрашов).

Глава 3

Изотермические координаты

Ниже доказывается существование изотермических координат на нерегулярных поверхностях специальных классов; исследуются гладкостные свойства изотермических представлений [79].

3.1 Основная теорема

Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – область и пусть Ω – двумерная поверхность в $\mathbf{R}^m$, $m \geq 3$, заданная посредством локально липшицевой вектор-функции (2.1.1). Ниже, если не оговорено противное, мы предполагаем, что почти всюду в D выполнено

$$\operatorname{rank}(df) = 2\,. \tag{3.1.1}$$

Условие (3.1.1) равносильно тому, что $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ почти всюду в D.

Упражнение. Если поверхность Ω локально билипшицева, то (3.1.1) имеет место в каждой точке, где существует полный дифференциал df (доказать или опровергнуть). $\Box$

В каждой точке $x \in D$, где вектор-функция f дифференцируема и одновременно выполняются соотношения (3.1.1) и (2.1.2), отображение $f : D \to \Omega$ сохраняет углы между кривыми и является конформным в традиционном смысле.

Нам потребуется также понятие $W^{1,2}$-мажорируемой функции.

Определение 3.1.1. *Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – область. Будем говорить, что функция $P : D \to \mathbf{R}$ является $W^{1,2}$-мажорируемой в D, если найдется функция $K \in W^{1,2}(D)$ такая, что*

$$P(x) \leq K(x) \quad \textit{для почти всех} \quad x \in D\,. \tag{3.1.2}$$

Функция P называется локально $W^{1,2}$-мажорируемой в D, если она $W^{1,2}(D')$-мажорируема для всякой подобласти $D' \subset\subset D$.

Простейшие примеры $W^{1,2}$-мажорируемых функций доставляют ограниченные функции. Пусть $P : D \to \mathbf{R}$ — произвольная ограниченная функция, определенная в области D конечной площади. Здесь мы можем положить $K = \sup_{x \in D} P(x)$. Ясно, что $K \in W^{1,2}(D)$ и соотношение (3.1.2) выполнено всюду в D.

В общем случае объем класса $W^{1,2}$-мажорируемых функций не вполне ясен. Обсуждение вопроса см. в конце главы 5.

Пусть D – односвязная область в $\mathbf{R}^2$ и Ω – поверхность, заданная над D посредством вектор-функции (2.1.1), удовлетворяющей условию (3.1.1). Пусть $x = (x_1, x_2) \in D$ – точка, где вектор-функция f имеет полный дифференциал и выполняется (3.1.1). Предположение (3.1.1) влечет, что $df \neq 0$ в этой точке, метрика ds_Ω невырождена и бесконечно малый круг в метрике ds_Ω с центром в x является бесконечно малым эллипсом в евклидовой метрике. Обозначим через $p(x) \geq 1$ и $0 \leq \theta(x) < \pi$ характеристики этого эллипса, т.е. отношение p большей оси эллипса к меньшей и угол θ между большей осью и направлением $\overrightarrow{Ox_1}$.

Легко видеть, что

$$p(x) = \frac{g_{11}(x) + g_{22}(x)}{2\sqrt{g_{11}(x)g_{22}(x) - g_{12}^2(x)}} + \left(\frac{\left(g_{11}(x) + g_{22}(x)\right)^2}{4\left(g_{11}(x)g_{22}(x) - g_{12}^2(x)\right)} - 1 \right)^{1/2} .$$

Характеристика θ определена в каждой точке, где $p > 1$.

Напомним некоторые необходимые сведения о $W^{1,2}$-функциях. Пусть D — область в $\mathbf{R}^2$. Функция $f \in L^p(D)$, $p \geq 1$, принадлежит классу $W^{1,p}(D)$, если f абсолютно непрерывна на почти всех вертикальных и горизонтальных сечениях D, а ее частные производные принадлежат классу $L^p(D)$; функция $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$, если $f \in W^{1,p}(D_1)$ на всяком открытом подмножестве $D_1 \subset\subset D$ (см., например, В.М. Гольдштейн, Ю.Г. Решетняк [25, глава 2, **5.6**]).

Отметим также (см. Ф. Геринг, О. Лехто [149]), что функция $f : D \to \mathbf{R}$ имеет полный дифференциал почти всюду в D, если $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ при $p > 2$, или $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$ и монотонна в смысле Лебега, т.е.

$$\operatorname{osc}(D_1, f) \leq \operatorname{osc}(\partial D_1, f) \quad \text{для всякой подобласти} \quad D_1 \subset\subset D\,.$$

Здесь и ниже $\operatorname{osc}(E, \varphi)$ означает колебание функции φ на множестве E.

Простое доказательство дифференцируемости почти всюду монотонных $W^{1,p}$-функций, опирающееся только на теорему В.В. Степанова и принцип длины и площади, было дано В.А. Жуковым [35].

Таким образом, всякая монотонная в смысле Лебега вектор-функция $f : D \to \mathbf{R}^m$ класса $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ почти всюду в области D имеет полный дифференциал. В частности, гомеоморфные отображения $f : D \to \mathbf{R}^2$ класса $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ дифференцируемы почти всюду в D.

Определение 3.1.2. *Гомеоморфное отображение $f : D \to \mathbf{R}^2$ класса $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ в области $D \subset \mathbf{R}^2$ называется квазиконформным с характеристиками М.А. Лаврентьева $(p(x), \theta(x))$, если почти всюду в D оно переводит бесконечно малые эллипсы с характеристиками $(p(x), \theta(x))$ в бесконечно малые круги*[1]*. Отображение $f : D \to \mathbf{R}^2$ называется q-квазиконформным, если* $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in D} p(x) \le q$.

Относительно квазиконформных отображений двумерных областей см. Л.И. Волковыский [19], О. Лехто и К. Виртанен [180], П.П. Белинский [8].

Фиксируем числовую последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ со свойствами

$$Q_n \ge 1 \quad \text{для всех} \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{и} \quad Q_n \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для произвольного $n = 1, 2, \ldots$ полагаем

$$p_n(x) = \begin{cases} p(x)\,, & \text{при } p(x) \le Q_n\,, \\ 1\,, & \text{при } p(x) > Q_n. \end{cases}$$

Согласно известным результатам теории квазиконформных отображений (см., например, П.П. Белинский [8, теорема 8]) существует квазиконформное отображение $\xi = w_n(x)$ области D на подходящую область $\Delta_n \subset \mathbf{R}^2$ с характеристиками, совпадающими с (p_n, θ) почти всюду в D. Эта область Δ_n может совпадать с $\mathbf{R}^2$, если $D = \mathbf{R}^2$, или быть произвольной односвязной собственной подобластью $\mathbf{R}^2$.

Здесь и ниже символом $B(a, r)$ будем обозначать круг радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in \mathbf{R}^2$, символом $S(a, r)$ — его границу.

Зафиксируем точки a_0, $a_1 \in D$. Посредством вспомогательных конформных преобразований в плоскости переменной $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ добиваемся того, чтобы области Δ_n являлись кругами $B_n = B(0, R_n)$, где $1 < R_n < \infty$, а отображения w_n обладали свойствами:

$$w_n(a_0) = (0, 0) \quad \text{и} \quad w_n(a_1) = (1, 0) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.1.3}$$

[1]Последнее означает, что для почти всех $x \in D$ дифференциал $df(x) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ имеет характеристики $(p(x), \theta(x))$.

Последовательность отображений $F_n = f \circ w_n^{-1} : B_n \to \mathbf{R}^m$, где $w_n : D \to B_n$ удовлетворяют (3.1.3), назовем *канонической последовательностью представлений* поверхности Ω, соответствующей последовательности $\{Q_n\}$.

Фиксируем произвольно последовательность канонических представлений $F_n : B_n \to \mathbf{R}^m$ поверхности Ω.

Определение 3.1.3. *Будем говорить, что последовательность $\{F_n\}$ сходится локально равномерно к каноническому гомеоморфизму $F : B(0,R) \to \mathbf{R}^m$, если:*

(*i*) *области B_n сходятся при $n \to \infty$ к области $B = B(0,R)$ как к ядру относительно точки $\xi = 0$ (другими словами, существует $R = \lim\limits_{n\to\infty} R_n$, $1 \le R \le \infty$);*

(*ii*) *последовательность $\{F_n\}$ сходится при $n \to \infty$ к отображению $F : B(0,R) \to \mathbf{R}^m$ равномерно на всякой подобласти $U \subset\subset B(0,R)$;*

(*iii*) *последовательность обратных отображений $F_n^{-1} : \Omega \to \mathbf{R}^2$ сходится при $n \to \infty$ к отображению $F^{-1} : \Omega \to B(0,R)$ равномерно на всякой подобласти $\Omega_1 \subset\subset \Omega$.*

Центральный результат настоящей главы доставляет следующая теорема существования [79].

Теорема 3.1.1. *Пусть Ω — двумерная поверхность, заданная векторфункцией* (2.1.1) *над односвязной ограниченной областью $D \subset \mathbf{R}^2$ и удовлетворяющая условию* (3.1.1). *Предположим, что функция $\mathcal{P}$, определяемая соотношением*

$$\mathcal{P}(x) = (g_{11}(x) + g_{22}(x)) \Big/ 2\sqrt{g_{11}(x)\, g_{22}(x) - g_{12}^2(x)}\,, \tag{3.1.4}$$

является $W^{1,2}$-мажорируемой в области D.

Тогда на Ω существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, вводимые каноническим гомеоморфизмом $y = F(\xi) : B(0,R) \subset \mathbf{R}^2 \to \Omega$, предельным для канонической последовательности представлений $F_n(\xi) : B(0,R_n) \to \Omega$ поверхности Ω, соответствующей произвольной, наперед заданной числовой последовательности $\{Q_n\}$. При этом, существует предел $\lim_{n\to\infty} R_n = R$, $1 < R < \infty$, и последовательность $\{F_n\}$ локально равномерно в круге $B = B(0,R)$ сходится к $F(\xi)$.

Канонический гомеоморфизм $F : B \to \Omega$ является единственным.

В процессе доказательства теоремы 3.1.1 получены также вполне конкретные двусторонние оценки радиуса R через расстояние $|a_1 - a_0|$, интеграл

$$\int\limits_D K(x)\,dx_1dx_2$$

и точную нижнюю грань диаметров дуг с концами на ∂D, отделяющих точку x_1 от точки a_0 (неравенства (3.5.22) и (3.5.25) в §5).

Дифференциальные свойства канонического гомеоморфизма

$$F : B(0,R) \to \mathbf{R}^m\,,$$

а также обратного к нему, определяются свойствами f и f^{-1} и изучаются отдельно. Оценкам скорости аппроксимации F отображениями F_n посвящена глава 5.

3.2 Канонический гомеоморфизм

Пусть Ω — произвольная поверхность вида (2.1.1). Так как метрика на $f(D)$ индуцирована из $\mathbf{R}^m$, то на Ω определена 2-мерная мера Хаусдорфа $\mathrm{mes}_2\,(E)$, $E \subset f(D)$.[2] Если $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^n$ и $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^m$ суть двумерные поверхности и $h : \Omega_1 \to \Omega_2$ — гомеоморфизм, то мы говорим, что отображение h обладает N-свойством Н.Н. Лузина, если для произвольного множества $E \subset \Omega_1$, $\mathrm{mes}_2\,(E) = 0$, выполнено $\mathrm{mes}_2\,(h(E)) = 0$ (С. Сакс [101, глава VII, §6]).

Предположим, что Ω — поверхность вида (2.1.1), удовлетворяющая условию (3.1.1). Предположим также дополнительно, что вектор-функция $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$. Поскольку отображение $f : D \to f(D)$ гомеоморфно, то для произвольного множества $E \subset D$ выполнено

$$\mathrm{mes}_2\,(f(E)) = \int\limits_E \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,dx_1dx_2 \tag{3.2.5}$$

(см. П. Хайлаш [157, теорема **12**]).

Из (3.1.1) и (3.2.5) следует, что

$$\mathrm{mes}_2\;(f(E)) = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \mathrm{mes}_2\,(E) = 0 \tag{3.2.6}$$

и отображения f, f^{-1} обладают N-свойством Лузина.

[2] Иногда мы будем использовать также другое стандартное обозначение, полагая $\mathrm{mes}_2\,(E) = \mathrm{area}\,(E)$.

Так как f имеет почти всюду полный дифференциал, то в силу (3.2.6), почти всюду на Ω существует касательная плоскость $T_y(\Omega)$. Таким образом, почти всюду на Ω мы можем определить градиент (связность) ∇_Ω.

Действительно, пусть $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}$ — функция и $y \in \Omega$ — фиксированная точка, в которой касательная плоскость $T_y(\Omega)$ существует. Следуя стандартной схеме введения связности на поверхности, продолжим φ в некоторую окрестность точки y в $\mathbf{R}^m$. Символом $\tilde{\varphi}$ обозначим новую функцию. По определению полагаем

$$\nabla_\Omega \varphi(y) = \left(\overline{\nabla}\tilde{\varphi}(y)\right)^T .$$

Здесь $\overline{\nabla} = \nabla_{\mathbf{R}^m}$ есть стандартное дифференцирование в $\mathbf{R}^m$ и символ u^T означает ортогональную проекцию вектора u на касательную плоскость $T_y(\Omega)$.

Пусть $U \subset\subset \Omega$ — ограниченное открытое множество. Символом $W^{1,p}(U)$, $p \geq 1$, мы обозначаем множество всевозможных функций $\varphi : U \to \mathbf{R}$, обладающих следующим свойством: *для произвольной точки $x \in U$ найдутся окрестность $V \subset \mathbf{R}^m$ и последовательность C^1-функций $\varphi_k : V \to \mathbf{R}$ таких, что сужения $\tilde{\varphi}_k = \varphi_k|_{V\cap U}$ равномерно сходятся к φ, причем*

$$\sup_{k\geq 1} \int\limits_{V\cap U} |\nabla_\Omega \tilde{\varphi}_k|^p \, d\,\mathrm{area}_\Omega \leq q < \infty$$

для некоторого $q = \mathrm{const} < \infty$. Символом $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ обозначаем множество функций $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}$, принадлежащих классу $W^{1,p}(U)$ на всяком открытом подмножестве $U \subset\subset \Omega$.

В соответствии с теоремой 3.1.1 канонический гомеоморфизм $F : B(0,R) \to \Omega$ дифференцируем почти всюду в области $B(0,R)$. Если вектор-функция $f \in C^k(D)$, $k \geq 1$, то отображение F определяет изотермические координаты класса C^k на поверхности Ω и является конформным отображением плоской области D на поверхность Ω, понимаемым в традиционном смысле.

С другой стороны, конформные отображения нерегулярных поверхностей изучены лишь в весьма специальных случаях. Х.А. Шварцем [219] показано, что всякий тетраэдр и куб могут быть отображены конформно на сферу (см. также В. Грецки [152] К. Каратеодори [38, глава VII]). Относительно конформных отображений общих многогранных поверхностей см. Д. Иллс и Б. Фюгледе [141] и, как примере отображений общего объекта, — многообразий ограниченной кривизны — см. Ю.Г. Решетняк [98], а также Р. Кюнау [175], Т. Торо [223] и С. Мюллер, В. Шверяк [199]. Обобщенная формула Кристоффеля – Шварца для кусочно-конформных изоморфизмов и близкие вопросы рассматривались И.М. Грудским [26], [27].

В рассматриваемым в работе случае $W^{1,p}$-поверхностей мы вправе говорить только лишь о конформности в точках дифференцируемости отображения f или о конформности отображения $f : D \to \Omega$ почти всюду. Что именно следует понимать под конформным отображением поверхности "в целом" здесь не вполне ясно — определение конформного отображения нерегулярной поверхности встречается с существенными трудностями, связанными, в частности, с хорошо известной в теории плоских отображений проблемой устранимости особых множеств. Как и в плоском случае, мы можем исследовать здесь различные классы отображений, конформных вне множества сингулярностей и обладающих тем либо иным свойством "в целом"(см., например, Д.Е. Меньшов [62], Ю.Ю. Трохимчук [113], Е.П. Долженко [30], С.Я. Хавинсон [115], Г. Давид и П. Маттила [140] и др.).

Формулируемое ниже утверждение устанавливает некоторые связи между свойствами вектор-функции $f : D \to \mathbf{R}^m$ и свойствами канонического гомеоморфизма F [79].

Теорема 3.2.1. *Пусть Ω — поверхность, заданная вектор-функцией* (2.1.1) *над односвязной ограниченной областью $D \subset \mathbf{R}^2$ и подчиненная условию* (3.1.1). *Предположим, что функция $\mathcal{P}$, определяемая соотношением* (3.1.4)*, является $W^{1,2}$-мажорируемой в D. Тогда*

(i) канонический гомеоморфизм $F : B(0,R) \to \Omega$ (и обратный к нему $F^{-1} : \Omega \to B(0,R)$) обладает N-свойством Лузина тогда и только тогда, когда $f : D \to \Omega$ (соответственно, $f^{-1} : \Omega \to D$) обладает N-свойством;

(ii) если $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, то канонический гомеоморфизм $F : B(0,R) \to \Omega$ принадлежит классу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(B(0,R))$;

(iii) если $f^{-1} \in W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ для некоторого $2 \le \alpha \le \infty$ и существует β, $1/\alpha + 1/\beta = 1/2$, такое, что для всякой подобласти $D_1 \subset\subset D$ выполнено

$$\int\limits_{D_1} \left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)^{\beta/2} dx_1 dx_2 < \infty \,, \tag{3.2.7}$$

то обратное отображение $F^{-1} : \Omega \to B(0,R)$ принадлежит классу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Доказательства сформулированных утверждений будут даны ниже. Отметим предварительно некоторые их следствия для непараметрических поверхностей.

3.3 Непараметрические поверхности

Пусть D — односвязная ограниченная подобласть $\mathbf{R}^2$ и пусть Ω — двумерная поверхность в $\mathbf{R}^m$, задаваемая системой функций

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1\,, \\ y_2 &= x_2\,, \\ y_3 &= f_1(x_1, x_2)\,, \\ \ldots\ldots & \\ y_m &= f_{m-2}(x_1, x_2)\,, \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

где $x = (x_1, x_2) \in D$.

Система (3.3.8) есть специальный случай (2.1.1). Здесь мы имеем

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= 1 + \sum_{i=1}^{m-2} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) \right|^2\,, \\ g_{12}(x) &= \sum_{i=1}^{m-2} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x)\,, \\ g_{22}(x) &= 1 + \sum_{i=1}^{m-2} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x) \right|^2\,. \end{aligned}$$

Далее находим

$$g_{11}(x) g_{22}(x) - g_{12}^2(x) = 1 + \sum_{i=1}^{m-2} |\nabla f_i(x)|^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-2} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) \right|^2 \sum_{i=1}^{m-2} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x) \right|^2 - \left(\sum_{i=1}^{m-2} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x) \right)^2 \geq$$

$$\geq 1 + \sum_{i=1}^{m-2} |\nabla f_i(x)|^2\,.$$

Предположим, что функции f_i, $i = 1, \ldots, m-2$, суть липшицевы в D. Тогда существует постоянная $0 < M < \infty$ такая, что

$$|\nabla f| = \left(\sum_{i=1}^{m-2} |\nabla f_i(x)|^2 \right)^{1/2} \leq M \quad \text{почти всюду в} \quad D.$$

Для функции $\mathcal{P}$, определяемой равенством (3.1.4), почти всюду в D выполнено

$$\mathcal{P}(x) \le \left(1 + \sum_{i=1}^{m-2} |\nabla f_i(x)|^2\right)^{1/2}. \tag{3.3.9}$$

Тем самым, $\mathcal{P}$ ограничена и обладает свойством (3.1.2).

Формулируемые ниже утверждения о существовании изотермических координат на непараметрических поверхностях в $\mathbf{R}^m$ являются простыми комбинациями теорем 3.1.1 и 3.2.1.

Следствие 3.3.1. *Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ — односвязная ограниченная область. Если непараметрическая поверхность* (3.3.8) *липшицева, то существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, задаваемые некоторым каноническим гомеоморфизмом $y = F(\xi) : B(0, R) \to \Omega$.*

При этом, круг $B(0, R)$ имеет радиус $1 < R < \infty$, а отображения F, $F^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}$ и обладают N-свойством Лузина.

Канонический гомеоморфизм F единственен.

Для поверхностей класса $W^{l,p}$, где $l \ge 3$ и $p > 2$, данное утверждение может быть получено из известных результатов Б.В. Боярского и И.Н. Векуа (см. [16, §6 главы 2]). Близкое утверждение для липшицевых графиков принадлежит Ч.Б. Морри [198], а для локально липшицевых графиков легко следует из результатов Л. Берса [134], П.П. Белинского [8, теорема 9], О. Мартио и В.М. Миклюкова [185].

Следствие 3.3.2. *Пусть Ω — двумерная непараметрическая поверхность, заданная вектор-функцией* (3.3.8) *над односвязной ограниченной областью $D \subset \mathbf{R}^2$, где $f_i \in W^{1,2}(D)$ $(i = 1, \dots, m-2)$. Тогда, если функция $|\nabla f|$ является $W^{1,2}$-мажорируемой в D, то существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, определяемые некоторым каноническим гомеоморфизмом $y = F(\xi) : B(0, R) \subset \mathbf{R}^2 \to \Omega$.*

При этом, круг $B(0, R)$ имеет радиус $1 < R < \infty$, отображения F, F^{-1} обладают N-свойством Лузина и таковы, что $F \in W^{1,2}(B(0, R))$, $F^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(\Omega)$.

Канонический гомеоморфизм F единственен.

Если непараметрическая поверхность Ω задана над областью D посредством вектор-функции (3.3.8), где каждая из функций

$$f_i\,, \quad i = 1, 2, \dots, m-2\,,$$

принадлежит классу $W^{2,2}(D)$, то, очевидно, функция $|\nabla f|$ является $W^{1,2}$-мажорируемой. Так что, *на всякой двумерной непараметрической* *поверхности в* $\mathbf{R}^m$ *класса* $W^{2,2}(D)$ *можно ввести изотермические координаты.*

Мы проиллюстрируем сказанное простым примером, показывающим применимость наших результатов к поверхностям, имеющим точки заострения. Рассмотрим график функции

$$y_3 = \int\limits_0^r \ln^\epsilon \frac{1}{s}\, ds, \quad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3.$$

При $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ эта функция принадлежит классу $W^{2,2}(B)$ в круге $B = B(0,1)$. Ее график имеет точку заострения в начале координат $\mathbf{R}^3$.

Используя данную функцию, несложно сконструировать также и примеры поверхностей, удовлетворяющих условиям следствия 3.3.2 и имеющих достаточно массивные (в смысле хаусдорфовой меры) множества точек заострения.

3.4 Доказательство теоремы 3.2.1

Фиксируем произвольно канонический гомеоморфизм $F : B(0,R) \to \Omega$ и каноническую последовательность представлений

$$F_n : B_n \to \Omega\,, \quad F_n = f \circ w_n^{-1}\,,$$

описываемых в теореме. Каждое из отображений $w_n : D \to B_n$ является Q_n-квазиконформным и, в силу ограниченности областей D и B_n, прямое отображение w_n и обратное к нему w_n^{-1} принадлежат классам $W^{1,2}$ в соответствующих областях.

Здесь и ниже для произвольного отображения $u(x) = (u_1, u_2) : D \to \mathbf{R}^2$ класса $W^{1,1}_{\text{loc}}(D)$ в каждой точке $x = (x_1, x_2) \in D$ дифференцируемости $u(x)$ полагаем

$$\Lambda(x,u) = |\nabla u_1(x)|^2 + |\nabla u_2(x)|^2.$$

Символом $J(x,u)$ обозначаем якобиан

$$J(x,u) = (u_1(x))'_{x_1}\,(u_2(x))'_{x_2} - (u_1(x))'_{x_2}\,(u_2(x))'_{x_1}\,.$$

Ключевую роль в доказательстве играет следующая априорная оценка интеграла Дирихле для квазиконформных отображений $w_n : D \to \mathbf{R}^2$.

Лемма 3.4.1. *Пусть $U \subset\subset D$ — подобласть области D. Предположим, что функция $\mathcal{P}(x)$, определяемая соотношением* (3.1.4), *является $W^{1,2}$-мажорируемой в D так, что для некоторой функции $K \in W^{1,2}(D)$ почти всюду в D выполнено $\mathcal{P}(x) \le K(x)$.*

Тогда справедлива оценка

$$\int\limits_U \Lambda(x, w_n)\, dx_1 dx_2 \le c_1 \int\limits_D |w_n|^2 \left(K^2 + |\nabla K|^2\right)\, dx_1 dx_2\,, \tag{3.4.10}$$

где c_1 — постоянная, зависящая только от U и D.

Идея *доказательства* восходит к работе В.М. Миклюкова и Г.Д. Суворова [85]. Как будет видно из дальнейших рассуждений, мы можем предполагать, что каждое из квазиконформных отображений $w_n : D \to \mathbf{R}^2$, $n = 1, 2, \ldots$, принадлежит классу $C^2(D)$. Этого всегда можно добиться за счет подходящей аппроксимации этих отображений гладкими.

Пусть η, ζ и h суть C^2-функции, определенные в области $V \subset \mathbf{R}^2$ с гладкой границей. По формуле Грина мы имеем

$$\int\limits_{\partial V} \eta\,\zeta\, dh = \int\limits_V d\,(\eta\,\zeta) \wedge dh =$$

$$= \int\limits_V \eta\, d\zeta \wedge dh + \int\limits_V \zeta\, d\eta \wedge dh\,,$$

где символом $\wedge$ обозначено внешнее произведение дифференциальных 1-форм.

Если функция η обращается в нуль на границе ∂V, то мы приходим к следующей формуле "интегрирования по частям"

$$\int\limits_V \eta\, d\zeta \wedge dh = -\int\limits_V \zeta\, d\eta \wedge dh. \tag{3.4.11}$$

Фиксируем теперь последовательность $\{K_l\}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ функций класса C^1, обладающую свойством

$$||K_l - K||_{W^{1,2}(D)} \to 0 \quad \text{при} \quad l \to \infty. \tag{3.4.12}$$

Выберем произвольно неотрицательную C^1-функцию $\varphi : D \to \mathbf{R}$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset D$ так, чтобы $\varphi \equiv 1$ на U.

Положим в (3.4.11) в качестве функций $\eta = \varphi^2 K_l$, $\zeta = u_{1n}$, $h = u_{2n}$ и области V — внутренность компакта $\operatorname{supp}\varphi$. Не умаляя общности, можно считать V связной областью с гладкой границей. По формуле интегрирования по частям (3.4.11), имеем

$$\int\limits_V \varphi^2\, K_l\, J(x,w_n)\, dx_1dx_2 = -\int\limits_V u_{1n}\, d\left(\varphi^2\, K_l\right) \wedge du_{2n} =$$

$$= -2\int\limits_V \varphi\, u_{1n}\, K_l\, d\varphi \wedge du_{2n} - \int\limits_V \varphi^2\, u_{1n}\, dK_l \wedge du_{2n}.$$

Таким образом, при всяком $l = 1, 2, \ldots$ находим

$$\int\limits_V \varphi^2\, K_l\, J(x,w_n)\, dx_1dx_2 =$$

$$= -2\int\limits_V \varphi\, u_{1n}\, K_l\, \left(\varphi^\prime_{x_1}(u_{2n})^\prime_{x_2} - \varphi^\prime_{x_2}(u_{2n})^\prime_{x_1}\right)\, dx_1dx_2 -$$

$$-\int\limits_V \varphi^2 u_{1n}\, \left(K^\prime_{lx_1}(u_{2n})^\prime_{x_2} - K^\prime_{lx_2}(u_{2n})^\prime_{x_1}\right)\, dx_1dx_2.$$

Это приводит в свою очередь к оценке

$$\int\limits_D \varphi^2 K_l\, J(x,w_n)\, dx_1dx_2 \le$$

$$\le 2\int\limits_D \varphi\, |u_{1n}|\, |K_l|\, \left|\varphi^\prime_{x_1}(u_{2n})^\prime_{x_2} - \varphi^\prime_{x_2}(u_{2n})^\prime_{x_1}\right|\, dx_1dx_2 +$$

$$+\int\limits_D \varphi^2 |u_{1n}|\, \left|(K_l)^\prime_{x_1}(u_{2n})^\prime_{x_2} - (K_l)^\prime_{x_2}(u_{2n})^\prime_{x_1}\right|\, dx_1dx_2\,,$$

откуда

$$\int\limits_D \varphi^2\, K_l\, J(x,w_n)\, dx_1 dx_2 \;\; \le 2 \int\limits_D \varphi\, |u_{1n}|\, |K_l|\, |\nabla\varphi|\; |\nabla u_{2n}|\; dx_1 dx_2 + \\ + \int\limits_D \varphi^2\, |u_{1n}|\; |\nabla K_l|\; |\nabla u_{2n}|\, dx_1 dx_2\,.$$

Полагая теперь $l \to \infty$ и пользуясь соотношением (3.4.12), мы получаем

$$\int\limits_D \varphi^2\, K\, J(x,w_n)\, dx_1 dx_2 \;\; \le 2 \int\limits_D \varphi\, |u_{1n}| K\, |\nabla\varphi|\; |\nabla u_{2n}|\; dx_1 dx_2 + \\ + \int\limits_D \varphi^2\, |u_{1n}|\; |\nabla K|\; |\nabla u_{2n}|\, dx_1 dx_2\,. \tag{3.4.13}$$

Далее мы замечаем, что из определения квазиконформности следует

$$\begin{aligned} |\nabla u_{1n}|^2 + |\nabla u_{2n}|^2 \;\; &= (p_n + 1/p_n)\, J(x,w_n) \le \\ &\le 2p_n\, J(x,w_n) \le 2K(x)\, J(x,w_n)\,. \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Объединяя (3.4.13) с "неравенством Коши с $\epsilon > 0$",

$$|ab| \le \frac{\epsilon^2}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} b^2\,,$$

мы находим

$$\int\limits_D \varphi^2 \left(|\nabla u_{1n}|^2 + |\nabla u_{2n}|^2\right) dx_1 dx_2 \le$$

$$\le 2 \int\limits_D \varphi^2 K(x)\, J(x, w_n)\, dx_1 dx_2 \le$$

$$\le 4 \int\limits_D \varphi\, |u_{1n}| K|\, \nabla\varphi|\, |\nabla u_{2n}|\, dx_1 dx_2 +$$

$$+2 \int\limits_D \varphi^2\, |u_{1n}|\, |\nabla K|\, |\nabla u_{2n}|\, dx_1 dx_2 \le$$

$$\le 3\epsilon^2 \int\limits_D \varphi^2 |\nabla u_{2n}|^2 dx_1 dx_2 + \frac{2}{\epsilon^2} \int\limits_D |u_{1n}|^2\, K^2 |\nabla\varphi|^2\, dx_1 dx_2 +$$

$$+\frac{1}{\epsilon^2} \int\limits_D \varphi^2\, |u_{1n}|^2\, |\nabla K|^2\, dx_1 dx_2.$$

Выберем $\epsilon > 0$ так, чтобы $3\epsilon^2 < 1$ (например, $\epsilon = 1/2$.) Тогда

$$\int\limits_D \varphi^2 \left(|\nabla u_{1n}|^2 + |\nabla u_{2n}|^2\right) dx_1 dx_2 \le$$

$$\le c_2 \left(\int\limits_D |u_{1n}|^2\, K^2 |\nabla\varphi|^2\, dx_1 dx_2 + \int\limits_D \varphi^2\, |u_{1n}|^2\, |\nabla K|^2\, dx_1 dx_2 \right),$$

где c_2 — постоянная.

Поскольку $\varphi \equiv 1$ на U, находим

$$\int\limits_U \Lambda(x, w_n)\, dx_1 dx_2 \le$$

$$\le c_2 \left(M_1(\varphi) \int\limits_D |w_n|^2 K^2\, dx_1 dx_2 + M_2(\varphi) \int\limits_D |w_n|^2 |\nabla K|^2\, dx_1 dx_2 \right).$$

При этом, постоянные

$$M_1(\varphi) = \sup_{x \in D} |\nabla \varphi(x)|^2, \quad M_2(\varphi) = \sup_{x \in D} \varphi^2(x)$$

могут быть сделаны зависимыми только от областей U и D. Данное замечание завершает доказательство леммы 3.4.1. $\Box$

Нам потребуется также оценка интеграла Дирихле для обратных отображений $w_n^{-1} : B_n \to D$, выполняющаяся при каждом фиксированном $n = 1, 2, \ldots$.

Лемма 3.4.2. *Пусть $U \subset D$ и $V \subset B_n$ — подобласти, причем $w_n(U) \supset V$. Если характеристика $p(x)$ является $W^{1,2}$-мажорируемой в D, то*

$$\int\limits_V \Lambda(\xi, w_n^{-1})\, d\xi_1 d\xi_2 \le \int\limits_U K(x)\, dx_1 dx_2. \tag{3.4.15}$$

Доказательство весьма просто. Напомним предварительно формулу замены переменных для $W^{1,2}$-гомеоморфизмов $w_n : D \to B_n$ (см., например, [25, теорема **2.4**]). Для произвольной измеримой по Лебегу в круге B_n функции $h(\xi)$ при всяком $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\int\limits_{B_n} h(\xi)\, d\xi_1 d\xi_2 = \int\limits_D h \circ w_n\, J(x, w_n)\, dx_1 dx_2. \tag{3.4.16}$$

Пусть $\xi \in B_n$ — точка дифференцируемости обратного отображения w_n^{-1}, где $dw_n^{-1}(\xi) \ne 0$. Бесконечно малый круг с центром в точке $w_n^{-1}(\xi)$ имеет своим прообразом при отображении dw_n^{-1} бесконечно малый эллипс. Обозначим через $p(\xi, w_n^{-1})$ отношение большей оси этого эллипса к меньшей. Если $\xi = w_n(x)$, то, очевидно,

$$p(\xi, w_n^{-1}) = p_n(x) \le K(x), \tag{3.4.17}$$

Так как отображения w_n и w_n^{-1} являются квазиконформными, то они обладают N-свойством Лузина, а потому соотношения (3.4.17) выполняются для почти всех $x \in D$ и почти всех $\xi \in B_n$.

Пользуясь (3.4.14), имеем

$$\int\limits_V \Lambda(\xi, w_n^{-1})\, d\xi_1 d\xi_2 \leq 2 \int\limits_V p(\xi, w_n^{-1})\, J(\xi, w_n^{-1})\, d\xi_1 d\xi_2.$$

На основании формулы замены переменных (3.4.16), учитывая (3.4.17), находим

$$\int\limits_V p(\xi, w_n^{-1})\, J(\xi, w_n^{-1})\, d\xi_1 d\xi_2 = \int\limits_{w_n^{-1}(V)} p_n(x)\, dx_1 dx_2.$$

Условие $w_n(U) \supset V$ совместно с соотношением (3.4.17) приводят к нужной оценке. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. В соответствии с определением последовательность $F_n^{-1} : \Omega \to B_n$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к гомеоморфизму $F^{-1} : \Omega \to B(0, R)$ равномерно на всякой подобласти $\Omega_1 \subset\subset \Omega$. Так как $F_n^{-1} = w_n \circ f^{-1}$, то последовательность Q_n-квазиконформных отображений $w_n = F_n^{-1} \circ f$ обладает свойствами (3.1.3) и сходится равномерно внутри D к гомеоморфизму $w : D \to B(0, R)$.

Зафиксируем подобласти U и D_1 области D так, чтобы $U \subset\subset D_1 \subset\subset D$. В силу сказанного выше,

$$\sup_{x \in D_1} |w_n(x)| \leq C(D_1) \quad \text{для всех} \quad n = 1, 2, \ldots$$

с некоторой постоянной $C(D_1) < \infty$. Тем самым, из неравенства (3.4.10) вытекает

$$\int\limits_U \Lambda(x, w_n)\, dx_1 dx_2 \leq C_1(U, D) \int\limits_{D_1} \left(K^2 + |\nabla K|^2\right)\, dx_1 dx_2\,,$$

где $C_1(U, D) = c_1\, C^2(D_1)$ — постоянная.

Другими словами, последовательность $W^{1,2}$-гомеоморфизмов w_n имеет равностепенно ограниченные интегралы Дирихле по подобласти U. В силу замкнутости класса отображений с ограниченным интегралом Дирихле относительно равномерной сходимости (см., например, теорему 1 монографии Г.Д. Суворова [106, §1, глава I]), заключаем, что предельное отображение $w : D \to B(0, R)$ принадлежит классу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$.

Предположим теперь, что вектор-функция $f^{-1} : \Omega \to D$ принадлежит классу $W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ для некоторого $2 \le \alpha < \infty$. Тогда для произвольной подобласти $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ имеем

$$\int\limits_{\Omega_1} \Lambda^{1/2}(y, F^{-1})\, d\,\mathrm{area}_\Omega \le \int\limits_{\Omega_1} \Lambda^{1/2}(x,w)\,\Lambda^{1/2}(y,f^{-1})\, d\mathrm{area}_\Omega =$$

$$= \int\limits_{U} \Lambda^{1/2}(x,w)\,\Lambda^{1/2}(y,f^{-1})\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\, dx_1dx_2 \le$$

$$\le \left(\int\limits_U \Lambda(x,w)\, dx_1dx_2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_U \Lambda^{\alpha/2}(y,f^{-1})\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\, dx_1dx_2\right)^{1/\alpha} \times$$

$$\times \left(\int\limits_U \left(g_{11}g_{22}-g_{12}^2\right)^{\beta/2}\, dx_1dx_2\right)^{1/\beta}.$$

Здесь обозначено $U = f^{-1}(\Omega_1)$, причем ясно, что $U \subset\subset D$. Таким образом, предположение (3.2.7) влечет принадлежность F^{-1} классу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, что доказывает утверждение (iii) теоремы.

Далее, как и выше, замечаем, что последовательность отображений $F_n : B_n \to \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к гомеоморфизму $F : B(0,R) \to \Omega$ равномерно на всякой подобласти $\Delta' \subset\subset B(0,R)$. Так как $F_n = f \circ w_n^{-1}$, то последовательность Q_n-квазиконформных отображений $w_n^{-1} = f^{-1} \circ F_n$ сходится равномерно внутри ядра $B(0,R)$ к гомеоморфизму $w^{-1} : B(0,R) \to D$. Пользуясь оценкой (3.4.15) и замкнутостью класса отображений с равностепенно ограниченным интегралом Дирихле относительно равномерной сходимости, как и в предыдущем случае, выводим, что $w^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(B(0,R))$.

Таким образом, каждое из отображений w и w^{-1} принадлежат классу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ в соответствующей области и, следовательно, обладает N-свойством Лузина (см., например, Я. Малый [184, теорема B]). Выполнение свойства (i) теоремы теперь очевидно.

Нам осталось доказать свойство (ii). Полагая $w(U) = \Delta'$, мы имеем

$$\int\limits_{\Delta'} \Lambda^{1/2}(\xi, F)\, d\xi_1 d\xi_2 \le \int\limits_{\Delta'} \Lambda^{1/2}(x, f)\, \Lambda^{1/2}(\xi, w^{-1})\, d\xi_1 d\xi_2 \le$$

$$d \ \le \left(\int\limits_{\Delta'} \Lambda(x, f)\, J(\xi, w^{-1})\, d\xi_1 d\xi_2\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Delta'} \frac{\Lambda(\xi, w^{-1})}{J(\xi, w^{-1})}\, d\xi_1 d\xi_2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int\limits_{U} \Lambda(x, f)\, dx_1 dx_2\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Delta'} \frac{\Lambda(\xi, w^{-1})}{J(\xi, w^{-1})}\, d\xi_1 d\xi_2\right)^{1/2}.$$

Здесь мы воспользовались также формулой замены переменных (3.4.16), что возможно, поскольку $w^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(B(0,R))$ (см., например, теорему **6.1** из работы Ю. Хейнонена и П. Коскелы [160]).

Заметим теперь, что

$$\frac{\Lambda(\xi, w^{-1})}{J(\xi, w^{-1})} \le 2p(\xi, w^{-1})$$

и при $\xi = w(x)$ выполнено $p(\xi, w^{-1}) = p(x)$. Отсюда, в силу леммы 3.4.1, заключаем, что

$$\int\limits_{\Delta'} \frac{\Lambda(\xi, w^{-1})}{J(\xi, w^{-1})}\, d\xi_1 d\xi_2 \ \le 2 \int\limits_{U} p(x)\, J(x, w)\, dx_1 dx_2 \le$$

$$\le 2 \int\limits_{U} \Lambda(x, w)\, dx_1 dx_2 < \infty.$$

Таким образом, $F \in W^{1,1}_{\rm loc}(B(0,R))$. Теорема доказана полностью. $\Box$

3.5 Доказательство теоремы 3.1.1

Пусть $\xi_0 \in \mathbf{R}^2$ — точка, $0 < t' < t'' < \infty$ — пара фиксированных чисел. Обозначим через

$$S(\xi_0, r) = \{\xi \in \mathbf{R}^2 : |\xi - \xi_0| = r\}$$

окружность с центром ξ_0 и радиусом $t' < r < t''$.

Пусть V — область в $\mathbf{R}^2$. Для произвольного r, $t' < r < t''$, пусть $S_V(\xi_0, r)$ — какая-либо из компонент связности множества $S(\xi_0, r) \cap V$. При этом мы предполагаем, что данные компоненты связности выбраны таким образом, что семейство дуг $\{S_V(\xi_0, r)\}$ заметает при $t' < r < t''$ некоторое связное подмножество

$$K_V(\xi_0, t', t'') = \cup_{t'<r<t''} S_V(\xi_0, r)$$

области V.

Нам будет необходимо следствие из принципа длины и площади (см. теорему 1.9.1 или [106, §6, глава III, часть I]).

Лемма 3.5.1. *Пусть $g : V \to \mathbf{R}^2$ — вектор-функция класса $W^{1,2}(V)$. Справедлива оценка*

$$\int\limits_{t'}^{t''} \operatorname{osc}^2 \left(g, S_V(\xi_0, r)\right) \frac{dr}{r} \le c_3 \, I(g) \,, \tag{3.5.18}$$

где c_3 — абсолютная постоянная и

$$I(g) = \int\limits_{K_V} \Lambda(\xi, w_n^{-1}) \, d\xi_1 d\xi_2, \quad K_V = K_V(\xi_0, t', t'').$$

Пусть $\{F_n : B_n \to \Omega\}$ — произвольная последовательность канонических представлений поверхности Ω, соответствующая последовательности $\{Q_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $F_n = f \circ w_n^{-1}$, где $w_n : D \to B_n$ суть Q_n-квазиконформные отображения, нормированные условиями (3.1.3). Здесь $B_n = B(0, R_n)$ и $1 < R_n \le \infty$. Покажем сначала, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} R_n = R < \infty. \tag{3.5.19}$$

Предположим, что соотношение (3.5.19) не выполнено. Выберем в лемме 3.5.1 точку $\xi_0 = 0$, числа $t' = 1$, $t'' = R_n > 1$ и $g = w_n^{-1}$. Неравенство (3.5.18) влечет

$$\inf_{1<r<R_n} \operatorname{osc} \left(w_n^{-1}, S(0, r)\right) \le c_3^{1/2} \, I^{1/2}(w_n^{-1}) \ln^{-1/2} R_n.$$

Отображения w_n^{-1} гомеоморфны, а потому при всяком $r \in (t', t'')$ выполнено

$$\operatorname{osc}\left(w_n^{-1}, B(0,r)\right) \le \operatorname{osc}\left(w_n^{-1}, S(0,r)\right).$$

Выбирая в лемме 3.4.2 подобласти $U = D$ и $V = B_n$, имеем

$$I(w_n^{-1}) \le \int\limits_D K(x)\, dx_1 dx_2 \equiv A(D). \tag{3.5.20}$$

В силу нормировки (3.1.3), при всяком $r > 1$ точки a_0, a_1 лежат в областях $w_n^{-1}(B(0,r))$, а потому

$$|a_1 - a_0| \le \operatorname{osc}\left(w_n^{-1}, B(0,r)\right), \quad 1 < r < R_n.$$

Объединяя (3.5.18) и (3.5.20), находим

$$|a_1 - a_0| \le c_3^{1/2}\, A^{1/2}(D)\, \ln^{-1/2} R_n. \tag{3.5.21}$$

При достаточно больших $R_n > 1$ неравенство (3.5.21) не верно. Тем самым, соотношение (3.5.19) доказано. Более того, неравенство (3.5.21) может служить источником для нетривиальной оценки сверху радиусов R_n. Именно, из (3.5.21) следует, что

$$\ln R_n \le \frac{c_3 A(D)}{|a_1 - a_0|^2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, находим

$$\ln R \le \frac{c_3\, A(D)}{|a_1 - a_0|^2}. \tag{3.5.22}$$

Покажем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} R_n > 1. \tag{3.5.23}$$

Воспользуемся леммой 3.5.1. Зафиксируем $n = 1, 2, \ldots$. Выберем $V = B(0, R_n)$ и $g = w_n^{-1}$. Рассмотрим семейство окружностей с центром в точке $a_n = (R_n, 0)$ и радиусами $t' < r < t''$, где $t' = R_n - 1$, $t'' = R_n$. В силу соотношения (3.5.18) можно записать

$$\inf_{t'<r<t''} \operatorname{osc}\,(w_n^{-1}, S_V(a_n, r)) \le c_3^{1/2} I^{1/2}(w_n^{-1}) \ln^{-1/2} \frac{R_n}{R_n - 1}.$$

Учитывая оценку (3.5.20), заключаем о существовании

$$\overline{r}, \quad R_n - 1 < \overline{r} < R_n,$$

такого, что

$$\operatorname{osc}(w_n^{-1}, S_V(a_n,\overline{r})) \le c_3^{1/2} A^{1/2}(D) \ln^{-1/2} \frac{R_n}{R_n - 1}.$$

Таким образом, в области D найдется дуга

$$\gamma = w_n^{-1}\left(S_V(a_n,\overline{r})\right),$$

диаметр $d(\gamma)$ которой удовлетворяет неравенству

$$d(\gamma) \le c_3^{1/2} A^{1/2}(D) \ln^{-1/2} \frac{R_n}{R_n - 1}. \tag{3.5.24}$$

Дуга γ отделяет в области D точку a_1 от точки a_0 и имеет своими концами точки на границе ∂D. Пусть $\delta(a_0,a_1)$ есть точная нижняя грань диаметров таких дуг γ. Тем самым, из (3.5.24) вытекает, что

$$\ln \frac{R_n}{R_n - 1} \le \frac{c_3\, A(D)}{\delta^2(a_0,a_1)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, находим

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} \le R, \quad \text{где} \quad \lambda = \exp\left\{\frac{c_3\, A(D)}{\delta^2(a_0,a_1)}\right\}. \tag{3.5.25}$$

Это доказывает (3.5.23).

Докажем равностепенную равномерную непрерывность внутри областей B_n отображений w_n^{-1}, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $V \subset\subset B_n$ — подобласть круга B_n, содержащая точки $\xi = (0,0)$ и $\xi = (1,0)$. Выберем произвольную пару точек ξ', $\xi'' \in V$ так, чтобы

$$|\xi'' - \xi'| < \min\{1, \operatorname{dist}^2(V, \partial B_n)\}. \tag{3.5.26}$$

Рассмотрим семейство окружностей $\{S(\xi', r)\}$ с центром ξ' и радиусом $r \in (t', t'')$, где

$$t' = |\xi'' - \xi'|, \quad t'' = |\xi'' - \xi'|^{1/2}.$$

Оценка (3.5.18), примененная к вектор-функции w_n^{-1} и области $B_n = B(0, R_n)$, влечет

$$\inf_{t' < r < t''} \operatorname{osc}(w_n^{-1}, S(\xi', r)) \le c_3^{1/2} I^{1/2}(w_n^{-1}) \ln^{-1/2} \frac{1}{|\xi'' - \xi'|^{1/2}}.$$

Как и выше, пользуясь (3.5.20), отсюда легко заключаем о справедливости следующего утверждения.

Лемма 3.5.2. *Если характеристика $\mathcal{P}(x)$ обладает в области $D \subset \mathbf{R}^2$ свойством $W^{1,2}$-мажорируемости, то для произвольной пары точек ξ', $\xi'' \in V$, подчиненной условию* (3.5.26), *выполнено*

$$|w_n^{-1}(\xi'') - w_n^{-1}(\xi')| \le c_3^{1/2}\, A^{1/2}(D)\, \ln^{-1/2} \frac{1}{|\xi'' - \xi'|^{1/2}}. \tag{3.5.27}$$

Докажем равностепенную равномерную непрерывность внутри D отображений w_n, $n = 1, 2, \ldots$. По наперед заданной подобласти $U \subset\subset D$ фиксируем подобласть D_1 так, чтобы

$$U \subset\subset D_1 \subset\subset D.$$

В силу (3.5.19), существует номер N такой, что для всех $n > N$ имеем $R_n \le 2R$. Согласно лемме 3.4.1, для $n > N$ находим

$$\int\limits_{D_1} \Lambda(x, w_n)\, dx_1 dx_2 \le 2\, c_1\, R \int\limits_{D} (K^2 + |\nabla K|^2)\, dx_1 dx_2 \equiv B(D_1, D)\,,$$

где $B(D_1, D)$ — постоянная, зависящая только от $\|K\|_{W^{1,2}(D)}$ и подобластей D_1, D.

Пусть x', $x'' \in U$ — произвольная пара точек, для которой

$$|x'' - x'| \le \min\{1, \mathrm{dist}^2(U, \partial D_1)\}. \tag{3.5.28}$$

В точности так же, как и выше, устанавливается

Лемма 3.5.3. *Предположим, что функция $\mathcal{P}(x)$ обладает в области $D \subset \mathbf{R}^2$ свойством $W^{1,2}$-мажорируемости. Тогда если точки x', $x'' \in U$ подчинены условию* (3.5.28), *то при всяком $n > N$ выполнено*

$$|w_n(x'') - w_n(x')| \le c_3^{1/2}\, B^{1/2}(D_1, D)\, \ln^{-1/2} \frac{1}{|x'' - x'|}. \tag{3.5.29}$$

Выберем подпоследовательность $\{R_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому пределу R, $1 < R < \infty$. Ясно, что соответствующая подпоследовательность кругов $\{B(0, R_{n_k})\}$ сходится к ядру $B(0, R)$ относительно точки $\xi = (0, 0)$ (определение сходимости к ядру и свойства ядра последовательности областей см., например, в [106, §3 главы II]). Подпоследовательность отображений $F_{n_k} = f \circ w_{n_k}^{-1} : B(0, R_{n_k}) \to D$ будет являться канонической последовательностью представлений поверхности Ω, соответствующей последовательности чисел Q_{n_k}.

Оценка (3.5.29) означает, что последовательность $\{w_{n_k}\}$ равностепенно равномерно непрерывна на всяком компактном подмножестве области D. Посредством стандартного диагонального процесса мы можем выбрать подпоследовательность $\{w_{n'_k}\}$ сходящуюся локально равномерно к некоторому непрерывному отображению $w : D \to \mathbf{R}^2$.

Соотношение (3.5.27) леммы 3.5.2 утверждает, что семейство $\{w_{n'_k}^{-1}\}$ обратных отображений равномерно непрерывно на любом компактном подмножестве круга $B(0, R)$, а потому предельное для $w_{n'_k}$ отображение w есть гомеоморфизм. Ясно, что w также удовлетворяет условиям нормировки (3.1.3). При этом, в силу замкнутости класса $W^{1,2}$-функций с ограниченным интегралом Дирихле, пользуясь (3.4.10) и (3.4.15), заключаем, что $w \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ и $w^{-1} \in W^{1,2}(B(0, R))$.

Лемма 3.5.4. *Пусть $g_k(x) : D \to \mathbf{R}^2$, $k = 1, 2, \ldots,$ — последовательность Q_k-квазиконформных гомеоморфизмов с распределениями характеристик $(p_k(x), \theta_k(x))$, локально равномерно в области D сходящаяся к некоторому гомеоморфизму класса $W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ с распределением характеристик $(p(x), \theta(x))$.*

Если для всякой подобласти $U \subset\subset D$ существует постоянная $M(U)$, $0 < M(U) < \infty$, такая, что

$$\int\limits_U \Lambda(x, g_k)\, dx_1 dx_2 \le M(U) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.5.30}$$

и почти всюду в D при $k \to \infty$ выполнено

$$(p_k(x), \theta_k(x)) \to (p_\infty(x), \theta_\infty(x)),$$

то $(p_\infty(x), \theta_\infty(x)) = (p(x), \theta(x))$ почти всюду в D.

Доказательства см. В.И. Кругликов [45, теорема 2] или В.Я. Гутлянский, О. Мартио, Т. Сугава и М. Вуоринен [156, предложение 3.1].

Последовательность $W^{1,2}$-гомеоморфизмов $w_{n'_k}(x)$ локально равномерно в D сходится при $n'_k \to \infty$ к гомеоморфизму $w(x) : D \to B(0, R)$, обладает согласно лемме 3.4.15 свойством (3.5.30), и, по построению, удовлетворяет другим предположениям леммы 3.5.4. Таким образом, предельный гомеоморфизм $w(x) : D \to B(0, R)$ имеет почти всюду в D характеристики $(p(x), \theta(x))$.

Не трудно видеть, что вектор-функция $F = f \circ w^{-1}$ определяет изотермические координаты на поверхности Ω. Действительно, вектор-функция $f : D \to \mathbf{R}^m$ дифференцируема почти всюду в D и удовлетворяет (3.1.1). Отображения w, w^{-1} дифференцируемы почти всюду в областях D и $B(0, R)$, соответственно, а также обладают N-свойством Лузина. Тем самым, очевидно, композиция $F = f \circ w^{-1}$ является дифференцируемой почти везде и почти везде в $B(0, R)$ удовлетворяет (3.1.1).

При этом, почти в каждой точке ее дифференцируемости она преобразует бесконечно малые круги в $B(0,R)$ в бесконечно малые круги на поверхности Ω. Это означает, что почти всюду в D вектор-функция F удовлетворяет (2.1.2).

Докажем единственность найденного изотермического представления поверхности Ω. Предположим, что существуют два различных таких канонических гомеоморфизма F_1 и F_2. Это означает, что существуют два различных квазиконформных отображения $g : D \to B(0,R')$ и $h : D \to B(0,R'')$, удовлетворяющие условиям (3.1.3) нормировки и имеющие одно и то же распределение характеристик (p,θ). Мы можем записать

$$F_1 = f \circ g^{-1} : B(0,R') \to \Omega, \quad F_2 = f \circ h^{-1} : B(0,R'') \to \Omega.$$

Необходимо доказать, что отображение $\varphi = F_1^{-1} \circ F_2$ является тождественным. Мы имеем

$$\varphi = \left(g \circ f^{-1}\right) \circ \left(f \circ h^{-1}\right) = g \circ h^{-1}.$$

Так как g, h^{-1} отображения классов $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$, то $\varphi \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}\left(B(0,R'')\right)$. С другой стороны, отображение φ почти всюду преобразует бесконечно малые круги в бесконечно малые круги. Тем самым, данное отображение является отображением с ограниченным искажением и, следовательно, конформным в традиционном смысле этого слова (теорема **1.1** статьи П. Коскелы и Я. Малого [173] или следствие **5.3.1** в разделе **5.3** монографии Т. Иванца и Г. Мартина [164] и определение отображений с ограниченным искажением при минимальных аналитических предположениях — там же). Конформное преобразование φ отображает круг $B(0,R'')$ на круг $B(0,R')$, оставляя неподвижными точки $(0,0)$ и $(1,0)$. Это возможно лишь тогда, когда $R' = R''$ и $\varphi \equiv \xi$. Т.е. $\varphi = F_1^{-1} \circ F_2$ есть тождественное преобразование, а $F_1 \equiv F_2$.

Единственность канонического гомеоморфизма

$$F = f \circ w^{-1} : B(0,R) \to \Omega$$

влечет в свою очередь, что всякая подпоследовательность

$$\{F_{n_k} : \ B(0,R_{n_k}) \to D\}$$

последовательности гомеоморфизмов

$$\{F_n = f \circ w_n^{-1} : B(0,R_n) \to D\}$$

имеет своим пределом одно и то же отображение F. Это означает, в частности, что

$$\varliminf_{n\to\infty} R_n = \varlimsup_{n\to\infty} R_n$$

и что последовательность областей B_n сходится к ядру $B = B(0, R)$. Теорема полностью доказана. $\Box$

3.6 Билипшицевы поверхности

Предположим, что поверхность $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, заданная вектор-функцией (2.1.1), является локально билипшицевой. Для произвольной точки $x \in D$ полагаем

$$\lambda(x) = \varliminf_{x' \to x} \frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} \quad \text{и} \quad \Lambda(x) = \varlimsup_{x' \to x} \frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|}\,.$$

Условие локальной билипшицевости влечет

$$0 < \lambda(x) \le \Lambda(x) < \infty \quad (x \in D)\,.$$

С другой стороны, для коэффициентов g_{11} и g_{22} первой квадратичной формы поверхности Ω в каждой точке $x \in D$ дифференцируемости f имеем

$$g_{11} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2 \le \Lambda^2, \;\; g_{22} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2 \le \Lambda^2\,.$$

Несложно оценить коэффициент искажения площади при отображении $f : D \to \Omega$. Действительно, для произвольной точки $x \in D$, в которой отображение f дифференцируемо, и произвольного круга $B(x, r) \subset D$ мы имеем

$$\operatorname{mes}_2 f(B(x,r)) = \int\limits_{B(x,r)} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dx_1 dx_2 \ge \pi \min_{|x'-x|=r} |f(x') - f(x)|^2\,.$$

Отсюда находим

$$\varliminf_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B(x,r)} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dx_1 dx_2 \ge \pi \varliminf_{r \to 0} \frac{|f(x') - f(x)|^2}{r^2}\,,$$

и почти всюду в D выполнено

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \ge \lambda^2\,.$$

Таким образом, для функции $\mathcal{P}(x)$, определяемой равенством (3.1.4), будем иметь

$$\mathcal{P}(x) \le \frac{2\Lambda^2(x)}{\lambda^2(x)}\,. \tag{3.6.31}$$

В рассматриваемом случае теоремы 3.1.1 и 3.2.1 можно объединить следующим образом.

Теорема 3.6.1. *Пусть Ω — двумерная односвязная поверхность, вложенная в $\mathbf{R}^m$ посредством вектор-функции* (2.1.1)*, заданной в области $D \subset \mathbf{R}^2$ и локально билипшицевой. Предположим, что функция $\Lambda^2(x)/\lambda^2(x)$ является $W^{1,2}$-мажорируемой в области D.*

Тогда на Ω существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, определяемые каноническим гомеоморфизмом $y = F(\xi) : B(0,R) \to \mathbf{R}^m$ и обладающими свойствами, описанными в теореме 3.1.1.

При этом $F \in W^{1,2}_{\text{loc}}(B(0,R))$ и $F^{-1} \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что соотношение (3.6.31) обеспечивает $W^{1,2}$-мажорируемость в D функции (3.1.4) и, тем самым, применимость теоремы 3.1.1.

Так как $F = f \circ w^{-1}$, где w и w^{-1} суть гомеоморфизмы класса $W^{1,2}_{\text{loc}}$ и f – локально билипшицево отображение, то F, очевидно, обладает нужными свойствами. $\Box$

3.7 Квазиконформные отображения

Предположим, что в односвязной области $D \subset \mathbf{R}^2$ задана произвольная пара измеримых характеристик $(p(x), \theta(x))$, причем $p(x)$ является $W^{1,2}$-мажорируемой в D. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3.1.1, убеждаемся в справедливости следующего высказывания.

Теорема 3.7.1. *Существует гомеоморфное отображение $\xi = w(x) : D \to \mathbf{R}^2$ со свойствами:*

i) w, $w^{-1} \in W^{1,2}$ в D и $\mathcal{D} = w(D)$, соответственно;

ii) почти всюду в D отображение $w(x)$ имеет характеристики $(p(x), \theta(x))$.

Соответствующий результат имеет место в случае областей произвольной связности [185].

Теорема 3.7.2. *Пусть D – произвольная подобласть $\mathbf{R}^2$ и пусть $(p(x), \theta(x))$ – распределение измеримых характеристик в D, причем $p(x)$ локально $W^{1,2}$-мажорируема в D.*

Тогда существует гомеоморфизм $\xi = w(x) : D \to \mathbf{R}^2$ со свойствами:

i) $w, w^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}$ *в областях* D *и* $\mathcal{D} = w(D)$*, соответственно;*

ii) почти всюду в D *отображение* $w(x)$ *имеет характеристики* $(p(x), \theta(x))$*;*

iii) отображение $\xi = w(x)$ *определено с точностью до конформного преобразования в плоскости переменных* (ξ_1, ξ_2)*.*

Доказательство. Пусть $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность подобластей D такая, что

$$D_1 \subset\subset D_2 \ldots \subset\subset D_n \ldots, \quad \cup_{n=1}^{\infty} D_n = D\,.$$

Пусть $R_n = \max_{x \in \overline{D}_n} |x|$ и пусть $p_n(x) = p(x)$ при $x \in D_n$, $p_n(x) = 1$ при $x \in \mathbf{R}^2 \setminus D_n$.

Распределение характеристик $(p_n(x), \theta(x))$ удовлетворяет предположениям теоремы 3.7.1 в каждом круге $|x| < R$. Фиксируем $a_1 \in D_1$, $a_1 \neq 0$. По теореме 3.7.1 существует гомеоморфизм $\xi = w_n(x)$, $w_n(0) = 0$, $w_n(a_1) = a_1$, отображающий круг $|x| < R_n$ на подходящий круг $|\xi| < r_n$, имеющий почти всюду характеристики $(p_n(x), \theta(x))$ и такой, что $w_n \in W^{1,2}_{\rm loc}(B(R_n))$, $w_n^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(B(r_n))$.

В каждой, наперед заданной области D_{n_0} отображения $w_n(x)$, $n > n_0$, могут быть представлены в виде $w_n = \varphi_n \circ w_{n_0}(x)$, где φ_n суть конформны в области $\tilde{D}_{n_0} = w_{n_0}(D_{n_0})$. Так как $\varphi_n(0) = 0$ и $\varphi_n(a_1) = a_1$, то теорема 4.1 из [180] гарантирует существование подпоследовательности $\{\varphi_{n'}\}$, локально равномерно сходящейся в $\tilde{D}_{n_0}$ к некоторому конформному отображению $\varphi : \tilde{D}_{n_0} \to \mathbf{R}^2$. Тем самым, $\{w_n\}$ содержит подпоследовательность $\{w_{n'}\}$ квазиконформных отображений, локально равномерно в $\tilde{D}_{n_0}$ сходящуюся к гомеоморфизму $w_0 = \varphi \circ w_{n_0}$. По лемме 3.5.4 отображение w_0 имеет характеристики $(p(x), \theta(x))$ почти всюду в $\tilde{D}_{n_0}$.

Пользуясь диагональным процессом, находим подпоследовательность $w_{n''}$ равномерно внутри D сходящуюся к некоторому гомеоморфизму $w : D \to \mathbf{R}^2$ с распределением характеристик $(p(x), \theta(x))$. Ясно, что $w \in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ и $w^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(\mathcal{D})$. Это отображение единственно с точностью до конформного преобразования в плоскости ξ. $\Box$

Задачи: 1) Что именно следует понимать под изотермическими координатами в случае финслеровой метрики ? 2) Существуют ли изотермические координаты на абстрактных поверхностях общего вида ? 3) Доказать основные результаты главы при менее ограничительных условиях на поверхность Ω.

Глава 4

Граница поверхности

Ниже вводятся простые концы на двумерных, односвязных поверхностях в $\mathbf{R}^m$, аналогичные простым концам К. Каратеодори плоских областей. Даются оценки искажения относительного расстояния М.А. Лаврентьева при конформных отображениях локально билипшицевых поверхностей [80].

4.1 Относительное расстояние

Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – односвязная область и $O \in D$ – фиксированная точка. Пусть $U \subset D$ – открытое множество.

Уточним обозначения. Символом $\overline{U}$ мы обозначаем замыкание U в топологии $\mathbf{R}^2$. Далее полагаем $[U] = \overline{U} \setminus \partial D$, и $\partial' U = [U] \setminus U$.

Рассмотрим локально липшицеву поверхность Ω, вложенную в $\mathbf{R}^m$ посредством вектор-функции (3.3.8).

