“*There is only mathematics; that is all that exists*.”
Max Tegmark (amerikanischer Astrophysiker)

# Von Grassmanns Ausdehnungslehre zur Geometrischen Algebra und Logik

Vortrag im Ernst Schröder Zentrum der TU Darmstadt, 29. Januar 2010

Paul Drechsel, Mainz

## Einleitung

Bevor ich auf das Thema meines Vortrags eingehe, möchte ich den Urheber des ganzen, Herrmann Grassmann, kurz biographisch vorstellen.[1]

Die Grassmanns waren eine protestantische Pastorenfamilie, die seit Jahrhunderten in Pommern ansässig war. Obwohl Pommern Anfang des 19. Jhdts. zu den rückständigsten Gebieten Deutschlands gehörte, lässt sich der Einfluss des Pietismus und der deutschen Aufklärungsphilosophie auf die Familie nachweisen. Schon der Großvater Gottfried Ludolf Grassmann (1738-1798) war als Theologe wissenschaftlichen Arbeiten gegenüber aufgeschlossen. Der Werdegang von Justus Günther Grassmann (1779-1852), der Vater Hermann Grassmanns, wurde bereits weitgehend von wissenschaftlichen Interessen bestimmt, obwohl er in Halle zunächst Theologie studiert hatte. Sein Hauptinteresse galt jedoch den exakten Wissenschaften, d.h. Mathematik und Physik. Zunächst als Prediger tätig wurde er später Lehrer am Stadtgymnasium zu Stettin. Er verfasste während seiner Tätigkeit als Lehrer drei an die humanistischen Auffassungen Pestalozzis anknüpfende Mathematiklehrbücher, die er ‚Raumlehren‘ nannte. 1835 gründete er in Stettin die ‚Physikalische Gesellschaft‘. In diesem Umfeld erblickte Hermann Grassmann das Licht der Welt.

Hermann Grassmann wurde am 15. April 1809 als drittes von elf Kindern Justus Grassmanns und mit seiner Frau Johanna Friedericke geboren. Kaum etwas an seinem Verhalten deutete zunächst auf ein besondere wissenschaftliche Begabung hin. Auffällig waren bis zu seinem 14. Lebensjahr stattdessen Schüchternheit, Vergesslichkeit und Träumerei. Erst mit der Pubertät änderte sich seine Lebenseinstellung. Nach seinen eigenen Worten begann die Zeit des Erwachens aus einem Schlummerzustand.

1827 bestand er die Reifeprüfung mit der besten Note 1. Daraufhin besuchte er mit seinem Bruder Gustav die Berliner Universität, um Theologie zu studieren. Bemerkenswert angesichts seiner späteren Berufung ist, dass er während des ganzen Studiums keine einzige Mathematikvorlesung besucht hat. Geprägt wurde er im Studium von der nachhegelianischen dialektischen Philosophie Schleiermachers.

1830 kehrte er nach Stettin zurück, um sich auf die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen vorzubereiten. Erst ab dieser Zeit beschäftige er sich intensiver mit der Mathematik und Physik. Vorbild waren die Ausarbeitungen seines Vaters zu Geometrie, Arithmetik und

[1] Der Berliner Grassmann-Forscher Hans-Joachim Petsche hat eine umfassende Biographie über Hermann Grassmann (2006) vorgestellt. Ich beziehe mich im Folgenden auf diese Biographie. Im Internet sind weitere Angaben zu finden; ich verweise u.a. auf Wikipedia unter der Adresse http://de.wikipedia.org/wiki/Hermann_Grassmann.

Kombinationslehre in der ‚Raumlehre‘. Er besuchte zunächst das Stettiner Lehrerseminar und bestand 1831 die Prüfung mit der Lehrberechtigung für den philologischen, historischen und mathematischen Unterricht. 1833 legte er sein theologisches Examen ab. 1834 konnte der die Stelle eines Mathematiklehrers übernehmen, die zuvor von dem Geographen J. Steiner besetzt war, der an die Berliner Universität berufen wurde.

1836 wechselte Grassmann auf die neu eingerichtete Ottoschule und unterrichtete auch Mathematik und Physik für die höheren Klassen. Anknüpfend an die Schrift seines Vaters „Zur physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre“ von 1829 veröffentlichte er 1839 seine erste Arbeit mit dem Titel: „Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetz der Krystallbildung“. Wegen der Symmetriebetrachtungen fand diese Arbeit später bei dem Mathematiker August Ferdinand Möbius, u.a. dem Erfinder des Möbiusbandes, großes Interesse. 1838 legte Hermann Grassmann die zweite theologische Prüfung ab. Viereinhalb Monate zuvor beantragte er eine Nachprüfung in Mathematik und Physik. Am 4. März 1839 erhielt er vom Kommissionsmitglied Professor Conrad die Mathematisch-physikalische Aufgabe: *Theorie der Ebbe und Flut*. Ein Jahr später, am 20. April 1840, reichte Grassmann seine Arbeit ein. Sie wurde positiv bewertet, worauf er für das Lehramt der Mathematik für alle Klassen zugelassen wurde.

Man sollte sich vor Augen führen, was Hermann Grassmann hiermit erfolgreich leistete. Ohne je Mathematik studiert zu haben hatte er sich autodidaktisch diesen Stoff angeeignet, und in seiner Prüfungsarbeit in einem Teilbereich sogar den bekannten französischen Mathematiker und Astronom Pierre-Simon (Marquis de) Laplace übertroffen, wobei dieser Teilbereich sich schon auf das bezog, was schon vier Jahre später als ‚Ausdehnungslehre‘ das Licht der Welt erblickten sollte. Ab 1840 wandte sich Hermann Grassmann voll der Mathematik zu und gab seine Vorstellung von der Übernahme eines theologischen Amtes auf. 1843 übernahm er eine ordentliche Lehrstelle am Friedrich-Wilhelm Gymnasium zu Stettin.

In der Zeit von 1840 bis 1844 arbeitete Hermann Grassmann trotz anstrengender schulischer Lehrtätigkeiten an seiner ‚Ausdehnungslehre‘, die im Jahr 1844 im Buchhandel erschien mit dem Titel:

> *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. Erster Theil: Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert. 1. Aufl. Leipzig 1844 (2. Auflage Leipzig 1878.)*

Leider stieß dieses Buch zur damaligen Zeit auf völliges Unverständnis. Hermann Grassmann schickte Exemplare an einige Mathematiker, darunter Möbius und den damals schon berühmten Carl Friedrich Gauss, doch alle mokierten sich über den etwas verquollenen Sprachduktus und die eigenwillige Terminologie; der innovative Inhalt ging darin unter. So kam es, dass Hermann Grassmann in Grunerts Archiv für Mathematik und Physik 1845 selbst eine Rezension seines Buches publizierte. Trotz allem immer noch ungebrochen vollendete Grassmann daraufhin eine Reihe von Veröffentlichungen zur Theorie der algebraischen Kurven. Noch fünfundzwanzig Jahre später zollte ihm Felix Klein in seinen Vorlesungen größte Hochachtung hinsichtlich dieser Theorie der algebraischen Kurven; wie er auch nach dem Tode Grassmanns die Publikation von dessen Werken veranlasste.

Philosophisch und mathematisch von größtem Interesse ist jedoch die Preisaufgabe gewesen, die die Fürstliche Jablonowskische Gesellschaft 1844 zur bruchstückhaft hinterlassenen

„geometrischen Charakteristik“ von Leibniz ausgeschrieben hatte. Möbius hatte Hermann Grassmann auf diese Ausschreibung aufmerksam gemacht. Für Grassmann kam diese Preisaufgabe wie gerufen und er löste sie mit Bravour, was allerdings auch wieder von der Fachwelt nur mit Einschränkungen anerkannt wurde. 1847 bewarb er sich um Berücksichtigung bei einer Vakanz einer mathematischen Lehrstelle an einer Preußischen Universität, was jedoch aufgrund ablehnender Gutachten abschlägig beschieden wurde. Die Revolution 1848 unterbrach für einige Zeit seine rein wissenschaftlichen Unternehmungen, außerdem heiratete er 1849 Marie Therese Knappe. Es sollte eine glückliche Ehe werden. Seine Gattin gebar ihm im Laufe der Jahre elf Kinder.

In den folgenden Jahren widmete sich Hermann Grassmann neben der Theorie algebraischer Kurven physikalischen Fragestellungen. Seine Theorie der Farben mitsamt Farbmischungsregeln fand allgemeine Anerkennung, etwa bei bekannten Physikern wie Hermann von Helmholtz. Zur Erholung von den ‚hirnzersprengenden‘ mathematischen Forschungen widmete er sich auch der entstehenden sprachvergleichenden Wissenschaft. Er trug in Folge wesentliche Erkenntnisse zur germanischen Lautverschiebung bei.

