Ejercicios de lógica

Ingeniería Técnica Informática - Universidad Carlos III

Octubre, 2006

Los ejercicios que se exponen a continuación **son exclusivamente un divertimento** creado con el propósito de afianzar los conceptos teóricos impartidos en clase, **y en modo alguno forman parte de la materia obligatoria**

1. Lógica proposicional

Los siguientes ejercicios han sido tomados de "*Juegos por siempre misteriosos*" [1]. En el libro, el autor propone varios ejercicios del tipo lógico con el que introduce los conceptos fundamentales de la lógica proposicional con dificultad creciente hasta el punto en el que expone los fundamentos básicos de los teoremas de Gödel.

Los enunciados de los ejercicios están tomados del capítulo "*La lógica de mentir y decir la verdad*" mientras que las soluciones propuestas se basan en los conceptos expuestos en el capítulo "*Caballeros, bribones y lógica proposicional*". Debe advertirse que las soluciones propuestas no pretenden en modo alguno presentar formalmente la aplicación de las reglas de inferencia tal y cómo serían sistemáticamente utilizadas por un demostrador automático, por ejemplo. En su lugar, son soluciones prácticas y de carácter intuitivo que sirven únicamente para introducir los conceptos fundamentales impartidos en clase.

Todos los ejercicios tendrán lugar en la Isla de los Caballeros y los Bribones donde los caballeros siempre formulan enunciados verdaderos, los bribones siempre formulan enunciados falsos y cada habitante es necesariamente un caballero o un bribón.

Un hecho fundamental en esta isla es que a todo habitante le resulta imposible declarar que es un bribón, porque un caballero nunca mentiría y diría que es un bribón, y un bribón nunca admitiría verazmente que es un bribón.

Los cuatro problemas siguientes introducen los conectores lógicos *y*, *o*, *si-entonces* y *si y sólo si*.

La visita de McGregor

Una vez, el empadronador señor McGregor realizó cierto trabajo de campo en la Isla de los Caballeros y los Bribones. En esa isla también se denomina a las mujeres caballeros y bribones. En esa visita McGregor decidió entrevistar solamente a los matrimonios.

Ejercicio 1. McGregor llamó a una puerta; el marido la abrió a medias y le preguntó a McGregor qué deseaba.

Conector lógico $\wedge$

Hago un censor —respondió McGregor—, y necesito información sobre usted y su esposa. ¿Cuál, si alguno lo es, es un caballero, y cuál, si alguno lo es, es un bribón?

– ¡Ambos somos bribones! —dijo el marido enojado mientras cerraba la puerta de un golpe.

¿De qué clase es el marido y de qué clase es la mujer?

Solución. Dado un nativo a, p es la proposición de que a es un caballero. Si a es un caballero, necesariamente será cierto que cualquier afirmación r suya será necesariamente cierta $(p \rightarrow r)$ y como en nuestra isla, sólo los caballeros dicen la verdad, $r \rightarrow p$. Por lo tanto, se concluye $p \leftrightarrow r$ es una proposición verdadera que debe leerse como "*a dice r*". Si es o no cierto, dependerá de la verdad de p y, por lo tanto, de que a sea un caballero.

En el enunciado anterior hay dos declaraciones:

$p \rightleftharpoons a$ es un caballero de modo que $\sim p$ significa que a es un bribón.

$q \rightleftharpoons b$ es un caballero de modo que $\sim q$ significa que b es un bribón.

donde a y b son el marido y su esposa respectivamente.

Puesto que es a quien lo afirma, la modelización resulta ser $p \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ o, equivalentemente, $p \leftrightarrow \sim (p \vee q)$.

Asumiendo p concluimos $\sim p \wedge \sim q$ en virtud de la regla del *modus ponens* que es, de hecho, una contradicción puesto que asumiendo p ahora concluimos, entre otras cosas, $\sim p$. Por lo tanto, necesariamente tenemos $\sim p$ o, en otras palabras, que a es un bribón y, por lo tanto, será cierto la afirmación contraria: $p \vee q$, que sabemos que puede escribirse equivalentemente como $\sim p \rightarrow q$. Puesto que tenemos $\sim p$, concluimos q nuevamente en virtud de la regla del *modus ponens* y, por ello, que b es un caballero.