Пусть $D' = f(D) \subset \Omega$ – односвязная область и $O' = f(O)$. Если точки $a, b \in D'$, то пусть

$$\rho(a, b; O', D') = \min\{\rho_1(a, b),\ \rho_2(a, b)\}, \tag{4.1.1}$$

где ρ_1 есть точная нижняя грань длин (в метрике $\mathbf{R}^m$) замкнутых кривых $\gamma \subset D' \setminus \{O'\}$, отделяющих[1] a и b от точки O' и границы $\partial D'$; ρ_2 есть точная нижняя грань длин дуг, лежащих в $D' \setminus \{O'\}$ и отделяющих a и b от O' на поверхности D'.

Величина ρ называется *относительным расстоянием* между точками $a, b \in D' \setminus \{O'\}$.

[1] Дуга $\gamma \subset D$ отделяет точку $a \in D$ от точки $b \in D$, если для всякого пути $l \subset D$, соединяющего в D точки a и b, выполнено $l \cap \gamma \neq \emptyset$.

Относительное расстояния от точки $a \in D' \setminus \{O'\}$ до точки O' вводится соотношением

$$\rho(a, O'; O', D') = \lim_{\substack{b \to O' \\ b \neq O}} \rho(a, b; O', D').$$

Для плоской двумерной поверхности $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, очевидно, имеем

$$\rho(a, b; O', D') = \min\{2\rho_1^*(a, b), \rho_2(a, b)\}, \tag{4.1.2}$$

где ρ_1^* – точная нижняя грань длин дуг $\gamma \subset D' \setminus \{O'\}$, соединяющих точки a и b в D'.

Относительное расстояние (4.1.2) (без множителя 2 перед ρ_1^*) было введено М.А. Лаврентьевым в [54]. Г.Д. Суворов [105] привел контрпример, показывающий, что расстояние М.А. Лаврентьева не удовлетворяет аксиоме треугольника и заменил длины диаметрами. Вместе с тем оказывается, что положение можно исправить и менее радикальными средствами. Именно, имеет место следующий результат.

Теорема 4.1.1. *Если Ω – поверхность, заданная вектор-функцией* (3.3.8)*, то функция* (4.1.1) *определяет метрику в области $D' \subset \Omega$, удовлетворяющую аксиомам симметрии, тождества и треугольника.*

Доказательство. Так как поверхность Ω локально липшицева, то для произвольной пары точек $a, b \in D$ выполняется $\rho(a, b; O, D) < \infty$. Аксиома симметрии тривиальна. Докажем, что $\rho(a, b; O, D) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

Действительно, предположим, что $a \neq b$. Пусть $x' = y^{-1}(a)$, $x'' = y^{-1}(b)$ – прообразы этих точек в односвязной области $\Delta^* = y^{-1}(D)$, и пусть $O^* = y^{-1}(O)$. Отображение $y : \Delta^* \to D$ гомеоморфно, а потому $x' \neq x''$. Для плоских областей выполнение аксиомы тождества очевидно. Тем самым, $\rho(x', x''; O^*, \Delta^*) > 0$.

Предположения о гомеоморфности $y = y(x)$ и односвязности D влекут тогда, что и $\rho(a, b; O, D) > 0$.

Нам достаточно теперь проверить неравенство треугольника. Фиксируем произвольно точки $a, b, c \in \Omega \setminus \{O\}$. Естественным образом выделяются три случая.

В *первом случае* мы имеем

$$\rho(a, b; O, D) = \rho_1(a, b), \quad \rho(b, c; O, D) = \rho_1(b, c).$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Выберем замкнутые кривые γ_1, отделяющую a, b от O, ∂D, и γ_2, отделяющую b, c от O, ∂D так, что

$$\text{length}(\gamma_1) \leq \rho_1(a, b) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{length}(\gamma_2) \leq \rho_1(b, c) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$, то хотя бы одна из кривых отделяет другую, а, значит, и точки a, c от O и ∂D. Тем самым,

$$\begin{aligned} \rho_1(a,c) &\le \max\{\mathrm{length}(\gamma_1), \mathrm{length}(\gamma_2)\} \le \\ &\le \rho_1(a,b) + \rho_1(b,c) + \varepsilon \le \\ &\le \rho(a,b;O,D) + \rho(b,c;O,D) + \varepsilon \end{aligned}$$

для произвольного $\varepsilon > 0$.

Если $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$, то множество $\gamma_3 = \gamma_1 \cup \gamma_2$ является связной замкнутой кривой, отделяющей a, c от O и ∂D. Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho_1(a,c) \le\ & \rho_1(a,b) + \rho_1(b,c) + \varepsilon \le \\ & \le \rho(a,b;O,D) + \rho(b,c;O,D) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Полагая $\varepsilon \to 0$, приходим к нужному неравенству.

Во *втором случае* пусть

$$\rho(a,b;O,D) = \rho_2(a,b), \quad \rho(b,c;O,D) = \rho_2(b,c).$$

Выберем открытые дуги γ_1, γ_2, отделяющие a, b и b, c от O, соответственно, в D, причем так, чтобы для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнялось

$$\mathrm{length}(\gamma_1) \le \rho_2(a,b) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mathrm{length}(\gamma_2) \le \rho_2(b,c) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Здесь возможны в точности те же самые два подслучая, что и выше. В обоих вариантах мы получаем нужные неравенства.

В *третьем случае* достаточно рассмотреть ситуацию, в которой

$$\rho(a,b;O,D) = \rho_1(a,b), \quad \rho(b,c;O,D) = \rho_2(b,c)\,,$$

и выбрать

$$\mathrm{length}(\gamma_1) \le \rho_1(a,b) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mathrm{length}(\gamma_2) \le \rho_2(b,c) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Дальнейшие аргументы те же, что и выше. $\Box$

4.2 Простые концы

Мы воспользуемся известной схемой [105] введения простых концов К. Каратеодори [136] в плоских односвязных областях. Пусть Ω – поверхность, вложенная в $\mathbf{R}^m$ посредством вектор-функции (3.3.8). Рассмотрим произвольную односвязную подобласть $D \subset \Omega$ с фиксированной в ней точкой $O \in D$.

Пусть ρ – относительное расстояние в D, определенное выражением (4.1.1). Метрическое пространство (D,ρ) может быть пополнено классами эквивалентности фундаментальных последовательностей $\{a_k\}$, $a_k \in D$, не имеющих точек накопления в D. Классы эквивалентности $e^\rho = \{a_k\}$ таких последовательностей называются *простыми концами* области D (относительно метрики ρ). Область D вместе с присоединенными к ней простыми концами e^ρ будем обозначать через $\tilde{D}^\rho$.

Пусть $e_1^\rho = \{a'_k\}$, $e_2^\rho = \{a''_k\}$ – точки из $\tilde{D}^\rho$. Относительное расстояние между ними определяется выражением

$$\rho(e_1^\rho, e_2^\rho; O, \tilde{D}^\rho) = \lim_{k\to\infty} \rho(a'_k, a''_k; O, D).$$

Фиксируя вместо точки $O \in D$ другие внутренние точки области D, мы получаем различные метрики ρ в D и различные метрические пространства D^ρ. Пополнения $\tilde{D}^\rho \setminus D$ этих пространств совпадают. Чтобы убедиться в этом достаточно заметить, что всякая последовательность $\{a_k\}$ точек поверхности D, не имеющая предельных точек в D и фундаментальная в метрике $\rho(a,b;O',D)$, является фундаментальной также в метрике $\rho(a,b;O'',D)$.

Если область D односвязная собственная подобласть $\mathbf{R}^2$, то метрика ρ определена выражением (4.1.2). Несложно проверить, что в этом случае простые концы e^ρ области D суть простые концы К. Каратеодори [136], [105].

При изложении понятия тела простого конца мы следуем оригинальной статье В.П. Луференко и Г.Д. Суворова [59], где данное понятие исследуется в произвольных метрических пространствах. Относительно других способов введения конформно-инвариантных граничных элементов см. О.В. Иванов и Г.Д. Суворов [36], А.П. Кармазин [39].

Пусть $e_0 \in \tilde{D}$ – простой конец и $y_0 \in \mathbf{R}^m$ – точка. Если существует последовательность точек $a_k \in D$, $\rho(a_k, e_0; O, D) \to 0$, для которой $|a_k - y_0| \to 0$, то мы пишем $y_0 | e_0 \neq \emptyset$.

Телом $|e_0|$ простого конца $e_0 \in \tilde{D}$ в пространстве $\mathbf{R}^m$ называется множество всевозможных точек $y \in \mathbf{R}^m$ таких, что $y|e_0 \neq \emptyset$. Как показано в [59, лемма 1], мы имеем

$$|e_0| = \cap_{\delta>0} \overline{\{y \in D : \rho(y, e_0) < \delta\}}$$

(здесь замыкания берутся относительно $\mathbf{R}^m$) и введенное определение является прямым обобщением понятия тела простого конца К. Каратеодори [136].

Классификация простых концов односвязной поверхности D в $\mathbf{R}^m$ возможна в точности та же, что и в теории К. Каратеодори. Именно, мы называем сечением поверхности D произвольную жорданову дугу $\gamma \subset$

D с концами на (евклидовой) границе ∂D. Сечение γ разделяет точки $a, b \in D$, если всякий путь $l \subset D$, ведущий из a в b, пересекает сечение γ. Сечение $\gamma \subset D$ отделяет простой конец $e \in \tilde{D} \setminus D$ от фиксированной точки $O \in D$, если оно разделяет точку O и все, достаточно близкие по относительному расстоянию, к e точки поверхности D.

Будем говорить, что последовательность сечений $\gamma_k \subset D$, отделяющих простой конец e от фиксированной точки $O \in D$, стягивается к e, если

$$r(\gamma_k, e; D) = \inf_{y \in \gamma_k} \overline{\lim}_{y_l \to e} |y - y_l| \to 0$$

при $k \to \infty$.

Главная точка тела простого конца $e \in \tilde{D} \setminus D$ – это такая точка $y \in |e|$, для которой найдется последовательность сечений γ_k, стягивающаяся к e и обладающая свойством

$$\sup_{a \in \gamma_k} |a - y| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty\,.$$

Смежная точка тела простого конца – это произвольная его точка, не являющаяся главной.

Всякий простой конец односвязной поверхости принадлежит к одному из следующих четырех типов:

простой конец I-го типа содержит единственную главную точку и не содержит смежных точек;

простой конец II-го типа содержит единственную главную точку и бесконечное множество смежных точек;

простой конец III-го типа содержит континуум главных точек и не содержит смежных точек;

простой конец IV-го типа содержит континуум главных точек и бесконечное множество смежных точек.

Примеры поверхностей с концами указанных типов легко строятся. В частности, здесь оказываются пригодными и соответствующие примеры плоских областей.

Будем говорить, что точка $e \in \tilde{D}$, $|e| \neq \emptyset$, является простой в $\mathbf{R}^m$, если ее тело (как тело простого конца e) в $\mathbf{R}^m$ состоит ровно из одной точки. Заметим, что e есть простой конец первого рода тогда и только тогда, когда точка $e \in \tilde{D} \setminus D$ является простой в $\mathbf{R}^m$.

Обозначим через j естественную проекцию поверхности D в пространство $\mathbf{R}^m$. Имеет место следующее общее условие Г.Д. Суворова простоты граничной точки.

Теорема 4.2.1. *Предположим, что множества D и $j(D)$ предкомпактны в $\tilde{D}$ и $\mathbf{R}^m$, соответственно. Для того, чтобы все точки границы $\tilde{D} \setminus D$ были простыми в $\mathbf{R}^m$ необходимо и достаточно, чтобы* *естественная проекция* $j : D \to \mathbf{R}^m$ *была равномерно непрерывна по относительному расстоянию* ρ *на поверхности* D.

См. доказательство в [59].

Упражнения: 1) Доказать самостоятельно или разобрать по [59] теорему 4.2.1. 2) Разобрать по [106] или [109] доказательство теоремы К. Каратеодори о сходимости к ядру последовательности конформных отображений. 3) Перенести результаты Г. Пираняна [204] о распределении простых концов плоской области на случай поверхности.

4.3 Конформное отображение T

Пусть D — односвязная подобласть $\mathbf{R}^2$ с непустой границей ∂D. Предположим, что поверхность Ω класса $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$ вложена в $\mathbf{R}^m$ посредством локально билипшицева отображения (3.3.8).

Пусть $G \subset \mathbf{R}^2$ — односвязная область, отличная от $\mathbf{R}^2$. Рассмотрим конформное отображение $T : G \to \Omega$, понимаемое как гомеоморфизм класса T, $T^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$, переводящий в точках дифференцируемости бесконечно малые круги в G в бесконечно малые круги на поверхности Ω.

В силу теоремы 3.2.1, несложно заключить, что $T = F \circ h$, где $F : B(0,R) \to \Omega$ — канонический гомеоморфизм и $h : G \to B(0,R)$ — конформное отображение.

Зафиксируем точку $O' \in \Omega$. Положим

$$O'' = T^{-1}(O')\,, \quad r(G) = \inf_{u \in \partial G} |u - O''|\,.$$

Следующая теорема 4.3.1 обобщает классическую теорему К. Каратеодори [136] о соответствии границ при конформном отображении плоских областей и гарантирует, что конформное отображение $T : G \to \Omega$ продолжимо по непрерывности до непрерывного отображения $\widetilde{T} : \widetilde{G} \to \widetilde{\Omega}$.

Теорема 4.3.1. *Пусть* Ω *— односвязная, локально билипшицева поверхность в* $\mathbf{R}^m$*, заданная в виде* (3.3.8) *и пусть* $T : G \to \Omega$ *— конформное отображение.*

Тогда для любой пары точек $p, q \in G$*, удовлетворяющей условию*

$$\rho(p,q;O'',G) < \min\left\{1,\, \frac{1}{16}\, r^4(G)\right\}\,, \tag{4.3.3}$$

выполнено

$$\rho\left((T(p),T(q);O',\Omega\right) \le K\, \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p,q;O'',G)}\,. \tag{4.3.4}$$

Здесь

$$K = 2\sqrt{\pi}\,(\mathrm{area}\,\Omega)^{1/2}\ .$$

Доказательство. Фиксируем произвольно точки $p, q \in G \setminus \{O''\}$ со свойством (4.3.3). Пусть $\gamma \subset G \setminus \{O''\}$ — дуга, для которой

$$\mathrm{length}\,(\gamma) < \rho(p,\, q; O'', G) + \epsilon,$$

где $\epsilon > 0$ — достаточно малое число.

Выберем точку $\xi \in \gamma$ и рассмотрим семейство окружностей

$$L_\tau = \{u \in \mathbf{R}^2 : |u - \xi| = \tau\}, \quad r < \tau < R, \tag{4.3.5}$$

где

$$r = \rho(p,\, q; O'', G) + \epsilon, \quad R = \sqrt{\rho(p,\, q; O'', G)}.$$

В силу (4.3.3), имеем

$$\rho(p,\, q; O'', G) < \sqrt{\rho(p,\, q; O'', G)} < 1,$$

и потому данное семейство непусто для достаточно малых $\epsilon > 0$.

Каждая окружность L_τ содержит внутри дугу γ.

Далее рассмотрим два случая.

Первый случай. Предположим, что

$$\mathrm{dist}\,(\xi, \partial G) \le \sqrt{\mathrm{length}\,(\gamma)}, \tag{4.3.6}$$

где $\mathrm{dist}\,(a, B)$ — евклидово расстояние от точки a до множества B.

Тогда имеем

$$\sqrt{\rho(p,\, q; O'', G)} < |\xi - O''|, \tag{4.3.7}$$

т.е. каждая из L_τ отделяет p, q от O'.

Действительно, предположим противное. Пусть

$$|\xi - O''| \le \sqrt{\rho(p,\, q; O'', G)}.$$

Для произвольной точки

$$u \in \partial G \quad \text{такой, что} \quad |u - \xi| = \mathrm{dist}\,(\xi, \partial G),$$

имеем

$$|u - O''| \le |u - \xi| + |\xi - O''|.$$

Тем самым, в силу (4.3.6),

$$\begin{aligned} r(G) \le |u - O''| &\le \sqrt{\mathrm{length}\,(\gamma)} + \sqrt{\rho(p,\, q; O'', G)} \\ &\le \sqrt{\rho(p,\, q; O'', G) + \epsilon} + \sqrt{\rho(p,\, q; O'', G)}. \end{aligned}$$

Соотношение (4.3.5) между r и R теперь влечет

$$r(G) \le \rho^{1/4}(p,\, q; O'', G) + \rho^{1/2}(p,\, q; O'', G) \le 2\,\rho^{1/4}(p,\, q; O'', G),$$

или

$$\frac{1}{16} r^4(G) \le \rho(p,\, q; O'', G).$$

Это противоречит (4.3.3), и неравенство (4.3.7) действительно справедливо.

Для произвольного τ, $r \le \tau \le R$, пусть C_τ означает компоненту связности множества $L_\tau \cap G$, отделяющую точки p, q от O''. Существование такой компоненты связности следует из (4.3.7).

Пусть $\Delta_{r,R}$ — подобласть области G, содержащаяся между C_r и C_R.

Отображение $T(u) : G \to \mathbf{R}^m$ принадлежит классу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(G)$ и потому абсолютно непрерывно на почти всех дугах C_τ, $r < \tau < R$.

Пусть $u(s)$, $0 \le s \le l(C_\tau)$, — естественная параметризация дуги C_τ (здесь $l(C_\tau)$ — длина C_τ). Тогда

$$l(T(C_\tau)) = \int\limits_{C_\tau} \left| \frac{dT}{ds}(u(s)) \right| ds \le \int\limits_{C_\tau} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |\nabla y_i(u)|^2}\, |du|.$$

Несложно показать, что функция $l(T(C_\tau))$ измерима по Лебегу, как функция параметра $\tau \in [r, R]$. В силу интегрального неравенства Коши, находим

$$l^2\,(T(C_\tau)) \le l(C_\tau) \int\limits_{C_\tau} \sum_{i=1}^{m} |\nabla y_i(u)|^2\, |du|$$

и, далее, по теореме 1.9.1 имеем

$$\int\limits_{r}^{R} \frac{l^2\,(u(C_\tau))}{\tau}\, d\tau \le 2\pi \int\limits_{\Delta_{r,R}} \sum_{i=1}^{m} |\nabla y_i(u)|^2\, du_1\, du_2. \qquad (4.3.8)$$

Рассмотрим конформное отображение T. В каждой точке дифференцируемости отображения $T : G \to \Omega$ имеем

$$\sum_{i=1}^{m} |\nabla y_i(u)|^2 = \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{\partial T}{\partial u_k} \right|^2 =$$

$$= 2 \left| \frac{\partial T}{\partial u_1} \right|^2 = 2 \sqrt{ \left| \frac{\partial T}{\partial u_1} \right|^2 \, \left| \frac{\partial T}{\partial u_2} \right|^2 }.$$

Таким образом, мы получаем

$$\sum_{i=1}^{m} |\nabla y_i(u)|^2 = 2\, I(T,u) \quad \text{почти всюду на} \quad G, \tag{4.3.9}$$

где

$$I(T,u) = \sqrt{\left|\frac{\partial T}{\partial u_1}\right|^2 \left|\frac{\partial T}{\partial u_2}\right|^2 - \left\langle \frac{\partial T}{\partial u_1}, \frac{\partial T}{\partial u_2}\right\rangle^2}.$$

Поскольку площадь Ω ограничена и вектор-функция $T : G \to \mathbf{R}^m$ принадлежит классу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ в области G, то соотношение (4.3.9) влечет

$$\int\limits_G \sum_{i=1}^{m} |\nabla y_i|^2 \, du_1 \, du_2 = 2 \,\mathrm{area}\,(\Omega) < \infty.$$

Поэтому, на основании неравенства (4.3.8), приходим к оценке

$$\inf_{r \le \tau \le R} l^2(T(C_\tau)) \le 2\pi \log^{-1} \frac{\sqrt{\rho(p,q;O'',G)}}{\rho(p,q;O'',G)+\epsilon} \int\limits_G \sum_{i=1}^{m} |\nabla y_i(u)|^2 \, du_1 \, du_2 \,. \tag{4.3.10}$$

Из (4.3.10), учитывая произвол в выборе $\epsilon > 0$, выводим

$$\inf_{r \le \tau \le R} l(T(C_\tau)) \le \sqrt{4\pi \,\mathrm{area}\,(\Omega)} \, \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p,q;O'',G)}.$$

Так как каждая из дуг C_τ отделяет точки p, q от O'' в G, то каждая из дуг $T(C_\tau)$ отделяет $T(p)$, $T(q)$ от O' на Ω. Таким образом, мы получаем

$$\rho_2(T(p),T(q);O',F) \le K_1 \, \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p,q;O'',G)}.$$

Последнее неравенство обеспечивает справедливость (4.3.4).

Второй случай. Предположим, что $\mathrm{dist}\,(\xi, \partial G) > \sqrt{\mathrm{length}\,(\gamma)}$. Тогда мы имеем

$$\mathrm{dist}\,(\xi, \partial G) > \sqrt{\rho(p,\, q; O'', G)} = R,$$

и, следовательно, ни одна из окружностей C_τ семейства (4.3.5) не пересекает границу ∂G.

Как и выше, устанавливаем оценку (4.3.10).

Отображение $T : G \to \Omega$ гомеоморфно, а потому каждая из кривых $T(C_\tau)$, $r \le \tau \le R$, отделяет точки $T(p)$, $T(q)$ от границы $\partial\Omega$ на Ω и для любого $\tau \in [r, R]$ выполнено

$$\rho_1(T(p),T(q);O',\Omega) \le \mathrm{length}\; (T(C_\tau)) \le l\,(T(C_\tau))\,.$$

Отсюда, в силу (4.3.10), получаем

$$\rho_1(T(p),\,T(q);O',\Omega)\le K_1\,\log^{-1/2}\frac{1}{\rho(p,\,q;O'',G)},$$

что влечет (4.3.4). Теорема доказана. □

Следствие 4.3.1. *Пусть Ω — односвязная, локально билипшицева поверхность в $\mathbf{R}^m$, заданная в виде* (3.3.8)*. Предположим, что функция $\Lambda^2(x)/\lambda^2(x)$ является $W^{1,2}$-мажорируемой в области D.*

Тогда всякое конформное отображение $T:G\to\Omega$, где $G\subset\mathbf{R}^2$ – односвязная область с непустой границей, продолжимо до непрерывного отображения $\tilde{T}:\tilde{G}\to\tilde{\Omega}$.

4.4 Q^*-гомеоморфизмы поверхностей

Пусть D — односвязная подобласть $\mathbf{R}^2$ с непустой границей ∂D. Предположим, что поверхность Ω вложена в $\mathbf{R}^m$ посредством локально билипшицева отображения (3.3.8).

Пусть U, $V\subset D$ – непересекающиеся подмножества, замкнутые относительно D. Тройка $(U,\,V;\,D)$ определяет *конденсатор* на поверхности Ω. Рассмотрим множество $\mathcal{F}(U,V;D)$ всевозможных липшицевых функций $\varphi:D\to\mathbf{R}$ таких, что $\varphi|_U=0$, $\varphi|_V=1$ и

$$|\nabla_\Omega\varphi(x)|>0\quad\text{почти всюду в}\quad D\setminus(U\cup V)\,. \tag{4.4.11}$$

Здесь градиент $\nabla_\Omega\varphi$ берется в метрике поверхности Ω.

Величина

$$\operatorname{cap}_1(U,\,V;\,D)=\inf_{\varphi\in\mathcal{F}(U,V;D)}\int\limits_D|\nabla_\Omega\varphi|\,d\sigma_\Omega. \tag{4.4.12}$$

есть 1-емкость конденсатора $(U,\,V;\,D)$.

Пусть $\Omega_1\subset\mathbf{R}^m$, $\Omega_2\subset\mathbf{R}^n$ – локально билипшицевы поверхности вида (3.3.8). Пусть $D_1\subset\Omega_1$, $D_2\subset\Omega_2$ – области и пусть $h:D_1\to D_2$ – гомеоморфное отображение D_1 на D_2. Зададим измеримую функцию $Q:D_1\to(0,\infty)$. Гомеоморфное отображение h будем называть Q^*-*гомеоморфизмом*, если для всякого конденсатора $(U,V;D_1)$ выполнено

$$\operatorname{cap}_1^2(hU,\,hV;D_2)\le\inf_{\varphi\in\mathcal{F}(U,V;D_1)}\int\limits_{D_1}Q\,|\nabla_{\Omega_1}\varphi|^2\,d\sigma_{\Omega_1}\,. \tag{4.4.13}$$

При $Q \equiv \mathrm{mes}_2\, D_2$ соотношение (4.4.13) *следует из условия конформности отображения h.* Действительно, пусть $z = x_1 + ix_2$, $w = u_1 + iu_2$ и отображение $w = h(z) : D_1 \to D_2$ является однолистным конформным соответствием между областями D_1, $D_2 \subset \mathbf{C}$. Конформное отображение h оставляет инвариантным интеграл Дирихле в том смысле, что

$$\int\limits_{D_2} |\nabla\varphi(w)|^2 du_1 du_2 = \int\limits_{D_1} |\nabla\varphi^*(z)|^2\, dx_1 dx_2\,, \tag{4.4.14}$$

где $\varphi^* = \varphi \circ h$. Поэтому для произвольного конденсатора $(U, V; D_2)$ и произвольной функции $\varphi \in \mathcal{F}(U, V; D_2)$ выполнено

$$\begin{aligned} \mathrm{cap}_1^2(U, V; D_2) \ &\leq \left(\int\limits_{D_2} |\nabla\varphi(w)|\, du_1 du_2\right)^2 \leq \\ &\leq \mathrm{mes}_2\, D_2 \int\limits_{D_2} |\nabla\varphi(w)|^2\, du_1 du_2 = \\ &= \mathrm{mes}_2\, D_2 \int\limits_{D_1} |\nabla\varphi^*(z)|^2\, dx_1 dx_2\,. \end{aligned}$$

Переходя здесь к точной нижней грани по всем функциям

$$\varphi^* \in \mathcal{F}(h^{-1}U, h^{-1}V; D_1)\,,$$

приходим к соотношению (4.4.13).

В точности так же проверяется, что при $Q \equiv \mathrm{const} \geq 0$ класс Q^*-гомеоморфизмов $h : D_1 \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, содержит квазиконформные отображения.

В общем случае неравенство (4.4.13) может быть истолковано как специальный вариант принципа длины и площади для отображения h (см., например, [182, теорема 1.4.b], [108, глава X, теорема 1], [48], [52], [46]). В случае областей D_1, D_2 из $\mathbf{R}^2$ данный класс тесно связан с, так называемыми, Q-гомеоморфными отображениями, введенными Ю.Ф. Струговым [104] и активно изучаемыми в последнее время в работах О. Мартио, В.И. Рязанова, У. Сребро, Э. Якубова [188] – [190], а также радиальными Q-гомеоморфизмами [156], [216]. Мы не будем здесь останавливаться на указанных связях более детально.

В рассматриваемом здесь случае липшицевых поверхностей мы, строго говоря, вправе требовать конформность отображения h только лишь в точках его дифференцируемости или конформность отображения $h : D_1 \to D_2$ почти всюду. С другой стороны, достаточно эффективное определение конформности h мы получаем из условия (4.4.14) инвариантности интеграла Дирихле. Как и выше, непосредственно проверяется, что такие отображения принадлежат классу Q^*-гомеоморфизмов с $Q \equiv \mathrm{const} > 0$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $\Omega_1 = \Omega_2 \subset \mathbf{R}^2$ и пусть $\sigma : D_1 \to \mathbf{R}$ – положительная измеримая функция. Рассмотрим систему

$$u_{x_1} = \sigma\, v_{x_2}, \quad u_{x_2} = -\sigma\, v_{x_1}. \tag{4.4.15}$$

Каждое гомеоморфное отображение $h = u+iv : D_1 \to D_2$, $h \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$, является Q_1^*-гомеоморфизмом с $Q_1 = Q(x)\,(\mathrm{mes}_2\, D_2)$, где

$$Q(x) = \max\left(\sigma(x), \frac{1}{\sigma(x)}\right).$$

Действительно, пусть $(U, V; D_2)$ – произвольный конденсатор и $\varphi \in \mathcal{F}(U, V; D_2)$. Мы имеем

$$\mathrm{cap}_1^2\,(U, V; D_2) \le \mathrm{mes}_2\, D_2 \int\limits_{D_2} |\nabla\varphi|^2 du_1 du_2.$$

Согласно теореме Радемахера, функция φ дифференцируема почти всюду в области D_2, а в соответствии с теоремой Ф. Геринга – О. Лехто [149] отображение h также дифференцируемо почти всюду в D_1. Поэтому мы вправе записать

$$\int\limits_{D_2} |\nabla\varphi|^2 du_1 du_2 = \int\limits_{D_1} (\varphi_{u_1}^2 + \varphi_{u_2}^2)(u_{1x_1} u_{2x_2} - u_{1x_2} u_{2x_1})\, dx_1 dx_2\,.$$

Пользуясь (4.4.15), получаем

$$\mathrm{cap}_1^2\,(U, V; D_2) \le \mathrm{mes}_2\, D_2 \int\limits_{D_1} \sigma\,(\varphi_{u_1}^2 + \varphi_{u_2}^2)\,|\nabla u_2|^2\, dx_1 dx_2.$$

На основании формулы замены переменных (см. [157, теорема 11]) заключаем, что функция $\varphi^* = \varphi \circ h$ имеет почти всюду полный дифференциал. Таким образом,

$$\begin{aligned}(\varphi^*)_{x_1}^2 + (\varphi^*)_{x_2}^2 &= (\sigma\varphi_{u_1} u_{2x_2} + \varphi_{u_2} u_{2x_1})^2 + (-\sigma\varphi_{u_1} u_{2x_1} + \varphi_{u_2} u_{2x_2})^2 = \\ &= (\sigma^2\varphi_{u_1}^2 + \varphi_{u_2}^2)|\nabla u_2|^2\,.\end{aligned}$$

Однако, почти всюду в D_1 выполнено

$$(\sigma^2\varphi_{u_1}^2+\varphi_{u_2}^2)\leq \sigma\, Q\,(\varphi_{u_1}^2+\varphi_{u_2}^2).$$

и, таким образом,

$$\mathrm{cap}_1^2\,(U,V;D_2)\leq \mathrm{mes}_2\, D_2\int\limits_{D_1} Q\,\left((\varphi^*)_{x_1}^2+(\varphi^*)_{x_2}^2\right)\,dx_1dx_2\,,$$

что доказывает (4.4.13). $\Box$

Решения уравнения (4.4.15) называются *σ-гармоническими отображениями* и изучаются в значительном числе новейших работ (см., например, статьи [130], [127], [143] и цитированную там литературу).

Пусть $\Omega_1\subset \mathbf{R}^m$ – локально билипшицева поверхность вида (3.3.8). Обозначим через $d_{\Omega_1}(a,b)=d(a,b)$ геодезическое расстояние между точками a, $b\in\Omega_1$, другими словами, точную нижнюю грань длин дуг $\gamma\subset\Omega_1$, соединяющих точки a и b. Так как поверхность Ω_1 локально билипшицева, то $d_{\Omega_1}(a,b)<\infty$ для любых $a,b\in\Omega_1$. Дальнейшие обозначения:

$$S(y_0,r)=\{y\in\Omega_1: d_{\Omega_1}(y_0,y)=r\}$$

– геодезическая окружность радиуса $r>0$,

$$B(y_0,r)=\{y\in\Omega_1: d_{\Omega_1}(y_0,y)<r\}$$

– геодезический круг, и

$$K(y_0,r,R)=\{y\in\Omega_1: r<d_{\Omega_1}(y_0,y)<R\}$$

– геодезическое кольцо.

Зафиксируем односвязную область $D\subset\Omega_1$ и точку $y_0\in\overline{D}$. Выберем r и R так, чтобы

$$0<r<R<\sup_{y\in D} d_{\Omega_1}(y_0,y)\,, \tag{4.4.16}$$

и выберем произвольно компоненту связности $K=K_D(y_0,r,R)$ множества $K(y_0,r,R)\cap D$. Положим

$$U=U(y_0,r)=D\cap B(y_0,r),\quad V=V(y_0,R)=D\setminus B(y_0,R).$$

Так как $y_0\in\overline{D}$, то из соотношения (4.4.16) следует, что множества U и V непусты.

Имеет место следующая оценка.

Теорема 4.4.1. *Пусть* $\Omega_1\subset\mathbf{R}^m$, $\Omega_2\subset\mathbf{R}^n$ *– локально билипшицевы поверхности вида* (3.3.8). *Если*

$$h: K_D(y_0,r,R)\subset\Omega_1\to\Omega_2$$

есть Q^*-гомеоморфизм, то

$$L^2 \le \left(\int\limits_r^R dt \Bigg/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy| \right)^{-1} . \qquad (4.4.17)$$

Здесь L – точная нижняя грань длин дуг или кривых, разделяющих множества hU, hV в hK, и $S_D(y_0,t) = S(y_0,t) \cap D$.

Доказательство этой теоремы мы дадим позже, а пока приведем несколько ее важных следствий.

Следствие 4.4.1. *В условиях теоремы* 4.4.1 *пусть y_0 – главная точка простого конца $e \in \tilde{D}$. Если*

$$\int\limits_0 \frac{dt}{\int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|} = \infty, \qquad (4.4.18)$$

то образом $e \in \tilde{D}$ при отображении $h : K_D(y_0,0,R) \to \Omega_2$ является единственный простой конец области

$$h(K_D(y_0,0,R)) \subset D_2\,.$$

Доказательство. Пусть $a_i \to e$ – произвольная последовательность точек области $K_D(y_0,0,R)$ $(i = 1,2,\ldots)$. Достаточно заметить, что соотношения (4.4.17) и (4.4.18) влекут существование последовательности $\{h(S_D(y_0,t_k))\}$ дуг с длинами, стремящимися к нулю при $k \to \infty$, отделяющих дугу $h(S_D(y_0,R))$ от $h(a_i)$ при всех, достаточно больших i. $\square$

Наряду с Q^*-гомеоморфизмами мы рассматриваем их обобщения. Именно, зафиксируем односвязную область $D_1 \subset \Omega_1$ и точку $O_1 \in D_1$. Пусть

$$0 < \mu < d(O_1) = d(O_1, \partial D_1) \qquad (4.4.19)$$

– некоторое число. Будем говорить, что гомеоморфное отображение

$$h : D_1 \subset \Omega_1 \to D_2 \subset \Omega_2$$

является *$Q^*(\mu)$-гомеоморфизмом,* если для всякой точки $y_0 \in \overline{D_1}$ и любых $0 < r < R < \mu$ найдется измеримая функция $Q = Q(y;\, y_0, r, R)$, для которой

$$\operatorname{cap}_1^2(hU(y_0,r),\, hV(y_0,R); D_2) \le \inf_{\varphi} \int\limits_{K_{D_1}(y_0,r,R)} Q\,|\nabla_{\Omega_1}\varphi|^2 d\sigma_{\Omega_1}, \qquad (4.4.20)$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям

$$\varphi \in \mathcal{F}(U(y_0, r),\, V(y_0, R);\, K_{D_1}(y_0, r, R)).$$

Теорема 4.4.2. *Пусть $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^m$, $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^n$ – локально билипшицевы поверхности вида* (3.3.8). *Пусть $D_1 \subset \Omega_1$, $D_2 \subset \Omega_2$ – односвязные области и $O_1 \in D_1$, $O_2 \in D_2$ – фиксированные точки. Пусть $h : D_1 \to D_2$ – $Q^*(\mu)$-гомеоморфизм, $h(O_1) = O_2$, такой, что для некоторой монотонной функции $\omega(t) = \omega(t;\mu) : (0,\mu) \to (0,\infty)$, $\omega(+0) = 0$, произвольной точки $y_0 \in \overline{D}_1$, и любых $0 < t < \mu$, выполнено*

$$\left(\int\limits_t^{\mu} d\tau \Bigg/ \int\limits_{S_{D_1}(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy| \right)^{-1} \le \omega(t). \tag{4.4.21}$$

Тогда, если $\mathrm{mes}_2\, D_2 < \infty$, то для произвольной пары точек $a, b \in \tilde{D}_1$, удовлетворяющей условию

$$\begin{aligned} 2\max\{d(a,\partial D_1),\ \ d(b,\partial D_1), \rho(a,b;O_1,D_1)\} < \\ < \min\{d(O_1,\partial D_1)-\mu, 2\mu\}\,, \end{aligned} \tag{4.4.22}$$

справедливо неравенство

$$\rho(ha,\, hb; O_2, D_2) \le \left[\mathrm{mes}_2\, D_2\, \omega(\rho(a,b;O_1,D_1))\right]^{1/2}\,. \tag{4.4.23}$$

В частности, всякий $Q^*(\mu)$-гомеоморфизм $h : D_1 \to D_2$, обладающий свойством (4.4.21), продолжим по непрерывности до гомеоморфного отображения $\tilde{h} : \tilde{D}_1 \to \tilde{D}_2$ и мы имеем здесь обобщение теоремы К. Каратеодори о конформных отображениях плоских областей [136] на случай отображений поверхностей.

Следствие 4.4.2. *Если $Q^*(\mu)$-гомеоморфизм $h : D_1 \to D_2$ удовлетворяет* (4.4.21) *и все простые концы поверхности D_2 первого рода, то отображение h продолжимо по непрерывности до гомеоморфного отображения $\tilde{h} : \tilde{D}_1 \to \overline{D}_2$.*

Если, кроме того, поверхность D_1 имеет простые концы только первого рода, то h продолжимо до гомеоморфизма $\tilde{h} : \overline{D}_1 \to \overline{D}_2$.

4.5 Искажение при Q^*-гомеоморфизмах

Ниже приводится доказательство теоремы 4.4.1. Вначале мы покажем, что

$$L \le \mathrm{cap}_1\,(hU, hV; hK). \tag{4.5.24}$$

Пусть φ – произвольная функция, допустимая при вычислении 1-емкости конденсатора $(hU, hV; hK)$. Предположим, что поверхность $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^n$ задана посредством липшицева отображения $f_2 : \Delta^* \to \mathbf{R}^n$. Пусть $K^* = f_2^{-1}(hK)$. Мы вправе записать

$$\int\limits_{hK} |\nabla_{\Omega_2}\varphi|\, d\sigma_{\Omega_2} = \int\limits_{K^*} \left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \varphi^*_{x_i} \varphi^*_{x_j} \right)^{1/2} \sqrt{g}\, dx_1 dx_2, \tag{4.5.25}$$

где $\varphi^* = \varphi \circ f_2$ и коэффициенты g_{ij}, g^{ij}, g суть коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Ω_2.

Так как отображение f_2 локально билипшицево, то

$$\operatorname*{ess\,sup}_{K^*} \max\{g_{11}(x), |g_{12}(x)|, g_{22}(x)\} = M < \infty\,.$$

Положим

$$p(x) = \left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\varphi^*_{x_i}}{|\nabla\varphi^*|} \frac{\varphi^*_{x_j}}{|\nabla\varphi^*|} \right)^{1/2} \sqrt{g}\,.$$

Тогда имеем

$$\int\limits_{hK} |\nabla_{\Omega_2}\varphi|\, d\sigma_{\Omega_2} = \int\limits_{K^*} p(x)\, |\nabla\varphi^*(x)|\, dx_1 dx_2\,.$$

Так как матрицы (g_{ij}) и (g^{ij}) взаимно обратны, то

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}. \tag{4.5.26}$$

Отсюда, почти всюду в K^* выполнено

$$p(x) \le M^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\varphi^*_{x_i}}{|\nabla\varphi^*|} \frac{\varphi^*_{x_j}}{|\nabla\varphi^*|} \right)^{1/2} \le 2\, M^{1/2}\,.$$

По теореме 3.2.15 из [144] почти все линии уровня

$$E_t = \{x \in K^* : \varphi^*(x) = t\}$$

состоят из счетного числа локально спрямляемых дуг. Тем самым, мы вправе воспользоваться известной формулой для ко-площади [144, теорема 3.2.22]. Мы имеем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{K^*}\left(\textstyle\sum_{i,j=1}^2 g^{ij}\varphi^*_{x_i}\varphi^*_{x_j}\right)^{1/2}\sqrt{g}\,dx_1dx_2=\\ &=\int\limits_0^1 dt\int\limits_{E_t}\left(\textstyle\sum_{i,j=1}^2 g^{ij}\frac{\varphi^*_{x_i}}{|\nabla\varphi^*|}\frac{\varphi^*_{x_j}}{|\nabla\varphi^*|}\right)^{1/2}\sqrt{g}\,|dx|\,.\end{aligned}\tag{4.5.27}$$

Вектор-функция f_2 абсолютно непрерывна вдоль почти всех E_t. Векторы

$$\overline{\tau}=\left(-\frac{\varphi^*_{x_2}}{|\nabla\varphi^*|},\frac{\varphi^*_{x_1}}{|\nabla\varphi^*|}\right)$$

суть единичные касательные к E_t векторы. Таким образом, для почти всех $t\in(0,1)$ находим

$$\begin{aligned}\mathrm{length}(f_2E_t)&=\int\limits_{E_t}ds=\int\limits_{E_t}\left(\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}dx_idx_j\right)^{1/2}=\\ &=\int\limits_{E_t}\left(g_{11}\frac{(\varphi^*_{x_2})^2}{|\nabla\varphi^*|^2}-2g_{12}\frac{\varphi^*_{x_1}}{|\nabla\varphi^*|}\frac{\varphi^*_{x_2}}{|\nabla\varphi^*|}+g_{22}\frac{(\varphi^*_{x_1})^2}{|\nabla\varphi^*|^2}\right)^{1/2}|dx|.\end{aligned}$$

Подставляя выражения для g^{ij} из (4.5.26) в последний интеграл, получаем

$$\mathrm{length}(f_2E_t)=\int\limits_{E_t}\left(\sum_{i,j=1}^2 g^{ij}\frac{\varphi^*_{x_i}}{|\nabla\varphi^*|}\frac{\varphi^*_{x_j}}{|\nabla\varphi^*|}\right)^{1/2}\sqrt{g}\,|dx|,\tag{4.5.28}$$

и (4.5.27) влечет

$$\int\limits_0^1\mathrm{length}(f_2E_t)\,dt=\int\limits_{K^*}\left(\sum_{i,j=1}^2 g^{ij}\varphi^*_{x_i}\varphi^*_{x_j}\right)^{1/2}\sqrt{g}dx_1dx_2.$$

Таким образом,

$$\inf_{0<t<1} \mathrm{length}(f_2 E_t) \le \int\limits_{K^*} \left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \varphi^*_{x_i} \varphi^*_{x_j} \right)^{1/2} \sqrt{g}\, dx_1 dx_2.$$

Пользуясь (4.5.25), приходим к неравенству (4.5.24).

В качестве второго шага мы докажем, что

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{F}(U,V,D)} \int\limits_{K} Q\, |\nabla_{\Omega_1} \varphi|^2 d\sigma_{\Omega_1} \le \left(\int\limits_{r}^{R} dt \Big/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\, |dy| \right)^{-1} \qquad (4.5.29)$$

Предположим, что поверхность $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^m$ задается локально билипшицевым отображением f_1. Как и выше, пусть $K^* = f_1^{-1}(K)$, $\varphi^* = \varphi \circ f_1$ и $d^*(x) = d_{\Omega_1}(y_0, f_1(x))$. Мы имеем

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{F}(U,V;D)} \int\limits_{K} Q\, |\nabla_{\Omega_1} \varphi|^2 d\Omega_1 = \inf_{\varphi^*} \int\limits_{K^*} Q^* \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \varphi^*_{x_i} \varphi^*_{x_j} \sqrt{g}\, dx_1 dx_2. \quad (4.5.30)$$

где $Q^* = Q \circ f_1$ и коэффициенты g^{ij}, g коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Ω_1.

Выберем φ^* в виде $\varphi^* = \psi \circ d^*(x)$ с некоторой липшицевой функцией $\psi : [r, R] \to [0, 1]$, для которой $\psi(r) = 0$, $\psi(R) = 1$. Нам потребуется следующая оценка для градиента функции расстояния, которая будет доказана ниже,

$$|\nabla_{F_1} d^*(x)| = \sum_{ij=1}^{2} g^{ij} d^*_{x_i} d^*_{x_j} \le 1 \quad \text{почти всюду в} \quad \Delta. \qquad (4.5.31)$$

Таким образом, пользуясь еще раз формулой для ко-площади, в силу

(4.5.31) получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{K^*} Q^* \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\varphi^*_{x_i}\varphi^*_{x_j}\sqrt{g}\,dx_1dx_2 = \\ = \int\limits_{K^*} Q^*\psi'^2(d^*(x))\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}d^*_{x_i}d^*_{x_j}\sqrt{g}\,dx_1dx_2 \leq \\ \leq \int\limits_r^R \psi'^2(t)dt \int\limits_{S^*_D(y_0,t)} Q^*\sqrt{g}|dx|,\end{gathered} \tag{4.5.32}$$

где $S^*_D(y_0,t) = f_1^{-1}S_D(y_0,t)$.

Легко проверяется, что

$$\int\limits_{S^*_D(y_0,t)} Q^*\sqrt{g}\,|dx| = \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|. \tag{4.5.33}$$

Действительно, мы имеем

$$\int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy| = \int\limits_{S^*_D(y_0,t)} Q^*\left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}dx_idx_j\right)^{1/2}.$$

Поскольку $d^*|_{S^*_D(y_0,t)} = t$, как и в (4.5.28), мы устанавливаем, что для почти всех $t\in(0,1)$ выполнено

$$\begin{aligned}\int\limits_{S^*_D(y_0,t)} Q^*\left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}dx_idx_j\right)^{1/2} &= \int\limits_{S^*_D(y_0,t)} Q^*\left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}d^*_{x_i}d^*_{x_j}\right)^{1/2}\sqrt{g}\,|dx| = \\ &= \int\limits_{S^*_D(y_0,t)} Q^*\sqrt{g}\,|dx|,\end{aligned}$$

и соотношение (4.5.33) доказано.

Из (4.5.32) и (4.5.33) следует

$$\int\limits_{K^*} Q^* \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\varphi^*_{x_i}\varphi^*_{x_j}\sqrt{g}\,dx_1dx_2 \le \int\limits_r^R \psi'^2(t)dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|.$$

Таким образом, соотношение (4.5.30) влечет

$$\inf_{\varphi\in\mathcal{F}(U,V;D)} \int\limits_K Q\,|\nabla_{\Omega_1}\varphi|^2 d\sigma_{\Omega_1} \le \inf_{\psi} \int\limits_r^R \psi'^2(t)dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|. \qquad (4.5.34)$$

Найдем точную нижнюю грань интегралов в правой части (4.5.34). Так как $\psi(r)=0$, $\psi(R)=1$, то для произвольной функции ψ мы имеем

$$1 \le \left(\int\limits_r^R \frac{dt}{\int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|}\right)\left(\int\limits_r^R \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|\right),$$

то есть, для любой допустимой функции ψ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_r^R \frac{dt}{\int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|}\right)^{-1} \le \int\limits_r^R \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|. \qquad (4.5.35)$$

Выбирая

$$\psi_0(t) = \int\limits_r^t \frac{d\tau}{\int\limits_{S_D(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy|} \Bigg/ \int\limits_r^R \frac{d\tau}{\int\limits_{S_D(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy|}$$

при $t\in(r,R)$ и замечая, что $\psi_0(r+0)=0$, $\psi_0(R-0)=1$, мы заключаем:

$$\int\limits_r^R \psi_0'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy| = \left(\int\limits_r^R dt \Bigg/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|\right)^{-1}.$$

Таким образом, на основании (4.5.35) выводим

$$\inf_{\psi}\int\limits_{r}^{R}\psi'^2(t)\,dt\int\limits_{S_D(y_0,t)}Q(y)\,|dy| = \left(\int\limits_{r}^{R}dt\Bigg/\int\limits_{S_D(y_0,t)}Q(y)\,|dy|\right)^{-1}. \tag{4.5.36}$$

Данные аргументы пригодны для произвольной локально ограниченной на (r,R) функции

$$q(\tau)\equiv\int\limits_{S_D(y_0,\tau)}Q(y)\,|dy|,$$

при которой ψ_0 локально липшицева. Простые аппроксимационные аргументы влекут справедливость (4.5.36) в общем случае.

Действительно, для произвольного $n=1,2,\ldots$ положим

$$Q_n(y)=\begin{cases}Q(y) & \text{при} \quad Q(y)\le n,\\ n & \text{при} \quad Q(y)>n.\end{cases}$$

Тогда, для произвольной функции ψ по теореме Фату имеем

$$\int\limits_{r}^{R}\psi'^2(t)\,dt\int\limits_{S_D(y_0,t)}Q(y)\,|dy|\le\underline{\lim}_{n\to\infty}\int\limits_{r}^{R}\psi'^2(t)\,dt\int\limits_{S_D(y_0,t)}Q_n(y)\,|dy|\,.$$

Отсюда, по доказанному,

$$\int\limits_r^R \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy| \le \int\limits_r^R \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q_n(y)\,|dy| \le$$

$$\le \left(\int\limits_r^R dt \Big/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q_n(y)\,|dy|\right)^{-1} \le$$

$$\le \left(\int\limits_r^R dt \Big/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|\right)^{-1}.$$

Переходя в левой части соотношения к точной нижней грани по допустимым функциям ψ, убеждаемся в справедливости соотношения (4.5.36) в общем случае.

Комбинируя (4.5.36) с (4.5.34) приходим к (4.5.29). На основании (4.5.29), (4.5.24) и (4.4.13) приходим к (4.4.17).

Чтобы завершить доказательство теоремы 4.4.1, необходимо проверить справедливость неравенства (4.5.31), уже использованного нами выше. Если поверхность Ω_1 принадлежит классу C^2, то это неравенство хорошо известно (и, даже, в более сильном виде). Для липшицевой поверхности оно нуждается в доказательстве.

Пусть a – произвольная точка, в которой производная f_1' вектор-функции (3.3.8) существует и непрерывна. Пусть $\gamma(a,\theta)$ – отрезок длины $h>0$, выходящий из точки a в направлении, задаваемом единичным вектором $\theta=(\theta_1,\theta_2)$. Тогда

$$\left|\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial d^*}{\partial x_i}(a)\,\theta_i\right| \le \underline{\lim}_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{\gamma(a,\theta)} ds_{\Omega_1}\,,$$

где

$$d^*(x)=d(a,f_1(x))=\inf_{\gamma}\int\limits_{\gamma} ds_{\Omega_1}$$

и точная нижняя грань берется по всевозможным дугам γ, соединяющим точки a и x.

Однако,

$$\int\limits_{\gamma(a,\theta)} ds_{F_1} = \int\limits_0^h \left[\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(a+r\,\theta)\,\theta_i\theta_j\right]^{1/2} dr$$

и, в силу непрерывности g_{ij} в точке a, мы получаем

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial d^*}{\partial x_i}(a)\frac{\partial d^*}{\partial x_j}(a)\,\theta_i\theta_j \le \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(a)\,\theta_i\theta_j\,. \tag{4.5.37}$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$\max_{|\theta|=1} \frac{\sum_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial d^*}{\partial x_i}\dfrac{\partial d^*}{\partial x_j}\,\theta_i\theta_j}{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,\theta_i\theta_j} = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\frac{\partial d^*}{\partial x_i}\frac{\partial d^*}{\partial x_j}\,. \tag{4.5.38}$$

Действительно, на основании известных свойств квадратичных форм (см., например, [22, стр. 289-290]), наибольшее значение отношения двух квадратичных форм, стоящего в левой части (4.5.38), равно максимальному из корней λ уравнения

$$\det\left(\frac{\partial d^*}{\partial x_i}\frac{\partial d^*}{\partial x_j} - \lambda\, g_{ij}\right) = 0\,.$$

Умножая обе части равенства на $\det(g^{ij})$, получаем

$$\det(a_{ij} - \lambda\,\delta_{ij}) = 0\,,$$

где

$$a_{ij} = \frac{\partial d^*}{\partial x_j}\sum_{k=1}^{2} g^{ik}\frac{\partial d^*}{\partial x_k}$$

и δ_{ij} – символ Кронекера.

Отсюда находим

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g^{ij}\frac{\partial d^*}{\partial x_j}\sum_{k=1}^{2} g^{ik}\frac{\partial d^*}{\partial x_k}\,,$$

что и требовалось.

В силу (4.5.38), справедливость соотношения (4.5.37) при всех единичных векторов θ влечет (4.5.31).

Таким образом, теорема доказана полностью. □

4.6 Локальные оценки

Теорема 4.4.1 приводит к некоторым локальным оценкам при гомеоморфных отображениях класса Q^*. Пусть $c \in [1, \infty)$ – постоянная. Вектор-функция $f : \Delta \to \mathbf{R}^m$ называется *c-монотонной,* если для всякой подобласти Δ', $\Delta' \subset\subset \Delta$, выполнено неравенство

$$\operatorname{osc}(f, \Delta') \leq c \operatorname{osc}(f, \partial\Delta'). \tag{4.6.39}$$

Заметим, к примеру, что C^2-вектор-функция f, задающая поверхность Ω неположительной гауссовой кривизны является c-монотонной при $c = 1$. Если поверхность Ω имеет выпуклый график в $\mathbf{R}^3$, то она c-монотонна с некоторой постоянной $c = c(\Delta') \geq 1$ на всякой подобласти $\Delta' \subset\subset \Delta$.

Следствие 4.6.1. *Пусть $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^m$, $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^n$ – поверхности, заданные вектор-функциями $f_1 : \Delta_1 \to \mathbf{R}^m$, $f_2 : \Delta_2 \to \mathbf{R}^n$, соответственно. Предположим, что f_2 является c_2-монотонной.*

Тогда для произвольного Q^*-гомеоморфного отображения $h : \Omega_1 \to \Omega_2$, произвольной точки $y_0 \in \Omega_1$ и всякого r такого, что $c_2 r < d_0 = d_{\Omega_1}(y_0, \partial\Omega_1)$, выполняется

$$\operatorname{osc}^2(h,\ B(y_0, r)) \leq c_2^2 \left(\int\limits_r^{d_0} dt \Bigg/ \int\limits_{S(y_0,t)} Q(y)\, |dy| \right)^{-1}. \tag{4.6.40}$$

Для *доказательства* достаточно воспользоваться оценкой (4.4.17) и заметить, что

$$\operatorname{osc}^2(h, B(y_0, r)) \leq c_2^2 L^2.$$

□

Оценка (4.6.40) влечет серию уже известных. Мы ограничимся здесь следующим рассмотрением. Пусть $\xi(t)$ – неотрицательная борелева функция на $(0, d_0)$ такая, что

$$I(\varepsilon) = \int\limits_\varepsilon^{d_0} \xi(t)\, dt < \infty, \quad \varepsilon \in (0, d_0). \tag{4.6.41}$$

Согласно формуле для ко-площади имеем

$$\int\limits_{\varepsilon < d_{\Omega_1}(y_0, y) < d_0} Q(y)\, \xi^2(d_{F_1}(y_0, y))\, d\sigma_{\Omega_1} = \int\limits_\varepsilon^{d_0} \xi^2(\tau)\, d\tau \int\limits_{S(y_0,\tau)} Q(y)\, |dy|.$$

Отсюда, на основании неравенства Коши, получаем

$$I^2(\varepsilon) \le \left(\int\limits_{\varepsilon}^{d_0} d\tau \Big/ \int\limits_{S(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy| \right) \left(\int\limits_{\varepsilon}^{d_0} \xi^2(\tau)\,d\tau \int\limits_{S(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy| \right)$$

и

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{d_0} d\tau \Big/ \int\limits_{S(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy| \right)^{-1} \le \frac{1}{I^2(\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon < d_{F_1}(y_0,y) < d_0} Q(y)\,\xi^2(d_{F_1}(y_0,y))\,d\Omega_1.$$

Таким образом, оценка (4.6.40) приводит к неравенству

$$\operatorname{osc}^2(h, B(y_0,r)) \le c_2^2\, I^{-2}(r) \int\limits_{K(r,d_0;F_1)} Q(y)\,\xi^2(d_{F_1}(y_0,y))\,d\Omega_1\,, \qquad (4.6.42)$$

справедливому для всякой функции ξ со свойством (4.6.41).

Для отображений плоских областей в единичную сферу, близкое неравенство установлено В.И. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым [216].

4.7 Искажение относительного расстояния

Докажем теорему 4.4.2. Пусть $a, b \in D_1 \setminus \{O_1\}$ – пара точек, удовлетворяющая (4.4.22). Фиксируем дугу или кривую $\gamma \subset D_1 \setminus \{O_1\}$, отделяющую a, b от O_1 и такую, что

$$\operatorname{length}(\gamma) < \rho(a, b; O_1, D_1) + \delta < \frac{1}{2}(d(O_1) - \mu),$$

где $d(O_1) = d(O_1, \partial D_1)$ и $\delta > 0$ – достаточно малое число.

Выберем точку $p \in \gamma$ и рассмотрим семейство геодезических окружностей

$$S(p,\tau) = \{y \in \Omega_1 : d(p,y) = \tau\}, \quad \rho < \tau < \mu,$$

где $\rho = \rho(a, b; O_1, D_1)$.

Предположения (4.4.19) и (4.4.22) влекут, что множества $S(p,\tau) \cap D_1$ содержат компоненты связности $S_D(p,\tau)$, отделяющие a, b от O_1.

Действительно, пусть $S(p,\tau) \cap \partial D_1 \ne \emptyset$. Так как $p \in \gamma$, то

$$d(p, \partial D_1) \le \operatorname{length}(\gamma) < \frac{1}{2}(d(O_1) - \mu).$$

Далее мы замечаем, что

$$\begin{aligned} d(O_1) &\le d(p, \partial D_1) + d(p, O_1) \le \\ &\le \operatorname{length}(\gamma) + d(p, O_1) \le \\ &\le (d(O_1) - \mu)/2 + d(p, O_1)\,. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} d(O_1) + \frac{1}{2}\mu \le d(p, O_1)$$

и, следовательно,

$$d(p, \partial D_1) + \mu \le d(p, O_1)\,.$$

Отсюда, $\mu \le d(p, O_1)$, то есть, $\tau < d(p, O_1)$ и каждая из дуг $S_{D_1}(p, \tau) \neq \emptyset$.

Пусть $S(p, \tau) \cap \partial D_1 = \emptyset$. Зафиксируем произвольно $\delta_1 > 0$. Пусть $l \subset F_1$ – дуга, связывающая точку a с границей ∂D_1 так, что

$$\operatorname{length}(l) < d(a, \partial D_1) + \delta_1.$$

Но γ разделяет a и ∂D_1, а потому $\gamma \cap l \neq \emptyset$.

Пусть $\xi \in \gamma \cap l$ – произвольная точка. Мы имеем

$$\begin{aligned} d(O_1) &\le d(\xi, \partial D_1) + d(\xi, p) + d(p, O_1) \le \\ &\le d(a, \partial D_1) + \delta_1 + \operatorname{length}(\gamma) + d(p, O_1) \le \\ &\le d(O_1) - \mu + d(p, O_1) + \delta_1. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\mu \le d(p, O_1) + \delta_1\,.$$

Поскольку $\delta > 0$ произвольно, мы получаем $\mu \le d(p, O_1)$, и нужное доказано.

Итак, каждая из геодезических окружностей $S(p, \tau)$ отделяет точку p от O_1 при $\tau \in (\rho, \mu)$. Тем самым, мы вправе воспользоваться теоремой 4.4.1 с $K = K(p, \rho, \mu)$. Каждая из дуг (или кривых) $S_{D_1}(p, \tau)$ отделяет точки a, b от ∂D_1 и O_1. Ее образ $hS_{D_1}(p, \tau)$ отделяет ha, hb от ∂D_2 и O_2. Тем самым,

$$\rho\,(ha, hb; O_2, D_2) \le \operatorname{length}\left(hS_{D_1}(p, \tau)\right).$$

Согласно (4.4.17), мы находим

$$\rho^2(ha, hb; O_2, D_2) \leq \left(\int\limits_{\rho}^{\mu} dt \Bigg/ \int\limits_{S_D(p,t)} Q(y)\,|dy| \right)^{-1} \leq \omega(\rho)$$

и (4.4.23) действительно имеет место.

Завершая доказательство, предположим, что $a_n, b_n \in D_1$ – точки, сходящиеся к $a, b \in \tilde{D}_1 \setminus D_1$ и удовлетворяющие (4.4.22). Мы вправе записать

$$\rho(ha_n, hb_n; O_2, D_2) \leq \omega^{1/2}(\rho(a_n, b_n; O_1, D_1))\,.$$

Полагая теперь $n \to \infty$, мы доказываем (4.4.23) в общем случае. $\square$

Задачи: 1) Определить относительное расстояние на абстрактных поверхностях с финслеровой метрикой. 2) Изучить Q^*-отображения абстрактных поверхностей общего вида.

Глава 5

Скорость аппроксимации канонического гомеоморфизма

Ниже, в дополнение к теореме 3.1.1 мы даем оценки скорости аппроксимации канонического гомеоморфизма $F : B(0,R) \to \mathbf{R}^m$ посредством отображений F_n. В этих целях мы используем концепцию устойчивости конформных отображений в классе отображений с ограниченным интегралом Дирихле и показываем, что отображения F_n и F близки в том смысле, что могут быть получены одно из другого за счет малой деформации. Мы даем разного вида оценки такой малости.

5.1 Характеристики близости

Предположим, что $p(x) : D \to [1,\infty)$ – измеримая по Лебегу, функция. Пусть, как и выше в теореме 3.1.1, фиксирована некоторая числовая последовательность $\{Q_n\}$, $Q_n \geq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n \to \infty$, и пусть

$$\begin{aligned} I_n \quad &= \{x \in D : p(x) \geq Q_n\}\,, \quad n = 1,2,\ldots\,, \\ p_n(x) \ &= 1 \quad \text{при} \quad x \in I_n\,, \\ p_n(x) \ &= p(x) \quad \text{при} \quad x \in D \setminus I_n\,. \end{aligned}$$

Нашей ближайшей целью является изучение скорости сходимости описанных в разделе 3.1 гомеоморфизмов $w_n(x) : D \to B(0,R_n)$ с характеристиками (p_n,θ) и нормировкой (3.1.3) к предельному гомеоморфизму $w(x) : D \to B(0,R)$ с характеристиками (p,θ). Далее мы будем интерпретировать данную задачу как некоторую задачу об устойчивости конформного отображения в классе BL, а в оценках порядка устойчивости следовать работам [47], [20]. Заметим, однако, что оценки порядка устойчивости не являются здесь самоцелью, но дополняют другие качественные характеристики аппроксимирующей последовательности $\{w_n(x)\}$. Поэтому наша нормировка для $w_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, отлична от нормировок, рассматриваемых традиционно, что вносит дополнительную специфику.

Итак, пусть $\xi = w(x) : D \to B(0, R)$ – предельное отображение. Обратное к нему $x = w^{-1}(\xi)$ в композиции с отображением $\xi = w_n(x)$ конформно на открытом множестве $B = B(0, R) \setminus w(I_n)$ и квазиконформно с некоторой характеристикой, не превосходящей $Q_n\, p(w^{-1}(\xi))$. Обозначим суперпозицию символом

$$\zeta = h(\xi) = w_n \circ w^{-1}(\xi) : B(0, R) \to B(0, R_n)\,, \quad \zeta = \eta_1 + i\,\eta_2\,.$$

В этом месте удобно использовать комплексные обозначения[1]

$$z = \xi_1 + i\,\xi_2\,, \quad \overline{z} = \xi_1 - i\,\xi_2\,.$$

Если $\zeta = h(z)$ – комплекснозначная функция, то мы рассматриваем ее как функцию $\zeta = h(z, \overline{z})$ и пишем

$$d\zeta = h'_z\, dz + h'_{\overline{z}}\, d\overline{z}\,,$$

где через h'_z, $h'_{\overline{z}}$ обозначены формальные производные

$$h'_z = \frac{1}{2}\,(h'_{\xi_1} - i\,h'_{\xi_2})\,, \quad h'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\,(h'_{\xi_1} + i\,h'_{\xi_2})\,.$$

Отметим правило дифференцирования суперпозиции функций $f \circ g$. Для удобства обозначений введем промежуточную переменную $w = g(z)$. Применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем

$$\begin{aligned}(f \circ g)_z &= (f_w \circ g)\, g'_z + (g_{\overline{w}} \circ g)\,(\overline{g})'_z\,,\\ (f \circ g)_{\overline{z}} &= (f_w \circ g)\, g'_{\overline{z}} + (g_{\overline{w}} \circ g)\,(\overline{g})'_{\overline{z}}\,.\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Предположим, что

$$\int\limits_{B(0,R)} \left(|h_z|^2 + |h_{\overline{z}}|^2\right)\, d\xi_1 d\xi_2 < \infty\,.$$

В качестве меры близости отображения

$$h = h_1 + i\,h_2 : B = B(0, R) \to B(0, R_n)$$

[1] См., например, монографии [174], [89], где такая комплесификация проводится весьма последовательно.