Mit dem Tod seines Vaters im Jahr 1852 übernahm Hermann Grassmann dessen Stelle am Stettiner Gymnasium als auch den Vorsitz im physikalischen Verein. Nebenbei leitete er noch einen Chor und eine Missionsgesellschaft für die Missionierung Chinas. 1853 begann er erneut einen Briefwechsel mit Möbius und bereitete eine Neuauflage der Ausdehnungslehre vor, diesmal jedoch rein mathematisch orientiert ohne irgendeinen philosophischen Anhauch. Im selben Jahr entdeckte auch William Rowan Hamilton in England die Ausdehnungslehre und war, bei aller Ironie für die ausschweifende Sprache, begeistert. Er hielt Grassmann für einen „great and most German genius“. Mit seinem Bruder Robert konzipierte Hermann Grassmann ein „Lehrbuch der Arithmetik für die höheren Lehranstalten“, welches 1861 unter seinem Namen publiziert wurde. Im Jahr 1862 gelang ihm auch eine zweite Fassung der Ausdehnungslehre, diesmal, so der Untertitel, in ‚Vollständig und in strenger Form‘. Zwar konnten ihm, wie Petsche in seiner Biographie schreibt, die Mathematiker diesmal nicht mehr die philosophische Darstellung zum Vorwurf machen; dafür aber wurde ihnen zugemutet, einen völlig fremdartigen mathematischen Stoff in der am schwersten zugänglichen Darstellungsweise jener Zeit angeboten zu bekommen, ohne auch nur eine Vorstellung vom Nutzen dieser mathematischen Entwicklung zu haben. Ein Echo auf das Erscheinen seines Werkes blieb daher vollständig aus. Das Buch wurde totgeschwiegen, und die Wirkung auf die mathematische Fachwelt war noch geringer als im Jahr 1844. Doch überzeugt von seiner Leistung bemühte er sich erneut um einen Lehrstuhl für Mathematik, was wiederum abschlägig beschieden wurde. Erst daraufhin wandte er sich von seinen mathematischen Studien ab und widmete seine ganze Kraft der Indologie und hier der Rig-Veda. Nach zehnjähriger intensiver Arbeit erschien von 1873 bis 1875 sein ‚Wörterbuch zur Rig-Veda‘ in sechs Lieferungen bei Brockhaus in Leipzig. Damit hatte er nun vollen Erfolg. Er wurde Mitglied der American Oriental Society und erhielt von der Universität Tübingen einen Dr. h.c. Trotz Nachbesserungen gilt dieses Werk auch heute noch in sechster Nachauflage von 1996 als wegweisend.

Während der Zeit an der er am Wörterbuch zur Rig-Veda arbeitete erhielt er erste positive Zustimmungen zu seinem mathematischen Werk. Der Mathematiker Hermann Hankel, ein Schüler Riemanns, würdigte 1866 seine Arbeit, besonders im Hinblick auf die extensiven Größen, die er als komplexe und hyperkomplexe Zahlen deutete. Auch wurde die Nähe zu den Quaternionen Hamiltons auffällig. Wie sehr Grassmann trotz aller Fehlschläge doch noch an der Mathematik hing kann man daran ersehen, dass er sich 1869 erneut für eine Professur an der Universität Greifswald bemühte, was aber wiederum abschlägig beschieden wurde.

Dennoch bedeutete dieses Jahr eine Zäsur in der Anerkennung von Grassmanns Arbeiten. Zum einen schrieb ein Kollege ein Buch zur Raumlehre nach den Prinzipien der Grassmannschen Ausdehnungslehre, und just in diesem Jahr begann sein ältester Sohn in Göttingen Mathematik zu studieren. Der Sohn überbrachte im Auftrag des Vaters je ein Exemplar des Buches von 1862 an die Mathematiker Felix Klein und an Alfred Clebsch. Felix Klein, der damals am ‚Erlanger Programm' arbeitete, erkannte, dass Grassmann mathematische Fragestellungen untersucht hatte, die für die moderne Mathematik richtungsweisend waren. Auch Clebsch begeisterte sich für die Arbeiten Grassmanns. Er veranlasste, dass Grassmann im Dezember 1871 zum korrespondierenden Mitglied der Göttinger Gessellschaft der Wissenschaften wurde. Sophius Lie, der Erfinder der kontinuierlichen Gruppen und der Lie-Algebra, ein enger Freund von Felix Klein, besuchte Grassmann sogar in Stettin, um sich von ihm persönlich dessen Ausdehnungslehre erläutern zu lassen.

Als Grassmann am 26. September 1877 starb, war er in den Sprachwissenschaften gefeiert, in der Physik geachtet und konnte noch die ersten Wirkungen seiner Ideen in der Mathematik erleben. 1877 erfolgte die zweite Auflage seines Erstlingswerks von 1844, wobei er aber während der Drucklegung verstarb.

Wie schon erwähnt veranlasste Felix Klein die Herausgabe der gesamten Werke von Herrmann Grassmann. Das war zur damaligen Zeit eine außergewöhnliche Auszeichnung für einen Schulprofessor, der nie Mathematik studiert oder einen Lehrstuhl innehatte. Der Mathematiker Friedrich Engel übernahm die Herausgabe. Von 1894 bis 1911 erschienen die Gesammelten Werke Hermann Grassmanns in vier Bänden.

Es bildete sich daraufhin in Deutschland eine lose Gruppe von Anhängern, die Felix Klein abschätzig als die „Grassmanier' bezeichnete. Sie waren wohl ähnlich sektiererisch tätig wie die Gruppe der Hamiltonianer, die monomanisch die Quaternionentheorie vertraten. Die mainstream Entwicklung verlief dagegen in eine andere Richtung, und zwar siegte die koordinatenbasierte Vektor-, Tensor- und Matrizenalgebra, wie sie von Josiah Willard Gibbs, Oliver Heaviside und James Joseph Sylvester konzipiert wurde. Es ist jedoch von Interesse, dass Gibbs die Ausdehnungslehre von Hermann Grassmann lobte. Außerdem hat der Mathematiker William Kingdon Clifford Grasmanns Ausdehnungslehre ausdrücklich gelobt und in Kombination mit Hamiltons Quaternionenansatz daraus das geometrische Produkt konzipiert. Ich komme darauf zurück. 1888 hat Giuseppe Peano, Schöpfer der Peano Axiome, die Ausdehnungslehre Grassmanns in seinem Buch „*Calcolo Geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Torino erstmals ein Axiomensystem für den Vektorraum konzipiert. Erstaunlicherweise hatte auch Alfred North Whitehead, mit Bertrand Russel der Mitverfasser der berühmten *Principa Mathematica*, im Jahr 1898 Grassmans Ausdehnungslehre als Bestandteil einer universellen Algebra in dem Buch: *A Treatise on Universal Algebra with Applications*,Cambridge, vorgestellt. Die verschlungenen Wege der Grassmann Rezeption im frühen und späten 20. Jhdt. werden von Arno Zaddach in seinem Buch „*Grassmanns Algebra in der Geometrie mit Seitenblick auf verwandte Strukturen*" Mannheim 1994 detailliert dargelegt. Dieses Buch steht in Deutschland etwas erratisch im Raum und ist mittlerweile völlig vergriffen, will sagen, wohl unbekannt. Im Vorspann zu diesem Buch schreibt er: *Meinem verehrten Lehrer Herrn Professor emeritus Dr. Günter Pickert, der mich in die kühnen Konstruktionen Hermann Grassmanns in ihrer heutigen Form eingeführt hat*. Es sollte auch erwähnt werden, dass seit 1939 der fiktive französische Universalmathematiker Nicolas Bourbaki in seinem monumentalen Werk *Élements de Mathématique* im Band *Algèbre Multilinéaire* Grassmanns äußere Algebra in einer zeitgemäßen Sprache dargestellt hat. Also blieb Grassmann auch im 20. Jhdt. präsent, jedoch ohne allgemeine Relevanz.

Eine ganz andere Entwicklungsschiene scheint in Amerika vorgelegen zu haben. Der amerikanische Physiker und Mathematiker David Hestenes publizierte 1966 *Space-Time Algebra* und im Jahr 1984 *Clifford Algebra to Geometric Calculus*, womit ihm eine moderne Darstellung der geometrischen Algebra gelungen ist. Mir ist noch nicht bekannt, wie Hestenes auf Grassmann aufmerksam wurde, ich vermutet über Clifford, doch es scheint auch bei ihm eine traurige Parallelität hinsichtlich der Rezeption der modernen Geometrischen Algebra vorzuliegen. Wie Hestenes in einigen seiner Publikationen schreibt, interessierte sich über fast drei Jahrzehnte hin auch kaum jemand für seine Ausarbeitungen. Mir schrieb er jüngst in einer Email, dass sich zumindest in Amerika wohl auch niemand für die philosophischen Aspekte der geometrischen Algebra interessieren würde, die jedoch ihn und mich wiederum interessieren. In Deutschland wird die geometrische Algebra hauptsächlich von Informatikern vertreten, speziell an der Universität Kiel und durch Dr. Dietmar Hildenbrand hier an der TU in Darmstadt. In der Physik kenne ich nur noch den Kollegen Dr. Martin Erik Horn aus Berlin, der sie in der Didaktik der Physik vertritt, sowie Florian Jung aus Mainz, der 2006 eine Diplomarbeit über *Geometrische Algebra in der Physik* geschrieben hat. In England wird sie durch die Physiker Chris Doran and Anthony Lasenby im astronomischen Institut in Cambridge vertreten, die 2003 ein umfassendes Werk *Geometric Algebra for Physicists* vorgestellt haben. An der Universität Amsterdam wird sie ebenfalls vom Informatiker Leo Dorst verstreten.[2]

**Die Ausdehnungslehre von Hermann Grassmann**

Es ist in diesem Vortrag nicht möglich ausführlich die Ausdehnungslehre Hermann Grassmanns vorzustellen, die er selbst als ‚lineale‘ und noch nicht wie heute als ‚lineare‘ Ausdehnungslehre bezeichnete.[3] Im ersten Buch von 1844 werden von einem sehr allgemeinen Gesichtspunkt Kompositionen als Produkte vorgestellt. Er war wohl der erste, der nicht-kommutative Produkte einführte. Sein Ausgangspunkt war nicht, wie bei Descartes, dem Erfinder der Analytischen Geometrie, Koordinaten als Zahlentupel darzustellen , um damit Geometrie zu betreiben, sondern geometrische Größen oder Objekte wie Punkte, Linien, Flächen algebraisch zu behandeln. Revolutionär war seine Einführung des n-dimensionalen Vektorraums mit Einheitsvektoren sowie die Erfindung einer multilinearen Algebra als Produkt von Vektoren oder ‚Multivektoren‘.