Ejercicio 2. En la casa siguiente, McGregor le preguntó al marido: —¿Ambos son bribones?— El marido respondió: —Por lo menos uno de nosotros lo es. ¿De qué clase es cada uno?

Conector lógico $\vee$

Solución. La afirmación "*Al menos uno de nosotros lo es [bribón]*" será $\sim p \vee \sim q$ y, por lo tanto, el hecho de que a lo diga se modelizará como $p \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$. Asumiendo p (esto es, que a es un caballero) concluimos por *modus ponens* $\sim p \vee \sim q$ o, equivalentemente, $p \rightarrow \sim q$ y, nuevamente por *modus ponens*, $\sim q$ o sea, que b es un bribón.

Ejercicio 3. La siguiente casa que visitó McGregor resultó un mayor enigma. Un hombre algo introvertido abrió la puerta tímidamente. Cuando McGregor le pidió que dijera algo sobre sí mismo y sobre su esposa, lo único que dijo el esposo fue: —Si soy un caballero, entonces también lo es mi esposa.

Conector lógico $\rightarrow$

McGregor se fue no muy complacido. —¿Cómo puedo deducir algo sobre alguno de los dos a partir de una respuesta tan evasiva?— pensó. Estaba a punto de escribir "*Marido y Mujer ambos desconocidos*", cuando recordó súbitamente una **vieja lección de lógica de sus días de estudiante universitario**. Por supuesto —se dio cuenta—, puedo determinar de qué clase son *ambos*.

¿De qué clase es el marido y de qué clase es la mujer?

Solución. En este caso, la modelización de la respuesta del marido es $p \rightarrow q$. Por ello, la modelización de que sea precisamente el marido quien lo dice será $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$.

Nuevamente podemos resolver el problema gracias al *modus ponens*. Si conjeturamos que a es un caballero y por lo tanto p es cierto, obtendremos por *modus ponens* $p \rightarrow q$. Con la misma conjetura podemos aplicar nuevamente la misma regla de inferencia resultando en este caso q, es decir, que la mujer también es un caballero.

Ejercicio 4. Cuando el empadronador entrevistó a la cuarta pareja, el esposo dijo: —Mi esposa y yo somos de la misma clase; o ambos somos caballeros o ambos somos bribones.

Conector lógico $\leftrightarrow$

(El esposo podría haber dicho alternativamente: —Soy un caballero si y sólo si mi esposa es un caballero. Es lo mismo)

¿Qué puede deducirse sobre el marido y qué puede deducirse sobre la mujer?

Solución. En este caso, la declaración del marido se modeliza como $p \leftrightarrow q$; el hecho de que sea precisamente el marido quien lo dice se modelizará entonces como $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.

Para resolver este caso usaremos una versión alternativa del *modus ponens* denominada *modus tolens* que establece que a partir de $p \rightarrow q$ se puede deducir $\sim q \rightarrow \sim p$.

Modus Tolens

Si conjeturamos que la esposa es un bribón ($\sim q$), entonces tendríamos por *modus ponens* sobre la expresión obtenida por *modus tolens*, $\sim p$, esto es, que el marido es asimismo un bribón. En otras palabras, habría declarado que él mismo es un bribón que, como sabemos (véase la Introducción a estos ejercicios) es imposible.

Por lo tanto, la esposa debe ser necesariamente un caballero (q). Sin embargo, puede comprobarse fácilmente que no hay forma de saber la clase del marido. Otras curiosidades lógicas como éstas hasta entender incluso el fundamento lógico de la indeterminación lógica pueden leerse en [1].