к конформному мы выберем величину

$$\|h_{\overline{z}}\|_{L^2(B)} \equiv \left(\int\limits_B |h_{\overline{z}}|^2 \, d\xi_1 d\xi_2 \right)^{1/2} . \tag{5.1.2}$$

В точках дифференцируемости h имеем

$$\begin{aligned} |h_z|^2 &= \frac{1}{4}|h_{\xi_1} - i\, h_{\xi_2}|^2 = \\ &= \frac{1}{4}\left((h_{1\xi_1} + h_{2\xi_2})^2 + (h_{1\xi_2} - h_{2\xi_1})^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(h^2_{1\xi_1} + h^2_{1\xi_2} + h^2_{2\xi_1} + h^2_{2\xi_2} + 2J(z,h)\right) , \end{aligned}$$

где $J(z,h)$ – якобиан h в точке z. Аналогично,

$$\begin{aligned} |h_{\overline{z}}|^2 &= \frac{1}{4}|h_{\xi_1} + i\, h_{\xi_2}|^2 = \\ &= \frac{1}{4}\left((h_{1\xi_1} - h_{2\xi_2})^2 + (h_{1\xi_2} + h_{2\xi_1})^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(h^2_{1\xi_1} + h^2_{1\xi_2} + h^2_{2\xi_1} + h^2_{2\xi_2} - 2J(z,h)\right) . \end{aligned}$$

Тем самым, справедливы следующие две полезные формулы

$$|h_z|^2 + |h_{\overline{z}}|^2 = \frac{1}{2}\left(h^2_{1\xi_1} + h^2_{1\xi_2} + h^2_{2\xi_1} + h^2_{2\xi_2}\right) , \tag{5.1.3}$$

и

$$|h_z|^2 - |h_{\overline{z}}|^2 = h_{1\xi_1}h_{2\xi_2} - h_{1\xi_2}h_{2\xi_1} = J(z,h) . \tag{5.1.4}$$

Вычислим характеристику $p_h = p_h(z)$ линейного отображения $dh : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Заметим сначала, что

$$\begin{aligned} dh &= h_{\xi_1} d\xi_1 + h_{\xi_2} d\xi_2 = \\ &= h_{\xi_1}\frac{dz + d\overline{z}}{2} + h_{\xi_2}\frac{dz - d\overline{z}}{2i} = \\ &= \frac{1}{2}\left(h_{\xi_1} - i\, h_{\xi_2}\right) dz + \frac{1}{2}\left(h_{\xi_1} + i\, h_{\xi_2}\right) d\overline{z}. \end{aligned}$$

Опуская простые вычисления, находим

$$\begin{aligned} p_h(z) &= \frac{|h_z|^2+|h_{\overline{z}}|^2}{|h_z|^2-|h_{\overline{z}}|^2}+\sqrt{\left(\frac{|h_z|^2+|h_{\overline{z}}|^2}{|h_z|^2-|h_{\overline{z}}|^2}\right)^2-1}= \\ &= \frac{|h_z|^2+|h_{\overline{z}}|^2}{|h_z|^2-|h_{\overline{z}}|^2}+\sqrt{\frac{\left(|h_z|^2+|h_{\overline{z}}|^2\right)^2-\left(|h_z|^2-|h_{\overline{z}}|^2\right)^2}{\left(|h_z|^2-|h_{\overline{z}}|^2\right)}}= \\ &= \frac{|h_z|^2+|h_{\overline{z}}|^2+2|h_z|\,|h_{\overline{z}}|}{|h_z|^2-|h_{\overline{z}}|^2}, \end{aligned}$$

то есть,

$$p_h(z)=\frac{|h_z|+|h_{\overline{z}}|}{|h_z|-|h_{\overline{z}}|}. \tag{5.1.5}$$

На основании определения (5.1.2) для меры близости отображения h к конформному отображению и соотношений (5.1.3), (5.1.4) имеем

$$\|h_{\overline{z}}\|^2_{L^2(B)}=\frac{1}{4}\int\limits_{B(0,R)}\left(h^2_{1\xi_1}+h^2_{1\xi_2}+h^2_{2\xi_1}+h^2_{2\xi_2}-2J(z,h)\right)\,d\xi_1 d\xi_2$$

откуда, пользуясь еще раз (5.1.3) и (5.1.4), находим

$$\begin{aligned} \|h_{\overline{z}}\|^2_{L^2(B)} &= \frac{1}{2}\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{|h_z|^2+|h_{\overline{z}}|^2}{|h_z|^2-|h_{\overline{z}}|^2}-1\right)J(z,h)\,d\xi_1 d\xi_2 \le \\ &\le \frac{1}{2}\int\limits_{B(0,R)}\left(p_h(z)-1\right)J(z,h)\,d\xi_1 d\xi_2\,. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали оценку

$$\frac{|h_z|^2+|h_{\overline{z}}|^2}{|h_z|^2-|h_{\overline{z}}|^2}\le\frac{(|h_z|+|h_{\overline{z}}|)^2}{|h_z|^2-|h_{\overline{z}}|^2}=p_h(z)\,. \tag{5.1.6}$$

Несложно усмотреть, что поскольку $h=w_n\circ w^{-1}$, то при всех $z\in B(0,R)\setminus w(I_n)$ выполнено $p_h(z)=1$, а при всех $z\in w(I_n)$ имеем

$$p_h(z)\le p_{w_n}(w^{-1}(z))\,p_{w^{-1}}(z)\,.$$

Поэтому при всех $z \in w(I_n)$:

$$p_h(w(x)) \le Q_n\, p_{w^{-1}}(w(x)) \le p_w^2(x)\,.$$

Тем самым, учитывая, что $J(z,h) = J(x,w_n)J(z,w^{-1})$, находим

$$\|h_{\overline{z}}\|^2_{L^2(B)} \le \frac{1}{2} \int\limits_{w(I_n)} (p_w^2(z) - 1)\, J(x,w_n)J(z,w^{-1})\, d\xi_1 d\xi_2\,,$$

и, далее,

$$\|h_{\overline{z}}\|^2_{L^2(B)} \le \frac{1}{2} \int\limits_{I_n} (p^2(x) - 1)\, J(x,w_n)\, dx_1 dx_2\,. \tag{5.1.7}$$

Найденая оценка является ключевой в следующем утверждении.

Лемма 5.1.1. *Если при $n = 1, 2, \ldots$ для функции*

$$P_n(x) = \begin{cases} p^2(x) - 1 & \text{при} \quad x \in I_n\,, \\ 0 & \text{при} \quad x \in D \setminus I_n \end{cases}$$

существует мажоранта $K_n(x)$ класса $W_0^{1,2}(D)$, то

$$\|h_{\overline{z}}\|^2_{L^2(B)} \le 2\, R_n^2 \int\limits_D \left| \nabla K_n^{1/2}(x) \right|^2 p(x)\, dx_1 dx_2\,, \tag{5.1.8}$$

где

$$R_n = \sup_{x \in D} |w_n(x)|\,.$$

Доказательство базируется на оценке (5.1.7) и некоторых построениях, близких к доказательству леммы 3.4.1. Мы имеем

$$\int\limits_D P_n\, J(x,w_n)\, dx_1 dx_2 \le \int\limits_D K_n\, J(x,w_n)\, dx_1 dx_2\,.$$

Так как K_n финитна в D, то по формуле Грина можем записать[2]

$$0 = \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} K_n\, J(x,w_n)\, dx_1 dx_2 + \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} \operatorname{Re} w_n\, dK_n \wedge d \operatorname{Im} w_n$$

[2] Чтобы убедиться в справедливости этих соотношений достаточно аппроксимировать функции K_n и w_n гладкими по норме в $W^{1,2}$, воспользоваться формулой Грина и перейти к пределу. Мы оставляем читателю проделать эту стандартную процедуру самостоятельно, либо воспользоваться соответствующими рассуждениями из [185].

и

$$0 = \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} K_n\, J(x,w_n)\, dx_1 dx_2 - \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} \operatorname{Im} w_n\, dK_n \wedge d\operatorname{Re} w_n\,.$$

Здесь $w_n = \text{Re } w_n + i \text{ Im } w_n = \eta_{n1} + i\,\eta_{n2}$.

Отсюда находим

$$\begin{gathered} 2 \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} K_n\, J(x,w_n)\, dx_1 dx_2 \le \\ \le \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} \left|\eta_{n1}\left(K_{nx_1}\eta_{n2x_2} - K_{nx_2}\eta_{2x_1}\right)\right|\, dx_1 dx_2 + \\ + \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} \left|\eta_{n2}\left(\eta_{n1x_1}K_{nx_2} - \eta_{n1x_2}K_{nx_1}\right)\right|\, dx_1 dx_2\,. \end{gathered} \tag{5.1.9}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{gathered} \left|\eta_{n1}\left(K_{nx_1}\eta_{n2x_2} - K_{nx_2}\eta_{n2x_1}\right)\right| + \left|\eta_{n2}\left(\eta_{n1x_1}K_{nx_2} - \eta_{n1x_2}K_{nx_1}\right)\right| \le \\ \le |\eta_n| \left(\left(K_{nx_1}\eta_{n2x_2} - K_{nx_2}\eta_{n2x_1}\right)^2 + \left(\eta_{n1x_1}K_{nx_2} - \eta_{n1x_2}K_{nx_1}\right)^2\right)^{1/2} \le \\ \le |w_n|\ |\nabla K_n|\ \left(|\nabla\eta_{n1}|^2 + |\nabla\eta_{n2}|^2\right)^{1/2}\,. \end{gathered}$$

В силу (5.1.3), (5.1.4) имеем

$$|\nabla\eta_{n1}|^2 + |\nabla\eta_{n2}|^2 = 2\frac{(|w_{nz}| + |w_{n\overline{z}}|)^2}{|w_{nz}|^2 - |w_{n\overline{z}}|^2}\, J(x,w_n)$$

и, пользуясь (5.1.6), находим

$$|\nabla\eta_{n1}|^2 + |\nabla\eta_{n2}|^2 \le 2\,p_n\, J(x,w_n)\,.$$

Таким образом, из (5.1.9) вытекает, что

$$2 \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} K_n \, J(x, w_n) \, dx_1 dx_2 \le$$

$$\le \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} |w_n| \; |\nabla K_n| \; (2 \, p_n \, J(x, w_n))^{1/2} \; dx_1 dx_2 \le$$

$$\le 2^{1/2} \left(\int\limits_{\operatorname{supp} K_n} |w_n|^2 \; |\nabla K_n|^2 \, \frac{p_n}{K_n} \, dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\operatorname{supp} K_n} K_n \, J(x, w_n) \, dx_1 dx_2 \right)^{1/2} .$$

Отсюда получаем

$$2 \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} K_n \, J(x, w_n) \, dx_1 dx_2 \le \sup_D |w_n|^2 \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} |\nabla K_n|^2 \, \frac{p_n}{K_n} \, dx_1 dx_2$$

и, замечая, что $p_n(x) \le p(x)$ на D, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\operatorname{supp} K_n} K_n \, J(x, w_n) \, dx_1 dx_2 \le 2 \, R_n^2 \int\limits_{\operatorname{supp} K_n} \left| \nabla K_n^{1/2} \right|^2 \, p(x) \, dx_1 dx_2 \, .$$

Найденая ранее оценка (5.1.7) влечет (5.1.8). Лемма доказана. □

Замечание. В случае, когда

$$\operatorname{ess} \sup_{x \in D} p(x) < \infty \, ,$$

при достаточно больших n множества $I_n = \emptyset$, в качестве K_n можно полагать тождественный нуль, и лемма 5.1.1 становится тривиальной. □

Условие $h \in W^1_{1,\mathrm{loc}}$ и равенство $h_{\overline{z}} = 0$ влекут голоморфность функции h. Хорошо известна следующая задача об устойчивости. Предположим, что h есть топологическое отображение и величина $h_{\overline{z}}$ близка к 0 в каком либо смысле. Будет ли отображение h близким к конформному, и если да, то насколько? В свою очередь, так как конформное отображение круга на круг с нормировкой (3.1.3) является тождественным, то близость h к конформному отображению означает в данном контексте близость к тождественному. Это значит, что посредством малых исправлений (за счет композиции с h, либо с h^{-1}) отображения $w(\xi)$ и $w_n(\xi)$ могут быть преобразованы одно в другое, а мера близости h к тождественному отображению истолковывается как мера близости друг к другу отображений $w(\xi)$ и $w_n(\xi)$.

Следующая теорема доказана в предположении, что отображения $w(\xi)$ и $w_n(\xi)$ суть автоморфизмы круга $B(0,R)$, $R>1$, нормированные условиями (3.1.3).

Теорема 5.1.1. *Предположим, что функции*

$$P_n(x)=\begin{cases} p^2(x)-1 & \textit{при} \quad x\in I_n\,,\\ 0 & \textit{при} \quad x\in D\setminus I_n \end{cases}$$

имеют мажоранты $K_n(x)$ класса $W_0^{1,2}(B(0,R))$, $n=1,2,\ldots$ Положим

$$\delta_n=\left(\inf_{K_n}\int\limits_{B(0,R)}\left|\nabla K_n^{1/2}(x)\right|^2 p(x)\,dx_1dx_2\right)^{1/2}, \qquad (5.1.10)$$

где точные нижние грани берутся по всевозможном мажорантам $K_n(x)\in W_0^{1,2}B(0,R)$ для $P_n(x)$ в $B(0,R)$.

Существуют $N\geq 1$ и $\varepsilon_0>0$ такие, что при всех $n\geq N$ и $0<\delta_n<\varepsilon_0$ выполнено

$$|h(z)-z|\leq C'\,\Delta(R\sqrt{2}\delta_n)\,,\quad h=w_n\circ w^{-1}(z)\,,\quad z\in B(0,R)\,, \quad (5.1.11)$$

и для произвольного измеримого множества $E\subset B(0,R)$ справедлива оценка

$$|\mathrm{mes}_2(h(E))-\mathrm{mes}_2(E)|\leq C''\,\Delta_1(R\sqrt{2}\delta_n)\,. \qquad (5.1.12)$$

Функции $\Delta(\varepsilon)$, $\Delta_1(\varepsilon)$ определены соответственно соотношениями (5.3.21), (5.5.45) и C', C'' — некоторые постоянные, зависящие только от R.

Целью главы является доказательство сформулированного варианта теоремы об устойчивости. Постановка задачи об устойчивости восходит к работе М.А. Лаврентьева [53]. В той же статье было дано и первое качественное ее решение для случая $(1+\varepsilon)$-квазиконформных отображений круга на круг. Количественная сторона результата М.А. Лаврентьева уточнялась затем П.П. Белинским [4] — [6]. Дальнейшее развитие тематики для двумерного случая было связано с работами [107], [49], [178], [47], [20], и для многомерного случая – с работами [64], [7], [97], [172] и др.

5.2 Классы BL_k и BL

Пусть D' и D'' – подобласти $\mathbf{R}^2$. Следуя Г.Д. Суворову [106, глава I], топологическое отображение $w = f(z)$ области D' на D'' называется отображением класса BL_k, если оно имеет обобщенные производные в смысле С.Л. Соболева и

$$\int\limits_{D'} \lambda^2(z,f)\, dx_1 dx_2 \le k\,,$$

где обозначено

$$\lambda(z,f) = \left[2(|f_z|^2 + |f_{\overline{z}}|^2)\right]^{1/2}\,.$$

Отображение f принадлежит классу BL в области D', если оно принадлежит BL_k при каком либо $0 \le k < \infty$.

Функциональный класс BL был введен в обиход в 1906 году Беппо-Леви в связи с изучением проблемы Дирихле. Относительно истории вопроса см. [106, §20].

Сформулируем в нужной нам форме ряд вспомогательных утверждений, касающихся отображений класса BL. Доказательства этих утверждений можно найти в [106] либо получить как следствия наших общих результатов из главы 4. Мы предоставляем проделать это читателю самостоятельно в качестве упражнения.

Всюду ниже до конца главы мы предполагаем области D' и D'' содержащими начало координат и односвязными.

Лемма 5.2.1. *Пусть $w = f(z)$ – гомеоморфное отображение класса BL_k области D', $z_0 \in D'$, и пусть $r < 2\min(1, |z_0, \partial D'|^2)$. Тогда для всех $z \in \overline{B(z_0,r)}$ справедливо неравенство*

$$|f(z) - f(z_0)| < (\pi k)^{\frac{1}{2}} \ln^{-\frac{1}{2}} \frac{2}{r}\,.$$

(Здесь $|z, A|$ – расстояние от точки z до множества A.)

Лемма 5.2.2. *Пусть $w = f(z)$ – гомеоморфизм класса BL области D' на область D'', $f(0) = 0$ и $f^{-1} \in BL_k$ в D''. Пусть $F \subset D'$ – континуум и $0 \in F$. Тогда для произвольной пары точек $z_0 \in F$, $z \in D'$ таких, что $|z - z_0| \geq \alpha$, справедливо неравенство*

$$|f(z) - f(z_0)| > 2 \, \exp\left\{-\frac{\pi k}{\alpha^2}\right\} .$$

Здесь

$$\alpha = 2 \min\left\{\frac{1}{2}d, \, \frac{3}{4}d^2, \exp\left\{-\frac{\pi k}{[2\min(1, \frac{1}{2}\, a, \frac{3}{4}\, a^2)]^2}\right\}\right\} ,$$

$$a = \min\left[\frac{1}{4}|0, \partial D''|^2, \, \exp\left(-\frac{4\pi k}{d^2}\right)\right] ,$$

$$d = |F, \partial D'| \, , \quad |A, B| - \text{ расстояние между множествами } \quad A \text{ и } B \, .$$

Лемма 5.2.3. *Пусть $w = f(z)$ – гомеоморфизм класса BL_k круга $B(0, R')$ на круг $B(0, R'')$, $1 < R' , R'' < \infty$ и $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Тогда*

$$4 \, R'' \leq 4 + \frac{k}{\ln^{1/2} (R' / (R' - 1))} \, .$$

Лемма 5.2.4. *Пусть $w = f(z)$ – гомеоморфизм класса BL_k круга $B(0, R')$ на круг $B(0, R'')$ и $f(0) = 0$. Тогда для произвольной пары точек*

$$z_1, z_2 \in \overline{B(0, R')} \, , \quad |z_1 - z_2| \leq \frac{R'}{4} \, ,$$

выполнено

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq 4R''(\pi k)^{\frac{1}{2}} \ln^{-\frac{1}{2}} \frac{R'}{|z_1 - z_2|} \, .$$

5.3 Отклонение на компактах

Пусть теперь $w = f(z)$ – топологическое отображение класса BL области D' на D'', для которого $f(0) = 0$ и

$$\|f_{\overline{z}}\|_{L^2(D')} \leq \varepsilon \, . \tag{5.3.13}$$

Лемма 5.3.1. *Если для отображения* $w = f(z) : D' \to D''$ *выполнено* (5.3.13) *и площадь* $\mathrm{mes}_2(D'') < \infty$, *то* $w = f(z)$ *принадлежит классу* BL_k *в* D' *с*

$$k = 2\,\mathrm{mes}_2\,(D'') + 4\varepsilon^2\,.$$

Для **доказательства** достаточно заметить, что

$$\int\limits_{D'} \lambda^2(z,f)\,dx_1dx_2 = \int\limits_{D'} 2(|f_z|^2 + |f_{\overline{z}}|^2)\,dx_1dx_2 =$$

$$= \int\limits_{D'} 2(|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2)\,dx_1dx_2 + 4\int\limits_{D'} |f_{\overline{z}}|^2\,dx_1dx_2\,.$$

В силу (5.1.4) можем записать

$$\int\limits_{D'} (|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2)\,dx_1dx_2 = \int\limits_{D'} J(z,f)\,dx_1dx_2\,.$$

По формуле замены переменных для отображений класса BL имеем

$$\int\limits_{D'} J(z,f)\,dx_1dx_2 = \mathrm{mes}_2\,(D'')\,,$$

и лемма доказана. $\square$

Пусть F - произвольный континуум в D', содержащий начало координат. Пусть U_1, U_2 - подобласти D' такие, что $F \subset U_1$, $\overline{U_1} \subset U_2$, и обладающие свойствами:

a) области U_1, U_2 односвязны;

b) границы ∂U_1, ∂U_2 суть C^1-гладкие;

c) $|F, \partial U_1| \geq \frac{1}{2}\,|F, \partial D'|\,, \quad |U_1,\, \partial U_2| \geq \frac{1}{4}\,|F, \partial D'|\,.$

Для отображения $w = f(z)$ на U_2 справедливо интегральное представление

$$f(z) = h(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{U_2} \frac{f_{\overline{z}}\,d\eta_1 d\eta_2}{\zeta - z} \equiv h(z) + T_{U_2}(f_{\overline{z}})\,, \tag{5.3.14}$$

где $h(z)$ – некоторая голоморфная на U_2 функция и $\zeta = \eta_1 + i\,\eta_2$ [16, теорема 1.16].

Нам понадобятся следующие два свойства оператора $T_{U_2}(f)$, доказательства которых можно найти, например, в [16, глава 1].

1. *Если* $f \in L^2(U_2)$, *то*

$$\|T_{U_2}(f)\|_{L^2(U_2)} \leq M_{U_2} \|f\|_{L^2(U_2)}, \tag{5.3.15}$$

где

$$M_{U_2} = \sup_z \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{U_2} \frac{d\eta_1 d\eta_2}{|\zeta - z|} \right)^2 .$$

2. *Если* $f \in L^2(U_2)$, *то*

$$\left\| \frac{\partial T_{U_2}(f)}{\partial z} \right\|_{L^2(U_2)} \leq \|f\|_{L^2(U_2)} . \tag{5.3.16}$$

Замечание. Легко видеть, что

$$M_{U_2} = \sup_z \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{U_2} \frac{d\eta_1 d\eta_2}{|\zeta - z|} \right)^2 \leq 4\pi \operatorname{diam}(U_2) . \tag{5.3.17}$$

Чтобы убедиться в справедливости неравенства достаточно перейти под интегралом к полярным координатам с полюсом в точке z:

$$\int\limits_{U_2} \frac{d\eta_1 d\eta_2}{|\zeta - z|} = \int\limits_0^{\operatorname{diam}(U_2)} d\tau \int\limits_{U_2 \cap |\zeta - z| = \tau} \frac{|dr|}{\tau} \leq 2\pi \operatorname{diam}(U_2) .$$

□

Упражнение. Найти оценку для постоянной M_U лучшую, нежели в неравенстве (5.3.17). □

На основании представления (5.3.14) для отображения $w = f(z)$ и оценки (5.3.15) имеем

$$\|f(z) - h(z)\|_{L^2(U_2)} \leq \|T_{U_2}(f_{\overline{z}})\|_{L^2(U_2)} \leq M_{U_2} \|f_{\overline{z}}\|_{L^2(U_2)} .$$

Отсюда, учитывая предположение (5.3.13), находим

$$\|f(z) - h(z)\|_{L^2(U_2)} \leq M_{U_2}\, \varepsilon . \tag{5.3.18}$$

Соотношение (5.3.18) уже само по себе дает оценку отклонения отображения f от подходящей голоморфной функции h. Вместе с тем нам необходимо иметь больше информации об этой голоморфной функции. Ниже будет показано, что в качестве h может быть выбрано некоторое конформное отображение со специальными условиями нормировки.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\int\limits_{U_2} |h_z|^2\, dx_1 dx_2 &= \int\limits_{U_2} \left| f_z - \frac{\partial}{\partial z} T_{U_2}(f_{\overline{z}}) \right|^2 dx_1 dx_2 \leq \\ &\leq 2\int\limits_{U_2} \left(|f_z|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial z} T_{U_2}(f_{\overline{z}}) \right|^2 \right) dx_1 dx_2 \leq \\ &\leq 2\int\limits_{U_2} \left(|f_z|^2 + |f_{\overline{z}}|^2 \right) dx_1 dx_2 \leq k\,,\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

где k – постоянная из леммы 5.3.1.

Соотношения (5.3.18), (5.3.19) дают возможность получить оценку разности $f(z) - h(z)$ в равномерной метрике на U_1. Зафиксируем замкнутый круг $\overline{B(z_0, r)}$ радиуса r с центром в точке $z_0 \in \overline{U_1}$. При $r < \frac{1}{4}|F, \partial D'|$ круг $\overline{B(z_0, r)}$ содержится в области U_2. По теореме о среднем найдется точка $z_1 \in \overline{B(z_0, r)}$ такая, что

$$|f(z_1) - h(z_1)|^2 \mathrm{mes}_2\ (B(z_0, r)) = \|f(z) - h(z)\|^2_{B(z_0,r)} \leq M^2_{U_2}\, \varepsilon^2\,.$$

Отсюда,

$$|f(z_1) - h(z_1)| \leq \frac{M_{D'}\, \varepsilon}{\sqrt{\pi}\, r}\,. \tag{5.3.20}$$

В точке z_0 имеем

$$|f(z_0) - h(z_0)| \leq |f(z_0) - f(z_1)| + |h(z_0) - h(z_1)| + |f(z_1) - h(z_1)|\,.$$

По лемме 5.2.1 в силу неравенства (5.3.20) при

$$r < \min\left\{1,\ \frac{1}{4}|F, \partial D'|,\ \frac{1}{16}|F, \partial D'|^2\right\}$$

получаем

$$|f(z_0) - h(z_0)| < 2(\pi k)^{\frac{1}{2}} \ln^{-\frac{1}{2}} \frac{2}{r} + \frac{M_{D'}\, \varepsilon}{\sqrt{\pi}\, r}\,.$$

Полагая теперь

$$r = 2\sqrt{\varepsilon}$$

и учитывая произвол в выборе точки $z_0 \in \overline{U_1}$, приходим к неравенству

$$|f(z) - h(z)| < \Delta(\varepsilon) \equiv \frac{2\,(2\pi\,k)^{\frac{1}{2}}}{\ln^{\frac{1}{2}}\,1/\varepsilon} + \frac{M_{D'}}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\varepsilon}\,, \quad \varepsilon < \beta\,. \tag{5.3.21}$$

Здесь символом β обозначена величина

$$\beta = \left[\frac{1}{2}\,\min\left\{1,\,\frac{1}{4}|F,\partial D'|,\,\frac{1}{16}|F,\partial D'|^2\right\}\right]^2\,.$$

Замечание. Величины ε, k и $M_{D'}$ по своей природе существенно отличаются друг от друга и потому оценка вида

$$\Delta(\varepsilon) \le \frac{\text{const}}{\ln^{\frac{1}{2}}\,1/\varepsilon}$$

в (5.3.21) не кажется нам здесь целесообразной. В случае необходимости читатель всегда может получить это самостоятельно. □

Оценка (5.3.21) дает порядок отклонения отображения $w = f(z)$ от подходящей голоморфной функции $h(z)$. Покажем, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ голоморфная функция $h(z)$ в неравенстве (5.3.21) однолистна на F.

Предположим противное, а именно, предположим, что найдется последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$, соответствующая последовательность отображений $\{f_n\}$ которой сходится равномерно внутри области D' к предельному отображению f_0. В силу (5.3.21) заключаем, что надлежащая последовательность голоморфных функций $\{h_n\}$ также равномерно на $\overline{U_1}$ сходится к f_0. Следовательно, f_0 является голоморфной на U_1 функцией.

Пользуясь теоремой 4.3.1 о равностепенной непрерывности семейства BL_k в замкнутой простыми концами области (см. также Г.Д. Суворов [106, §6, часть I, теорема 9]), легко убеждаемся, что $f_0 \not\equiv \text{const}$. Действительно, если это не так, то, в силу нормировки, $f_0 \equiv 0$ в D'. Выберем теперь последовательность точек $\{z_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, в области D', сходящуюся к некоторому простому концу $e_0 \in \tilde{\partial} D'$. При всех n будем тогда иметь

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(z_m), \partial D''| = 0\,,$$

что при $n \to \infty$ противоречит предположению $|0,\,\partial D''| > 0$.

Таким образом, голоморфная функция f_0 однолистна на $\overline{U_1}$, как равномерный предел последовательности гомеоморфизмов $\{f_n\}$. Отсюда, в частности, следует, что $f_0^{-1} \in BL_{k_3}$ в области $\Delta = f_0(D')$ с $k_3 = 2\,\mathrm{mes}_2(D')$.

По лемме 5.2.2 для произвольной пары точек $z_0 \in F$ и $z \in \partial U_1$ справедливо неравенство

$$|f_0(z) - f_0(z_0)| > 2\,\exp\left\{-\frac{\pi k_3}{\alpha^2}\right\},$$

где постоянная $\alpha > 0$ определена в лемме 5.2.2. Отсюда в силу равномерной сходимости на $\overline{U_1}$ последовательности голоморфных функций $\{h_n\}$ к f_0 для произвольной пары точек $z_0 \in F$ и $z \in \partial U_1$ при достаточно больших n выполнено

$$\begin{aligned}|[h_n(z) - h_n(z_0)] - [f_0(z) - f_0(z_0)]| &< 2\,\exp\left\{-\frac{\pi k_3}{\alpha^2}\right\} < \\ &< |f_0(z) - f_0(z_0)|\,.\end{aligned}$$

По теореме Руше функции $h_n(z) - h_n(z_0)$ и $f_0(z) - f_0(z_0)$ имеют в области U_1 одинаковое число нулей, что ввиду произвола в выборе точки $z_0 \in F$ позволяет сделать заключение об однолистности голоморфных функций $h_n(z)$ при достаточно больших n. Это противоречит нашему предположению.

Итак, мы доказали, что при всех $\varepsilon > 0$, меньших некоторого $\varepsilon_0 > 0$, функция $h(z)$ в соотношении (5.3.21) является на F однолистным конформным отображением.

Таким образом доказано следующее утверждение.

Лемма 5.3.2. *Пусть $w = f(z)$ – гомеоморфизм класса BL_k области D' на область D'', $f(0) = 0$, $\|f_{\overline{z}}\|_{L^2(D')} \le \varepsilon$ и $f^{-1} \in BL_{k_1}$ на D''. Тогда для произвольного континуума F, $0 \in F \subset D'$, найдется конформное отображение $h(z)$ такое, что при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ справедливо неравенство*

$$\max_{z\in F} |f(z) - h(z)| < \Delta(\varepsilon)\,,$$

где ε_0 – некоторая постоянная, зависящая от $|F, \partial D'|$, $|0, \partial D''|$, $\delta(D')$, k_1 и принадлежащая промежутку $(0, \beta]$; функция $\Delta(\varepsilon)$ и постоянная β те же, что и в (5.3.21).

Сформулируем основной результат данного раздела.

Теорема 5.3.1. *Пусть D' и D'' – односвязные области комплексной плоскости, содержащие точки 0 и 1. Пусть $w = f(z)$ – гомеоморфное отображение класса BL_k области D', на область D'', нормированное условиями $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Предположим, что $\|f_{\overline{z}}\|_{L^2(D')} \le \varepsilon$ и $f^{-1} \in BL_{k_1}(D'')$. Тогда для произвольного континуума $F \subset D'$, $0, 1 \in F$, найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и конформное отображение $h(z)$ со свойствами: $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, такие что при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ имеет место оценка*

$$\max_{z\in F} |f(z) - h(z)| < C_1\, \Delta(\varepsilon)\,,$$

где

$$C_1 = 2\,(\operatorname{diam} D'' + 1)$$

и функция $\Delta(\varepsilon)$ определена в (5.3.21).

Доказательство. По лемме 5.3.2 для всякого континуума $F \subset D'$, $0, 1 \in F$, найдется конформное отображение $h(z)$ такое, что при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для любой точки $z \in F$ выполнено

$$|f(z) - h(z)| < \Delta(\varepsilon)\,.$$

Положим

$$\tilde{h}(z) = h(z) - h(0) \quad \text{и} \quad \tilde{f}(z) = f(z) - f(0)\,.$$

Функцию $g(z)$ определим как частное $g(z) = \tilde{h}(z)/\tilde{h}(1)$. Ясно, что отображение $g(z)$ конформно на F и $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

Следующие два неравенства суть простые следствия указанной оценки

$$|\tilde{f}(z) - \tilde{h}(z)| < 2\,\Delta(\varepsilon) \tag{5.3.22}$$

и

$$\left|\frac{\tilde{h}(z)}{\tilde{h}(1)}\right| < \frac{|\tilde{f}(z)| + 2\,\Delta(\varepsilon)}{|\tilde{f}(1)| - 2\,\Delta(\varepsilon)}\,. \tag{5.3.23}$$

Неравенство (5.3.23) при

$$\Delta(\varepsilon) < \frac{1}{4}$$

дает

$$|\tilde{f}(1)| - 2\,\Delta(\varepsilon) = 1 - 2\,\Delta(\varepsilon) \ge \frac{1}{2}$$

и, далее,

$$\left|\frac{\tilde{h}(z)}{\tilde{h}(1)}\right| < 2\operatorname{diam} D'' + 1\,. \tag{5.3.24}$$

С учетом соотношения $\tilde{f}(1) = 1$ оцениваем разность $f(z) - g(z)$. Имеем

$$|f(z) - g(z)| = \left|\frac{\tilde{h}(1)f(z) - \tilde{h}(z)}{\tilde{h}(1)}\right| \le$$

$$\le |\tilde{f}(z) - \tilde{h}(z)| + \left|\frac{\tilde{h}(z)}{\tilde{h}(1)}\right| |\tilde{h}(1) - \tilde{f}(1)|\,.$$

Отсюда с использованием соотношений (5.3.22) и (5.3.24) при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ получаем

$$\max_{z\in F} |f(z) - g(z)| < 2\,(\operatorname{diam} D'' + 1)\,\Delta(\varepsilon)\,.$$

Теорема доказана. □

Замечание. Постоянная ε_0, как и в лемме 5.3.2, зависит от $|F, \partial D'|$, $|0, \partial D''|$ и постоянных k, k_1. В [47], [20] приводятся некоторые оценки этой постоянной, однако, наш взгляд, они очень грубые и их уточнение было бы весьма желательно.

5.4 Отображение круга на круг

Нашей ближайшей целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема 5.4.1. *Пусть $w = f(z)$ – гомеоморфизм класса BL_k круга $B = B(0,R)$, $1 < R < \infty$, на себя, нормированный условиями $f(0) = 0, f(1) = 1$, и пусть $\|f_{\overline{z}}\|_{L^2(B(0,R))} \le \varepsilon$, $f^{-1} \in BL_{k_1}(B(0,R))$. Тогда существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и любых $z \in B(0,R)$ справедлива оценка*

$$|f(z) - z| < C_2\,\Delta(\varepsilon)\,. \tag{5.4.25}$$

Здесь C_2 – некоторая постоянная, зависящая от k, k_1, R и ε_0.

Доказательство. Прежде всего заметим, что согласно лемме 5.3.1 отображение $w = f(z)$ принадлежит классу BL_{k_1} в круге $B(0,R)$ с $k_1 = 2\,\pi\,R^2 + 4\varepsilon^2$. По теореме 4.3.1 отображение f продолжимо по непрерывности до гомеоморфизма замкнутого круга $\overline{B(0,R)}$ на себя.

Продолжим по симметрии через окружности $|z| = R$ и $|w| = R$ отображение $w = f(z)$. Положим

$$f^*(z) = \begin{cases} R^2 \Big/ \overline{f}\left(\dfrac{R^2}{\overline{z}}\right) & \text{при} \quad |z| \geq R\,, \\ f(z) & \text{при} \quad |z| < R\,. \end{cases}$$

Чтобы вычислить комплексные производные $(f^*)'_{\overline{z}}$ и $(f^*)'_z$ воспользуемся правилами дифференцирования суперпозиции (5.1.1). Зафиксируем постоянную ρ так, чтобы $R < \rho < \infty$. Мы имеем

$$\int\limits_{R<|z|<\rho} |(f^*)'_{\overline{z}}(z)|^2 \, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\limits_{R<|z|<\rho} \frac{R^4}{\left|\overline{f}^2\left(\dfrac{R^2}{\overline{z}}\right)\right|^2} \left|(\overline{f})'_z\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)\frac{R^2}{\overline{z}^2}\right|^2 dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\limits_{R<|z|<\rho} \frac{R^8}{\left|f\left(\dfrac{R^2}{\overline{z}}\right)\right|^4} \left|(\overline{f})'_z\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)\right|^2 \frac{dx_1 dx_2}{|z|^4}\,,$$

или, поскольку $(\overline{f})'_z = \overline{(f'_{\overline{z}})}$,

$$\int\limits_{R<|z|<\rho} |(f^*)'_{\overline{z}}(z)|^2 \, dx_1 dx_2 \leq$$

$$\leq \int\limits_{R<|z|<\rho} \frac{R^8}{\left|f\left(\dfrac{R^2}{\overline{z}}\right)\right|^4} \left|f'_{\overline{z}}\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)\right|^2 \frac{dx_1 dx_2}{|z|^4}\,. \tag{5.4.26}$$

Зафиксируем постоянную $\alpha \geq 4$. Согласно лемме 5.2.4 при $z \in B(0,R)$ таких, что $|z, \partial B(0,R)| \leq R/\alpha$ выполнено

$$|f(z), \partial B(0,R)| < 4R\,(\pi k)^{\frac{1}{2}}\,\ln^{-\frac{1}{2}} \frac{R}{|z, \partial B(0,R)|}\,,$$

или

$$R - |f(z)| < 4R\,(\pi k)^{\frac{1}{2}}\,\ln^{-\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{\alpha-1}\,.$$

Поэтому при z, удовлетворяющих условию

$$R < |z| < \rho < \frac{\alpha}{\alpha-1}\,R\,, \tag{5.4.27}$$

имеем

$$R \geq \left|\frac{R^2}{\overline{z}}\right| \geq \frac{R^2}{\rho} \geq R\frac{\alpha-1}{\alpha}\,.$$

Тем самым, находим

$$R \geq \left|f\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)\right| \geq R\left(1 - 4\,(\pi k)^{\frac{1}{2}}\,\ln^{-\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \equiv R\,\mu\,, \tag{5.4.28}$$

где

$$\mu = 1 - 4\,(\pi k)^{\frac{1}{2}}\,\ln^{-\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

и постоянная $\alpha > 1$ выбрана так, чтобы $\mu > 0$; например, чтобы

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} > \exp\{16\,\pi\,k\}\,.$$

Соотношения (5.4.26), (5.4.27), (5.4.28) влекут

$$\int\limits_{R<|z|<\rho} |(f^*)'_{\overline{z}}(z)|^2\,dx_1dx_2 \leq$$

$$\leq \int\limits_{R<|z|<\rho} \frac{R^4}{\mu^4}\left|f'_{\overline{z}}\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)\right|^2\frac{dx_1dx_2}{|z|^4}\,.$$

Таким образом, сделав подстановку

$$\frac{R^2}{\overline{z}} = z^*\,,$$

мы получаем

$$\int\limits_{R<|z|<\rho} |(f^*)'_{\overline{z}}(z)|^2 \, dx_1 dx_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu^4} \int\limits_{\frac{R^2}{\rho}<|z|<R} \left|f'_{\overline{z}}(z)\right|^2 \, dx_1 dx_2 \,. \tag{5.4.29}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\int\limits_{R<|z|<\rho} |(f^*)'_z(z)|^2 \, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\limits_{R<|z|<\rho} R^4 \left|\frac{1}{\overline{f}^2\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)}\right|^2 \left|(\overline{f})'_{\overline{z}}\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)\,\frac{R^2}{z^2}\right|^2 \, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\limits_{R<|z|<\rho} \frac{R^8}{\left|f\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)\right|^4} \left|(\overline{f})'_{\overline{z}}\left(\frac{R^2}{z}\right)\right|^2 \frac{dx_1 dx_2}{|z|^4} \,,$$

или, ввиду соотношения $\overline{(f'_z)} = (\overline{f})'_{\overline{z}}$,

$$\int\limits_{R<|z|<\rho} |(f^*)'_z(z)|^2 \, dx_1 dx_2 \leq$$

$$\leq \int\limits_{R<|z|<\rho} \frac{R^8}{\left|f\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)\right|^4} \left|f'_z\left(\frac{R^2}{z}\right)\right|^2 \frac{dx_1 dx_2}{|z|^4} \,.$$

Рассуждая как в предыдущем случае и предполагая, что выполнены условия (5.4.27) относительно R, ρ, α и $\mu > 0$, находим

$$\int\limits_{R<|z|<\rho} |(f^*)'_z(z)|^2 \, dx_1 dx_2 \le \frac{1}{\mu^4} \int\limits_{\frac{R^2}{\rho}<|z|<R} |f'_z(z)|^2 \, dx_1 dx_2 \,. \tag{5.4.30}$$

Оценка (5.4.29) гарантирует, что для меры отклонения отображения $f^*(z)$ от голоморфной функции на круге $B(0,\rho)$ выполнено

$$\|(f^*)'_{\overline{z}}\|_{L^2(B(0,\rho))} \le \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{\mu^4} \int\limits_{\frac{R^2}{\rho}<|z|<R} |f'_{\overline{z}}(z)|^2 \, dx_1 dx_2\right)^{1/2} . \tag{5.4.31}$$

С другой стороны, из (5.4.29) и (5.4.30) следует, что

$$\int\limits_{R<|z|<\rho} \lambda^2(z, f^*) \, dx_1 dx_2 \le \frac{2}{\mu^4} \int\limits_{\frac{R^2}{\rho}<|z|<R} \lambda^2(z, f) \, dx_1 dx_2$$

и, в частности, отображение $w = f^*(z)$ принадлежит классу BL_{k_2} в круге $B(0,\rho)$ с постоянной k_2, для которой

$$k_2 \le k + \frac{2k}{\mu^4} \,. \tag{5.4.32}$$

Зафиксируем постоянную ρ^* так, чтобы $R < \rho^* < \rho$. Нам необходима некоторая специальная оценка для образа окружности $S_\rho = \{z : |z| = \rho^*\}$. В соответствии с теоремой 5.3.1 для континуума $\overline{B(0,\rho^*)}$ найдется конформное отображение $w = h(z)$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, такое, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\max_{z \in \overline{B(0,\rho^*)}} |f(z) - h(z)| < C_1 \, \Delta(\varepsilon) \,. \tag{5.4.33}$$

При $z \in S_R$ выполнено $|f(z)| = R$. Таким образом, для голоморфной в круге $B(0,\rho^*)$ функции $h(z)/z$ при $|z| = R$ имеем

$$\frac{R - C_1 \, \Delta(\varepsilon)}{R} < \left|\frac{h(z)}{z}\right| = \frac{|h(z)|}{R} < \frac{R + C_1 \, \Delta(\varepsilon)}{R}$$

или

$$1 - \frac{C_1 \, \Delta(\varepsilon)}{R} < \left|\frac{h(z)}{z}\right| = \frac{|h(z)|}{R} < 1 + \frac{C_1 \, \Delta(\varepsilon)}{R} \,.$$

Отсюда при $|z| = R$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ находим

$$\frac{1}{1 + C_3\,\Delta(\varepsilon)/R} < \left|\frac{h(z)}{z}\right| < 1 + C_3\,\Delta(\varepsilon)/R\,,$$

где

$$C_3 = C_3(\varepsilon) \equiv \frac{C_1}{1 - C_1\,\Delta(\varepsilon)/\,R}\,.$$

Принимая во внимание, что гармоническая в $B(0, \rho^*)$ функция

$$\ln\left|\frac{h(z)}{z}\right|$$

достигает своих максимального и минимального значений лишь на границе подобласти, и, пользуясь неравенством $\ln(1 + \varepsilon) < \varepsilon$, получаем

$$\left|\ln\left|\frac{h(z)}{z}\right|\right| < C_3\,\Delta(\varepsilon)/R\,, \quad z \in \overline{B(0,R)}\,. \tag{5.4.34}$$

Воспользуемся соотношением

$$|\exp(\epsilon) - 1| \le |\epsilon|\,\exp(|\epsilon|)\,, \quad \epsilon \in \mathbf{R}\,. \tag{5.4.35}$$

Полагая здесь

$$\epsilon = \ln\left|\frac{h(z)}{z}\right|\,,$$

находим

$$\left|\left|\frac{h(z)}{z}\right| - 1\right| \le \left|\frac{h(z)}{z}\right|\,\left|\ln\left|\frac{h(z)}{z}\right|\right|\,.$$

Далее, на основании (5.4.34) будем иметь

$$R\,||h(z)| - |z|| <\; C_3\,|h(z)|\,\Delta(\varepsilon)\,, \quad z \in \overline{B(0,R)}\,,$$

или, при всех $z \in \overline{B(0,R)}$,

$$||h(z)| - |z|| < C_3\,\left(1 + \frac{C_1\,\Delta(\varepsilon)}{R}\right)\,\Delta(\varepsilon)\,. \tag{5.4.36}$$

Оценки (5.4.33), (5.4.36) влекут

$$||f(z)| - |z|| < C_4\,\Delta(\varepsilon)\,, \quad C_4 = C_1 + C_3\,\left(1 + \frac{C_1\,\Delta(\varepsilon)}{R}\right)\,,$$

или, иначе, при всех $z \in \overline{B(0,R)}$:

$$|z| - C_4\,\Delta(\varepsilon) < |f(z)| < |z| + C_4\,\Delta(\varepsilon)\,.$$

В силу способа построения $f^*(z)$ мы можем теперь заключить, что при $|z| > R$ выполнено

$$\frac{R^3}{R^3/|z| + C_4\,\Delta(\varepsilon)} < |f^*(z)| < \frac{R^3}{R^3/|z| - C_4\,\Delta(\varepsilon)}\,.$$

Таким образом, образ окружности S_{ρ^*}, $R < \rho^* < \rho$, лежит в круговом кольце

$$\frac{\rho^*}{1 + C_4\,\rho^*\,\Delta(\varepsilon)/R^3} < |w| < \frac{\rho^*}{1 - C_4\,\rho^*\,\Delta(\varepsilon)/R^3}\,. \tag{5.4.37}$$

Перейдем непосредственно к доказательству оценки (5.4.25). По теореме 5.3.1 найдется отображение $h^*(z)$, конформное на $B(0,\rho^*)$, нормированное условиями $h^*(0) = 0$, $h^*(1) = 1$ и такое, что при всех $z \in \overline{B(0,\rho^*)}$ выполнено

$$|f^*(z) - h^*(z)| < C_1\,\Delta(\varepsilon)\,. \tag{5.4.38}$$

В соответствии с (5.4.37) и (5.4.38) кривая $h^*(S_{\rho^*})$ лежит в кольце

$$\frac{1}{1 + C_4\rho^*\Delta/R^3} - \frac{C_1\Delta}{\rho^*} < \left|\frac{w}{\rho^*}\right| < \frac{1}{1 - C_4\rho^*\Delta/R^3} + \frac{C_1\Delta}{\rho^*}\,,$$

где $\Delta = \Delta(\varepsilon)$.

Отсюда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ следует, что

$$\frac{1}{1 + C_5\,\Delta(\varepsilon)} < \left|\frac{w}{\rho^*}\right| < 1 + C_5\,\Delta(\varepsilon)\,, \quad w \in f^*(S_{\rho^*})\,. \tag{5.4.39}$$

Упражнение. Указать вид постоянной $C_5 = C_5(\varepsilon)$ и, ниже, постоянных C_6, C_7. $\Box$

Положим

$$w = P(\zeta) = h^*\left(\rho^*\,\zeta\right)\,.$$

Отображение $\omega = P(\zeta)$ конформно в единичном круге $|\zeta| < 1$, причем

$$P(0) = 0\,, \quad P\left(\frac{1}{\rho^*}\right) = \frac{1}{\rho^*}\,,$$

и образ окружности $|\zeta| = 1$ в силу (5.4.39) расположен в кольце

$$\frac{1}{1 + C_5\,\Delta(\varepsilon)} < |w| < 1 + C_5\,\Delta(\varepsilon)\,.$$

Поскольку функция $\ln|P(\zeta)/\zeta|$ является гармонической в круге $|\zeta| < 1$ и при $|\zeta| = 1$ выполнено

$$\frac{1}{1 + C_5\,\Delta(\varepsilon)} < \left|\frac{P(\zeta)}{\zeta}\right| = |P(\zeta)| < 1 + C_5\,\Delta(\varepsilon)\,,$$

то при всех $|\zeta| \le 1$ будем иметь

$$\left|\ln\left|\frac{P(\zeta)}{\zeta}\right|\right| < C_5\,\Delta(\varepsilon)\,. \tag{5.4.40}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$Q(\zeta) = \frac{1}{C_5\,\Delta(\varepsilon)}\ln\frac{P(\zeta)}{\zeta}\,,$$

где под логарифмом понимается его главная ветвь. Функция $\tilde{Q}(\zeta) = Q(\zeta) - Q(0)$ регулярна в круге $|\zeta| < 1$, $\tilde{Q}(0) = 0$, и на основании (5.4.40) выполнено

$$-1 < \mathrm{Re}\,\tilde{Q}(\zeta) < 1\,.$$

Тем самым, в соответствии с принципом Линделефа [24, §3, глава VIII] для любого $0 < r < 1$ при всех $|\zeta| \le r < 1$ имеем

$$|\tilde{Q}(\zeta)| < \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+r}{1-r}\,.$$

Отсюда при

$$r = \frac{R}{\rho^*}\,, \quad |\zeta| \le \frac{R}{\rho^*}\,,$$

получаем

$$|\tilde{Q}(\zeta)| < \frac{2}{\pi}\ln\frac{\rho^*+R}{\rho^*-R}\,. \tag{5.4.41}$$

Но поскольку

$$Q\left(\frac{1}{\rho^*}\right) = \frac{1}{C_5\,\Delta(\varepsilon)}\ln\frac{P\left(1/\rho^*\right)}{1/\rho^*} = 0$$

и

$$Q(0) = Q\left(\frac{1}{\rho^*}\right) - \tilde{Q}\left(\frac{1}{\rho^*}\right)\,,$$

то мы вправе записать

$$|Q(0)| \le \left| Q\left(\frac{1}{\rho^*}\right)\right| + \left|\tilde{Q}\left(\frac{1}{\rho^*}\right)\right| \le \frac{2}{\pi}\,\ln\frac{\rho^*+R}{\rho^*-R}\,. \tag{5.4.42}$$

Пользуясь еще раз неравенством (5.4.35) при $x = |\ln P(\zeta)/\zeta|$, будем иметь

$$\begin{aligned}|P(\zeta)-\zeta| \;&\le |\zeta|\,\left|\ln\frac{P(\zeta)}{\zeta}\right|\,\exp\left\{\left|\ln\frac{P(\zeta)}{\zeta}\right|\right\} = \\ &= C_5\,\Delta(\varepsilon)\,|\zeta|\,|Q(\zeta)|\,\exp[\,C_5\,\Delta(\varepsilon)\,|Q(\zeta)|] \le \\ &\le\; C_5\,\Delta(\varepsilon)\,|\zeta|\,[|\tilde{Q}(\zeta)|+|Q(0)|]\exp\{C_5\,\Delta(\varepsilon)\,[|\tilde{Q}(\zeta)|+|Q(0)|]\}\,.\end{aligned}$$

Пользуясь леммой 5.2.3 и учитывая (5.4.41), (5.4.42), отсюда выводим

$$|P(\zeta)-\zeta| < C_6\,\Delta(\varepsilon)\,.$$

Таким образом, при всех $z \in B(0,R)$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено

$$|h^*(z)-z| < C_7\,\Delta(\varepsilon)\,. \tag{5.4.43}$$

Оценка (5.4.25) следует теперь из неравенств (5.4.38) и (5.4.43). Теорема 5.4.1 доказана. □

Задача. Найти наилучшие значения постоянных C_2 и ε_0 в теореме 5.4.1.

5.5 Устойчивость по мере

Теорема 5.4.1 позволяет получить ряд следствий, характеризующих другие формы устойчивости для отображений класса BL (см. [47]). Ограничимся здесь оценкой искажения меры при отображениях, близких к конформным.

Пусть, как и выше, $w = f(z)$ – гомеоморфизм класса BL области D. Для произвольного измеримого по Лебегу множества $E \subset D$ выполнено

$$\mathrm{mes}_2 f(E) = \int\limits_E J(z,f)\,d\xi_1 d\xi_2\,.$$

С использованием теоремы 5.4.1 и рассуждениями, аналогичными приведенным в работе [64], может быть получена следующая оценка искажения меры при отображениях класса BL. Для $(1+\varepsilon)$-квазиконформных автоморфизмов круга и иных условиях нормировки см. П.П. Белинский [5].

Теорема 5.5.1. *Пусть $w = f(z)$ – гомеоморфизм класса BL_k круга $B(0,R)$ на себя, $1 < R < \infty$, нормированный условиями $f(0) = 0, f(1) = 1$, и пусть $\|f_{\overline{z}}\|_{L^2(B(0,R))} \le \varepsilon$, $f^{-1} \in BL_{k_1}(B(0,R))$. Тогда существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и всякого измеримого множества $E \subset B(0,R)$ справедлива оценка*

$$|\mathrm{mes}_2\,(f(E)) - \mathrm{mes}_2\,(E)| < C''\,\Delta_1(\varepsilon)\,. \tag{5.5.44}$$

Здесь $\Delta_1(\varepsilon)$ – функция, определенная в (5.5.45), и C'' – некоторая постоянная, зависящая от k, k_1, R и ε_0.

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) &= \int\limits_{S_R} \xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1 = \frac{1}{2\,i}\int\limits_{S_R} \overline{z}\,dz - z\,d\overline{z} = \\ &= \frac{1}{2\,i}\int\limits_{S_R} [\overline{z - f(z)}]\,dz - \frac{1}{2\,i}\int\limits_{S_R} [z - f(z)]\,d\overline{z} + \\ &+ \frac{1}{2\,i}\int\limits_{S_R} \overline{f(z)}\,dz - \frac{1}{2\,i}\int\limits_{S_R} f(z)\,d\overline{z}\,. \end{aligned}$$

К двум последним слагаемым применим формулу Грина

$$\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \int\limits_{D} f_{\overline{z}}\,d\xi_1 d\xi_2\,, \quad f \in C^0(\overline{D}) \cap BL(D)\,,$$

справедливую для любой конечно связной области $D \subset \mathbf{R}^2$ с границей класса C^1.

Мы имеем

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) &= \int\limits_{S_R} \xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1 = \frac{1}{2\,i}\int\limits_{S_R} \overline{z}\,dz - z\,d\overline{z} = \\ &= \frac{1}{2\,i}\int\limits_{S_R} [\overline{z - f(z)}]\,dz - \frac{1}{2\,i}\int\limits_{S_R} [z - f(z)]\,d\overline{z} + \\ &+ \int\limits_{B(0,R)} (\overline{f})_{\overline{z}}\,d\xi_1 d\xi_2 + \int\limits_{B(0,R)} f_z\,d\xi_1 d\xi_2\,. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$2\,\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) \le \int\limits_{S_R} |z-f|\,|dz| + \int\limits_{B(0,R)} \left(|(\overline{f})_{\overline{z}}| + |f_z|\right)\, d\xi_1 d\xi_2\,.$$

Оценивая первое слагаемое по теореме 5.4.1 и преобразовывая второе с учетом равенства $|(\overline{f})_{\overline{z}}| = |f_z|$, получаем

$$\pi\, R^2 \le C_8\, \Delta(\varepsilon) + \int\limits_{B(0,R)} |f_z|\, d\xi_1 d\xi_2\,,$$

где $C_8 = \pi\, C_2\, R\,.$

Пусть $E \subset B(0,R)$ – произвольное измеримое множество. Тогда

$$\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) - C_8\,\Delta(\varepsilon) \le \int\limits_{E} |f_z|\, d\xi_1 d\xi_2 + \int\limits_{B(0,R)\setminus E} |f_z|\, d\xi_1 d\xi_2\,.$$

В силу интегрального неравенства Коши находим

$$\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) - C_8\,\Delta(\varepsilon) \le$$

$$\le (\mathrm{mes}_2\,(E))^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{E} |f_z|^2\, d\xi_1 d\xi_2 \right)^{1/2} +$$

$$+ (\mathrm{mes}_2\,(B(0,R) \setminus E))^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{B(0,R)\setminus E} |f_z|^2\, d\xi_1 d\xi_2 \right)^{1/2}.$$

Воспользуемся соотношением

$$\int\limits_{E} |f_z|^2\, d\xi_1 d\xi_2 \le \int\limits_{E} J(z,f)\, d\xi_1 d\xi_2 + \|f_{\overline{z}}\|^2_{L^2(B(0,R))}\,.$$

При $\|f_{\overline{z}}\|_{L^2(B(0,R))} \le \varepsilon$ получаем

$$\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) - C_8\,\Delta(\varepsilon) \le (\mathrm{mes}_2\,(E))^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_E J(z,f)\,d\xi_1 d\xi_2 + \varepsilon^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ (\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) - \mathrm{mes}_2\,(E))^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{B(0,R)\setminus E} J(z,f)\,d\xi_1 d\xi_2 + \varepsilon^2 \right)^{1/2} .$$

Однако, в силу неравенства

$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}\,, \quad a\,, b \ge 0\,,$$

выполнено

$$(\mathrm{mes}_2\,(E))^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_E J(z,f)\,d\xi_1 d\xi_2 + \varepsilon^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ (\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) - \mathrm{mes}_2\,(E))^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{B(0,R)\setminus E} J(z,f)\,d\xi_1 d\xi_2 + \varepsilon^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \varepsilon\,\sqrt{2\,\pi}\,R + (\mathrm{mes}_2\,(E))^{\frac{1}{2}}\,(\mathrm{mes}_2\,(f(E)))^{1/2} +$$

$$+ (\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) - \mathrm{mes}_2\,(E))^{\frac{1}{2}}\,(\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) - \mathrm{mes}_2\,(f(E)))^{1/2} .$$

Тем самым,

$$\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) - C_8\,\Delta(\varepsilon) \le \varepsilon\,\sqrt{2\pi}\,R + (\mathrm{mes}_2\,(E))^{\frac{1}{2}}\,(\mathrm{mes}_2\,(f(E)))^{1/2} +$$

$$+ (\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) - \mathrm{mes}_2\,(E))^{\frac{1}{2}}\,(\mathrm{mes}_2\,(B(0,R)) - \mathrm{mes}_2\,(f(E)))^{1/2} .$$

Обозначая $t = \mathrm{mes}_2\,(E)$ и $\omega = \mathrm{mes}_2\,(f(E)) - \mathrm{mes}_2\,(E)$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\pi\,R^2 - \Delta_1(\varepsilon) \le t^{\frac{1}{2}}(\omega + t)^{\frac{1}{2}} + (\pi\,R^2 - t)^{\frac{1}{2}}\,(\pi\,R^2 - \omega - t)^{\frac{1}{2}} .$$

Здесь

$$\Delta_1(\varepsilon) = C_8\,\Delta(\varepsilon) + \sqrt{2\pi}\,R\,\varepsilon\,,$$

или

$$\Delta_1(\varepsilon) = C_8\,\frac{2\,(2\pi\,k)^{\frac{1}{2}}}{\ln^{\frac{1}{2}}\,1/\varepsilon} + C_8\,\frac{M_{D'}}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{2\pi}\,R\,\varepsilon\,. \tag{5.5.45}$$

Решая это неравенство относительно ω, при достаточно малых $\varepsilon > 0$, находим

$$|\omega| \le C''\,\Delta_1(\varepsilon)\,.$$

Теорема доказана. $\square$

5.6 Доказательство теоремы 5.1.1

Аргументы весьма несложны. Если величина

$$\int\limits_D \left|\nabla K_n^{1/2}(x)\right|^2\,p(x)\,dx_1 dx_2$$

может быть сколь угодно мала при $n \to \infty$, то на основании лемм 5.1.1 и 5.2.3 она может быть использована в качестве характеристики близости отображения

$$h = w_n \circ w^{-1} : B(0,R) \to B(0,R)$$

к тождественному отображению. Пользуясь оценками (5.4.25) и (5.5.44), приходим непосредственно к нужным нам соотношениям (5.1.11) и (5.1.12). $\square$

5.7 Замечания о $W^{1,2}$-мажорируемых функциях

Мы не имеем в настоящее время полного описания $W^{1,2}$-мажорируемых функций. Мы отметим здесь только некоторые их простые свойства, непосредственно вытекающие из теории функций с обобщенными соболевскими производными.

5.7.1 Множество P_∞

Непосредственно из определения функций класса $W^{1,2}$ следует, что *сужения $W^{1,2}$-мажорируемых функций P на почти все горизонтальные и вертикальные сечения области локально ограничены.*

Далее предположим, что область D есть круг и функция $P(x)$, определяемая равенством (3.1.4), является $W^{1,2}$-мажорируемой в D. Другими словами, существует функция $K(x) \in W^{1,2}(D)$, для которой

$$P(x) \leq K(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in D.$$

Обозначим через $L_1^2(\mathbf{R}^2)$ множество функций $\varphi(x)$, представимых в виде бесселева потенциала

$$\varphi(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} G_1(|x-y|)\, u(y)\, dy_1 dy_2,$$

где $u \in L^2(\mathbf{R}^2)$ — некоторая функция и $G_1(t)$ — бесселево ядро порядка 1 (см., монографию А.Р. Адамса и Л.И. Хедберга [123, раздел **1.2.3**]). Так как D — круг, то согласно теореме **1.2.3** из [123]), для всякой функции $\varphi(x) \in W^{1,2}(D)$ существует функция $\varphi^*(x) \in L_1^2(\mathbf{R}^2)$ такая, что почти всюду в круге $\varphi^*(x) = \varphi(x)$.

Таким образом, поскольку $K \in W^{1,2}(D)$, то найдется функция $u \in L^2(\mathbf{R}^2)$ такая, что

$$K(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} G_1(|x-y|)\, u(y)\, dy_1 dy_2 \quad \text{почти всюду в круге} \quad D.$$

По теореме **6.2.1** [123] множество

$$\{x \in D : \lim_{\zeta \to x} K(\zeta) = \infty\}$$

имеет нулевую конформную емкость, а потому справедлива

Теорема 5.7.1. *Множество*

$$P_\infty = \{x \in D : \lim_{\zeta \to x} P(\zeta) = \infty\}$$

имеет нулевую емкость.

Легко видеть, что данное утверждение остается верным для $W^{1,2}$-мажорируемых функций P, заданных в произвольной области $D \subset \mathbf{R}^2$, отличной от круга.

Тем самым, множество P_∞ является достаточно редким для произвольной $W^{1,2}$-мажорируемой функции $P : D \to \mathbf{R}$. Из равенства нулю емкости этого множества, в частности, следует, что α-мера Хаусдорфа множества P_∞ равна нулю для всякого $\alpha > 0$ (см. [25, **§5.3**]).

5.7.2 Непустота класса

Укажем условия на характеристику $p(x)$, при которых в области $D = B(0,R)$ величины $\delta_n \to 0$ и, тем самым, класс отображений, описываемых теоремой 5.1.1 не пуст.

Имеет место

Теорема 5.7.2. *Пусть $p(x) : D \to [1,\infty]$ – непрерывная (как функция, действующая из $D \subset \mathbf{R}^2$ в $\overline{R}$,) функция класса $W^{1,2}(D)$.*

Тогда для величин δ_n, определенных в теореме 5.1.1*, выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0\,.$$

Доказательство. Пусть $(p(x), \theta(x))$ – распределение характеристик в круге $D = B(0,R)$ и $p : D \to [1,+\infty]$ – непрерывна. По заданной числовой последовательности $Q_n \to \infty$ определяем в D, как в лемме 5.1.1, множества I_n и, далее, функции P_n.

Так как p непрерывна, то множества I_n замкнуты. Предположим, что для некоторого $Q_n > 1$ множество $I_n \subset\subset D$. Не умаляя общности можно предполагать, что $D \setminus I_n$ – область.

