

Technische Universität Darmstadt - Fachbereich Physik

Seminar zur Theoretischen Physik, SS 2003

„Meßprozeß und begrifflicher Rahmen der Quantenmechanik“

Verborgene Parameter und die Bellsche Ungleichung

Kedar S. Ranade

Betreuer: Prof. N. Grewe

Seminarvortrag: 16. Mai 2003

1 Einleitung und EPR-Paradoxon

Die klassische Interpretation der Quantenmechanik geht davon aus, daß die quantenmechanische Beschreibung eines Systems im allgemeinen nur statistische Aussagen über einzelne Messungen ermöglicht. Im Jahre 1935 konstruierten Einstein, Podolsky und Rosen unter gewissen Annahmen (insbesondere Lokalität) ein Beispiel, das die Existenz verborgener lokaler Parameter zeigen sollte; dieses Beispiel wird als das *Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon*¹ (*EPR-Paradoxon*) bezeichnet.

Zum ersten Mal zeigte Bell 1964, daß die Annahmen des EPR-Paradoxons im Widerspruch zur Quantenmechanik stehen.

1.1 Vorbemerkungen

Hier wird die Fassung des EPR-Paradoxons nach Bohm und Aharonov² verwendet: Man betrachtet einen Singulett-Zustand aus zwei Spin-1/2-Teilchen, die sich in entgegengesetzte Richtungen bewegen.

Der Gesamtspin der beiden Teilchen ist null und es gilt Spin-Erhaltung.

¹Albert Einstein, Boris Podolsky, Nathan Rosen: „*Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*“, Phys. Rev. **47** (1935), S. 777 – 780

²David Bohm, Yakir Aharonov: „*Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen and Podolsky*“, Phys. Rev. **108** (1957), S. 1070 – 1076

1.2 Annahmen des EPR-Paradoxons

Für das EPR-Paradoxon werden folgende Annahmen gemacht:

1. *Perfekte Korrelation*: Mißt man den Spin beider Teilchen entlang derselben Richtung, so erhält man (aufgrund der Spin-Erhaltung) entgegengesetzte Ergebnisse.
2. *Lokalität*: Die Messung des Spins des einen Teilchens hat keinen Einfluß auf das zweite Teilchen.
3. *Realität*: Kann man ohne Störung des Systems eine physikalische Größe sicher vorhersagen, so existiert ein hierzu korrespondierendes Element der physikalischen Wirklichkeit.
4. *Vollständigkeit*: Jeder Teil der physikalischen Wirklichkeit wird durch eine vollständige physikalische Theorie beschrieben.

1.3 Schlußweise des EPR-Paradoxons

Die Schlußweise des EPR-Paradoxons ist nun die folgende: Man wählt eine Richtung³ \vec{n} beliebig aus und mißt den Spin des Teilchens 1 entlang dieser Richtung. Nach 2. beeinflußt diese Messung das Teilchen 2 nicht, nach 1. ist aber der Spin des Teilchens 2 entgegengesetzt zu dem des Teilchens 1. Also ist der Spin des Teilchens 2 bekannt und nach 3. existiert ein Element der physikalischen Wirklichkeit, das den Ausgang der Messung festlegt, welches nach 4. in einer vollständigen Theorie enthalten sein muß.

Da die Teilchen nicht „wissen“ können, welches von ihnen gemessen wird und in welche Richtung der Spin gemessen wird, müssen also *verborgene lokale Parameter* vorliegen, welche das Ergebnis der Messung festlegen.

2 Bellsche Ungleichung von 1964

In diesem Abschnitt wird die erste Form einer Aussage über die Unverträglichkeit von Quantenmechanik und Theorien verborgener lokaler Parameter hergeleitet. Sie geht auf Bell⁴ zurück; vgl. [Bell64].

³Raumrichtungen werden mit den zugehörigen Einheitsvektoren \vec{n} identifiziert; dabei ist $\vec{n} \in S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ (S^2 ist die Einheitssphäre des \mathbb{R}^3).