Observaciones

- En la resolución del ejercicio 4, se ha introducido el uso del *modus tolens* que establece que si p y q son expresiones bien formadas de la lógica proposicional, y $p \rightarrow q$, entonces puede inferirse $\sim q \rightarrow \sim p$. La demostración es como sigue:

$p \rightarrow q$	
$\sim p \vee q$	Por equivalencia de la conectiva $\rightarrow$
$q \vee \sim p$	Por conmutatividad de la conectiva $\vee$
$\sim\sim q \vee \sim p$	Por la regla de equivalencia de la doble negación
$\sim q \rightarrow \sim p$	Por equivalencia de la conectiva $\rightarrow$

2. Lógica de predicados

Como en el caso anterior, los siguientes acertijos están extraídos del segundo capítulo de otro libro del mismo autor, "*Alicia en el país de las adivinanzas*" [2], que es una recreación lógico-matemática de los inmortales personajes de los cuentos de "*Alicia en el País de las Maravillas*", donde el juego consiste en aprender a distinguir la verdad de la falsedad.

Así como en el caso de la lógica proposicional, los siguientes ejercicios no son otra cosa que un divertimento que sirve para ejemplificar los conceptos expuestos en clase. Por ello, una vez más, se presentan soluciones prácticas y de caracter intuitivo con el propósito de afianzar algunos fundamentos de la lógica de predicados.

¿Quién robó los pasteles?

El primer cuento.

— ¿Por qué no me haces unos pastelitos? —preguntó el Rey de Corazones a la Reina de Corazones un fresco día de verano.

— ¿Qué sentido tiene hacer pasteles sin mermelada? —dijo la Reina furiosa— ¡La mermelada es lo mejor!

— Pues pon mermelada —dijo el Rey.

— ¡No puedo! —gritó la Reina— ¡Me la han robado!

— ¡Pero bueno! —dijo el Rey— ¡Esto es bastante grave!. ¿Quién la ha robado?

— ¿Cómo quieres que sepa quién la ha robado? Si lo supiera la habría recuperado hace mucho, ¡y con ella la cabeza del sinvergüenza!

El Rey hizo que sus soldados emprendieran la búsqueda de la mermelada desaparecida, y fue encontrada en la casa de la Liebre de Marzo, el Sombrerero Loco y el Lirón. Los tres fueron inmediatamente detenidos y juzgados.

— ¡Vamos a ver! —exclamó el Rey en el juicio—, ¡quiero llegar al fondo de todo esto! ¡No me gusta que la gente entre en mi cocina y me robe la mermelada!

— ¿Por qué no? —preguntó uno de los conejillos de Indias.

— ¡Suprimid a ese conejillo! —gritó la Reina. El conejillo de Indias fue suprimido al instante[1].

— Y ahora —dijo el Rey cuando se hubo pasado la conmoción ante la supresión del conejillo de Indias—, ¡quiero llegar al fondo de todo esto!

— Eso ya lo habeis dicho —apuntó un segundo conejillo de Indias que fue igualmente suprimido al instante.

— ¡Por casualidad robaste *tú* la mermelada? —preguntó el Rey a la Liebre de Marzo.

— ¡Yo no robé la mermelada! —declaró la Liebre de Marzo. En ese momento todos los conejillos de Indias que quedaban la aclamaron, siendo suprimidos de inmediato.

— ¿Y tú? —rugió el Rey al Sombrerero, que temblaba como una hoja — ¿Por casualidad eres tú el culpable?

El Sombrerero fue incapaz de articular una sola palabra; sólo respiraba entrecortadamente y daba sorbitos al té.

— Si no tiene nada que decir, eso demuestra su culpabilidad —dijo la Reina—, ¡asi que dejarle sin cabeza inmediatamente!

— ¡No, no! —suplicó el Sombrerero— ¡Uno de nosotros la robó, pero no fui yo!

[1]Los que han leído Alicia en el País de las Maravillas recordarán el significado de *suprimir:* los oficiales de la corte meten al conejillo en una bolsa de lona, la cierran con cuerdas y se sientan encima.

— ¡Tomad nota de eso! —dijo el Rey al jurado— ¡Esta prueba puede resultar de suma importancia!