Для произвольной функции K_n, допустимой при вычислении величины δ_n, имеем

$$\begin{aligned}
\delta_n^2 \ &\le \int\limits_D \left|\nabla K_n^{1/2}(x)\right|^2 p(x)\, dx_1 dx_2 = \\
&= \int\limits_{D\setminus I_n} \left|\nabla K_n^{1/2}(x)\right|^2 p(x)\, dx_1 dx_2 + \int\limits_{I_n} |\nabla K_n(x)|^2\, \frac{p(x)}{K_n(x)}\, dx_1 dx_2 \le \\
&\le Q_n \int\limits_{D\setminus I_n} \left|\nabla K_n^{1/2}(x)\right|^2 dx_1 dx_2 + \int\limits_{I_n} |\nabla K_n(x)|^2\, \frac{1+K_n}{K_n}\, dx_1 dx_2 \le \\
&\le Q_n \int\limits_{D\setminus I_n} \left|\nabla K_n^{1/2}(x)\right|^2 dx_1 dx_2 + \left(1 + \frac{1}{Q_n}\right) \int\limits_{I_n} |\nabla K_n(x)|^2\, dx_1 dx_2\,.
\end{aligned}$$

Пусть $\varphi : D \setminus I_n \to \mathbf{R}$ – функция, экстремальная при вычислении емкости конденсатора $(I_n, \partial D; D)$, т.е. $\varphi = 0$ на ∂D, $\varphi = 1$ на I_n и

$$\int\limits_{D\setminus I_n} |\nabla \varphi(x)|^2\, dx_1 dx_2 = \operatorname{cap}(I_n, \partial D; D)\,.$$

Выберем K_n в виде

$$K_n(x) = \begin{cases} Q_n\,\varphi^2(x) & \text{при} \quad x \in D \setminus I_n\,, \\ p(x) & \text{при} \quad x \in I_n\,. \end{cases}$$

Данная функция обладает необходимыми свойствами и, в силу доказанного выше,

$$\delta_n^2 \le Q_n^2 \operatorname{cap}(I_n, \partial D; D) + \left(1 + \frac{1}{Q_n}\right) \int\limits_{I_n} |\nabla p(x)|^2 \, dx_1 dx_2\,.$$

Таким образом, если

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^2 \operatorname{cap}(I_n, \partial D; D) = 0\,, \tag{5.7.46}$$

то $\delta_n \to 0$.

Покажем, что условие $p(x) \in W^{1,2}(D)$ влечет (5.7.46). Действительно, пусть

$$A_{n_0,n} = \int\limits_{I_{n_0}\setminus I_n} |\nabla p(x)|^2 \, dx_1 dx_2 < \infty\,.$$

Предположим, что множество $P_\infty = \{x \in D : p(x) = \infty\}$ не пусто. Выберем $Q_{n_0} > 1$ так, чтобы множество I_{n_0} лежало строго внутри D. Фиксируем $Q_n > Q_{n_0}$. Рассмотрим конденсатор $(D \setminus I_{n_0}, I_n; D$. Функция

$$\varphi = \frac{1}{Q_n - Q_{n_0}}\,(p(x) - Q_{n_0})$$

допустима в вариационной задаче при вычислении емкости конденсатора. Поэтому

$$\operatorname{cap}(I_n, \partial D; D) \le \operatorname{cap}(D \setminus I_{n_0}, I_n; D \le \frac{A_{n_0,n}}{(Q_n - Q_{n_0})^2}\,.$$

Отсюда получаем

$$Q_n^2 \operatorname{cap}(I_n, \partial D; D) \le \frac{A_{n_0,n}\,Q_n^2}{(Q_n - Q_{n_0})^2}\,. \tag{5.7.47}$$

Упражнение. Дать прямое доказательство теоремы 5.7.1, опирающееся на соотношение (5.7.47). $\Box$

Завершим наши рассуждения. Полагая $Q_{n_0} = \frac{1}{2}\,Q_n$, убеждаемся, что свойство (5.7.46) действительно имеет место. Тем самым, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ и теорема доказана. $\square$

Задача. Описать класс непрерывных функций $p(x) : D \to [1, \infty]$, для которых

$$\varliminf_{n\to\infty} \delta_n = 0\,.$$

Глава 6

Искажение площади

Ниже указываются оценки искажения площади при конформных отображениях двумерных поверхностей в $\mathbf{R}^m$ на единичный круг.

6.1 Графики над кругами

Пусть Ω – локально липшицева поверхность в $\mathbf{R}^m$. Евклидово расстояние в $\mathbf{R}^m$ индуцирует расстояние на Ω и метод измерения углов между гладкими кривыми на Ω.

Предположим, что существует конформное отображение $T : \Omega \to B$ поверхности Ω на единичный круг

$$B = \{y = (y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 < 1\}.$$

Если множество $A \subset \Omega$ имеет малую меру $\mathrm{mes}_2\,(A)$, то мера $\mathrm{mes}_2\,(T(A))$ также мала. В данной главе мы попытаемся описать количественную сторону этой зависимости.

Предположим сначала, что Ω есть график липшицевой функции $\xi = f(x_1, x_2)$ определенной над односвязной ограниченной подобластью D плоскости $\mathbf{R}^2$. Обозначим через j ортогональную проекцию Ω на D. Если f имеет в точке $(x_1, x_2) \in D$ полный дифференциал, то всякая бесконечно малая окружность на Ω с центром в $(x_1, x_2, \xi) \in \Omega$ является бесконечно малым эллипсом в плоскости $\mathbf{R}^2$ с центром в $j(x_1, x_2, \xi) = (x_1, x_2)$. Пусть $p(x_1, x_2)$ и $\theta(x_1, x_2)$ суть характеристики этого эллипса. В силу теоремы Радемахера, функция f дифференцируема почти всюду, характеристики определены почти всюду в области D, причем почти всюду в области выполнено

$$p(x_1, x_2) = \sqrt{1 + |\nabla f(x_1, x_2)|^2}\,. \tag{6.1.1}$$

Поверхность Ω односвязна и может иметь либо параболический, либо гиперболический конформный тип. Другими словами, Ω может быть конформно отображена либо на всю плоскость $\mathbf{R}^2$, либо на единичный круг $B \subset \mathbf{R}^2$, соответственно. Поскольку область D ограничена, то условие

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} |\nabla f(x)| < \infty \tag{6.1.2}$$

влечет гиперболичность конформного типа Ω.

Предположим, что f подчинена условию (6.1.2) и существует конформное отображение $T : \Omega \to B$. Отображение T индуцирует квазиконформное отображение $y = \tau(x) : D \to B$ с характеристиками $(p(x), \theta(x))$ почти всюду в D и такое, что

$$T = j^{-1} \circ \tau^{-1} : B \to \Omega.$$

Более того, отображение τ является K-квазиконформным в D тогда и только тогда, когда

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} |\nabla f(x)| \le \sqrt{K^2 - 1}.$$

Известно (Астала [129]), что если D есть единичный круг, то из предположения (6.1.2) следует, что для всякого измеримого множества $A' \subset D$ выполнено

$$\mathrm{mes}_2\,(\tau(A')) \le C\ (\mathrm{mes}_2\,(A'))^{1/K} \tag{6.1.3}$$

с некоторой постоянной C, зависящей только от K и нормировки $\tau^{-1}(0)$.

Это утверждение отвечает на один вопрос Ф. Геринга и Э. Рейха [150]. Наиболее простое доказательство (6.1.3) было дано А. Еременко и Д.Х. Гамильтоном [142].

Для произвольного измеримого множества $A \subset \Omega$ имеем

$$\mathrm{mes}_2\,(A) = \int\limits_{A'} \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx_1 dx_2, \quad A' = j(A).$$

Отсюда, $\mathrm{mes}_2\,(A') \le \mathrm{mes}_2\,(A)$. Замечая, что $T(A) = \tau(A')$ и пользуясь (6.1.3), получаем

$$\mathrm{mes}_2\,(T(A)) \le C\ (\mathrm{mes}_2\,(A))^{1/K}\,. \tag{6.1.4}$$

Оценка (6.1.4) площади выполнена для произвольного конформного отображения $T : \Omega \to B$, если

(i) поверхность $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ является графиком функции $\xi = f(x)$;

(ii) функция f определена в круге;

(iii) градиент f удовлетворяет (6.1.2).

Если хотя-бы одно из предположений (i) — (iii) нарушается, то подобная оценка искажения площади невозможна. Нашей целью является изучение искажения площади при конформных отображениях поверхностей $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ общего вида.

6.2 K-Квазиконформные отображения

Пусть Ω – двумерная поверхность в $\mathbf{R}^m$, $2 \le m < \infty$, заданная посредством липшицевой вектор-функции (2.1.1) над единичным кругом $B \subset \mathbf{R}^2$.

Предположим, что отображение $f : D \to \Omega$ гомеоморфно (в топологии, индуцированной на Ω из $\mathbf{R}^m$), причем в каждой точке дифференцируемости f выполнено (3.1.1).

Квадрат элемента длины $|d\xi|^2$ в $\mathbf{R}^m$ индуцирует квадрат элемента длины ds^2 на поверхности Ω по формуле

$$\begin{aligned} |d\xi|^2 &= \textstyle\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^2 f'_{x_i}\, dx_j\right)^2 = \\ &= g_{11}(x)\, dx_1^2 + 2g_{12}(x)\, dx_1 dx_2 + g_{22}(x)\, dx_2^2, \end{aligned}$$

где

$$g_{11} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)^2, \quad g_{12} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \quad g_{22} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)^2.$$

Отображение $f : D \to \Omega$ конформно, если почти всюду в области D выполняется

$$g_{11}(x) = g_{22}(x), \quad g_{12}(x) = 0\,; \tag{6.2.5}$$

координаты x_1, x_2 являются при этом изотермическими.

Для произвольного измеримого множества $A \subset \Omega$ имеем

$$\mathrm{mes}_2\,(A) = \int\limits_{A'} \sqrt{g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2}\, dx_1 dx_2, \quad \text{где} \quad A' = j(A). \tag{6.2.6}$$

Предположим, что вектор-функция (2.1.1) в каждой точке $x \in D$ дифференцируемости f подчинена предположению

$$P(x) = \frac{g_{11}(x) + g_{22}(x)}{2\sqrt{g_{11}(x) g_{22}(x) - g_{12}^2(x)}} \le K < \infty\,, \tag{6.2.7}$$

где K – постоянная, $1 \le K < \infty$.

Для всякого измеримого множества $A' \subset D$, согласно неравенству Коши и (6.2.6), имеем

$$\mathrm{mes}_2\,(A') = \int\limits_{A'} dx_1 dx_2 \le \left(\int\limits_{A'} \sqrt{g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2}\, dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(2 \int\limits_{A'} \frac{g_{11} + g_{22}}{2\sqrt{g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2}}\, \frac{dx_1 dx_2}{g_{11} + g_{22}} \right)^{1/2} \le$$

$$\le (2K)^{1/2}\, (\mathrm{mes}_2\,(A))^{1/2} \left(\int\limits_{A'} \frac{dx_1 dx_2}{g_{11} + g_{22}} \right)^{1/2}.$$

Пользуясь цитированным выше результатом К. Асталы, как и выше, приходим к утверждению.

Теорема 6.2.1. *Пусть Ω – поверхность в $\mathbf{R}^m$, заданная над единичным кругом B посредством липшицевой вектор-функции* (2.1.1), *удовлетворяющей* (3.1.1), (6.2.7) *и такой, что*

$$\int\limits_{D} \frac{dx_1 dx_2}{g_{11} + g_{22}} \le Q < \infty. \tag{6.2.8}$$

Пусть $T : \Omega \to B$ – конформное отображение, $T\,(f(0)) = 0$.

Тогда для произвольного измеримого множества $A \subset \Omega$ выполнено

$$\mathrm{mes}_2\,(T(A)) \le C(K, Q)\ (\mathrm{mes}_2\,(A))^{1/(2K)}\,. \tag{6.2.9}$$

Рассмотрим другой пример, в котором постоянная $C(K, Q)$ является более точной. Предположим, что Ω есть график некоторой липшицевой вектор-функции вида (2.3.12), определенной в $\mathbf{R}^2$ и такой, что $f_3 = \ldots = f_m = 0$ вне B.

Легко видеть, что поверхность Ω имеет параболический тип, т.е. для произвольного конформного отображения $T : \Omega \to \mathbf{R}^2$ выполнено $T(\Omega) = \mathbf{R}^2$. Это ясно, поскольку поверхность Ω отлична от плоскости $\mathbf{R}^2$ только на компактном куске, приклеенном вдоль единичной окружности.

В этом случае конформное отображение $T : \Omega \to \mathbf{R}^2$ индуцирует квазиконформное отображение $\tau(x) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Найдем его коэффициент квазиконформности K. Мы имеем

$$g_{11} = 1 + \sum_{i=3}^{m} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)^2, \quad g_{12} = \sum_{i=3}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \quad g_{22} = 1 + \sum_{i=3}^{m} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)^2.$$

Поэтому,

$$\frac{g_{11}+g_{22}}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}} \leq \frac{2+\sum_{i=3}^{m}|\nabla f_i|^2}{\sqrt{1+\sum_{i=3}^{m}|\nabla f_i|^2}}$$

и условие (6.2.7) может быть заменено требованием

$$p(x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=3}^{m}|\nabla f_i(x)|^2}} + \sqrt{1+\sum_{i=3}^{m}|\nabla f_i(x)|^2}\right) \leq K\,. \quad (6.2.10)$$

Полагая $j(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1, x_2)$, имеем $T = j^{-1} \circ \tau^{-1} : \mathbf{R}^2 \to \Omega$. Так как $f_3(x) = \ldots = f_m(x) = 0$ вне B, то, согласно (6.2.10), характеристика $p(x) \equiv 1$ и отображение τ конформно вне B. Мы будем предполагать, что τ имеет, так называемую, *гидродинамическую нормировку*

$$\tau(x) = x + O(1/|x|), \quad |x| \to \infty. \quad (6.2.11)$$

Нормировка (6.2.11) является весьма удобной – имеется множество результатов теории конформных отображений, использующих данную нормировку.

Обозначим через

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in B : \nabla f_3(x_1, x_2) = \ldots = \nabla f_m(x_1, x_2) = 0\}$$

множество критических точек вектор-функции $(f_3, \ldots, f_m) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^{m-2}$, лежащих в B. Для произвольного измеримого множества $A \subset U$ имеем

$$\mathrm{mes}_2\,(A) = \int\limits_{A'} dx_1 dx_2 \leq \pi\,,$$

где $A' = j(A)$ есть проекция A на (x_1, x_2)-плоскость.

Из теоремы 1.6 работы К. Асталы и В. Неси [130] следует утверждение.

Теорема 6.2.2. *Пусть Ω – некоторая непараметрическая липшицева поверхность, заданная посредством вектор-функции $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^m$ вида* (2.3.12). *Тогда для произвольного измеримого подмножества A множества критических точек U выполнено*

$$\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{mes}_2\,(A)\right)^K \leq \frac{1}{\pi}\mathrm{mes}_2\,(T(A)) \leq \left(\frac{1}{\pi}\mathrm{mes}_2\,(A)\right)^{1/K}. \tag{6.2.12}$$

6.3 Основная теорема

Пусть Δ – подобласть (y_1, y_2)-плоскости и $g : \Delta \to \Omega$ – конформное отображение. В изотермических координатах y_1, y_2 метрика ds^2 поверхности Ω имеет вид

$$ds^2 = \Lambda(y)\,(dy_1^2 + dy_2^2) \quad \text{всюду в} \quad \Delta,$$

где $\Lambda(y) = E(y) = G(y)$.

Если Ω односвязно и имеет гиперболический тип, то мы будем предполагать, что Δ есть единичный круг $B = \{y \in \mathbf{R}^2 : |y| < 1\}$. Предположение (3.1.1) влечет $\Lambda(y) > 0$ почти всюду в Δ. Посредством вспомогательного преобразования подобия в $\mathbf{R}^m$ мы можем добиться, чтобы отображение g удовлетворяло условию

$$\Lambda(0) = 1. \tag{6.3.13}$$

Через $K(\xi)$ мы обозначим гауссову кривизну поверхности Ω в точке $\xi \in \Omega$.

Следующее утверждение доставляет основной результат данной главы [83].

Теорема 6.3.1. *Пусть Ω – поверхность в $\mathbf{R}^m$ неотрицательной гауссовой кривизны, задаемая над областью $D \subset \mathbf{R}^2$ посредством $W^{2,2}_{\mathrm{loc}}$-вектор-функции вида* (2.1.1).

Предположим, что f удовлетворяет (3.1.1) *и*

$$\int\limits_D \frac{g_{11}(x) + g_{22}(x)}{\sqrt{g_{11}(x)g_{22}(x) - g_{12}^2(x)}}\,dx_1dx_2 < \infty. \tag{6.3.14}$$

Тогда Ω имеет гиперболический конформный тип и для произвольного конформного отображения $T : \Omega \to B$, удовлетворяющего (6.3.13) *с* $g = T^{-1}$, *и для произвольного измеримого множества* $A \subset \Omega$ *с* $\mathrm{mes}_2\,(A) < 1$ *выполнено*

$$\mathrm{mes}_2\,(T(A)) \leq \frac{1 + \mathrm{mes}_2\,(\Omega)}{\ln 1\,/\mathrm{mes}_2\,(A)}\,. \tag{6.3.15}$$

6.4 Доказательство основной теоремы

Мы воспользуемся идеей оценки искажения меры граничного множества при конформном отображении плоской области на круг (см. §1 главы III в [96]). Прежде всего мы заметим, что предположение (3.1.1) влечет $df \neq 0$ в данной точке, метрика ds^2 невырождена, и бесконечно малая окружность в метрике ds^2 с центром в точке $x \in D$ есть бесконечно малый эллипс в евклидовой метрике $|dx|^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. Обозначим через (p, θ) характеристики этого эллипса, т.е. отношение $p \geq 1$ его полуосей и, если $p > 1$, – угол θ, $0 \leq \theta < \pi$, между его большей осью и направлением $\overrightarrow{Ox_1}$. Более того, легко видеть, что

$$p(x) = \frac{g_{11}(x) + g_{22}(x)}{2\sqrt{g_{11}(x)g_{22}(x) - g_{12}^2(x)}} + \left(\frac{(g_{11}(x) + g_{22}(x))^2}{4\,(g_{11}(x)g_{22}(x) - g_{12}^2(x))} - 1\right)^{1/2}.$$

Таким образом, в области D имеется непрерывное распределение характеристик (p, θ). Согласно (3.1.1) мы имеем

$$g_{11}(x)g_{22}(x) - g_{12}^2(x) > 0 \quad \text{всюду в} \quad D$$

и, следовательно,

$$\sup_{D_1} p(x) < \infty \quad \text{для всякой подобласти} \quad D_1 \subset\subset D.$$

На основании теоремы существования находим квазиконформное отображение $y = \tau(x) \to \mathbf{R}^2$ с характеристиками (p, θ) почти всюду в D. Это отображение единственно с точностью до конформного преобразования $y' = \phi(y)$ в плоскости переменных y_1, y_2.

В общем случае образ $\tau(D)$ может быть целой плоскостью $\mathbf{R}^2$ или ее собственной подобластью. Предположение (6.3.14) влечет, что всегда

$$\int\limits_D p(x)\,dx_1dx_2 = \int\limits_{\tau(D)} p(\tau^{-1}(y))J(y,\tau^{-1})\,dy_1dy_2 \le$$

$$\le \int\limits_{\tau(D)} |\nabla\tau^{-1}(y)|^2\,d\xi_1d\xi_2 < \infty,$$

где $J(y,\tau^{-1})$ есть якобиан τ^{-1} в точке $y\in\tau(D)$.

Рассмотрим круговое кольцо

$$A(t',t'') = \left\{y\in\mathbf{R}^2 : 0<t'<|y|<t''<\infty\right\}.$$

Мы (в очередной раз!) воспользуемся принципом длины и площади (см. теорему 1.9.1 при специальном выборе $H=\sigma\equiv 1$).

Лемма 6.4.1. *Пусть $g : A(t',t'') \to \mathbf{R}^2$ – вектор-функция класса $W^{1,2}(A(t',t'))$. Тогда*

$$\int\limits_{t'}^{t''} \mathrm{osc}^2\,(g,S(0,r))\,\frac{dr}{r} \le c_1\,I(g;t',t'')\,, \tag{6.4.16}$$

где c_1 – абсолютная постоянная и

$$I(g;t',t'') = \int\limits_{A(t',t'')} |\nabla g|^2\,dy_1dy_2.$$

Предположим, что $\tau(D)=\mathbf{R}^2$. Выберем произвольно круговое кольцо $A(t',t'')$ и воспользуемся принципом длины и площади (6.4.16). Имеем

$$\inf_{r\in(t',t'')} \mathrm{osc}\,(\tau^{-1},S(0,r)) \le c_1^{1/2} I^{1/2}(\tau^{-1};t',t'')\log^{-1/2}\frac{t''}{t'}.$$

Отображение τ^{-1} гомеоморфно и, следовательно,

$$\mathrm{osc}\,(\tau^{-1},B(0,r)) \le \mathrm{osc}\,(\tau^{-1},S(0,r)) \quad (0<r<\infty).$$

Отсюда,

$$\inf_{r\in(t',t'')} \mathrm{osc}\,(\tau^{-1},B(0,r)) \le c_1^{1/2} I^{1/2}(\tau^{-1};t',t'')\log^{-1/2}\frac{t''}{t'}$$

и полагая $t'' \to \infty$, получаем

$$\operatorname{osc}(\tau^{-1}, B(0,r)) = 0 \quad \text{для любых} \quad 0 < r < \infty,$$

то есть, $\tau^{-1} \equiv \text{const}$. Противоречие.

Таким образом, область $\tau(D)$ является собственной односвязной подобластью $\mathbf{R}^2$, и Ω имеет гиперболический тип.

Пусть $T : \Omega \to B$ – произвольное конформное отображение. Согласно (6.2.5) квадрат элемента длины на поверхности Ω в изотермических координатах y_1, y_2 имеет вид

$$ds^2 = \Lambda(y)\,(dy_1^2 + dy_2^2),$$

где $\Lambda = E = G > 0$ – некоторая функция.

Заметим, что поскольку $f \in C^3(D)$, то $(p, \theta) \in C^2(D)$ и отображение $\tau \in C^3(D)$. Здесь $\Lambda \in C^2(B)$.

Пусть $E \subset \Omega$ – произвольное измеримое множество. Множество $e = T(A) \subset B$ также измеримо и

$$\operatorname{mes}_2(A) = \int\limits_e \Lambda(y)\,dy_1 dy_2 \leq |\Omega|.$$

Здесь и ниже для краткости пусть $\operatorname{mes}_2(\Omega) = |\Omega|$. Для произвольного $a > 0$ полагаем

$$\log^+ a = \max\{\log a, 0\}, \quad \log^- a = \max\{-\log a, 0\}.$$

Ясно, что

$$\log a = \log^+ a - \log^- a.$$

Так как $\log^+ a < a$, то мы вправе записать

$$|\Omega| \geq \int\limits_B \Lambda(y)\,dy_1 dy_2 \geq \int\limits_B \log^+ \Lambda(y)\,dy_1 dy_2. \tag{6.4.17}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_B \log \Lambda(y)\,dy_1 dy_2 = \int\limits_B \log^+ \Lambda(y)\,dy_1 dy_2 - \int\limits_B \log^- \Lambda(y)\,dy_1 dy_2$$

и, далее, в силу (6.4.17) получаем

$$-\int\limits_B \log^- \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 = \int\limits_B \log \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 - \int\limits_B \log^+ \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 \geq$$
$$\geq \int\limits_B \log \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 - |\Omega|. \tag{6.4.18}$$

Пользуясь хорошо известным неравенством

$$\frac{1}{\mathrm{mes}_2\,(e)} \int\limits_e \varphi(y)\, dy_1 dy_2 > \exp\left\{\frac{1}{\mathrm{mes}_2\,(e)} \int\limits_e \log \varphi(y)\, dy_1 dy_2\right\},$$

мы имеем

$$\mathrm{mes}_2\,(A) = \int\limits_e \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 =$$
$$= \mathrm{mes}_2\,(e) \left(\frac{1}{\mathrm{mes}_2\,(e)} \int\limits_e \Lambda(\xi)\, d\xi_1 d\xi_2\right) >$$
$$> \mathrm{mes}_2\,(e) \exp\left\{\frac{1}{\mathrm{mes}_2\,(e)} \int\limits_e \log \Lambda(y)\, dy_1 dy_2\right\}.$$

Однако,

$$\int\limits_e \log \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 = \int\limits_e \log^+ \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 - \int\limits_e \log^- \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 \geq$$
$$\geq -\int\limits_e \log^- \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 \geq$$
$$\geq -\int\limits_B \log^- \Lambda(y)\, dy_1 dy_2$$

и мы приходим к неравенству

$$\mathrm{mes}_2\,(A) > \mathrm{mes}_2\,(e) \exp \left\{ -\frac{1}{\mathrm{mes}_2\,(e)} \int\limits_B \log^- \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 \right\}.$$

Оценка (6.4.18) тогда влечет

$$\mathrm{mes}_2\,(A) > \mathrm{mes}_2\,(e) \exp \left\{ \frac{\int\limits_B \log \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 - |\Omega|}{\mathrm{mes}_2\,(e)} \right\}. \tag{6.4.19}$$

Вычислим интеграл. В силу предположения (3.1.1) находим $\Lambda > 0$ в B. Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int\limits_{S(0,r)} \log \Lambda(y)\, |dy| &= \frac{d}{dr} \int\limits_0^{2\pi} \log \Lambda(r, \theta)\, r\, d\theta = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} r \frac{d}{dr} \log \Lambda(r, \theta)\, d\theta + \int\limits_0^{2\pi} \log \Lambda(r, \theta)\, d\theta = \\ &= \int\limits_{S(0,r)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \log \Lambda(y)\, |dy| + \frac{1}{r} \int\limits_{S(0,r)} \log \Lambda(y)\, |dy|, \end{aligned}$$

где $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ означает нормальную производную.

Таким образом, по формуле Грина имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int\limits_{S(0,r)} \log \Lambda(y)\, |dy| &= \int\limits_{B(0,r)} \Delta\, \log \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 + \\ &+ \frac{1}{r} \int\limits_{S(0,r)} \log \Lambda(y)\, |dy|\,. \end{aligned} \tag{6.4.20}$$

Аналогично,

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{r}\int\limits_{S(0,r)}\log\Lambda(y)\,|dy| - \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int\limits_{S(0,r)}\log\Lambda(y)\,|dy| =$$

$$= \int\limits_0^1 dr\left(\int\limits_0^{2\pi}\log\Lambda(r,\theta)\,d\theta\right)' = \int\limits_0^1 dr\int\limits_0^{2\pi}\frac{d}{dr}\log\Lambda(r,\theta)\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^1\frac{dr}{r}\int\limits_{S(0,r)}\frac{\partial}{\partial\overline{n}}\log\Lambda(y)\,|dy| = \int\limits_0^1\frac{dr}{r}\int\limits_{B(0,r)}\Delta\log\Lambda(y)\,dy_1dy_2$$

и, далее,

$$\lim_{r\to 1}\int\limits_{S(0,r)}\log\Lambda(y)\,|dy| = 2\pi\log\Lambda(0) + \int\limits_0^1\frac{dr}{r}\int\limits_{B(0,r)}\Delta\log\Lambda(y)\,dy_1dy_2\,. \tag{6.4.21}$$

Отсюда, пользуясь (6.4.20) и интегрированием по частям, приходим к соотношению

$$\int\limits_B \log\Lambda(y)\,dy_1dy_2 = \int\limits_0^1 dr \int\limits_{S(0,r)} \log\Lambda(y)\,|dy| =$$

$$= \lim_{r\to 1} \int\limits_{S(0,r)} \log\Lambda(y)\,|dy| - \int\limits_0^1 r\,dr\,\frac{d}{dr}\int\limits_{S(0,r)} \log\Lambda(y)\,|dy| =$$

$$= \lim_{r\to 1} \int\limits_{S(0,r)} \log\Lambda(y)\,|dy| - \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_{B(0,r)} \Delta\,\log\Lambda(y)\,dy_1dy_2 -$$

$$- \int\limits_0^1 dr \int\limits_{S(0,r)} \log\Lambda(y)\,|dy|\,.$$

Следовательно,

$$\int\limits_B \log\Lambda(y)\,dy_1dy_2 \;= \tfrac{1}{2}\lim_{r\to 1} \int\limits_{S(0,r)} \log\Lambda(y)\,|dy| -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_{B(0,r)} \Delta\,\log\Lambda(y)\,dy_1dy_2\,.$$

Объединяя найденные соотношения с (6.4.21), приходим к соотношению

$$\int\limits_B \log\Lambda(y)\,dy_1dy_2 \;= \pi\log\Lambda(0) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{r} - r\Big)\,dr \int\limits_{B(0,r)} \Delta\log\Lambda(y)\,dy_1dy_2\,. \qquad (6.4.22)$$

По теореме Гаусса кривизна K поверхности Ω может быть выражена через коэффициенты E, F, G и их частные производные вплоть до второго порядка. В изотермических координатах она принимает особо простой вид

$$K = -\frac{1}{2\Lambda}\,\Delta \log \Lambda.$$

В силу (6.3.13) и (6.4.22) имеем

$$\int\limits_B \log \Lambda(y)\, dy_1 dy_2 \geq 0.$$

Таким образом, (6.4.19) переписывается в виде

$$\mathrm{mes}_2\,(A) > \mathrm{mes}_2\,(e) \exp\left\{-\frac{|\Omega|}{\mathrm{mes}_2\,(e)}\right\}. \tag{6.4.23}$$

Пусть $\mathrm{mes}_2\,(A) < 1$. Тогда на основании (6.4.23) находим

$$\log\frac{1}{\mathrm{mes}_2\,(A)} \leq \frac{|\Omega|}{\mathrm{mes}_2\,(e)} + \log\frac{1}{\mathrm{mes}_2\,(e)}.$$

Таким образом, получаем окончательно

$$\mathrm{mes}_2\,(e) \leq \frac{|\Omega| + 1}{\log\dfrac{1}{\mathrm{mes}_2\,(A)}},$$

что эквивалентно (6.3.15). Теорема доказана. $\square$

Задачи: 1) Распространить теорему 6.3.1 на нерегулярные поверхности, заменив условие на гауссову кривизну более слабым. 2) Указать геометрические условия, обеспечивающие выполнение условия 6.3.13.

Глава 7

Теоремы Альфорса – Варшавского

Вводится понятие приведенного модуля односвязной области относительно "граничной точки"и даются его приложения в оценках конформного отображения поверхности вблизи границы. В частности, доказываются теоремы типа теорем Альфорса – Варшавского для конформных отображений плоских полос.

Близкие граничные оценки конформных отображений в евклидовой метрике см. в [124], [226], [227], [228], [69], [70], [209] – [215] и [206, глава 11].

7.1 Плоские полосы

Во многих случаях совсем не обязательно знать точно функцию, конформно отображающую область общего вида на круг или другую каноническую область. Зачастую достаточно иметь оценку поведения этой функции вблизи граничных точек. Ниже мы напоминаем два таких классических результата для конформных отображений плоских областей [33, глава V, §6].

Пусть D – односвязная подобласть плоскости $\mathbf{R}^2$ переменной $x = (x_1, x_2)$. Всюду до конца раздела мы предполагаем, что D имеет непустое пересечение с любой вертикальной прямой $x_1 = \alpha$, $-\infty < \alpha < \infty$.

Пусть $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$ – функция, конформно отображающая область D на полосу $|y_2| < \frac{\pi}{2}$, причем так, что $y_1(x) \to \pm\infty$ при $x_1 \to \pm\infty$. Через $x(y)$ будем обозначать функцию, обратную к $y(x)$. Ясно, что накладываемые условия определяют $y(x)$ с точностью до аддитивной постоянной.

Граница области D имеет две компоненты связности — верхнюю C^+ и нижнюю C^-. При отображении $y = y(x)$ дуга C^+ переходит в прямую $y_2 = \frac{\pi}{2}$, а дуга C^- – в прямую $y_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим сечение области D вертикальной прямой $x_1 = \alpha$. В общем случае это сечение состоит из счетного числа сегментов. Выберем те из сегментов, что соединяют C^+ и C^-. (Хотя бы один такой сегмент имеется, и общее их число конечно.) Символом θ_α будем обозначать тот из сегментов, что встречается первым при движении вдоль области D от $x_1 = -\infty$ к $x_1 = +\infty$; символом $\theta(\alpha)$ – его длину.

К подобной стандартной постановке можно свести более или менее общую задачу. К примеру, при исследовании отображения $t = t(\zeta)$ области G на круг $|t| < 1$ в окрестности конечной точки $\zeta = \zeta^*$ мы сводим задачу к стандартной постановке с помощью замены переменных

$$x_1 = \ln\frac{\zeta - \zeta'}{\zeta - \zeta^*}, \quad x_2 = \ln\frac{t - t(\zeta')}{t - t(\zeta^*)},$$

где ζ' и ζ^* – граничные точки области G. Эта замена переводит область G в полосообразную область D, а круг – в полосу.

Следующий результат носит название теоремы Альфорса.

Теорема 7.1.1. *Если $x' \in \theta_a$ и $x'' \in \theta_b$, и*

$$\int\limits_a^b \frac{d\alpha}{\theta(\alpha)} > 2,$$

то

$$y_1(x'') - y_1(x') > \pi \int\limits_a^b \frac{d\alpha}{\theta(\alpha)} - 4\pi.$$

Следующий результат принадлежит С.Е. Варшавскому и позволяет оценивать величину $y_1(x'') - y_1(x')$ с другой стороны. Но в этом случае на дуги C^+, C^- накладываются более жесткие требования. Именно, будем предполагать, что дуги C^+, C^- описываются уравнениями

$$x_2 = \varphi^+(x_1), \quad x_2 = \varphi^-(x_1).$$

Ясно, что

$$\theta(\alpha) = \varphi^+(\alpha) - \varphi^-(\alpha).$$

Кроме того, мы удобно положить

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\varphi^+(\alpha) + \varphi^-(\alpha)\right],$$

и при данном обозначении

$$\varphi^\pm(\alpha) = \varphi(\alpha) \pm \frac{1}{2}\theta(\alpha).$$

Теорема 7.1.2. *Предположим, что для некоторой постоянной $M > 0$ и любых $-\infty < \alpha < +\infty$ выполнено*

$$|\varphi'(\alpha)| < M\,, \quad |\theta'(\alpha)| < M\,.$$

Если $a < b$, $x' \in \theta_a$, $x'' \in \theta_b$, то

$$y_1(x'') - y_1(x') \;<$$

$$< \pi \int\limits_a^b \frac{1 + \varphi'^2(\alpha)}{\theta(\alpha)} d\alpha + \frac{\pi}{12} \int\limits_a^b \frac{\theta'^2(\alpha)}{\theta(\alpha)} d\alpha + 12\pi(1 + M^2)\,.$$

Нашей ближней целью будет получение подобных результатов для конформных отображений поверхности на плоскую полосу.

7.2 Примыкающие подобласти

Пусть G – двусвязная подобласть $\mathbf{R}^2$ и пусть G_1 – ограниченная, а G_2 – неограниченная компоненты связности множества $\overline{\mathbf{R}}^2 \setminus G$. Пусть $\widetilde{\Gamma}$ – семейство всевозможных кривых Жордана, содержащихся в G и разделяющих G_1 и G_2. Модуль $\operatorname{mod} \widetilde{\Gamma}$ называется *модулем кольцевой области* G. Мы будем обозначать его символом $\operatorname{mod}(G)$. В случае, когда G есть круговое кольцо $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 < r < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R < \infty\}$, согласно (1.6.22) имеем

$$\operatorname{mod}(G) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r}\,. \tag{7.2.1}$$

Пусть теперь D есть односвязная подобласть $\mathbf{R}^2$, содержащая точку $(0, 0)$ и имеющая непустую границу. Если число $r > 0$ достаточно мало, то множество $D_r = \{x \in D : |x| > r\}$ есть двусвязная область. Функция

$$\operatorname{mod}(D_r) + (2\pi)^{-1} \log r$$

монотонно возрастает, когда r стремится к 0, и существует конечный предел

$$\widetilde{\operatorname{mod}}(D) = \lim_{r \to 0} \Big(\operatorname{mod}(D_r) + (2\pi)^{-1} \log r \Big)\,, \tag{7.2.2}$$

называемый *приведенным модулем области* D относительно точки $(0, 0)$. Если R_D – внутренний конформный радиус области D относительно точки $(0, 0)$, то

$$\widetilde{\operatorname{mod}}(D) = (2\pi)^{-1} \log R_D \tag{7.2.3}$$

(см., например, [28, теорема 2.8], [86] – [88], [58]).

Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – односвязная область с непустой границей и пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ – локально билипшицева поверхность вида (2.1.1). Предположим, что у каждого простого конца $e \in \partial\widetilde{D}$ найдется главная точка y_0, в которой поверхность Ω удовлетворяет предположению (4.4.18). Согласно теореме 4.4.1 это означает, что над каждым простым концом $e \in \partial\widetilde{D}$ расположен единственный простой конец поверхности Ω.

Естественным образом определяются понятия простой жордановой дуги (открытой либо замкнутой) и простой жордановой кривой в $\widetilde{D}$ и $\widetilde{\Omega}$. В частности, множество простых концов $\partial\widetilde{D}$ есть простая жорданова кривая в $\widetilde{D}$.

Пусть $E_1,\ E_2 \subset \widetilde{\Omega}$ – произвольные множества и $\gamma \subset \widetilde{\Omega}$ – простая замкнутая жорданова кривая в $\widetilde{\Omega}$. Будем говорить, что γ *разделяет* множества $E_1,\ E_2$ в $\widetilde{\Omega}$, если для любого связного, замкнутого в $\widetilde{\Omega}$ множества K такого, что $K \cap E_i \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$, выполнено $K \cap \gamma \neq \emptyset$.

Пусть $\Omega' \subset \Omega$ – подобласть поверхности Ω и $e' \subset \partial\widetilde{\Omega}$ – простой конец. Говорим, что подобласть Ω' *примыкает* к простому концу e', если для любой последовательности $\{\xi_n\}$ точек Ω, сходящейся к e', существует номер N такой, что при всех $n > N$ точки ξ_n принадлежат подобласти Ω'.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ – локально билипшицева поверхность, заданная над некоторой односвязной областью $D \subset \mathbf{R}^2$ с непустой границей, $(0, 0) \in D$, посредством вектор-функции (2.1.1). Пусть A и B – произвольные односвязные подобласти D, содержащие точку $(0, 0)$. Пусть $K_1,\ K_2, \ldots$ – последовательность континуумов, содержащих точку $(0, 0)$ и содержащихся как в области A, так и в области B. Предположим, что все континуумы K_n таковы, что $A_n = A \setminus K_n$, $B_n = B \setminus K_n$ суть двусвязные области.

Лемма 7.2.1. *Если диаметры континуумов K_n стремятся к* 0*, то существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{mod}_\Omega(A_n) - \operatorname{mod}_\Omega(B_n)\right). \tag{7.2.4}$$

Этот предел не зависит от выбора последовательности континуумов $\{K_n\}$, $\operatorname{diam} K_n \to 0$. В частности, если $\Omega = \mathbf{R}^2$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{mod}(A_n) - \operatorname{mod}(B_n)\right) = (2\pi)^{-1} \log(R_A/R_B)\,, \tag{7.2.5}$$

где R_A, R_B – внутренние конформные радиусы областей A, B относительно точки $(0, 0)$.

Доказательство. Начнем с утверждения (7.2.5). Пусть $\tilde{x} = F_n(x)$ – однолистные конформные отображения двусвязных областей $A_n = A \setminus K_n$ на двусвязные области $\widetilde{A}_n = \{\widetilde{x} \in A : |\widetilde{x}| > \rho_n\}$, где числа $\rho_n > 0$ определяются из соотношений

$$\operatorname{mod}(A_n) = \operatorname{mod}(\widetilde{A}_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

При этом мы будем предполагать, что все $F_n(x)$ оставляют неподвижным некоторый фиксированный простой конец e, входящий в область A. Отображения $F_n(x)$ определяются единственным образом. Их существование гарантируется теоремой 2, §1, главы V в [24].

Поскольку диаметры континуумов K_n стремятся к 0, модули двусвязных областей $\operatorname{mod}(A_n)$ и $\operatorname{mod}(\widetilde{A}_n)$ стремятся к ∞, а числа ρ_n – к 0. Отсюда заключаем, что последовательность отображений $F_1(x)$, $F_2(x)$, … сходится к тождественному отображению области A на себя и притом равномерно на всяком компактном подмножестве области $A \setminus \{0\}$.

Действительно, пусть $w = \varphi(\widetilde{x})$ – однолистное конформное отображение области A на единичный круг $|w| < 1$ такое, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(e) = 1$. Положим $\varphi_n = \varphi \circ F_n \circ \varphi^{-1}$ и обозначим через $\psi_n(w)$ отображение, полученное продолжением по симметрии относительно единичной окружности отображения $\varphi_n(w)$. Поскольку однолистные отображения $\psi_n(w)$ оставляют неподвижной точку $w = 1$ и не принимают значений $0, \infty$, то последовательность $\psi_1(w)$, $\psi_2(w)$, … представляет собой нормальное семейство. Пусть $\psi_{k_1}(w)$, $\psi_{k_2}(w)$, … – произвольная ее подпоследовательность, равномерно сходящаяся внутри $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ к отображению $\varphi_0(w)$. Так как $|\psi_n(e^{i\theta})| = 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, а сходимость равномерна на окружности $|w| = 1$, то $\psi_0(w) \not\equiv \mathrm{const}$. Поэтому отображение $\psi_0(w)$ однолистно в $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ и в силу нормировки

$$\psi_0(1) = 1, \quad \psi_0(0) = 0, \quad \psi_0(\infty) = \infty\,,$$

совпадает с тождественным. Отсюда заключаем, что отображения $\varphi_n(w)$ сходятся равномерно к тождественному внутри кольца $0 < |w| < 1$, а отображения $F_n(x)$ – внутри области $A \setminus \{0\}$.

Зафиксируем произвольно круг $B(0, d) = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < d\}$, содержащийся строго внутри каждой из областей A и B. Для достаточно больших n множества $D_n = D \setminus K_n$ суть двусвязные области, и для доказательства соотношения (7.2.4) достаточно установить существование предела

$$\lim_{n\to\infty} (\operatorname{mod}(A_n) - \operatorname{mod}(D_n)) = (2\pi)^{-1} \log(R_A/R_D)\,. \tag{7.2.6}$$

Обозначим через p_n образ окружности $|x| = d$ при отображении $\widetilde{x} = F_n(x)$, через $\widetilde{D}_n$ – двусвязную область, заключенную между p_n и окружностью $|\widetilde{x}| = \rho_n$. Заметим, что $\widetilde{D}_n = F_n(D_n)$. Из равномерной сходимости отображений $F_n(x)$ к тождественному следует, что кривые p_n равномерно сходятся к окружности $|\widetilde{x}| = d$. Поэтому мы можем утверждать существование последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ положительных чисел, стремящейся к 0 и такой, что каждая из областей $\widetilde{D}_n$ содержится в кольце $\rho_n < |\widetilde{x}| < d + \varepsilon_n$ и содержит внутри себя кольцо $\rho_n < |\tilde{x}| < d - \varepsilon_n$. Сравнивая модули этих круговых колец с модулем двусвязной области $\widetilde{D}_n$ и пользуясь выражением (7.2.1) для модуля кругового кольца, приходим к неравенству

$$(2\pi)^{-1} \log \frac{d - \varepsilon_n}{\rho_n} \le \mathrm{mod}\,(\widetilde{D}_n) \le (2\pi)^{-1} \log \frac{d + \varepsilon_n}{\rho_n}\,.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\mathrm{mod}\,(\widetilde{D}_n) + (2\pi)^{-1} \log \rho_n \Big) = (2\pi)^{-1} \log d\,. \tag{7.2.7}$$

С другой стороны, в силу соотношений (7.2.2) и (7.2.3) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\mathrm{mod}\,(\widetilde{A}_n) + (2\pi)^{-1} \log \rho_n \Big) = (2\pi)^{-1} \log R_A\,. \tag{7.2.8}$$

Объединяя (7.2.7), (7.2.8) и учитывая, что

$$d = R_D\,, \quad \mathrm{mod}\,(A_n) = \mathrm{mod}\,(\widetilde{A}_n)\,, \quad \mathrm{mod}\,(D_n) = \mathrm{mod}\,(\widetilde{D}_n)\,,$$

приходим к (7.2.5).

Доказательство первого из утверждений леммы следует из теоремы 3.7.1 и доказанного выше. По поверхности Ω находим распределение характеристик $(p(x), \theta(x))$ в области D. Посредством вспомогательного квазиконформного отображения $\xi = w(x) : D \to \mathbf{R}^2$ вводим в Ω изотермические координаты. Тем самым, находим односвязную область $\mathcal{D} = w(D)$ и метрику

$$\lambda(\xi)\,|d\xi|^2\,, \quad \xi \in \mathcal{D}\,, \tag{7.2.9}$$

такие, что для произвольного семейства дуг (или кривых) Γ, лежащих в D, выполнено

$$\mathrm{mod}_\Omega\,\Gamma = \mathrm{mod}_\lambda\,\Gamma^*\,,$$

где $\Gamma^* = w(\Gamma)$ и $\mathrm{mod}_\lambda \Gamma^*$ означает модуль Γ^* в метрике (7.2.9). Но метрика (7.2.9) конформна и потому

$$\mathrm{mod}_\lambda\,\Gamma^* = \mathrm{mod}\,\Gamma^*\,. \tag{7.2.10}$$

Таким образом, мы имеем

$$\operatorname{mod}_\Omega(A_n) - \operatorname{mod}_\Omega(B_n) = \operatorname{mod}(w(A_n)) - \operatorname{mod}(w(A_n)). \tag{7.2.11}$$

Проблема существования предела (7.2.4) равносильна вопросу о существовании предела в левой части соотношения (7.2.11) и сводится к уже доказанному утверждению. □

Фиксируем произвольно три простых конца $e', e_0, e'' \in \widetilde{D} \setminus D$, расположенных в порядке положительного обхода границы $\widetilde{D} \setminus D$. Пусть $l \subset D$ — жорданова дуга, отделяющая в D конец e' от e_0 и e''. Выберем локально липшицеву функцию $h : D \to (0,1)$ со следующими свойствами

$$\lim_{(x,y)\to e'} h(x,y) = 0, \quad h|_l = 1, \tag{7.2.12}$$

и такую, что для любого компакта $A \subset \{(x,y) \in D : 0 < h(x,y) < 1\}$ выполнено

$$\operatorname*{ess\,inf}_A |\nabla h(x,y)| > 0. \tag{7.2.13}$$

Обозначим через $E_h(t)$ компоненту связности множества

$$\{(x,y) \in D : h(x,y) = t\},$$

отделяющую простой конец e' от e_0 и e''. Положим

$$\lambda_h(t) = \int\limits_{E_h(t)} \left(g^{11}h_x^2 + 2g^{12}h_xh_y + g^{22}h_y^2\right) \frac{\sqrt{g}}{|\nabla h|}\sqrt{dx^2+dy^2},$$

где g^{ij} $(i,j=1,2)$ — элементы обратной матрицы $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Имеет место утверждение.

Лемма 7.2.2. *Пусть $f : D \to \mathbf{R}^2$ — однолистное, конформное в метрике ds_Ω^2 отображение. Тогда если*

$$\int\limits_0 \frac{dt}{\lambda_h(t)} = \infty, \tag{7.2.14}$$

то образом простого конца e' является некоторый простой конец области $f(D)$.

Доказательство непосредственно вытекает из "принципа длины и площади"в метрике ds_Ω^2. Действительно, пользуясь (7.2.13), на основании неравенства (1.9.37) мы можем записать

$$\int\limits_0^1 \operatorname{osc}^2(f, E_h(t))\frac{dt}{\lambda_h(t)} \le$$
$$\le \iint_D \left(g^{11}|f_x|^2 + 2g^{12}\langle f_x, f_y\rangle + g^{22}|f_y|^2\right)\, d\sigma_\Omega\,. \tag{7.2.15}$$

Если $f(D) = \mathbf{R}^2$, то граница $f(D)$ имеет единственный простой конец и наше утверждение тривиально.

Пусть $f(D) \ne \mathbf{R}^2$. Так как простые концы инвариантны при конформных отображениях, то, не умаляя общности, можем считать, что область $f(D)$ есть единичный круг $B = B(0,1)$. При этом предположении находим

$$\iint_D \left(g^{11}|f_x|^2 + 2g^{12}\langle f_x, f_y\rangle + g^{22}|f_y|^2\right)\, d\sigma_\Omega \ = \iint_D \sqrt{g}\, dxdy =$$
$$= 2\operatorname{area} f(D) = 2\,\pi.$$

Здесь с целью упростить вычисления достаточно было заметить, что первый из двойных интегралов является интегралом Дирихле для отображения f, конформного в метрике ds^2_Ω.

В силу (7.2.15), имеем

$$\int\limits_0^1 \operatorname{osc}^2(f, E_h(t))\frac{dt}{\lambda_h(t)} < \infty.$$

Из условия (4.4.13) теперь следует, что вдоль некоторой последовательности дуг $\{E_h(t_k)\}$, $k \to \infty$, выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{osc}(f, E_h(t)) = 0.$$

Каждая из дуг $E_h(t_k)$ отделяет простой конец e' от дуги $\widetilde{e_0e''}$. Однако,

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} f(E_h(t_k)) = 0,$$

и для произвольной последовательности точек $a_m \in D$, $a_m \to e'$, мы вправе утверждать, что $\{f(a_m)\}$ сходится к некоторой точке на границе ∂B. $\square$

Замечание. Не трудно видеть, что свойство (7.2.14) характеризует поведение метрики ds^2_Ω в окрестности простого конца e' и не зависит от выбора дуги l, отделяющей e' от e_0 и e''. $\Box$

Всюду ниже до конца главы мы предполагаем, что поверхность $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ – локально билипшицева и задана посредством вектор-функции (2.1.1) над некоторой односвязной областью $D \subset \mathbf{R}^2$ с непустой границей. Пусть, далее, $G \subset D$ – односвязная область, $(0,0) \in G$ и Ω удовлетворяет условию (7.2.14) в каждой "граничной точке"$e \in \partial G$, а функция $\Lambda(x)/\lambda(x)$ является суммируемой по области G.

Зафиксируем три различных простых конца e', e_0, e'', входящих в область G и расположенных в порядке положительного обхода множества $\widetilde{G} \setminus G$. Рассмотрим произвольную односвязную подобласть G', примыкающую к простому концу e', не примыкающую к e'' и имеющую связную границу $\partial_G G'$ относительно области G.

Пусть γ_1, γ_2, $\ldots$ – произвольная цепь сечений, определяющая простой конец e' и являющаяся одновременно цепью сечений подобласти G'. Пусть Γ'_n – множество всех локально спрямляемых дуг $\gamma \subset G$, замыкания которых $[\gamma]_{\widetilde{G}}$ представляют собой простые жордановы дуги в $\widetilde{G}$, разделяющие в $\widetilde{G}$ сечение $[\gamma_n]_{\widetilde{G}}$ и замкнутую дугу $\widetilde{e_0 e''} \subset \widetilde{G} \setminus G$, не содержащую на себе простого конца e'. Пусть Δ'_n – множество всех локально спрямляемых дуг $\gamma \subset G'$, замыкания которых $[\gamma]_{\tilde{G}}$ являются простыми жордановыми дугами в $\tilde{G}$ и разделяют в $\tilde{G}$ множества $[\gamma_n]_{\tilde{G}}$ и $[\partial_G G']_{\tilde{G}}$. Так как подобласть G' примыкает к простому концу e', то для достаточно больших n множества Γ'_n и Δ'_n не пусты.

Лемма 7.2.3. *Существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{mod}_\Omega\,(\Gamma'_n) - \mathrm{mod}_\Omega\,(\Delta'_n)\right)\ , \tag{7.2.16}$$

не зависящий от выбора цепи сечений γ_1, γ_2, $\ldots$, определяющей простой конец e'.

Доказательство. В силу предположения (7.2.10) и гипотезы о суммируемости функции $\Lambda(x)/\lambda(x)$ по области G, отображение (2.1.1) продолжимо по непрерывности до гомеоморфного отображения $\tilde{\partial}\, D$ на $\tilde{\partial}\, \Omega$. Таким образом, как и при доказательстве леммы 7.2.1 достаточно проверить справедливость (7.2.16) лишь в случае евклидовой метрики $ds_\Omega = |dx|$.

Пусть $w = f(x)$ – однолистное конформное отображение области G на верхнюю полуплоскость H^+_w с граничным соответствием

$$f(e') = 0, \quad f(e_0) = \alpha, \quad f(e'') = \infty \quad (\alpha > 0). \tag{7.2.17}$$

Так как модуль семейства кривых есть конформный инвариант, то

$$\mathrm{mod}\,(\Gamma'_n) = \mathrm{mod}\ (f(\Gamma'_n))$$

и в силу принципа симметрии для модуля семейства кривых в евклидовой метрике (см. лемму 1.5.2) имеем

$$\mathrm{mod}\,(\Gamma'_n) = 2\,\mathrm{mod}\ \left(f(\Gamma'_n) + \overline{f(\Gamma'_n)}\right). \tag{7.2.18}$$

Замкнем каждую кривую семейства $\{f(\Gamma'_n) + \overline{f(\Gamma'_n)}\}$, присоединив к ней ее предельные точки на горизонтальной оси $\mathrm{Im}\,w = 0$. Множество всех кривых, полученных посредством такой процедуры из семейства $\{f(\Gamma'_n)+\overline{f(\Gamma'_n)}\}$, будем обозначать символом $[\Gamma'_n]$. Нетрудно видеть, что модуль семейства при этом не изменится, и равенство (7.2.18) остается справедливым

$$\mathrm{mod}\,(\Gamma_n) = 2\,\mathrm{mod}\,[\Gamma'_n]\,. \tag{7.2.19}$$

Фиксируем произвольно сечение γ_n из цепи сечений, определяющей простой конец e', и обозначим через $[\gamma_n]$ кривую, полученную из кривой $f(\gamma_n) + \overline{f(\gamma_n)}$ посредством ее замыкания. Пусть A_n – двусвязная область, заключенная между кривой $[\gamma_n]$ и лучом

$$L = \{w \in C_w : \mathrm{Im}\ w = 0, \quad \mathrm{Re}\ w \ge \alpha\}\,.$$

Покажем, что

$$\mathrm{mod}\,([\Gamma'_n]) = \mathrm{mod}\,(A_n)\,. \tag{7.2.20}$$

Действительно, каждая кривая $\gamma \in [\Gamma'_n]$ содержится в области A_n и разделяет граничные компоненты A_n. Поэтому на основании свойства монотонности модуля имеем

$$\mathrm{mod}\,([\Gamma'_n]) \le \mathrm{mod}\,(A_n)\,. \tag{7.2.21}$$

С другой стороны, поскольку семейство $f(\Gamma'_n) + \overline{f(\Gamma'_n)}$ состоит из кривых, симметричных относительно вещественной прямой, то при вычислении его модуля достаточно ограничиться допустимыми функциями $\rho(x)$ такими, что $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_1, -x_2)$. Пусть $\rho(x)$ – произвольная допустимая для $f(\Gamma'_n)+\overline{f(\Gamma'_n)}$ функция с указанным свойством и пусть γ – произвольная кривая, разделяющая граничные компоненты области A_n. Обозначим через γ^+ связную компоненту γ, лежащую в верхней полуплоскости H^+_w и разделяющую в H^+_w граничные компоненты A_n, через $\gamma^- \subset \gamma$ – дугу с аналогичным свойством, лежащую в нижней полуплоскости. Так как область A_n симметрична относительно вещественной прямой, то кривые $\gamma^+ + \overline{\gamma^+}$, $\gamma^- + \overline{\gamma^-}$ содержатся в семействе

$f(\Gamma_n') + \overline{f(\Gamma_n')}$. Отсюда, в силу симметрии функции $\rho(x)$ получаем

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\,|dx| \geq \int\limits_{\gamma_+} + \int\limits_{\gamma^-} = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma^+ + \overline{\gamma^+}} + \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma^- + \overline{\gamma^-}} \geq 1\,.$$

Итак, функция $\rho(x)$ оказывается допустимой для семейства кривых, разделяющих граничные компоненты A_n. Поэтому

$$\mathrm{mod}\,\left(f(\Gamma_n') + \overline{f(\Gamma_n')}\right) \geq \mathrm{mod}\,(A_n)$$

и

$$\mathrm{mod}\,([\Gamma_n']) \geq \mathrm{mod}\,(A_n)\,. \tag{7.2.22}$$

Объединяя (7.2.21), (7.2.22), приходим к (7.2.19), откуда, учитывая равенство (7.2.20), получаем окончательно

$$\mathrm{mod}\,([\Gamma_n']) = 2\,\mathrm{mod}\,(A_n)\,. \tag{7.2.23}$$

Обозначим теперь через P_n наибольшую из двусвязных областей в C_w, симметричных относительно вещественной прямой, совпадающих в H_w^+ с областью $f(G_n')$ и имеющих в качестве одной из граничных компонент кривую $[\gamma_n]$. Так как подобласть G' не примыкает к простому концу e'' и имеет связную границу $\partial_G G'$, то множество кривых $[\Delta_n]$, полученных из семейства $f(\Delta_n') + \overline{f(\Delta_n')}$ посредством замыкания, состоит из тех и только тех кривых, которые содержатся в области P_n, симметричны относительно прямой $\mathrm{Im}\,w = 0$ и разделяют граничные компоненты P_n. Как и выше, устанавливается, что

$$\mathrm{mod}\,(\Delta_n') = 2\,\mathrm{mod}\,(P_n)\,. \tag{7.2.24}$$

Равенства (7.2.23), (7.2.24) и (7.2.5) позволяют заключить о существовании предела

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{mod}\,(\Gamma_n') - \mathrm{mod}\,(\Delta_n')) = \pi^{-1} \log \frac{R_A}{R_P}\,, \tag{7.2.25}$$

где R_A – внутренний конформный радиус относительно точки $w = 0$ плоскости C_w с разрезом по лучу L, R_P – внутренний конформный радиус области $P = \cup_{n=1}^{\infty} P_n \cup \{0\}$. Лемма доказана. $\square$

Анализ соотношений (7.2.3), (7.2.5) и (7.2.25) приводит к мысли о существовании определенной аналогии между пределом (7.2.16) и приведенным модулем односвязной области относительно внутренней точки. В соответствии с этим мы назовем предел (7.2.16) *приведенным модулем* подобласти G' относительно простого конца e' и области G с отмеченными простыми концами e_0, e''. В дальнейшем будем обозначать этот предел символом

$$k_\Omega(G', e'/e_0, e'')$$

или, в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям, символом $k_\Omega(G')$.

Для $\Omega = \mathbf{R}^2$ индекс Ω в обозначениях $k_\Omega(G', e'/e_0, e'')$ и $k_\Omega(G')$ будем опускать.

Равенство (7.2.25) содержит в себе существенно больше информации, нежели это было необходимо при доказательстве леммы. Поскольку эта избыточная информация важна для дальнейшего, опишем полученный результат более подробно.

Пусть $G \subset C_x$ – односвязная область с непустой границей и фиксированными простыми концами e', e_0 и e''. Пусть G' – односвязная подобласть G, примыкающая к e' и не примыкающая к e''. Пусть $w = f(x)$ – однолистное конформное отображение области G на верхнюю полуплоскость H_w^+ с нормировкой (7.2.17). Обозначим через P наибольшую из односвязных областей в C_w, содержащих точку $w = 0$, симметричных относительно вещественной прямой и совпадающих в H_w^+ с областью $f(G')$, через R_P – ее внутренний радиус относительно точки $w = 0$.

Лемма 7.2.4. *Справедливо равенство*

$$k(G', e'/e_0, e'') = \pi^{-1} \log \frac{4\alpha}{R_P}\,. \qquad (7.2.26)$$

Доказательство следует из (7.2.25), если заметить, что $R_A = 4\alpha$. $\square$

Отметим конформную инвариантность введенной величины. Пусть $G \subset C_x$ – односвязная область с отмеченными простыми концами e', e_0, e'' и пусть G' – ее односвязная подобласть, примыкающая к e' и не примыкающая к e''. Пусть $\zeta = \varphi(x)$ – однолистное конформное отображение области G на область $U \subset C_\zeta$ с граничным соответствием

$$\varphi(e') = t', \quad \varphi(e_0) = t_0, \quad \varphi(e'') = t''\,,$$

где t', t_0, t'' – простые концы области U.

Лемма 7.2.5. *Если U' – образ области G' при отображении $\zeta = \varphi(x)$, то U' примыкает к простому концу t', не примыкает к t'' и ее приведенный модуль $k(U', t'/t_0, t'')$ совпадает с приведенным модулем $k(G', e'/e_0, e'')$.*

Доказательство. Согласно теории К.Каратеодори конформное отображение $\zeta = \varphi(x)$ индуцирует гомеоморфизм множества простых концов области G на множество простых концов области U, при этом всякая цепь сечений области G переходит в цепь сечений области U и обратно. Отсюда следует, что подобласть U' примыкает к простому концу t' и не примыкает к t''. Поскольку приведенные модули $k(G')$ и $k(U')$ строятся на базе конформно-инвариантных величин и не зависят от выбора цепей сечений, определяющих простые концы e' и t', то их равенство очевидно. $\square$

Предположим теперь, что G' и G'' – произвольные односвязные подобласти односвязной области $G \subset \Omega$, примыкающие к простым концам e' и e'' соответственно. Предположим, что подобласти G' и G'' не налегают, т.е. $G' \cap G'' = \emptyset$, и имеют связные границы $\partial_G G'$ и $\partial_G G''$. Если зафиксирован некоторый простой конец e_0, входящий в G, то имеет смысл говорить о приведенных модулях $k_\Omega(G', e'/e_0, e'')$ и $k_\Omega(G'', e'/e_0, e'')$.

Лемма 7.2.6. *Справедливо неравенство*

$$k_\Omega(G') + k_\Omega(G'') \geq \pi^{-1} \log 16\,. \tag{7.2.27}$$

Доказательство. Достаточно проверить соотношение (7.2.27) лишь в случае $\Omega = \mathbf{R}^2$. Согласно лемме 7.2.5 приведенные модули $k(G')$ и $k(G'')$ конформно-инвариантны, и нам достаточно рассмотреть ситуацию, в которой область G совпадает с верхней полуплоскостью H_x^+, а простые концы e', e_0, e'' отождествлены с граничными точками 0, α, ∞ $(\alpha > 0)$ соответственно. Воспользуемся леммой 7.2.4, положив в ней $f(x) \equiv x$. Сохраняя за обозначениями P и R_P прежний смысл, обозначим через Q наибольшую из односвязных областей в расширенной плоскости $\overline{C}_w$, содержащих точку $w = \infty$, симметричных относительно прямой $\operatorname{Im} w = 0$ и совпадающих в H_w^+ с $f(G'')$. По лемме 7.2.4

$$k(G') = \pi^{-1} \log \frac{4\alpha}{R_P}\,. \tag{7.2.28}$$

Покажем, что

$$k(G'') = \pi^{-1} \log \frac{4}{\alpha R_Q}\,, \tag{7.2.29}$$

где R_Q – внутренний конформный радиус области Q относительно точки $w = \infty$.

Пусть $\tilde{w} = F(w)$ – однолистное конформное отображение полуплоскости H_w^+ на себя с граничным соответствием

$$F(\infty) = 0, \quad F(\alpha) = \alpha, \quad F(0) = \infty\,.$$

Пусть U – наибольшая из областей, содержащих точку $\tilde{w} = 0$, симметричных относительно вещественной прямой и совпадающих в $H^+_{\tilde{w}}$ с $F(G'')$. Пусть R_U – ее конформный радиус относительно точки $\tilde{w} = 0$. По лемме 7.2.4

$$k(G'') = \pi^{-1} \log \frac{4\alpha}{R_U}\,.$$

Но $\tilde{w} = F(w)$ есть сужение на H^+_w отображения $\varphi(w) = \frac{4\alpha}{w}$, и, замечая, что $U = \varphi(Q)$, $R_U = \alpha^2\, R_Q$, получаем нужное.

Далее, поскольку подобласти G' и G'' не налегают в H^+_x, то и области P и Q также не налегают. Пользуясь неравенством

$$R_P \cdot R_Q \le 1\,, \tag{7.2.30}$$

связывающим конформные радиусы неналегающих областей [28, теорема 7.1], и учитывая соотношения (7.2.28) и (7.2.29), убеждаемся в справедливости леммы. □

Сделаем замечания о возможности равенства в (7.2.27). Ограничимся случаем евклидовой метрики. Прежде всего отметим, что равенство в (7.2.30) возможно тогда и только тогда, когда область P в C_w есть круг с центром в начале координат, а область $Q = \overline{C}_w \setminus \overline{P}$ [28]. Предположим теперь, что область $G \subset C_x$ совпадает с полуплоскостью H^+_x, а простые концы e', e_0, e'' отождествлены с граничными точками 0, α, ∞. Анализируя доказательство леммы, видим, что равенство в (7.2.27) возможно тогда и только тогда, когда подобласть $G' \subset H^+_x$ есть полукруг

$$K' = \{x \in H^+_x : |x| < r\}, \quad \text{а} \quad G'' = H^+_x \setminus \overline{K'}\,.$$

В случае произвольной области G равенство в (7.2.27) возможно в том и только том случае, когда существует однолистное конформное отображение области G на H^+_w с нормировкой (7.2.17), при котором подобласть G' отобразится на K', а подобласть G'' – на $H^+_w \setminus \overline{K'}$.