Vektoren werden von ihm als extensive Größen eingeführt, die er sehr abstrakt und unabhängig oder allgemeiner als die Euklidische Geometrie verstand. Die elementarste Größe, der Vektor, entsteht aus einem Punkt der zu einer Linie ausdehnt wird. Dem entspricht ein ‚Gebiet 1-ter Stufe‘. Die Ausdehnung einer Linie wiederum ergibt eine Fläche als Gebiet 2-ter Stufe. In kühner Überwindung des damals vorherrschen Limits eines 3-dimensionalen Raumes ergibt die Ausdehnung eines n-Linien-/Vektorgebildes ein ‚Gebiet n-ter Stufe‘. Kurz formuliert, Grassmann konzipierte und formalisierte eine n-Dimensionsordung; ich komme im Zusammenhang mit der Philosophiegeschichte der Ausdehnungslehre wieder darauf zurück.

---

[2] Mit Daniel Fontijne und Stephen Mann hat er 2007 (Elsevier. Amsterdam) das wohl umfassendste mathematische Buch zu ‚Geometric Algebra for Computer Science‘ publiziert.

[3] Es ist allerdings anzunehmen dass er dies nicht nur in Bezug auf ein Lineal sondern auch im Unterschied zu ‚zirkular‘, d.h. in Bezug auf Drehungen und Winkelrotationen verstand.

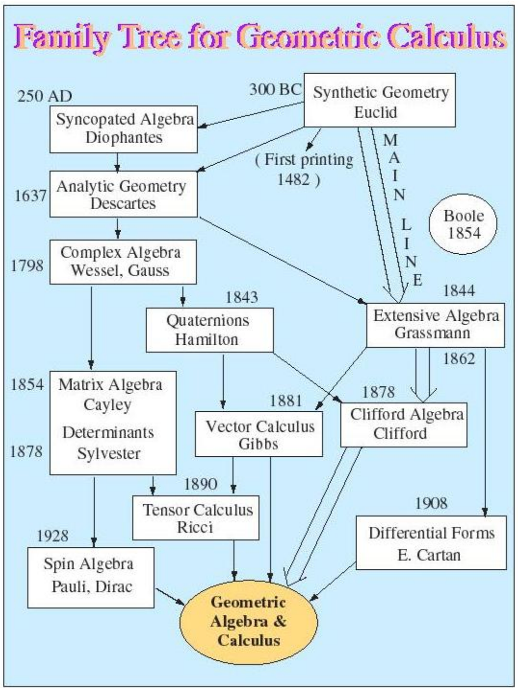
Berühmt wurde er mit seinem *äußeren Produkt*, oder dem *Bivektor* $a \wedge b$ beliebiger Vektoren *a* und *b*. Er generalisierte dieses Produkt auf Multivektoren n-ter Stufe $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n$ - oder vom Rang *n* - und führte das Konzept der *linear abhängigen* und *linear unabhängigen* Vektoren ein. Er entdeckte dass das äußere Produkt einen Vektorraum der Dimension $2^n$ erzeugt. Das äußere Produkt oder die $\wedge$-Komposition bezeichnete er als ‚*progressives Produkt*', d.h. es erzeugt immer eine höhere Dimension als die der eingebundenen Vektoren. Grassmann führte ebenso ein ‚*einwendiges Produkt*' ein, heute besser bekannt als *inneres Produkt* $a \cdot b$. Es reduziert die Dimensionszahl der involvierten Vektoren. Das innere Produkt zweier Basiselemente ist 1, das Produkt zweier Vektoren desselben Gebiets ist dagegen 0. Dies erlaubte Grassmann eine Theorie des orthogonalen Raumes zu entwickeln und das Theorem zu postulieren, dass jeder reelle Vektorraum eine orthonormale Basis hat. Was Grassmann noch nicht gelang war die Zusammenfassung des inneren und äußeren Produkts zum geometrischen Produkt, obwohl ihm die Komposition beider Produkte bekannt war.[4]

Wie angedeutet war das alles zur damaligen Zeit noch jenseits der Vorstellungskraft der Mathematiker und Philosophen. Man sollte bedenken, dass der berühmte Philosoph Immanuel Kant sich noch bemüßigt fühlte, acht Jahrzehnte zuvor eine Schrift über Sinn und Zweck des Negativen in der Mathematik zu publizieren.[5] Im Vorwort der ersten Auflage der Ausdehnungslehre von 1844 präsentiert Grassmann demgegenüber recht ungezwungen nicht nur die Plus-Minus-Regeln der Arithmetik für seine Vektoren, sondern ebenso wie man sie multiplizieren und dividieren kann, aber auch, wie man sie über die Euler-Funktion drehen kann. Hierbei hatte er keine Hemmungen, auf die Relevanz der imaginären Einheit *i* als $\sqrt{-1}$ oder genauer als $\sqrt{-}$ aufmerksam zu machen und die bekannte Eulerformel $e^{i\alpha} = cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha$ lobend zu erwähnen. Wie erwähnt sollte er zu seinen Lebzeiten keinen Erfolg damit haben.

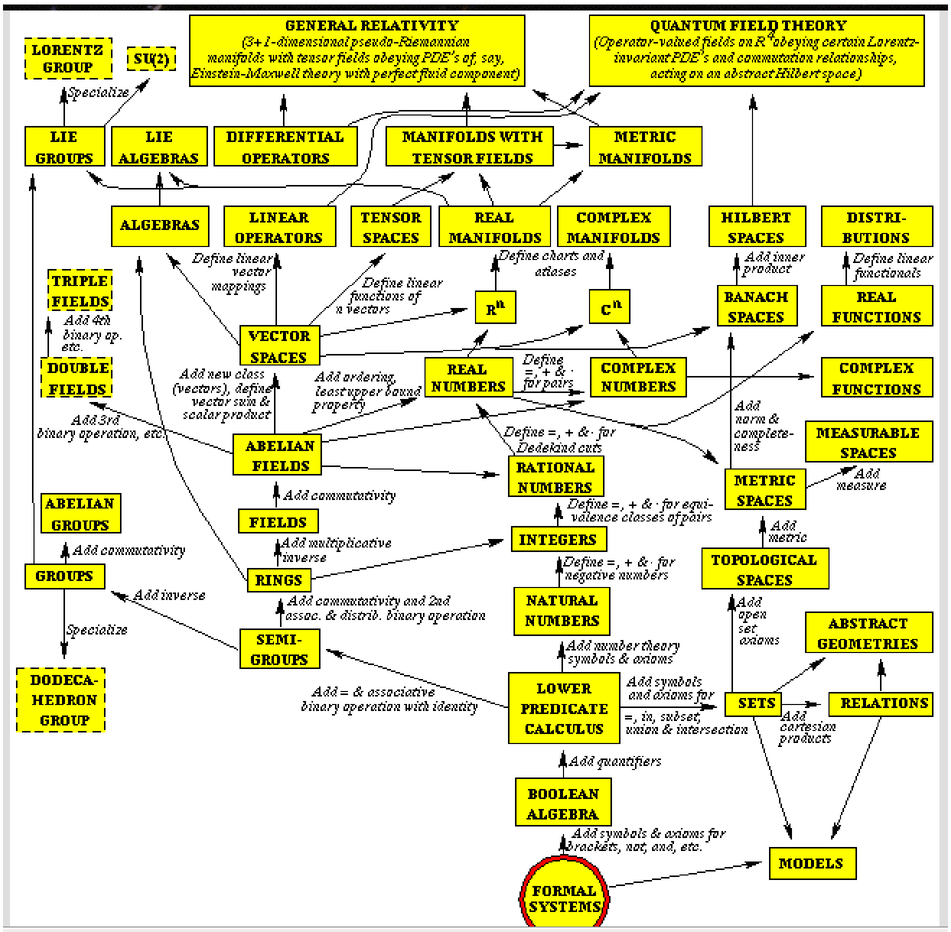
**Von der Ausdehnungslehre Grassmanns zur heutigen Geometrischen Algebra**

