

# MANUAL DEL LABORATORIO DE FÍSICA GENERAL I

*Plan 2010*

Pedro Sánchez Sánchez  
Vicente Alcober Bosch  
Coral Duro Carralero  
Pilar Mareca López  
Ángel Sanz Sanz

Departamento de Física Aplicada  
a las Tecnologías de la Información



## PROLOGO

En el nuevo plan de estudios de "Graduado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación" (Plan 2010) el laboratorio deja de ser una asignatura optativa para ser considerada parte importante de las asignaturas obligatorias Física General I y Física General II. El hecho de que todos los alumnos tengan que dedicar una parte de su esfuerzo a la realización de prácticas experimentales nos obliga a hacer algunos cambios en la metodología a fin de adecuarnos en tiempo y contenido al programa teórico de dichas asignaturas, dentro del marco señalado en el Plan de Estudios. En esta primera edición del Manual se presentan los Conceptos Generales y las prácticas correspondientes a Física General I. En breve, se incorporarán las prácticas de laboratorio correspondientes a Física General II.

La nueva orientación no afecta, sin embargo, a los objetivos del laboratorio que son los mismos de antes. Se trata de que el alumno se inicie en el trabajo experimental de un laboratorio de Física, con especial atención al tratamiento de datos. El alumno debe aprender a elaborar las tablas de medidas, a representar adecuadamente las gráficas, a utilizar métodos analíticos de ajuste de curvas, a hacer una correcta estimación de errores y a expresar los resultados adecuadamente. Todas estas nociones se explican en el capítulo I de "Introducción al tratamiento de datos" que es de extraordinaria importancia para el posterior desarrollo de las prácticas.

En todas las prácticas se incluye una breve introducción teórica, donde se exponen los fundamentos físicos, y una parte práctica donde se explica con cierto detalle la manera de llevar a cabo la realización de las mismas. Es de esperar que, a partir de su ejecución, el alumno aprenda el manejo de los aparatos básicos, de sus características y limitaciones. Por último, el alumno tiene ante sí la posibilidad de valorar los modelos teóricos con la experiencia.

La Física es una ciencia experimental. Al decir de muchos físicos, el desarrollo de la Física arranca con el "método científico" de Galileo, quien pasa de las abstractas teorías aristotélicas a la experimentación, única manera de conocer la mayor o menor bondad de dichas teorías. Para muchos alumnos, este será sin duda su primer acercamiento a la "medida". Esperemos que se abra para ellos el mismo horizonte que se abrió para la Física a principios del siglo XVII.

Este Manual es el resultado de la experiencia de muchos años de los profesores que figuran como autores del mismo, pero también de otras personas que han colaborado muy eficazmente en el mantenimiento y puesta a punto de las prácticas, sin cuya labor no hubiera sido posible el buen funcionamiento del laboratorio y a quienes deseamos expresar nuestra gratitud: D. Manuel Ramos Díaz, D. Luis Rivera Díaz y D. Jesús Alarcón Cervero. En esta labor de equipo de todos los profesores del Departamento, no podemos obviar en nuestro agradecimiento a Dña. Juana González que tan eficazmente nos ayuda en todos los temas administrativos.

Julio 2010

Pedro Sánchez, Vicente Alcober, Coral Duro, Pilar Mareca, Angel Sanz

*Los estudiantes que lo deseen pueden bajarse este Manual, así como los guiones por separado de las prácticas, en la dirección WEB del Departamento:*

<http://www-app.etsit.upm.es/departamentos/fis/index.html>



## INDICE

### Prólogo

<b>0. CONCEPTOS GENERALES .....</b>	<b>7</b>
0.1 INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE DATOS EXPERIMENTALES .....	7
0.1.1 <i>Medida de una magnitud</i> .....	7
0.1.2 <i>Tipos de errores</i> .....	7
0.2 CONCEPTOS ESTADISTICOS .....	8
0.2.1 <i>Introducción</i> .....	8
0.2.2 <i>Errores absoluto y relativo</i> .....	11
0.2.3 <i>Propagación de errores</i> .....	12
0.2.4 <i>Número de cifras del resultado</i> .....	16
0.3 METODOS ANALITICOS DE AJUSTE DE CURVAS .....	18
0.3.1 <i>Ajuste por mínimos cuadrados</i> .....	18
0.3.2 <i>Correlación:</i> .....	21
0.3.3 <i>Método de los "pares de puntos"</i> .....	22
0.4 GRAFICAS .....	24
0.5 MEDIDA DE LONGITUDES Y ÁNGULOS .....	28
0.5.1 <i>Descripción de los instrumentos</i> .....	30
<b>1. PRÁCTICAS DE MECÁNICA .....</b>	<b>33</b>
1.1 PENDULO SIMPLE .....	33
1.2 PENDULO FISICO .....	39
1.3 PENDULO DE KATER .....	43
1.4 MOMENTOS DE INERCIA .....	49
1) <i>Determinación del momento de inercia de una barra</i> .....	51
2) <i>Verificación del teorema de Steiner</i> .....	52
1.5 ESTUDIO DE LA CAÍDA LIBRE .....	53

<b>2. PRÁCTICAS DE TERMODINAMICA .....</b>	<b>59</b>
2.1 LEYES DE BOYLE Y GAY-LUSSAC.....	59
2.1.1 <i>Comprobación de la ley de Boyle-Mariotte</i> .....	60
2.1.2 <i>Termómetro de gas a volumen constante. Ley de Gay-Lussac</i> .....	62
2.2 DETERMINACIÓN DE CALORES ESPECÍFICOS .....	65
2.3 DETERMINACION DEL COEFICIENTE ADIABATICO, $\gamma$ .....	71
<b>3. PRÁCTICAS DE ELECTROMAGNETISMO .....</b>	<b>75</b>
3.1 EL POLÍMETRO DIDÁCTICO.....	75
3.2 APARATOS DE MEDIDA .....	85
3.3 EL PUENTE DE HILO.....	91
3.4 CARGA Y DESCARGA DE UN CONDENSADOR .....	97
<b>4. APÉNDICE .....</b>	<b>105</b>
4.1 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN “T DE STUDENT”.....	105
4.2 CÓDIGO DE COLORES .....	107
4.2.1 <i>Resistencias</i> .....	107
4.2.2 <i>Condensadores</i> .....	108

## 0. CONCEPTOS GENERALES

### 0.1 INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE DATOS EXPERIMENTALES

#### *0.1.1 Medida de una magnitud*

La Física es una ciencia típicamente experimental. Las teorías existentes se basan en unos postulados (o hipótesis) confirmadas hasta ahora por los resultados experimentales o medidas. Medir es, según la definición clásica, comparar una magnitud con otra patrón tomada como unidad.

Conocer el valor real, exacto, de una magnitud física es un problema totalmente utópico. Podemos aproximarnos a él, pero nunca podremos saber si realmente es dicho valor, pues los instrumentos de medida, así como los sentidos del observador, tienen un límite de sensibilidad. Aparte de que no podemos tener la garantía de que nuestro sistema de medida no perturbe el valor real. Con todas estas consideraciones parece lógico que en Física no se hable nunca del valor exacto de una cosa, sino del valor "más probable" de ella.

A la diferencia entre el valor exacto y el aproximado, le llamaremos "error de la medida". Determinar el valor de la magnitud así como los límites de la incertidumbre que existe en su determinación será el objeto del cálculo de errores.

#### *0.1.2 Tipos de errores*

Los errores los clasificaremos según su origen en sistemáticos, accidentales o fortuitos, y personales o de observación. Esta clasificación no es totalmente rígida. La diferencia entre unos y otros no está perfectamente delimitada, sino que muchas veces unos errores pueden considerarse accidentales o sistemáticos, según como se analicen. Es por esto que algunos autores engloban los errores personales dentro de los sistemáticos o de los accidentales, ya que no es fácil establecer en muchos casos una diferencia clara entre ellos.

##### a) Sistemáticos

Estos errores proceden de un defecto en el aparato o de un ajuste inadecuado. Así, p.ej. pueden ser causa de error las divisiones de una regla graduada que no sean perfectamente iguales sino unas mayores que otras; las variaciones relativas del volumen de mercurio en un termómetro que no son proporcionales a la temperatura por defectos en el capilar; el cero de una balanza que no esté bien ajustada por defectos en los brazos; la medida de un trazo luminoso en la pantalla de un tubo de rayos catódicos cuando ésta distorsiona en los bordes, etc.

Los errores sistemáticos suelen ser pequeños. La técnica trabaja cada vez con mayor seguridad y los defectos se corrigen en su mayor parte, aunque siempre nos quedará la limitación dada por la sensibilidad del aparato. En nuestras prácticas supondremos que los

instrumentos están bien, despreciando estos errores. Bien entendido que si se quisiera hacer un estudio algo riguroso de un fenómeno físico, tendríamos que empezar haciendo un previo "calibrado" de todos los aparatos que manejamos y de su límite de sensibilidad.

#### b) Accidentales o fortuitos

Como su nombre indica, son errores cuya causa se desconoce. Son debidos a motivos imprevistos cuyo origen suele ser difícil de determinar. P. ej.: cambios de temperatura, de presión, de humedad, etc. Es por ello que en la repetición de las medidas con el mismo instrumento y en idénticas condiciones no se obtengan, en general, resultados exactamente iguales, sino que difieren un poco entre sí.

Estos errores se distribuyen al azar y siguen, por tanto, una ley estadística que puede representarse por la curva gaussiana de probabilidad, merced a la cual se podrá determinar el valor más probable así como los límites de incertidumbre.

#### c) Personales o de observación.

Se deben a la incapacidad de los sentidos para distinguir el valor correcto de una magnitud, así como a la mayor o menor habilidad del experimentador que efectúa la medida.

Pueden ser debidos a una incapacidad visual. Así, p.ej. al desplazar una lente convergente sobre un banco de óptica y observar la imagen de un cierto objeto luminoso sobre una pantalla, el ojo es incapaz de precisar con exactitud la posición crítica de la lente para la cual la imagen aparece nítida sobre la pantalla.

También pueden provenir de una insuficiencia auditiva. Así, p.ej. el oído humano es incapaz de averiguar si la resonancia en un tubo de ondas estacionarias provocada por un altavoz colocado en su extremo, tiene lugar en la cota 12,7 cm o 12,5 cm del tubo. Igualmente podría decirse para el caso de un puente de C.A. en el que se tratara de hallar el equilibrio mediante un auricular.

## 0.2 CONCEPTOS ESTADISTICOS

### 0.2.1 *Introducción*

Hasta ahora hemos considerado el posible error de una medida. Si repetimos varias veces la medición es muy posible que se obtengan diferentes valores de ella. En este caso se acostumbra a considerar como valor más probable el "valor medio" que se define como:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (0-1)$$

siendo n el número de mediciones realizadas.