7.3 Оценки конформного отображения

Введенная величина позволяет переформулировать некоторые граничные задачи теории конформных отображений поверхностей к внутренним задачам теории конформных отображений плоских областей, методы решения которых в настоящее время достаточно хорошо разработаны. В качестве примера рассмотрим следующие три задачи, связанные с теоремами типа теорем 7.1.1 и 7.1.2 о конформных отображениях плоской области на полосу.

Пусть $G \subset \Omega$ – область с отмеченными простыми концами e', e_0, e'' и пусть $\zeta = F(x)$ – однолистное конформное отображение области G на полосу[1]

$$\Pi = \{\zeta \in C : 0 < \operatorname{Im}\zeta < \pi\}$$

с нормировкой

$$\lim_{x\to e'} \operatorname{Re} F(x) = -\infty, \quad F(e_0) = 0, \quad \lim_{x\to e''} \operatorname{Re} F(x) = +\infty\,. \tag{7.3.31}$$

Для произвольной односвязной подобласти $G' \subset G$, примыкающей к простому концу e', полагаем

$$I_1(G'; F) = \inf_{x\in\sigma} \operatorname{Re} F(x) \quad (\sigma = G \setminus G').$$

Если подобласть G'' примыкает к простому концу e'' и не налегает на подобласть G', то пусть

$$\begin{aligned}
I_2(G', G''; F) \;&= \inf_{x\in\sigma} \operatorname{Re} F(x),\\
I_3(G', G''; F) \;&= \sup_{x\in\sigma} \operatorname{Re} F(x), \quad (\sigma = G \setminus (G' \cup G'')),\\
I_4(G', G''; F) \;&= \sup_{x',x''\in\sigma} |\operatorname{Re} F(x') - \operatorname{Re} F(x'')|.
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующие задачи.

Задача *A*. *При заданном приведенном модуле $k_\Omega(G', e'/e_0, e'')$ указать точную нижнюю грань величины $I_1(G'; F)$.*

Задача *B*. *При заданных приведенных модулях $k_\Omega(G', e'/e_0, e'')$ и $k_\Omega(G'', e''/e', e_0)$ указать точную нижнюю и точную верхнюю грани величин $I_2(G', G''; F)$, $I_3(G', G''; F)$ соответственно.*

Задача *C*. *В условиях задачи B указать точную верхнюю грань величины $I_4(G', G''; F)$.*

Каждая из указанных граничных задач эквивалентна некоторой внутренней задаче. Действительно, посредством вспомогательного отображения $w = e^\zeta$ сводим ситуацию к изучению отображения $f(x) = e^{F(x)}$ области $G \subset \Omega$ на полуплоскость H^+_w. Нормировка (7.3.31) отображения $F(x)$ обеспечивает нормировку (7.2.17) с $\alpha = 1$ отображения $f(x)$.

Обозначим через P наибольшую из односвязных областей в комплексной плоскости C_w, содержащих точку $w = 0$, симметричных относительно вещественной оси и совпадающих в полуплоскости H^+_w с областью $f(G')$; через Q обозначим наибольшую из областей в расширенной

[1]Ниже нам удобно считать, что $\zeta = F(x)$ есть комплекснозначная функция, где аргументом является точка $x \in \Omega$.

плоскости $\overline{C}_w$, содержащих точку $w = \infty$, симметричных относительно вещественной прямой и совпадающих в H_w^+ с $f(G'')$. Из (7.2.26) находим

$$R_P = 4\,\exp\{-\pi\,k(G')\} \tag{7.3.32}$$

и, рассуждая как при доказательстве равенства (7.2.29), получаем

$$R_Q = 4\,\exp\{-\pi\,k(G'')\}\,. \tag{7.3.33}$$

Таким образом, задачи **A**, **B** и **C** оказываются эквивалентными следующим задачам.

Задача A'. *Среди всех односвязных областей* $P \subset C_w$*, симметричных относительно прямой* $\operatorname{Im} w = 0$*, содержащих точку* $w = 0$ *и имеющих заданный внутренний конформный радиус* R_P *относительно точки* $w = 0$*, найти*

$$\inf_{w\in\Sigma} |w| \quad (\Sigma = C_w \setminus P)\,.$$

Задача B'. *Среди всех пар не налегающих друг на друга односвязных областей* P *и* Q *в* $\overline{C}_w$*, содержащих точки* $w = 0$ *и* $w = \infty$ *соответственно, симметричных относительно вещественной оси и имеющих внутренние конформные радиусы* R_P*,* R_Q *относительно* $w = 0$ *и* $w = \infty$ *соответственно, найти*

$$\inf_{w\in\Sigma} |w|\,, \quad \sup_{w\in\Sigma} |w| \quad (\Sigma = C_w \setminus (P \cup Q))\,.$$

Задача C'. *В условиях задачи* B' *найти*

$$\sup_{w',w''\in\Sigma} \frac{|w'|}{|w''|} \quad (\Sigma = C_w \setminus (P \cup Q))\,.$$

Решение задачи $\mathbf{A}'$ дается теоремой Кёбе об $\frac{1}{4}$ (см., например, [24, §4 главы II]). Поэтому, в силу (7.3.32), имеем.

Теорема 7.3.1. *В условиях задачи* **A** *справедливо неравенство*

$$I_1(G'; F) > -\pi\,k_\Omega(G')\,. \tag{7.3.34}$$

Неравенство не может быть улучшено при фиксированном $k_\Omega(G')$*.*

Для **доказательства** достаточно проверить неулучшаемость оценки (7.3.34). Здесь необходимо заметить, что экстремальной областью в теореме Кёбе является плоскость, разрезанная вдоль некоторого прямолинейного луча, и что существуют области P с заданным конформным радиусом R_P, симметричные относительно прямой $\operatorname{Im} w = 0$, имеющие жордановы границы и сколь угодно близкие к "лучевой"области Кёбе. $\square$

Опишем в нужной нам форме решение задачи $\mathbf{B}'$, принадлежащее О. Тейхмюллеру [222].[2]

Лемма 7.3.1. *Для произвольной точки $w \in \Sigma$ выполнено*

$$\mu(t_0)\, R_P/4 \le |w| \le 4/(R_Q \mu(t_0))\,, \tag{7.3.35}$$

где t_0 – единственный корень уравнения

$$\nu(t) = R_P \cdot R_Q/16\,, \tag{7.3.36}$$

а функции $\mu(t)$, $\nu(t)$ определяются равенствами

$$\mu(t) = [(t^2-1)/t] \cdot [(t+1)/(t-1)]^{1/t} \tag{7.3.37}$$

и

$$\nu(t) = [t^2/(t^2-1)^2] \cdot [(t-1)/(t+1)]^{t+1/t}\,. \tag{7.3.38}$$

Равенства в (7.3.35) достигаются одновременно в том и только том случае, когда $R_P \cdot R_Q = 1$ или, что то же самое, когда множество Σ представляет собой окружность с центром в точке $w = 0$.

Если же $R_P \cdot R_Q < 1$, то полное описание экстремальных областей, на которых достигаются оценки (7.3.35), довольно громоздко. Поэтому мы ограничимся лишь их качественным описанием, достаточным для наших целей.

Левое из неравенств (7.3.35) обращается в равенство тогда и только тогда, когда область P принадлежит некоторому специальному семейству областей $\mathcal{M}$, $Q = \overline{C}_w \setminus \overline{P}$. Каждая из областей множества $\mathcal{M}$ симметрична относительно вещественной прямой и может быть получена из области с жордановой границей посредством проведения в ней одного единственного разреза положительной длины, лежащего на вещественной оси. Заметим при этом, что нижняя оценка в (7.3.35) достигается именно в концевой точке данного разреза. Правое из неравенств в (7.3.35) обращается в равенство тогда и только тогда, когда область Q принадлежит семейству областей $\mathcal{N}$, $P = C_w \setminus \overline{Q}$; каждая из областей множества $\mathcal{N}$ может быть получена как образ при инверсии относительно подходящей окружности с центром в начале координат некоторой области из класса $\mathcal{M}$. Верхняя оценка в (7.3.35) достигается также в концевой точке разреза.

Приведенный результат О. Тейхмюллера позволяет дать полное решение задачи $\mathbf{B}$.

[2]Этот результат может быть извлечен также из работы Р. Кюнау [176].

Теорема 7.3.2. *В условиях задачи* **B** *справедливы следующие неравенства*

$$I_2(G', G''; F) \geq -\pi\, k_\Omega(G') + \log \mu(t_0)\,, \tag{7.3.39}$$

$$I_3(G', G''; F) \leq \pi\, k_\Omega(G'') - \log \mu(t_0)\,, \tag{7.3.40}$$

где t_0 есть единственный корень уравнения

$$\pi^{-1} \log \frac{1}{\nu(t)} = k_\Omega(G') + k_\Omega(G'')\,, \tag{7.3.41}$$

а функции $\mu(t)$, $\nu(t)$ определяются равенствами (7.3.37), (7.3.38).

Равенства в (7.3.39), (7.3.40) *достигаются в том и только том случае, когда*

$$k_\Omega(G') + k_\Omega(G'') = \pi^{-1} \log 16\,. \tag{7.3.42}$$

В других случаях оценки строгие, однако при фиксированных $k_\Omega(G')$ и $k_\Omega(G'')$ не могут быть заменены никакими лучшими.

Доказательство. Неравенства (7.3.39) и (7.3.40) следуют из (7.3.35). Остановимся подробно на изучении возможностей равенства в этих оценках. Предположим сначала, что выполнено условие (7.3.42). Соотношение (7.3.41) влечет

$$\nu(t_0) = \frac{1}{16}\,, \quad t_0 = 1\,, \quad \mu(t_0) = 4\,,$$

и (7.3.39), (7.3.40) преобразуются к виду

$$I_2(G', G''; F) = I_3(G', G''; F) = -\pi k_\Omega(G') + \log 4 = \pi k_\Omega(G'') - \log 4\,.$$

Предположим теперь, что условие (7.3.42) не выполнено, однако в (7.3.39) имеет место равенство. Тогда существует точка $w_0 \in \Sigma$, в которой достигается нижняя из оценок (7.3.35). Тем самым область P принадлежит множеству $\mathcal{M}$, $Q = \overline{C}_w \setminus \overline{P}$. Но область P может быть получена из области с жордановой границей посредством проведения в ней разреза вдоль вещественной прямой, причем w_0 есть концевая точка этого разреза. Точка w_0 должна находиться на положительном расстоянии от образа множества $G \setminus (G' \cup G'')$ при отображении $w = f(x)$, что невозможно.

Аналогичным образом устанавливается и строгость оценки (7.3.40) в отсутствии условия (7.3.42).

Неулучшаемость оценок (7.3.39), (7.3.40) при фиксированных приведенных модулях $k_\Omega(G')$, $k_\Omega(G'')$ следует из неулучшаемости неравенств (7.3.35) в задаче $\mathbf{B}'$ на подклассе пар областей с жордановыми границами. □

Следствие 7.3.1. *В условиях задачи* **B** *выполнено*

$$-\pi\, k_\Omega(G') < I_2(G', G''; F) \le I_3(G', G''; F) < \pi\, k_\Omega(G'')\,. \qquad (7.3.43)$$

Доказательство вытекает из (7.3.39), (7.3.40) и неравенства $\mu(t) > 1$. □

Точное решение задачи $\mathbf{C}'$ нам не известно. Поэтому при оценке величины $I_4(G', G''; F)$ мы воспользуемся теоремой 7.3.2 и покажем, что полученное неравенство не слишком сильно отличается от наилучшего.

Теорема 7.3.3. *В условиях задачи* **C** *выполнено*

$$\pi\,\delta(G', G'') - \log 16 \le I_4(G', G''; F) \le \pi\,\delta(G', G'') - \log \mu^2(t_0)\,, \quad (7.3.44)$$

где t_0 *– корень уравнения* (7.3.41), *а через* $\delta(G', G'')$ *обозначено выражение* $k_\Omega(G') + k_\Omega(G'')$.

Доказательство. Верхняя оценка в (7.3.44) является прямым следствием неравенств (7.3.39), (7.3.40). Остановимся на проверке нижней оценки. Переходя к плоскости C_w, рассуждая, как и выше, и пользуясь теоремой площадей для неналегающих областей [57, теорема 1, §1 главы III], получаем

$$\frac{1}{R_Q} \le \sup_{w\in\Sigma} |w|\,, \quad \inf_{w\in\Sigma} |w| \le R_p\,.$$

Отсюда, учитывая (7.3.32) и (7.3.33), находим

$$\pi\, k_\Omega(G'') - \log 4 \le \sup_{x\in\sigma} \operatorname{Re} F(x)\,, \quad \inf_{x\in\sigma} \operatorname{Re} F(x) \le -\pi\, k_\Omega(G') + \log 4\,,$$

что непосредственно приводит к нижней оценке в (7.3.44). □

При выполнении условия (7.3.42) неравенства (7.3.44) обращаются в точные равенства. В остальных случаях верхняя оценка в (7.3.44), по-видимому, не точна. Однако она не слишком сильно отличается от наилучшей, поскольку $1 < \mu(t) \le 4$ для всех t.

7.4 Оценки величин $k_\Omega(G')$, $k_\Omega(G'')$

Ниже даются оценки приведенных модулей

$$k_\Omega(G', e'/e_0, e'')\,, \quad k_\Omega(G'', e''/e', e_0)$$

через модули некоторых специальных семейств дуг и тем самым устанавливается связь введенных величин с известными.

Пусть $G \subset \Omega$ – односвязная область с фиксированными простыми концами e', e_0, e''. Пусть G' и G'' – односвязные подобласти области G, примыкающие к простым концам e', e'' соответственно и не налегающие друг на друга. Зафиксируем цепь сечений $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ области G, определяющую простой конец e' и являющуюся одновременно цепью сечений области G'. Пусть Γ' и Δ' – семейства дуг, участвующие в определении приведенного модуля $k_\Omega(G')$. Кроме того, пусть Λ' – семейство локально спрямляемых дуг $\gamma \subset G \backslash \overline{G'}$, замыкания которых в $[\gamma]_{\widetilde{G}}$ суть простые жордановы дуги в $\widetilde{G}$, разделяющие $[\partial_G G']_{\widetilde{G}}$ и $\widetilde{e_0 e''}$, а $\mathcal{E}'_n$ – семейство дуг $\gamma \subset G$, замыкания которых $[\gamma]_{\widetilde{G}}$ разделяют $[\gamma_n]_{\widetilde{G}}$ и $\widetilde{e_0 e''}$ и таковы, что $[\gamma]_{\widetilde{G}} \cap \widetilde{e_0 e''} \neq \emptyset$. Отметим, что если $[\partial_G G']_{\widetilde{G}} \cap \widetilde{e_0 e''} \neq \emptyset$, то множество $\Lambda' = \emptyset$.

Лемма 7.4.1. *Если граница $\partial_G G'$ связна, то справедливо разложение*

$$\Gamma'_n = \Delta'_n \cup \Lambda' \cup \mathcal{E}'_n \,. \tag{7.4.45}$$

Доказательство. Пусть $\gamma \in \Gamma'_n$ – произвольная дуга. Если $[\gamma]_{\widetilde{G}} \cap [\partial_G G']_{\widetilde{G}} \neq \emptyset$, то $\gamma \in \mathcal{E}'_n$. Поэтому предположим, что $[\gamma]_{\widetilde{G}} \cap [\partial_G G']_{\widetilde{G}} = \emptyset$. Тогда γ содержится либо в G', либо в $G \setminus \overline{G'}$. Рассмотрим каждый из случаев в отдельности.

Пусть $\gamma \subset G'$. Покажем, что $\gamma \in \Delta'_n$. Полагая противное, т.е. что дуга $[\gamma]_{\widetilde{G}}$ не разделяет γ_n и $[\partial_G G']_{\widetilde{G}}$, находим континуум $K \subset \widetilde{G}$, соединяющий $[\gamma_n]_{\widetilde{G}}$ с $[\partial_G G']_{\widetilde{G}}$ и такой, что $[\gamma]_{\widetilde{G}} \cap K = \emptyset$. Так как граница $\partial_G G'$ связна, то множество $G \backslash G'$ также связно, а из включения $G'' \subset (G \backslash G')$ выводим, что $[G \setminus G']_{\widetilde{G}} \cap \widetilde{e_0 e''} = \emptyset$. Поэтому множество $K \cup [G \setminus G']_{\widetilde{G}}$ связно и соединяет дугу $[\gamma_n]_{\widetilde{G}}$ с дугой $\widetilde{e_0 e''}$. Тем самым пришли к противоречию с предположением $\gamma \in \Gamma'_n$.

Итак, всякая дуга $\gamma \in \Gamma'_n$ обязательно принадлежит одному из семейств $\mathcal{E}'_n$, Δ'_n, Λ', и мы доказали вложение

$$\Gamma'_n \subset (\Delta'_n \cup \Lambda' \cup \mathcal{E}'_n) \,.$$

Для доказательства противоположного вложения достаточно показать, что $\Lambda' \subset \Gamma'_n$. Пусть $\Lambda' \neq \emptyset$ и $\gamma \in \Lambda'$ – произвольная дуга. Предполагая, то $\gamma \notin \Gamma'_n$, находим континуум $K \subset \widetilde{G}$, соединяющий $[\gamma_n]_{\widetilde{G}}$ и $\widetilde{e_0 e''}$ в $\widetilde{G}$ и не пересекающийся с $[\gamma]_{\widetilde{G}}$. Если $K \cap [\partial_G G']_{\widetilde{G}} \neq \emptyset$, то имеем противоречие с гипотезой $\gamma \in \Lambda'$. Поэтому пусть $K \cap [\partial_G G']_{\widetilde{G}} = \emptyset$. Возникают две возможности: либо $[\partial_G G']_{\widetilde{G}} \cap \widetilde{e_0e''} \neq \emptyset$, либо это пересечение пусто. В первом случае приходим к противоречию с предположением $\Lambda' \neq \emptyset$. Во втором рассмотрим множество $K \cup \widetilde{e_0e''}$. Данное множество связно и соединяет сечения $[\gamma_n]_{\widetilde{G}}$ с простым концом e'', но не пересекается с $[\partial_G G']_{\widetilde{G}}$. Это невозможно, поскольку подобласти G' и G'' не налегают друг на друга. Лемма доказана. $\square$

Сохраняя условия и обозначения предыдущего пункта, обозначим через $\mathcal{E}'$ семейство всевозможных дуг $\gamma \subset G'$, замыкания которых суть простые жордановы дуги в $\widetilde{G}$, разделяющие в $\widetilde{G}$ простой конец e' и дугу $\widetilde{e_0e''}$ и такие, что $[\gamma]_{\widetilde{G}} \cap [\partial_G G']_{\widetilde{G}} \neq \emptyset$.

Лемма 7.4.2. *Справедливо неравенство*

$$\operatorname{mod}_\Omega(\Lambda') \leq k_\Omega(G', e'/e_0, e'') \leq \operatorname{mod}_\Omega(\Lambda') + \operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}') \,. \tag{7.4.46}$$

Доказательство. Поскольку семейства Λ' и Δ'_n расположены в непересекающихся измеримых множествах, на основании (1.5.13) имеем

$$\operatorname{mod}_\Omega(\Delta'_n \cup \Lambda') = \operatorname{mod}_\Omega(\Delta'_n) + \operatorname{mod}_\Omega(\Lambda') \,.$$

Но согласно (7.4.45) выполнено $(\Delta'_n \cup \Lambda') \subset \Gamma'_n$ и, пользуясь свойством монотонности модуля

$$\operatorname{mod}_\Omega(\Delta'_n \cup \Lambda') \geq \operatorname{mod}_\Omega(\Gamma'_n) \,,$$

получаем

$$\operatorname{mod}_\Omega(\Lambda') \leq \operatorname{mod}_\Omega(\Gamma'_n) - \operatorname{mod}_\Omega(\Delta'_n) \,.$$

Переходя к пределу, убеждаемся в справедливости нижней оценки в (7.4.46).

Остановимся на доказательстве верхней оценки. Из разложения (7.4.45) и неравенства (1.5.13) следует

$$\operatorname{mod}_\Omega(\Gamma'_n) \leq \operatorname{mod}_\Omega(\Delta'_n) + \operatorname{mod}_\Omega(\Lambda') + \operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}'_n) \,.$$

Но $\mathcal{E}'_n \subset \mathcal{E}'$ и

$$\operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}'_n) \leq \operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}') \,.$$

Поэтому

$$\operatorname{mod}_\Omega(\Gamma'_n) - \operatorname{mod}_\Omega(\Delta'_n) \leq \operatorname{mod}_\Omega(\Lambda') + \operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}')$$

и, переходя к пределу, получаем нужное. $\square$

Объединяя оценки (7.3.34) и (7.4.46), приходим к утверждению.

Теорема 7.4.1. *Пусть $\zeta = F(x)$ – однолистное конформное отображение области $G \subset \Omega$ на полосу Π, нормированное условиями (7.3.31), и пусть G' – подобласть области G, примыкающая к простому концу e'.*

Тогда при всех $x \in G \setminus G'$ выполнено

$$\operatorname{Re} F(x) > -\pi \left\{\operatorname{mod}_\Omega(\Lambda') + \operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}')\right\}. \tag{7.4.47}$$

Сохраняя за обозначениями Λ', $\mathcal{E}'$ прежнее содержание, обозначим через Λ'', $\mathcal{E}''$ соответствующие семейства дуг, возникающие при рассмотрении подобласти G''. Кроме того, пусть Λ – семейство дуг $\gamma \subset G$, замыкания которых $[\gamma]_{\widetilde{G}}$ являются простыми жордановыми дугами в $\widetilde{G}$, разделяющими в $\widetilde{G}$ множества $[G']_{\widetilde{G}}$ и $[G'']_{\widetilde{G}}$, и для произвольного множества $K \subset \widetilde{G}$ пусть $\mathcal{E}(K)$ означает семейство дуг $\gamma \subset G$, разделяющих простые концы e', e'' и таких, что $[\gamma]_{\widetilde{G}} \cap [K]_{\widetilde{G}} \neq \emptyset$.

Лемма 7.4.3. *Имеет место следующая оценка*

$$\operatorname{mod}_\Omega(\Lambda) \le k_\Omega(G') + k_\Omega(G'') \le \operatorname{mod}_\Omega(\Lambda) + S\,, \tag{7.4.48}$$

где

$$S = \operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}_1) + \operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}_2) + \min\{\operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}_1),\, \operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}_2)\}\,,$$

а

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(\partial_G G')\,, \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}(\partial_G G'')\,.$$

Доказательство. Как нетрудно усмотреть из соотношений (7.2.28), (7.2.29), величина $k_\Omega(G') + k_\Omega(G'')$ не зависит от выбора простого конца e_0. Выберем в качестве e_0 простой конец, принадлежащий множеству $[\partial_G G'']_{\widetilde{G}}$ и расположенный между простыми концами e', e'' в порядке положительного направления обхода границы $\widetilde{G} \setminus G$. При таком выборе e_0 семейство $\Lambda'' = \emptyset$ и по лемме 7.4.2

$$0 \le k_\Omega(G'') \le \operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}'')\,.$$

Но

$$\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}(\partial_G G'')\,,$$

поэтому

$$0 \le k_\Omega(G'') \le \operatorname{mod}(\mathcal{E}_2)\,. \tag{7.4.49}$$

Заметим теперь, что

$$\Lambda \subset \Lambda' \subset (\Lambda \cup \mathcal{E}_2)\,,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{mod}_\Omega(\Lambda) \le \operatorname{mod}_\Omega(\Lambda') \le \operatorname{mod}_\Omega(\Lambda) + \operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}_2)\,.$$

Пользуясь далее неравенствами (7.4.46), (7.4.49) и учитывая, что

$$\mathrm{mod}_\Omega(\mathcal{E}') \le \mathrm{mod}_\Omega(\mathcal{E}_1)\,,$$

получаем

$$\mathrm{mod}_\Omega(\Lambda) \le k_\Omega(G') + k_\Omega(G'') \le \mathrm{mod}_\Omega(\Lambda) + \mathrm{mod}_\Omega(\mathcal{E}_1) + 2\,\mathrm{mod}_\Omega(\mathcal{E}_2)\,. \tag{7.4.50}$$

С другой стороны, выбирая в качестве e_0 простой конец, принадлежащий множеству $[\partial_G G']_{\widetilde{G}}$ и расположенный между простыми концами e', e'', аналогичными рассуждениями приходим к неравенству

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}_\Omega(\Lambda) \ &\le k_\Omega(G') + k_\Omega(G'') \le \\ &\le \mathrm{mod}_\Omega(\Lambda) + \mathrm{mod}_\Omega(\mathcal{E}_2) + \mathrm{mod}_\Omega(\mathcal{E}_1)\,.\end{aligned} \tag{7.4.51}$$

Сравнивая (7.4.50) и (7.4.51), получаем нужное. $\Box$

Следующее утверждение представляет собой уточнение неравенства (7.4.48) в специальном случае, когда $\partial_G G' = \partial_G G''$.

Лемма 7.4.4. *Предположим, что жорданова дуга $L \subset G$ разделяет G на две подобласти G' и G'' так, что подобласть G' примыкает к простому концу e', а подобласть G'' – к простому концу e''. Тогда*

$$0 \le k_\Omega(G') + k_\Omega(G'') \le 2\,\mathrm{mod}_\Omega\left(\mathcal{E}(L)\right)\,. \tag{7.4.52}$$

Как и при **доказательстве** леммы 7.4.3, зафиксируем простой конец $e_0 \in [L]_{\widetilde{G}}$. Тогда $\Lambda' = \Lambda'' = \emptyset$. Замечая, что $\mathcal{E}'\,, \mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}(L)$, и пользуясь неравенством (7.4.46), получаем нужное. $\Box$

Неравенства (7.4.46), (7.4.48), (7.4.52) позволяют вывести из теорем 7.3.1 – 7.3.3 ряд оценок конформного отображения поверхности на полосу менее точных, однако сформулированных в терминах более привычных величин. Приведем две из них.

Теорема 7.4.2. *Пусть $\zeta = F(x)$ – однолистное конформное отображение области $G \subset \Omega$ на полосу Π, нормированное условиями (7.3.31), и пусть $L \subset G$ – жорданова дуга, разделяющая простые концы e', e''.*

Тогда выполнено

$$-\pi\left\{\mathrm{mod}_\Omega(\Lambda') + \mathrm{mod}_\Omega(\mathcal{E}(L))\right\} \le \mathrm{Re}\,F(x) \quad (\forall\, x \in L)\,, \tag{7.4.53}$$

и

$$\mathrm{osc}_{x \in L}\,\mathrm{Re}\,F(x) \le 2\pi\,\mathrm{mod}_\Omega(\mathcal{E}(L))\,, \tag{7.4.54}$$

где через Λ' обозначено семейство кривых, разделяющих L и $\widetilde{e_0 e''}$, через $\mathrm{osc}_{x\in L}\,\mathrm{Re}\,F(x)$ – колебание $\mathrm{Re}\,F(x)$ по множеству L.

Доказательство. Неравенство (7.4.53) является прямым следствием неравенств (7.3.34) и (7.4.46), неравенство (7.4.54) – неравенств (7.3.44) и (7.4.52). □

Непосредственная комбинация неравенств (7.3.39), (7.3.40), (7.4.46) приводит к верхним оценкам для $\operatorname{Re} F(x)$ на множестве L. Отметим, для примера, следующую оценку.

Теорема 7.4.3. *В условиях теоремы* 7.4.2 *выполнено*

$$\operatorname{Re} F(x) \le \pi\{\operatorname{mod}_\Omega(\Lambda'') + \operatorname{mod}_\Omega(\mathcal{E}'')\} - \log \mu(t_0) \quad (x \in L)\,. \qquad (7.4.55)$$

Другие оценки для случая евклидовой метрики см. в [60], [10].

Задачи: 1) Представляют несомненный интерес оценки приведенного модуля $k(G')$, $k(G'')$ через геометрический величины, отличные от модуля семейства дуг. 2) Найти аналоги теорем 7.1.1 и 7.1.2 для полосообразных областей на поверхностях с ограничениями на кривизны.

Глава 8

Скорость стабилизации решений

Указываются границы допустимой скорости стабилизации решений уравнения газовой динамики и уравнения минимальной поверхности, при превышении которой решения могут быть лишь тождественно постоянными [84]. Доказательства базируются на оценках типа Альфорса – Варшавского конформного отображения поверхности на полосу. Относительно общей постановки задачи и ее современного состояния см. [67], [95], [2], [231], [232], [203], [220], [151] и др.

8.1 Уравнение газовой динамики

Ниже рассматриваются обобщенные решения уравнения вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(\delta(q)\varphi_x) + \frac{\partial}{\partial y}\,(\delta(q)\varphi_y) = 0, \quad q = |\nabla\varphi|, \tag{8.1.1}$$

где $\delta(q)$ – непрерывная функция, $\delta(0) = 1$.

При

$$\delta(q) = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}q^2\right)^{1/(\gamma-1)}$$

мы имеем классическое уравнение газовой динамики. Данное уравнение описывает потенциал скоростей плоского установившегося течения идеального газа в адиабатическом режиме; γ, $-\infty < \gamma < +\infty$, — постоянная, характеризующая газ (см., например, [55, §15 главы IV]). Для $\gamma = 1 \pm 0$ полагаем

$$\delta(q) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\,q^2\right\}.$$

Данное уравнение имеет эллиптический тип при $\gamma \le 1$. Для $\gamma > 1$ оно эллиптично при $q < \sqrt{2/(\gamma-1)}$, параболично при $q = \sqrt{2/(\gamma-1)}$

и гиперболично при $q > \sqrt{2/(\gamma-1)}$. Ниже мы предполагаем, что или $\gamma \le 1$, или $\gamma > 1$ и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D'} q(x,y) < \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \text{ для всякой подобласти } D' \subset\subset D, \tag{8.1.2}$$

т.е. уравнение (8.1.1) является *эллиптическим на решении* φ.

Последнее означает, что при фиксированном решении φ мы рассматриваем δ как (наперед заданную) измеримую функцию переменной (x,y), после чего уравнение (8.1.1) становится линейным и эллиптическим.

Пусть D — область в $\mathbf{R}^2$. Для произвольной локально липшицевой функции $f : D \to \mathbf{R}$, мы обозначаем через $D_b(f)$ множество всех точек $a \in D$, в которых f не имеет полного дифференциала. Согласно теореме Радемахера множество $D_b(f)$ имеет нулевую двумерную меру Лебега.

Нам удобно пользоваться здесь следующим определением обобщенного решения уравнения (8.1.1) [76]. Локально липшицева в D функция φ называется *обобщенным решением* уравнения (8.1.1), если для произвольной подобласти $\Delta \subset\subset D$ со спрямляемой границей $\partial\Delta$ такой, что $\mathrm{mes}_1\,(\partial\Delta \cap D_b(\varphi)) = 0$, и для произвольной функции $\eta \in \mathrm{Lip}\,\overline{\Delta}$ выполнено

$$\iint_{\Delta} \delta(q)\,(\varphi_x\eta_x + \varphi_y\eta_y)\;dxdy = \int\limits_{\partial\Delta} \eta\,\delta(q)\;(-\varphi_y dx + \varphi_x dy)\,. \tag{8.1.3}$$

Подчеркнем, что в случае достаточной гладкости решения φ соотношение (8.1.3) влечет выполнение (8.1.1) в традиционном смысле.

В настоящей главе приводятся теоремы типа Фрагмена – Линделефа, описывающие допустимую скорость стабилизации градиента решения в окрестности граничной точки, при превышении которой решения могут быть лишь тождественно постоянными. В частности, приводится доказательство следующей теоремы [84].

Теорема 8.1.1. *Пусть* φ *— обобщенное решение уравнения* (8.1.1) *в полуполосе* $\Pi = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \hbar\}$. *Предположим, что при всяком* $0 < x < +\infty$ *выполнено*

$$\lim_{y\to+0} \varphi(x,y) = \lim_{y\to\hbar-0} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = 0, \tag{8.1.4}$$

и для некоторого $s > \pi/\hbar$ *для всех, достаточно больших* $x > 0$ *справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<y<\hbar} |\nabla\varphi(x,y)| \le \exp\{-\exp\{s\,x\}\}\,. \tag{8.1.5}$$

Тогда $\varphi \equiv 0$ *в* Π.

Рассмотрим теперь круговой сектор раствора α, $0 < \alpha \le 2\pi$. Именно,

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < 1,\ y > 0 \text{ и } y \cos\alpha < x \sin\alpha\},$$

если $0 < \alpha \le \pi$, и

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < 1,\ y > 0 \text{ или } y \cos\alpha < x \sin\alpha\},$$

если $\pi < \alpha \le 2\pi$.

Положим

$$\gamma_0 = \{(x, y) \in \partial D \backslash \{0\} : y = 0\}, \quad \gamma_\alpha = \{(x, y) \in \partial D \backslash \{0\} : \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \alpha\}.$$

Для угловых областей справедлива теорема.

Теорема 8.1.2. *Пусть* φ *— обобщенное решение уравнения* (8.1.1) *в круговом секторе* D *раствора* $0 < \alpha \le 2\pi$, *удовлетворяющее граничным условиям*

$$\lim_{(x,y)\to\gamma_\alpha} \varphi(x, y) = \lim_{(x,y)\to\gamma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = 0. \tag{8.1.6}$$

Предположим, что для некоторого $s > \pi/\alpha$ *и всех, достаточно малых* $r > 0$ *выполнено*

$$\operatorname{ess} \sup_{\sqrt{x^2+y^2}=r} |\nabla\varphi(x, y)| \le \exp\left\{-\frac{1}{r^s}\right\}. \tag{8.1.7}$$

Тогда $\varphi \equiv 0$ *в* D.

8.2 Комплексный потенциал

Пусть D — односвязная область. Наряду с потенциальной функцией $\varphi(x, y)$, рассмотрим функцию тока $\psi(x, y)$, связанную с φ соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \psi_x & = & -\delta\varphi_y \\ \psi_y & = & \delta\varphi_x \end{array} \right. . \tag{8.2.8}$$

Соотношение (8.1.3) влечет, что для любого замкнутого спрямляемого контура $C \subset D$, обладающего свойством $\operatorname{mes}_1 (C \cap D_b(\varphi)) = 0$, выполнено

$$\int\limits_C \delta(q)\ (-\varphi_y dx + \varphi_x dy) = 0.$$

Ясно, что для любой пары точек $a, b \in D$ почти все ломаные $C \subset D$, соединяющие a и b, обладают указанным свойством. Таким образом, для произвольным образом фиксированной точки $a \in D$ мы можем положить

$$\psi(x,y) = \int\limits_a^{(x,y)} \delta(q)\ (-\varphi_y dx + \varphi_x dy)\ , \tag{8.2.9}$$

и локально липшицева в D функция ψ, удовлетворяющая (8.2.8), действительно существует.

Комплекснозначная функция $\zeta = \varphi + i\psi$ называется *комплексным потенциалом.*

Рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} ds^2_\Omega\ &= d\varphi^2 + d\psi^2 = (\varphi_x dx + \varphi_y dy)^2 + (\psi_x dx + \psi_y dy)^2 = \\ &= (\varphi_x^2 + \delta^2 \varphi_y^2)\, dx^2 + 2(1-\delta^2)\,\varphi_x\varphi_y\, dxdy + (\varphi_y^2 + \delta^2\varphi_x^2)\, dy^2 \equiv \\ &\equiv g_{11}\, dx^2 + 2g_{12}\, dxdy + g_{22}\, dy^2. \end{aligned}$$

Данная форма положительно определена в каждой точке, где $|\nabla\varphi| > 0$.

Рассмотрим абстрактную поверхность (D, ds_Ω). Обозначим через g^{ij}, $(i,j = 1,2)$, коэффициенты матрицы (g^{ij}), обратной к матрице (g_{ij}). Положим $g = \det\,(g_{ij})$. Мы имеем

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \delta^2\, |\nabla\phi|^4$$

и, далее, в силу соотношений

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g},$$

уравнение Лапласа – Бельтрами для гармонических в метрике ds_Ω функций $u(x,y)$ переписываем в виде

$$\left(\sqrt{g}\, g^{12}\, \frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{g}\, g^{11}\, \frac{\partial u}{\partial x}\right)'_x + \left(\sqrt{g}\, g^{12}\, \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{g}\, g^{22}\, \frac{\partial u}{\partial y}\right)'_y = 0. \tag{8.2.10}$$

Здесь обозначено

$$
\begin{aligned}
g^{11} &= \frac{\varphi_y^2 + \delta^2\,\varphi_x^2}{\delta^2\,|\nabla\varphi|^4},\\
g^{12} &= g^{21} = -\frac{(1-\delta^2)\varphi_x\,\varphi_y}{\delta^2\,|\nabla\varphi|^4},\\
g^{22} &= \frac{\varphi_x^2 + \delta^2\,\varphi_y^2}{\delta^2\,|\nabla\varphi|^4}.
\end{aligned}
\tag{8.2.11}
$$

Система Коши – Римана в метрике ds_Ω тогда принимает вид

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial x} &= \dfrac{(1-\delta^2)\varphi_x\,\varphi_y}{\delta\,|\nabla\varphi|^2}\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\varphi_x^2+\delta^2\,\varphi_y^2}{\delta\,|\nabla\varphi|^2}\,\dfrac{\partial u}{\partial y},\\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial y} &= \dfrac{\varphi_y^2+\delta^2\,\varphi_x^2}{\delta\,|\nabla\varphi|^2}\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{(1-\delta^2)\varphi_x\,\varphi_y}{\delta\,|\nabla\varphi|^2}\,\dfrac{\partial u}{\partial y}
\end{cases}
\tag{8.2.12}
$$

(см., например, [121, глава 1, §1]).

Несложно проверить следующее утверждение.

Лемма 8.2.1. *Функция $\zeta(x,y)$ голоморфна в метрике ds_Ω.*

Для **доказательства** достаточно заметить, что при $u=\varphi$ и $v=\psi$ система (8.2.12) обращается в систему (8.2.8).

8.3 Отображение на полосу

Пусть D — односвязная область, отличная от $\mathbf{R}^2$, и пусть φ — обобщенное решение уравнения (8.1.1). Рассмотрим произвольное семейство замкнутых, локально спрямляемых дуг $\gamma\in\Gamma$, лежащих в области D и таких, что $\mathrm{mes}_1\,(\gamma\cap D_b(\varphi))=0$. Измеримая по Лебегу, локально ограниченная, неотрицательная функция $\rho(x,y)$, определенная в области D, является допустимой для семейства Γ в метрике ds_Ω, если для любой дуги $\gamma\in\Gamma$ выполнено

$$
\int\limits_\gamma \rho(x,y)\,ds_\Omega \ge 1. \tag{8.3.13}
$$

Величина

$$\mathrm{mod}_\Omega \Gamma = \inf \int\limits_D \rho^2(x,y)\, d\sigma_\Omega, \tag{8.3.14}$$

где точная нижняя грань берется по всем допустимым для Γ в метрике поверхности (D, ds_Ω) функциям $\rho(x,y)$, является модулем семейства Γ в метрике (D, ds_Ω).

Фиксируем три простых конца e', e_0 и e'' на границе области D, расположенных в порядке положительного обхода $\tilde{D}\setminus D$. Предположим, что в окрестности простого конца e' поверхность (D, ds_Ω) обладает свойством (7.2.14). Предположим дополнительно, что

$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_A \delta(|\nabla\varphi(x,y)|) \leq \operatorname*{ess\,sup}_A \delta(|\nabla\varphi(x,y)|) < \infty \tag{8.3.15}$$

для всякого компакта $A \subset \widetilde{D} \setminus \{e'\}$.

Ясно, что условие (8.3.15) влечет выполнение (7.2.14) в каждом простом конце $e \in \widetilde{D} \setminus \{e'\}$.

Пусть $f : D \to \mathbf{R}^2$ — однолистное, конформное (в метрике (D, ds_Ω)) отображение со свойствами

$$f(D) = \Pi, \quad \Pi = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}\},$$

и

$$\lim_{(x,y)\to e'} u(x,y) = +\infty, \quad f(e_0) = (0,1), \quad \lim_{(x,y)\to e''} u(x,y) = -\infty. \tag{8.3.16}$$

Фиксируем локально липшицеву функцию $h : D \to [0,1]$, для которой

$$\lim_{(x,y)\to e'} h(x,y) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to \widetilde{e_0e''}} h(x,y) = 1. \tag{8.3.17}$$

Предположим, что h обладает также свойством (7.2.13).

Для произвольной дуги $E_h(t)$, $0 < t < 1$, символом $\mathcal{E}(t)$ обозначим семейство всевозможных локально спрямляемых дуг γ, $\mathrm{mes}_1\,(\gamma \cap D_b(\varphi)) = 0$, таких, что $[\gamma]_{\widetilde{D}}$ разделяет в $\widetilde{D}$ конец e' и дугу $\widetilde{e_0e''}$ так, что $[\gamma]_{\widetilde{D}} \cap [E_h(t)]_{\widetilde{D}} \neq \emptyset$. Пусть $\Lambda(t)$ — семейство дуг, разделяющих $E_h(t)$ и $\widetilde{e_0e''}$ в D.

Следующее утверждение представляет собой простое следствие теоремы типа Альфорса – Варшавского о конформных отображениях полос.

Лемма 8.3.1. *В описанных предположениях для всякого однолистного и конформного в метрике поверхности* (D, ds_Ω) *отображения* f *с нормировкой* (8.3.16) *выполнено*

$$u(x,y) \le \pi\ (\mathrm{mod}_\Omega \Lambda(t) + \mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}(t)) \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in E_h(t) \tag{8.3.18}$$

и

$$\mathrm{osc}\,(u(x,y), E_h(t)) \le 2\pi\, \mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}(t). \tag{8.3.19}$$

Доказательство ограничивается ссылкой на теорему 7.4.1 □

8.4 Проблема единственности

Определим класс голоморфных функций *ограниченного вида* A как класс функций, регулярных в круге $|z| < R$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{\rho<R} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi < \infty \quad (\ln^+ x = \max\{\ln x, 0\})\,.$$

При этом обозначается

$$A(f,\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi\,, \quad A(f) = \sup_{\rho<R} A(f,\rho)\,.$$

Важную роль играет следующая лемма:

Лемма 8.4.1. *Если функция* $f(z)$ *регулярна в круговом кольце* $r_1 < |z| < r_2$, *то функции*

$$A(f,z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(z\, e^{i\varphi})|\, d\varphi\,,$$

$$L(f,z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(z\, e^{i\varphi})|\, d\varphi$$

субгармоничны в кольце $r_1 < |z| < r_2$ *и зависят только от* $|z|$.

Доказательство. Ограничимся доказательством для $A(f,z)$. Заметим сначала, что функция $A(f,|z|e^{i\theta})$ не зависит от θ, поскольку интеграл от периодической функции по периоду не меняется от изменения начала промежутка интегрирования.

Далее, интеграл для $A(f,z)$ есть предел интегральных сумм

$$S_n(z) = \frac{1}{2\pi}\sum \ln^+ |f(ze^{i\varphi_k})|\,(\varphi_{k+1}-\varphi_k)\,,$$

причем это стремление к пределу равномерно относительно переменной z в любом круговом кольце, лежащем внутри исходного кольца. Каждая из функций $S_n(z)$ является субгармонической как сумма субгармонических функций, а предел этих сумм $A(f,z)$ также субгармоничен. $\square$

Следующее утверждение непосредственно вытекает из принципа максимума для субгармонических функций:

Следствие 8.4.1. *Если $f(z)$ регулярна в круге $|z|<R$, то функции $A(f,z)$ и $L(f,z)$ неубывают как функции переменной $\rho=|z|$.*

Формулируемая ниже теорема утверждает, что функции ограниченного вида не могут сколь угодно быстро стремиться к нулю при стремлении переменной z к окружности $|z|=R$.

Теорема 8.4.1. *Если $f(z)$ – функция ограниченного вида в круге $|z|<R$ и если*

$$\lim_{\rho\to R}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(\rho\, e^{i\varphi})|\,d\varphi = -\infty\,,$$

то $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Так как $\ln^+ x \ge \ln x$, то принадлежность f классу A влечет ограниченность сверху интеграла $A(f,\rho)$. Следствие 8.4.1 гарантирует, что этот интеграл является неубывающей функцией ρ. Тем самым, условие теоремы может быть выполненным тогда и только тогда, когда интеграл не зависит от ρ и тождественно равен $-\infty$. Это возможно лишь в случае $f(z)\equiv 0$. $\square$

Данная теорема обобщает классическую теорему единственности, которая может быть сформулирована в следующем виде:

Если функция $f(z)$ регулярна в окрестности точки $z=a$ и при $z\to a$ функция $f(z)$ стремится к нулю быстрее любой степени $z-a$, то $f(z)\equiv 0$.

Обобщением классической теоремы единственности является также и следующее утверждение.

Теорема 8.4.2. *Пусть $f(z)$ – функция ограниченного вида в круге $|z| < R$, имеющая нули в точках $z_1, z_2, \ldots$*[1]*. Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(R - |z_n|) = +\infty\,,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Предположим, что $f(z) \not\equiv 0$. Не умаляя общности можем считать, что $f(0) \neq 0$. Это ясно, поскольку в противном случае вместо $f(z)$ мы можем взять функцию $g(z) = z^{-m} f(z)$, где m – кратность нуля функции $f(z)$ в точке $z = 0$. Понятно, что функция $g(z)$ также будет являться функцией ограниченного вида.

Воспользуемся известной формулой Иенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi = \ln|f(0)| - \sum_{|z_n|<\rho} \ln\frac{\rho}{|z_n|}\,,$$

справедливой для всякой регулярной в круге $|z| \le R$ функции $f(z)$, имеющей там нули $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ (см., например, [33, глава VIII, §2]).

Переходя к пределу при $\rho \to R$, получаем

$$\lim_{\rho\to R}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi = \ln|f(0)| - \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{\rho}{|z_n|}\,.$$

Однако, при $0 < |z| < R$ выполнено

$$\ln\frac{R}{|z|} = -\ln\left(1 - \frac{R-|z|}{R}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{R-|z|}{R}\right)^n > \frac{R-|z|}{R}$$

и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{R}{|z_n|} \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R-|z_n|}{R} = +\infty\,.$$

Тем самым,

$$\lim_{\rho\to R}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi = -\infty\,,$$

[1]Кратный нуль записываем столько раз, какова его кратность.

и согласно теореме 8.4.1, имеем $f(z) \equiv 0$. $\square$

В произвольных односвязных областях плоскости эта теорема может выглядеть, к примеру, следующим образом.

Теорема 8.4.3. *Пусть D – односвязная область плоскости и $w(z)$ – какое-либо конформное отображение D на круг $|w| < 1$. Если функция $f(z)$ регулярна и ограничена в D и имеет нули в точках $z_1, z_2, \ldots$, а*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |w(z_n)|) = +\infty\,,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$g(w) = f(z(w))\,,$$

где $z(w)$ – отображение, обратное к $w(z)$. Функция $g(w)$ регулярна и ограничена в круге $|w| < 1$, имеет нули в точках $w_n = w(z_n)$. При этом выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |w_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}(1 - |w(z_n)|) = +\infty.$$

По теореме 8.4.2 имеем $g(w) \equiv 0$. $\square$

Укажем функции, иллюстрирующие точность теорем 8.4.1 и 8.4.2. Пусть $a(\varphi)$ – произвольная непрерывная функция, для которой

$$\int\limits_0^{2\pi} \ln a(\varphi)\, d\varphi > -\infty\,.$$

Несложно показать, что функция

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{R\,e^{i\varphi} + z}{R\,e^{i\varphi} - z} \ln a(\varphi)\, d\varphi \quad (|z| < R)$$

голоморфна и ограничена в круге $|z| < R$, причем

$$|f(z)| \to a(\varphi) \quad \text{при} \quad z \to R\,e^{i\varphi}\,.$$

Другой пример. Предположим, что задана произвольная последовательность $\{z_n\}$, подчиненная условиям

$$|z_n| < R\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(R - |z_n|) < \infty\,.$$

Функция

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{R(z_n-z)}{R^2-z\overline{z}_n}\,e^{-i\varphi_n}\quad(\varphi_n=\arg z_n)$$

голоморфна, не превосходит единицы в круге $|z|<R$ и $f(z_n)=0$.

Следует отметить, что в применениях теоремы 8.4.3 наибольшую трудность доставляют оценки величины $w(z_n)$ при $n\to\infty$. В этих целях могут быть использованы теоремы Альфорса и Варшавского, доказанные ранее в разделе 7.1.

Сформулируем теорему 8.4.1 в более простом виде:

Предположим, что функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ и непрерывна вплоть до его границы. Если

$$\int_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\varphi})|\,d\varphi=-\infty\,,$$

то $f(z)\equiv 0$.

При помощи вспомогательного конформного отображения данное утверждение легко переносится на другие области. Мы докажем сперва соответствующий результат для полуплоскости, придав ему еще более удобный для дальнейших применений вид.

Теорема 8.4.4. *Предположим, что функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ и непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Re} z\geq 0$. Предположим, что существует непрерывная положительная функция $\nu(t)$: $\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$, для которой*

$$\ln|f(z)|<-\nu(|z|)\quad(\operatorname{Re} z\geq 0)\,.$$

Тогда если

$$\int_1^{\infty}\frac{\nu(t)}{t^2}=+\infty\,,$$

то $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Функция

$$z=\frac{1+w}{1-w}$$

конформно отображает круг $|w|<1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$. Тем самым, функция

$$F(w)=f\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$$

голоморфна в круге $|w| < 1$ и непрерывна вплоть до его границы. Мы имеем

$$\int_0^{2\pi} \ln|F(e^{i\varphi})|\,d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\frac{1+e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}}\right|\,d\varphi < -2\int_0^{\pi} \nu\left(\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\,d\varphi\,.$$

Однако,

$$\int_0^{\pi} \nu\left(\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\,d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \nu\left(\mathrm{ctg}\theta\right)\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{\nu(t)dt}{1+t^2} \geq 2\int_1^{\infty} \frac{\nu(t)dt}{1+t^2} \geq \int_1^{\infty} \frac{\nu(t)}{t^2}dt = +\infty\,.$$

Согласно теореме 8.4.1 имеем $F(w) \equiv 0$ и, значит, $f(z) \equiv 0$. $\square$

Аналогично устанавливается.

Теорема 8.4.5. *Пусть $f(z)$ – регулярна в полосе $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$, непрерывна в ее замыкании и подчинена неравенству*

$$\ln|f(x+iy)| < -\nu(x) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)\,,$$

где $\nu(t)$ – положительная непрерывная функция. Тогда если

$$\int_0^{\infty} \nu(t)\,e^{-t}dt = +\infty\,,$$

то $f(z) \equiv 0$.

С использованием теоремы Варшавского можно доказать подобное утверждение для полосообразных областей достаточно общего вида. Именно, пусть D – область, задаваемая неравенствами

$$\varphi(x) - \frac{1}{2}\theta(x) < y < \varphi(x) + \frac{1}{2}\theta(x) \quad (-\infty < x < \infty)\,,$$

где $\varphi(x)$ и $\theta(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции со свойствами

$$|\varphi'(x)| < M\,, \quad |\theta'(x)| < M\,, \quad \int_0^{\infty} \frac{\theta'^2(x)}{\theta(x)}dx < +\infty\,.$$

Теорема 8.4.6. *Предположим, что функция $f(z)$ голоморфна в области D, непрерывна в $\overline{D}$ и удовлетворяет условию*

$$\ln|f(x+iy)| < -\nu(x) \quad (x+iy \in D)\,,$$

где $\nu(x)$ – положительная непрерывная неубывающая функция. Пусть

$$s(x) = \pi \int\limits_0^x \frac{1+\varphi'^2(t)}{\theta(t)}\,dt\,.$$

Тогда если

$$\int\limits_0^\infty \nu(x)e^{-s(x)}\frac{dx}{\theta(x)} = +\infty\,,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Обозначим через $w(x)$ функцию, конформно отображающую область D на полосу $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$ так, что

$$\operatorname{Re} w \to \pm\infty \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z \to \pm\infty\,.$$

При данных предположениях мы вправе воспользоваться теоремой Варшавского 7.1.2. В принятых обозначениях неравенство Варшавского имеет вид

$$\operatorname{Re} w(x+iy) - \operatorname{Re} w(a+ib) < s(x) - s(a) + C' \quad (x > a)\,,$$

где постоянная C' не зависит от x, y, a, b. Полагая

$$a = 0\,, \quad C = C' + \sup_b \operatorname{Re} w(ib)\,,$$

приходим к неравенству

$$\operatorname{Re} w(x+iy) < s(x) + C' \quad (x > 0)\,. \tag{8.4.20}$$

Обозначим через $z(w)$ функцию, обратную к $w(z)$ и, далее,

$$x(u) = \min \operatorname{Re} z(w) \quad \left(\operatorname{Re} w = u,\ \ |\operatorname{Im} w| \le \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Выбирая в неравенстве (8.4.20) в качестве w то самое значение, для которого

$$\operatorname{Re} w = u \quad \operatorname{Re} z(w) = x(u)\,,$$

получаем

$$u < s(x(u)) + C\,. \tag{8.4.21}$$

Функция

$$F(w) = f(z(w)) \quad \left(|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}\right)$$

голоморфна, непрерывна в замкнутой полосе и удовлетворяет неравенству

$$\ln|F(u+iv)| = \ln|f(z(u+iv))| < -\nu(x(u))\,,$$

поскольку $\nu(x)$ есть неубывающая функция. На основании неравенства (8.4.21) выводим

$$x(u) < k(u-C)\,,$$

где $k(u)$ – функция, обратная к $s(x)$. При этом ясно, что функция $k(u)$ – неубывающая и что $k(u) \to +\infty$ при $u \to +\infty$. Отсюда находим

$$\ln|F(u+iv)| < -\nu(k(u-C))$$

и

$$e^C \int_C^\infty \nu(k(u-C))e^{-u}du =$$

$$= \int_0^\infty \nu(x)e^{-s(x)}s'(x)\,dx > \int_0^\infty \nu(x)e^{-s(x)}\frac{dx}{\theta(x)} = +\infty\,.$$

По теореме 8.4.5 заключаем, что $F(w) \equiv 0$. Это означает, что $f(z) \equiv 0$, что и требуется. □

8.5 Теоремы Фрагмена – Линделефа

Нам потребуется также следующая версия теоремы Фрагмена – Линделефа.

Теорема 8.5.1. *Пусть $F : \Pi \to \mathbf{R}^2$ — голоморфна в Π и удовлетворяет неравенству*

$$\ln|F(u,v)| < -\nu(u) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}\right), \tag{8.5.22}$$

где $\nu(u)$ — положительная непрерывная неубывающая функция. Если

$$\int^{+\infty} \nu(u)\,e^{-u}du = +\infty, \tag{8.5.23}$$

то $F(u,v) \equiv 0$.

Для **доказательства** достаточно заметить, что в случае евклидовой метрики и предположении непрерывности F вплоть до границы данное утверждение содержится в теореме 8.4.5. В общем случае доказательство практически не меняется — достаточно рассмотреть F в более узкой полосе $\{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : |v| < c < \frac{\pi}{2}\}$, $c \equiv \mathrm{const}$, и перейти к пределу. $\square$

Следующая теорема типа Фрагмена – Линделефа для голоморфных в метрике ds_Ω функций носит подготовительный характер.

Теорема 8.5.2. *Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ — односвязная область, отличная от $\mathbf{R}^2$. Пусть e', e_0 и e'' — простые концы на $\partial\widetilde{D}$ и $h : D \to \mathbf{R}$ — локально липшицева функция, подчиненная условиям* (8.3.17), (7.2.13). *Предположим, что решение φ уравнения* (8.1.1) *удовлетворяет условиям* (8.3.15), (7.2.14). *Пусть $\Phi : D \to \mathbf{R}^2$ — функция, голоморфная в метрике ds_Ω и такая, что*

$$\ln|\Phi(x,y)| \le -\nu(t) \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in E_h(t) \quad (0 < t < 1) \tag{8.5.24}$$

для некоторой положительной непрерывной неубывающей функции ν.

Пусть $\tau = \theta(t)$ — строго монотонно убывающая, непрерывная на $(0,1)$ функция, $\theta(+0) = +\infty$ и

$$\pi\left(\mathrm{mod}_\Omega\,\Lambda(t) + \mathrm{mod}_\Omega\,\mathcal{E}(t)\right) \le \theta(t) \quad (0 < t < 1). \tag{8.5.25}$$

Тогда если

$$\int^{+\infty} \nu\left(\theta^{-1}(\tau)\right)\, e^{-\tau}\, d\tau = +\infty, \tag{8.5.26}$$

то $\Phi(x,y) \equiv 0$.

Доказательство. Обозначим через f однолистное, конформное в метрике ds_Ω отображение, приводящее квадратичную форму ds_Ω^2 к виду $\lambda(u,v)\,(du^2 + dv^2)$. В силу предположений (7.2.14), (8.3.15), мы можем предполагать, что $f(D) = \Pi$ и удовлетворяет условиям нормировки (8.3.16).

Положим $F(u,v) = \Phi \circ f^{-1}(u,v)$. Данная функция голоморфна в полосе Π в евклидовой метрике. Условие (8.5.24) влечет, что

$$\sup_{D_t} |\Phi(x,y)| \le e^{-\nu(t)},$$

где

$$D_t = \{(x,y) \in D : h(x,y) \le t\}.$$

Таким образом,

$$\sup_{f(D_t)} |\Phi \circ f^{-1}(u,v)| \le e^{-\nu(t)}.$$

Однако, в силу (8.3.18) и (8.5.25), выполнено

$$u \le \theta(t) \quad \text{для всех} \quad (u,v) \in D \setminus f(D_t).$$

Функция $\nu(t)$ неубывает, а потому при всех $(\tau, v) \in \Pi$ имеем

$$|\Phi \circ f^{-1}(\tau, v)| \le e^{-\nu\left(\theta^{-1}(\tau)\right)}$$

и, далее,

$$\ln|F(\tau, v)| \le -\nu_1(\tau), \quad \text{где} \quad \nu_1(\tau) = \nu\left(\theta^{-1}(\tau)\right).$$

Условие (8.5.26) влечет

$$\int^{+\infty} \nu_1(\tau) e^{-\tau} = \infty.$$

По теореме 8.5.1 заключаем, что $F(u,v) \equiv 0$. Тем самым, $\Phi(x,y) \equiv 0$ и теорема доказана. $\Box$

8.6 Две леммы

Фиксируем t, $0 < t < 1$, и подобласть D_t, определенную в предыдущем разделе. Оценим $\mathrm{mod}_\Omega \Lambda(t)$. Рассмотрим семейство $\Lambda^*(t)$ всевозможных локально спрямляемых дуг γ лежащих в $D \setminus D_t$, удовлетворяющих условию

$$\mathrm{mes}\,(\gamma \cap D_b(\varphi)) = 0$$

и соединяющих в $D \setminus D_t$ граничную дугу $\widetilde{e_0 e''}$ с $E_h(t)$. В соответствии с (1.6.18), мы имеем

$$\mathrm{mod}_\Omega \Lambda(t) = \frac{1}{\mathrm{mod}_\Omega \Lambda^*(t)}. \tag{8.6.27}$$

Далее, мы воспользуемся известной связью между модулем и емкостью конденсатора 1.8.1. Мы имеем

$$\mathrm{mod}_\Omega \Lambda^*(t) = \mathrm{cap}_\Omega \left(E_h(t), \widetilde{e_0 e''}; D \setminus D_t\right), \tag{8.6.28}$$

где

$$\mathrm{cap}_\Omega(E_h(t), \widetilde{e_0 e''}; D \setminus D_t) = \inf \iint_{D \setminus D_t} \left(g^{11}\xi_x^2 + 2g^{12}\xi_x\xi_y + g^{22}\xi_y^2\right)\, d\sigma_\Omega$$

и точная нижняя грань берется по всем локально липшицевым функциям $\xi : D \setminus D_t \to \mathbf{R}$, для которых

$$\xi\,\Big|_{\widetilde{e_0 e''}} = 1, \quad \xi\,\big|_{E_h(t)} = 0\,.$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{D\setminus D_t} \left(g^{11}\xi_x^2 + 2g^{12}\xi_x\xi_y + g^{22}\xi_y^2\right)\, d\sigma_\Omega =$$

$$\int\limits_{D\setminus D_t} \left(\frac{\varphi_y^2+\delta^2\varphi_x^2}{\delta|\nabla\phi|^2}\xi_x^2 - 2\frac{1-\delta^2}{\delta|\nabla\varphi|^2}\varphi_x\varphi_y\xi_x\xi_y + \frac{\varphi_x^2+\delta^2\varphi_y^2}{\delta|\nabla\phi|^2}\xi_y^2\right)\, dxdy =$$

$$\int\limits_{D\setminus D_t} \left\{\frac{\varphi_y^2\xi_x^2 - 2\varphi_x\varphi_y\xi_x\xi_y + \varphi_x^2\xi_y^2}{\delta|\nabla\varphi|^2} + \delta\,\frac{\varphi_x^2\xi_x^2 + 2\varphi_x\varphi_y\xi_x\xi_y + \varphi_y^2\xi_y^2}{|\nabla\varphi|^2}\right\} dxdy =$$

$$\int\limits_{D\setminus D_t} \left\{\delta\left\langle\nabla\xi, \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right\rangle^2 + \frac{1}{\delta}\left\langle\nabla\xi, \frac{(\nabla\varphi)^\perp}{|\nabla\varphi|}\right\rangle^2\right\}\, dxdy,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение и $(\cdot)^\perp$ — ортогональное дополнение вектора.

Замечая теперь, что

$$\delta\left\langle\nabla\xi, \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right\rangle^2 + \frac{1}{\delta}\left\langle\nabla\xi, \frac{(\nabla\varphi)^\perp}{|\nabla\varphi|}\right\rangle^2 \geq$$

$$\geq \min\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right)\, \left\{\left\langle\nabla\xi, \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right\rangle^2 + \left\langle\nabla\xi, \frac{(\nabla\varphi)^\perp}{|\nabla\varphi|}\right\rangle^2\right\} =$$

$$= \min\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right)\, |\nabla\xi|^2,$$

мы получаем

$$\int\limits_{D\setminus D_t} \left(g^{11}\xi_x^2 + 2g^{12}\xi_x\xi_y + g^{22}\xi_y^2\right)\, d\sigma_\Omega \geq \int\limits_{D\setminus D_t} \min\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right)\, |\nabla\xi|^2\, dxdy.$$

Учитывая (8.6.27) и (8.6.28), приходим к утверждению

Лемма 8.6.1. *Имеет место оценка*

$$\mathrm{mod}_\Omega \Lambda(t) \le 1 \Big/ \inf_\xi \iint_{D \setminus D_t} \min\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right) |\nabla \xi|^2 \, dxdy \,. \tag{8.6.29}$$

Укажем другую полезную оценку для модуля семейства дуг в метрике ds_Ω. Для произвольного семейства Γ локально спрямляемых дуг γ мы имеем

$$\mathrm{mod}_\Omega \Gamma \; = \inf_{\rho \ge 0} \frac{\iint_D \rho^2(x,y)\, \delta |\nabla \varphi|^2 dxdy}{\left(\inf\limits_\gamma \int\limits_\gamma \rho(x,y)\, ds_\Omega \right)^2} =$$

$$= \inf_{\widetilde{\rho} \ge 0} \frac{\iint_D \widetilde{\rho}^2(x,y)\, \delta \, dxdy}{\left(\inf_\gamma \int\limits_\gamma \widetilde{\rho}(x,y)\, d\widetilde{s}_\Omega \right)^2},$$

где $\widetilde{\rho} = \rho \, |\nabla \varphi|$ и

$$d\widetilde{s}_\Omega^2 = \frac{\varphi_x^2 + \delta^2 \varphi_y^2}{|\nabla \varphi|^2} dx^2 + 2(1-\delta^2) \frac{\varphi_x \varphi_y}{|\nabla \varphi|^2} dxdy + \frac{\varphi_y^2 + \delta^2 \varphi_x^2}{|\nabla \varphi|^2} dy^2.$$

Легко видеть, что

$$d\widetilde{s}_\Omega^2 \; = \frac{(\varphi_x dx + \varphi_y dy)^2}{|\nabla \varphi|^2} + \frac{(\varphi_y dx - \varphi_x dy)^2}{|\nabla \varphi|^2} \ge$$

$$\ge \min(1, \delta)(dx^2 + dy^2).$$

Поэтому, полагая

$$\widetilde{\rho}(x,y) = \rho(x,y) \, \min(1, \delta)$$

и замечая, что

$$\frac{\delta}{\min(1, \delta^2)} = \max\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right),$$

приходим к соотношению

$$\frac{\iint\limits_{D} \rho^2(x,y)\, d\sigma_\Omega}{\left(\inf\limits_{\gamma} \int\limits_{\gamma} \rho(x,y)\, ds_\Omega\right)^2} \le \frac{\iint_D \widetilde{\rho}^2(x,y)\ \max(\delta, \frac{1}{\delta})\, dxdy}{\left(\inf\limits_{\gamma} \int\limits_{\gamma} \widetilde{\rho}(x,y)\, \sqrt{dx^2+dy^2}\right)^2}.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 8.6.2. *В описанных предположениях справедлива оценка*

$$\mathrm{mod}_\Omega \Gamma \le \inf_{\rho\ge 0} \frac{\iint_D \rho^2(x,y) \max\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right)\, dxdy}{\left(\inf_\gamma \int\limits_{\gamma\in\Gamma} \rho(x,y)\, \sqrt{dx^2+dy^2}\right)^2}. \tag{8.6.30}$$

8.7 Круговой сектор

Рассмотрим круговой сектор раствора α, $0<\alpha\le 2\,\pi$. Фиксируем простые концы

$$e'=(0,0), \quad e_0=(1,0), \quad e''=(\cos\alpha,\, \sin\alpha)$$

и функцию

$$h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Легко проверяется, что h удовлетворяет (7.2.13) и (8.3.17).