Im Nachhinein lässt sich feststellen, dass Grassmann seiner Zeit weit voraus war. Sie scheint erst mehr als hundert Jahre später mit der Publikation *Space-Time Algebra* 1966 und *Clifford Algebra to Geometric Calculus* von David Hestenes und Garret Sobczyk im Jahr 1984 gekommen zu sein. Worum es dem Autor geht steht im Untertitel dieses Buches: *A Unified Language for Mathematics and Physics*. Dieser Anspruch ist beeindruckend, erläutert wird er folgendermaßen: ***Geometric Calculus*** *is a language for expressing and analyzing the full range of geometric concepts in mathematics. Clifford algebra provides the grammar. Complex numbers, quaternions, matrix algebra, vector, tensor and spinor calculus and differential forms are integrated into a single comprehensive system*.
Das also soll Herrmann Grassmann schon vor mehr als einem Jahrhundert mit seiner Ausdehnungslehre initiiert haben. Um die historische Verwurzelung und umfängliche Bedeutung dieser geometrischen Algebra zu verdeutlichen hat David Hestenes folgenden phylogenetischen Stammbaum vorgestellt:

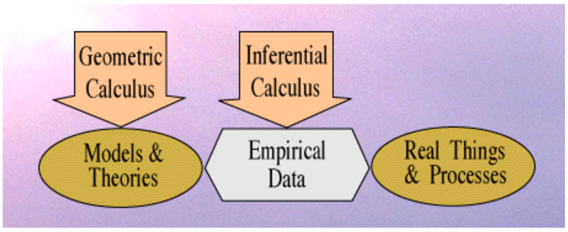
[4] Siehe David Hestenes: Grassmann's Vision. In: Hermann Günther Graßmann (1809-1877): Vionary Mathematician, Scientist and neohumanist Scholar. Papers from a Sesquicentennial Conference. Ed. by Gert Schubring. Dordrecht. 1996, S.243-254.
[5] 1763: Versuch, den Begriff der negativen Größen in der Weltweisheit einzuführen.




Zum Vergleich hierzu möchte ich einen ontogenetischen Stammbaum des (Astro)Physikers Max Tegmark zum gegenwärtigen Wildwuchs der mathematischen Kalküle in der Physik vorstellen:




Die geometrische Algebra bietet eine Synopse aus Geometrie und Algebra, die laut Hestenes sowohl für die Mathematik als auch für die Physik Grundlage und Voraussetzung sein soll. Dieser Anspruch bezieht sich darüber hinaus auf das Verhältnis von abstrakter mathematischer Theorie und konkreter Empirie, mit der geometrischen Algebra als quasi apriorischem Leitmodell. Hestenes biete hierfür folgende Abbildung an:




Mit der geometrischen Algebra im Verständnis von David Hestenes ist demnach auch eine Philosophie verbunden, die sowohl ein Vernunftmodell, ein Erkenntnismodell als auch eine pragmatische Gestaltungsabsicht beinhaltet. Es stellt sich die Frage: Gibt es dann auch eine derartige geometrische Vernunft, Erkenntnis und Gestaltung? Das mag sich sonderbar anhören, doch ich möchte auf zwei Bücher verweisen. Der Kognitionspsychologe Hans Aebli nannte sein Hauptwert von 1968: *Denken: Das Ordnen des Tuns*. Einige Jahrhunderte zuvor im Jahr 1687 schrieb Isaac Newton in seinem Werk *Principa* über die Relevanz der Geometrie: *Therefore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but that part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring*…Was spricht dagegen dies umzuformulieren in: *Geometrisches Denken: Das geometrische Ordnen des Tuns*? Uns mag eine derartige Philosophie auch gegenwärtig immer noch verwundern, doch genau das war einmal der Anspruch der Philosophie der Neuzeit, begonnen mit Nikolaus von Kusa am Beginn  der Renaissance mit der Postulierung einer *Mathesis universalis*. Diese Philosophie der aufscheinenden Moderne war von Anbeginn geometrisch orientiert, und zwar hinsichtlich der Astronomie und Physik, erwähnt sei Johannes Kepler und Galilei Galileo, ebenso die Architektur und die perspektivische Malerei. *More geometrico*, auf die Art der Geometrie, war das vorherrschende Prinzip; gemeint war damals jedoch noch die 3-dimensionale Euklidische Geometrie.

Ich möchte es mit diesen Hinweise vorerst bewenden lassen und mich als nächstes dem Kern der Ausdehnungslehre oder der geometrischen Algebra, dem *geometrischen Produkt*, zuwenden, bevor ich wieder auf der Philosophie und nachfolgend die Logik zurückkomme.

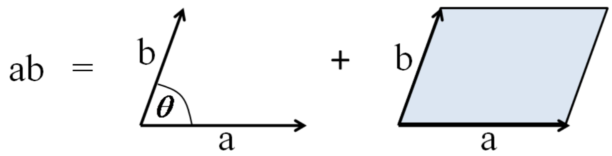
**Das Geometrisches Produkt**

Herrmann  Grassmann hat viele mathematische Produkte erfunden, doch das geometrische Produkt, womit er heute in Verbindung gebracht wird, hat wie schon erwähnt erst der englische Mathematiker William Kingdon Clifford unter Bezugnahme auf die *Quaternionentheorie* von Hamilton und die *Ausdehnungslehre* von Herrmann Grassmann eingeführt. Der einschlägige Artikel lautet: *Application of Grassmann's Extensive Algebra* und wurde im ersten Band des *American Journal of Mathematics* 1878, S.350-358, publiziert. Worum handelt es sich beim geometrischen Produkt? Um folgendes:

1) $$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

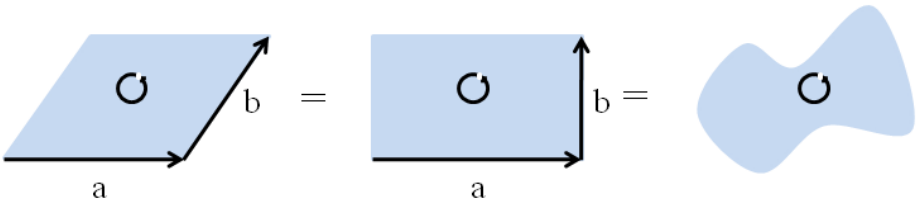
Das geometrische Produkt *ab* ist die Summe des *inneren Produkts* $a \cdot b$ und des *äußeren Produkts* $a \wedge b$. Es ist als *Bivektor* etwas Eignes und Neues und bildet, metaphorisch gesprochen, ein Produkt von Äpfeln mit Birnen, also eigentlich von etwas, was nicht so ohne weiteres zusammen zu gehören scheint. Es handelt sich jedoch um die Komposition geometrischer Verhältnisse. Diese Geometrie erscheint in folgenden Darstellungsformen dieser unterschiedlichen Produkte:

2)



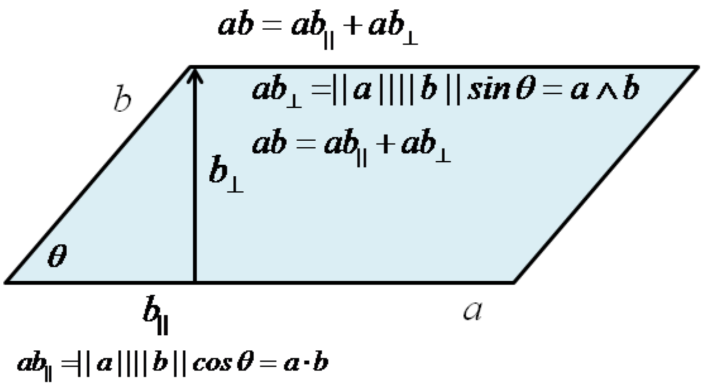

Schauen wir uns die rechte Seite dieser Summe etwas genauer an.

3)




Es besagt, dass das äußere Produkt unabhängig von der geometrischen Erscheinungsform ist; ja mehr noch, es ist mehr oder weniger unabhängig von den sie es konstituierenden Vektoren *a* und *b*. Als geometrisches Produkt *ab* zusammengefasst offenbart sich jedoch eine beeindruckende geometrische und arithmetische Logik, die man folgender Abbildung entnehmen kann:

4)




Normiert ergibt dies

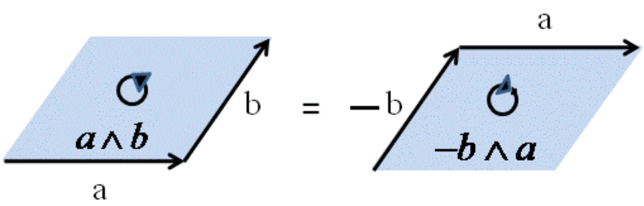
5) $$ab = a \cdot b + a \wedge b = ab_{||} + ab_{\perp} = \cos\theta + \sin\theta$$

Damit sind wir nahe daran, geometrisch ein philosophisches Geheimnis zu lüften. Um dies zu verstehen muss man folgende Anti-Kommutativität verstehen lernen:

6) $$a \wedge b = -b \wedge a$$

In dieser Anti-Kommutativität des äußeren Produkts bestand eine der großen Entdeckungen Grassmanns in seiner Ausdehnungslehre. Es kommt darauf an, ob man die Fläche orientiert gegen oder im Uhrzeigersinn versteht. D.h. in der geometrischen Algebra haben Flächen eine Orientierung. Hierzu folgende Abbildung:

7)



Handelt es sich nun um normierte orthogonale Vektoren *a* und *b* entfällt im geometrischen Produkt *ab* das innere Produkt wegen $a \cdot b = 0$ und es ergibt sich die scheinbar widersinnige Anti-Symmetrie oder Anti-Kommutativität

8) $$ab = -ba$$

In direkter Übersetzung ergäbe dies z.B. $+2 \times 4 = -4 \times 2$, also 8 = −8; absurd, doch philosophisch anregend! Denn quadriert ergibt dies für das geometrische Produkt *ab* unter der Voraussetzung, dass das geometrische Produkt von *a* oder *b* mit sich selbst 1 ergibt

9) $$(ab)^2 = abab = -aabb = -1$$

Nun ein kleines mathematisches Wunder: Die Wurzel aus diesem Quadrat des geometrischen Produkts *ab* resultiert in

10) $$ab = \sqrt{-1} = i$$

also in der bekannten imaginären Einheit *i*. D.h., mit dieser Imaginarität erscheint das geometrische Produkt *ab* dann auch in der Form der bekannten Eulerformel

11) $$cos\,\theta + i\,sin\,\theta = e^{i\theta}$$

die der Physiker und Nobelpreisträger Richard Feynman einmal als das ‚Juwel der Physik' bezeichnet hat. Dieses ‚Juwel' sollte natürlich auch für die Mathematik gelten, und es war schon Hermann Grassmann 1844 bekannt![6] Was beinhaltet es im Kontext der geometrischen Algebra? Es besagt, dass auch der Winkel $\theta$ von *a* nach *b* entsprechend dem Exponenten der e-Funktion ebenfalls als Bivektor

12) $$\theta = \boldsymbol{i}\theta$$

erscheint. Die Imaginarität $\boldsymbol{i}$ artikuliert hierbei die Einheitsfläche der $a \wedge b$-Fläche des äußeren Produkts.