⁴John Stewart Bell, 28. Juni 1928 (Belfast) – 01. Oktober 1990 (Genf)

2.1 Verborgene lokale Parameter in zwei Dimensionen

In einem zweidimensionalen Raum, z.B. dem Spin-Raum eines einzelnen Spin-1/2-Teilchens, wird ein beliebiger linearer Operator \hat{A} durch eine 2x2-Matrix repräsentiert. Er ist also darstellbar als $a_0 + \vec{a} \cdot \hat{\vec{\sigma}}$.⁵ Für einen hermiteschen Operator \hat{A} sind a_0 und \vec{a} reell und die Eigenwerte sind $a_0 \pm \|\vec{a}\|$.

Für jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^2$ existiert eine Richtung \vec{n} , so daß \vec{v} Eigenvektor des Operators $(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n})$ zum Eigenwert +1 ist, d.h. $(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n})|\vec{n}, +\rangle = |\vec{n}, +\rangle$ mit der Schreibweise $\vec{v} = |\vec{n}, +\rangle$.⁶ Für den quantenmechanischen Erwartungswert von \hat{A} ergibt sich damit

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \vec{n}, + | \hat{A} | \vec{n}, + \rangle = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{n}, \quad (1)$$

und da \hat{A} nur zwei Eigenwerte besitzt, ist dadurch die Verteilung der Meßwerte festgelegt.

Nimmt man an, daß jedem durch $|\vec{n}, +\rangle$ beschriebenen System ein (statisch gleichverteilter) Einheitsvektor \vec{m} als verborgener Parameter zugeordnet ist und nimmt an, daß sich die Meßwerte von \hat{A} durch die Regeln

$$\begin{aligned} v_n(\hat{A}) &= a_0 + \|\vec{a}\|, & \text{falls } (\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{a} \geq 0 \\ v_n(\hat{A}) &= a_0 - \|\vec{a}\|, & \text{falls } (\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{a} < 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ergeben, dann folgt für den Erwartungswert

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\|\vec{m}\|=1} v_n(\hat{A}) d\Omega(\vec{m}) = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{n}, \quad (3)$$

d.h. die Verteilung aufgrund des verborgenen Parameters und die quantenmechanische Verteilung sind identisch.

Damit ist eine Theorie verborgener lokaler Parameter in zwei Dimensionen konstruiert; die im folgenden betrachteten Unverträglichkeitsaussagen beziehen sich daher auf mindestens dreidimensionale Räume.

2.2 Herleitung der Bellschen Ungleichung

Sei ein verborgener lokaler Parameter durch $\lambda \in \Lambda$ gegeben; dabei kann der Raum Λ kontinuierlich oder diskret und ein- oder mehrdimensional sein. Hier wird λ o.B.d.A. als eindimensionaler kontinuierlicher Parameter behandelt.

⁵ $\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^t$ ist der Vektor der Pauli-Matrizen.

⁶Für $\vec{v} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} c \\ a+bi \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, \varphi \in \mathbb{R}$ und $\|\vec{v}\| = 1$ ist $\vec{n} = (2ac, 2bc, c^2 - a^2 - b^2)^t$.

Seien also die Ergebnisse einer Spin-Messung der Teilchen 1 und 2 in die Richtungen \vec{a} und \vec{b} durch folgende Funktionen festgelegt (wegen der Lokalisationsannahme sind A und B nur von je einer Richtung abhängig):

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1. \quad (4)$$

Der Erwartungswert $P(\vec{a}, \vec{b})$ für das Produkt der Messung des Teilchens 1 in Richtung \vec{a} und der Messung des Teilchens 2 in Richtung \vec{b} ergibt sich also zu:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) d\lambda, \quad (5)$$

wobei $\rho(\lambda)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für λ bezeichnet ($\int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) d\lambda = 1$). Wegen der perfekten Korrelation gilt $B(\vec{a}, \lambda) = -A(\vec{a}, \lambda)$ und damit:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) d\lambda. \quad (6)$$