— Y ¿qué pasa contigo? —prosiguió el Rey con el Lirón— ¿Qué tienes tú que decir a todo esto? ¿Han dicho la Liebre de Marzo y el Sombrerero la verdad?

— Al menos uno sí —replicó el Lirón, quien se quedó dormido para el resto del juicio.

Como reveló la subsiguiente investigación, la Liebre de Marzo y el Lirón no decían ambos la verdad. ¿Quién robó la mermelada?

Solución.

Como en los ejercicios anteriores, la dificultad principal de estos problemas consiste en modelizar la verdad o falsedad de los enunciados de individuos que, a su vez, podrían mentir o no. Por lo tanto, es preciso modelizar por una parte lo que dicen y, por la otra, si es o no cierto.

Considérese la siguiente asignación de términos constantes:

$$\begin{array}{lcl} a & \rightleftharpoons & \text{Liebre de Marzo} \\ b & \rightleftharpoons & \text{Sombrerero Loco} \\ c & \rightleftharpoons & \text{Lirón} \end{array}$$

y la siguiente definición de predicados:

$$\begin{array}{lcl} V(x) & \rightleftharpoons & x \text{ dice la verdad} \\ R(x) & \rightleftharpoons & x \text{ es el ladrón} \end{array}$$

De este modo, si la Liebre de Marzo asegura que élla no robó la mermelada ($\sim R(a)$), diremos que dice la verdad si y sólo si es así y, por lo tanto, $V(a) \leftrightarrow \sim R(a)$.

Las otras declaraciones del juicio se modelizan respectivamente como: $V(b) \leftrightarrow R(a) \vee R(c)$ y $V(c) \leftrightarrow V(a) \vee V(b)$. Además, la última pista establece que no es cierto que la Liebre de Marzo y el Lirón dicen simultáneamente la verdad, de modo que resulta: $\sim (V(a) \wedge V(c))$ o, equivalentemente, $\sim V(a) \vee \sim V(c)$.

Ahora es posible resolver fácilmente el problema por aplicación de las reglas de inferencia y equivalencia a partir de la última pista:

$$\begin{array}{ll} \sim [\sim R(a) \wedge V(c)] & \text{Por la declaración de } a \\ \sim [\sim R(a) \wedge (V(a) \vee V(b))] & \text{Por la declaración de } c \\ \sim [\sim R(a) \wedge (\sim R(a) \vee V(b))] & \text{Por la declaración de } a \\ \sim [\sim R(a) \wedge (\sim R(a) \vee R(a) \vee R(c))] & \text{Por la declaración de } b \\ \sim [\sim R(a) \wedge R(c)] & \text{Por simplificación de } \sim R(a) \vee R(a) \\ R(a) \vee \sim R(c) & \text{Por equivalencia de la expresión anterior} \end{array}$$

Tautología

Si asumimos ahora que sólo el primer predicado de la expresión así obtenida es cierto, $R(a)$, entonces se observa fácilmente que a mintió mientras que b había dicho la verdad y, por ello, también lo había hecho c. Por lo tanto, es cierto que a y c no dijeron simultaneamente la verdad y concluimos que esta conjetura es plausible.

En el segundo caso, asumiendo que el primer predicado es falso —$\sim R(a)$— y que sólo es cierto $\sim R(c)$ entonces sólo puede ser cierto que el robo lo hizo b[2] y, por ello, a dijo la verdad; también lo habría hecho, curiosamente, el ladrón, b y, por ello, también lo habría hecho c. En otras palabras, todos habrían dicho la verdad pero la última pista establece que no es posible que a y c lo hicieran simultaneamente y, por ello, concluimos que esta segunda conjetura no es en absoluto plausible.

Por lo tanto, el robo lo hizo la Liebre de Marzo.

[2] Nótese que aquí estamos anticipando una conclusión que, sin embargo, no está formalmente modelizada. Esta simplificación se ha hecho en favor del valor didáctico del ejemplo para no dificultar la comprensión del razonamiento lógico entendiendo que, además, se trata de una observación trivial.

El segundo cuento.