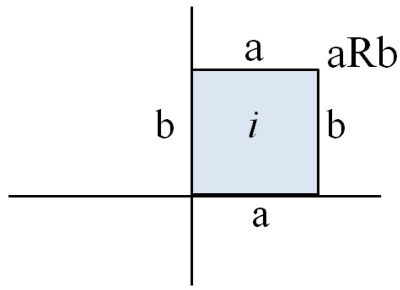
Mathematiker oder Physiker werden sich angesichts dieser Imaginarität wohl nichts denken wollen, für einen Philosophen jedoch, der die Welt, in der wir auch mit der geometrischen Algebra leben, sinnhaft deuten möchte, ist dies dagegen schon mehr als aufregend. Weshalb? Weil diese Imaginarität *i* formal mathematisch dieses geometrische Produkt von - metaphorisch verstanden - Äpfeln mit Birnen artikuliert. Genau genommen artikuliert es etwas Konträres, nämlich ein Produkt von n- mit n+1-Dimensionalitäten. Ich sollte erwähnen, dass die heutigen Vertreter der Geometrischen Algebra auch wenig von dieser Imaginarität halten, soweit sie sich auf die bekannten komplexen Zahlen bezieht. Man spricht stattdessen von *Pseudoskalaren*. Dem stimme ich zu, denn die Imaginarität der komplexen Zahlen ist restriktiv und ebenso kommutativ. Dennoch sollte man das Kind dabei nicht mit dem Bade ausschütten. Weshalb, wird sich hoffentlich aus meinen folgenden Überlegungen ergeben.

[6] Siehe Vorwort zur Ausdehnungslehre von 1844.

**Geometrisches Produkt versus Relation als Synopse von Innen und Außen**

Für die folgenden Überlegungen zur Ausdehnungslehre Grassmanns benötige ich den Zusammenhang des geometrischen Produkts mit dem Relationskonzept *aRb*. Dieser Zusammenhang ist evident, wird in der Literatur aus mir unbekannten Gründen jedoch kaum thematisiert. Eine Relation *aRb* wird gewöhnlich mengentheoretisch und geometrisch entsprechend der folgenden Abbildung als kartesisches Produkt $X_1 \times X_2$ mit $a \in X_1$ und $b \in X_2$ eingeführt:

13)




Denkt man sich die orthogonalen Koordinaten *a* und *b* als inneres Produkt $a \cdot b$ und das mit den Seiten *a* und *b* aufgespannte Quadrat als äußeres Produkt $a \wedge b$, so erfüllt die gewöhnliche Definition der Relation *aRb* implizit die Voraussetzungen des geometrischen Produkts *ab*. Die Relation *aRb* kann darüber hinaus sowohl das geometrische Produkt *ab* als auch eine Funktion *b = R(a)* darstellen.

14) $aRb \rightarrow ab$ und $b = R(a)$, oder bekannter $y = f(x)$

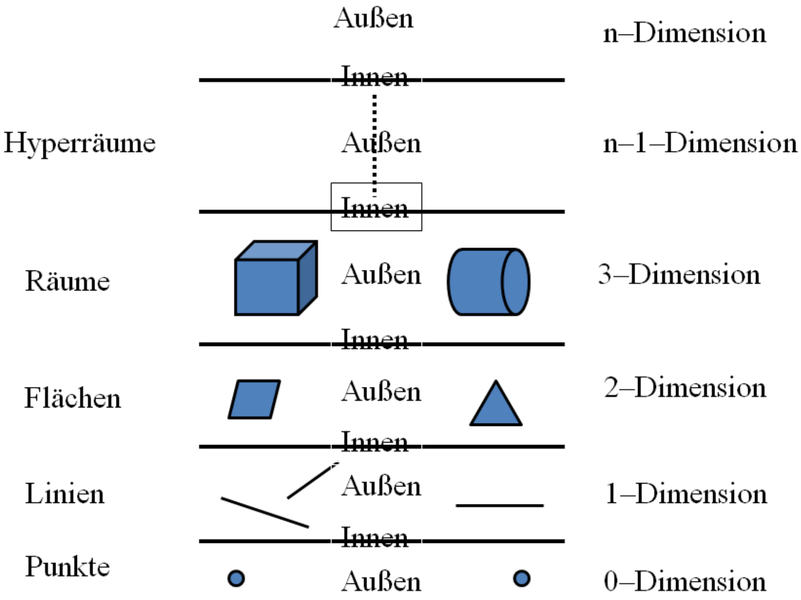
Weitaus interessanter für die philosophische Analyse ist jedoch der Tatbestand des Zusammenspiels von innerem und äußerem Produkt **ALS** Relation *aRb*. Die Relation *R*, so lässt sich feststellen, *bezieht* oder ***verbindet*** die Relata *a* und *b*, indem sie sie zugleich ***trennt***. Oder es liegt eine gleichzeitige ***Verbindung und Trennung*** vor. Oder es besteht über *R* ein ***Innenbezug bei gleichzeitigem Außenbezug***. Und hierbei erscheinen das innere und das äußere Produkt, von dem ich bisher gesprochen habe.

Das innere Produkt $a \cdot b$ der Relata *a* und *b* artikuliert oder misst das Verbindungs- oder Konnexionsverhältnis der beiden Vektoren/Größen *a* und *b*. Gewöhnlich wird es als ***Korrelation*** zwischen *a* und *b* oder als ***Projektion*** von *a* auf *b* oder umgekehrt verstanden. Hierbei erscheint ein sonderbares Missverständnis hinsichtlich der Terminologie. Was als ‚inneres' Produkt ausgegeben wird bezieht sich genau genommen auf ein ‚Außen'-Verhältnis zweier Vektoren *a* und *b*, welches durch den Winkel zwischen *a* und *b* gemessen werden kann. Das äußere Produkt $a \wedge b$ der Relata *a* und *b* artikuliert dagegen als Fläche ein ‚Innen'-Verhältnis zweier Vektoren *a* und *b*. Die vorherrschende Terminologie hat sich jedoch mit genau umgekehrten Bedeutungen etabliert. Relevant ist jedoch, dass das geometrische Produkt abstrakt in Form der Relation *aRb* als eine ***Synopse von Innen- und Außen-Bezug*** zweier Vektoren/Größen *a* und *b* besteht.

15) *aRb* = *ab* = *a*__Innen__*b* + *a*__Außen__*b*

Diese Synopse geometrisch interpretiert:
Das ***Außen*** zweier Punkte *a* und *b* ist deren ***Innen*** als die Linie *ab*. Oder das ***Außen*** zweier 0-Dimensionalitäten ist deren ***Innen*** als 1-Dimensionalität. Diesen Generierungsmechanismus vorausgesetzt lässt sich ohne weiteres auf n Dimensionen verallgemeinern: Das Außen zweier

n-Dimensionalitäten ist die n+1-Dimension als deren Innen. Das hatte schon Hermann Grassmann formuliert aber statt von Dimensionen von Gebieten gesprochen. Es waltet in dieser Dimensionsordnung auch eine Dualität, wie sie aus der projektiven Geometrie bekannt ist: Linien entsprechen Punkte und Punkte entsprechen Linien. Hierzu folgende Abbildung:
16)




Philosophisch relevant ist jedoch der Sachverhalt, dass die Relation *aRb* für sich genommen die konträre Synopse von Innen und Außen beinhaltet. Genaugenommen liegt eine Antinomie von Innen und Außen vor! Allerdings nur, wenn man es zusammen denkt. Separiert man das Produkt jedoch als die Summe von innerem und äußerem Produkt erscheint schönste Harmonie und weitaus relevanter, widerspruchsfreie Mathematik – und evtl. Logik! Genau dies liegt ja mit dem geometrischen Produkt vor! In diesem Zusammenhang sei auf eine frühere Publikation der Philosophin Petra Gehring von der hiesigen TU Darmstadt mit folgendem wunderschönen Titel aufmerksam gemacht. *Innen des Außen – Außen des Innen. Foucault, Derrida, Lyotard*. München (Wilhelm Fink) 1994. Die französischen Philosophen Foucault, Derrida und Lyotard in den hier angesprochenen Kontext zu stellen könnte als gewagt erscheinen, ist es aber nicht; sie sind ebenfalls Vertreter einer Idee die schon die Renaissance bestimmte.