Führt man eine dritte Richtung \vec{c} ein, so folgt:

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \left[A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \right] d\lambda \\ &= \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) \left[A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1 \right] d\lambda. \end{aligned} \quad (7)$$

Betrachtet man die Beträge der Ausdrücke, so folgt mit $|A(\cdot, \lambda)| \equiv 1$ für alle Richtungen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ die *Bellsche Ungleichung*:

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \left[1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) \right] d\lambda = 1 + P(\vec{b}, \vec{c}). \quad (8)$$

2.3 Vergleich mit quantenmechanischen Resultaten

Sei eine Richtung \vec{n} mit Azimutalwinkel $\varphi \in [0; 2\pi)$ und Polarwinkel $\vartheta \in [0; \pi]$ gegeben, $(\hat{\sigma} \cdot \hat{n})$ der zugeordnete Spin-Operator⁷ mit den Eigenzuständen $|\vec{n}, +\rangle$ und $|\vec{n}, -\rangle$, d.h.

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma} \cdot \hat{n})|\vec{n}, +\rangle &= +|\vec{n}, +\rangle \\ (\hat{\sigma} \cdot \hat{n})|\vec{n}, -\rangle &= -|\vec{n}, -\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

⁷Der Spin-Operator zu einer Richtung \vec{n} ist eigentlich $(\hbar/2)(\hat{\sigma} \cdot \hat{n})$. In diesem Text werden die Begriffe Spin-Operator und Pauli-Matrix jedoch synonym verwendet.

Die Transformation in die Basis der Eigenzustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ des Spin-Operators der \vec{e}_z -Richtung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} |\vec{n}, +\rangle &= +\cos\frac{\vartheta}{2}e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi/2}|-\rangle \\ |\vec{n}, -\rangle &= -\sin\frac{\vartheta}{2}e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \cos\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi/2}|-\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Daraus folgt für den Singulett-Zustand bzgl. \vec{n} :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\vec{n}, +\rangle_1|\vec{n}, -\rangle_2 - |\vec{n}, -\rangle_1|\vec{n}, +\rangle_2\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right], \quad (11)$$

d.h. der Singulett-Zustand ist rotationsinvariant und damit auch nicht in ein Produkt von Einteilchenzuständen zerlegbar, also *verschränkt*.

Im folgenden sei o.B.d.A. $\vec{b} = \vec{e}_z$ und \vec{a} habe den Azimutalwinkel $\varphi = 0$ und den Polarwinkel $\vartheta \in [0; \pi]$. Mit (10) folgt also:

$$\begin{aligned} |\vec{a}, +\rangle &= +\cos\frac{\vartheta}{2}|\vec{b}, +\rangle + \sin\frac{\vartheta}{2}|\vec{b}, -\rangle \\ |\vec{a}, -\rangle &= -\sin\frac{\vartheta}{2}|\vec{b}, +\rangle + \cos\frac{\vartheta}{2}|\vec{b}, -\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{Singulett}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\vec{a}, +\rangle_1|\vec{a}, -\rangle_2 - |\vec{a}, -\rangle_1|\vec{a}, +\rangle_2\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\sin\frac{\vartheta}{2}|\vec{a}, +\rangle_1|\vec{b}, +\rangle_2 + \cos\frac{\vartheta}{2}|\vec{a}, +\rangle_1|\vec{b}, -\rangle_2 \right. \\ &\quad \left. - \cos\frac{\vartheta}{2}|\vec{a}, -\rangle_1|\vec{b}, +\rangle_2 - \sin\frac{\vartheta}{2}|\vec{a}, -\rangle_1|\vec{b}, -\rangle_2\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Der Erwartungswert $P(\vec{a}, \vec{b})$ ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) &= P_{++} - P_{+-} - P_{-+} + P_{--} \\ &= \sin^2\frac{\vartheta}{2} - \cos^2\frac{\vartheta}{2} \\ &= -\cos\vartheta \\ &= -\vec{a} \cdot \vec{b}. \end{aligned} \quad (14)$$