Sin embargo, sería mucha suerte que este valor medio coincidiera con el valor real de la magnitud que se mide. Nuestro problema radica, pues, en delimitar un entorno alrededor



de  $x$  en el interior del cual tenemos la "certeza", o al menos un alto porcentaje de probabilidad, de que se halla el valor real.

Antes de seguir más adelante, conviene definir algunos conceptos de gran interés práctico:

"Desviación"  $D_i = x_i - \bar{x}$  (0-2)

"Desviación media"  $\bar{D} = \frac{\sum |D_i|}{n}$  (0-3)

"Desviación estándar"  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum D_i^2}{n}}$  (0-4)

La desviación estándar nos da una idea de la dispersión de las lecturas alrededor del valor medio. Si se han tomado muchas mediciones, y estas siguen una curva de distribución gaussiana (<sup>1</sup>), se demuestra en estadística que el 68 % de ellas estarán en el intervalo  $\pm \sigma$  del valor medio, y el 95 % en el intervalo  $\pm 2 \sigma$ . Sin embargo, el experimentador no acostumbra a repetir la medida más de 10 veces, y en este caso, resulta más práctico tomar

como desviación estándar:  $\sigma \cong s = \sqrt{\frac{\sum D_i^2}{n-1}}$  (0-5)

(<sup>1</sup>) Se denominan curvas gaussianas aquellas que siguen una ley del tipo:

$$y = C e^{-h^2(x-\bar{x})^2}$$

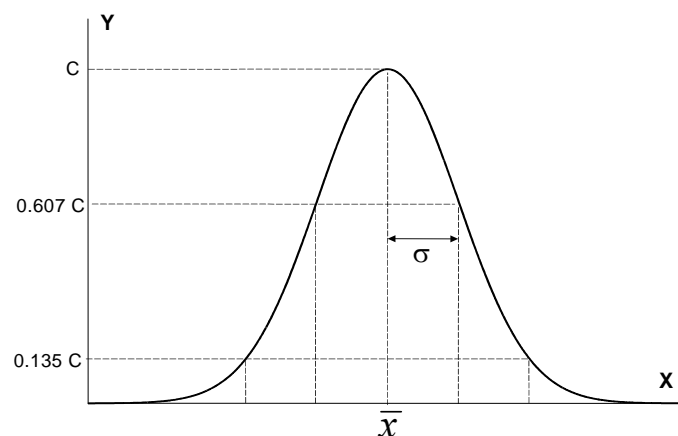


Figura 0.1

donde  $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ . Los puntos de inflexión de la curva están precisamente en  $\bar{x} \pm \sigma$

Más interesante que la desviación estándar  $\sigma$ , es conocer la proximidad del valor medio  $\bar{x}$  al valor real. Aunque es imposible saberlo con certeza, si podemos saber la probabilidad que se tiene de que el valor real se halle en un entorno del valor medio  $\bar{x}$ . Para ello se define como error más probable, o bien "error cuadrático medio":

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum D_i^2}{n(n-1)}} \quad (0-6)$$

Si la distribución es gaussiana se demuestra en estadística que hay un 68.% de probabilidad de que el valor real se halle en el entorno  $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ , y un 95 % de que esté en  $(\bar{x} - 2\varepsilon, \bar{x} + 2\varepsilon)$ .

Existe una diferencia importante entre la desviación estándar y el error cuadrático medio. Mientras aquella depende únicamente de la precisión con que se hayan efectuado las medidas y no del número de ellas, el error cuadrático medio depende de  $n$ , de modo que según crece el número de medidas disminuye el valor de  $\varepsilon$ . En cualquier caso, por ser esta dependencia cuadrática, llega un momento en que hay que variar mucho  $n$  para conseguir una pequeña variación del error cuadrático medio.

Una manera aproximada de calcular el error  $\varepsilon$  es a partir de la fórmula de Peters:

$$\varepsilon \cong \frac{5}{4} \frac{\bar{D}}{\sqrt{n-1}} \quad (0-7)$$

Ejemplo:

Al estudiar el periodo del movimiento de un péndulo simple, manteniendo constante su longitud, se han obtenido los siguientes valores  $T$ .

$T_i$ (segundos)	$ D_i $ (* $10^{-2}$ )	$D_i^2$ (* $10^{-4}$ )
1.42	1.4	1.96
1.45	1.6	2.56
1.44	0.6	0.36
1.47	3.6	12.96
1.43	0.4	0.16
1.45	1.6	2.56
1.42	1.4	1.96
1.42	1.4	1.96
1.41	2.4	5.76
1.43	0.4	0.16

$$\bar{T} = 1.434 \text{ s} ; \quad \sum |D_i| = 14.8 \cdot 10^{-2} \text{ s} ; \quad \sum D_i^2 = 30.4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2$$

La desviación media es  $\bar{D} = 1.48 \cdot 10^{-2}$  segundos.

La desviación estándar es:  $\sigma = 1.8 \cdot 10^{-2}$  segundos.

El error cuadrático medio:  $\varepsilon = 0.58 \cdot 10^{-2}$  segundos.  
(según la fórmula de Peters:  $\varepsilon = 0.62 \cdot 10^{-2}$  segundos.)

En la práctica resulta a veces más cómodo calcular la desviación estándar a partir de la expresión:

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (0-8)$$

y el error cuadrático medio como  $\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

### 0.2.2 Errores absoluto y relativo

El error del resultado final puede expresarse de dos formas distintas, o bien con el valor que indica el entorno de probabilidad, y que designaremos como  $\Delta x$  y que se llama "error absoluto", o bien con el cociente  $\Delta x/x$  que llamaremos "error relativo". Es obvio que este último será mucho más interesante que el anterior, pues nos permite precisar mejor la bondad de una medición. Así, p.ej. determinar con un error absoluto de  $\pm 0,1$  cm una longitud de 1 cm, o bien una de 100 cm. es algo muy diferente. En el primer caso el error relativo sería  $\pm 0,1/1$  y en el segundo  $\pm 0,1/100$ . No hay duda de que esta segunda medida es mucho más precisa que la primera.

Obsérvese que el valor  $\Delta x/x$  está en "tanto por uno". Si se pretende calcular el "tanto por ciento" de error será preciso multiplicar por 100 este valor.

La determinación del error absoluto se acostumbra a hacer tomando como referencia la sensibilidad del aparato. Así, p.ej. si un cronómetro está dividido en 0,2 s es porque el fabricante supone que la calidad del mismo no permite más. En este caso se toma este valor como error absoluto de la medida que se haga con el cronómetro. Si un termómetro tiene como distancia entre dos divisiones consecutivas 0.1 °C este será el error absoluto. (En el caso de que las divisiones de la escala estén suficientemente separadas puede tomarse la mitad de dicho valor. Algunos aparatos de aguja tienen un espejo debajo de ella para evitar el error de paralaje al hacer la lectura de la medida, lo cual denota ya un cierto grado de calidad en el aparato, pudiéndose considerar que el error absoluto sería más pequeño que el que corresponde a la distancia entre dos divisiones consecutivas de la escala).

Si la medición se repite  $n$  veces y se hace una estimación del error cuadrático medio, puede considerarse este valor como error absoluto. En cualquier caso, hay que tener presente siempre que estamos limitados por la precisión de los aparatos que utilizamos. No sea que al repetir la lectura con un voltímetro de mala calidad, se mida siempre 110 voltios y se piense que entonces... ¡no tenemos error! El sentido común del experimentador debe ser siempre el factor más importante en la apreciación de los errores.

### 0.2.3 Propagación de errores

Se han visto hasta ahora los posibles errores que se pueden cometer en la realización de una medida experimental. Pero el estudio no acaba aquí. En Física, y en general en todas las ciencias experimentales, el resultado final de un experimento no viene dado en forma directa sino como una combinación de diferentes magnitudes experimentales que obedecen a una ley determinada. Así, p.ej. con un péndulo simple, se puede determinar un valor de la aceleración de la gravedad, mediante la expresión:

$$g = 4 \pi^2 \frac{l}{T^2}$$

donde  $l$  y  $T$  se miden independientemente, calculando los errores respectivos  $\Delta l$  y  $\Delta T$ . La pregunta inmediata será: ¿Cómo afectan estos errores al valor de  $g$ ? De otra forma: ¿Cuál será el error de  $g$  en función de los errores  $\Delta l$  y  $\Delta T$ ?

Consideremos en primer lugar el caso más sencillo de una magnitud  $y$  que es función de una variable independiente  $x$ :  $y = f(x)$ . A un cierto valor experimental  $x_0$  le corresponderá un valor  $y_0$  dado por la ecuación anterior. De igual modo, a un intervalo  $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$  le corresponderá otro  $(y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y)$ , y de aquí podemos deducir el valor  $\Delta y$ , es decir: el error de la magnitud  $y$ .

Veamos este razonamiento gráficamente. Supongamos inicialmente que la función  $f(x)$  es lineal. En la Figura 0.2 se aprecia que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{y_+ - y_0}{x_+ - x_0} = \frac{y_0 - y_-}{x_0 - x_-} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

pero, sabido es que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{dy}{dx} \right)_P$$

sustituyendo

$$\Delta y = \left( \frac{dy}{dx} \right)_P \Delta x$$

En resumen, el cálculo del error de  $y$  no ofrece ninguna dificultad una vez conocida la función  $y = f(x)$  y el error experimental de  $x$ .