17) $$ab = \textit{Innen des Außen} + \textit{Außen des Innen}$$

Ist das geometrische Produkt *ab* die Einheit des dichotomen Innen und Außen, so sollte das Innen als Innen des Außen und das Außen als Außen dieses Innen erscheinen; so etwas wie der Januskopf. Hierzu eine Skulptur des englischen Künstlers Kenneth Burke

Links sind die Flächen, rechts der Raum zu erkennen. Es erhebt sich nun die Frage, auf welche Weise Hermann Grassmann auf diese Relationsphilosophie aufmerksam wurde, die er in meinen Augen als erster fast schon vollendet mathematisch und logisch auf den Begriff gebracht hat. Meiner Meinung nach steht er voll in der Tradition des Relationskonzepts, was sich belegen lässt, denn er hat Leibniz, der voll in der Tradition der Relationsphilosophie stand, hinsichtlich der Kombinationslehre in seiner Preisschrift vollendet.

**Geschichte des Relationskonzepts – Mathesis universalis**

Es lässt sich nachweisen, dass in der neueren Geschichte der Philosophie genau dieser angesprochene relationale Sachverhalt ab der Renaissance mit der Ablösung der Substanzenontologie durch die Relationenontologie bewusst wurde, was zugleich zur wissenschaftlichen Mathematisierung der Welt beitrug und als das Programm der ***Mathesis universalis*** artikuliert wurde. Seit ihrem Beginn mit Nikolaus von Kusa ab dem 15. Jhdt. dauerte es vier Jahrhunderte, bis diese Relationenontologie in der Ausdehnungslehre von Herrmann Grassmann im 19. Jhdt. ihren ersten konsistenten mathematischen Ausdruck fand. Von Anbeginn wurde diese Relationenontologie geometrisch über Raumverhältnisse und als Dimensionsordnung im Raum gedacht. Man sollte sich nur einmal fragen, weshalb Grassmann sein Werk ‚Ausdehnungslehre' nannte? Was ist da ‚ausgedehnt', was im geometrischen Produkt als Synopse von innerem und äußerem Produkt erscheint? Es kann nur das Außen-Moment der Relation *aRb* gemeint sein, die den Innen-Bezug fortwährend aufbricht. Darauf baute nämlich die vorgängige Substanzenontologie. Für diese gab es keine relevanten ‚Außen'-Bezüge von irgendetwas, denn es galt alles als vorgeordnete Binnenordnung, als hierarchische Ordnung von Gott-König-Adel+Kirche – Leibeigene. Man sollte das ernst nehmen. Noch in den fünfziger Jahren des letzten Jahrhunderts wurde eine theologische Dissertation mit dem Titel: *Die Seinsentfremdung der Relation nach Thomas von Aquin* mit hohem Lob von einer theologischen Fakultät in Deutschland ausgezeichnet! Man würde sich wohl nichts dabei denken wollen, würde man die Geschichte des Relationskonzepts nicht kennen. Deshalb, und um die Tat von Herrmann Grassmann auch philosophisch besser würdigen zu können, ein kurzer Umweg in diese Philosophiegeschichte der Neuzeit.

## Von der Substanzenontologie zur Relationenontologie[7]

Die Substanzenontologie beruht, wie die Bezeichnung schon andeutet, auf einem substanziellen Sein. Jedes Sein A ist nur es selbst, also A = A. Mit dem Sein der Seienden B oder C etc. hat es nichts zu tun, außer dass es mit ihnen in einer prästabilisierten Ordnung steht. An dieser Prä-Ordnung war nicht zu rütteln. Deshalb bestand an einer Relevanz irgendwelcher ‚Außen'-Beziehungen ***zwischen*** den Substanzen A, B, C etc. kein Interesse, denn dies hätte ja die prästabilisierte Ordnung in Frage stellen können. Dieses ‚Außen' gab es deshalb seinsmäßig nicht. Raum als Außen war die Präordnung, und diese war als räumliche Leere gefüllt mir Gott. Diese substanzenontologische Welt wurde binnen- oder innen-logisch gedacht, eine wahre Identitätslogik. Erst Nikolaus von Kusa brach diese einseitige Ontologie wieder auf – denn sie bestand schon einmal im antiken Griechenland -, indem er auch den Außen-Bezug wieder in die Philosophie der Neuzeit einbrachte, der sogleich mit dem Innenbezug zu einer panrelationistischen Weltordnung führte, die diesmal aber auf der Widersprüchlichkeit des Relationskonzepts beruhte. Die *Coincidentia oppositorum* war ihr Ausdruck.

Formal betrachtet bestanden zuvor Substanzen als ***Sein in sich***

18) $$A = A;\ B = B,\ C = C \text{ etc.}$$

Diese wurden nun funktional als ***Sein im Anderen*** miteinander bezogen

19) $$B = R(A), \text{ oder } C = R(B) \text{ usw.}$$ [8]

Offensichtlich gibt es in diesen Relationsbezügen kein Ende und das Ganze wird in sich rekursiv, damit auch die es konstituierenden Momente Innen und Außen. Inhaltlich hat Nikolaus von Kusa dies folgendermaßen artikuliert: Die Sonne ist im Mond Mond und der Mond ist in der Sonne Sonne. Wo diese Relationslogik in der Mathematik hinführen kann sieht man an folgendem ‚teuflischen' Beispiel: Der Teufel ist in Gott Gott und Gott ist im Teufel Teufel. Noch schlimmer für die Mathematik: Das Element ist in der Menge Menge und die Menge ist im Element Element. D.h., diese panrelationistische Relationslogik kann nicht nur, sie führt zwangsläufig zur sog. Russell'schen Antinomie. Das war seit Nikolaus von Kusa mit seiner *coincidentia oppositorum* auch allen nachfolgenden ‚modernen' Philosophen bewusst, die dies wieder im alten Sinne als dialektische Philosophie verstanden; ich spreche von ‚modernen' Philosophen, denn es gab ja auch noch die vormodern scholastisch orientierten Theologen-Philosophen.[9] Die Philosophie der Moderne versuchte diesem Dilemma zu entkommen, ohne dabei jedoch die Relationslogik aufzugeben. Man wird es nicht glauben wollen, doch es gelang mathematisch, nämlich über die geometrische Dimensionsordnung. Schon Nikolaus von Kusa bemerkte, dass die Relationalität und Funktionalität eine geometrische Proportionalitätswissenschaft, eben eine mathematische Wissenschaft und Philosophie erforderte. Das ‚Sein im Anderen' konnte sich nur im Außenbezug artikulieren. Es galt deshalb, dies wiederum mit dem Innen-Bezug zu verknüpfen.

Im Unterschied zur Antike wurde in der Neuzeit die Lösung des antinomischen Relationsproblems erstaunlicherweise in einer unendlichen Dimensionsordnung gefunden.

---

[7] Ich beziehe mich hier auf das Werk des Philosophen Heinrich Rombach ‚Substanz, System, Struktur. I und II'. Freiburg. 1968. Ebenso auf das Werk von Dieter Leisegang: Die drei Potenzen der Relation. Frankfurt. 1968.

[8] Für die Relation *R* lässt sich natürlich das Funktionszeichen *f(x)* setzen.

[9] Man sollte auch nicht vergessen, dass gerade ab dieser Zeit der aufkommenden Moderne und der Ablösung der Substanzenontologie und prästabilisierten Weltordnung die Scheiterhaufen auch immer feuriger brannten.

Schon Nikolaus von Kusa entwickelte das Modell des Punktes, der auseinandergezogen eine Linie ergibt, die wiederum unendlich viele Punkte enthalten kann. Die Linie wiederum auseinandergezogen ergibt eine Fläche, die unendlich viele Linien enthalten kann. Die Fläche auseinandergezogen ergibt einen Raum, der wiederum unendlich viele Flächen enthalten kann. Nikolaus von Kusa extrapolierte n-dimensional weiter, beließ diese Dimensionsordnung aber im Geheimnis Gottes. Später erscheint sie als *Ordnung der Ordnungen*, u.a. bei Pascal.

**Leibniz und die *Geometrische Characteristik***

Dieses Modell und andere Aspekte der Relationsontologie wurden von Johannes Kepler und Galilei Galileo rezipiert, die beide das Universum und damit letztendlich Gott funktionalistisch orientiert geometrisierten. Nach Galileo hat Gott das Universum in der Sprache der Mathematik geschrieben. Relationsphilosophie und Naturwissenschaft fanden einen ersten formalen Ausdruck in der *Principia* von Isaac Newton, der *Kombinationslehre* von Leibniz und der *Dimensionstheorie* von Rene Descartes. Descartes ist besser bekannt als der Erfindung der analytische Geometrie und weniger für seine Dimensionstheorie. Analog zu Nikolaus von Kusa konzipierte er ebenfalls eine n-Dimensionsordnung, jedoch mit den alten scholastischen Konzepten der *res extensa* und der *res intensa* und deren Zusammenspiel. Offenkundig beziehen sich diese Terme auf unser Außen und Innen. Descartes war ein Systemdenker, Leibniz dagegen wollte mit seiner Monadologie darüber hinaus. Er gilt als einer der letzten Universalgelehrten. Er erfand bekanntlich mit Newton die Integral- und Differentialrechnung, er stieß aber noch tiefer in die mathematischen Grundlagen vor, indem er das Zusammenspiel der relationalen Momente Innen und Außen zu einer fundamentalen Kombinatorik erklärte. Die ganze Welt sollte wie im Baukasten aus Basiselementen kombinatorisch beschrieben, erklärt und gestaltet werden. Er war der erste Binärdenker. Ich kenne nur noch eine moderne Variante dieses Ansatzes, nämlich die *Alternative*- oder *Ure*-Theorie des Physikers Carl Friedrich von Weizsäcker. Die *Alternative* ist nichts anderes als ein Moment des Relationskonzepts *aRb*. Ihr Akzent liegt auf dem Außen von a oder b: $a \vee b$. Die *Konjunktion* beruht dagegen auf dem Innen von a und b: $a \wedge b$.