Wählt man nun beispielsweise \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} komplanar mit $\langle(\vec{a}, \vec{b})\rangle = \langle(\vec{b}, \vec{c})\rangle = \frac{\pi}{3}$ und $\langle(\vec{a}, \vec{c})\rangle = \frac{2\pi}{3}$, so gilt nach der Bellschen Ungleichung:

$$\left| \underbrace{-\cos\frac{\pi}{3}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\cos\frac{2\pi}{3}}_{=-\frac{1}{2}} \right| \leq 1 - \underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{=\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{2} \quad (\text{Widerspruch}), \quad (15)$$

was der Annahme verborgener lokaler Parameter entgegensteht.

2.4 Bemerkungen

- Die Bellsche Ungleichung beruht nicht auf dem quantenmechanischen Formalismus und enthält an sich keinen Widerspruch; erst der Vergleich der Ergebnisse für die Erwartungswerte liefert die Unverträglichkeit von Quantenmechanik und Theorien verborgener lokaler Parameter.
- Die Ungleichung kann experimentell getestet werden; die bisherigen Versuche sprechen gegen verborgene lokale Parameter.
- Die Bellsche Ungleichung macht nur Aussagen über Erwartungswerte, jedoch nicht über Einzelereignisse. Insbesondere tritt im Fall perfekter Korrelation ($\vec{b} = -\vec{c}$) sowie für $\langle(\vec{a}, \vec{b})\rangle = \langle(\vec{a}, \vec{c})\rangle$ kein Widerspruch auf.

3 Varianten der Bellschen Ungleichung I

Die folgende Betrachtung liefert eine Variante der Unmöglichkeitssaussage für verborgene lokale Parameter im Rahmen der Quantenmechanik; sie benötigt insbesondere keinen Vergleich von Erwartungswerten; vgl. [GHSZ90].

3.1 Das Drei-Teilchen-Interferometer

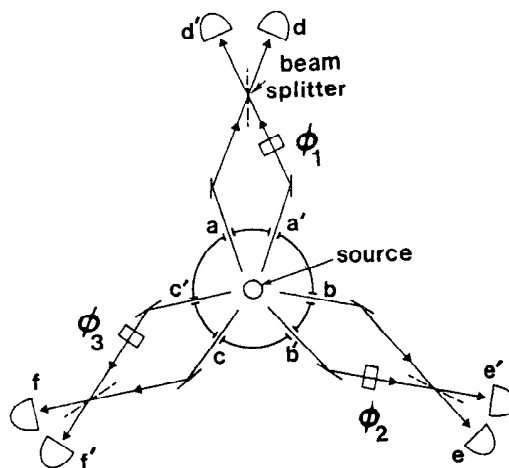


Abbildung 1: Drei-Teilchen-Interferometer, vgl. [GHSZ90]

Man betrachtet den Zerfall eines Teilchens in drei gleichartige Teilchen; diese sollen sich in einer Ebene im Winkel von jeweils 120° zueinander vom Ort des Zerfalls entfernen (Impulserhaltung).

Der Ort des Zerfalls sei so abgeschirmt, daß die drei Teilchen ihn entweder durch die drei Öffnungen a, b, c oder a', b', c' verlassen können. Der Zustand ergibt sich durch die Superposition

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|a\rangle_1 |b\rangle_2 |c\rangle_3 + |a'\rangle_1 |b'\rangle_2 |c'\rangle_3 \right]. \quad (16)$$

Hinter der Abschirmung werden die Strahlen a, a' usw. auf jeweils einen Strahlteiler gelenkt; die Strahlen a', b' und c' erhalten zuvor eine Phasenverschiebung von Φ_1, Φ_2 und Φ_3 . Hinter den Strahlteilern werden Detektoren d, d', e, e', f, f' so positioniert, daß der transmittierte Strahl a auf d , der transmittierte Strahl a' auf d' , der reflektierte Strahl a auf d' , der reflektierte Strahl a' auf d usw. auftreffen.