Далее для произвольного $0<r<1$ полагаем

$$S_D(0,r)=D\cap\left\{(x,y): x^2+y^2=r^2\right\},$$

$$B_D(0,r)=D\cap\left\{(x,y): x^2+y^2<r^2\right\}.$$

При применениях теоремы 8.5.2 наибольшую трудность составляет получение подходящей оценки $\mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}(t)$. Приведем одну из таких оценок. Фиксируем t, $0<2t<1$, и обозначим через $\mathcal{E}_1(t)$ множество всевозможных дуг $\gamma\in\mathcal{E}(t)$, расположенных в $B_D(0,2t)\setminus B_D(0,t/2)$, через $\mathcal{E}_2(t)$ — множество дуг $\gamma\in\mathcal{E}(t)\setminus\mathcal{E}_1(t)$. Мы имеем

$$\mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}(t)\le \mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}_1(t)+\mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}_2(t). \tag{8.7.31}$$

Воспользуемся леммой 8.6.2. В силу (8.6.30) имеем

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_1(t) \le \inf_{\rho\ge 0} \frac{\displaystyle\iint_D \rho^2(x,y) \max\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right) \, dxdy}{\left(\inf_\gamma \displaystyle\int\limits_{\gamma\in\mathcal{E}_1(t)} \rho(x,y)\sqrt{dx^2+dy^2}\right)^2}.$$

Полагая здесь $B_D^*(t) = B_D(0,2t)\setminus B_D(0,t/2)$ и

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{h(x,y)} & \text{при} \quad (x,y)\in B_D^*(t), \\ 0 & \text{вне} \quad B_D^*(t), \end{cases}$$

получаем

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_1(t) \le \frac{\displaystyle\iint_{B_D^*(t)} \max(\delta, 1/\delta) \; h^{-2}(x,y)\, dxdy}{\left(\inf_\gamma \displaystyle\int\limits_{\gamma\in\mathcal{E}_1(t)} h^{-1}(x,y)\sqrt{dx^2+dy^2}\right)^2}.$$

Поскольку для произвольной дуги $\gamma\in\mathcal{E}_1(t)$ выполнено

$$\int\limits_{\gamma\in\mathcal{E}_1(t)} h^{-1}(x,y)\sqrt{dx^2+dy^2} \ge \alpha,$$

приходим к оценке

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_1(t) \le \frac{1}{\alpha^2}\iint_{B_D^*(t)} \max(\delta, 1/\delta)\; \frac{dxdy}{h^2(x,y)}. \tag{8.7.32}$$

Чтобы оценить $\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_2(t)$ заметим сначала, что всякая дуга $\gamma\in\mathcal{E}_2(t)$ пересекает одновременно $S_D(0,t)$ и хотя бы одну из дуг $S_D(0,t/2)$, $S_D(0,2t)$. Отсюда заключаем, что

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_2(t) \le \mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_3(t) + \mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_4(t), \tag{8.7.33}$$

где

$$\mathcal{E}_3(t) = \{\gamma\in\mathcal{E}(t) : \gamma\cap S_D(0,t/2)\ne\emptyset\}$$

и
$$\mathcal{E}_4(t)=\{\gamma\in\mathcal{E}(t):\gamma\cap S_D(0,2t)\neq\emptyset\}\,.$$
На каждой дуге $\gamma\in\mathcal{E}_3(t)$ выберем поддугу γ^*, лежащую в области $D\cap\{t/2<h(x,y)<t\}$ и соединяющую $S_D(0,t/2)$ с $S_D(0,t)$. Пусть $\mathcal{E}_3^*(t)$ семейство всевозможных таких дуг γ^*. Легко видеть, что
$$\mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}_3(t)\le\mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}_3^*(t).$$
Выбирая теперь в (8.6.30) плотность $\rho(x,y)=1/h(x,y)$ при $(x,y)\in B_D^{**}(t)$, где $B_D^{**}(t)=B_D(0,t)\setminus B_D(0,t/2)$, и доопределяя ее нулем во всех остальных точках, мы находим
$$\mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}_3^*(t)\ \le\frac{\displaystyle\iint_{B_D^{**}(t)}\max\left(\delta,1/\delta\right)\,h^{-2}(x,y)\,dxdy}{\left(\inf\limits_{\gamma}\displaystyle\int\limits_{\gamma^*\in\mathcal{E}_3^*(t)}h^{-1}(x,y)\sqrt{dx^2+dy^2}\right)^2}\le$$
$$\le\ln^{-2}2\iint_{B_D^{**}(t)}\max\left(\delta,1/\delta\right)\,\frac{dxdy}{h^2(x,y)}.$$
Тем самым,
$$\mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}_3(t)\le\ln^{-2}2\iint_{B_D^{**}(t)}\max\left(\delta,1/\delta\right)\,\frac{dxdy}{h^2(x,y)}.\tag{8.7.34}$$
Аналогично,
$$\mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}_4(t)\le\ln^{-2}2\iint_{B_D^{**}(t)}\max\left(\delta,1/\delta\right)\,\frac{dxdy}{h^2(x,y)}.\tag{8.7.35}$$
Объединяя теперь (8.7.31) — (8.7.35), приходим к утверждению.

Лемма 8.7.1. *Если* $0<2t<1$, *то*
$$\mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}(t)\le\left(\frac{2}{\ln^2 2}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\iint_{B_D^{**}(t)}\max\left(\delta,\frac{1}{\delta}\right)\,\frac{dxdy}{x^2+y^2}.\tag{8.7.36}$$

Оценим $\mathrm{mod}_\Omega\,\Lambda(t)$. Здесь мы будем пользоваться леммой 8.6.1. Введем обозначение
$$\mu_*(t)=\inf_{D\setminus B_D(0,t)}\min\left(\delta,1/\delta\right).$$

Мы имеем

$$\inf_{\xi} \int\limits_{D \setminus B_D(0,t)} \min\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right) |\nabla \xi|^2 \, dxdy \geq$$

$$\geq \mu_*(t) \inf_{\xi} \int\limits_{D \setminus B_D(0,t)} |\nabla \xi|^2 \, dxdy = \mu_*(t) \operatorname{cap}(S_D(0,t), \widetilde{e_0 e''}; D \setminus B_D(0,t)),$$

где символом $\operatorname{cap}(A, B; C)$ обозначена обычная конформная емкость (1.8.28) конденсатора $(A, B; C)$.

Так как область D есть угол раствора $\alpha > 0$, то

$$\operatorname{cap}(S_D(0,t), \widetilde{e_0 e''}; D \setminus B_D(0,t)) = \frac{\alpha}{\ln 1/t}.$$

Тем самым, приходим к оценке

$$\inf_{\xi} \int\limits_{D \setminus B_D(0,t)} \min\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right) |\nabla \xi|^2 \, dxdy \geq \frac{\alpha \, \mu_*(t)}{\ln 1/t}. \tag{8.7.37}$$

Имеет место теорема.

Теорема 8.7.1. *Пусть D — круговой сектор раствора $0 < \alpha \leq 2\pi$ с вершиной в начале координат. Пусть φ — обобщенное решение (8.1.1), удовлетворяющее условию (8.3.15) и такое, что*

$$\int\limits_0 dt \Bigg/ \int\limits_{S_D(0,t)} (\delta + \delta^{-1}) \sqrt{dx^2 + dy^2} = +\infty. \tag{8.7.38}$$

Пусть $\Phi : D \to \mathbf{R}^2$ — функция, голоморфная в метрике ds_Ω, причем

$$\ln |\Phi(x,y)| \leq -\nu(t) \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in S_D(0,t) \quad (0 < t < 1) \tag{8.7.39}$$

для некоторой положительной непрерывной неубывающей функции ν.

Пусть $\tau = \theta(t)$ — строго монотонно убывающая, непрерывная на $(0,1)$ функция, $\theta(+0) = +\infty$ и

$$\pi \frac{\ln 1/t}{\alpha \, \mu_*(t)} + C_1 \, \mu^*(t) \leq \theta(t) \quad (0 < t < 1), \tag{8.7.40}$$

где

$$C_1 = \pi \alpha \ln 2 \left(\frac{2}{\ln^2 2} + \frac{1}{\alpha^2}\right) \quad \text{и} \quad \mu^*(t) = \sup_{B_D^{**}(t)} \max\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right).$$

Тогда если ν *удовлетворяет* (8.5.26), *то* $\Phi(x,y) \equiv 0$.

Для **доказательства** воспользуемся теоремой 8.5.2. Так как $|\nabla h| \equiv 1$, то мы можем положить $\nabla h(x,y) = (\cos\beta, \sin\beta)$. В силу (8.2.11) имеем

$$\lambda_h(t) = \int\limits_{S_D(0,t)} (g^{11}\cos^2\beta + 2g^{12}\cos\beta\,\sin\beta + g^{22}\sin^2\beta)\sqrt{g}\,\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$\le \int\limits_{S_D(0,t)} (\delta+\delta^{-1})\sqrt{dx^2+dy^2}\,.$$

Тем самым, условие (7.2.14) выполнено, если выполнено (8.7.38).

Заметим теперь, что при $0 < 2t < 1$ из (8.7.36) следует

$$\mathrm{mod}_\Omega\,\mathcal{E}(t) \le \alpha\ln 2\left(\frac{2}{\ln^2 2} + \frac{1}{\alpha^2}\right)\mu^*(t).$$

Кроме того, объединяя оценки (8.6.29) и (8.7.37), находим

$$\mathrm{mod}_\Omega\Lambda(t) \le \frac{\ln 1/t}{\alpha\,\mu_*(t)}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{mod}_\Omega\Lambda(t) + \mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}(t) \le \frac{\ln 1/t}{\alpha\,\mu_*(t)} + \alpha\ln 2\left(\frac{2}{\ln^2 2} + \frac{1}{\alpha^2}\right)\mu^*(t)$$

и условие (8.7.40) влечет (8.5.25). □

8.8 Доказательство теоремы 8.1.2

Выберем постоянную $k > 1$ так, чтобы

$$k\frac{\pi}{\alpha} < s.$$

По лемме 8.2.1 комплексный потенциал ζ является голоморфной в области D функцией. На основании (8.1.6) легко убеждаемся, что решение $\varphi \equiv 0$ на γ_0, а сопряженная функция ψ, определяемая равенством (8.2.9), является тождественной постоянной на γ_α. Обозначим через C эту постоянную и рассмотрим голоморфную функцию $\zeta_1 = \zeta - i\,C$.

При всяком $0 < r < 1$, пользуясь (8.1.7), имеем

$$\begin{aligned}\sup_{S_D(0,r)} |\zeta_1| &\le \operatorname{osc}(\varphi, S_D(0,r)) + \operatorname{osc}(\psi - C, S_D(0,r)) \le \\ &\le \int\limits_{S_D(0,r)} |\nabla\varphi| \sqrt{dx^2+dy^2} + \int\limits_{S_D(0,r)} |\nabla\psi| \sqrt{dx^2+dy^2} \le \\ &\le \alpha r \exp\left\{-\frac{1}{r^s}\right\} + \alpha r \exp\left\{-\frac{1}{r^s}\right\} \sup_{S_D(0,r)} \delta(|\nabla\varphi|).\end{aligned}$$

Условие (8.1.7) влечет, что $\nabla\varphi(x,y) \to 0$ при $(x,y) \to 0$. Так как коэффициент $\delta(q)$ в (8.1.1) является непрерывной функцией и $\delta(0) = 0$, то мы можем считать, что при достаточно малых $t > 0$ величины

$$\sup_{S_D(0,t)} \delta(|\nabla\varphi|), \quad \frac{1}{\mu_*(t)}, \quad \text{и} \quad \mu^*(t)$$

не превосходят k. Поэтому при достаточно малых $t > 0$ выполнено

$$\sup_{S_D(0,t)} |\zeta_1| \le 2\,\alpha\, t\, k\, \exp\left\{-\frac{1}{t^s}\right\} \le \exp\left\{-\frac{1}{t^{s_1}}\right\},$$

где s_1 — некоторая постоянная,

$$k\frac{\pi}{\alpha} < s_1 < s.$$

Воспользуемся теоремой 8.7.1. Предположение (8.7.38) следует из ограниченности $\delta + \delta^{-1}$ в окрестности точки 0. Условие (8.7.39) вытекает из (8.1.7) с функцией

$$\nu(t) = \frac{1}{t^{s_1}}.$$

Далее находим

$$\pi \frac{\ln 1/t}{\alpha\, \mu_*(t)} + C_1\, \mu^*(t) \le \pi\, k \frac{\ln 1/t}{\alpha} + C_1\, k \equiv \theta(t).$$

Замечая теперь, что для обратной функции

$$t = \theta^{-1}(\tau) = \exp\left\{-\frac{\alpha}{\pi} \frac{\tau - C_1\, k}{k}\right\}$$

справедливо

$$\int^{+\infty} \nu\left(\theta^{-1}(\tau)\right)\, e^{-\tau}\, d\tau = \int_0 d\tau \Bigg/ \tau^{1+\, s_1 - \dfrac{k\pi}{\alpha}} = +\infty,$$

убеждаемся в (8.5.26).

Наше утверждение следует теперь из теоремы 8.7.1. □

8.9 Полуполоса

Здесь рассуждения близки к предыдущим, поэтому ограничимся лишь узловыми моментами. Рассмотрим полуполосу $\Pi = \{(x, y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \hbar\}$. Зафиксируем простые концы $e'' = (0, 0)$, $e_0 = (0, 1)$, $e' = \infty$ и функцию

$$h(x) = \frac{1}{1 + x}.$$

Легко видеть, что данная функция удовлетворяет условиям (7.2.13) и (8.3.17). Для произвольного $0 < t < +\infty$ обозначаем

$$S_\Pi(t) = \Pi \cap \{(x, y) : h(x) = t\}, \quad B_\Pi(t) = \Pi \cap \{(x, y) : h(x) < t\}.$$

Оценим $\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}(t)$. Фиксируем постоянные $\Delta > 0$ и $t > 0$ так, чтобы $0 < \Delta < t$. Обозначим через $\mathcal{E}_1(t)$ множество всевозможных дуг $\gamma \in \mathcal{E}(t)$, расположенных в $B_\Pi(t + \Delta) \setminus B_\Pi(t - \Delta)$, через $\mathcal{E}_2(t)$ — множество дуг $\gamma \in \mathcal{E}(t) \setminus \mathcal{E}_1(t)$. Мы имеем

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}(t) \le \mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_1(t) + \mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_2(t). \tag{8.9.41}$$

Полагая здесь $Q^*_\Pi(t) = B_\Pi(t + \Delta) \setminus B_\Pi(t - \Delta)$ и

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad (x, y) \in Q^*_\Pi(t), \\ 0 & \text{вне} \quad Q^*_\Pi(t)\,, \end{cases}$$

как и выше, в разделе 8.7, получаем

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_1(t) \le \frac{\displaystyle\iint_{Q^*_\Pi(t)} \max\left(\delta, 1/\delta\right)\, dxdy}{\left(\inf_\gamma \displaystyle\int\limits_{\gamma \in \mathcal{E}_1(t)} \sqrt{dx^2 + dy^2}\right)^2}.$$

Поскольку для произвольной дуги $\gamma \in \mathcal{E}_1(t)$ выполнено

$$\int\limits_{\gamma\in\mathcal{E}_1(t)} \sqrt{dx^2+dy^2} \geq \hbar,$$

приходим к оценке

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_1(t) \leq \frac{1}{\hbar^2} \iint_{Q^*_\Pi(t)} \max(\delta, 1/\delta)\ dxdy. \tag{8.9.42}$$

Чтобы оценить $\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_2(t)$ заметим теперь, что всякая дуга $\gamma \in \mathcal{E}_2(t)$ пересекает одновременно $S_\Pi(t)$ и хотя бы одну из дуг $S_\Pi(t-\Delta)$, $S_\Pi(t+\Delta)$. Отсюда заключаем, что

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_2(t) \leq \mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_3(t) + \mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_4(t), \tag{8.9.43}$$

где

$$\mathcal{E}_3(t) = \{\gamma \in \mathcal{E}(t) : \gamma \cap S_\Pi(t-\Delta) \neq \emptyset\}$$

и

$$\mathcal{E}_4(t) = \{\gamma \in \mathcal{E}(t) : \gamma \cap S_\Pi(t+\Delta) \neq \emptyset\}.$$

На всякой дуге $\gamma \in \mathcal{E}_3(t)$ можно выбрать поддугу γ^*, лежащую в области $\Pi \cap \{t-\Delta < h(x,y) < t\}$ и соединяющую $S_\Pi(t-\Delta)$ с $S_\Pi(t)$. Пусть $\mathcal{E}^*_3(t)$ семейство всевозможных таких дуг γ^*. Легко видеть, что

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_3(t) \leq \mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}^*_3(t).$$

Выберем в (8.6.30) плотность $\rho(x,y) = 1$ при $(x,y) \in Q^{**}_\Pi(t)$, где $Q^{**}_\Pi(t) = B_\Pi(t) \setminus B_\Pi(t-\Delta)$, и доопределим ее нулем во всех остальных точках. Мы находим

$$\begin{aligned}\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}^*_3(t) \ &\leq \frac{\displaystyle\iint_{Q^{**}_\Pi(t)} \max(\delta, 1/\delta)\ dxdy}{\left(\inf\limits_\gamma \displaystyle\int\limits_{\gamma^*\in\mathcal{E}^*_3(t)} \sqrt{dx^2+dy^2}\right)^2} \leq \\ &\leq \Delta^{-2} \iint_{Q^{**}_\Pi(t)} \max(\delta, 1/\delta)\ dxdy.\end{aligned}$$

Тем самым,

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_3(t) \leq \Delta^{-2} \iint_{Q^{**}_\Pi(t)} \max(\delta, 1/\delta)\ dxdy. \tag{8.9.44}$$

Аналогично,

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}_4(t) \le \Delta^{-2} \iint_{Q^{**}_\Pi(t)} \max\left(\delta, 1/\delta\right)\, dxdy. \tag{8.9.45}$$

Объединяя теперь (8.9.41) — (8.9.45), приходим к утверждению.

Лемма 8.9.1. *Если* $0 < 2t < 1$, *то*

$$\mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}(t) \le \left(\frac{2}{\Delta^2} + \frac{1}{\hbar^2}\right) \iint_{Q^{**}_\Pi(t)} \max\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right)\, dxdy. \tag{8.9.46}$$

Оценим $\mathrm{mod}_\Omega\, \Lambda(t)$. Здесь, как и ранее, мы пользуемся леммой 8.6.1. Введем обозначение

$$\delta_*(t) = \inf_{\Pi\setminus B_\Pi(t)} \min\left(\delta, 1/\delta\right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \inf_\xi \iint_{\Pi\setminus B_\Pi(t)} \min\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right) |\nabla\xi|^2\, dxdy \; &\ge \delta_*(t) \inf_\xi \iint_{\Pi\setminus B_\Pi(t)} |\nabla\xi|^2\, dxdy = \\ &= \delta_*(t)\, \mathrm{cap}(S_\Pi(t), \widetilde{e_0 e''}; \Pi\setminus B_\Pi(t)). \end{aligned}$$

Поскольку область Π есть полуполоса ширины $\hbar > 0$ и область $\Pi\setminus B_\Pi(t)$ является прямоугольником длины $(1-t)/t$, то

$$\mathrm{cap}(S_\Pi(t), \widetilde{e_0 e''}; \Pi\setminus B_\Pi(t)) = \frac{\hbar}{(1-t)/t}.$$

Отсюда приходим к оценке

$$\inf_\xi \iint_{\Pi\setminus B_\Pi(t)} \min\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right) |\nabla\xi|^2\, dxdy \ge \frac{\hbar\, t\, \delta_*(t)}{1-t}. \tag{8.9.47}$$

Теорема 8.9.1. *Пусть* Π *— полуполоса ширины* $0 < \hbar < +\infty$. *Пусть* φ *— обобщенное решение (8.1.1), удовлетворяющее условию* (8.3.15) *и такое, что*

$$\int\limits_0 t^4\, dt \Bigg/ \int\limits_{S_\Pi(t)} \frac{\varphi_y^2 + \delta^2\, \varphi_x^2}{\delta\, |\nabla\varphi|^2}\, |dy| = +\infty. \tag{8.9.48}$$

Пусть $\Phi : \Pi \to \mathbf{R}^2$ *— функция, голоморфная в метрике* ds_Ω, *причем*

$$\ln|\Phi(x,y)| \le -\nu(t) \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in S_\Pi(t) \quad (0<t<1) \tag{8.9.49}$$

для некоторой положительной непрерывной неубывающей функции ν.

Пусть $\tau = \theta(t)$ *— строго монотонно убывающая, непрерывная на* $(0,1)$ *функция,* $\theta(+0) = +\infty$ *и*

$$\pi \frac{1-t}{\hbar\, t\, \delta_*(t)} + C_2\, \delta^*(t) \le \theta(t) \quad (0<t<1), \tag{8.9.50}$$

где

$$C_2 = \pi\hbar\Delta \left(\frac{2}{\Delta^2} + \frac{1}{\hbar^2}\right) \quad \text{и} \quad \delta^*(t) = \sup_{B^{**}_\Pi(t)} \max\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right).$$

Тогда если ν *удовлетворяет* (8.5.26), *то* $\Phi(x,y) \equiv 0$.

Доказательство. Мы пользуемся теоремой 8.5.2. Мы имеем

$$\nabla h = (-1/(1+x)^2, 0)\,.$$

В силу (8.2.11),

$$\lambda_h(t) = \frac{1}{(1+x)^4} \int\limits_{S_\Pi(t)} g^{11}\sqrt{g}\,\sqrt{dx^2+dy^2} \le$$

$$\le \frac{1}{(1+x)^4} \int\limits_{S_\Pi(t)} \frac{\varphi_y^2 + \delta^2\,\varphi_x^2}{\delta\,|\nabla\varphi|^2}|dy|\,.$$

Тогда (7.2.14) выполняется, если выполняется (8.9.48).

Из (8.9.46) вытекает, что

$$\mathrm{mod}_\Omega\, \mathcal{E}(t) \le \hbar\Delta\left(\frac{2}{\Delta^2} + \frac{1}{\hbar^2}\right)\,\delta^*(t).$$

Объединяя оценки (8.6.29) и (8.9.47), получаем

$$\mathrm{mod}_\Omega\Lambda(t) \le \frac{1-t}{\hbar\, t\, \delta_*(t)}.$$

Тем самым,

$$\mathrm{mod}_\Omega\Lambda(t) + \mathrm{mod}_\Omega\mathcal{E}(t) \le \frac{1-t}{\hbar\, t\, \delta_*(t)} + \hbar\Delta\left(\frac{2}{\Delta^2} + \frac{1}{\hbar^2}\right)\,\delta^*(t)$$

и на основании (8.9.50) заключаем о справедливости (8.5.25). $\square$

8.10 Доказательство теоремы 8.1.1

Выберем постоянную $k > 1$ так, чтобы

$$k\frac{\pi}{\hbar} < s.$$

Согласно лемме 8.2.1 комплексный потенциал Ω голоморфен в Π. В силу (8.1.4) убеждаемся, что $\varphi \equiv 0$ при $y = \hbar$, а $\psi \equiv C$, $C = \mathrm{const}$, при $y = 0$. Положим $\Omega_1 = \Omega - i\,C$.

При всяком $0 < t < 1$ на основании (8.1.5) имеем

$$\begin{aligned}\sup_{S_\Pi(t)} |\zeta_1| &\le \operatorname{osc}(\varphi, S_\Pi(t)) + \operatorname{osc}(\psi - C, S_\Pi(t)) \le \\ &\le \int\limits_{S_\Pi(t)} |\nabla\varphi|\,|dy| + \int\limits_{S_\Pi(t)} |\nabla\psi|\,|dy| \le \\ &\le \hbar \exp\{-\exp\{st\}\} + \hbar \exp\{-\exp\{st\}\} \sup_{S_\Pi(t)} \delta(|\nabla\varphi|).\end{aligned}$$

Из (8.1.5) вытекает, что $\nabla\varphi(x,y) \to 0$ при $x \to +\infty$. Поскольку коэффициент $\delta(q)$ в (8.1.1) непрерывен и $\delta(0) = 0$, то при достаточно малых $t > 0$ величины

$$\sup_{S_\Pi(t)} \delta(|\nabla\varphi|), \quad \delta^*(t) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\delta_*(t)}$$

не превосходят k. Тем самым, при малых $t > 0$ получаем

$$\sup_{S_\Pi(t)} |\zeta_1| \le 2\hbar\, k\, \exp\{-\exp\{st\}\}.$$

Воспользуемся теоремой 8.5.2. Выполнение (8.9.48) при $x = +\infty$ очевидно. Требование (8.9.49) следует из (8.1.5) с функцией

$$\nu(t) = -\exp\frac{s(1-t)}{t}.$$

Далее находим

$$\pi\frac{1-t}{\hbar\, t\, \delta_*(t)} + C_2\, \delta^*(t) \le \pi\, k\frac{1-t}{\hbar t} + C_2\, k \equiv \theta(t).$$

Заметим теперь, что для обратной функции

$$t = \theta^{-1}(\tau) = \left(1 + \frac{\hbar}{\pi k}(\tau - C_2 k)\right)^{-1}$$

выполнено (8.5.26).

Необходимое утверждение вытекает из теоремы 8.5.2. □

Задачи: 1) Рассмотреть вопросы стабилизации решений в "угловых"и "полосообразных"областях общего вида. 2) Рассмотреть проблему допустимой скорости стабилизации для решений нелинейных уравнений высокого порядка.

Глава 9

Критические точки решения

Доказывается аналог теоремы Ниче для решений уравнений типа минимальной поверхности в "узких" областях, даются оценки суммарного топологического индекса критических точек решения.

9.1 Проблема Ниче

Хорошо известно следующее наблюдение И.И.С. Ниче [200]. *Пусть* $D \subset \mathbf{R}^2$ – *угол раствора* $\alpha > 0$. *Пусть* $u(x)$ – *решение уравнения минимальной поверхности* (2.3.14) *в области* D*, имеющее на границе* ∂D *нулевые данные Дирихле. Тогда, если* $\alpha < \pi$*, то* $u(x) \equiv 0$ *в* D*.*

Подчеркнем, что никаких априорных ограничений на рост решения при $0 < \alpha < \pi$ не предполагается. Тем самым, вместо классического высказывания типа альтернативы Фрагмена – Линделефа здесь справедливо более сильное утверждение. При $\alpha = \pi$ имеет место принцип Фрагмена – Линделефа в обычной форме для полуплоскости (см. [162], [21], [229]).

Доказательство данного утверждения совсем просто. Ниче заметил, что при $\alpha < \pi$ существуют специальные решения $\varphi(x)$ уравнения (2.3.14), обращающиеся в нуль на сторонах угла D и имеющие бесконечный градиент на некоторых дугах, соединяющих стороны D. Рассуждения завершаются применением принципа максимума к разности решений $u(x) - \varphi(x)$.

Специальные решения $\varphi(x)$ для угловых областей D строятся Ниче в [200], на основе поверхности Эннепера. В общем случае задача о существовании подобных решений является весьма трудной, что послужило, по-видимому, главным препятствием на пути доказательства указанного утверждения для решений в областях с криволинейными границами сколь либо общего вида.

В работе [74] нами было предложено другое объяснение эффекту Ниче, пригодное для областей с криволинейными границами. Вкратце, наш подход заключается в следующем. Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – односвязная область. Положим

$$v(x) = \int -\frac{u'_{x_2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}dx_1 + \frac{u'_{x_1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}dx_2\,.$$

Данная функция однозначна, а функция $u(x) + i\,v(x)$ голоморфна в метрике поверхности, описываемой уравнением $x_3 = u(x_1, x_2)$. Предположим, что область D неограничена и решение $u(x) = 0$ на ∂D. Предположим также, что нам удалось доказать для $u(x) + i\,v(x)$ принцип Фрагмена – Линделефа. Тогда функция $v(x)$ должна быть либо тождественной постоянной, либо достаточно быстро расти при $x \to \infty$ вдоль области D. При этом скорость роста функции $v(x)$ может быть сколь угодно большой, если только область D достаточно "узка"в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbf{R}^2$. Однако $|\nabla v(x)| < 1$ всюду в D, и $v(x)$ не может возрастать слишком быстро (к примеру, если D – угол, то возрастать быстрее линейной функции). Таким образом, *утверждение Ниче должно иметь место в таких областях, в которых гипотетический принцип Фрагмена – Линделефа для $v(x)$ в D входит в противоречие с ограничением $|\nabla v(x)| < 1$ всюду в D.*

Предложенная схема рассуждений оказывается эффективной как в случае нулевых граничных данных Дирихле, так и случае нулевых граничных данных Неймана, а также распространяется на решения уравнений типа минимальной поверхности.

Аналог теоремы Ниче для решений уравнений типа минимальной поверхности в областях с криволинейными границами позволяет доказать следующее утверждение, отражающее своеобразие уравнений данного класса.

Всякое целое[1] *решение $u(x)$ уравнения типа минимальной поверхности имеет конечное число критических точек $a_1, a_2, \ldots, a_N$, причем*

$$\sum_{i=1}^{N} i(a_i) \le c(\nu)\,,$$

где $i(a_i)$ – топологический индекс функции $u(x)$ в точке a_i и $c(\nu)$ – величина, определяемая только уравнением.

Получены некоторые другие, родственные результаты, специфические для решений уравнений типа минимальной поверхности. Это — утверждение о знакопостоянстве и условия отсутствия критических точек у решений задач Дирихле и Неймана с нулевыми граничными данными.

[1] То есть определенное во всей плоскости $\mathbf{R}^2$.

В основе построений лежит оценка искажения при конформном отображении графика решения $u(x)$ в плоскость $\mathbf{R}^2$, устанавливаемая методом модулей. Для конформных отображений плоских областей указанная оценка представляет собой одну из возможных модификаций классической теоремы Альфорса о конформном отображении полос.

9.2 Обобщенные решения

Опишем рассматриваемый класс уравнений. Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – область и пусть $A : D \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

(i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbf{R}^2 \to A(x,\xi)$ определено и непрерывно,

(ii) отображение $x \in D \to A(x,\xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbf{R}^2$;

(iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbf{R}^2$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$\nu_1 \frac{|\xi|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \le \langle \xi, A(x,\xi) \rangle \,, \tag{9.2.1}$$

$$|A(x,\xi)| \le \nu_2 \frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \,, \tag{9.2.2}$$

где ν_1, $\nu_2 > 0$ – некоторые постоянные.

Удобно обозначить $\nu = \nu_2/\nu_1$. Ясно, что всегда $\nu \ge 1$.

Предположения (i) и (ii) гарантируют измеримость отображения $x \in D \to A(x,u(x))$ для произвольного измеримого на D векторного поля $u(x)$ (детали см. в [159], раздел **3**).

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L[u] \equiv \operatorname{div} A(x, \nabla u) = 0 \,. \tag{9.2.3}$$

Нам необходимо определить обобщенные решения уравнения (9.2.3) с нулевыми смешанными граничными условиями. Технически удобно пользоваться следующим определением.

Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – область и $E \subset \partial\tilde{D}$ – некоторое замкнутое множество простых концов D. Пусть $\Delta \subset \tilde{D}$ – произвольное множество и $[\Delta]_{\tilde{D}}$ – его замыкание в топологии пространства $\tilde{D}$. Будем говорить, что $[\Delta]_{\tilde{D}} \subset (D \cup E)$, если никакая бесконечная последовательность точек $x_n \in \Delta$, не имеющая предельных точек в D, не имеет также предельных точек (в топологии $\tilde{D}$) на $\partial\tilde{D}\setminus E$. Далее, для произвольной функции $h : D \to \mathbf{R}$ полагаем

$$\operatorname{supp}_{\tilde{D}} h \equiv [\{x : h(x) \neq 0\}]_{\tilde{D}}.$$

Функция $u \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}\, D$ называется *обобщенным решением* уравнения (9.2.3) с нулевыми смешанными граничными данными на множестве $E \subset \partial\tilde{D}$, если для произвольной функции $\varphi \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}\, D$ такой, что

$$\operatorname{supp}_{\tilde{D}} \varphi \subset (D \cup E)\,, \tag{9.2.4}$$

выполнено

$$\int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x, \nabla u)\rangle \; dx_1\, dx_2 = 0\,. \tag{9.2.5}$$

Рассмотрим пример. Пусть D – односвязная неограниченная область в $\mathbf{R}^2$ с гладкой границей ∂D. Предположим, что $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, вектор-функция $A(x,\xi)$ принадлежит классу $C^1(D \times \mathbf{R}^2)$ и что в каждой граничной точке $x \in \partial D$ выполнено хотя бы одно из соотношений

$$u(x) = 0\,, \quad \langle A(x, \nabla u), \mathbf{n}\rangle = 0\,, \tag{9.2.6}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внутренней нормали.

Пространство $\tilde{D}$ совпадает в данном случае с замыканием области D как области на сфере Римана $\tilde{\mathbf{R}}^2$ и можно положить

$$E = \partial D = \partial\, \tilde{D} \setminus \{\infty\}\,.$$

Пусть $\varphi = u\,\psi$, где функция $\psi \in C_0^1(\mathbf{R}^2)$ – произвольна. Функция φ имеет носитель $\operatorname{supp}_{\tilde{D}} \varphi \subset (D \cup \partial D)$ и, тем самым, соотношение (9.2.4) для φ выполняется. На основании формулы Грина имеем

$$\int\limits_{\partial D} \psi(x)u(x)\; \langle A(x, \nabla u), \mathbf{n}\rangle \; |dx| \; = \int\limits_D \langle \nabla(\psi u), A(x, \nabla u)\rangle \; dx_1\, dx_2 + $$

$$+ \int\limits_D \psi(x)u(x)\, L[u]\, dx_1\, dx_2\,.$$

Отсюда, в силу условий (9.2.6) и равенства $L[u] = 0$, приходим к (9.2.5).

Обратно, в предположениях $L[u] = 0$ и (9.2.5), выполнение соотношения

$$\int\limits_{\partial D} \psi(x)\, u(x)\; \langle A(x, \nabla u), \mathbf{n}\rangle \; |dx| = 0$$

с указанным произволом в выборе функции $\psi(x)$, влечет (9.2.6).

Ясно, что уравнение минимальной поверхности (2.3.14) содержится в описанном классе уравнений. Однако отдельными свойствами, присущими решениям уравнения (2.3.14), решения некоторых из уравнений данного класса могут и не обладать. Сказанное относится, например к теореме С.Н. Бернштейна, утверждающей, что *всякое целое решение уравнения минимальной поверхности является линейной функцией* [11, стр. 257]. Несложно показать, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+u_{x_i}^2}} \right) = 0$$

удовлетворяет ограничениям (9.2.1), (9.2.2). Тем не менее, оно имеет целые решения $u = C\, x_1 x_2$, не являющиеся линейными.

9.3 Отображение на полуплоскость

Пусть D – односвязная, неограниченная область в $\mathbf{R}^2$ с границей ∂D, спрямляемой в любой своей компактной порции. Ниже такие области будем называть *элементарными*.

Пусть $u(x)$ – обобщенное решение уравнения $L[u] = 0$ в области D, удовлетворяющее условию

$$u \in \mathrm{Lip}\,(D_r), \quad D_r = \{x \in D : |x| < r\}\,, \tag{9.3.7}$$

при всяком $r > 0$.

Обозначим, как и выше, через Ω – поверхность, являющуюся графиком решения $x_3 = u(x_1, x_2)$, через

$$ds_\Omega^2 = \sum_{i,j=1}^{2} (\delta_{ij} + u_{x_i} u_{x_j})\, dx_i dx_j$$

– элемент длины на поверхности Ω, через

$$d\Omega = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx_1 dx_2$$

– элемент площади Ω.

Как и выше, в разделе 3.7, вводим изотермические координаты на поверхности Ω. Именно, пусть $x \in D$ – произвольная точка, где $u(x)$ имеет полный дифференциал. Так как квадратичная форма ds_Ω^2 положительно определена в D, то бесконечно малый круг в метрике ds_Ω^2 с центром в точке x представляет собой бесконечно малый эллипс в евклидовой метрике. Пусть $\theta(x)$, $p(x)$ – характеристики этого эллипса. Так как поверхность Ω есть график локально липшицевой функции, то характеристика $p(x)$ локально ограничена в D и по теореме 3.7.2 существует квазиконформное отображение $\xi = \xi(x)$ области D в плоскость переменной $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, характеристики которого почти всюду в D совпадают с $\theta(x), p(x)$. Такое отображение определяется с точностью до конформного преобразования в плоскости переменной ξ.

Обозначим через $x = x(\xi) = (x_1(\xi), x_2(\xi))$ отображение, обратное к $\xi = \xi(x)$, через x_3 – функцию $u(x(\xi))$. Вектор-функция

$$\chi(\xi) = (x_1(\xi), x_2(\xi), x_3(\xi))$$

осуществляет однолистное конформное отображение области $D^* = \xi(D)$ на поверхность Ω и определяет изотермические координаты на Ω.

Так как решение $u(x)$ подчинено условию (9.3.7), то характеристика $p(x)$ ограничена в окрестности каждой конечной граничной точки области D и может неограниченно возрастать лишь при $x \to \infty$ вдоль D. Поэтому пользуясь следствием 4.4.1, несложно заключить, что D^* есть односвязная область, отличная от $\mathbf{R}^2$.

Посредством вспомогательного конформного преобразования в плоскости переменной $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ добьемся того, чтобы образом D^* области D при отображении $\xi = \xi(x)$ была верхняя полуплоскость $\{\xi \in \mathbf{R}^2 : \xi_2 > 0\}$. Граница ∂D есть простая жорданова дуга и выполнено предположение (9.3.7), а потому по теореме 4.4.1 отображение $\xi = \xi(x) : D \to D^*$ непрерывно вплоть до границы ∂D. При этом продолженное отображение оказывается взаимно однозначным на этой дуге.

Заметим, однако, что *a priori не ясно, является ли образом бесконечно удаленной точки на границе области D единственный простой конец в D^* либо некоторый континуум простых концов.*

Зафиксируем точки a, $b \in \partial D$ и предположим, что отображение $\xi = \xi(x)$ удовлетворяет требованиям

$$\xi(a) = (0,0)\,, \quad \xi(b) = (1,0)$$

и существует последовательность точек $x_k \in D$, $x_k \to \infty$, вдоль которой $\xi(x_k) \to \infty$ $(k \to \infty)$.

В силу сказанного выше, такая нормировка возможна.

Положим

$$m(t) = \min_{|x-a|=t} |\xi(x)|\,.$$

Для произвольного $t > 0$ обозначим через $S_D(t)$ компоненту связности множества $x \in D : |x - a| = t$, разделяющую в D граничные точки a и ∞. Символом $D(r, R)$ обозначаем часть D, заключенную между $S_D(r)$ и $S_D(R)$ при $0 < r < R < \infty$.

Следующее утверждение позволяет заключить, что образом области D при отображении $\xi = \xi(x)$ является вся верхняя полуплоскость.

Теорема 9.3.1. *Пусть $u(x)$ – обобщенное решение уравнения (9.2.3) в элементарной неограниченной односвязной области D с границей ∂D, удовлетворяющее на ∂D нулевому смешанному граничному условию. Тогда отображение $\xi = \xi(x)$ обладает свойством*

$$\lim_{x\to\infty} \xi(x) = \infty\,.$$

При этом

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{\ln m(t)}{\ln^2 t}\left(\int\limits_{D(1,t)} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^2} + 2\nu\pi^2\right) \geq \frac{2}{\nu}\,. \tag{9.3.8}$$

9.3.1 Оценки модуля семейства дуг

Не ограничивая общности можем считать, что точка a есть начало координат в $\mathbf{R}^2$. Обозначим через $\Gamma_\Omega(r,R)$ семейство дуг γ, лежащих в $D(r,R)$ и соединяющих $S_D(r)$ и $S_D(R)$. Центральное место в построениях занимает оценка модуля семейства $\Gamma(r,R)$ в метрике ds^2_Ω. Своеобразие этой оценки заключается в том, что коэффициенты метрики a priori не известны, а известно лишь их происхождение от решения дифференциального уравнения. Другими словами, производятся оценки модуля конденсатора на неизвестной поверхности, и в этом — главное отличие рассматриваемой ситуации от стандартного случая, в котором оценивается модуль конденсатора в $\mathbf{R}^2$.

Лемма 9.3.1. *Справедливо неравенство*

$$\mathrm{mod}_\Omega\Gamma(r,R) \leq \frac{\nu\pi}{2\ln^2\left(1+\dfrac{R-r}{M}\right)}\left(\int\limits_{D(r,R)} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^2} + 2\nu\pi^2\right)\,, \tag{9.3.9}$$

где

$$M = \max_{S(r)} \left(|x|^2 + u^2(x)\right)^{-1/2}\,.$$

Доказательство. Мы воспользуемся теоремой 1.5.1. Выберем в (1.5.10) плотность

$$\rho(x) = \left(|x|^2 + u^2(x)\right)^{-1/2}$$

при $x \in D(r,R) \cap \{r < |x| < R\}$ и $\rho(x) = 0$ при всех остальных значениях $x \in D$. Тогда имеем

$$\mathrm{mod}_\Omega \Gamma(r,R) \le \frac{\int\limits_{D(r,R)} \left(|x|^2 + u^2(x)\right)^{-1}\, d\Omega}{\left(\inf\limits_{\gamma\in\Gamma(r,R)} \int\limits_\gamma \left(|x|^2 + u^2(x)\right)^{-1/2}\, ds_\Omega\right)^2}\,. \tag{9.3.10}$$

Замечая, что на всякой дуге $\gamma \in \Gamma(r,R)$ имеется поддуга γ', лежащая в $D(r,R) \cap \{r < |x| < R\}$ и имеющая концевые точки на граничных дугах $S_D(r)$ и $S_D(R)$, оцениваем знаменатель

$$\int\limits_\gamma \left(|x|^2 + u^2(x)\right)^{-1/2}\, ds_\Omega \ge \int\limits_{\gamma'} \left(|x|^2 + u^2(x)\right)^{-1/2} \left| d\left(|x|^2 + u^2(x)\right)^{-1/2}\right|$$

и, далее,

$$\int\limits_\gamma \left(|x|^2 + u^2(x)\right)^{-1/2}\, ds_\Omega \ge \ln\left(1 + \frac{R-r}{M}\right)\,. \tag{9.3.11}$$

Перейдем к оценке числителя в правой части неравенства (9.3.10). Положим

$$\eta(x) = \frac{1}{|x|}\mathrm{arctg}\,\delta(x)\,, \quad \delta(x) = \frac{u(x)}{|x|}\,.$$

Зададим произвольно $R' > R$, $0 < r' < r$ и обозначим через $\psi(\tau)$ функцию

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \tau \in [0, r')\,; \\ (\tau - r')/\,(r - r') & \text{при} \quad \tau \in [r', r)\,; \\ 1 & \text{при} \quad \tau \in [r, R)\,; \\ (R' - \tau)/\,(R' - R) & \text{при} \quad \tau \in [R, R')\,; \\ 0 & \text{при} \quad \tau \in [R', \infty]\,. \end{cases}$$

Функция $\varphi(x) = \psi(|x|)\,\eta(x)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}\, D$ и обладает свойством

$$\mathrm{supp}_{\tilde D}\, \varphi \subset \{x : r' < |x| \le R'\} \cap \mathrm{supp}_{\tilde D}\, u \subset (D \cup \partial\, D)\,.$$

Поэтому она допустима в интегральном соотношении (9.2.5), и мы можем записать

$$\int\limits_D \eta(x) \langle \nabla\psi, A(x, \nabla u)\rangle \, dx_1\, dx_2 = -\int\limits_D \psi(x) \langle \nabla\eta, A(x, \nabla u)\rangle \, dx_1\, dx_2 \,.$$

Таким образом, находим

$$\int\limits_D \psi(x) \langle \nabla\eta, A(x, \nabla u)\rangle \, dx_1\, dx_2 \, \leq \int\limits_D |\eta(x)| \, |\nabla\psi| \, |A(x, \nabla u)| \, dx_1\, dx_2 \,.$$

Воспользуемся спецификой в выборе функции $\psi(x)$ и заметим, что

$$\nabla\eta = \frac{\nabla u}{|x|^2 + u^2(x)} - \frac{\nabla |x|}{|x|^2} \left(\operatorname{arctg} \delta + \frac{\delta}{1+\delta^2} \right) \,,$$

а также

$$\langle \nabla u, A(x, \nabla u) \rangle \geq 0 \,, \quad |\eta(x)| \leq \frac{\pi}{2\,|x|}$$

и

$$|\nabla\psi| = \begin{cases} 1/(R'-R) & \text{при} \quad R < |x| < R' \,, \\ 1/(r-r') & \text{при} \quad r' < |x| < r \,. \end{cases}$$

Тем самым, обозначая

$$\mathcal{U} = \{x \in D : r' < |x| < r\} \,,$$
$$\mathcal{V} = \{x \in D : r < |x| < R\} \,,$$
$$\mathcal{W} = \{x \in D : R < |x| < R'\} \,,$$

приходим к соотношению

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \frac{\langle \nabla u, A(x, \nabla u)\rangle dx_1 dx_2}{|x|^2 + u^2(x)} \leq \int\limits_{\mathcal{V}} \left| \operatorname{arctg} \delta + \frac{\delta}{1+\delta^2} \right| \, |A(x, \nabla u)| \, \frac{dx_1\, dx_2}{|x|^2} +$$

$$+ \frac{\pi}{2(r-r')} \int\limits_{\mathcal{U}} |A(x, \nabla u)| \, \frac{dx_1\, dx_2}{|x|} + \frac{\pi}{2(R'-R)} \int\limits_{\mathcal{W}} |A(x, \nabla u)| \, \frac{dx_1\, dx_2}{|x|} \,.$$

Структурные ограничения (9.2.1), (9.2.2) на дифференциальный оператор $L[u]$ влекут

$$\nu_1 \sqrt{1 + |\nabla u|^2} - \frac{\nu_1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \leq \langle \nabla u, A(x, \nabla u) \rangle$$

и

$$|A(x,\nabla u)| \le \frac{\nu_2\,|\nabla u|}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \le \nu_2\,.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathcal{U}} \frac{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}{|x|^2+u^2(x)}\,dx_1dx_2 \le \int\limits_{\mathcal{V}} Q(x)\frac{dx_1\,dx_2}{|x|^2}+ \\ +\frac{\nu\pi}{2(r-r')}\int\limits_{\mathcal{U}}\frac{dx_1\,dx_2}{|x|}+\frac{\nu\pi}{2(R'-R)}\int\limits_{\mathcal{W}}\frac{dx_1\,dx_2}{|x|}\,,\end{gathered} \tag{9.3.12}$$

где

$$Q(x)=\frac{1}{(1+\delta^2)\sqrt{1+|\nabla u|^2}}+\frac{1}{\nu_1}\left|\operatorname{arctg}\delta+\frac{\delta}{1+\delta^2}\right|\,|A(x,\nabla u)|\,.$$

Несложно видеть, что

$$\frac{\nu\pi}{2(r-r')}\int\limits_{\mathcal{U}}\frac{dx_1\,dx_2}{|x|}+\frac{\nu\pi}{2(R'-R)}\int\limits_{\mathcal{W}}\frac{dx_1\,dx_2}{|x|}\le 2\nu\,\pi^2\,.$$

Величина $Q(x)$ оценивается следующим образом

$$\begin{aligned} Q(x) &\le \frac{1}{(1+\delta^2)\sqrt{1+|\nabla u|^2}}+\nu\left|\operatorname{arctg}\delta+\frac{\delta}{1+\delta^2}\right|\frac{|\nabla u|}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \\ &\le \left(\frac{1}{(1+\delta^2)}+\nu^2\left(\frac{\delta}{1+\delta^2}+\operatorname{arctg}\delta\right)^2\right)^{1/2}\le\frac{\nu\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Объединяя найденные оценки, из (9.3.12) получаем

$$\int\limits_{\mathcal{V}}\frac{d\Omega}{|x|^2+u^2(x)}\le\frac{\nu\pi}{2}\int\limits_{\mathcal{V}}\frac{dx_1dx_2}{|x|^2}+2\nu\pi^2\,.$$

На основании (9.3.10), (9.3.11) приходим к неравенству (9.3.9). □

9.3.2 Доказательство теоремы 9.3.1

Пусть G' – подобласть области D, отделяемая дугой $S_D(R)$ от бесконечно удаленной точки $\mathbf{R}^2$. Подобласть G' примыкает к граничной точке $a = (0,0)$ и мы вправе воспользоваться результатами, полученными в задаче A, рассмотренной в разделе 7.3.

Согласно теореме 7.3.1 имеем

$$\inf_{x\in S_D(R)} |\xi| \geq \exp\{-\pi\, k_\Omega(G')\}\,.$$

Однако, в силу леммы 7.4.2, выполнено

$$k_\Omega(G') \leq \mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}\,,$$

где $\mathcal{E}$ – семейство локально спрямляемых дуг γ, отделяющих граничную точку a от $S_D(R)$ и таких, что $\gamma \cap S_D(r) \neq \emptyset$. Отсюда находим

$$\inf_{x\in S_D(R)} |\xi| \geq \exp\{-\pi\, k_\Omega(G')\}\,,$$

и так как величина $C = \mathrm{mod}_\Omega \mathcal{E}$ не зависит от R, то

$$\inf_{x\in S_D(R)} |\xi| \geq C_1 \exp\{-\pi\, \mathrm{mod}_\Omega \Gamma(r,R)\}\,,$$

где

$$C_1 = \exp\{-\pi\, C\}\,.$$

Воспользуемся леммой 9.3.1. Оценка (9.3.9) влечет, что

$$\inf_{x\in S_D(R)} |\xi| \geq C_1 \exp\left\{-\frac{\nu\pi^2}{2\ln^2\left(1+\frac{R-r}{M}\right)}\left(\int\limits_{D(r,R)} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^2} + 2\nu\pi^2\right)\right\}\,. \tag{9.3.13}$$

Первое из утверждений теоремы 9.3.1 следует теперь из неравенства

$$\int\limits_{D(r,R)} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^2} \leq 2\pi\, \ln\frac{R}{r}\,.$$

Соотношение (9.3.8) получается из (9.3.13) предельным переходом. □

9.4 Оценки скорости роста решений

Пусть

$$D^* = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2 : \xi_2 > 0\}$$

– верхняя полуплоскость,

$$D^*(t) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2 : \xi_2 > 0\,, |\xi| < t\}$$

и пусть

$$w(\xi) = (u(\xi_1, \xi_2), v(\xi_1, \xi_2)) : D^* \to \mathbf{R}^2$$

– голоморфная функция.

Предположим, что для любого $t > 0$ вторая производная $w''(\xi)$ ограничена в $D^*(t)$. Отсюда, в частности, следует принадлежность первой производной $w'(\xi)$ классу $\mathrm{Lip}\,(\overline{D^*(t)})$ в каждом полукруге $D^*(t)$ и продолжимость по непрерывности на границу ∂D^* функций $w(\xi)$, $w'(\xi)$.

9.4.1 Неравенство для интеграла энергии

Докажем следующее энергетическое неравенство, часто называемое принципом Сен-Венана (см., например, [202], [92]). Относительно других его модификаций и обобщений на случаи решений эллиптических уравнений общего вида, а также параболических и гиперболических уравнений см. [17], [18], [93], [72], [122], [111], [169], [186], [163] и др.

Теорема 9.4.1. *Пусть H_1 – замкнутое множество на вещественной оси $\xi_2 = 0$, а $H_2 = \partial D^* \setminus H_1$ – его дополнение. Обозначим через $\chi(t)$ функцию, равную 1, если $H_1 \cap [-t,t] = \emptyset$ или $H_2 \cap [-t,t] = \emptyset$, и $\chi(t) = 1/2$, если $H_1 \cap [-t,t] \neq \emptyset$ и $H_2 \cap [-t,t] \neq \emptyset$.*

Предположим, что в каждой точке $\xi = (\xi_1, 0)$ границы ∂D^* выполнено хотя бы одно из условий:

$$\begin{cases} u(\xi_1, 0) &= 0\,, \qquad \text{если} \quad (\xi_1, 0) \in H_1\,; \\ dv(\xi_1, 0) &= 0\,, \qquad \text{если} \quad (\xi_1, 0) \in H_2\,. \end{cases} \tag{9.4.14}$$

Тогда для любых $0 < r < R < \infty$ имеет место соотношение

$$I(r) \le I(R) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int\limits_r^R \chi(t)\, \frac{dt}{t} \right\}\,, \tag{9.4.15}$$

где

$$I(t) = \int\limits_{D^*(t)} |\nabla u|^2 \, d\xi_1 d\xi_2\,.$$

Доказательство. Мы воспользуемся идеей, восходящей к Т. Карлеману [137]. Фиксируем произвольно $r < t < R$. Векторное поле $u(\xi)\,\nabla v(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица в $\overline{D^*(t)}$ и согласно формуле Грина выполнено

$$\int\limits_{\partial D^*(t)} u\,dv = \int\limits_{D^*(t)} \left(u_{\xi_1}v_{\xi_2} - u_{\xi_2}v_{\xi_1}\right)\,d\xi_1 d\xi_2\,. \tag{9.4.16}$$

Данное утверждение есть специальное следствие теоремы **4.5.6** из [144].

Пользуясь условиями Коши – Римана для вектор-функции $w = (u, v)$ и граничными условиями (9.4.14), из (9.4.16) выводим

$$\int\limits_{S_{D^*}(t)} u\,dv = \int\limits_{D^*(t)} |\nabla u(\xi)|^2\,d\xi_1 d\xi_2\,. \tag{9.4.17}$$

Случай A). Предположим сперва, что хотя бы один из концов дуги $S_{D^*}(t)$ лежит на H_1. Мы имеем

$$\left|\int\limits_{S_{D^*}(t)} u(\xi)\,dv\right| \le \int\limits_{S_{D^*}(t)} |u(\xi)|\,|\langle\nabla u(\xi), \mathbf{n}(\xi)\rangle|\,|d\xi| \le$$

$$\le \left(\int\limits_{S_{D^*}(t)} |u(\xi)|^2\,|d\xi|\right)^{1/2} \left(\int\limits_{S_{D^*}(t)} |\langle\nabla u(\xi), \mathbf{n}(\xi)\rangle|^2\,|d\xi|\right)^{1/2}.$$

Введем обозначение

$$\lambda_1\left(S_{D^*}(t)\right) = \frac{\left(\int\limits_{S_{D^*}(t)} |\langle\nabla u(\xi), \tau(\xi)\rangle|^2\,|d\xi|\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_{S_{D^*}(t)} |u(\xi)|^2\,|d\xi|\right)^{1/2}},$$

где $\tau(\xi)$ есть единичный касательный к $S_{D^*}(t)$ в точке $\xi \in S_{D^*}(t)$ вектор.

Тогда имеем

$$\left| \int\limits_{S_{D^*}(t)} u(\xi)\,dv \right| \le \frac{1}{\lambda_1\left(S_{D^*}(t)\right)} \left(\int\limits_{S_{D^*}(t)} |\langle \nabla u(\xi), \tau(\xi)\rangle|^2\,|d\xi| \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{S_{D^*}(t)} |\langle \nabla u(\xi), \mathbf{n}(\xi)\rangle|^2\,|d\xi| \right)^{1/2}$$

и, пользуясь неравенством Коши

$$2\,a\,b \le a^2 + b^2\,,$$

находим

$$\left| \int\limits_{S_{D^*}(t)} u(\xi)\,dv \right| \le \frac{1}{2\lambda_1\left(S_{D^*}(t)\right)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{S_{D^*}(t)} \left(|\langle \nabla u(\xi), \tau(\xi)\rangle|^2 + |\langle \nabla u(\xi), \mathbf{n}(\xi)\rangle|^2\right)\,|d\xi| \right)\,.$$

Однако,

$$|\langle \nabla u(\xi), \tau(\xi)\rangle|^2 + |\langle \nabla u(\xi), \mathbf{n}(\xi)\rangle|^2 = |\nabla u(\xi)|^2$$

и потому

$$\left| \int\limits_{S_{D^*}(t)} u(\xi)\,dv \right| \le \frac{1}{2\lambda_1\left(S_{D^*}(t)\right)} \int\limits_{S_{D^*}(t)} |\nabla u(\xi)|^2\,|d\xi|\,. \tag{9.4.18}$$

Соотношения (9.4.17), (9.4.18) влекут

$$\int\limits_{D^*(t)} |\nabla u(\xi)|^2\,d\xi_1 d\xi_2 \le \frac{1}{2\lambda_1\left(S_{D^*}(t)\right)} \int\limits_{S_{D^*}(t)} |\nabla u(\xi)|^2\,|d\xi|\,.$$

Легко видеть, что

$$I(t) = \int\limits_{\{\xi \in D^* \colon |\xi| < t\}} |\nabla u|^2 \, d\xi_1 d\xi_2 = \int\limits_0^t dt \int\limits_{S_{D^*}(t)} |\nabla u(\xi)|^2 \, |d\xi|$$

и потому для почти всех $t \geq 0$ выполнено

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int\limits_{S_{D^*}(t)} |\nabla u(\xi)|^2 \, |d\xi| \, .$$

Тем самым, из предыдущего неравенства находим

$$I(t) \leq \frac{1}{2\lambda_1 \left(S_{D^*}(t)\right)} \, \frac{d}{dt} I(t) \, .$$

Интегрируя данное дифференциальное соотношение, получаем

$$\exp \left\{ \int\limits_r^R 2\lambda_1 \left(S_{D^*}(t)\right) \, dt \right\} \leq \frac{I(R)}{I(r)} \, . \tag{9.4.19}$$

Случай B). Предположим, что оба конца полуокружности $S_{D^*}(t)$ лежат на H_2. Тогда для произвольной постоянной C на основании (9.4.14) имеем

$$(u - C) \, dv|_{\partial D^*} = 0$$

и, пользуясь (9.4.17), можем записать

$$\int\limits_{S_{D^*}(t)} (u - C) \, dv = \int\limits_{D^*(t)} |\nabla u(\xi)|^2 \, d\xi_1 d\xi_2 \, . \tag{9.4.20}$$

Отсюда,

$$\left| \int\limits_{S_{D^*}(t)} (u(\xi) - C) \, dv \right| \leq \int\limits_{S_{D^*}(t)} |u(\xi)| \, |\langle \nabla u(\xi), \mathbf{n}(\xi) \rangle| \, |d\xi| \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{S_{D^*}(t)} |u(\xi)|^2 \, |d\xi| \right)^{1/2} \left(\int\limits_{S_{D^*}(t)} |\langle \nabla u(\xi), \mathbf{n}(\xi) \rangle|^2 \, |d\xi| \right)^{1/2} .$$

Здесь обозначаем

$$\lambda_2\left(S_{D^*}(t)\right) = \frac{\left(\int\limits_{S_{D^*}(t)} |\langle\nabla u(\xi), \tau(\xi)\rangle|^2\,|d\xi|\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_{S_{D^*}(t)} |u(\xi) - C|^2\,|d\xi|\right)^{1/2}}.$$

Далее, как и выше, находим

$$\left|\int\limits_{S_{D^*}(t)} (u(\xi) -)\,dv\right| \le \frac{1}{2\lambda_2\left(S_{D^*}(t)\right)} \int\limits_{S_{D^*}(t)} |\nabla u(\xi)|^2\,|d\xi|\,. \qquad (9.4.21)$$

Объединяя соотношения (9.4.20), (9.4.21), приходим сначала к дифференциальному неравенству

$$I(t) \le \frac{1}{2\lambda_2\left(S_{D^*}(t)\right)}\,\frac{d}{dt}I(t)$$

и, далее, к соотношению

$$\exp\left\{\int\limits_r^R 2\lambda_2\left(S_{D^*}(t)\right)\,dt\right\} \le \frac{I(R)}{I(r)}\,. \qquad (9.4.22)$$

Оценим величины $\lambda_1\left(S_{D^*}(t)\right)$ и $\lambda_2\left(S_{D^*}(t)\right)$. Мы будем пользоваться для этого хорошо известным неравенством Виртингера (см., например, [9, глава 5, §10] или, в общем виде, [131, глава III])

$$\int\limits_0^{2\pi} h^2(s)\,ds \le \int\limits_0^{2\pi} h'^2(s)\,ds\,, \qquad (9.4.23)$$

справедливым для любой 2π-периодической функции $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющей условию Липшица и такой, что

$$\int\limits_0^{2\pi} h(s)\,ds = 0. \qquad (9.4.24)$$

При этом в неравенстве (9.4.23) для функций

$$h(\tau) = c_1 \cos s + c_2 \sin s$$

достигается равенство.