20) $$aRb = \textit{Synopse der Konjunktion } a \wedge b \textit{ und der Alternative } a \vee b$$

Vorsicht, das Dachzeichen ist jetzt logisch gemeint, nicht als Zeichen des äußeren Produkts. Doch an dieser Symbolik kann man schon einen intrinsischen Zusammenhang mit der Logik erkennen.

Leibniz konnte seine Kombinationslehre, die er mit *Ars combinatorica* oder *Characteristica universalis* bezeichnete, nicht vollenden. Doch im philosophisch-mathematischen Überlieferungsgewebe des Relationskonzepts, begonnen mit Nikolaus von Kusa, erscheint vier Jahrhunderte später Hermann Grassmann, fast zeitgleich mit der Publikation seiner Ausdehnungslehre, auch als triumphaler Vollender der Charakteristik Leibnizes. Ich hatte zu Beginn dieses Vortrags schon erwähnt, dass die Fürstliche Jablonowskische Gesellschaft 1844 eine Preisaufgabe zur bruchstückhaft hinterlassenen „geometrischen Charakteristik“ von Leibniz ausgeschrieben hatte. Leibniz wollte im Gegensatz zur analytischen Geometrie des Descartes eine spezifische geometrische Analysis im Sinne einer Charakteristik der Geometrie herausbilden. Der eigentümliche Sachverhalt der Geometrie bestand für ihn in der Konstruktionsnatur der geometrischen Figuren. Die wahren geometrischen Charaktere sollten einer konstruierenden Vernunft folgen, die diese Figuren erzeugt. Sie sind es deshalb, weil sie selbst wie die Figuren, deren Konstruktion sie darstellen sollen, räumlicher Natur sind. Hier erscheint also wieder die geometrische Vernunft, von der ich zu Anfang gesprochen habe.

Für Grassmann kam diese Preisaufgabe wie schon gesagt wie gerufen und er löste sie mit Bravour. Die Publikation erschien im Buchhandel unter dem Titel:

> *Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene Geometrische Charakteristik. Gekrönte Preisschrift von H. Grassmann. Mit einer erläuternden Abhandlung von A. F. Möbius. Leipzig. Weidmann'sche Buchhandlung. 1847*

Sie wurde allerdings von der Fachwelt auch wieder nur mit Einschränkungen anerkannt. Es ist nicht möglich auf dieses schöne Werk ausführlicher einzugehen, es sollte aber erwähnt werden, dass Hermann Grassmann darin die Ars Combinatorica **ALS** Ausdehnungslehre vollendete, was meines Erachtens bis heute kaum gewürdigt wurde.[10]

Es stellt sich die Frage, wenn diese Verwirklichungen der Relationsontologie in der Neuzeit in der Mathematik und Physik derart erfolgreich waren, ob sich dies nicht auch auf die Logik und Methodik des Denkens niederschlug, und ob Hermann Grassmann ebenfalls darin involviert war. Diese Frage lässt sich ebenfalls positiv beantworten.

**Die Ausdehnungslehre, Algebra der Logik und Logik der geometrischen Algebra**

Ich halte meinen Vortrag im Ernst Schröder Zentrum der TU Darmstadt. Ernst Schröder ist als Begründer der algebraischen Logik, oder als Vollender der Booleschen Algebra, in die Geschichte der Mathematik eingegangen. 1841 geboren war er ca. dreißig Jahre jünger als Hermann Grassmann, kannte aber dessen Schriften, speziell die des Bruders von Hermann, Robert Grassmann. Hierzu muss ich etwas nachtragen. Herrmann Grassmann und sein Bruder Robert arbeiteten zeitlebens intensiv zusammen und besprachen ihre jeweiligen Werke miteinander. Robert wollte als Universalgelehrter in die Geschichte eingehen, denn er beabsichtigte unter anderem die Publikation des gesamten Wissens seiner Zeit; was ihm verständlicherweise nicht gelang. Von 1855 bis 1856 arbeiteten Hermann und Robert Grassmann gemeinsam an einer Neubegründung der Zahlenlehre, der Ausdehnungslehre, der Logik und der Kombinationslehre. Im Unterschied zu Herrmann, der sich auf die Ausdehnungslehre kaprizierte, versuchte Robert eine formale Begründung der Mathematik, Arithmetik und Logik. Hierzu publizierte er 1872 ein Buch mit dem Titel: „*Die Formenlehre oder Mathematik*". Stettin. Dies fünf Jahre vor dem Tod seines Bruders Hermann, der in seiner Ausdehnungslehre von 1844 nach der Einleitung und vor dem Ersten Abschnitt auch schon eine „*Übersicht der allgemeinen Formenlehre*" vorstellte. Hierbei geht es schon in einem Vorgriff auf zukünftige Entwicklungen quasi um verbandstheoretische Operationen mit analogen Verknüpfungssymbolen sowie den arithmetischen oder algebraischen Regeln der Addition, Subtraktion, Division und Multiplikation. Ernst Schröder nahm in seiner Algebra der Logik Bezug sowohl auf Hermann Grassmanns Buch ‚*Lehrbuch der Arithmetik*' als auch auf die ‚*Formenlehre*' seines Bruders Robert. Wie Volker Peckhaus in seinem Buch „*Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft. Leibnitz und die Wiederentdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert*, Berlin 1997, darlegt, kann, ohne die Eigenleistung von Ernst Schröder einschränken zu wollen, konstatiert werden, dass er systematisch ausformulierte, was die beiden Grassmanns schon hinsichtlich einer Algebra der Logik vorformuliert hatten.

[10] Eine ausführliche Darlegung der Thematik kann in diesem Vortrag nicht geleistet werden, doch die Relationsontologie entwickelte sich neben der Mathesis universalis in der Philosophie ebenfalls weiter. Es sei als Beleg nochmals an das Buch der Philosophin Petra Gehring verwiesen: *Innen des Außen – Außen des Innen. Foucault, Derrida, Lyotard*. München (Wilhelm Fink) 1994.

An dieser Stelle sollte aber auch auf andere Quellen aufmerksam gemacht werden. Die Algebraisierung der Logik war möglich, weil auch schon Georg Boole 1854 seine ‚*Laws of Thought*' als Standardwerk der Booleschen Logik und Algebra und Charles Sanders Peirce seine algebraisierte pragmatische Logik entwickelt hatten. Von Interesse ist, dass Peirce 1878 in den Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Vol. 13, (S.115-116) eine *Note on Grassmann's Calculus of Extension* publiziert hat, in der er auf das innere und äußere geometrische Produkt eingeht und ebenso im 3-dimensionalen Fall 8 Vektoren herleitet, und zwar in der Notation seines Logikkalküls – was man analog zu den 8 Dimension der Multivektoren im 3d-Raum der geometrischen Algebra ansehen kann! Das erscheint mir hochinteressant zu sein, sollte sich doch hierüber eine Verwandtschaft von geometrischer Algebra und Peirceschen Logik andeuten. Von Interesse könnte ebenso ein Beitrag von G. J. Stokes über *Logical Theory of the Imaginary* in Mind, New Series, Vol. 9, No. 35, 1900, S. 349-355, sein, denn Stokes bezieht hierbei die Boolesche Algebra mit Grassmanns Ausdehnungslehre und ebenso der Algebra der Logik von Ernst Schröder. Ich kann das vorerst nur andeuten, diese Verbindungen sind auch für mich selbst noch zu neu.

Worauf ich jedoch hinaus möchte ist das Faktum, dass diese Algebraisierung der Logik more geometrico und arithmetico nur deshalb möglich war, weil sie zweiwertig Boolesch möglich war. D.h. sie war nichts anderes als eine neue algebraische Erscheinungsform der alten Begriffslogik des Aristoteles oder der späteren entwickelten Aussagenlogik. Für die gilt ein striktes ‚tertium non datur', außerdem ist sie kommutativ. Das gilt auch für die später entwickelten Booleschen Verbände als algebraische Strukturen der entsprechenden Logikkalküle. Und hierbei beginnen die Schwierigkeiten hinsichtlich einer Logik der geometrischen Algebra: Sie ist, wie wir schon gehört haben, generell nicht-kommutativ! Und wie steht es dabei mit einem ‚tertium datur'?