Die Zustände ergeben sich daraus zu:

$$\begin{aligned} |a\rangle_1 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|d\rangle_1 + i|d'\rangle_1 \right] \\ |a'\rangle_1 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\Phi_1} \left[|d'\rangle_1 + i|d\rangle_1 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

usw., wobei sich das i durch die Reflexion am Strahlteiler ergibt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine bestimmte Kombination $(d, e, f), (d', e, f)$ usw. ausgelöst wird, ergibt sich mit der Anzahl der gestrichenen Detektoren z zu (Beweis siehe [GHSZ90], Anhang G):

$$P_{(\cdot,\cdot,\cdot)}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \frac{1}{8} (1 + \text{sgn}(z) \sin(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)), \quad (18)$$

Mit der Festlegung, daß das Ergebnis $+1$ für $d, -1$ für d' usw. ist, ergibt sich der Erwartungswert des Produktes der drei Messungen zu

$$E(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \sum_{z \text{ gerade}} P_{(\cdot,\cdot,\cdot)} - \sum_{z \text{ ungerade}} P_{(\cdot,\cdot,\cdot)} = \sin(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3). \quad (19)$$

3.2 Konstruktion des Widerspruches

Aus (19) folgt perfekte Korrelation für die Fälle:

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \pi/2 &\Rightarrow E(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = +1 \\ \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 3\pi/2 &\Rightarrow E(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = -1. \end{aligned} \quad (20)$$

Bezeichnen A, B und C die Ergebnisse der Messung der drei einzelnen Detektoren und sei λ jeweils der verborgene Parameter, so folgt für alle Winkel Φ :

$$\begin{aligned} A(\pi/2, \lambda) & \quad B(\pi/2, \lambda) & \quad C(\pi/2, \lambda) & = -1 \\ A(\Phi + \pi/2, \lambda) & \quad B(\pi/2, \lambda) & \quad C(-\Phi + \pi/2, \lambda) & = -1 \\ A(\Phi + \pi/2, \lambda) & \quad B(-\Phi + \pi/2, \lambda) & \quad C(\pi/2, \lambda) & = -1 \\ A(2\Phi + \pi/2, \lambda) & \quad B(-\Phi + \pi/2, \lambda) & \quad C(-\Phi + \pi/2, \lambda) & = -1 \end{aligned} \quad (21)$$

Durch Vergleich der 1. mit der 2. und 3. Gleichung folgt weiter

$$\begin{aligned} A(\Phi + \pi/2, \lambda) C(-\Phi + \pi/2, \lambda) &= A(\pi/2, \lambda) C(\pi/2, \lambda) \\ A(\Phi + \pi/2, \lambda) B(-\Phi + \pi/2, \lambda) &= A(\pi/2, \lambda) B(\pi/2, \lambda) \end{aligned} \quad (22)$$

und nach Multiplikation der Gleichungen folgt mit $A(\cdot, \lambda)^2 \equiv 1$

$$B(-\Phi + \pi/2, \lambda) C(-\Phi + \pi/2, \lambda) = B(\pi/2, \lambda) C(\pi/2, \lambda) = \textit{konst.} \quad (23)$$

Eingesetzt in die letzte Zeile von Gleichung (21) folgt also $A(\Phi, \lambda) = \textit{konst.}$ Nach Gleichung (20) kann aber $A(\Phi, \lambda)$ für $\Phi_2, \Phi_3 = \textit{konst.}$ nicht konstant sein, was der gesuchte Widerspruch ist.

3.3 Bemerkungen

- Dieser Beweis benötigt den quantenmechanischen Formalismus.
- Er liefert einen direkten Widerspruch anstatt nur einer Ungleichung für die Erwartungswerte.
- Das Beispiel verwendet keinen Spin.