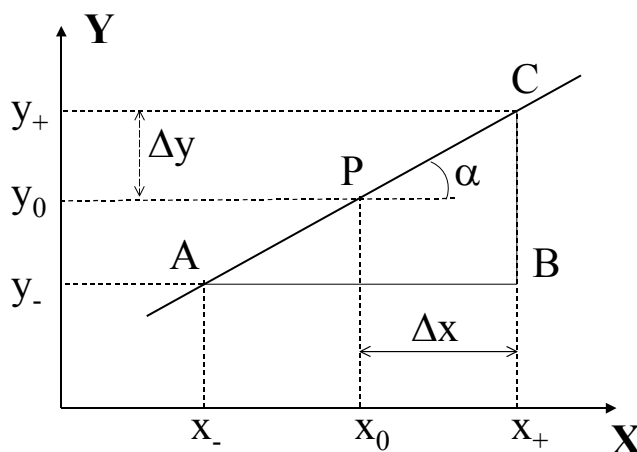


Figura 0.2

Si la función  $f(x)$  no es lineal el problema es mucho más complejo, pues aunque  $x_+ - x_0 = x_0 - x_- = \Delta x$ ; en cambio,  $y_+ - y_0 \neq y_0 - y_- \neq \Delta y$

y por tanto:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{dy}{dx} \right)_P$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB} \neq \frac{y_+ - y_0}{x_+ - x_0} \neq \frac{y_0 - y_-}{x_0 - x_-}$$

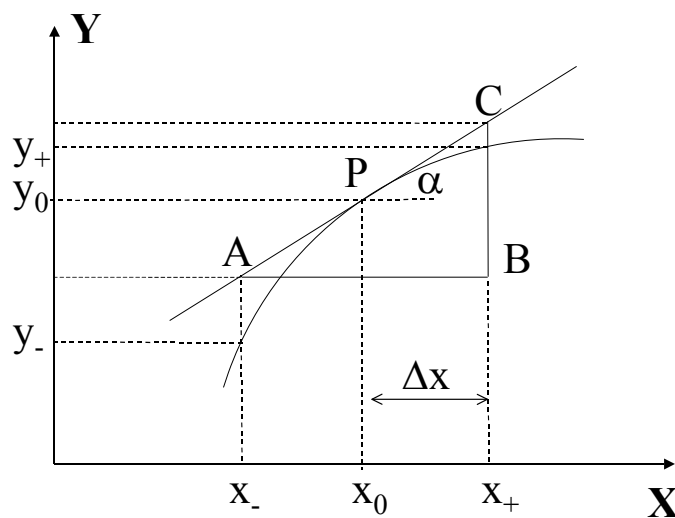


Figura 0.3

Sin embargo, si  $\Delta x$  es pequeño, las diferencias entre los miembros de dicha desigualdad pueden ser pequeñas y se podría decir que:

$$y_+ - y_0 \cong y_0 - y_- \cong \Delta y$$

luego:

$$\Delta y \cong \left( \frac{dy}{dx} \right)_P \Delta x \quad (0-9)$$

Analíticamente, esta expresión corresponde a una aproximación de primer orden en el desarrollo en serie de Taylor. En efecto:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Si consideramos  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

se tiene:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots$$

En cualquier caso, la ecuación (0-9) conviene tomarla con ciertas precauciones pues podría conducir a situaciones absurdas. Supongamos p.ej. que se ha medido un ángulo experimentalmente  $\phi = 90^\circ (\pm 10 \%)$  y se desea saber el error que se comete en la determinación de  $\text{sen } \phi$ . La aplicación directa de la expresión (0-9) :

$$\Delta(\text{sen } \phi) = \cos \phi \Delta\phi$$

donde  $\Delta\phi = 0.10 * 90^\circ = 9^\circ = 9 * \pi/180 = 0.1571 \text{ rad}$ , y  $\cos 90^\circ = 0$

De modo, que  $\phi$  tiene un error del 10 %, y en cambio  $\text{sen } \phi$  !no tiene error!

En este caso, el ángulo  $\phi$  puede tomar valores en el rango de  $81^\circ$  a  $99^\circ$ , y su función seno entre  $\text{sen } 81^\circ = 0.9877$  ,  $\text{sen } 90^\circ = 1$  ,  $\text{sen } 99^\circ = 0.9877$  , luego  $\Delta(\text{sen } \phi) = 0.0123$ , y en consecuencia:

$\text{sen } \phi = 1.00 (\pm 1.2 \%)$

Si en el desarrollo de Taylor la aproximación fuese de segundo orden, se tendría:

$$f'(90^\circ) = \cos 90^\circ = 0 \quad ; \quad f''(90^\circ) = -\text{sen } 90^\circ = -1$$

$$\Delta(\text{sen } \phi) = \frac{1}{2} 0.1571^2 = 0.0123$$

-----

Consideremos ahora el caso más frecuente de que en el cálculo de  $y$  intervengan varias magnitudes independientes  $x_1, x_2, x_3, \dots$  que se han medido experimentalmente:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Puede ocurrir que, matemáticamente, los errores que las distintas magnitudes aportan al error de  $y$  se neutralicen en parte mutuamente. Sin embargo, en teoría de errores siempre se considera la situación más desfavorable, es decir que no se compensen los errores unos con otros.

La expresión (0-9) aplicada a este caso sería:

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots \quad (0-10)$$

donde todos los sumandos son positivos para que los errores no se compensen.

En algún caso, puede ocurrir que la función  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$  tome una forma sencilla y entonces pueda calcularse el error de  $y$  buscando los dos valores límites. Así, p.ej.

$$y = \frac{x_2}{x_1} \qquad y_+ = \frac{x_2 + \Delta x_2}{x_1 - \Delta x_1} \qquad y_- = \frac{x_2 - \Delta x_2}{x_1 + \Delta x_1}$$

El error de  $y$  vendría dado ahora por la mayor de las diferencias :

$$\Delta y = y_+ - y > y - y_- \quad (0-11)$$

Cuando  $\Delta x_1 \ll x_1$  y además  $\Delta x_2 \ll x_2$  se verifica que:

$$\Delta y = y_+ - y = y - y_- = (y_+ - y_-)/2$$

que es el valor aproximado que se obtendría haciendo uso de la expresión (0-10)

**Ejemplo:** Calcular la resistencia óhmica, y su error, de un resistor por el que pasa una corriente de intensidad  $I = 4 \text{ A}$  ( $\pm 10\%$ ) cuando se aplica una diferencia de potencial entre sus bornes  $V = 10 \text{ V}$  ( $\pm 5\%$ ).

$$\Delta V = 0.5 \text{ voltio} \quad \Delta I = 0.4 \text{ A}$$

$$R = \frac{V}{I} = 2.5 \text{ ohm} \quad R_+ = \frac{V + \Delta V}{I - \Delta I} = \frac{10.5}{3.6} = 2.92 \text{ ohm} \quad R_- = \frac{V - \Delta V}{I + \Delta I} = \frac{9.5}{4.4} = 2.16 \text{ ohm}$$

$$\text{Por tanto:} \quad \Delta R = R_+ - R = 0.42 \text{ ohm}$$

$$\underline{R = 2.5 \text{ ohm} (\pm 17\%)}$$

A partir de la expresión (0-10):

$$\Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial V} \right| \Delta V + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \right| \Delta I = \frac{1}{I} \Delta V + \frac{V}{I^2} \Delta I = \frac{0.5}{4} + \frac{4}{16} = 0.38$$

$$\underline{R = 2.5 \text{ ohm} (\pm 15\%)}$$

En el caso del péndulo simple:  $g = g(l, T)$ , el error absoluto de  $g$  puede calcularse haciendo uso de la expresión (0-10), sabiendo que

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad (0-12)$$

$$\Delta g = 4\pi^2 \left( \frac{1}{T^2} \Delta l + \frac{2l}{T^3} \Delta T \right) \quad (0-13)$$

El error relativo de  $g$  será:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\left( \frac{1}{T^2} \Delta l + \frac{2l}{T^3} \Delta T \right)}{\frac{l}{T^2}} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T} \quad (0-14)$$

O bien tomando logaritmos neperianos en la expresión (0-12) y diferenciando:

$$\ln g = \ln 4\pi^2 + \ln l - 2 \ln T$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T} \quad (0-15)$$

### 0.2.4 Número de cifras del resultado

Una vez hecho el estudio de errores de una medida, el resultado debe expresarse con el número de cifras adecuado al error de la magnitud. Como norma puede tomarse que la última cifra del resultado debe coincidir con la primera del error. De manera que si el error absoluto afecta a la cifra de las décimas, el resultado final incluirá cifras significativas hasta las décimas ("redondeándose" la última en el caso de que la cifra de las centésimas fuese 5 o mayor que,5). Así, p.ej. nuestra máquina de calcular nos ha dado como valor final de la aceleración de la gravedad:

$$g = 9.81357296321 \text{ m/s}^2$$

y sabemos que su error absoluto es  $\Delta g = \pm 0,2 \text{ cm/s}^2$ . En este caso, el resultado deberá ser:

$$g = 9.814 \text{ m/s}^2$$

Si el error absoluto hubiese sido  $\Delta g = \pm 12,3 \text{ cm/s}^2$  el resultado sería  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

En general, el resultado final deberá ir acompañado del tanto por ciento de error estimado. En el primer caso anterior sería:

$$\frac{\Delta g}{g} * 100 = \frac{0.002}{9.814} * 100 \cong 0.02 \%$$

y se escribiría:

$$g = 9.814 \text{ m/s}^2 (\pm 0.02 \%)$$

#### Ejemplo:

Calcular el módulo de rigidez  $\eta$  de un alambre al ser torsionado, y su error correspondiente, a partir de la expresión:

$$\eta = \frac{8\pi I_0}{r^4} \frac{h}{T^2} \quad (0-16)$$

donde h es la longitud y r el radio del alambre. El periodo de oscilación es T e  $I_0$  el momento de inercia de la barra cilíndrica que pende del extremo del alambre, perpendicular a él, respecto a un eje que pasa por su punto medio, y cuyo valor es:

$$I_0 = \frac{1}{12} M (L^2 + 3R^2)$$

donde M es la masa, L la longitud y R el radio de la barra cilíndrica. Sabiendo que::

a) El radio del alambre se ha medido con un palmer:

$$r = 1.00 \pm 0.01 \text{ mm}$$

b) La altura del alambre se ha medido con una regla sencilla dividida en milímetros:

$$h = 50.0 \pm 0.2 \text{ cm}$$



- c) El valor medio del periodo calculado para una serie de medidas ha sido  
 $T = 2.01$  s. y su error cuadrático medio de 0.05 seg.
- d) La longitud de la barra medida con una regla es:  
 $L = 20.0 \pm 0.1$  cm.
- e) La masa se ha calculado con una balanza de poca sensibilidad, teniéndose que:  
 $M = 200 \pm 1$  gramos
- f) El radio de la barra cilíndrica se ha medido con un calibrador normal:  
 $R = 10.0 \pm 0.1$  mm

Solución:

Al diferenciar la ecuación (0-17) será:

$$dI_0 = \frac{1}{12} (L^2 + 3 R^2) dM + \frac{M}{12} (2L dL + 6R dR)$$

y por tanto su error absoluto es:

$$\Delta I_0 = \frac{1}{12} (L^2 + 3 R^2) \Delta M + \frac{M}{6} (L \Delta L + 3R \Delta R)$$

sustituyendo valores numéricos:

$$\begin{aligned} \Delta I_0 &= 101 \text{ gr.cm}^2 \\ I_0 &= 6716.7 \text{ gr.cm}^2 \end{aligned}$$

el tanto por ciento de error cometido en la determinación del momento de inercia  $I_0$  es:

$$\frac{\Delta I_0}{I_0} = \frac{101}{6716.7} * 100 = 1.5 \%$$

Puesto que el error absoluto de  $I_0$  afecta a la cifra de las centenas, es totalmente absurdo dar las cifras de las decenas, unidades y decimales, de forma que el resultado se expresa:

$$I_0 = 6.7 \cdot 10^3 \text{ gr cm}^2 (\pm 1.5 \%)$$

Para calcular el error del módulo de rigidez del alambre, se toman logaritmos neperianos y se diferencia:

$$\ln \eta = \ln 8\pi + \ln I_0 + \ln h - 4 \ln r - 2 \ln T$$

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{\Delta I_0}{I_0} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{4 \Delta r}{r} + \frac{2 \Delta T}{T}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$\eta = 210.5 \cdot 10^8 \text{ gr.cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = 0.109$$

El error absoluto de  $\eta$  es:

$$\Delta\eta = 210.5 \cdot 10^8 \cdot 0.109 = 23 \cdot 10^8 \text{ gr cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

La cifra de las decenas del módulo de rigidez está ya afectada por el error, luego el valor final debe ser:

$$\eta = 2.1 \cdot 10^{10} \text{ gr.cm}^{-1} \text{ s}^{-2} (\pm 11 \%)$$

### 0.3 METODOS ANALITICOS DE AJUSTE DE CURVAS

Siempre que sea posible deben exponerse los datos en forma de tabla, encabezándose esta con el nombre de la magnitud, su símbolo y unidades. Así, p.ej.:

Tensión V (* 10 <sup>3</sup> V)	Intensidad I (mA)
17.1	324
25.7	516
.....	.....