— Ahora que hemos recuperado la mermelada —dijo el Rey—, ya puedes hacer los pasteles.

— ¿Cómo voy a hacer pasteles sin harina? —preguntó la Reina.

— ¿Quieres decir que han robado la harina? —gritó el Rey.

— ¡Sí! —dijo la Reina. ¡Coge al bellaco y déjale sin cabeza!

— Bueno, bueno —dijo el Rey—, no nos precipitemos.

Pero la harina había de ser buscada. Naturalmente la encontraron en casa de la Liebre de Marzo, el Sombrerero y el Lirón, y por consiguiente fueron de inmediatamente detenidos y juzgados.

En el juicio la Liebre de Marzo declaró que la había robado el Sombrerero. El Sombrerero y el Lirón también declararon, pero por alguna razón sus declaraciones no fueron recogidas y no puedo decir cuáles fueron. Pero, como al final salió a la luz, sólo uno de los tres había robado la harina, y fue el único que dijo la verdad.

¿Quién robó la harina?

Solución.

Este ejercicio es sustancialmente más sencillo (¡y sorprendente!) que el anterior. Modelizando la descripción de la Liebre de Marzo resulta $V(a) \leftrightarrow R(b)$. La pista del enunciado se modeliza simplemente como: $(V(a) \wedge R(a)) \vee (V(b) \wedge R(b)) \vee (V(c) \wedge R(c))$.

Si a dice la verdad, entonces es posible concluir por *modus ponens* sobre la declaración de a que b robó la harina y la primera conjunción de la última expresión resultaría ser: $(R(b) \wedge R(c))$ lo que no es posible puesto que constantemente asumimos que sólo uno de los tres llevó a cabo el robo. En otras palabras, no es posible que a dijera la verdad y, al mismo tiempo, fuera el ladrón. Por ello, se concluye firmemente $\sim V(a)$ y, por ello, $\sim R(b)$ y añadimos estas conclusiones a las consideraciones que haremos en los siguientes razonamientos.

Precisamente, debido a las nuevas observaciones, sabemos que b no hizo el robo y por ello, sólo puede haberlo hecho c.

Definitivamente, fue el Lirón quien robó la harina, ¡a pesar de las declaraciones que hiciera!

El tercer cuento.

— Bueno, aquí tienes la harina —dijo el Rey alegremente—, ya puedes hacer los pasteles.

— ¿Hacer los pasteles sin pimienta? —preguntó la Reina.

— ¿Pimienta? —dijo el Rey con incredulidad— ¿Quieres decir que pones pimienta en los pasteles?

— No mucha —respondió la Reina.

— Y supongo que la han robado.

— ¡Pues claro! —dijo la Reina— Busca la pimienta, y cuando hayas descubierto quién la robó, déjale sin ...

— Vamos, vamos —dijo el Rey.

Desde luego la pimienta debía buscarse. Pero, como todos sabeis, las personas que roban pimienta nunca dicen la verdad.

— ¿Qué? —dijo Alicia (no la Alicia del País de las Maravillas sino la de esta fiesta)— Nunca había oído eso.

— ¿De verdad? —dije burlonamente sorprendido.

— ¡Claro que no! Y lo que es más, no creo que ninguna otra persona lo haya oído. ¿Lo había oído antes alguno de vosotros?

Todos los niños negaron con la cabeza.

— Bueno —dije—, para los fines de esta historia supongamos que los que roban pimienta nunca dicen la verdad.

— De acuerdo —dijo Alicia un tanto dudosa.

Siguiendo con el cuento, el principal sospechoso era la cocinera de la Duquesa. En el juicio sólo hizo una declaración: ”¡Yo sé quién robó la pimienta!”

Dando por sentado que las personas que roban pimienta siempre mienten, ¿es la cocinera culpable o inocente?

Solución.

Este ejercicio presenta un caso curioso sobre la certeza o falsedad de afirmaciones que se relacionan con los hechos que son del conocimiento privado del individuo que hace la declaración.