3.4 Variante unter Verwendung von Spins

Ein anderes Beispiel läßt sich auch unter Verwendung von Spins konstruieren.⁸ Dazu betrachtet man drei im Winkel von 120° räumlich auseinanderlaufende Spin-1/2-Teilchen im Zustand $|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |+\rangle_2 |+\rangle_3 - |-\rangle_1 |-\rangle_2 |-\rangle_3]$.

Dieser Zustand ist Eigenzustand zu den paarweise kommutierenden Operatoren $\hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_y^2 \hat{\sigma}_y^3$, $\hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_y^3$ und $\hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2 \hat{\sigma}_x^3$ zum Eigenwert $+1$. Unter der Lokali-tätsannahme kann man deswegen nun prinzipiell jeden der sechs einem Teilchen zugeordneten Faktoren $(\hat{\sigma}_x^i, \hat{\sigma}_y^i)_{i=1,2,3}$ durch lokale Messung von Spin-Komponenten der zwei anderen Teilchen bestimmen, d.h. die zugehörigen Meßwerte $(\lambda_x^i, \lambda_y^i)_{i=1,2,3}$ sind durch verborgene lokale Parameter festgelegt. Das Produkt der Operatoren ergibt sich also durch das Produkt der einzelnen Meßwerte zu $\lambda_x^1 \lambda_x^2 \lambda_x^3 = +1$.

Andererseits kann man jedoch zunächst das Operatorprodukt berechnen, welches sich wegen $\hat{\sigma}_y^i = 1$ und $\{\hat{\sigma}_x^i, \hat{\sigma}_y^i\} = \hat{\sigma}_x^i \hat{\sigma}_y^i + \hat{\sigma}_y^i \hat{\sigma}_x^i = 0$ zu $-\hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_x^3$ ergibt, d.h. $|\Psi_S\rangle$ ist Eigenzustand zum Operator $\hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_y^2 \hat{\sigma}_y^3$ zum Eigenwert -1 und für die verborgenen lokalen Parameter gilt $\lambda_x^1 \lambda_x^2 \lambda_x^3 = -1$.

Dies ist der gesuchte Widerspruch; er entsteht dadurch, daß die Meßwerte (reelle Zahlen) zwar kommutieren, die zugehörigen Operatoren aber nicht ($\hat{\sigma}_x^i$ und $\hat{\sigma}_y^i$ antikommutieren).

⁸N. David Mermin: „What’s wrong with these elements of reality?“, Physics Today (Juni 1990), S. 9 – 11

4 Varianten der Bellschen Ungleichung II

Im folgenden soll ein Widerspruch zur Annahme verborgener lokaler Parameter konstruiert werden, der den Begriff des Erwartungswertes nicht erfordert. Dazu wird der quantenmechanische Formalismus verwendet.

Hierbei verwendet man zunächst jedoch nicht die Annahme der Lokalität, sondern die der Nichtkontextualität; diese Form der Aussage bezeichnet man als das *Kochen-Specker-Theorem*⁹ (*KS-Theorem*). Ein Zusammenhang zur Lokalität wird im nächsten Abschnitt hergestellt werden.

Im folgenden wird verwendet, daß eine (als Potenzreihe darstellbare) Funktionalidentität für kommutierende Operatoren $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n$ auch von allen Eigenwerten a_1, \dots, a_n dieser Operatoren erfüllt wird, d.h. für eine Potenzreihe f gilt: $f(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n) = 0 \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) = 0$.