Если функция $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – периодична с периодом $T \geq 0$ и интеграл по периоду равен нулю, то, очевидно,

$$\int\limits_0^T h^2(s)\, ds \leq \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int\limits_0^T h'^2(s)\, ds\,.$$

В предположениях A), полагая

$$h(s) = u(t \cos s,\, t \sin s)$$

находим

$$|d\xi|_{\xi \in S_{D^*}(t)} = t\, ds\,, \quad |\langle \nabla u(\xi), \tau(\xi)\rangle|^2 = \frac{1}{t^2} h'^2(s)$$

и, далее,

$$\lambda_1\left(S_{D^*}(t)\right) = \frac{1}{t} \frac{\left(\int\limits_0^\pi |h'(s)|^2\, ds\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^\pi h^2(s)\, ds\right)^{1/2}}\,.$$

Возможны два случая. Предположим, что оба конца полуокружности $S_{D^*}(t)$ лежат на H_1. Тогда

$$h(0) = h(\pi) = 0\,.$$

Продолжим функцию $h(s)$ сначала по симметрии относительно точки $s = 0$ до функции $h^*(s)$, заданной на $[-\pi, \pi]$ по правилу $h^*(s) = -h^*(-s)$ $(-\pi \leq s \leq \pi)$, и удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h^*(s)\, ds = 0\,.$$

Далее, продолжим по периодичности до липшицевой функции

$$h^{**} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,.$$

Данная функция 2π-периодична, удовлетворяет (9.4.24) и на основании неравенства (9.4.23) получаем

$$\lambda_1\left(S_{D^*}(t)\right) = \frac{1}{t}\frac{\left(\int\limits_0^{2\pi} |(h^{**})'(s)|^2\, ds\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^{2\pi} (h^{**})^2(s)\, ds\right)^{1/2}} \geq \frac{1}{t}\,. \tag{9.4.25}$$

Если же только один из концов полуокружности $S_{D^*}(t)$ лежит на H_1, то, полагая без нарушения общности $h(\pi) = 0$, продолжим сначала эту функцию по правилу

$$h^*(s) = h^*(-s)\,, \quad h^* : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}\,.$$

Тогда имеем $h^*(-\pi) = h^*(\pi) = 0$ и $h^*(s)$ продолжима до 4π-периодической функции $h^{**}(s)$, удовлетворяющей условию Липшица и имеющей интеграл по периоду, равный нулю. Тем самым, получаем

$$\lambda_1\left(S_{D^*}(t)\right) = \frac{1}{t}\frac{\left(\int\limits_0^{4\pi} |(h^{**})'(s)|^2\, ds\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^{4\pi} (h^{**})^2(s)\, ds\right)^{1/2}} \geq \frac{1}{2t}\,. \tag{9.4.26}$$

В предположениях $B)$, определяя, как и выше, функцию $h(s) : [0.\pi] \to \mathbf{R}$, мы имеем

$$\lambda_2\left(S_{D^*}(t)\right) = \frac{1}{t}\frac{\left(\int\limits_0^{\pi} |h'(s)|^2\, ds\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^{\pi} (h(s) - C)^2\, ds\right)^{1/2}}\,.$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^{\pi} (h(s) - C)\, ds = 0$$

и обозначим через $\tilde{h}(s) = h(s) - C$. Продолжим по симметрии функцию $\tilde{h}(s)$, полагая

$$\tilde{h}^*(s) = \tilde{h}(-s)\,, \quad s \in [-\pi, 0)\,, \quad \tilde{h}^*(s)\Big|_{[0,\pi]} = \tilde{h}(s)\,.$$

Функция $\tilde{h}^*(s)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет равные значения на его концах. При этом

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}^*(s)\,ds = 0\,.$$

Тем самым, эта функция продолжима по периодичности на всю числовую прямую до 2π-периодической функции $\tilde{h}^{**}(s)$ с нулевым интегралом по периоду. На основании неравенства Виртингера получаем

$$\lambda_2\left(S_{D^*}(t)\right) = \frac{1}{t}\frac{\left(\int\limits_0^{2\pi} |(\tilde{h}^{**})'(s)|^2\,ds\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^{2\pi} (\tilde{h}^{**})^2(s)\,ds\right)^{1/2}} \geq \frac{1}{t}\,. \tag{9.4.27}$$

Объединяя соотношения (9.4.19), (9.4.22), (9.4.25), (9.4.26), (9.4.27), приходим к (9.4.15). □

9.4.2 Сопряженная функция

Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – односвязная область и x_0 – фиксированная точка. Если $u(x)$ – обобщенное решение уравнения $L[u] = 0$ в D, то можно рассмотреть сопряженную функцию

$$v(x) = \int\limits_{x_0}^{x} -A_2(x, \nabla u(x))\,dx_1 + A_1(x, \nabla u(x))\,dx_2\,.$$

В случае, когда вектор-функция $A : D \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ принадлежит классу $C^1(D \times \mathbf{R}^2)$, а $u \in C^2(D)$, сопряженная функция $v(x)$ определена и однозначна в D. В общем случае необходимы дополнительные обоснования.

Введем в рассмотрение комплекснозначную функцию

$$w = u(x) + \frac{i}{\nu_1}\, v(x)\,.$$

Теорема 9.4.2. *Отображение $w : D \to \mathbf{R}^2$ есть отображение с ограниченным искажением в метрике ds^2_Ω с коэффициентом искажения, не превосходящим*

$$q(\nu) = \frac{1}{2}\left(1 + \nu^2 + \sqrt{\nu^4 + 2\nu^2 - 3}\right)\,. \tag{9.4.28}$$

В частности, существуют гомеоморфизм $T : D \to \mathbf{R}^2$ и голоморфная функция $\Phi : T(D) \to \mathbf{R}^2$ такие, что $w(x) = \Phi \circ T(x)$.

Доказательство. В силу условия (9.2.2) на вектор-функцию $A(x,\xi)$, функция v (и, тем самым, вектор-функция w) локально липшицевы. По теореме Радемахера w дифференцируема почти всюду в D. Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что в каждой точке $x \in D$ дифференцируемости w якобиан отображения неотрицателен и выполнено неравенство

$$\max_{ds^2_\Omega = 1} |dw(x)| \le q(\nu) \min_{ds^2_\Omega = 1} |dw(x)|\,. \tag{9.4.29}$$

Не умаляя общности можно считать, что $\nu_1 = 1$ и $\nu_2 = \nu$. Тогда якобиан отображения w имеет вид

$$u_{x_1} v_{x_2} - u_{x_2} v_{x_1} = \sum_{i=1}^{2} u_{x_i}\, A_i(x,\, \nabla u)$$

и, в силу условия (9.2.1), неотрицателен. Далее имеем

$$|dw|^2 = (u^2_{x_1} + A^2_2)\, dx^2_1 + 2\,(u_{x_1} u_{x_2} - A_1\, A_2)\, dx_1\, dx_2 + (u^2_{x_2} + A^2_1)\, dx^2_2\,,$$

где

$$A_i = A_i(x, \nabla u) \quad (i = 1, 2)\,.$$

Рассмотрим пучок квадратичных форм $|dw|^2 - \lambda\, ds^2_\Omega$. Пусть λ_1 – минимальное, а λ_2 – максимальное из характеристических чисел этого пучка. Тогда

$$\lambda_1 = \min_{ds^2_\Omega = 1} |dw(x)|^2\,, \quad \lambda_2 = \max_{ds^2_\Omega = 1} |dw(x)|^2\,.$$

Определим отношение λ_2/λ_1. Характеристическое уравнение для пучка записывается в виде

$$\begin{vmatrix} (u_{x_1}^2 + A_2^2) - \lambda\,(1+u_{x_1}^2) & (u_{x_1}u_{x_2} - A_1\,A_2) - \lambda\,u_{x_1}\,u_{x_2} \\ (u_{x_1}u_{x_2} - A_1\,A_2) - \lambda\,u_{x_1}\,u_{x_2} & (u_{x_2}^2 + A_1^2) - \lambda\,(1+u_{x_2}^2) \end{vmatrix} = 0$$

или,

$$\lambda^2\,(1+|\nabla u|^2) - \lambda\,(|\nabla u|^2 + |A|^2 + \langle\nabla u, A\rangle^2) + \langle\nabla u, A\rangle^2 = 0\,.$$

Отсюда, полагая

$$\mu = \frac{|\nabla u|^2 + |A|^2 + \langle\nabla u, A\rangle^2}{2\sqrt{1+|\nabla u|^2}\langle\nabla u, A\rangle}\,,$$

находим

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/2} = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1}\,.$$

Условия (9.2.1), (9.2.2) на дифференциальный оператор L влекут за собой соотношения

$$|\nabla u|^2 + |A|^2 + \langle\nabla u, A\rangle^2 \le (1+\nu^2)\,|\nabla u|^2$$

и

$$|\nabla u|^2 \le \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,\langle\nabla u, A\rangle\,.$$

Поэтому

$$\mu \le \frac{1}{2}(1+\nu^2)\,,$$

откуда непосредственно вытекает необходимая оценка для коэффициента искажения.

Завершая доказательство теоремы, заметим, что по теореме 3.1.1 на поверхности Ω можно ввести (глобально) изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ и существует гомеоморфное отображение $h : D \to \mathbf{R}^2$ такое, что

$$(d\xi_1)^2 + (d\xi_2)^2 = ds_\Omega^2 \circ h^{-1}\,.$$

Функция $w \circ h^{-1}$ голоморфна в метрике $|d\xi|^2$ и можно положить $\Phi = w \circ h^{-1}$, $T = h$. Детали см., например, в §6 главы 2 монографии И.Н. Векуа [16]. $\Box$

9.4.3 Рост сопряженной функции (I)

Предположим, как и выше, что для любого $t > 0$ вторая производная $w''(\xi)$ ограничена в $D^*(t)$. В частности, отсюда следует принадлежность первой производной $w'(\xi)$ классу $\mathrm{Lip}\,(\overline{D^*(t)})$ в каждом полукруге $D^*(t)$ и продолжимость по непрерывности на границу ∂D^* функций $w(\xi)$, $w'(\xi)$.

Теорема 9.4.3. *Если голоморфная в полуплоскости D^*, отличная от тождественной постоянной, функция $w(\xi)$ имеет ограниченную вторую производную $w''(\xi)$ в каждой из подобластей $D^*(t)$, $t > 0$, и всюду на границе ∂D^* ее вещественная часть $\mathrm{Re}\, w(\xi) \equiv 0$, то*

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} t^{-1} \mathrm{osc}\,(\mathrm{Im}\, w(\xi), |\xi| = t) > 0\,. \tag{9.4.30}$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $r > 0$. Положим

$$g(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \tau \le r\,, \\ \ln\frac{2r}{\tau}\Big/\ln 2 & \text{при} \quad r < \tau < 2r\,, \\ 0 & \text{при} \quad \tau \ge 2r\,. \end{cases}$$

Для произвольной постоянной C векторное поле

$$(v(\xi) - C)\, g^2(|\xi|)\nabla u(\xi)$$

удовлетворяет условию Липшица в $\overline{D^*}$ и его носитель содержится в $\overline{D^*(2r)}$. Так как $du = 0$ вдоль ∂D^*, то согласно формуле Грина имеем

$$\int\limits_{\partial D^*} (v - C)\, g^2\, du = 2\int\limits_{D^*} (v - C)\, g\, du \wedge dg - \int\limits_{D^*} g^2 du \wedge dv\,,$$

где символ $\wedge$ означает внешнее произведение.

Отсюда, пользуясь условиями Коши – Римана для вектор-функции $w = (u, v)$, выводим

$$\int\limits_{D^*(2r)} g^2(|\xi|)\ |\nabla u(\xi)|^2\ d\xi_1 d\xi_2 \le 2 \int\limits_{D^*(2r)} |v - C|\, |g|\, |\nabla g|\, |\nabla u|\, d\xi_1 d\xi_2\,.$$

Далее,

$$\int\limits_{D^*(2r)} g^2(|\xi|)\ |\nabla u(\xi)|^2\ d\xi_1 d\xi_2 \le$$

$$\le 2\left(\int\limits_{D^*(2r)} g^2(|\xi|)\ |\nabla u(\xi)|^2\ d\xi_1 d\xi_2 \int\limits_{D^*(2r)} |v-C|^2\,|g|\,|\nabla g|^2\,d\xi_1 d\xi_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

и, замечая, что $|g| \le 1$, находим

$$\int\limits_{D^*(r)} |\nabla u(\xi)|^2\ d\xi_1 d\xi_2\ \le \frac{4}{\ln^2 2} \int\limits_{D^*(2r)\setminus D^*(r)} |v(\xi)-C|^2\ \frac{d\xi_1 d\xi_2}{|\xi|^2} \le$$

$$\le \frac{4\pi}{\ln^2 2} \max_{\xi\in D^*(2r)} |v(\xi)-C|^2\ .$$

Несложно проверить, что по принципу максимума – минимума

$$\operatorname{osc}\{\operatorname{Im}\, w,\, D^*(2r)\} = \operatorname{osc}\{\operatorname{Im}\, w,\, S_{D^*}(2r)\}\,.$$

Тем самым, приходим к соотношению

$$\int\limits_{D^*(r)} |\nabla u(\xi)|^2\ d\xi_1 d\xi_2 \le \frac{4\pi}{\ln^2 2}\operatorname{osc}^2\{\operatorname{Im}\, w,\, S_{D^*}(2r)\}\,. \tag{9.4.31}$$

Воспользуемся теоремой 9.4.1. На основании (9.4.31) при любых $0 < r < R < \infty$ выполнено

$$I(r) \le \frac{4\pi}{\ln^2 2}\operatorname{osc}^2\{\operatorname{Im}\, w,\, S_{D^*}(2R)\}\ \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2}\ .$$

Отсюда заключаем, что при нарушении соотношения (9.4.30) интеграл $I(r)$ обращается в нуль. Следовательно, $w \equiv \mathrm{const}$ в $D^*(r)$, что невозможно. $\Box$

9.4.4 Рост сопряженной функции (II)

Положим

$$\alpha(t) = \int\limits_{D(1,t)} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^2} + 2\nu\pi^2\,.$$

Следующее утверждение накладывает условия на скорость роста сопряженной функции $v(x)$ в односвязной области общего вида и для решений уравнений типа минимальной поверхности.

Теорема 9.4.4. *Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – элементарная область. Пусть u – обобщенное решение уравнения* (9.2.3), *подчиненного ограничениям* (9.2.1), (9.2.2), *и пусть*

$$u \in \operatorname{Lip} \overline{D(t)} \quad \text{при всяком} \quad t > 0\,.$$

Предположим, что всюду на границе ∂D выполнено $u \equiv 0$. Если функция $v(x)$ отлична от тождественной постоянной в области D, то при всяком $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо соотношение

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \operatorname{osc}\{v(x), S_D(t)\} \, \exp\left\{-\frac{2(1-\varepsilon)}{\nu\, q(\nu)}\frac{\ln^2 t}{\alpha(t)}\right\} > 0\,. \tag{9.4.32}$$

Здесь

$$\alpha(t) = \int\limits_{D(1,t)} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^2} + 2\nu\pi^2\,.$$

Доказательство. Воспользуемся вспомогательным отображением $\xi = \xi(x)$ и перейдем к изотермическим координатам на графике Ω решения $x_3 = u(x_1, x_2)$. Так как отображение $\xi(x) : D \to D^*$ преобразует эллипсы $ds^2_\Omega = 1$ в круги, то функция $w^* = w(x(\xi))$ имеет в полуплоскости D^* коэффициент искажения в евклидовой метрике, не превосходящий $q = q(\nu)$. Вещественная часть $w^*(\xi)$ тождественно постоянна на границе ∂D^*. Поэтому справедлива.

Лемма 9.4.1. *Если $\operatorname{Im} w^*(\xi)$ отлична от тождественной постоянной в полуплоскости D^*, то*

$$\underline{\lim}_{\tau\to\infty} \tau^{-1/q} \operatorname{osc}\{\operatorname{Im} w^*(\xi), |\xi| = \tau\} > 0\,. \tag{9.4.33}$$

Доказательство основывается на следующих аргументах. Функция $w^*(\xi)$ представима в виде суперпозиции $\Phi \circ T$, где Φ — аналитическая функция и $T : D^* \to D^*$ — однолистное $q(\nu)$ – квазиконформное отображение полуплоскости на себя, нормированное условиями

$$T(0,0) = (0,0)\,, \quad T(1,0) = (1,0)\,, \quad T(\infty) = \infty\,.$$

Продолжая отображение T по симметрии на всю плоскость $\mathbf{R}^2$ и пользуясь теоремой 3.7.2, заключаем, что при достаточно больших $\xi \in D^*$ выполнено

$$C_1\, |\xi|^{1/q(\nu)} \le |T(\xi)| \le C_2\, |\xi|^{q(\nu)}\,,$$

где C_1, C_2 – некоторые постоянные. Соотношение (9.4.33) является теперь прямым следствием теоремы 9.4.3. □

Доказательство теоремы 9.4.4 завершается ссылкой на теорему 9.3.1. Действительно, в силу принципа максимума при всяком $t > 0$ имеем

$$\operatorname{osc}\{v(x),\, S_D(t)\} \geq \operatorname{osc}\{\operatorname{Im} w^*(\xi),\, |\xi| = m(t)\}\,.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} m^{-1/q(\nu)}(t)\operatorname{osc}\{v(x),\, S_D(t)\} \geq$$

$$\geq \underline{\lim}_{t\to\infty} m^{-1/q(\nu)}(t)\operatorname{osc}\{\operatorname{Im} w^*(\xi),\, |\xi| = m(t)\}\,,$$

и на основании (9.4.33)

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} m^{-1/q(\nu)}(t)\operatorname{osc}\{v(x),\, S_D(t)\} > 0\,.$$

С другой стороны, из (9.3.8) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших $t > 0$ выполнено

$$m(t) \geq \exp\left\{\frac{2(1-\varepsilon)}{\nu}\frac{\ln^2 t}{\alpha(t)}\right\}\,.$$

Объединяя найденные соотношения, приходим к (9.4.32). □

9.5 Узкие области

Условимся в обозначениях. Будем говорить, что односвязная область $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2$ есть m-область, если она имеет ровно $m < \infty$ различных компонент связности границы $\partial\mathcal{D}$. В частности, 0-область есть вся плоскость $\mathbf{R}^2$.

Положим

$$\beta(\mathcal{D}) = \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{\ln t} \int\limits_{\mathcal{D}(1,t)} \frac{dx_1 dx_2}{|x|^2}\,.$$

Величина $\beta(\mathcal{D})$ есть некоторая характеристика узости области $\mathcal{D}$ в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbf{R}^2$. В случае, когда $\mathcal{D}$ есть угол раствора θ, имеем $\beta(\mathcal{D}) = \theta$.

Если $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_N$ — система попарно неналегающих друг на друга областей, лежащих в области $\mathcal{D}$, то, как легко видеть,

$$\sum_{i=1}^{N} \beta(\mathcal{D}_i) \leq \beta(\mathcal{D})\,. \tag{9.5.34}$$

Имеет место следующий аналог теоремы И.С.С. Ниче в односвязных областях.

Теорема 9.5.1. *Пусть* $\mathcal{D}$ *– произвольная элементарная* m*-область в* $\mathbf{R}^2$*,* $m \geq 1$*, и пусть* $u(x)$ *– решение уравнения типа минимальной поверхности* (9.2.1), (9.2.2), (9.2.3), *удовлетворяющее условию* $u|_{\partial\mathcal{D}} = 0$. *Тогда, если*

$$\beta(\mathcal{D}) < \frac{2}{\nu\, q(\nu)}\,,$$

то $u(x) \equiv 0$ *всюду в* $\mathcal{D}$.

Нам потребуется следующая слабая форма принципа Фрагмена – Линделефа для обобщенных решений.

Лемма 9.5.1. *Пусть* $D \subset \mathbf{R}^2$ *– неограниченная область,* $\partial D \neq \emptyset$. *Если* $u(x)$ *– обобщенное решение уравнения типа минимальной поверхности* (9.2.1), (9.2.2), (9.2.3) *в области* D, *удовлетворяющее условию* $u|_{\partial\mathcal{D}} = 0$, *то либо* $u \equiv 0$ *в* D, *либо*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{M_u(r)}{\ln^{1/2} r} > 0\,, \qquad M_u(r) = \max_{x\in S_D(r)} |u(x)|\,.$$

Доказательство. Пусть $0 < r < R < \infty$ – фиксированные числа. Выберем функцию $\psi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ в виде

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 < t \leq r\,, \\ \dfrac{\ln t/r}{\ln R/r} & \text{при} \quad r < t < R\,, \\ 0 & \text{при} \quad R \leq t < +\infty\,. \end{cases}$$

Функция $\varphi(x) = u(x)\,\psi^2(|x|)$ имеет компактный носитель

$$\operatorname{supp}_{\widetilde{D}}\varphi \subset \widetilde{D} \cap \{x : |x| \leq R\}\,.$$

В соответствии с определением (9.2.5) обобщенного решения можем записать

$$\int\limits_D \Big\langle \nabla(u\,\psi^2), A(x,\nabla u)\Big\rangle\; dx_1\, dx_2 = 0\,.$$

Отсюда,

$$\int\limits_D \psi^2 \langle \nabla u, A(x,\nabla u)\rangle\, dx_1\, dx_2 = -2\int\limits_D u\,\psi\,\langle \nabla\psi, A(x,\nabla u)\rangle\; dx_1\, dx_2$$

и, далее, на основании интегрального неравенства Коши, имеем

$$\int\limits_D \psi^2 \langle \nabla u, A(x,\nabla u)\rangle \, dx_1\, dx_2 \leq$$

$$\leq 2 \left(\int\limits_D \psi^2 \left|A(x,\nabla u)\right|^2 \, dx_1\, dx_2 \right)^{1/2} \left(\int\limits_D u^2 \left|\nabla \psi\right|^2 dx_1\, dx_2 \right)^{1/2} .$$

Замечая, что из структурных условий (9.2.1) и (9.2.2) следует

$$|A(x,\nabla f)|^2 \leq \frac{\nu_2^2}{\nu_1} \langle \nabla u, A(x,\nabla u)\rangle \,,$$

находим

$$\int\limits_D \psi^2 \langle \nabla u, A(x,\nabla u)\rangle \, dx_1\, dx_2 \leq 4\, \frac{\nu_2^2}{\nu_1} M_u^2(R) \int\limits_D |\nabla \psi|^2 \, dx_1\, dx_2 \,.$$

Таким образом, пользуясь специальным выбором функции ψ, получаем

$$\int\limits_{B_D(r)} \langle \nabla u, A(x,\nabla u)\rangle \, dx_1\, dx_2 \leq 4\, \frac{\nu_2^2}{\nu_1} \frac{M_u^2(R)}{\ln^2 R/r} \int\limits_{r<|x|<R} \frac{dx_1\, dx_2}{|x|^2}$$

или,

$$\int\limits_{B_D(r)} \langle \nabla u, A(x,\nabla u)\rangle \, dx_1\, dx_2 \leq 8\pi\, \frac{\nu_2^2}{\nu_1} \frac{M_u^2(R)}{\ln R/r} \,.$$

Если $M_U(R)$ растет медленнее, чем указано в лемме, то, в силу (9.2.1), выполнено $\nabla u \equiv 0$ в D, а потому $u \equiv 0$ в D. $\Box$

Перейдем к **доказательству** теоремы. Так как уравнение удовлетворяет предположениям (9.2.1), (9.2.2), то по лемме 9.5.1 решение $u(x)$ либо тождественно постоянно, либо не ограничено в $\mathcal{D}$. Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in \mathcal{D}$ решение положительно. Обозначим через K_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ компоненты связности границы $\partial\mathcal{D}$, через d_i – расстояние от x_0 до K_i. Пусть

$$d = \max_{1\leq i\leq m} d_i \,.$$

Рассмотрим множество O_t, на котором

$$u(x) > t \max_{|x-x_0|\leq d} u(x) \,.$$

Так как решение $u(x)$ является локально липшицевой функцией, то для почти всех $t > 0$ граница ∂O_t локально спрямляема [144, теорема **3.2.31**].

Выберем $t > 1$ с вышеуказанным свойством. Пусть Σ – компонента связности множества ∂O_t. Множество Σ разбивает область $\mathcal{D}$ на две подобласти $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, каждая из которых в силу принципа максимума не ограничена. Поскольку Σ не может пересекать круг $|x - x_0| \le d$, одна из областей, например $\mathcal{D}_1$, является элементарной.

На границе области $\mathcal{D}_1$ решение $u(x)$ постоянно. При этом

$$\beta(\mathcal{D}_1) \le \beta(\mathcal{D}) < \frac{2}{\nu\, q(\nu)}\,.$$

Отсюда вытекает, что $u(x) \equiv \mathrm{const}$ на $\mathcal{D}_1$.

Чтобы убедиться в справедливости данного высказывания воспользуемся теоремой 9.4.4. Выберем $0 < \varepsilon_1 < 1$ столь малым, чтобы для некоторой последовательности чисел $t_k \to \infty$ было выполнено

$$\frac{\alpha(t_k)}{\ln t_k} \le \frac{2(1-\varepsilon_1)}{\nu\, q(\nu)}\,.$$

Тогда на основании (9.4.32) можно записать

$$\varliminf_{k\to\infty} t_k^{-(1-\varepsilon)/(1-\varepsilon_1)} \mathrm{osc}\,\{v(x), S_D(t_k)\} > 0 \quad (\forall\, \varepsilon > 0)\,,$$

и, полагая $\varepsilon < \varepsilon_1$, находим последовательность дуг $S_D(t_k)$, вдоль которой колебание $v(x)$ растет быстрее, чем линейная функция. Однако в силу условия (9.2.2) на уравнение,

$$|\nabla v(x)| \le |A(x, \nabla u(x))| \le \nu_2$$

и

$$\mathrm{osc}\,\{v(x), S_D(t_k)\} \le 2\pi \nu_2\, t_k\,.$$

Полученное противоречие позволяет сделать вывод, что $v(x) \equiv \mathrm{const}$ в $\mathcal{D}_1$ и $u(x) \equiv 0$ в $\mathcal{D}$. $\square$

Замечание 9.5.1. *Если $L[u] = 0$ – уравнение минимальной поверхности, то постоянные ν и $q(\nu)$ равны 1. Тогда если $\mathcal{D}$ – угол раствора α, то заключение теоремы 9.5.1 верно лишь при $\alpha < 2$. Это несколько хуже, чем результат Ниче и было бы желательно доказать теорему 9.5.1 при условии $\alpha < \pi$.*

Данное пожелание сформулировано в нашей статье 1981 г. Близкая задача была поставлена В.Х. Миксом в его докладе "The Global Theory of Minimal Surfaces"в Clay Mathematics Institute's Summer School (2001). Микс предполагает, что не может быть более 2 непересекающихся областей в $\mathbf{R}^2$, в каждой из которых имеется решение уравнения минимальной поверхности с нулевыми граничными данными. Дж. Спрук [221] доказал предположение Микса при некоторых специальных условиях на поведение решения $u(x)$. Ранее П. Ли и Дж. Ванг [183] доказали, что число таких областей не превосходит 12. Теорема 9.5.1 влечет, что это число не превосходит 3 (см. также [195].)

Аналогичная проблема для решений *уравнений типа максимальной поверхности* рассматривается в [75], [42, §3.7].

Из теоремы 9.5.1 вытекает следующее высказывание о единственности в задаче Дирихле для уравнения типа минимальной поверхности.

Следствие 9.5.1. *Пусть $\mathcal{D}$ – m-область, $m \ge 1$, и пусть $\varphi(x)$ – непрерывная ограниченная функция, определенная всюду на границе $\partial\mathcal{D}$. Пусть $u_i(x)$ $(i = 1, 2)$ – непрерывные в $\overline{\mathcal{D}}$ решения уравнения типа минимальной поверхности* (9.2.1), (9.2.2), (9.2.3) *такие, что*

$$u_i(x)|_{\partial\mathcal{D}} = \varphi(x) \quad (i = 1, 2)\,.$$

Тогда, если $\beta(\mathcal{D}) < 2/(\nu\, q(\nu))$, то $u_1(x) = u_2(x)$ всюду в области $\mathcal{D}$.

Доказательство будет немедленно вытекать из следствия 5 работы [73] (см. также лемму 9.5.1), если показать, что каждое из решений $u_i(x)$ $(i = 1, 2)$ ограничено в области $\mathcal{D}$.

Предположим противное. Не ограничивая общности, можно считать, что функция $u_i(x)$ не ограничена сверху в $\mathcal{D}$. Тогда существуют постоянные $c_1 > c > 0$ такие, что $\varphi(x) < c$ всюду на границе $\partial\mathcal{D}$ и множество

$$O = \{x \in \mathcal{D} : u_i(x) > c_1\}$$

не пусто. В силу принципа максимума, граница ∂O не имеет компактных компонент связности. Зафиксируем точку $x_0 \in O$ и обозначим через K_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ компоненты связности множества ∂O, отделяющие x_0 от соответствующей компоненты границы $\partial\mathcal{D}$. Рассмотрим $\mathcal{D}'$ — подобласть $\mathcal{D}$, содержащую точку x_0 и имеющую множество $\cap_{i=1}^m K_i$ в качестве границы. Область $\mathcal{D}'$ есть m-область. Так как $u_i(x) = c_1$ на $\partial\mathcal{D}'$ и

$$\beta(\mathcal{D}') \le \beta(\mathcal{D}) < 2/(\nu q(\nu))\,,$$

то на основании теоремы 9.5.1 заключаем, что $u_i(x) \equiv c_1$ в $\mathcal{D}'$, что невозможно. $\square$

Другое применение теоремы об "узких"областях мы свяжем с условием знакопостоянства решений.

Следствие 9.5.2. *Пусть $\mathcal{D}$ – m-область, $m \geq 1$, и пусть $u(x)$ – непрерывное в $\overline{\mathcal{D}}$ решение уравнения типа минимальной поверхности* (9.2.1), (9.2.2), (9.2.3) *такое, что $u(x)|_{\partial\mathcal{D}} = 0$. Тогда, если $\beta(\mathcal{D}) < 4/(\nu\, q(\nu))$, то $u(x)$ сохраняет знак всюду в области $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Действительно, предполагая, что решение меняет знак, и рассуждая как и выше, найдем две непересекающиеся подобласти $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ области $\mathcal{D}$, на границе каждой из которых решение $u(x)$ постоянно. Пользуясь неравенством (9.5.34), имеем

$$\beta(\mathcal{D}_1) + \beta(\mathcal{D}_2) < \frac{4}{\nu\, q(\nu)}\,,$$

и хотя бы одна из областей удовлетворяет условиям теоремы 9.5.1. Тем самым, хотя бы на одной из этих областей решение $u(x)$ постоянно, что невозможно. □

9.6 Критические точки решения

Следуя М. Морсу [90, глава I, §2], определим понятие индекса критической точки решения $u(x)$. Прежде всего заметим, что согласно теореме 9.4.2 отображение $w(x) = u(x) + \dfrac{i}{\nu_1} v(x)$ есть композиция голоморфной функции и гомеоморфизма, т.е. является *псевдоголоморфной* (или *псевдоаналитической*) функцией[2]. Тем самым, его вещественная и мнимая части суть *псевдогармонические* функции, т.е. представимы в виде суперпозиций $h \circ T$ подходящих гармонических функций h и гомеоморфизмов T.

Пусть $x_0 \in \mathcal{D}$ – произвольная точка и пусть E – множество, где $u(x) = u(x_0)$. Множество E разбивает окрестность точки x_0 на $2s$ криволинейных секторов. Точка x_0 называется *критической* точкой решения $u(x)$, если $s > 1$. Число $s-1$ называется *топологическим индексом* решения $u(x)$ в точке x_0 и обозначается через $i(x_0)$.

В силу псевдогармоничности решения $u(x)$ его критические точки изолированы. Для гармонических функций в подобластях $\mathbf{R}^2$ это является по существу единственным ограничением на распределение критических точек. Как следует из теоремы Вейерштрасса о представлении голоморфной функции бесконечным произведением, всякая последовательность точек $a_1, a_2, \ldots$, не имеющая предельных точек в области, может служить последовательностью критических точек некоторой гармонической функции, определенной в этой области (см., например, [118,

[2] О псевдоаналитических функциях см. С. Стоилов [103, глава V], Ф.Г. Авхадиев [1, глава 1].

с. 235]). То же самое может быть сказано и в отношении решений линейных уравнений эллиптического типа достаточно общего вида. Условия (9.2.1), (9.2.2) принадлежности уравнения (9.2.3) классу уравнений типа минимальной поверхности накладывают существенные ограничения на количество и индексы критических точек решения $u(x)$.

Именно, имеет место теорема.

Теорема 9.6.1. *Пусть $\mathcal{D}$ – произвольная элементарная m-область с границей $\partial\mathcal{D}$, состоящей из простых дуг Жордана. Если $m > 0$, то пусть $\varphi(x)$ – непрерывная функция, определенная на $\partial\mathcal{D}$ и имеющая там j, $0 \le j < \infty$, точек локального экстремума. Предположим, что $u(x)$ – непрерывное в $\overline{\mathcal{D}}$ решение уравнения типа минимальной поверхности* (9.2.1), (9.2.2), (9.2.3), *удовлетворяющее условию*

$$u(x)|_{\partial\mathcal{D}} = \varphi(x)\,.$$

Тогда $u(x)$ имеет в $\mathcal{D}$ конечное число критических точек $a_1, a_2, \ldots, a_N$ и справедливо неравенство

$$2\sum_{k=1}^{N} i(a_k) - \delta(m,j) + 2 \le \frac{1}{2}\nu q(\nu)\,\beta(\mathcal{D})\,, \tag{9.6.35}$$

где $\delta(m,j) = 2m + j$ в общем случае и $\delta(m,0) = m$ при $\varphi \equiv 0$ на $\partial\mathcal{D}$.

Доказательство. Пусть a_1, $a_2, \ldots, a_k, \ldots$ – критические точки решения $u(x)$. Обозначим через E_k ту из компонент связности множества

$$\{x \in \mathcal{D} : u(x) = u(a_k)\}\,,$$

которая содержит точку a_k.

Рассмотрим множество E_1. В силу принципа максимума и односвязности $\mathcal{D}$, каждая из компонент связности $O_{1,n}$ множества $\mathcal{D} \setminus E_1$ односвязна и неограничена. Так как критические точки решения $u(x)$ изолированы, то достаточно малая окрестность точки a_1 разбивается множеством E_1 ровно на

$$l_1 = 2\,i(a_1) + 2$$

криволинейных секторов. Пусть Δ_{11}, ..., Δ_{1l_1} — те из областей $O_{1,n}$, которые содержат точку a_1 в своем замыкании. В целом, число таких областей не менее l_1, поскольку множество E_1 не может иметь замкнутых циклов.

Рассмотрим множество E_2. Предположим, что $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. Тогда $E_1 = E_2$ и существует $l_2 = 2\,i(a_2)$ компонент связности Δ_{21}, ..., Δ_{2l_2} множества $\mathcal{D} \setminus E_1$, примыкающих к точке a_2 и отличных от Δ_{1n}. Тем самым мы находим

$$2\,i(a_1) + 2\,i(a_2) + 2$$

не налегающих друг на друга неограниченных односвязных областей, расположенных в $\mathcal{D}$ и имеющих на своих границах постоянное значение функции $u(x)$.

Пусть $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ и точка a_2 принадлежит одной из областей Δ_{1n}, например, Δ_{11}. Множество Δ_{11} разбивается континуумом E_2 на области $O_{2,n}$, из которых ровно

$$l_2 = 2\, i(a_2) + 1$$

областей $\Delta_{21}, \ldots, \Delta_{2l_2}$ примыкают к точке a_2, односвязны и неограничены. И в этом случае возникает

$$2\, i(a_1) + 2\, i(a_2) + 2$$

не налегающих друг на друга областей в $\mathcal{D}$, на границе каждой из которых решение $u(x)$ постоянно.

Случай, в котором $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, но точка a_2 не принадлежит ни одной из областей Δ_{1n}, анализируется аналогично.

Рассмотрим далее поочередно множества $E_3, \ldots, E_N$. Выполнив N шагов, мы найдем, как минимум,

$$2s = 2 \sum_{k=1}^{N} i(a_k) + 2$$

попарно неналегающих подобластей области $\mathcal{D}$ с описанными свойствами. Некоторое число из этих областей примыкает к границе $\partial\mathcal{D}$. В общем случае их не более чем $2m + j$ и существует, по крайней мере,

$$p = 2\, s - 2\, n - j$$

попарно неналегающих, неограниченных областей $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_p$, на границе каждой из которых решение $u(x)$ постоянно.

Из соотношения (9.5.34) следует, что хотя бы одна из этих областей, например $\mathcal{D}_1$, обладает свойством

$$\beta(\mathcal{D}_1) \le \frac{1}{p}\, \beta(\mathcal{D})\,.$$

Тем самым, предполагая неравенство (9.6.35) нарушенным, имеем

$$\frac{1}{2}\, p\, \nu\, q(\nu)\, \beta(\mathcal{D}_1) \le \frac{1}{2}\, \nu\, q(\nu)\, \beta(\mathcal{D}) < 2s - 2m - j = p\,,$$

и потому

$$\beta(\mathcal{D}_1) < \frac{2}{\nu\, q(\nu)}\,.$$

На основании теоремы 9.5.1 отсюда заключаем, что $u(x) \equiv \mathrm{const}$ в $\mathcal{D}_1$. Это невозможно.

В случае, когда $\varphi(x) \equiv 0$ на ∂D, необходимо исключить из рассмотрения лишь подобласти, содержащие в качестве компонент связности своей границы одну или несколько компонент связности границы ∂D. Число таких подобластей не превышает m. Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны, и доказательство теоремы завершено. $\square$

В специальных случаях $m = 0$ и $m = 1$ из неравенства (9.6.35) вытекают признаки отсутствия у решения критических точек; именно, имеют место следующие высказывания.

Следствие 9.6.1. *Если $u(x)$ – целое решение уравнения* (9.2.3) *со структурными ограничениями* (9.2.1), (9.2.2) *и*

$$\nu\, q(\nu) < \frac{4}{\pi}\,,$$

то $u(x)$ не имеет критических точек.

Следствие 9.6.2. *Пусть $\mathcal{D}$ есть 1-область и $u(x)$ есть решение уравнения* (9.2.3)*, обращающееся в нуль на границе $\partial\mathcal{D}$. Предположим, что уравнение удовлетворяет структурным ограничениям* (9.2.1), (9.2.2) *и*

$$\beta(\mathcal{D}) \leq \frac{6}{\nu\, q(\nu)}\,.$$

Тогда решение $u(x)$ не имеет в $\mathcal{D}$ критических точек.

Для решений уравнения минимальной поверхности (2.3.14) последнее условие записывается в виде $\beta(\mathcal{D}) < 6$. Если бы теорема 9.5.1 была верна при $\beta(\mathcal{D}) < \pi$, то, как и выше, отсюда следовало бы, что решения уравнения минимальной поверхности, обращающиеся в нуль на границе $\partial\mathcal{D}$, не могут иметь критических точек в 1-области.

Пример функции

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{\mathrm{ch}^2 x_1 - x_2^2} \quad \text{(верхняя половина катеноида)}$$

показывает, что уже в 2-областях существуют решения уравнения минимальной поверхности, имеющие критические точки. Эта функция определена в 2-области $\mathcal{D}$, описываемой неравенством

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 < \mathrm{ch}^2 x_1\}\,,$$

обращается в нуль на границе $\partial\mathcal{D}$ и имеет критическую точку $(0, 0)$ индекса 1.

Задачи: 1) Дать решение задачи Ниче, указав в полном объеме класс областей, на которых принцип максимума для решений уравнения минимальной поверхности имеет место в усиленной формулировке. 2) Найти оценки суммарного топологического индекса для целых решений уравнения типа минимальной поверхности, лучшие, чем в теореме 9.6.1. 3) Расширить класс уравнений типа минимальной поверхности, для решений которых указанные эффекты имеют место.

Глава 10

Решения вблизи границы

Изучаются обобщенные решения уравнений типа минимальных поверхностей. Устанавливается, что всякое решение имеет на границе не более счетного числа скачков. В частности, всякое решение, определенное во внешности круга, продолжимо по непрерывности всюду на граничную окружность за возможным исключением некоторого счетного множества точек. Приводится оценка суммы некоторых нелокальных характеристик скачков решения на границе. Доказывается теорема типа теоремы Фату об угловых граничных значениях. См. [65], [177], [68], [187], [81].

10.1 Основные результаты

Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ — область и пусть $e \subset D$ — некоторое множество нулевой линейной меры Хаусдорфа.

Пусть
$$A = (A_1(x,\xi), A_2(x,\xi)) : (D \setminus e) \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$
— непрерывная вектор-функция. Предположим, что для всякой точки $x = (x_1, x_2) \in D \setminus e$ и всякого $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$ выполнены следующие структурные условия:

$$\nu_1 \frac{|\xi|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \le \sum_{i=1}^{2} \xi_i \, A_i(x,\xi), \tag{10.1.1}$$

$$|A(x,\xi)| \le \nu_2(x), \tag{10.1.2}$$

где ν_1 — положительная постоянная и $\nu_2(x)$ — положительная непрерывная функция.

Ниже мы будем предполагать, что функция $\nu_2(x)$ подчинена следующему ограничению

$$\varliminf_{\{D_n\}} \int\limits_{\partial D_n} \nu_2(x)\,|dx| = \nu_2^* < \infty, \tag{10.1.3}$$

где нижний предел берется по всевозможным последовательностям $\{D_n\}$ подобластей области D со спрямляемыми границами, для которых $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$, $\cup_{n=1}^{\infty}\overline{D}_n = D$. (Здесь и ниже символом $\overline{H}$ обозначается замыкание множества $H \subset \mathbf{R}^2$ в топологии $\mathbf{R}^2$.)

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{d}{dx_i}\, A_i(x, \nabla f) = 0\,. \tag{10.1.4}$$

Как и выше, в главе VIII, мы будем использовать следующее определение обобщенного решения. Обозначим через $D_b(f)$ подмножество D, в каждой точке которого функция f не имеет полного дифференциала. Под *обобщенным решением* уравнения (10.1.4) будем понимать произвольную локально липшицеву функцию f такую, что для всякой ограниченной подобласти Δ, $\overline{\Delta} \subset D$, со спрямляемой границей $\partial\Delta$, $\mathrm{mes}_1\,(\partial\Delta \cap D_b(f)) = 0$, и произвольной функции $\varphi \in \mathrm{Lip}\,\overline{\Delta}$ имеет место соотношение

$$\int\limits_{\partial\Delta} \varphi \sum_{i=1}^{2} A_i(x, \nabla f)\, n_i\, |dx| = \int\limits_{\Delta} \sum_{i=1}^{2} \varphi'_{x_i}\, A_i(x, \nabla f)\, dx_1\, dx_2\,. \tag{10.1.5}$$

Здесь и ниже $n = (n_1(x), n_2(x))$ есть единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Delta$.

Множество точек разрыва вектор-функции A имеет нулевую линейную меру Хаусдорфа и, тем самым, контурный интеграл в (10.1.5) существует.

Упражнение. Доказать (или опровергнуть !), что классы обобщенных решений уравнений типа минимальной поверхности (9.2.1), (9.2.2), (9.2.3), вводимых здесь и в главе IX совпадают. $\square$

Пусть f – непрерывная функция, определенная в области $D \subset \mathbf{R}^2$, имеющей спрямляемую границу. Говорят, что функция f имеет *конечное (или бесконечное) угловое граничное значение* α в точке $a = (a_1, a_2) \in \partial D$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

вдоль любого угла C с вершиной в точке a, лежащего внутри D.

Следующая теорема является версией классической теоремы П. Фату [96, глава I, §5]. *Всякая ограниченная, гармоническая в единичном круге B функция f имеет угловые граничные значения почти всюду на окружности ∂B.*

Более того, существуют примеры неограниченных гармонических функций, не имеющих угловых граничных значений на множествах $H \subset \partial B$ линейной меры $\mathrm{mes}_1 \mathrm{H} > 0$ [43, глава 2, §10].

Задача. (И.С.С.Ниче [200, глава VII, n.4]) Справедливы ли теоремы типа Фату для решений f уравнения минимальных поверхностей (2.3.14) ?

Следующий результат в данном направлении был получен автором в [68].

А) *Всякое решение уравнения минимальных поверхностей* (2.3.14) *имеет конечные или бесконечные угловые граничные значения почти всюду на ∂B.*

Подчеркнем, что никаких дополнительных ограничений на решение не предполагается.

Вместе с тем необходимо заметить, что поведение решений уравнения (2.3.14) зависит от специфики строения области, где эти решения определены. Именно, для решений, определенных во внешности круга B, имеет место утверждение [68].

В) *Всякое решение уравнения минимальных поверхностей* (2.3.14), *определенное над $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{B}$, продолжимо по непрерывности почти всюду на границу, т.е. почти всюду на окружности ∂B существует конечный предел*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{B}.$$

В настоящей главе мы доказываем следующее утверждение

Теорема 10.1.1. *Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ — область с жордановой спрямляемой границей. Всякое обобщенное решение уравнения* (10.1.4) *со структурными условиями* (10.1.1), (10.1.2), (10.1.3) *имеет конечные или бесконечные угловые граничные значения почти всюду на ∂D.*

Относительно обобщений см. [187], [81].

Пример 1. Решение уравнения (2.3.14) может принимать бесконечные значения на множестве положительной меры. Рассмотрим поверхность Шерка

$$f(x_1, x_2) = \log \frac{\cos x_2}{\cos x_1},$$

определенную над квадратом $-\frac{\pi}{2} < x_i < \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2)$. Эта поверхность минимальна, а функция f равна $\pm\infty$ на горизонтальных и вертикальных участках границы квадрата. В вершинах квадрата вдоль его границы функция f имеет скачки. $\square$

Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ — односвязная область с жордановой границей ∂D и $O \in D$ — фиксированная точка. Пусть $U \subset D$ — открытое множество. Обозначения: $[U] = \overline{U} \setminus \partial D$, $\partial' U = [U] \setminus U$.

Определение 10.1.1. *Пусть f — непрерывная в области D функция. Будем называть $a \in \partial D$ точкой квазинепрерывности f, если существует последовательность подобластей $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$, области D со свойствами:*

(α) *каждая из $\partial' D_k$ отделяет a от фиксированной точки O;*

(β) $\cap_k [D_k] = \emptyset$; $\operatorname{length} \partial' D_k \to 0$ *при* $k \to \infty$;

(γ) $\liminf_{k\to\infty} \operatorname{osc}(\partial' D_k,\ f) = 0$,

где $\operatorname{osc}(A, f) = \sup_{x\in A} f - \inf_{x\in A} f$ *— колебание функции f на множестве A.*

Все остальные точки ∂D будем называть точками скачка функции f.

Введем следующую нелокальную характеристику граничной точки $a \in \partial D$. Положим

$$\delta(a, f, O) = \inf_{\gamma} \max\{\operatorname{osc}(\gamma, f), \operatorname{length}(\gamma)\},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным дугам $\gamma \subset D$, $\overline{\gamma} \cap \partial D \neq \emptyset$, разделяющим точки a и O в D.

Ясно, что точка $a \in \partial D$ является точкой квазинепрерывности f тогда и только тогда, когда $\delta(a, f, O) = 0$.

Строение решений уравнения (2.3.14) в точках скачка исследовалось К. Ланкастером [177]. Мы докажем, что граничные точки квазинепрерывности решений f уравнения типа минимальной поверхности являются типичными.

Рассмотрим множество $\mathcal{H}$ всех кусочно непрерывных функций $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ со свойствами:

(i) $0 \le h(t) \le 1$ для всех $t \in \mathbf{R}$;

(ii) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt \le h_0 < \infty, \quad h_0 = \mathrm{const}.$

Имеет место теорема.

Теорема 10.1.2. *Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ — односвязная область, ограниченная простой спрямляемой жордановой кривой ∂D, $O \in D$. Пусть f —*

произвольное решение в D уравнения (10.1.4) *со структурными ограничениями* (10.1.1), (10.1.2), (10.1.3).

Тогда для произвольной $h \in \mathcal{H}$ функция

$$w(x) = \int\limits_{-\infty}^{f(x)} h(t)\,dt$$

квазинепрерывна во всех точках $a \in \partial D$ за исключением разве лишь счетного множества.

Более того, если $a_1, a_2, \ldots$ — точки скачка f, то

$$\sum_{i=1}^{3} \max\left\{\pi - \frac{K^2}{\pi\delta^2(a_i,w,O)}, 0\right\} + \\ +2\sum_{i=4}^{\infty} \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\exp\left\{-\frac{K^2}{\delta^2(a_i,w,O)}\right\}\right) \le \pi\,, \tag{10.1.6}$$

где

$$K = 2\sqrt{\pi}\left(h_0\frac{\nu_2^*}{\nu_1} + 2\,\mathrm{mes}_2\,(D)\right)^{1/2}.$$

Пример 2. Предположим, что $|f| < 1$ всюду в D. Выберем

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in [-1,1]\,, \\ 0 & \text{при} \quad |t| > 1\,. \end{cases}$$

Для вспомогательной функции

$$w(x) = \int\limits_{-\infty}^{f(x)} h(t)\,dt$$

выполнено $0 \le w(x) \le 2$. Точки квазинепрерывности функции $f(x)$ суть точки квазинепрерывности $w(x)$, при этом

$$\delta(a_k,w,O) = \delta(a_k,f,O) \quad \text{для всех} \quad k = 1,2,\ldots\,.$$

□

Пример 3. В общем случае неограниченной функции $f(x)$ можем положить

$$h(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Тогда

$$w(x) = \int\limits_{-\infty}^{f(x)} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} f(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Здесь теорема 10.1.2 гарантирует квазинепрерывность функции $\operatorname{arctg} f(x)$. Ясно, что в общем случае квазинепрерывность этой функции не влечет квазинепрерывности $f(x)$. Функция $f(x)$ из примера 1 не является квазинепрерывной ни в одной граничной точке, однако функция $\operatorname{arctg} f(x)$ квазинепрерывна всюду на границе квадрата за исключением его вершин. $\square$

В качестве следствия теоремы 10.1.2 мы имеем утверждение.

Теорема 10.1.3. *Пусть $\mathcal{E} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1\}$ — внешность единичной окружности C. Пусть $D \subset \mathcal{E}$ — область и $\Gamma \subset (C \cap \partial D)$ — некоторая граничная дуга.*

Тогда всякое решение f уравнения минимальной поверхности (2.3.14) *в D продолжимо по непрерывности в любую точку $a \in \Gamma$, исключая, самое большее, счетное множество.*

Задачи: 1) Найти аналоги теоремы 10.1.3 для решений уравнений типа минимальной поверхности. 2) Доказать (или опровергнуть) теорему 10.1.3 после замены в ее формулировке граничной окружности вогнутой кривой достаточно общего вида.

10.2 Вспомогательное конформное отображение

10.2.1 Определение и свойства

Пусть Ω — график локально липшицевой в области $D \subset \mathbf{R}^2$ функции $x_3 = f(x_1, x_2)$ и пусть

$$ds_\Omega^2 = (1 + f_{x_1}'^2)\, dx_1^2 + 2 f_{x_1}'\, f_{x_2}'\, dx_1\, dx_2 + (1 + f_{x_2}'^2)\, dx_2^2 \tag{10.2.7}$$

— квадрат длины линейного элемента на Ω.

Выберем произвольно точку $a \in D$, где f имеет полный дифференциал. Функция $f \in \operatorname{Lip} D$, а потому по теореме Радемахера имеет полный дифференциал почти всюду в D.

Квадратичная форма ds_Ω^2 положительно определена, и бесконечно малая окружность в метрике ds_Ω^2 с центром в точке a есть бесконечно малый эллипс в евклидовой метрике. Пусть $\theta(a)$, $0 \le \theta < \pi$, и $p(a)$, $p \ge 1$, — характеристики этого эллипса, т.е. угол между его наибольшей осью и осью Ox_1 и отношение его большей оси к меньшей, соответственно.

Не трудно видеть, что

$$\theta(a) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{f'_{x_2}(a)}{f'_{x_1}(a)}, \quad p(a) = \sqrt{1 + |\nabla f(a)|^2}.$$

Рассмотрим квазиконформное отображение $u = u(x)$ области D в плоскость переменной $u = (u_1, u_2)$ с характеристиками, почти всюду в D совпадающими с $\theta(x)$ и $p(x)$. Поскольку $\operatorname{ess\,sup}_{D'} p(x) < \infty$ для произвольной ограниченной подобласти D', $\overline{D'} \subset D$, такое отображение существует и определено с точностью до конформного отображения в $u-$плоскости (см. теорему 3.7.2).

Мы будем предполагать известными следующие свойства квазиконформного отображения $u : D \to \mathbf{R}^2$.

1) Отображение $u = u(x)$ имеет полный дифференциал почти всюду в D и в каждой точке дифференцируемости преобразует бесконечно малый эллипс с характеристиками $\theta(x)$, $p(x)$ в бесконечно малые круги (см. [8, §1]).

2) Отображение $u = u(x)$ имеет обобщенные производные в смысле С.Л. Соболева, суммируемые с квадратом локально в D, т.е. принадлежит классу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ (см. [8, §4]).

3) Обозначим через $G = u(D)$ образ области D при отображении $u = u(x)$, через $x = x(u) = (x_1(u), x_2(u))$ — обратное отображение. Характеристика $p(u)$ обратного отображения $x : G \to D$ локально ограничена в области G (см. [8, §1]) и, в силу свойства 2), отображение $x = x(u)$ также принадлежит классу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(G)$.

Положим $x_3(u) = f(x(u))$. Так как функция f локально липшицева в D, то, в силу 3), функция $x_3(u) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(G)$.

Из 2) вытекает, что вектор-функция $\chi(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ также принадлежит классу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(G)$. Ясно, что $\chi(u)$ имеет дифференциал почти всюду.

Вектор-функция $\chi : G \to \Omega$ осуществляет взаимно-однозначное отображение области $G = u(D)$ на поверхность Ω. Пусть $a \in G$ — точка дифференцируемости χ. Обозначим через $j : F \to D$ проекцию поверхности Ω на область D. Отображение $\chi : G \to \Omega$ является композицией отображений j^{-1} и $x(u)$, а потому преобразует бесконечно малый круг с центром в точке a сначала в бесконечно малый эллипс в $x-$плоскости (по свойству 1)) и, далее, в бесконечно малый круг на поверхности Ω (по определению характеристики $p(x)$).

Тем самым, $\chi : G \to \Omega$ конформно почти всюду и почти всюду на G обладает свойствами (2.1.2). Переменные u_1, u_2 суть изотермические координаты на Ω.

10.2.2 Конформный тип поверхности

В силу сказанного выше, будем говорить, что поверхность Ω имеет параболический конформный тип, если $G = \mathbf{R}^2$, и гиперболический конформный тип, если $G \neq \mathbf{R}^2$.

Фиксируем произвольно функцию $h \in \mathcal{H}$. Обозначим через W график функции

$$w(x) = \int\limits_{-\infty}^{f(x)} h(t)\,dt.$$

Теорема 10.2.1. *Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ — односвязная область, ограниченная простой жордановой спрямляемой кривой. Если f есть обобщенное решение уравнения* (10.1.4) *в D со структурными ограничениями* (10.1.1), (10.1.2), (10.1.3)*, то для любой $h \in \mathcal{H}$ график W функции $x_3 = w(x)$ имеет гиперболический конформный тип.*

Некоторые признаки гиперболичности и параболичности конформного типа графика функции могут быть получены из теоремы 1.7.1. Приведем для полноты два таких признака.

Теорема 10.2.2. *Пусть f – локально липшицева функция и пусть Ω – ее график.*

Тогда, если Ω задана над кругом $|x| < R$, $0 < R \leq \infty$, и для некоторого $0 < r < R$ выполнено

$$\int\limits_{r<|x|<R} \frac{1 + \langle \nabla f, x^{\perp} \rangle^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \, \frac{dx_1 dx_2}{|x|^2} < \infty \,, \qquad (10.2.8)$$

то Ω имеет гиперболический конформный тип.

Если Ω определена над всей плоскостью $\mathbf{R}^2$ и

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^2} \int\limits_{1<|x|<R} \frac{1 + \langle \nabla f, (x/|x|) \rangle^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \, dx_1 dx_2 = 0 \,, \qquad (10.2.9)$$

то Ω имеет параболический конформный тип.

Здесь символом $x^{\perp}$ обозначен единичный вектор в $\mathbf{R}^2$, ортогональный вектору x и образующий угол $3\pi/2$ в направлении от $x^{\perp}$ к x.

Доказательство несложно. Зафиксируем $0 < r < R < \infty$. Пусть $\Gamma(r,R)$ – семейство всевозможных локально спрямляемых дуг γ, соединяющих граничные окружности и лежащих в круговом кольце $\{r < |x| < R\}$. Так как $\mathrm{mod}_{\Omega}\,\Gamma(r,R)$ есть конформный инвариант, то Ω имеет параболический тип тогда и только тогда, когда $\mathrm{mod}_{\Omega}\,\Gamma(r,R) = 0$. В силу замечания, сделанного в конце раздела 1.7, имеем

$$\left(\int\limits_r^R \frac{d\tau}{\tau \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 + \langle \nabla f, (x/|x|)\rangle^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, d\theta} \right)^{-1} \geq$$

$$\geq \mathrm{mod}_{\Omega}\Gamma(r,R) \geq \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\int\limits_r^R \frac{1 + \langle \nabla f, x^{\perp}\rangle^2}{\tau\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, d\tau}.$$

Пользуясь интегральным неравенством Коши, находим

$$(R-r)^2 \leq \int\limits_r^R \frac{d\tau}{\tau \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 + \langle \nabla f, (x/|x|)\rangle^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, d\theta} \times$$

$$\times \int\limits_r^R \tau\, d\tau \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 + \langle \nabla f, (x/|x|)\rangle^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, d\theta$$

и, далее,

$$\frac{(R-r)^2}{\int\limits_{r<|x|<R} \frac{1+\langle \nabla f, (x/|x|)\rangle^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, dx_1 dx_2} \le \int\limits_r^R \frac{d\tau}{\tau \int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\langle \nabla f, (x/|x|)\rangle^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, d\theta},$$

что доказывает (10.2.9).

Для доказательства (10.2.2) воспользуемся неравенством Коши

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} d\theta\right)^2 \le \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\tau \int\limits_r^R \frac{1+\langle \nabla f, x^\perp\rangle^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, d\tau} \int\limits_0^{2\pi} \tau\, d\theta \int\limits_r^R \frac{1+\langle \nabla f, x^\perp\rangle^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, d\tau$$

и, далее,

$$\frac{4\pi^2}{\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_r^R \frac{1+\langle \nabla f, x^\perp\rangle^2}{\tau\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, d\tau} \le \int\limits_0^{2\pi} \frac{\tau\, d\theta}{\int\limits_r^R \frac{1+\langle \nabla f, x^\perp\rangle^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, d\tau}.$$

Таким образом, мы получаем

$$\frac{4\pi^2}{\int\limits_{r<|x|<R} \frac{1+\langle \nabla f, x^\perp\rangle^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, \frac{dx_1 dx_2}{|x|^2}} \le \int\limits_0^{2\pi} \frac{\tau\, d\theta}{\int\limits_r^R \frac{1+\langle \nabla f, x^\perp\rangle^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, d\tau}.$$

Условие (10.2.8) влечет, что $\mathrm{mod}_\Omega \Gamma(r,R) > 0$ и поверхность Ω имеет параболический конформный тип. $\Box$

Относительно признаков конформного типа см. также [217], [196], [66], [154], [119] и др.

10.2.3 Свойства относительного расстояния

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ — график локально липшицевой функции f, определенной над односвязной областью $D \subset \mathbf{R}^2$, и $O' \in \Omega$ — фиксированная точка.

Для произвольной пары точек $p, q \in \Omega$ пусть $\rho(p, q; O', \Omega)$ – относительное расстояние между ними, введенное в главе 4. Символом $\partial\tilde{\Omega}$, как и выше, обозначаем границу Ω в метрике ρ, т.е. множество всевозможных последовательностей $\{p_n\}$ точек на Ω, фундаментальных по относительной метрике ρ и не имеющих точек накопления на Ω.

Если Ω — график постоянной функции $x_3 \equiv \mathrm{const}$ над областью $D \subset \mathbf{R}^2$, то мы идентифицируем Ω с D, и относительная граница $\partial\tilde{\Omega}$ совпадает с границей К. Каратеодори области D.

Предположим, что область D односвязна, а ее образ $G = u(D)$ отличен от целой плоскости $\mathbf{R}^2$. Так как соотношения (2.1.2) инвариантны относительно конформных преобразований в плоскости переменной $u = (u_1, u_2)$, то, не умаляя общности, можем считать область G ограниченной.

Рассмотрим описанное выше конформное отображение

$$\chi(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u)) : G \to \Omega, \quad u = (u_1, u_2)\,. \tag{10.2.10}$$

Положим $O'' = \chi^{-1}(O')$ и обозначим через $r(G)$ евклидово расстояние от O'' до ∂G.

Следующее утверждение есть специальный случай теоремы 4.3.1.

Теорема 10.2.3. *Если площадь* $\mathrm{mes}_2\,(\Omega) < \infty$, *то для произвольной пары точек* $p, q \in G$, *удовлетворяющих условию*

$$\rho(p, q; O'', G) < \min\{1, \frac{1}{16}\, r^4(G)\}, \tag{10.2.11}$$

справедлива следующая оценка относительного расстояния

$$\rho(\chi(p), \chi(q); O', \Omega) \le K \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p, q; O'', G)}. \tag{10.2.12}$$

Здесь

$$K = 2\sqrt{\pi\, \mathrm{mes}_2\,(\Omega)}.$$

Для **доказательства** достаточно заметить, что поверхность Ω, задаваемая графиком локально липшицевой функции f, является локально билипшицевой. Это очевидно, поскольку для любой подобласти $D' \subset\subset D$ соотношение (10.2.7) влечет

$$|dx|^2 \le ds^2_\Omega = (1+f'^2_{x_1})\, dx_1^2 + 2f'_{x_1}\, f'_{x_2}\, dx_1\, dx_2 + (1+f'^2_{x_2})\, dx_2^2 \le C(f, D')\, |dx|^2\,,$$

где $C(f, D')$ – постоянная. $\square$

Оценка (10.2.12) влечет, что всякая фундаментальная по относительному расстоянию $\rho(p, q; O'', G)$ последовательность точек $\{a_n\} \subset G$ преобразуется в фундаментальную в метрике $\rho(\chi(p), \chi(q); O', \Omega)$ последовательность $\{\chi(a_n)\} \subset \Omega$. Тем самым, мы получаем утверждение.

Следствие 10.2.1. *В описанных в теореме* 10.1.3 *условиях конформное отображение* (10.2.10) *продолжимо до непрерывного отображения "относительной границы"$\partial\tilde{G}$ на "относительную границу"$\partial\tilde{\Omega}$.*

Отметим следующее важное свойство проекции $j : F \to D$.

Лемма 10.2.1. *Пусть Ω — график локально липшицевой функции, определенной над односвязной областью $D \subset \mathbf{R}^2$, и проекция $j(O') = O$.*

Тогда для произвольной пары точек $p, q \in \Omega$ выполнено

$$\rho(j(p),\, j(q); O, D) \le \rho(p,\, q; O', \Omega). \tag{10.2.13}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что проекция $j : F \to D$ не увеличивает длин кривых. □

Пусть $x(u) = (x_1(u), x_2(u)) : G \to D$ — отображение, осуществляемое компонентами $x_1(u)$, $x_2(u)$ вектор-функции (10.2.10).

Следствие 10.2.2. *Если $\mathrm{mes}_2\,(\Omega) < \infty$, то для произвольной пары точек $p, q \in G$ со свойством* (10.2.11) *выполнено*

$$\rho(x(p),\, x(q); O, D) \le K \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p,\, q; O'', G)},$$

где K — постоянная из теоремы 10.2.3.

Доказательство следует из теоремы 10.2.3 и леммы 10.2.1. □

10.3 Скачки решения на границе

Докажем теорему 10.1.2.

10.3.1 Оценка площади графика

Заметим сначала, что утверждение тривиально, если $f \equiv \mathrm{const}$. Так что, мы можем считать $f \not\equiv \mathrm{const}$.

Пусть f — локально липшицево решение уравнения (10.1.4) со структурными условиями (10.1.1)–(10.1.3). Будем предполагать область D односвязной и ограниченной простой жордановой спрямляемой кривой.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 10.3.1. *В описанных предположениях выполнено*

$$\mathrm{mes}_2\,(W) \le h_0\nu + 2\,\mathrm{mes}_2\,(D). \tag{10.3.14}$$

Доказательство. Зафиксируем последовательность областей D_k, $k = 1, 2, \ldots$, так, чтобы

$$\overline{D}_k \subset D_{k+1}, \quad \cup_{k=1}^{\infty} D_k = D.$$

Функция $w(x)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,(\overline{D_k})$, $k = 1, 2, \ldots$. Выбирая $\phi = w(x)$ в (10.1.5), получаем

$$\int\limits_{D_k} \sum_{i=1}^{2} f'_{x_i} A_i(x, \nabla f)\, h(f(x))\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{\partial D_k} w(x) \sum_{i=1}^{2} A_i(x, \nabla f)\, n_i\, |dx|$$

$$\le \int\limits_{\partial D_k} w(x)\, |A(x, \nabla f)|\, |dx|.$$

Так как $0 < w(x) \le h_0 < \infty$, то

$$\int\limits_{D_k} \sum_{i=1}^{2} f'_{x_i} A_i(x, \nabla f)\, h(f(x))\, dx_1\, dx_2 \le h_0 \int\limits_{\partial D_k} |A(x, \nabla f)|\, |dx|.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ и пользуясь структурными ограничениями (10.1.1) – (10.1.3), находим

$$\nu_1 \int\limits_{D} \frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\, h(f(x))\, dx_1\, dx_2 \le h_0\, \nu_2^*. \tag{10.3.15}$$

Из (10.3.15) выводим

$$\int\limits_{D} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} h(f(x))\, dx_1\, dx_2 \le h_0 \frac{\nu_2^*}{\nu_1} + \int\limits_{D} \frac{h(f(x))}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\, dx_1\, dx_2.$$

Отсюда, вспоминая, что $0 \le h(f(x)) \le 1$, приходим к оценке

$$\int\limits_{D} |\nabla w(x)|\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{D} |\nabla f(x)|\, h(f(x))\, dx_1\, dx_2 \le h_0 \frac{\nu_2^*}{\nu_1} + \mathrm{area}\,(D).$$

Поскольку

$$\sqrt{1 + |\nabla w(x)|^2} < 1 + |\nabla w(x)|,$$

окончательно находим

$$\int\limits_{D} \sqrt{1 + |\nabla w|^2}\, dx_1\, dx_2 \le h_0 \frac{\nu_2^*}{\nu_1} + 2\, \mathrm{area}\,(D),$$

что эквивалентно (10.3.14). $\square$

10.3.2 Монотонность решения

Квадрат элемента длины на поверхности W дается выражением

$$ds_W^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j, \quad g_{ij}(x) = \delta_{ij} + w'_{x_i}\, w'_{x_j}\, dx_i\, dx_j \quad (i, j = 1, 2),$$

где δ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — символ Кронекера.