Muy frecuentemente al representar estos valores en una gráfica es posible deducir consecuencias inmediatas a la vista de ella. Sin embargo, a fin de conseguir un mayor rigor, existen diversos métodos analíticos para ajustar los datos experimentales a determinadas funciones matemáticas, procurando que estas se acerquen lo más posible a todos los puntos.

#### 0.3.1 Ajuste por mínimos cuadrados

El razonamiento teórico que aquí se desarrolla supone una variación lineal de la función. Asimismo, y para mayor sencillez, supondremos que:

- la incertidumbre afecta solo a las ordenadas Y. (Es decir, supondremos que las abscisas X se conocen... ¡sin error!)
- todas las  $y_i$  tienen igual "calidad". Es decir, no hay puntos "mejores" y "peores", sino que todos tienen igual "peso".

Tomaremos como postulado que:

*"El valor más probable de una magnitud observada, es tal que la suma de los cuadrados de las desviaciones de estas medidas debe ser mínima".*

El objetivo es, entonces, calcular los parámetros a y b de la función lineal:

$$y = a x + b \quad (0-18)$$

que más se aproxima a los puntos experimentales:

Debido a la imprecisión de las medidas, la diferencia  $y_i - a x_i - b$  no es cero, como debería ocurrir si no hubiera error. La llamaremos  $d_i$ , de modo que:

$$d_i = y_i - a x_i - b \quad (0-19)$$

De acuerdo con el anterior postulado, la función más probable será aquella que consiga que el término  $\sum d_i^2$  sea mínimo. Por tanto:

$$\begin{aligned} d_i^2 &= y_i^2 + a^2 x_i^2 + b^2 + 2 a b x_i - 2 b y_i - 2 a x_i y_i \\ \sum d_i^2 &= \sum y_i^2 + a^2 \sum x_i^2 + n b^2 + 2 a b \sum x_i - 2 b \sum y_i - 2 a \sum x_i y_i \end{aligned}$$

donde  $n$  representa el número total de puntos.

Utilizando el método de Legendre para imponer la condición de mínimo, debe verificarse que:

$$\frac{\partial}{\partial a} (\sum d_i^2) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial b} (\sum d_i^2) = 0 \quad (0-20)$$

Luego:

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i \quad (0-21)$$

$$a \sum x_i + b n = \sum y_i \quad (0-22)$$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas  $a$  y  $b$ , que resuelto da:

$$a = \frac{n (\sum x_i y_i) - (\sum x_i) (\sum y_i)}{n (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (0-23)$$

$$b = \frac{(\sum y_i) (\sum x_i^2) - (\sum x_i) (\sum x_i y_i)}{n (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (0-24)$$

Es interesante destacar que cuando se trabaja con valores medios:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} \quad (0-25)$$

se verifica que:

$$\bar{y} = a \bar{x} + b \quad (0-26)$$

Es decir, *¡la recta más probable debe pasar precisamente por el punto medio  $(\bar{x}, \bar{y})$*

Desde un punto de vista práctico, lo más aconsejable es calcular la pendiente de la recta haciendo uso de la ecuación (0-23) y la ordenada en el origen a partir de la (0-26):

$$b = \bar{y} - a \bar{x} \quad (0-27)$$

El cálculo del error con que se conocen estos parámetros a y b, excede los límites de esta exposición, pudiendo acudir a textos especializados <sup>(2)</sup>, donde se demuestra que:

el error cuadrático medio de a: 
$$\Delta a \cong \sqrt{\frac{A}{\sum (D_i^2)}} \quad (0-28)$$

el error cuadrático medio de b: 
$$\Delta b \cong \sqrt{A \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (D_i^2)} \right)} \quad (0-29)$$

donde  $A = \frac{\sum d_i^2}{n-2}$  y  $\sum (D_i^2) = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum (x_i^2) - n \bar{x}^2$  (0-30)

Cuando se tiene la certeza de que el origen es un punto de la recta, el ajuste debería ser entonces con la función:

$$y = a x \quad (0-31)$$

Razonando del mismo modo que en el caso anterior:

$$d_i = y_i - a x_i$$

$$\sum d_i^2 = \sum y_i^2 + a^2 \sum x_i^2 - 2 a \sum x_i y_i$$

Imponiendo la condición de mínimo:  $\frac{\partial}{\partial a} (\sum d_i^2) = 0 \Rightarrow a \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$

en definitiva: 
$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad (0-32)$$

Es interesante destacar que si en el caso anterior:  $y_i = a x_i + b$  restamos  $\bar{y}$  a los dos términos, y tenemos presente la (0-26), quedaría:

$$y_i - \bar{y} = a x_i + b - (a \bar{x} + b) = a (x_i - \bar{x})$$

o bien

$$D_{yi} = a D_{xi} \quad (0-33)$$

En otras palabras, si en vez de representar las parejas de puntos  $(x_i, y_i)$ , representásemos las desviaciones respecto al valor medio  $(D_{xi}, D_{yi})$  se obtendría una recta que pasa por el origen cuya pendiente es precisamente **a**, a la que puede aplicarse la expresión (0-32):

$$a = \frac{\sum D_{xi} D_{yi}}{\sum D_{xi}^2} \quad (0-34)$$

esta sería, pues, una expresión equivalente a la (0-23), que permite calcular la pendiente de la recta a partir de las desviaciones de los puntos respecto al punto medio.

<sup>(2)</sup> Squires, *Física Práctica*, pag. 205, Ed. Mc-Graw Hill, (1972),

“*Practical Physics*”, Cambridge Univ. Press (3ª ed. 1985)

Barford, N.C. “*Experimental measurements: precision, error and truth*”, p.67, Ed. John Wiley and Sons, (1985)

### 0.3.2 Correlación:

Cuando al representar los puntos  $(x_i, y_i)$  se observa una cierta relación lineal entre ellos se dice que existe una correlación entre  $x$  e  $y$ . Asimismo, se define <sup>(3)</sup> el "coeficiente de correlación" como:

$$r = \frac{s(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (0-35)$$

donde  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son las desviaciones estándar:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum D_{xi}^2}{n}} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum D_{yi}^2}{n}} \quad (0-36)$$

y  $s(x, y)$  la covarianza:

$$s(x, y) = \frac{\sum D_{xi} D_{yi}}{n} \quad (0-37)$$

Sustituyendo (0-36) y (0-37) en (0-35):

$$r = \frac{\sum D_{xi} D_{yi}}{\sqrt{\sum D_{xi}^2 \sum D_{yi}^2}} \quad (0-38)$$

que puede expresarse en función de la pendiente,  $a$ , de la recta de "regresión" (recta que pasa más próxima a los puntos):

$$\begin{aligned} \sum D_{xi} D_{yi} &= \sum (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y}) = \sum (x_i y_i - \bar{x} y_i - \bar{y} x_i + \bar{x} \bar{y}) = \sum x_i y_i - \bar{x} \sum y_i - \bar{y} \sum x_i + n \bar{x} \bar{y} = \\ &= \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i}{n} \sum y_i - \bar{y} n \bar{x} + n \bar{x} \bar{y} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i}{n} \sum y_i = \frac{a}{n} \Delta_x \end{aligned} \quad (0-39)$$

$$\begin{aligned} \sum D_{xi}^2 &= \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum (x_i^2 - 2 \bar{x} x_i + \bar{x}^2) = \sum x_i^2 - 2 \bar{x} \sum x_i + n \bar{x}^2 = \\ &= \sum x_i^2 - 2 \frac{\sum x_i}{n} \sum x_i + n \left( \frac{\sum x_i}{n} \right)^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = \frac{\Delta_x}{n} \end{aligned} \quad (0-40)$$

$$\sum D_{yi}^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = \frac{\Delta_y}{n} \quad (0-41)$$

donde:  $\Delta_x = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$   $\Delta_y = n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2$

sustituyendo en (0-38) 
$$r = \frac{a \Delta_x}{\sqrt{\Delta_x \Delta_y}} = a \sqrt{\frac{\Delta_x}{\Delta_y}} \quad (0-42)$$

$$r = a \sqrt{\frac{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)(n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2)}} \quad (0-43)$$

que son expresiones más habituales para calcular el coeficiente de correlación.

---

<sup>(3)</sup> Sánchez del Rio, C. "Análisis de errores", Eudema Universidad, Madrid, (1989)

El coeficiente de correlación  $r$  tiene un rango de 0 a 1. Cuando  $r=0$  no existe ninguna correlación entre  $x$  y  $y$ , en tanto que cuando  $r=1$  el ajuste es perfecto y la pendiente de la recta no tiene error. Por tanto, el coeficiente de correlación da una idea de la "calidad" de la relación lineal que exista entre  $x$  y  $y$ , siendo tanto mejor cuánto más próximo sea a 1.

Resulta interesante conocer la relación entre el coeficiente de correlación,  $r$ , y el error cuadrático medio de la pendiente,  $\Delta a$ .

De la expresión (0-28) sabemos que  $\Delta a \cong \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2) \sum (D_{xi}^2)}}$

$$\begin{aligned} \sum d_i^2 &= \sum (y_i - a x_i - b)^2 = \sum (D_{yi} - a D_{xi})^2 = \sum D_{yi}^2 - 2a \sum D_{yi} D_{xi} + a^2 \sum D_{xi}^2 = \\ &= \sum D_{yi}^2 \left( 1 - 2a \frac{\sum D_{yi} D_{xi}}{\sum D_{yi}^2} + a^2 \frac{\sum D_{xi}^2}{\sum D_{yi}^2} \right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las expresiones: (0-39), (0-40), (0-41) y (0-42)

$$\sum d_i^2 = \sum D_{yi}^2 \left( 1 - 2a \frac{\frac{a}{n} \Delta_x}{\frac{1}{n} \Delta_y} + a^2 \frac{\frac{1}{n} \Delta_x}{\frac{1}{n} \Delta_y} \right) = \sum D_{yi}^2 \left( 1 - a^2 \frac{\Delta_x}{\Delta_y} \right) = \sum D_{yi}^2 (1 - r^2)$$

Por tanto:

$$\Delta a \cong \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2} \frac{\sum D_{yi}^2}{\sum D_{xi}^2}} \quad (0-44)$$

### 0.3.3 Método de los "pares de puntos"

El ajuste por mínimos cuadrados puede ser muy laborioso si no se disfruta de alguna máquina de calcular. En la práctica puede hacerse uso del método que a continuación detallamos, mucho más simple y rápido.