Aus Erfahrung geläutert möchte ich darauf hinweisen, dass in dieser Technischen Universität von dem Kollegen Rudolf Wille et al. aus der Mathematik eine ‚*kontextuelle Begriffslogik*' sowie die verbandstheoretischen Grundlagen für eine ‚*Formale Begriffsanalyse*' konzipiert wurden, die auch schon modular erscheint. Die sog. Quantenlogik, die nicht mehr mit der Booleschen Logik kompatibel ist, ist dagegen orthomodular; ebenso basiert sie auf einem ‚tertium datur'. Worauf ich hinaus möchte: Könnte es eine Logik der geometrischen Algebra geben, die beides umfasst, also Boolesch und nicht-Boolesch?

Der Philosoph und Logiker Bruno Baron von Freytag Löringhoff hat schon 1955 eine *Logik* vorgestellt, die die aristotelische Syllogistik von den beiden Grundrelationen *Identität* und *Diversität* herleiten konnte. In seinem Buch von 1985 *Neues System der Logik* hat er dies systematisiert. Sein Schüler Johann-Michael Petzinger promovierte über das Thema: *Das Verhältnis von Begriffs- und Urteilslogik. Eine Untersuchung verschiedener Logikkalküle mit einem Exkurs über die Antinomien und den Intuitionismus*. Tübingen. 1975. Hierin übersetze er die begriffslogischen Beziehungstypen Identität und Diversität in die aussagenlogischen Junktoren *und* und *oder*. Beides eröffnet die Möglichkeit, mit Hilfe der Gleichsetzung von *Innen = Identität = und* sowie *Außen = Diversität = oder* in die Sprache der geometrischen Algebra zu übersetzen. Formalisiert ergäbe dies

21) $$ab = a \wedge b + a \vee b$$

Das ist für sich gesehen schon eine sonderbare logische Konstruktion, deren Brisanz deutlicher wird, wenn man sie folgendermaßen übersetzt:

22) *Geometrisches Produkt = ‚tertium non datur' + ‚tertium datur'*

Hat dies einen Sachgehalt? Ich denke schon. Es handelt sich um eine wild antinomische Variante der coincidentia oppositorum des Nikolaus von Kusa. Doch damit sind wir noch nicht am Ende, denn zuvor hatte ich die Frage gestellt, ob es eine Logik der geometrischen Algebra geben könnte, die beides umfasst, also Boolesch und nicht-Boolesch sein könnte? Das ginge über das geometrische Produkt als Summe der logischen Junktoren noch hinaus. Diese Frage lässt sich positive beantworten.

Im Jahr 2002 hat der amerikanische Informatiker Douglas J. Matzke mit der Arbeit über „*Quantum Computing using Geometric Algebra*" promoviert. 2003 publizierte er mit Michael Mathey und C. D. Cantrell eine Arbeit über *Quantum Geometric Algebra*. Zugrunde liegt die Idee einer Quantenlogik für einen superschnellen Quantencomputer, der bisher noch in der Phantasie existiert, weil die physische Umsetzung mehr als schwierig ist. Das hängt mit der quantischen Superposition, der Verschränkung und den zerstörerischen Kräften der sog. Dekohärenz zusammen. Um es kurz anzudeuten, wie die Umsetzung der geometrischen Algebra in eine angemessene geometrische Logik stattfinden könnte: Die Logik einer quantischen geometrischen Algebra beruht auf einem Qubit

23) $$\text{Qubit: } A = \pm a0 \pm a1$$

als die Summe zweier Vektoren a0 und a1. Ein solches Qubit erfordert vier Zustände anstatt der zwei Zustände eines klassischen Bits {ja, nein} oder {0,1}, wird jedoch als zweistelliges Bit dargestellt. Diese vier Zustände bestehen in den vier Kombinationen:

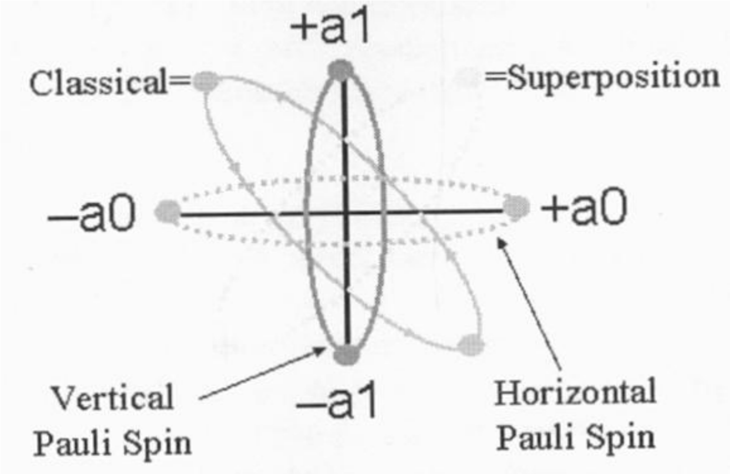
24) $$A_0 = +a0 - a1,\ A_1 = -a0 + a1,\ A_- = -a0 - a1,\ A_+ = +a0 + a1$$

Hiervon werden die Zustände $A_0 \textit{ und } A_1$ mit entgegengesetzten oder ‚alternativen' Vorzeichen Booleschen Variablen zugeordnet, die Zustände $A_- \textit{ und } A_+$ mit gleichen Vorzeichen dagegen den quantischen nicht-Booleschen Superpositionen oder einem ‚In-between'. Dem geometrischen Produkt *ab* entspricht jedoch folgende *superponierte* als auch *verschränkte* Summe zweier derartiger Qubits *a* und *b*:

25) $$ab = \left(\pm a0 \pm a1\right)\left(\pm b0 \pm b1\right) = \pm a0b0 \pm a0b1 \pm a1b0 \pm a1b1$$

Dies lässt sich wiederum am kartesischen Koordinatenkreuz und der Relation *aRb* entsprechend folgender Abbildung andeuten:

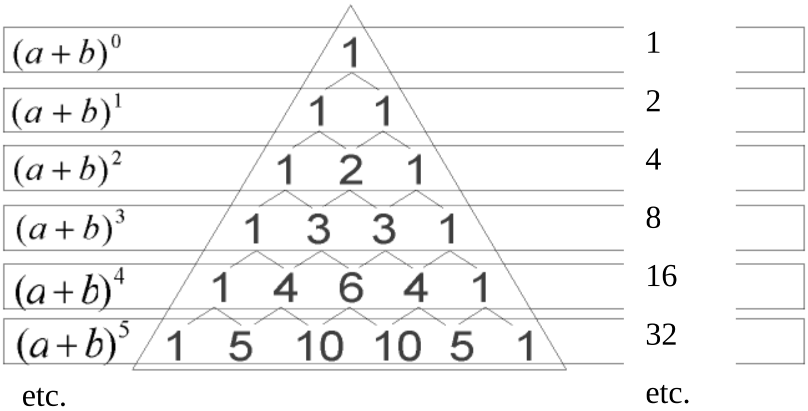
26)




Man kann  ersehen, die Relation *aRb* wird inhaltlich gesehen äußerst komplex. Kurz, es liegt eine Gemengelage einer Logik vor, die wohl alles übersteigt, was man sich bisher darunter vorgestellt hat. In diese Logik gehen auch noch die Pauli-Spins ein. Hierzu muss ich etwas nachholen. Die Pauli-Matrizen der Quantenmechanik zur Berechnung und Darstellung des Spin bilden in der geometrischen Algebra die Basisvektoren im 3-dimensionalen Euklidischen Vektorraum. Die Dirac-Matrizen der relativistischen Quantenmechanik bilden dagegen die Basisvektoren in der 4-dimensionalen Raum-Zeit. Es kommt also in der Logik der geometrischen Algebra zusammen, was zusammen zu gehören scheint. Die entsprechende Logik der geometrischen Algebra liegt nun jedenfalls ausgearbeitet vor. Es scheint auch eine direkte Korrespondenz der geometrischen Algebra mit der sog. *Linearen Logik* zu geben, wie sie von Jean-Yves Girard 1987 entwickelt und 1995 ausformuliert vorgestellt wurde.

Ein Wort noch zur Verbandstheorie. Hermann Grassmann hat schon in seinem Buch von 1844 algebraische Verknüpfungen vorgestellt, die kaum von modernen verbandstheoretischen Verknüpfungen zu unterscheiden sind. Die geometrische Algebra kennt ebenfalls die verbandstheoretischen Operationen von Durchschnitt und Vereinigung, doch außer einem Beitrag von David Hestenes zur Kristallographie liegt mir noch keine ausgearbeitete Verbandstheorie der geometrischen Algebra vor. Das wird die Zukunft wohl noch erbringen. Es ist aber zu erwarten, dass sie derselben Problemlage ausgesetzt sein wird wie die Logik. Ich vermute, dieser Verband der Multivektoren könnte den Kombinationen und Beziehungen eines Pascalschen Dreiecks $(a+b)^n$ entsprechen; die Potenz *n* hierbei sukzessive ausmultipliziert und entsprechend folgender Abbildung in Dreiecksform untereinander angeordnet.

27) Anzahl der Multivektoren/Dimensionen



**Mich interessierende offene Fragestellungen:**

Das Verhältnis von Relationskonzept und Kontinuum…

Die relationalen Momente Innen und Außen des geometrischen Produkts hinsichtlich des…

- Vektorraummodells
- Homogener Koordinaten
- Konformer Geometrie
- Krümmung des Raumes entsprechend ART

Ich danke Ihnen für Ihre Aufmerksamkeit…