Considérese la siguiente definición de términos constantes:

$a \quad \rightleftharpoons \quad$ Cocinera de la Duquesa

Además de los predicados ya utilizados anteriormente, se define:

$P(x) \quad \rightleftharpoons \quad x$ sabe que robó la pimienta

De modo que, podemos declarar $P(x) \leftrightarrow R(x)$ o, en otras palabras, que si alguien robó la pimienta, sabe necesariamente que lo hizo; y si esto último es cierto, lo será porque, de hecho, la había robado. Así, la declaración de la cocinera de la Duquesa podría modelizarse como $V(a) \leftrightarrow P(a)$[3]

Por último, la declaración que tanto sorprendió a Alicia (*"no la Alicia del País de las Maravillas sino la de esta fiesta"*) es: $\forall x R(x) \rightarrow \sim V(x)$.

Utilizando el algoritmo de encadenamiento hacia delante y asumiendo que efectivamente la cocinera de la duquesa robó la pimienta, $R(a)$, resulta el caso mostrado a continuación.

$$\begin{array}{c}
R(x) \rightarrow \sim V(x) \\
\big\downarrow \; \sigma = \{x/a\} \\
R(a) \rightarrow \sim V(a) \\
\big\downarrow \; R(a) \\
\sim V(a) \\
\big\downarrow \; V(a) \leftrightarrow P(a) \\
\sim P(a) \\
\big\downarrow \; P(a) \leftrightarrow R(a) \\
\sim R(a)
\end{array}$$

Figura 1: Algoritmo de encadenamiento hacia delante

Por lo tanto, se demuestra por *reducción al absurdo* que la cocinera de la Duquesa no pudo haber robado la pimienta. Reducción al absurdo

[3]En realidad, su declaración es mucho más genérica puesto que sólo se está considerando el caso de que si ella robó la pimienta lo sabe, pero en ese caso también estaría diciendo la verdad.

Así que, ¿quién robó la pimienta?

Los siguientes sospechosos del Rey eran la Liebre de Marzo, el Sombrerero y el Lirón. Se enviaron algunos soldados a su casa, pero no pudieron encontrar pimienta alguna. Como podían haberla escondido en algún sitio, fueron detenidos por principio.

En el juicio la Liebre declaró que el Sombrerero era inocente y el Sombrerero declaró que el Lirón era inocente. El Lirón murmuró algo en sueños, pero no fue recogido.

Como al final resultó, ningún inocente hizo una declaración falsa y (recordamos) los que roban pimienta nunca hacen declaraciones verdaderas. Además, sólo uno robó la pimienta. ¿Cuál de los tres, si es que alguno de ellos, es el culpable?

Solución.

A diferencia del ejercicio anterior, en este caso se sabe que además de que los que roban pimienta no dicen la verdad, ningún inocente mintió y, por ello, tenemos $\forall x R(x) \leftrightarrow \sim V(x)$.

Por otra parte, las declaraciones de los inculpados en el caso del robo de la pimienta son, respectivamente: $V(a) \leftrightarrow \sim R(b)$ y $V(b) \leftrightarrow \sim R(c)$

En la resolución de este ejercicio, se propone el uso del encadenamiento hacia detrás para determinar, ordenadamente, si a robó la pimienta; después, si lo hizo b y, por último, si lo hizo c.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{R(a)} & \sim V(x) \rightarrow R(x) \arrow[d, "\sigma = \{x/a\}"] \\
\boxed{R(a)} & \sim V(a) \rightarrow R(a) \arrow[d] \\
\boxed{\sim V(a)} & \sim V(a) \arrow[d, "R(b) \leftrightarrow \sim V(a)"] \\
\boxed{\sim R(b)} & R(b)
\end{tikzcd}$$

Figura 2: Encadenamiento hacia detrás ($R(a)$)