Supongamos que se han obtenido 8 puntos que están aproximadamente en línea recta, como se observa en la figura 1-4. Los numeramos de 1 a 8 y los agrupamos en parejas de la siguiente forma:

1	-----	5
2	-----	6
3	-----	7
4	-----	8

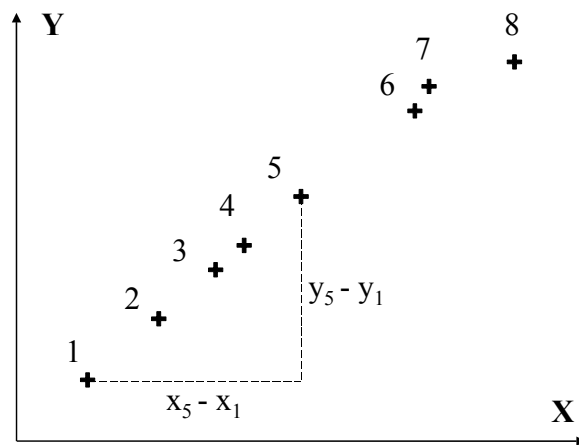


Figura 0.4

Calculemos las pendientes de las líneas que unen los pares de puntos:

$$a_1 = \frac{y_5 - y_1}{x_5 - x_1} ; \quad a_2 = \frac{y_6 - y_2}{x_6 - x_2} ; \quad a_3 = \frac{y_7 - y_3}{x_7 - x_3} ; \quad a_4 = \frac{y_8 - y_4}{x_8 - x_4}$$

Se tomará como mejor valor de la pendiente el valor medio de las  $a_i$  :

$$a = \frac{\sum a_i}{n'}$$

donde  $n'$  representa el número de pares de puntos (en el ejemplo anterior: 4)

Si el número de medidas es impar, se prescinde generalmente de la medida central; así, p.ej. si se han hecho once medidas, se suprimiría la sexta. Sin embargo, cuando no es muy alto el número total de medidas, conviene no quitar ningún punto; en ese caso, es mejor incluir el central en ambos sectores. Si hubiesen sido siete las medidas experimentales realizadas, las parejas habrían quedado de la forma siguiente:

$$1 - 4 ; \quad 2 - 5 ; \quad 3 - 6 ; \quad 4 - 7$$

La ordenada en el origen se calcula una vez conocida la pendiente de la recta  $a$ , haciendo uso de la expresión (0-26):

$$b = \bar{y} - a \bar{x} \quad (0-45)$$

Es decir, una vez calculada la pendiente media de la recta, se obliga a esta a pasar por el punto medio  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

El error de la pendiente  $\Delta a$  se calculará buscando el error cuadrático medio de las pendientes  $a_i$

El error de la ordenada en el origen  $b$ , puede hacerse de dos modos:

- 1º) Una vez conocida la pendiente media  $a$  se calcula el valor de  $b$  para cada uno de los puntos experimentales:  $b_i = y_i - a x_i$  y a partir de ellos su error cuadrático medio correspondiente.
- 2º) De un modo aproximado se cumple que:

$$\Delta b \cong \bar{x} \Delta a$$

donde  $\bar{x}$  es el valor medio de las  $x_i$

## 0.4 GRAFICAS

Las gráficas tienen una utilidad excepcional en el trabajo experimental. Constituyen una "ayuda visual" de gran interés en la presentación de resultados y, en muchas ocasiones, permiten aventurar modelos teóricos que justifiquen la variación que se observa en la gráfica de la magnitud física que se representa.

Cuando la variación es lineal la gráfica puede ser una herramienta de interés en un cálculo rápido de la pendiente y de la ordenada en el origen; parámetros que acostumbra a estar relacionados directamente con diversas constantes físicas del experimento, y cuyo conocimiento permite encontrar con frecuencia alguna relación empírica entre dos magnitudes físicas, cuya dependencia teórica se desconoce.

A continuación daremos algunas normas para la representación de gráficas:

- 1.- En los experimentos se acostumbra a variar una cierta magnitud física (variable independiente) y determinar el efecto que se produce en otra (variable dependiente). En resumen, la "causa" va en abscisas y el "efecto" en ordenadas.
- 2.- Las escalas deben elegirse de modo que los puntos experimentales queden lo más espaciados posibles. El origen de la gráfica no tiene por qué ser precisamente el punto (0,0), ni las escalas del eje X y del eje Y tienen que ser obligadamente las mismas. Así, p.ej. la gráfica de la fig 0.5b tiene mejor elegidas las escalas que la fig 0.5a y permite ver mejor la disposición de los puntos experimentales.

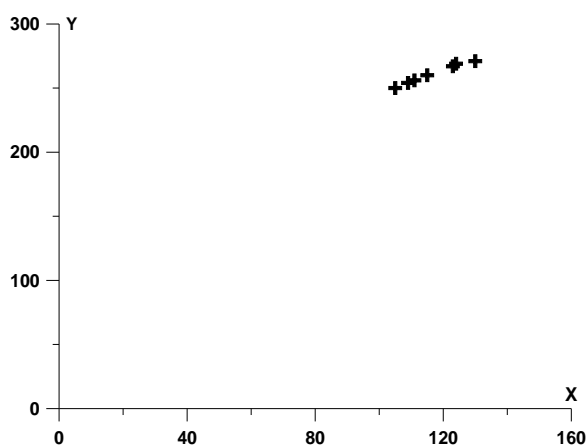


Figura 0.5a

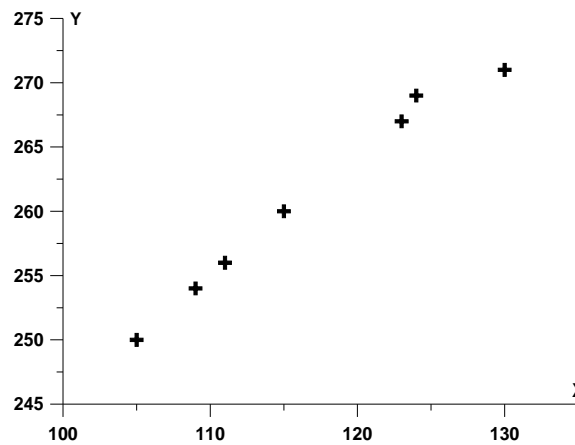


Figura 0.5b

- 3.- En general, las gráficas deben ser representadas con el tamaño adecuado a la precisión de sus resultados experimentales. Podríamos decir que las gráficas son como fotografías. Si se hacen en papel muy pequeño, no se aprecian apenas los defectos, ... pero tampoco los detalles. Sin embargo, si se amplia a gran tamaño, las figuras serán mayores, ...pero también aumentan los defectos que pudieran existir. ¿Hasta donde, entonces, deberíamos ampliarla? Esto depende de la calidad de la máquina fotográfica, del negativo, de la ampliadora, de la calidad del papel, etc., en una palabra: de la precisión experimental con que se haya trabajado.



- 4.- La escala elegida debe ser cómoda. Tomar un factor de 3.7 p.ej. es un trabajo penoso, pues cada valor habrá que adaptarlo con esfuerzo a la nueva escala. En cambio, si el factor es un número entero (2, 5, 10... preferiblemente), la operación puede hacerse directamente de memoria.
- 5.- Los puntos que se representan en la gráfica no deben ir acompañados de líneas horizontales y verticales, como indica la Figura 0.6. Basta con representar simplemente los puntos, bien con un aspa x, bien con un pequeño círculo o, bien con cualquier otro convenio.

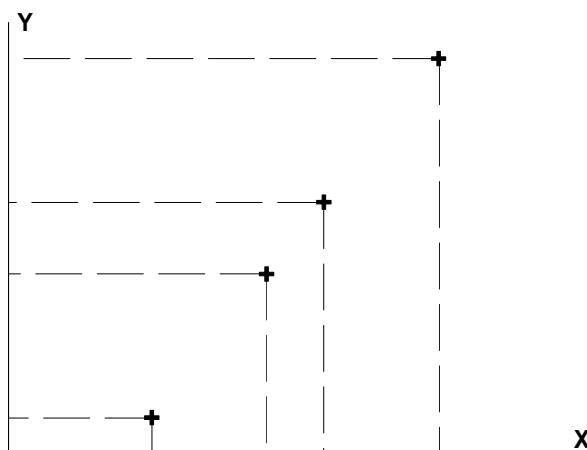


Figura 0.6a

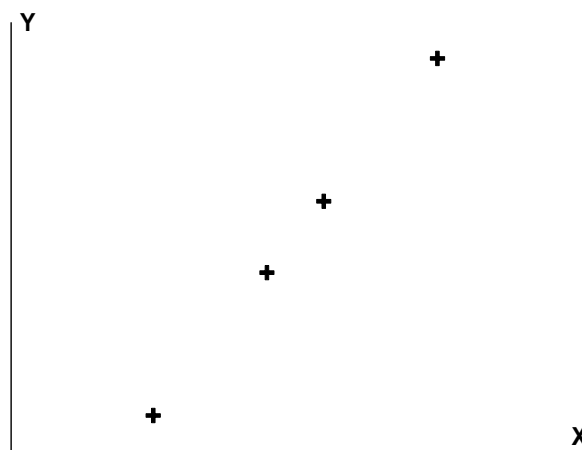


Figura 0.6b

En ocasiones, puede ser muy interesante que las gráficas se hagan sobre papel milimetrado, o al menos cuadrículado

- 6.- Las magnitudes físicas tienen unidades, por lo que es fundamental que en los ejes de coordenadas se indique la magnitud física que se representa y su unidad correspondiente.