Пусть $(g^{ij}(x)) = (g_{ij})^{-1}(x)$ — матрица, обратная к матрице (g_{ij}). Простые вычисления влекут

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{w'_{x_i} w'_{x_j}}{1 + |\nabla w|^2}.$$

Для произвольного $\xi \in \mathbf{R}^2$ полагаем

$$|\xi|_W^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j.$$

Легко проверяется, что

$$|\nabla w|_W^2 = \frac{1 + w'^2_{x_2}}{1 + |\nabla w|^2}\, w'^2_{x_1} - 2\frac{w'_{x_1}\, w'_{x_2}}{1 + |\nabla w|^2}\, w'_{x_1}\, w'_{x_2} +$$

$$+ \frac{1 + w'^2_{x_1}}{1 + |\nabla w|^2}\, w'^2_{x_2} = \frac{|\nabla w|^2}{1 + |\nabla w|^2}\,.$$

Поскольку $\nabla w(x) = h(f(x))\, \nabla f(x)$, соотношение (10.3.15) дает

$$\int\limits_D \frac{|\nabla w|^2}{\sqrt{h^2(f) + |\nabla w|^2}}\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_D \frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\, h(f(x))\, dx_1\, dx_2 \le h_0\, \frac{\nu_2^*}{\nu_1}.$$

Отсюда, учитывая, что $h(f(x)) \le 1$, приходим к неравенству

$$\int\limits_D \frac{|\nabla w|^2}{\sqrt{1 + |\nabla w|^2}}\, dx_1\, dx_2 \le h_0\, \frac{\nu_2^*}{\nu_1},$$

или

$$\int\limits_D |\nabla w|_W^2 \sqrt{1 + |\nabla w|^2}\, dx_1\, dx_2 \le h_0\, \nu. \tag{10.3.16}$$

Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 10.3.2. *Всякое обобщенное решение f уравнения* (10.1.4) *со структурными условиями* (10.1.1), (10.1.2), (10.1.3) *является монотонным в смысле Лебега.*

Доказательство. Действительно, предположим, что $a \in D$ есть, например, точка строгого локального максимума. Для достаточно малых $\epsilon > 0$ множество $\{x \in D : f(x) > f(a) - \epsilon\}$ содержит предкомпактную компоненту связности $U \subset D$, $a \in U$.

На границе области U мы имеем $f(x) - f(a) + \epsilon = 0$. Для почти всех $\epsilon > 0$ кривые ∂U спрямляемы. Выбирая в (10.1.5) функцию $\phi = f(x) - f(a) + \epsilon$, для почти всех $\epsilon > 0$ можем записать

$$\int\limits_U \sum_{i=1}^{2} f'_{x_i}\, A_i(x, \nabla f)\, dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial U} (f(x) - f(a) + \epsilon) \sum_{i=1}^{2} A_i(x, \nabla f)\, n_i\, |dx| = 0.$$

Тем самым, из структурного предположения (10.1.1) вытекает

$$\int\limits_U \frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\, dx_1 dx_2 = 0,$$

т.е. $\nabla f \equiv 0$ и $f \equiv \mathrm{const}$ в U. Противоречие с предположением, что a — точка локального максимума в строгом смысле. $\Box$

10.3.3 Доказательство теоремы 10.2.1

Как и выше, посредством вспомогательного квазиконформного отображения $u = u(x) : D \to \mathbf{R}^2$ вводим изотермические координаты (u_1, u_2) на поверхности W.

Рассмотрим отображение $x = x(u) = (x_1(u), x_2(u))$, обратное к $u = u(x)$, и функцию $x_3(u) = w(x(u))$. Векторнозначная функция $\chi(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ осуществляет взаимно однозначное конформное отображение области $G = u(D)$ на поверхность W.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Сначала мы заметим, что по лемме 10.3.2 функция $w(x)$ монотонна в D, и поскольку отображение $x(u) : D \to G$ гомеоморфно, функция $w^*(u) = w(x(u))$ также монотонна в G. Так как отображение $x(u)$ квазиконформно и функция f локально липшицева, то $w^* \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(G)$.

Предположим, что функция w^* определена над всей плоскостью $\mathbf{R}^2$. Зафиксируем произвольно $R > 0$ и $t > 1$. Пусть $B(\tau)$ и $S(\tau)$ — круг и окружность с центром в точке $u = 0$ и радиусом τ, соответственно.

Как и соотношение (4.3.10), устанавливаем

$$\inf_{R\le\tau\le tR} \operatorname{osc}(S(\tau),\, w^*) \le \left(\frac{2\pi\, I(R)}{\log t}\right)^{1/2}, \tag{10.3.17}$$

где

$$I(R) = \int\limits_{|u|<tR} |\nabla w^*|^2 du_1\, du_2.$$

Функция w^* монотонна и потому для любого $t > 1$ выполнено

$$\operatorname{osc}(B(R),\, w^*) \le \operatorname{osc}(S(R),\, w^*) \le \inf_{R\le\tau\le tR} \operatorname{osc}(S(\tau),\, w^*).$$

Следовательно,

$$\operatorname{osc}(B(R),\, w^*) \le \left(\frac{2\pi\, I(\infty)}{\log t}\right)^{1/2}.$$

Учитывая неравенство (10.3.16), находим

$$I(\infty) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} |\nabla w^*|^2\, du_1\, du_2 = \int\limits_{D} |\nabla w|_W^2 \sqrt{1+|\nabla w|^2}\, dx_1\, dx_2 \le h_0\, \nu,$$

а потому

$$\operatorname{osc}(B(R),\, w^*) \le \left(\frac{2\pi\, h_0\, \nu}{\log t}\right)^{1/2}.$$

Полагая теперь здесь $t \to \infty$, заключаем, что $w^* \equiv \mathrm{const}$ на $B(R)$. Но $R > 0$ произвольно, а потому $w^* \equiv \mathrm{const}$ во всей плоскости $\mathbf{R}^2$. Отсюда вытекает, что $w \equiv \mathrm{const}$ в D.

Однако, если $w \equiv \mathrm{const}$ в области D, то отображение $u = u(x) : D \to \mathbf{R}^2$ есть конформное отображение в евклидовой метрике и образом ограниченной области D не может быть вся плоскость $\mathbf{R}^2$. Противоречие. $\square$

10.3.4 Точки квазинепрерывности

Так как односвязная область $G \ne \mathbf{R}^2$, а отображение $u(x) : D \to G$ определено с точностью до конформного преобразования в $u-$плоскости, мы вправе предполагать, что область G является единичным кругом с центром в точке O''.

Покажем, что *все точки ∂G суть точки квазинепрерывности w^**.

Фиксируем произвольно точку $a \in \partial G$. Пусть $S(a,\tau)$ — компонента связности множества $\{u \in G : |u-a| = \tau\}$, разделяющая точку $a \in \partial G$ и начало координат O'', $0 < \tau < 1$.

Как и в (10.3.17), доказываем, что для всякого $R \in (0,1)$ и всякого $t \in (0,1)$ существует $\tau_0 \in (tR, R)$ такое, что

$$\inf_{tR<\tau<R} \operatorname{osc}\,(S(a,\tau),\, w^*) \le \left(\frac{2\pi\, I}{\log\frac{1}{t}}\right)^{1/2},$$

где

$$I = \int\limits_G |\nabla w^*|^2\, du_1\, du_2.$$

Выбирая теперь $t_n \to 0$, находим последовательность $\tau_n \to 0$, вдоль которой

$$\operatorname{osc}(S(a,\tau_n),\, w^*) \to 0. \tag{10.3.18}$$

Это означает, что a есть точка квазинепрерывности функции w^* в точке $a \in \partial G$.

По лемме (10.3.1) интеграл

$$\int\limits_D \sqrt{1 + |\nabla w|^2}\, dx_1\, dx_2 < \infty.$$

Пользуясь теоремой 10.1.3 и леммой 10.2.1, заключаем, что отображение

$$x(u) = j \circ \chi(u) : G \to D$$

непрерывно вплоть до границы единичного круга ∂G.

Обозначим через $\tilde{x}(u) : \overline{G} \to \overline{D}$, $\tilde{x}(u)|_G = x(u)$, соответствующее отображение замкнутых областей, полученное продолжением по непрерывности на границу ∂G отображения $x(u) : G \to D$.

При этом, согласно следствию 10.2.2, для любых точек $p,\, q \in \overline{G}$ таких, что $\rho(p,\, q; O'', G) < 1/16$, справедлива оценка относительного расстояния

$$\rho(\tilde{x}(p),\, \tilde{x}(q);\, O, D) \le K_1 \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p,\, q;\, O'', G)}$$

с постоянной

$$K_1 = 2\sqrt{\pi\,\mathrm{mes}_2\,(W)}.$$

Согласно лемме 10.3.1,

$$K_1 \le 2\sqrt{\pi}\,(\nu\, h_0 + 2\,\mathrm{area}\,(D))^{1/2} = K.$$

В частности, если точки p и q лежат на граничной окружности и $|p-q| < 1/16$, то $\rho(p,\, q; O'', G) = |p-q|$. Поэтому найденная оценка принимает вид

$$\rho(\tilde{x}(p),\, \tilde{x}(q); O, D) \leq K \log^{-1/2} \frac{1}{|p-q|} \qquad \text{при} \quad |p-q| < \frac{1}{16}. \quad (10.3.19)$$

Так как отображение $\tilde{x}(u) : \overline{G} \to \overline{D}$ непрерывно, то прообразом $\tilde{x}^{-1}(a)$ всякой точки $a \in \partial D$ является замкнутое множество на единичной окружности ∂G. При этом для любых двух точек $a \neq b$ на ∂D выполнено

$$\tilde{x}^{-1}(a) \cap \tilde{x}^{-1}(b) = \emptyset.$$

Множество $\tilde{x}^{-1}(a)$ связно. Действительно, поскольку граница ∂D является простой жордановой кривой, то при достаточно малых $\epsilon > 0$ множество $U_\epsilon = \{x \in D : |x-a| < \epsilon\}$ связно. Отображение $x(u) : G \to D$ гомеоморфно, а потому прообразы $x^{-1}(U_\epsilon)$ связны для всех $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, где $\epsilon_0 > 0$ достаточно малое число. Тем самым, множество

$$\tilde{x}^{-1}(a) = \cap_{\epsilon>0} \overline{U}_\epsilon$$

также связно.

Итак, для произвольной точки $a \in \partial D$ множество $\tilde{x}^{-1}(a)$ может быть или изолированной точкой или замкнутой связной дугой.

Поскольку количество попарно непересекающихся дуг на окружности может быть, разве лишь, счетным, то обратное отображение $\tilde{x}^{-1}(x)$ однозначным образом определено всюду на границе ∂D, исключая, самое большее, некоторое счетное множество $E \subset \partial G$.

Покажем, что *всякая точка $a \in \partial D \setminus E$ есть точка квазинепрерывности* функции $w(x)$.

Пусть $b = \tilde{x}^{-1}(a)$ — прообраз точки $a \in \partial D \setminus E$. Согласно (10.3.18) существует последовательность подобластей $\{G_n\}$, $\partial' G_n = S(b, \tau_n)$, со свойствами: каждая из дуг $\partial' G_n$ отделяет точку b от начала координат O; $\operatorname{length}(\partial' G_n) \to 0$ и $\operatorname{osc}(\partial' G_n, w^*) \to 0$ при $n \to \infty$; наконец, $\cap_{n=1}^{\infty} [G_n] = \emptyset$.

Положим $D_n = x(G_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как отображение $x(u) : G \to D$ гомеоморфно, то каждая из дуг $\partial D_n = x(S(b, \tau_n))$ отделяет точку $a \in \partial D$ от O.

Отображение $\tilde{x}(u) : \overline{G} \to \overline{D}$ непрерывно и потому $\operatorname{length} \partial' D_n \to 0$ и $\cap_{n=1}^{\infty} [D_n] = \emptyset$.

Наконец, $\operatorname{osc}(\partial' D_n, w) = \operatorname{osc}(S(b, \tau_n), w^*)$, а потому $\operatorname{osc}(\partial' D_n, w) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тем самым, точка $a \in \partial D \setminus E$ обладает всеми свойствами, определяющими точки квазинепрерывности функции $w(x)$.

10.3.5 Поведение решения в точках скачка

Зададим произвольно точку скачка $a \in E$. Ее прообраз $\tilde{x}^{-1}(a)$ есть некоторая дуга β окружности $|u| = 1$. Оценим ее длину $l(\beta)$.

Пусть $\xi \in \beta$ — середина дуги. Легко вычисляется, что расстояние от ξ до концов дуги есть

$$r = 2\sin\frac{l(\beta)}{4}.$$

Предположим, что $r < 1$, т.е. $l(\beta) < \frac{2}{3}\pi$. Рассмотрим семейство окружностей $\{S(\xi,\tau)\}$ с центром в точке ξ и радиусами τ, $r < \tau < 1$. Положим $C_\tau = G \cap S(\xi,\tau)$.

На основании неравенства (4.3.8) имеем

$$\int\limits_r^1 \frac{l^2(\chi(C_\tau))}{\tau}\, d\tau \le 2\pi \int\limits_{\Delta_{r,1}} \sum_{i=1}^3 |\nabla x_i(u)|^2\, du_1\, du_2.$$

Заметим теперь, что при всяком $\tau \in [r,1]$ выполнено

$$l(\chi(C_\tau)) \ge \max\{\operatorname{osc}(x(C_\tau),w), \operatorname{length}(x(C_\tau))\} \ge \delta(a,w,O),$$

а потому

$$\delta^2(a,\, w,\, O) \le 4\pi\, \log^{-1}\frac{1}{r}\, \operatorname{mes}_2(W).$$

Тем самым, учитывая оценку (10.3.14), приходим к неравенству

$$\delta^2(a,w,O) \le \frac{K^2}{\log 1/r},$$

где K — постоянная из теоремы 10.1.2.

Отсюда,

$$r = 2\sin\frac{l(\beta)}{4} \ge \exp\{-\frac{K^2}{\delta^2(a,w,O)}\},$$

и мы приходим к следующей оценке величины $l(\beta)$ для "малых" $\delta(a,w,O)$

$$l(\beta) \ge 4\arcsin\left(\frac{1}{2}\exp\{-\frac{K^2}{\delta^2(a,w,O)}\}\right) \quad \text{при} \quad l(\beta) < \frac{2}{3}\pi. \qquad (10.3.20)$$

Приступим к оценке величины $l(\beta)$ для "больших"$\delta(a,w,O)$.

Пусть $a \in \partial D \cap E$ — точка скачка, в которой $\frac{2}{3}\pi \le l(\beta) \le 2\pi$. Не ограничивая общности, можем считать, что дуга $\beta = \tilde{x}^{-1}(a)$ описывается соотношениями

$$\beta = \{u = (u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 = 1,\ -\frac{l(\beta)}{2} \le \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} \le \frac{l(\beta)}{2}\}.$$

Зададим отрезок

$$\gamma = \{u = (u_1, u_2) : 0 \le u_1 \le 1,\ u_2 = 0\}$$

и обозначим через p_1 и p_2 граничные точки единичного круга с разрезом γ, лежащие на пересечении окружности $|u| = 1$ с верхним и нижним краями разреза γ, соответственно.

Пусть $T : G \to V$ — конформное отображение круга $|u| < 1$ с разрезом γ на полукруг $V = \{v = (v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 < 1,\ v_2 > 0\}$ такое, что $T(p_1) = (1, 0)$, $T(p_2) = (-1, 0)$ и $T(0, 0) = (0, 0)$.

При отображении T дуге $\beta \subset \partial G$ соответствует дуга

$$\eta = \left\{v = (v_1, v_2) : \frac{l(\beta)}{4} \le \operatorname{arctg}\frac{v_2}{v_1} \le \pi - \frac{l(\beta)}{4}\right\}.$$

При всяком $0 < k < \cos\frac{l(\beta)}{4}$ прямолинейный отрезок

$$\zeta(k) = \{v = (v_1, v_2) : -\sqrt{1 - k^2} < v_1 < \sqrt{1 - k^2},\ v_2 = k\}$$

отделяет в области V дугу η от точки $(0, 0)$. Ее образ $\zeta^*(k) = \tilde{x} \circ T^{-1}(\zeta(k))$ есть дуга, разделяющая в D точки a и O. Поэтому при всяком $k \in (0, \cos\frac{l(\beta)}{4})$ выполнено

$$l^2(\zeta^*(k)) \le \left(\int\limits_{\zeta(k)} \left|\frac{\partial \chi^*}{\partial v_1}\right| dv_1\right)^2 \le 2\sqrt{1 - k^2} \int\limits_{\zeta(k)} \left|\frac{\partial \chi^*}{\partial v_1}\right|^2 dv_1,$$

где $\chi^* = \chi \circ T^{-1}$.

Далее,

$$\int\limits_0^{\cos l(\beta)/4} \frac{l^2(\zeta^*(k))}{\sqrt{1 - k^2}}\, dk \le 2 \int\limits_V \left|\frac{\partial \chi^*}{\partial v_1}\right|^2 dv_1\, dv_2 \le 2\, \mathrm{mes}_2\, (W).$$

Учитывая, что

$$l(\zeta^*(k)) \ge \delta(a,\, w,\, O) \quad \text{при всех} \quad k \in (0, \cos\frac{l(\beta)}{4}),$$

отсюда получаем

$$\delta^2(a, w, O) \int\limits_0^{\cos l(\beta)/4} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\, dk \le 2\, \mathrm{mes}_2\, (W),$$

или

$$\delta^2(a, w, O) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{l(\beta)}{4}\right) \le \frac{K^2}{2\pi}$$

(K — постоянная из теоремы 10.1.2).

Тем самым, находим оценку

$$l(\beta) \ge \max\left\{2\pi - \frac{2K^2}{\pi\, \delta^2(a, w, O)},\, 0\right\}. \tag{10.3.21}$$

10.3.6 Оценка суммарного скачка

Пусть a_k — точки скачка функции $w(x)$ и пусть β_k — соответствующие им замкнутые дуги на окружности $|u| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Мы вправе предполагать, что

$$l(\beta_1) \ge l(\beta_2) \ge \ldots \ge l(\beta_k) \ge \ldots.$$

Так как $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$ при $i \ne j$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(\beta_k) \le 2\pi.$$

По крайней мере, начиная с $k = 4$, выполнено $l(\beta_k) < \frac{2}{3}\pi$ и мы можем воспользоваться оценкой (10.3.20). Мы имеем

$$4 \sum_{k=4}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{2} \exp\{-\frac{K^2}{\delta^2(a, w, O)}\}\right) \le \sum_{k=4}^{\infty} l(\beta_k). \tag{10.3.22}$$

Для каждой из точек a_1, a_2, a_3 воспользуемся оценкой (10.3.21). Тогда

$$\sum_{k=1}^{3} \max\{2\pi - \frac{2K^2}{\pi\delta^2(a, w, O)},\, 0\} \le \sum_{k=1}^{3} l(\beta_k). \tag{10.3.23}$$

Объединяя (10.3.22) и (10.3.23), приходим к неравенству

$$\sum_{k=1}^{3}\max\{2\pi-\frac{2K^2}{\pi\,\delta^2(a,w,O)},\,0\}+4\sum_{k=4}^{\infty}\arcsin\left(\frac{1}{2}\exp\{-\frac{K^2}{\delta^2(a,w,O)}\}\right)$$

$$\le\sum_{k=1}^{3}l(\beta_k)+\sum_{k=4}^{\infty}l(\beta_k)\le 2\pi.$$

Тем самым, теорема 10.1.2 доказана полностью. $\Box$

10.4 Теорема типа теоремы Фату

Приведем доказательство теоремы 10.1.1.

Пусть $f : D \to \mathbf{R}$ — монотонная в смысле Лебега функция и $a \in \partial D$ — некоторая точка. Будем говорить, что f *обладает в точке a свойством Линделефа*, если из существования конечных пределов f вдоль любых двух путей Γ_1 и Γ_2, ведущих в данную точку, следует существование предела f вдоль любого пути, ведущего в a и лежащего между Γ_1 и Γ_2.

Доказательство 10.1.1 опирается на следующее утверждение.

Лемма 10.4.1. *Если монотонная в смысле Лебега функция квазинепрерывна в некоторой граничной точке, то данная функция обладает также свойством Линделефа в этой точке.*

Для **доказательства** зафиксируем точку квазинепрерывности $a \in \partial D$ и некоторую последовательность подобластей $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ области D со свойствами (α), (β) и (γ) определения 10.1.1.

Пусть Γ_1 и Γ_2 — произвольные пути, ведущие в точку a, вдоль которых f имеет пределы α_1 и α_2, соответственно. Обозначим через U_k подобласть области D_k, заключенную между Γ_1, Γ_2, ∂D_k и ∂D_{k+1}. Не умаляя общности, можем считать, что такая подобласть однозначным образом определена при всяком $k = 1, 2, \ldots$.

Для $k = 1, 2, \ldots$ мы полагаем

$$\gamma_{1k}=\partial U_k\cap\Gamma_1,\quad \gamma_{2k}=\partial U_k\cap\Gamma_2,\quad \gamma_{3k}=\partial U_k\cap\partial D_k,\quad \gamma_{4k}=\partial U_k\cap\partial D_{k+1}\,.$$

Заметим, что поскольку функция f имеет конечные пределы вдоль Γ_1 и Γ_2, то

$$\operatorname{osc}(\gamma_{ik},f)\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty \quad \text{для любого} \quad i=1,2.$$

Кроме того, в силу свойства (γ) определения 10.1.1, мы имеем

$$\operatorname{osc}(\gamma_{ik},f)\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty \quad \text{для любого} \quad i=3,4.$$

Таким образом, учитывая, что

$$\partial U_k = \cup_{i=1}^4 \gamma_{ik},$$

мы можем заключить

$$\operatorname{osc}(\partial U_k, f) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Однако, функция f монотонна в смысле Лебега, а потому

$$\operatorname{osc}(U_k, f) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Это означает, что функция f имеет предел вдоль последовательности $\{U_k\}$ и, в частности, $\alpha_1 = \alpha_2$. Тем самым, f обладает свойством Линделефа в точке a. $\Box$

Перейдем непосредственно к **доказательству** теоремы 10.1.1. Пусть f — произвольное решение уравнения (10.1.4) со структурными ограничениями (10.1.1), (10.1.2), и (10.1.3) в области D. Положим $\Phi(x) = \operatorname{arctg} f(x)$.

Выберем $h(t)$, как в примере 3. В силу оценки (10.3.14), имеем

$$\int\limits_D |\nabla\Phi(x)|\, dx_1\, dx_2 < \infty.$$

Обозначим через D_c пересечение D с прямой линией $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 = c\}$, а через Γ_c — пересечение ∂D с той же самой прямой. Пользуясь теоремой Фубини, заключаем, что для почти всех c, принадлежащих проекции D на ось ox_1, справедливо следующее соотношение

$$\int\limits_{D_c} |\nabla\Phi(c, x_2)|\, dx_2 < \infty.$$

Отсюда, для любой пары точек (c, x_2'), (c, x_2''), которые принадлежат одной и той же компоненте связности множества D_c, получаем

$$|\Phi(c, x_2'') - \Phi(c, x_2')| \leq \int\limits_{x_2'}^{x_2''} |\nabla\Phi(c, x_2)|\ dx_2 \quad (x_2' < x_2'').$$

Так что, $\Phi(c, x_2)$ равномерно непрерывна на каждой компоненте связности множества D_c и, следовательно, в каждой точке $a \in \Gamma_c$ она имеет предел вдоль D_c.

Будем поворачивать систему координат в (x_1, x_2)−плоскости на угол $\alpha \in F$, где F есть счетное, всюду плотное на $(0, 2\pi)$ множество, и рассуждать каждый раз, как и выше. Тем самым, почти всякой точки

$a \in \partial D$ можно коснуться углом раствора, сколь угодно близкого к π, и таким, что функция Φ имеет пределы вдоль каждой из сторон этого угла.

Предположим, что точка $a \in \partial D$ — произвольная точка описанного вида. По теореме 10.1.2 функция $\Phi = \operatorname{arctg} f$ квазинепрерывна всюду на границе ∂D за возможным исключением некоторого счетного множества точек и, не умаляя общности, мы вправе предполагать, что a — точка квазинепрерывности f. По лемме 10.3.2 функция f (и, следовательно, $\Phi = \operatorname{arctg} f$) является монотонной в смысле Лебега. Тем самым, согласно лемме 10.4.1, данная функция обладает свойством Линделефа в a.

Выберем произвольно угол, вдоль которого Φ имеет пределы. Тогда эти пределы равны некоторому числу α, $|\alpha| \le \frac{\pi}{2}$ и постоянная α есть также и предел функции Φ вдоль угловой области. Но раствор этого угла может быть выбран сколь угодно близким к π, а потому Φ имеет угловое граничное значение α.

Отсюда, функция $f = \operatorname{tg} \Phi$ имеет конечное или бесконечное угловое граничное значение $\operatorname{tg} \alpha$ в этой точке. $\square$

10.5 Непрерывность и квазинепрерывность

Ниже дается доказательство теоремы 10.2.3.

Нам будет нужен один специальный случай леммы Р. Финна [146]. В форме, необходимой ниже, это утверждение содержится в [94, лемма 10.2].

Лемма 10.5.1. *Пусть Δ — область, расположенная в кольце $1 < |x| < b$, и пусть γ — множество граничных точек области Δ, не лежащих на единичной окружности. Пусть f — решение уравнения минимальной поверхности* (2.3.14) *в Δ такое, что для всех точек $x \in \gamma$ выполнено*

$$m \le f(x) \le M\,,$$

где m и M — некоторые постоянные.

Тогда всюду в области Δ справедливо неравенство

$$m - \operatorname{arccosh} b \le f(x) \le M + \operatorname{arccosh} b. \tag{10.5.24}$$

Приступим непосредственно к **доказательству** теоремы 10.1.3. Функция f не может обращаться тождественно в $\pm\infty$ ни на какой дуге $\Gamma_1 \subset \Gamma$ (см. [94, §10]). Поэтому существует всюду плотное множество на Γ, в каждую точку которого можно коснуться изнутри области D дугой, вдоль которой f ограничена. Пользуясь леммой 10.5.1, отсюда заключаем, что на любой, строго внутренней поддуге $\Gamma_1 \subset \Gamma$, предельные значения f ограничены. Тем самым, утверждение достаточно доказать в случае, когда область D односвязна и ограничена простой жордановой спрямляемой кривой, а функция f ограничена в D.

Как показано в теореме 10.1.2, всюду на границе ∂D, за возможным исключением некоторого счетного множества, функция f квазинепрерывна.

Фиксируем произвольно точку $a \in \partial D$ квазинепрерывности f и некоторую внутреннюю точку $O \in D$. Существует последовательность $\{\gamma_k\}$, $\gamma_k \subset D$, $k = 1, 2, \ldots$, дуг с концами на Γ, отделяющих точку a от O и таких, что

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{osc}(\gamma_k,\ f) = 0. \tag{10.5.25}$$

Обозначим через D_k подобласть области D, отделяемую дугой γ_k от точки O. Неравенство (10.5.24) влечет

$$\operatorname{osc}(D_k, f) \le \operatorname{osc}(\gamma_k, f) + 2\operatorname{arccosh}(1 + \operatorname{length}(\gamma_k)) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому на основании (10.5.25) получаем

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{osc}(D_k, f) = 0,$$

и функция f продолжима по непрерывности в точку квазинепрерывности $a \in \Gamma$. Теорема доказана. $\Box$

Задачи: 1) Дать прямое (не использующее вспомогательного конформного преобразования поверхности в плоскость изотермических координат) доказательство теоремы 10.1.2. 2) Исследовать поведение обобщенных решений вблизи точек квазинепрерывности и вблизи точек скачка. В каких случаях можно говорить о существовании пределов решений вдоль некасательных путей ? Вдоль касательных путей? 3) Найти многомерные версии теоремы типа теоремы П. Фату для минимальных графиков.

Указатель

Список литературы

[1] Ф.Г. Авхадиев, *Конформные отображения и краевые задачи*, Казанский фонд "Математика", 1996, 216 С.

[2] Р.С. Акопян, *Условия стабилизации минимальной поверхности над полуполосой*, в сб. "Научные школы Волгоградского государственного университета. Геометрический анализ и его приложения", Изд-во ВолГУ, Волгоград, 1999, С. 105—110.

[3] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Изд-во "Мир", Москва, 1969.

[4] П.П. Белинский, *Об искажении при квазиконформных отображениях*, ДАН СССР, Т. 91, n. 5, 1953, С. 997—998.

[5] П.П. Белинский, *О мере площади при квазиконформных отображениях*, ДАН СССР, Т. 121, n. 1, 1958, С. 16—17.

[6] П.П. Белинский, *Решение экстремальных задач теории квазиконформных отображений вариационным методом*, Сиб. мат. журн., Т. 1, n. 3, 1960, С. 303—330.

[7] П.П. Белинский, *О порядке близости пространственного квазиконформного отображения к конформному*, Сиб. мат. журн., Т. 14, n. 3, 1973, С. 475—483.

[8] П.П. Белинский, *Общие свойства квазиконформных отображений*, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, Новосибирск, 1974.

[9] Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Неравенства*, Изд-во "Мир", Москва, 1965.

[10] В.И. Белый, В.М. Миклюков, *Некоторые свойства конформных и квазиконформных отображений и прямые теоремы конструктивной теории функций*, Изв. АН СССР, Сер. мат., Т. 38, n. 6, 1974, С. 1343—1361.

[11] С.Н. Бернштейн, *Об одной геометрической теореме и ее приложениях к уравнениям в частных производных*, Собр. соч., Т. III, Изд-во АН СССР, 1960, С. 251—258.

[12] Л. Берс, *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики*, Изд-во иностранной литературы, Москва, 1961.

[13] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Изд-во "Наука", Москва, 1975.

[14] Ю.Н. Бибиков, *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во "Высшая школа", Москва, 1991, 303 С.

[15] А.А. Борисенко, *Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий,* Изд-во "Экзамен", Москва, 2003.

[16] И.Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, ГИФМЛ, Москва, 1959.

[17] Г.М. Вержбицкий, В.Г. Мазья, *Асимптотическое поведение решений эллиптических уравнений второго порядка вблизи границы, I*, Сиб. мат. журн., Т. 12, n. 6, 1971, С. 1217—1249.

[18] Г.М. Вержбицкий, В.Г. Мазья, *Асимптотическое поведение решений эллиптических уравнений второго порядка вблизи границы, II*, Сиб. мат. журн., Т. 13, n. 6, 1972, С. 1239—1271.

[19] Л.И. Волковыский, *Квазиконформные отображения*, Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1954.

[20] И.А. Волынец, *Об искажении при отображениях класса BL*, Сиб. мат. журн., Т. 18, n. 6, 1977, С. 1259—1270.

[21] А.Г. Воробьев, В.М. Миклюков, *О некоторых свойствах субрешений уравнений типа минимальной поверхности*, Сиб. мат. журн., Т. 23, n. 1, 1982, С. 25—31.

[22] Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Изд-во "Наука", Москва, 1967.

[23] С.К. Годунов, Е.И. Роменский, *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*, Изд-во "Научная книга", Новосибирск, 1998.

[24] Г.М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Изд-во "Наука", Москва, 1966.

[25] В.М. Гольдштейн, Ю.Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Изд-во "Наука", Москва, 1983.

[26] И.М. Грудский, *Построение внутренних координат на составных римановых поверхностях*, в сб. "Дифференциальные, интегральные уравнения и комплексный анализ", Элиста, 1986, С. 30—45.

[27] И.М. Грудский, *Формула Кристоффеля – Шварца для полиэдральных поверхностей*, ДАН СССР, Т. 307, n. 1, 1989, С. 15—17.

[28] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, Изд-во иностранной литературы, Москва, 1962.

[29] Э. Джусти, *Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации*, Изд-во "Мир", Москва, 1989.

[30] Е.П. Долженко, *О "стирании"особенностей аналитических функций*, Успехи мат. наук, Т. 18, n. 4, 1963, 135—142.

[31] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Изд-во "Наука", Москва, 1979.

[32] Ю.В. Дымченко, *Равенство емкости и модуля конденсатора на поверхности*, Записки научных семинаров ЛОМИ, Т. 276, 2001, С. 112—133.

[33] М.А. Евграфов, *Аналитические функции*, Изд-во "Наука", Москва, 1968.

[34] М.А. Евграфов, *Один вариант теоремы Альфорса об отображениях полос*, Матем. сб., т. 90 (132), n. 1, 1973, 96-105.

[35] В.А. Жуков, *Об одном доказательстве теоремы о существовании полного дифференциала класса* W^1_p, Тр. Том. ун-та, Сер. мех.-мат., Т. 189, 1966, С. 13—17.

[36] О.В. Иванов, Г.Д. Суворов, *Полные решетки конформно-инвариантных компактификаций области*, Изд-во "Наукова Думка", Киев, 1982.

[37] Д.П. Ильютко, *Локально минимальные сети в N-нормированных пространствах*, Мат. заметки, Т. 74, Вып. 5, 2003, С. 656—668.

[38] К. Каратеодори, *Конформное отображение*, Современная математика, Книга пятая, ОНТИ, Государственное технико-теоретическое издательство, Москва — Ленинград, 1934.

[39] А.П. Кармазин, *Квазиизометрии, теория предконцов и метрические структуры пространственных областей*, Изд-во СурГУ, Сургут, 2003, С. 1—210.

[40] Н.Х. Кейпер, *О C^1-изометричных вложениях*, в сб. переводов "Математика", Т. 1, n. 2, 1957, С. 17—28.

[41] А.А. Клячин, В.М. Миклюков, *Изотропные гиперповерхности и минимальные продолжения липшицевых функций*, Функц. анализ и его прил. (в печ.)

[42] В.А. Клячин, В.М. Миклюков, *Трубки и ленты в пространстве-времени*, Юбилейная серия "Труды ученых ВолГУ", Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2004, 325 С.

[43] Э. Коллингвуд, А. Ловатер, *Теория предельных множеств*, Изд-во "Мир", Москва, 1971.

[44] А.С. Кронрод, *О функциях двух переменных*, Успехи мат. наук, V, Вып. 1(35), 1950, С. 124—134.

[45] В.И. Кругликов, *О существовании и единственности отображений, квазиконформных в среднем*, в сб. "Метрические вопросы теории функций и отображений", Вып. IV, Изд-во "Наукова Думка", Киев, 1973, С. 123—147.

[46] В.И. Кругликов, *Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем*, Мат. сб., Т. 130 (172), n. 2, 1986, С. 185—206.

[47] В.И. Кругликов, В.М. Миклюков, *Теоремі стійкісті для відображень класу BL*, Допов. АН УССР. сер. А, 1972, n. 5, 421—423; *Теоремы устойчивости для отображений класса BL*, в сб. "Метрические вопросы теории функций и отображений", Вып. III, Изд-во "Наукова Думка", Киев, 1971, С. 55—70.

[48] В.И. Кругликов, В.М. Миклюков, *О некоторых классах плоских топологических отображений с обобщенными производными*, в сб. "Метрические вопросы теории функций и отображений", Вып. IV, Изд-во "Наукова Думка", Киев, 1973, С. 102—122.

[49] С.Л. Крушкаль, *Об отображениях ε-квазиконформных в среднем*, Сиб. мат. журн., Т. 8, n. 4, 1967, С. 798—806.

[50] Р. Курант, *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности*, Изд-во иностранной литературы, Москва, 1953.

[51] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Изд-во "Мир", Москва, 1966.

[52] Б.П. Куфарев, *Потенциалы и соответствие границ*, Изв. АН СССР, Сер. мат., Т. 41, n. 2, 1977, С. 438—461.

[53] М.А. Лаврентьев, *Sur une classe de representations continue*, Мат. сб., Т. 42, n. 4, 1935, 407—424; русский перевод в "М.А. Лаврентьев. Избранные труды. Математика и Механика", Изд-во "Наука", Москва, 1990, С. 219—236.

[54] М.А. Лаврентьев, *О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях*, ДАН СССР, Т. 4, 1936, С. 207—210.

[55] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Изд-во "Наука", Москва, 1973.

[56] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Изд-во "Наука", Москва, 1973.

[57] Н.А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций*, Изд-во "Наука", Москва, 1975.

[58] Б.Е. Левицкий, И.П. Митюк, *"Узкие теоремы" о пространственных модулях*, ДАН СССР, Т. 248, n. 4, 1979, С. 780—783.

[59] В.П. Луференко, Г.Д. Суворов, *О понятии тела простого конца в теории Каратеодори*, в сб. "Метрические вопросы теории функций и отображений", Вып. III, Изд-во "Наукова Думка", Киев, 1971, С. 71—79.

[60] В.Г. Мазья, *О регулярности на границе решений эллиптических уравнений и конформного отображения*, ДАН СССР, Т. 152, n. 6, 1963, С. 1297—1300.

[61] В.Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева*, Изд-во Ленинградского ун-та, Ленинград, 1985.

[62] Д.Е. Меньшов, *Les conditions de monogénéité*, Act. sci. et ind., 1936, V. 329, 1—52; Имеется русск. перевод: *Условия моногенности*, В сб. "Д.Е. Меньшов. Избранные труды. Математика", Изд-во "Факториал", Москва, 1997, С. 73—115.

[63] Ч.В. Мизнер, К.С. Торн, Д.А. Уилер, *Гравитация, Т. 1—3,* Изд-во "Айнштайн", Бишкек, 1994.

[64] В.М. Миклюков, *Об ε-квазиконформных отображениях шара на шар*, в сб. "Метрические вопросы теории функций и отображений", Вып. I, "Наукова Думка", Киев, 1969, С. 140—162.

[65] В.М. Миклюков, *Две теоремы о граничных свойствах минимальных поверхностей в непараметрической форме*, Мат. заметки, Т. 21, n. 4, 1977, С. 551—556.

[66] В.М. Миклюков, *О конформном типе поверхностей, теореме Лиувилля и теореме Бернштейна*, ДАН СССР, Т. 242, n. 3, 1978, С. 537—540.

[67] В.М. Миклюков, *Некоторые вопросы качественной теории уравнений типа минимальной поверхности*, в сб. "Граничные задачи математической физики", "Наукова Думка", Киев, 1983.

[68] В.М. Миклюков, *Замечания о принципе "длины и площади"*, в кн. Г.Д. Суворова "Обобщенный принцип длины и площади в теории отображений", Изд-во "Наукова Думка", Киев, 1985, С. 252—260.

[69] В.М. Миклюков, *Некоторые оценки конформного отображения области на полосу*, ДАН СССР, Т. 223, n. 3, 1975, С. 295—297.

[70] В.М. Миклюков, *О некоторых граничных задачах теории конформных отображений*, Сиб. мат. журн., Т. 18, n. 5, 1977, С. 1111—1124.

[71] В.М. Миклюков, *Об одной ошенке модуля семейства кривых на минимальной поверхности и ее применениях*, Успехи мат. наук, XXII, Вып. 4(136), 1977, С. 55—136.

[72] В.М. Миклюков, *Об асимптотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображений с ограниченным искажением*, Мат. сб., Т. 111, n. 1,1980, С. 42—66; см. также сб. "Научные школы Волгоградского государственного университета. Геометрический анализ и его приложения", Изд-во ВолГУ, Волгоград, 1999, С. 52—86.

[73] В.М. Миклюков, *Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности*, Мат. сб. Т. 108, n. 2, 1979, 268—289; см. также сб. "Научные школы Волгоградского государственного ун-та. Геометрический анализ и его приложения", Изд-во ВолГУ, Волгоград, 1999, С. 22—51.

[74] В.М. Миклюков, *Некоторые особенности поведения решений уравнений типа минимальной поверхности в неограниченных областях*, Мат. сб., Т. 116, n. 1, 1981, С. 72—86.

[75] В.М. Миклюков, *О критических точках решений уравнений типа максимальных поверхностей в пространстве Минковского*, Теория отображений и приближения функций, Изд-во "Наукова Думка", Киев, 1989, С. 112—125.

[76] В.М. Миклюков, *Зоны стагнации решений уравнения Лапласа—Бельтрами в длинных полосах*, Математические Труды, Т. 5, n. 1, 2002, С. 84—101.

[77] В.М. Миклюков, *Граничные свойства решений уравнений типа минимальных поверхностей*, Мат. сб., Т. 192, n. 10, 2001, С. 1491—1513.

[78] В.М. Миклюков, *Зоны стагнации гармонической функции на поверхности и предлиувиллевы теоремы*, Геометрический анализ и его приложения. Тез. докл. междунар. школы-конференции, Май 2004, Изд-во ВолГУ, Волгоград, С. 131—132

[79] В.М. Миклюков, *Изотермические координаты на поверхностях с особенностями*, Мат. сб., Т. 195, n. 1, 2004, С. 69—88.

[80] В.М. Миклюков, *Относительное расстояние М.А. Лаврентьева и простые концы на непараметрических поверхностях*, Укр. мат. вестн., Т. 1, n. 3, 2004, С. 348—371.

[81] В.М. Миклюков, *О некоторых применениях относительного расстояния М.А. Лаврентьева*, Докл. РАН, Т. 402, n. 4, 2005.

[82] В.М. Миклюков, *Об одном свойстве функции высоты решений многомерной задачи Плато*, Математический и прикладной анализ, Вып. 2, Изд-во Тюменского гос. ун-та, Тюмень, 2005.

[83] В.М. Миклюков, *Искажение площади при конформных отображениях поверхностей*, Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, Вып. XXVI, Изд-во МГУ, Москва, 2005, С. 238—249.

[84] В.М. Миклюков, С.С. Полупанов, Р.А. Тарапата, *О стабилизации решений уравнения газовой динамики*, Докл. РАН, Т. 388, n. 5, 2003, С. 596—598.

[85] В.М. Миклюков, Г.Д. Суворов, *О существовании и единственности квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками,* Исслед. по соврем. теории функций и ее применениям, "Наукова Думка", Киев, 1972, С. 45—53.

[86] И.П. Митюк, *Обобщенный приведенный модуль и некоторые его применения*, Изв. вузов, Математика, n. 2, 1964, С. 110—119.

[87] И.П. Митюк, *Приведенный модуль в случае пространства*, ДАН УССР, n. 5, 1964, С. 563—566.

[88] И.П. Митюк, *О квазиконформных отображениях в пространстве*, ДАН УССР, n. 8, 1964, С. 563—566.

[89] В.Н. Монахов, *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений*, Изд-во "Наука", Новосибирск, 1977.

[90] М. Морс, *Топологические методы теории функций комплексного переменного*, Изд-во иностранной литературы, Москва, 1951.

[91] Д. Нэш, C^1*-изометричные вложения*, в сб. переводов "Математика", Т. 1, n. 2, 1957, С. 3—16.

[92] О.А. Олейник, Е.В. Радкевич, *Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена—Линделефа для общих эллиптических систем уравнений*, Мат. сб., Т. 95 (137), n. 1, 1974, С. 130—145.

[93] О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений*, Успехи мат. наук, Т. 31, Вып. 6, 1976, С. 142—166.

[94] Р. Оссерман, *Минимальные поверхности*, Успехи мат. наук, Т. 22, Вып. 4, 1967, С. 55—135.

[95] В.И. Пелих, *Теоремы Фрагмена—Линделефа на минимальных поверхностях*, в сб. "Научные школы Волгоградского государственного университета. Геометрический анализ и его приложения", Волгоград, Изд-во ВолГУ, 1999, С. 352—368.

[96] И.И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, Москва, 1950.

[97] Ю.Г. Решетняк, *Теоремы устойчивости в геометрии и анализе*, Изд-во "Наука", Новосибирск, 1982.

[98] Ю.Г. Решетняк, *Двумерные многообразия ограниченной кривизны*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 70, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, Москва, 1989, С. 8—189.

[99] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Изд-во "Мир", Москва, 1973.

[100] Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, Изд-во "Наука", Москва, 1981.

[101] С. Сакс, *Теория интеграла*, Изд-во иностранной литературы, Москва, 1949.

[102] С.Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1950.

[103] С. Стоилов, *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций*, Изд-во "Наука", Москва, 1964.

[104] Ю.Ф. Стругов, *Квазиконформные в среднем отображения и экстремальные задачи*, Часть 1, Омск, 1994. — 154 С. — Деп. в ВИНИТИ 05.12.94, No 2786—В94; Часть 2, Омск, 1994. — 114 С. — Деп. в ВИНИТИ 05.12.94, No 2787 — В94.

[105] Г.Д. Суворов, *Замечания к одной теореме М.А. Лаврентьева*, Уч. зап. Томск. гос. ун-та, Т. 25, 1956, С. 3—8.

[106] Г.Д. Суворов, *Семейства плоских топологических отображений*, СО АН СССР, Новосибирск, 1965.

[107] Г.Д. Суворов, *Равностепенная устойчивость конформных отображений замкнутых областей*, Укр. мат. журн., Т. 20, n. 1, 1968, С. 78—84.

[108] Г.Д. Суворов, *Обобщенный "принцип длины и площади"в теории отображений*, Изд-во "Наукова Думка", Киев, 1985.

[109] Г.Д. Суворов, *Простые концы и последовательности плоских отображений*, Изд-во "Наукова Думка", Киев, 1986.

[110] А.В. Сычев, *Модули и пространственные квазиконформные отображения*, Изд-во "Наука", Новосибирск, 1983.

[111] А.Ф. Тедеев, *Качественные свойства решений задачи Неймана для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка*, Укр. мат. журн., Т. 45, n. 11, 1993, С. 1571—1579.

[112] В.Г. Ткачев, А.Н. Ушаков, *Теорема Фюгледе в финслеровых пространствах*, в сборнике "Теория потенциала", Изд-во Наукова Думка, Киев, 1991, С. 15.

[113] Ю.Ю. Трохимчук, *Непрерывные отображения и условия моногенности*, ГИФМЛ, Москва, 1963.

[114] А.Т. Фоменко, *Вариационные методы в топологии*, Изд-во "Наука", Москва, 1982.

[115] С.Я. Хавинсон, *О стирании особенностей*, Литовский математический сборник, III, 1, 1963, С. 271—287.

[116] Г. Хакен, *Синергетика*, Изд-во "Мир", Москва, 1985.

[117] С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*, в 2—х частях, Изд-во "Мир", Москва, 1986.

[118] Б.В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Изд-во "Наука", Москва, 1969.

[119] Е.В. Шикин, *О параболичности погружаемых и гиперболичности непогружаемых двумерных многообразий отрицательной кривизны*, Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., n. 5, 1990, С. 42—45.

[120] Л. Шварц, *Анализ, Том I*, Изд-во "Мир", Москва, 1972.

[121] М. Шиффер, Д.К. Спенсер, *Функционалы на конечных римановых поверхностях*, Изд-во иностранной литературы, Москва, 1957.

[122] А.Е. Шишков, *Поведение обобщенных решений задачи Дирихле для общих квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений в окрестности границы*, Дифференц. уравн., Т. 23, n. 2, 1987, С. 308—320.

[123] D.R. Adams and L.I. Hedberg,*Function Spaces and Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg— New York etc., 1996.

[124] L. Ahlfors, *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildungen und der ganzen Funktionen*, Acta. Soc. Sci. Fenn. N. S. A I, **1**, n. 9, 1930, P. 1—40.

[125] L. Ahlfors, *Conformal invariants*, McGraw—Hill, New York, 1973.

[126] L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function theoretic null sets*, Acta Math., 1950, V. 83, P. 101—129.

[127] G. Alessandrini and V. Nesi, *Univalent σ-harmonic mappings*, Arch. Ration. Mech. and Anal., V. 158, 2001, P. 155—171.

[128] G. Aronsson, *Extension of functions satisfying Lipschitz conditions*, Arkiv för matematik, Band 6, n. 28, 1967, P. 551—561.

[129] K. Astala, *Area distortion of quasiconformal mappings*, Acta Math., **173**, 1994, P. 37—60.

[130] K. Astala and V. Nesi, *Composites and quasiconformal mappings: New optimal boundes in two dimensions*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, **18**, 2003, P. 335—355.

[131] C. Bandle, *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman Adv. Pub. Program: Boston—London—Melbourne, 1980.

[132] L. Bers, *Isolated singularities of ninimal surfaces*, Ann. Math., 53, 1951, P. 364—386.

[133] L. Bers, *Non-linear elliptic equation ithout non-linear entire solutions*, J. Rat. Mech. and Anal., 3, 1954 P. 767—787.

[134] L. Bers, *Uniformization by Beltrami equation*, Comm. Pure Appl. Math. V. 14, 1961, P. 215—228.

[135] S. Bochner, *Weak solutions of linear partial differential equations*, J. Math. Pures Appl., V. 35, 1956, P. 193—202.

[136] C. Caratheodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhangender Gebiete*, Math. Ann., V. 73, 1913, P. 323—370.

[137] T. Carleman, *Sur une inégalité differentielle dans la théorie des functions analytiques*, C.R.Acad. Sci. Paris, V. 196, 1933, P. 995—997.

[138] L. Carleson, *Removable singularities for continuous harmonic functions in* $\mathbf{R}^n$, Math. Scand., V. 12, 1963, P. 15—18.

[139] M.G. Crandall, L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Optimal Lipschitz extensions and the infinity laplasian*, Calc. Var., 2001, V. 13, P. 123—139.

[140] G. David and P. Mattila, *Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane*, Revista Matem. Iberoamericana, V. 16, n. 1, 2000, P. 137—215.

[141] J. Eells and B. Fuglede, *Harmonic Maps between Riemannian Polyhedra*, Cambridge Tracts in Mathematics **142**, Cambridge Univ. Press, UK, 2001.

[142] A. Eremenko and D.H. Hamilton, *On the area distortion by quasiconformal mappings*, Proceedings of the American Mathematical Sosiety, **123**, n. 9, 1995, P. 2793—2797.

[143] D. Faraco, *Beltrami operators and microstructure, Academic dissertation*, Depart. of Math., Faculty of Sci., University of Helsinki, Helsinki, 2002.

[144] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Ferlag, Berlin, 1969; перевод на русский язык, *Геометрическая теория меры*, Изд-во "Наука", Москва, 1987.

[145] R. Finn, *On a problem of type, ith application to elliptic partial differential equations*, J. Rat. Mech. and Anal., 3, 1954, P. 789—799.

[146] R. Finn, *Remarks relevant to minimal surfaces, and to surfaces of prescribed mean curvature*, J. Analyze Math., V. 14, 1965, P. 139—160.

[147] D. Franke, O. Martio, V.M. Miklyukov, M. Vuorinen, and R. Wisk, *Quasiregular mappings and* $\mathcal{WT}$ *—classes of differential forms on Riemannian manifolds*, Pacific J. Math., V. 202, n. 1, 2002, P. 73—92.

[148] B. Fuglede, *Extremal length and functional completetion*, Acta Math., V. 98, n.3—4, 1957, P. 171—219.

[149] F.W. Gehring, O. Lehto, *On the total differentiability of functions of a complex variable*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A I, **272**, 1959, P. 1—9.

[150] F. Gehring and E. Reich, *Area distortion under quasiconformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI **388**, 1966, P. 1—14.

[151] C. Grammatico, *A result on strong unique continuation for the Laplace operator*, Commun. in partial defferential equations, V. 22 (9&10), 1997, P. 1475—1491.

[152] Walter Gresky, *Konforme Abbildung der Oberfläche eines rektangulären Hexaeders auf die Kugeloberfläche.* - Inaugural – Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig, Weida i. Thür. 1928, 1-74.

[153] E.G. Grigor'eva, A.A. Klyachin, and V.M. Miklyukov, *Problem of Functional Extension and Space-Like Surfaces in Minkowski Space*, Journals of Analysis and its Applications, V. 21, n. 3, 2002, P. 719—752.

[154] A. Grigor'yan, *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., V. 36, n. 2, 1999, P. 135—249.

[155] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Boston—Basel—Berlin, Birkhäuser, 1999.

[156] V. Gutlyanskii, O. Martio, T. Sugawa and M. Vuorinen, *On the Degenerate Beltrami Equation*, Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki, Preprint 282, 2001, 32 P.

[157] P. Hajlasz, *Sobolev Mappings, Co-Area Formula and Related Topics*, Труды по анализу и геометрии, Изд-во Института математики, Новосибирск, 2000, С. 227—254.

[158] R. Harvey and J. Polking, *Removable singularities of solutions of linear partial differential equations*, Acta Math., V. 125, n. 1/2, 1970, P. 39—56.

[159] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Clarendon Press, Oxford etc., 1993.

[160] J. Heinonen, P. Koskela, *Sobolev Mappings with Integrable Dilatations*, Arch. Rational Mach. Anal., V. **125**, 1993, P. 81—97.

[161] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer-Verlag New York, Inc., 2001.

[162] I.O. Herzog, *Phragmén – Lidelöf theorems for second order quasi-linear elliptic partial differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., V. 15, 1964, P. 721—728.

[163] O.Yu. Imanuvilov, *On Carleman estimates for hyperbolic equations*, Asymptotic Analysis, V. 32, 2002, P. 185—220.

[164] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometric Function Theory ana Nonlinear Analysis*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2001.

[165] H. Jenkins, *On quasi-linear elliptic eqations hich arise from variational problems*, J. Rat. Mech., 10, 1956, P. 705—728.

[166] R. Jensen, *Uniqueness of Lipschitz extension: minimizing the sup norm of the gradient*, Arch. Rational Mech. Anal., V. 123, 1993, P. 51—74.

[167] P. Juutinen, *Absolutely minimizing Lipschitz extensions on a metric space*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica, V. 27, 2002, P. 57—67.

[168] R. Kaufman and J.-M. Wu, *On removable sets for quasiconformal mappings*, Ark. Mat., V. 34, 1996, P. 141—158.

[169] R. Kersner, A. Shishkov, *Instantaneous Shrinking of the Support of Energy Solutions*, J. of Math. Anal. and Appl., V. 198, 1996, P. 729—750.

[170] T. Kilpeläinen, X. Zhong, *Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations*, Proc. Amer. Math. Soc., V. 130, n. 6, 2002, P. 1681—1688.

[171] J. Kral, *Removable singularities of solutions of semielliptic equations*, Rendiconti de Matematica, V. 6, n. 4, 1973, P. 763—783. Casopis pro pest. mat., V. 109, 1984, P. 204—322.

[172] A.P. Kopylov, *Stability of Classes of Mappings and Hölder Continuity of Higher Derivatives of Elliptic Solutions to Systems of Nonlinear Differential Equations*, Sib. Math. J., V. 43, n. 1, 2002, P. 68—82. http://www.kluweronline.com/issn/0037—4466

[173] P. Koskela, J. Malý, *Mappings of finite distortion: The zero set of the Jacobian*, Journal of the European Mathematical Society, V. 5, n. 2, 2003, P. 95—105.

[174] S.L. Krushkal', *Quasiconformal mappings and Riemann surfaces*, John Wiley&Sons, New York, Toronto, London, Sydney, 1979.

[175] Reiner Kühnau, *Trianguliere Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit ganz-linear Bezugssubstitutionen und quasikonforme Abbildungen mit stückweise kpnstanter komplexer Dilatation*. - Mathematische Nachrichten, Band 46, Heft 1-6, 1970, 243 -261.

[176] R. Kühnau, *Über zwei klassen schlichter konformer Abbildungen*, Math. Nachr., B. 49, N. 1—6, 1971, S.173—185.

[177] K. Lancaster, *Nonparametric minimal surfaces in R^3 whose boundaries have a jump discontinuity*, Internat. J. Math. Math. Sci., V. 11, n. 4, 1988, P. 651—656.

[178] J. Lawrynowicz, *On a class of quasiconformal mappings with invariant boundary points, II, Applications and generalizations*, Ann. polon. math., V. 21, n. 3, 1969.

[179] H. Lebesgue, *Sur le probleme de Dirichlét*, Rend. circ. mat. Palermo, **24**, 1907, P. 371—402.

[180] O. Lehto and K.I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1973.

[181] Y. Li and L. Nirenberg, *The Distance Function to the Boundary, Finsler Geometry, and the Singular Set of Viscosity Solutions of Some Hamilton—Jacobi Equations*, Communications of Pure and Applied Mathematics, V. LVIII, 2005, P. 85—146.

[182] J. Lelong—Ferrand, *Représentation conforme et transformations a intégrale de Dirichlet bornée*, Gauthier—Villars, Paris, 1955.

[183] P. Li and J. Wang, *Finiteness of disjoint minimal graphs*, Math. Res. Letters, V. 8, 2001, P. 771—777.

[184] J. Maly, *Sufficient Conditions for Change of Variables in Integral*, в сборнике "Труды по анализу и геометрии", редактор-составитель С.К. Водопьянов, Изд-во Института математики, Новосибирск, P. 370—386, 2000.

[185] O. Martio, V. Miklyukov, *On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equation*, Complex Variables, V. 49, 2004, P. 647—656.

[186] O. Martio, V.M. Miklyukov, and M. Vuorinen, *Critical points of $A-$solutions of quasilinear elliptic equations*, Houston Journal of Mathematics, V. 25, n. 3, 1999, P. 583—601.

[187] O. Martio, V.M. Miklyukov, and M. Vuorinen, *Relative distance and boundary properties of nonparametric surfaces with finite area*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, V. 286, n. 2, 2003, P. 524—539.

[188] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *BMO-quasiconformal mappings and Q-homeomorphisms in space*, Prep. 288, Dept. Math. of Helsinki Univ., 2001, 24 P.

[189] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *To the theory of Q-homeomorphisms*, Dokl. Akad. Nauk, Rossii, V. 381, n. 1, 2001, P. 20—22.

[190] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *On the boundary behavior of Q-homeomorphisms*, Prep. 318, Dept. Math. of Helsinki Univ., 2002, 12 P.

[191] E.J. McShane, *Extension of range of functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **40**, 1934, P. 837—842.

[192] E.J. McShane, *Parametrizations of saddle surfaces, with applications to the problem of Plateau*, Trans. Amer. Math. Soc., **35**, 1933, P. 716—733.

[193] V.M. Miklyukov, S.S.Polupanov, R.A.Tarapata, *Stabilization theorems for solutions of gas dynamics equation*, Reports of the Depart. of Math., Preprint 383, March 2004, Univ. of Helsinki, 22 P.

[194] V.M. Miklyukov, S.-S. Chow and V.P. Solovjov, *Stagnation zones of ideal flows in long and narrow bands,* IJMMS, V. 62, 2004, P. 3339—3356.

[195] V. Miklyukov and A. Weitsman, *Carleman's method and solutions to the minimal surface equation*, (in prep.)

[196] J. Milnor, *On decidingwhether a surface is parabolic or hyperbolic*, Amer. Math. Monthly, V. 84, n. 1, 1977, P. 43—46.

[197] F. Morgan, Geometric Measure Theory. A Beginners's Guide, Second Edition, San Diego — Boston — New York — London — Sydney — Tokyo — Toronto, Academic Press, 1995.

[198] C.B. Morrey, *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., V. 43, 1938, P. 126—186.

[199] S. Müller, V. Sverák, *On surfaces of finite total curvature*, J. Differential Geometry, V. 42, 1995, P. 229—258.

[200] J.C.C. Nitsche, *On new results in the theory of minimal surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc., V. 71, n. 2, 1965, P. 195—270; русский перевод: сб. переводов "Математика", Т. 11, n. 3, 1967, С. 37—100.

[201] J.C.C. Nitsche, *Vorlesungen über Minimalflächen*, Springer-Verlag, 1975.

[202] O.A. Oleinik, G.A. Iosif'yan, *Boundary value problems for second order elliptic equations in unbounded domains and Saint-Venant's Principle*, Ann. Suola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), n. 2, 1977, P. 269—290.

[203] Y. Pan and T. Wolf, *A Remark on Unique Continuation*, The J. of Geometric Analysis, V. 8, n. 4, 1998, P. 599—604.

[204] G. Piranian, *The distribution of prime ends*, Mich. Math. J., V. 7, 1960, P. 83—95.

[205] A.V. Pokrovskii, *Removable Singularities for p-Harmonic Functions*, Междунар. школа-конф. по геометрии и анализу, Тез. докл., Изд-во Института математики СО РАН, Новосибирск, 2004, С. 201—202.

[206] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg —New York, 1992.

[207] T. Rado, P.V. Reichelderfer, *Continuous Transformations in Analysis*, Springer-Verlag, Berlin — Gotingen — Heidelberg, 1955.

[208] C.A. Rogers, *Hausdorff measures*, Cambridge at the University Press, 1970.

[209] B. Rodin, S.E. Warschawski, *Extremal length and the boundary behavior of conformal mapping*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math, V. 2, 1976, P. 467—500.

[210] B. Rodin, S.E. Warschawski, *Extremal length and univalent functions I. The angular derivative*, Math. Z., V. 153, 1977, P. 1—17.

[211] B. Rodin, S.E. Warschawski, *Extremal length and univalent functions II. Integral estimates of strip mappings*, J. Math. Soc. Japan, V. 31, 1979, P. 87—99.

[212] B. Rodin, S.E. Warschawski, *Estimates for conformal maps of strip domains without boundary regularity*, Proc. London Math. Soc., (3) V. 39, 1979, P. 356—384.

[213] B. Rodin, S.E. Warschawski, *On the derivative of the Riemann mappings function near a boundary point and the Visser—Ostrowski problem*, Math. Ann., V. 248, 1980, P. 125—137.

[214] B. Rodin, S.E. Warschawski, *A necessary and sufficient condition for the asymptotic version of Ahlfors' distortion property*, Trans. Amer. Math. Soc., V. 276, 1983, P. 281—288.

[215] B. Rodin, S.E. Warschawski, *Conformal mapping and locally asymptotically conformal curves*, Proc. London Math. Soc., (3) V. 49, 1984, P. 255—273.

[216] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Degenerate Beltrami equation and radial Q-homeomorphisms*, Preprint 369, August 2003, Department of Mathematics, University of Helsinki.

[217] L. Sario, M. Nakai, C. Wang, L.O. Chung, *Classification Theory of Riemannian Manifolds*, Lectures Notes Math., 1977, 605 P.

[218] L. Simon, *Equation of mean curvature in 2 independent variables*, Pacific J. Math., V. 69, n. 1, 1977, P. 245—268.

[219] H.A. Schwarz, *Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel*. - J reine angew. Math., v. 70, 1869, 121-136.

[220] J. Serrin, M. Tang, *Uniqueness of Ground States for Quasilinear Elliptic Equation*, Indiana Univ. Math. J., V. 49, n.. 3, 2000, P. 897—923.

[221] J. Spruck, *Two dimensional graphs over unbounded domains*, J. Inst. Math. Jussien, V. 1, 2002, P. 631—640.

[222] O. Teichmüller, *Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung*, Dtsch. Math., n. 3, 1938, P. 621—678.

[223] T. Toro, *Surfaces with generalized second fundamental form in L^2 are Lipschitz manifolds*, J. Differential Geometry, V. 39, 1994, P. 65—101.

[224] D.C. Ullrich, *Removable sets for harmonic functions*, Mich. Math. J., 1991, V. 38, n. 3, P. 467—473.

[225] N.X. Uy, *Removable set for Lipschitz harmonic functions*, Mich. Math. J., 1990, V. 37, P. 45—51.

[226] S.E. Warschawski, *Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunction bei konformer Abbildung*, Math. Z., V. 35, 1932, P. 321—456.

[227] S.E. Warschawski, *On conformal mapping of infinite strips*, Trans. Amer. Math. Soc., V. 51, 1942, P. 280—335.

[228] S.E. Warschawski, *On the boundary behavioyr of conformal mappings*, Nagoya Math. J., V. 30, 1967, P. 83—100.

[229] A. Weitsman, *On the growth of minimal graphs*, Indiana Univ. Math. J., (to appear)

[230] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc., **36**, 1934, P. 63—89.

[231] T.H. Wolff, *Note on counterexamples in strong unique continuation problems*, Proc. of the Amer. Math. Soc., V. 114, n. 2, 1992, P. 351—356.

[232] T.H. Wolff, *A counterexample in a unique continuation problem*, Comm. in Analysis and Geometry, V. 2, n. 1, 1994, P. 79—102.