Negación

La figura 2 muestra el encadenamiento hacia detrás para la resolución de la petición $R(a)$. Junto a cada nodo se muestra la pila con los objetivos pendientes de resolución. Como puede verse, para demostrar que a robó la pimienta es preciso asumir que lo hizo b pero, ¡sabemos que sólo la robó uno! de modo que no pudo haberlo hecho a.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{R(b)} & \sim V(x) \rightarrow R(x) \arrow[d, "\sigma = \{x/b\}"] \\
\boxed{R(b)} & \sim V(b) \rightarrow R(b) \arrow[d] \\
\boxed{\sim V(b)} & \sim V(b) \arrow[d, "R(c) \rightarrow \sim V(b)"] \\
\boxed{R(c)} & R(c)
\end{tikzcd}$$

Figura 3: Encadenamiento hacia detrás ($R(b)$)

La figura 3 muestra el encadenamiento hacia detrás para la resolución de la petición $R(b)$. Nuevamente, se observa que para ello es preciso asumir que lo hizo c y como ambos no pudieron hacerlo, se concluye que no lo hizo b.

$$
\begin{array}{cl}
\boxed{R(c)} & \sim V(b) \rightarrow R(c) \\
 & \quad \downarrow \\
\boxed{\sim V(b)} & \quad \sim V(b) \\
 & \quad \downarrow \; R(x) \rightarrow \sim V(x), \sigma = \{x/b\} \\
\boxed{\sim V(b)} & R(b) \rightarrow \sim V(b) \\
 & \quad \downarrow \\
\boxed{R(b)} & \quad R(b)
\end{array}
$$

Figura 4: Encadenamiento hacia detrás ($R(c)$)

La última figura muestra el encadenamiento hacia detrás para determinar si la pimienta la robó c, $R(c)$ y, como en el primer caso, se observa que para ello debería asumirse que también lo hizo b y eso es imposible.

En conclusión, la pimienta no la robaron, tampoco, ni la Liebre de Marzo, ni el Sombrerero Loco ni el Lirón. Quién lo hizo y otros misterios se cuentan en [2].

Observaciones

- En la resolución del primer cuento se simplifica la expresión $\sim R(a) \vee R(a)$ y esto es posible, puesto que se trata de una *tautología* o, en otras palabras, de una expresión que es siempre cierta para cualquier valor de predicados. Así, si $R(a)$ es cierto, la disyunción anterior lo será automáticamente, pero si no lo fuera, entonces $\sim R(a)$ lo será resultando asimismo cierta la expresión completa.

  Intuitivamente hablando, es posible crear una tabla de verdad para la expresión $\sim R(a) \vee R(a)$ y completarla para los valores de verdad o falsedad de $R(a)$ de modo que se verá que la expresión anterior es **siempre** cierta. Se dice, por ello, que es una *tautología*.

- La solución del tercer cuento emplea la técnica de reducción al absurdo (*ad absurdum ducens*) para concluir que la cocinera de la Duquesa no pudo haber robado la pimienta. Este procedimiento prueba que una conclusión es cierta porque su contradictoria sería falsa o absurda. Esquemáticamente, se trata de lo siguiente:

  ```
  Si no es A, habrá que aceptar que es no-A
  Si fuera no-A, entonces se daría no-B
  Pero se da B
  Luego no puede ser no-A
  Luego es A
  ```

- La resolución del cuarto ejercicio intenta probar en algunos casos un objetivo que es la negación de un predicado.

  En términos generales, el uso de la negación introduce una gran cantidad de dificultades y consideraciones adicionales más allá del alcance de este curso. Se advierte, sin embargo, que en nuestro caso no existe ninguna de estas complicaciones puesto que el objetivo, negado, es *literalmente* usado por la regla del *modus ponens*. En otras palabras, aunque los objetivos consistan —en algunos casos— en negaciones de predicados, es posible aplicar la regla del *modus ponens* hacia atrás usando reglas que en sus conclusiones consisten, *literalmente* de la misma negación.

Referencias

[1] Raymond Smullyan. *Juegos por siempre misteriosos*. Colección Juegos. Editorial Gedisa, Barcelona, España, mayo 1995.

[2] Raymond Smullyan. *Alicia en el país de las adivinanzas*. Colección Teorema. Catedra (Grupo Anaya, S. A.), Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid, España, 2000.