4.1 KS-Theorem in vier Dimensionen

$$\begin{array}{ccc} \hat{\sigma}_x^1 & \hat{\sigma}_x^2 & \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 \\ \hat{\sigma}_y^2 & \hat{\sigma}_y^1 & \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2 \\ \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_y^2 & \hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_y^1 & \hat{\sigma}_z^1 \hat{\sigma}_z^2 \end{array}$$

Betrachtet man zwei Spin-1/2-Teilchen mit den Pauli-Matrizen $\hat{\sigma}^1$ und $\hat{\sigma}^2$ sowie das obenstehende Operatorenschema. Die Operatoren zu verschiedenen Teilchen kommutieren miteinander; ferner gelten für die Teilchen die Gleichungen $(\hat{\sigma}_x^i)^2 = (\hat{\sigma}_y^i)^2 = (\hat{\sigma}_z^i)^2 = 1$ sowie $\hat{\sigma}_x^i \hat{\sigma}_y^i = i \hat{\sigma}_z^i$ usw.

Damit folgt:

1. Die Operatoren in jeder Spalte und jeder Zeile kommutieren paarweise miteinander.
2. Das Produkt der Operatoren der dritten Spalte ist -1 , das der anderen Spalten und der drei Zeilen ist $+1$. Damit ist das Zeilenprodukt aller neun Operatoren $+1$, das Spaltenprodukt -1 .
3. Eine Theorie verborgener Parameter muß jedem der neun Operatoren einen Meßwert (Eigenwert) zuweisen, in diesem Fall also $+1$ oder -1 .
4. Da diese Meßwerte die Operatoridentitäten erfüllen müssen, folgt daraus „ $+1 = -1$ “, was der gesuchte Widerspruch ist.

⁹Simon Kochen, Ernst P. Specker: „*The problem of hidden variables in quantum mechanics*“, J. Math. Mech **17** (1967), S. 59 – 87; für weitere Referenzen vgl. [Merm93].

4.2 KS-Theorem in acht Dimensionen

$$\begin{array}{cccc}
 & & \hat{\sigma}_y^1 & \\
 & & & \\
 \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_x^3 & \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2 \hat{\sigma}_x^3 & \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_y^3 & \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_y^2 \hat{\sigma}_y^3 \\
 & & & \\
 & \hat{\sigma}_x^3 & & \hat{\sigma}_y^3 \\
 & & \hat{\sigma}_x^1 & \\
 & & & \\
 \hat{\sigma}_y^2 & & & \hat{\sigma}_x^2
 \end{array}$$

Ein entsprechendes Beispiel kann auch mit drei Spin-1/2-Teilchen konstruiert werden. Ausgehend von diesem Beispiel wird später der Zusammenhang zur Annahme der Lokalität gezeigt.

Zur Herleitung des Widerspruchs betrachtet man die wie oben in einem fünfzackigen Stern angeordneten Operatoren. Damit gilt:

1. Die Operatoren auf jeder der fünf Linien kommutieren paarweise miteinander.
2. Das Operatorprodukt auf der waagerechten Linie ist -1 , auf allen anderen Linien $+1$; wie im vierdimensionalen Beispiel müssen auch die Meßwerte diese Bedingungen erfüllen.
3. Das Produkt der Operatorprodukte aller fünf Linien ist also -1 ; da jedoch jeder Operator auf genau zwei Linien vorkommt, muß das Produkt der Meßwerte $+1$ geben, was den Widerspruch impliziert.

4.3 KS-Theorem in drei Dimensionen

Es ist auch möglich, einen analogen Beweis in drei Dimensionen zu führen: Hierzu betrachtet man ein Spin-1-Teilchen ($s = 1$); die Spin-Operatoren für die Raumrichtungen haben die Eigenwerte -1 , 0 und $+1$. Die Summe der Quadrate über die Eigenwerte bzgl. drei paarweise orthogonaler Richtungen x , y , z muß $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = s(s + 1) = 2$ ergeben.

Eine Theorie verborgener lokaler Parameter muß nun also genau zwei von drei paarweise orthogonalen Raumrichtungen die quadrierten Eigenwerte $S_i^2 = 1$ und der dritten den quadrierten Eigenwert $S_i^2 = 0$ zuweisen.

Man kann nun eine Menge von Raumrichtungen konstruieren, die eine Zuordnung von 0 und 1 nach diesen Kriterien nicht zuläßt, woraus der Widerspruch folgt. Dieser Beweis ist jedoch etwas schwieriger zu führen und wird deshalb hier nicht wiedergegeben; vgl. [Merm93].