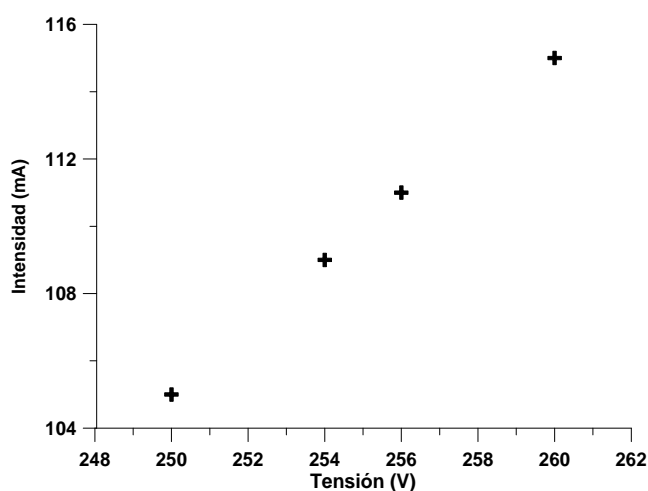


Figura 0.7

- 7.- Si al representar los puntos se observa que estos siguen una ley aproximadamente lineal, se dibuja con una regla la línea recta que pasa más próxima a todos. Si la variación no es lineal, entonces con un poco de habilidad se dibujará a mano alzada, o con plantilla, la curva que pase más cerca de ellos. ¡No los una jamás dos a dos! Recuerde que, salvo raras ocasiones, las leyes en Física no siguen variaciones "a saltos", sino continuas. Hoy día, muchas gráficas se representan con programas informáticos que unen los puntos sucesivos con pequeños segmentos, dando la imagen de una poligonal, que no tiene ninguna realidad física. En la mayoría de estos casos, sería preferible representar únicamente los puntos, sin líneas que les unan.

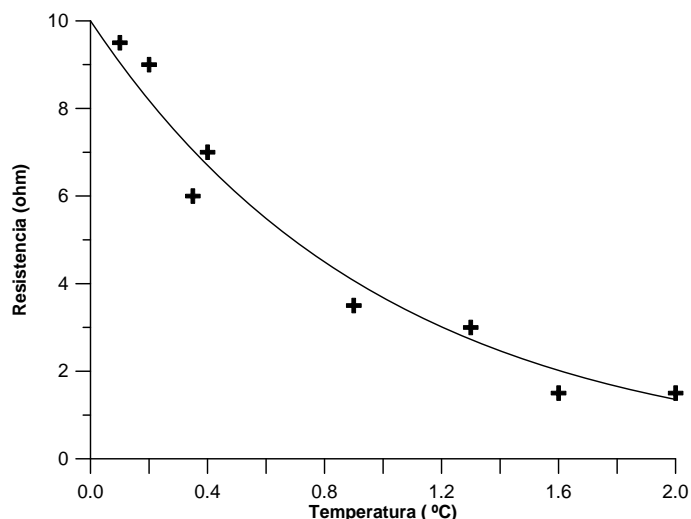


Figura 0.8

- 8.- Los puntos experimentales deben verse siempre con claridad. Cuidado, pues, al dibujar la curva para que no queden enmascarados.
- 9.- Cuando la variación es lineal, resulta muy interesante calcular la pendiente de la recta. En este caso se eligen dos puntos de ella muy separados (no tienen por qué coincidir con los puntos experimentales), y se dibujan las líneas a trazos que los unen con los ejes de coordenadas (V. fig.0.9). Se determina el valor del tramo vertical de acuerdo con la escala elegida en ordenadas y el del tramo horizontal con la escala de las abscisas

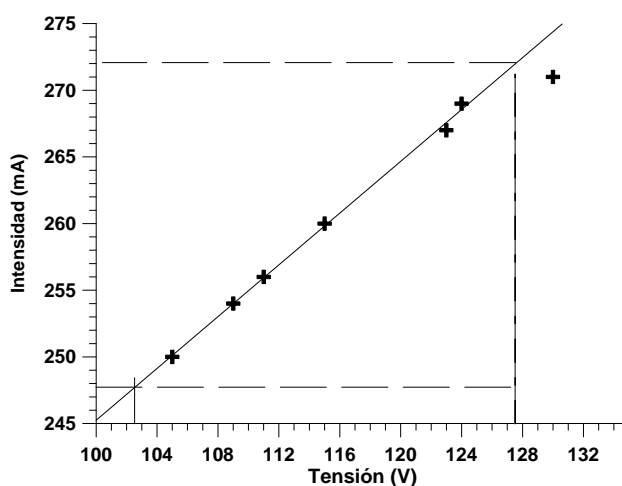


Figura 0.9

$$\frac{1}{R} = \frac{(272 - 248) 10^{-3}}{127.5 - 102.5} \text{ ohm}^{-1} = \frac{24 10^{-3}}{25} \text{ ohm}^{-1} = 0.96 10^{-3} \text{ ohm}^{-1}$$

Ejemplo:

Un resistor se calienta de forma que su resistencia varía según muestra el siguiente cuadro de valores:

Temperatura, t (°C)	Resistencia, R (ohm)
0	163
10	178
20	197
30	210
40	231
50	245

Dibujar la gráfica correspondiente y calcular a partir de ella el valor del coeficiente  $\alpha$ .

Dato:  $R = R_0(1 + \alpha t)$

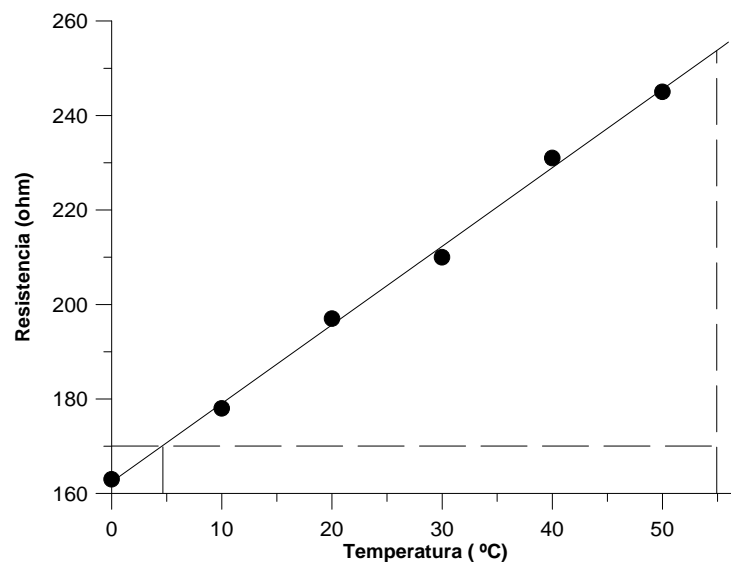
Solución

Figura 0.10

$$pendiente = \frac{255 - 170}{55 - 4.5} \frac{ohm}{^{\circ}C} = \frac{85}{51.5} \frac{ohm}{^{\circ}C} = 1.65 \frac{ohm}{^{\circ}C}$$

La función lineal es:  $R = a t + b$

A partir de la gráfica se ha determinado la pendiente:  $a = 1.65 \text{ ohm}/^{\circ}C$

La ordenada en el origen se calcula a partir de la expresión:  $b = \bar{R} - a \bar{t}$

De la tabla, se calcula el valor medio de la resistencia:  $\bar{R} = 204 \text{ ohm}$  y el valor medio de la temperatura:  $\bar{t} = 25 \text{ }^{\circ}C$

A partir de estos valores:  $b = 162.75 \text{ ohm}$

Comparando estos resultados con la expresión del enunciado:  $R_0 = b = 162.75 \text{ ohm}$

$$R_0 \alpha = a \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1.65/162.75 = 0.0101 \text{ }^{\circ}C^{-1}$$

## 0.5 MEDIDA DE LONGITUDES Y ÁNGULOS

### Material

Un palmer. Un calibrador. Un esferómetro. Un goniómetro.

### Objeto

Conocimiento del nonius.

Manejo del palmer, calibrador, esferómetro y goniómetro

### Teoría

En la vida real se utilizan algunos aparatos de medida (relojes, reglas, balanzas etc.) que poseen una escala sobre la que se desplaza un índice. El procedimiento de medida se puede llamar analógico para distinguirlo del digital donde aparece el resultado en forma de una serie de cifras. La lectura analógica se efectúa contando el número de divisiones de la escala y se considera como precisión de la medida la división más pequeña de la escala. La citada precisión puede variar mucho de unos casos a otros, pero es evidente que en el Laboratorio de Física, deben emplearse medios para mejorarla. El objetivo de esta práctica es llegar a conocer el manejo de algunos aparatos de medida, saber interpretar correctamente los resultados de las medidas y mejorar en lo posible, la precisión de éstas.

Muchos instrumentos de medida poseen una pequeña escala móvil (nonius) que desliza sobre otra escala fija, y con la cual es posible mejorar la precisión de la medida. En efecto, supongamos que  $N$  es el número de divisiones del nonius tal que superpuesto sobre la escala fija equivale a  $N - 1$  divisiones de la misma. Se deduce que cada división del nonius equivale a  $\frac{N - 1}{N}$  divisiones de la escala fija. Se dice entonces que la precisión del nonius es

$$p = 1 - \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}$$

### 1<sup>er</sup> Ejemplo:

Cuando la escala fija está dividida en milímetros y el nonius tiene 10 divisiones correspondientes a 9 milímetros, cada división del nonius equivale a 0,9 mm y la precisión del mismo es:

$$\frac{1}{10} = 0,1 \text{ mm.}$$

Para operar con un nonius se seguirán los siguientes pasos:

- 1º) Tomar la lectura indicada en la escala principal por la división cero del nonius
- 2º) Comprobar cual es la división más pequeña de la escala fija (generalmente son milímetros)

- 3º) Conocer la precisión del nonius. Para ello se mira el número de divisiones del nonius N y entonces  $1/N$  es la precisión
- 4º) Observar cual es la división del nonius que coincide con una de la escala fija; este número multiplicado por la precisión del nonius, proporciona la fracción correspondiente. La fracción se agrega a la lectura efectuada en el apartado 1º.

2º Ejemplo:

Consideremos el caso en que la lectura del nonius es tal como se muestra en la fig.0.11.

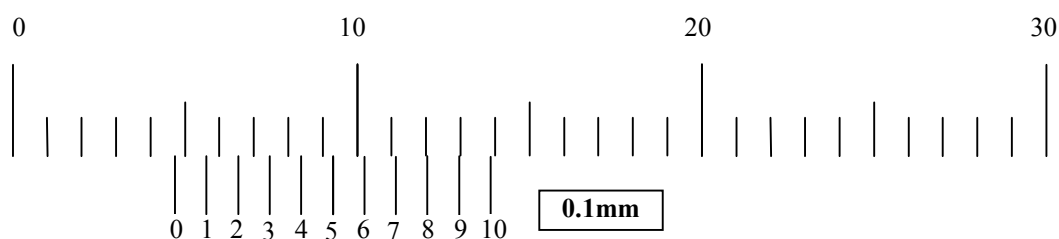


Figura 0.11

- a) El cero del nonius está situado entre 4 y 5 de la escala fija, que supondremos milímetros. De momento se anota 4 como resultado de la lectura.
- b) En este caso  $N = 10$ , luego la precisión del nonius será  $1/10$  mm.
- c) La división 8 del nonius coincide exactamente con una de la escala fija (la de 12 mm.). Luego la medida de dicha magnitud es

$$4 + 8 \times \frac{1}{10} = 4.8 \text{ mm.}$$

3º Ejemplo: (Ver Fig. 0.12).

Supongamos ahora que la lectura del nonius es tal como se muestra en la fig.2.0.2

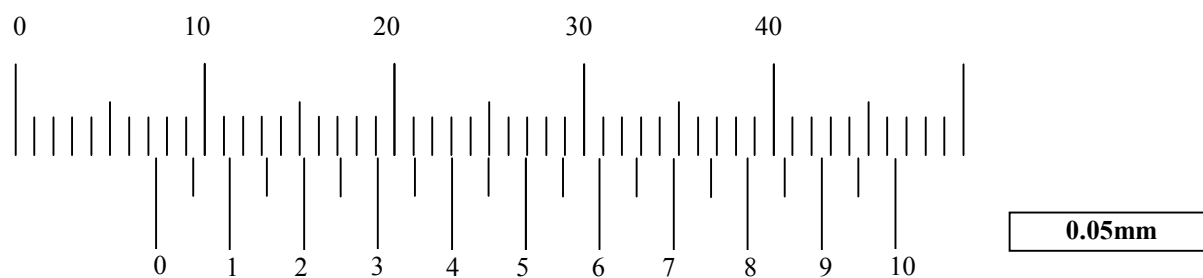


Figura 0.12

- a) El cero del nonius está situado entre 7 y 8 de la escala fija, que supondremos milímetros. De momento se anota 7 como resultado de la lectura.
- b) En este caso  $N = 20$  luego la precisión del nonius será  $1/20$  mm.
- c) La división 9 del nonius (que marca 4.5) coincide exactamente con una de la escala fija (la 25). Luego la medida de dicha magnitud es:

$$7 + 9 \times \frac{1}{20} = 7 + 0.45 = 7.45 \text{ mm.}$$

### 0.5.1 Descripción de los instrumentos

#### a) Calibrador o 'pie de rey'.

Es uno de los instrumentos más utilizados en la determinación de dimensiones del orden de centímetros o milímetros. Consiste en una escala graduada dividida en mm, y un pequeño nonius adosado a una pieza móvil que desliza sobre la primera (Figura 0.13). Para poderla desplazar será preciso que el freno de fijación esté liberado.

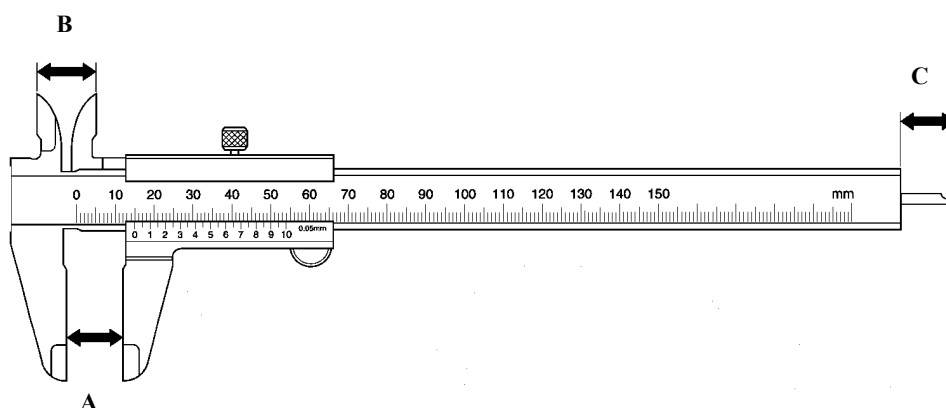


Figura 0.13

Para medir las dimensiones exteriores de un objeto se coloca éste entre las mordazas correspondientes (A). Si se pretende medir el diámetro interior de un tubo cilíndrico se hace uso de los bordes de cuchilla (B). Si lo que se pretende averiguar es la profundidad de una cavidad, se introduce la varilla del extremo hasta tocar el fondo del mismo (C). En todos los casos, la lectura se efectuará sobre el nonius de la pieza móvil.

b) Palmer.

Es un aparato de gran sensibilidad que habrá que tratar con mucho cuidado. Se utiliza para medir dimensiones muy pequeñas de un objeto, como p. ej. los espesores de láminas delgadas. (Ver Fig. 0.14).

La pieza a medir se coloca entre los extremos M y N y se gira el tambor, previa puesta de la palanca en la posición (1), hasta que el objeto quede sujeto por M y N. A continuación se coloca la palanca P en la posición (2), para dejar el tornillo micrométrico bloqueado, y se efectúa la lectura.

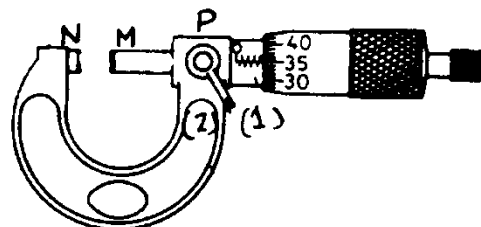


Figura 0.14

El fundamento del palmer radica en un tornillo micrométrico cuyo paso de rosca está muy bien definido. Cada vuelta completa del tornillo corresponde al avance de un paso de rosca, y está señalizado mediante un limbo graduado con N divisiones. La precisión del palmer será precisamente  $1/N$  del paso de rosca del tornillo. Generalmente, el paso de rosca suele ser de 0,5 mm y el número de divisiones de 50, luego la precisión del palmer es de  $0,5/50 = 0,01$  mm.

Es preciso tener en cuenta el *error de cero* que puede someterse en la lectura (error sistemático). En efecto, suele ocurrir que al ponerse M y N en contacto, el cero de la escala fija no coincida con el cero del tornillo como debería ser, siendo preciso tener siempre presente este error para ajustar las lecturas correspondientes, considerando que puede ser negativo (si no llega al cero) o positivo (si está por encima de él). Cada vez que se efectúa una medida se determinará el error de cero y se corregirá la lectura.

c) Esferómetro

El esferómetro (Fig. 0.15) es un instrumento de medida que consta de cuatro patas terminadas en punta, tres fijas y una móvil. Las patas fijas determinan un triángulo equilátero de lado D. La pata móvil se desplaza paralela a las fijas y pasa por el centro del triángulo; se encuentra situada en la prolongación de un tornillo que al girar hace desplazar la pata en un sentido o en otro. Existe un disco solidario con el tornillo que realiza un giro completo cuando el tornillo avanza o retrocede un paso de rosca (una división). El disco está dividido en centésimas de división que se pueden leer con facilidad. Existe una escala vertical que permite, por un lado, leer el número de divisiones desplazadas en un sentido u otro por la pata móvil y, a la vez, sirve de índice para la lectura del disco. El principio de medida es, pues, el mismo que el tornillo micrométrico. El esferómetro se utiliza para determinar el radio de las lentes esféricas.

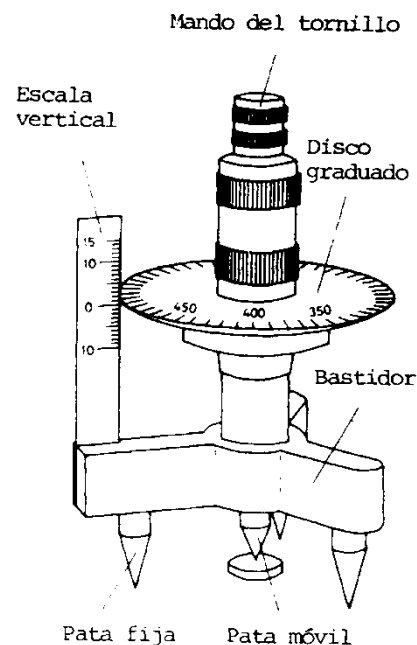


Figura 0.15

d) *Goniómetro*

Es un medidor de ángulos al que, para aumentar la precisión, se le añade un nonius. La escala fija tiene divisiones de medio grado. En caso de no existir nonius la precisión alcanzada sería de  $0.5^\circ = 30'$ . El nonius posee 30 divisiones equivalentes a 29 divisiones de la escala fija o sea a  $14^\circ 30'$ . (Fig. 0.16). Por tanto, la precisión aportada por el nonius es :

$$p = 1 - \frac{29}{30} = \frac{D}{30} = 1'$$

La medida se hace igual que con el calibre.

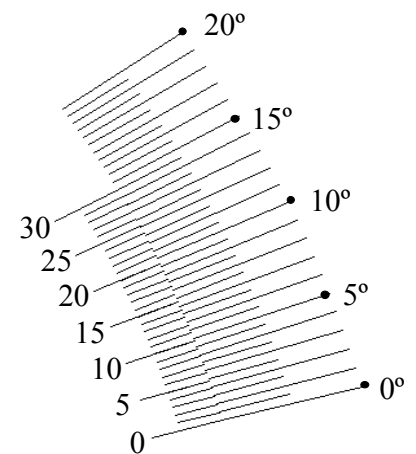


Figura 0.16

Ejemplo:

En el caso mostrado en la Fig. 0.17 la lectura del cero nos da  $126^\circ 30'$  ; por otro lado  $n = 13$  (indicado con una flecha) . Por tanto , el ángulo medido será :

$$126^\circ 30' + 13' = 126^\circ 43'$$

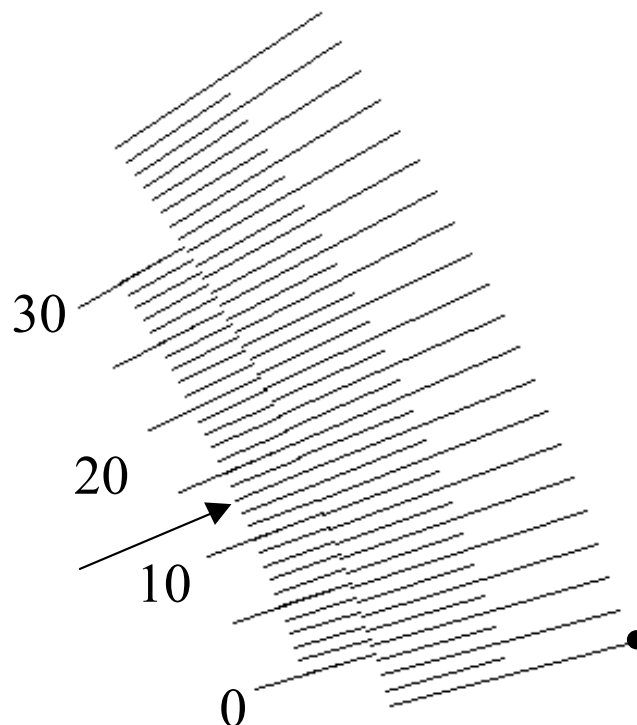


Figura 0.17



# 1. PRÁCTICAS DE MECÁNICA

## 1.1 PENDULO SIMPLE

### Material

Una pequeña bola metálica atada a una cuerda delgada. Una regla con argollas regularmente espaciadas. Un cronómetro.