4.4 Problem der Nichtkontextualität

In den zuvor gemachten Aussagen wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die Messung einer Observablen unabhängig davon ist, welche anderen (mit der ersten kommutierenden) Observablen gleichzeitig mit ihr gemessen werden, d.h. der verborgene Parameter für die Messung einer Observablen wurde als unabhängig von den anderen Observablen betrachtet. Dies nennt man *Nichtkontextualität* (*Kontextunabhängigkeit*, engl. *noncontextuality*).

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß sich die Annahme der Lokalität über eine spezielle Form der Annahme der Nichtkontextualität ergibt.

5 Nichtkontextualität und Lokalität

Um einen Zusammenhang zwischen Nichtkontextualität und Lokalität herzustellen, nimmt man an, daß die Nichtkontextualität nur dann zwingend gegeben sein soll, wenn die durchgeführten Messungen räumlich voneinander getrennt durchgeführt werden.

5.1 Zusammenhang zur Lokalität durch Beispiel (4.2)

Betrachtet man drei Spin-1/2-Teilchen, die räumlich so weit voneinander getrennt sind, daß man eine Messung als lokalisiert annehmen will und das Operatorenschema aus (4.2).

Man kann nun im allgemeinen den vier (kommutierenden) Operatoren der waagerechten Linie keine kontextunabhängigen Meßwerte zuweisen; betrachtet man jedoch speziell einen gemeinsamen Eigenzustand dieser Operatoren, so liegen deren Meßwerte fest. Die restlichen Observablen sind lokal, also unabhängig von den beiden anderen lokalen Observablen auf derselben Linie festgelegt.

Mit diesen Annahmen ist die Schlußweise die gleiche wie zuvor.

Eine analoge Schlußweise beim Operatorenschema aus (4.1) ist nicht möglich, da die nicht-lokalen Operatoren nicht sämtlich paarweise miteinander kommutieren und man daher keinen gemeinsamen Eigenzustand findet.

5.2 Bemerkungen

- Es wurde gezeigt, daß die Annahme kontextunabhängiger bzw. lokaler Parameter zu einem formalen Widerspruch in der Quantenmechanik führt.
- Im Gegensatz zur Bellschen Ungleichung von 1964 ist dieser Widerspruch nicht nur statistisch, sondern gilt für ein einzelnes System, insbesondere wird die Definition des Erwartungswertes nicht verwendet.

5.3 Zusammenfassung und Auswege

Es wurde gezeigt, daß eine Theorie verborgener lokaler oder kontextunabhängiger Parameter nicht möglich ist. Die Existenz einer Theorie verborgener Parameter im allgemeinen wird hierdurch jedoch nicht beeinträchtigt, und es ist tatsächlich möglich, eine Theorie zu konstruieren, in der der Ausgang einer Messung durch verborgene Parameter eines anderen Typs bestimmt wird.

Eine solche Theorie ist die *Bohmsche Führungswellentheorie*¹⁰, die, wie von der Bellschen Ungleichung gefordert, nicht-lokal und kontextabhängig ist.

Literatur

- [Bell64] JOHN S. BELL:
„*On the Einstein-Podolsky-Rosen-Paradox*“
Physics Vol. 1 (1964), S. 195 – 200
- [GHSZ90] DANIEL M. GREENBERGER, MICHAEL A. HORNE,
ABNER SHIMONY, ANTON ZEILINGER:
„*Bell's Theorem without inequalities*“
American Journal of Physics **58** (1990), S. 1131 – 1143
- [Merm93] N. DAVID MERMIN:
„*Hidden variables and the two theorems of John Bell*“
Reviews of Modern Physics **65** (Juli 1993), S. 803 – 815

¹⁰David Bohm: „*A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables*“, Phys. Rev. **85** (1952), S. 166 – 179 und 180 – 193