### Objeto

Determinación de la aceleración de la gravedad. Deducción experimental de la fórmula teórica que rige el movimiento oscilatorio.

### Teoría

El péndulo simple consta de una masa  $m$  unida al extremo de una cuerda de longitud  $\ell$ , que mantiene el otro extremo fijo  $O$ . Dentro del campo gravitatorio la masa  $m$  tenderá a situarse en la posición vertical, que es la de energía potencial mínima.

Si suponemos que la masa es muy pequeña hasta el punto de poderse considerar puntual, la desplazamos de su posición de equilibrio y la dejamos en libertad, esta recorrerá un arco de circunferencia  $s$  y oscilará respecto a la posición vertical con un periodo  $T$ . En la figura se representa el diagrama de fuerzas que actúan sobre la masa  $m$ :

$mg$	debida a la acción del campo gravitatorio
$F_c$	o fuerza centrífuga.
$T_C$	o tensión de la cuerda

La ley de Newton aplicada al movimiento circular de la partícula a lo largo de un arco  $s = \ell \theta$ , se expresará

$$F_t = m \ddot{s} = m \ell \ddot{\theta}, \quad [1]$$

siendo la fuerza tangencial:

$$F_t = - mg \operatorname{sen} \theta \quad [2]$$

El signo negativo indica que la fuerza tangencial resultante es de naturaleza "recuperadora" (es decir la fuerza se opone siempre al desplazamiento angular  $\theta$ ).

La ecuación diferencial que se obtiene de las ecuaciones [1] y [2] es:

$$m \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = - m g \operatorname{sen} \theta \quad [3]$$

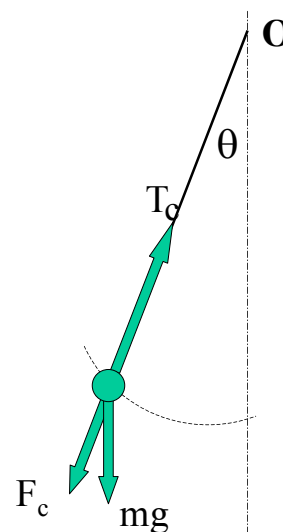


Figura 1

La resolución de esta ecuación es muy sencilla si se suponen ángulos pequeños, pues entonces :  $\text{sen } \theta \cong \theta$  <sup>(4)</sup>

y podemos simplificar [3] de la forma siguiente:

$$\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} \cong - g \theta \quad [4]$$

Probemos una solución del tipo:

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t \quad [5]$$

donde  $\theta_0$  sería el desplazamiento angular inicial, y  $\omega$  sería  $2\pi$  veces la frecuencia del movimiento.

Se tiene:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega \theta_0 \text{sen } \omega t \quad ; \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta_0 \cos \omega t$$

que sustituidas en la [4]:

$$-\ell \omega^2 \theta_0 \cos \omega t = -g \theta_0 \cos \omega t$$

de donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad [6]$$

y el periodo del movimiento será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad [7]$$

## Práctica

Colóquese la cuerda sujeta a la argolla superior de la regla (punto A).

La masa  $m$  se separa de la vertical un ángulo menor de  $14^\circ$  y se le deja oscilar libremente, midiéndose el tiempo  $t$  que invierte en realizar  $n$  oscilaciones (Advertencia I).

El periodo del movimiento será:

$$T = \frac{t}{n}$$

siendo el número  $n$  de oscilaciones completas (ida y

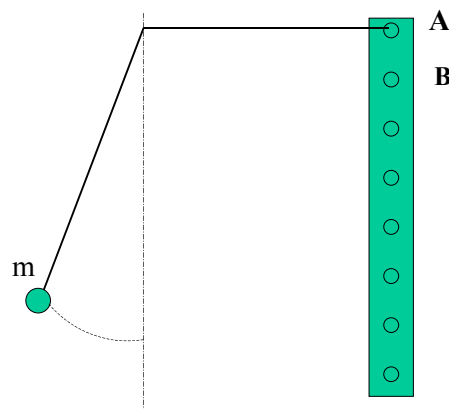


Figura 2

<sup>(4)</sup> Para ángulos menores de  $14^\circ$  el error que se comete con esta aproximación es menor del 1 %

vuelta). Véase al final la Advertencia 1 que sugiere un tiempo total del orden de 50 s para cada medida del periodo. Repítase varias veces las medidas (del orden de tres veces) y tómesese un valor medio.

Cambiando sucesivamente la cuerda a otras argollas inferiores, la longitud de la cuerda será progresivamente más corta. Si llamamos  $\ell_0$  la longitud cuando la argolla está en la posición A (posición 0), en la siguiente posición B (posición 1) se tendrá,

$$\ell_1 = \ell_0 - \Delta\ell$$

y en la posición n-ésima:

$$\ell_n = \ell_0 - n \Delta\ell \quad [8]$$

## I. Primera parte

En cada una de las posiciones marcadas se calculará el periodo de la oscilación, según se explicó anteriormente, confeccionándose una tabla de valores, tomando, al menos, 8 posiciones, como se indica a continuación:

**TABLA I**

$i$	$n \Delta\ell$ (cm)	$t$ (s)	$T$ (s)	$T^2$ (s <sup>2</sup> )
0				
1				
.....				
$n$				

Con un regla milimetrada mida  $\Delta\ell = \underline{\hspace{1cm}} \pm 1 \text{ mm}$ .

Representemos ahora la gráfica para el periodo  $T$  de la ecuación [7]

Los puntos seguirán una variación lineal  $y = a x + b$  de pendiente negativa  $a$  y de ordenada en el origen  $b$ . Sustituyendo la longitud variable del péndulo de [8] en la expresión del periodo  $T$  de [7] se obtiene, efectivamente:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \ell = \frac{4\pi^2}{g} \ell_0 - \frac{4\pi^2}{g} n \Delta\ell \quad [9]$$

Luego:

$$a = \frac{4\pi^2}{g} \quad b = \frac{4\pi^2}{g} \ell_0 \quad [10]$$

Podemos, pues, calcular estos parámetros ajustando la recta  $T^2 = f(n \Delta\ell)$  ( $y=f(x)$ , siendo:  $x = n \Delta\ell$ ,  $y = T^2$ ) por "mínimos cuadrados" o por "pares de puntos".

Atención : véase el tema 0 (apartado 3) que es la Introducción a los Métodos de Ajuste por una recta, en este Manual del Laboratorio.

En una hoja de papel milimetrado:

- 1º) represente los puntos experimentales dados por las parejas de coordenadas ( $x = n \Delta \ell$ ,  $y = T^2$ ). A continuación con los valores que ha calculado para **a** y **b**,
- 2 º) obtenga dos puntos (suficientemente separados) que cumplan la ecuación de la recta, llévelos a la gráfica y trace la recta ajustada de modo que pase por los citados puntos. A modo de verificación del ajuste, puede calcular el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  que reúne el valor medio de las  $x$  y de las  $y$ . *Estos deben encontrarse en la recta* (es una propiedad de los valores medios).

A partir a y b determine  $\ell_0$  y  $g$ :

$$g = \frac{4\pi^2}{a} \quad \ell_0 = \frac{b}{a} \quad [11]$$

El error relativo de  $g$  coincide con el error relativo de  $a$ , y el de  $\ell_0$  será:

$$\frac{\Delta \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \quad [12]$$

**.Obtenga** finalmente para este apartado :  $\left\{ \begin{array}{l} \ell_0 = ( \pm \quad ) \text{unidades} (\pm \quad \%) , \\ g = ( \pm \quad ) \text{unidades} (\pm \quad \%) \end{array} \right.$

A la vista de los valores y su error, comente brevemente si el resultado es adecuado y responde a los objetivos deseados.

## II. Segunda parte

A Galileo, que no conocía la teoría anteriormente expuesta, se le ocurrió que la relación entre los periodos y las longitudes del péndulo debía ser del tipo:

$$T = k \ell^n \quad [13]$$

donde ***k*** y ***n*** serían dos constantes. Si tomamos logaritmos se obtiene:

$$\log T = n \log \ell + \log k. \quad [14]$$

A partir de los resultados experimentales vamos a intentar averiguar el valor de  $k$  y de  $n$ . Para ello construiremos una tabla de valores del siguiente modo:

**TABLA II**

$\Delta \ell$ (cm)	$T$ (s)	$\ell = \ell_0 - \Delta \ell$ (cm)	$\log \ell$	$\log T$

donde las dos primeras columnas coinciden con los valores de la tabla anterior.

Primeramente represente en papel milimetrado los puntos experimentales dados por las parejas de coordenadas ( $x = \log \ell$ ,  $y = \log T$ ) con la finalidad de ajustarlos a una recta.

En la citada gráfica proceda al ajuste por una recta, de acuerdo con la expresión [14]:  $\log T = f(\log \ell)$  en la forma lineal  $y = a x + b$ . Al hacerlo, debe obtenerse una recta de pendiente  $a = n$  y ordenada en el origen  $b = \log k$ . Obtenga dos puntos (suficientemente separados) que cumplan la ecuación de la recta, llévelos a la gráfica y trace la recta ajustada de modo que pase por los citados puntos. A modo de verificación del ajuste, puede calcular el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  construido con los valores medios de las abscisas y las ordenadas de los puntos experimentales que representa el valor medio de  $x$  y de  $y$ . *Estos deben encontrarse en la recta* (es una propiedad de los valores medios).

Atención : véase el tema 0 de Introducción a los métodos de ajuste por una recta, en este Manual del Laboratorio.

El valor de  $n$  se puede calcular fácilmente sobre la misma gráfica, y  $\log k$  se obtendrá a continuación haciendo:

$$\log k = \log T - n \log \ell \quad [15]$$

Si tenemos en cuenta la teoría expuesta anteriormente, tomando logaritmos en la expresión para el periodo  $T$ , [8] se tendría:

$$\log T = \log \frac{2\pi}{\sqrt{g}} + \frac{1}{2} \log \ell \quad [16]$$

Luego, comparando las dos expresiones anteriores, [15] con [16], debería obtenerse:

$$k = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \quad \text{y} \quad n = 0.5$$

Por consiguiente, una vez ajustada la recta  $\log T = f(\log \ell)$  y obtenida la pendiente, juntamente con una estimación de su error, tiene que comprobarse que la citada pendiente toma un valor muy próximo a - 0.5. Finalmente, obtenga para este segundo apartado :

$$\left\{ \begin{array}{l} k = ( \pm \quad ) \text{unidades} ( \pm \quad \% ) , \\ n = ( \pm \quad ) ( \pm \quad \% ) \end{array} \right.$$

A la vista de los valores y de su error, comente brevemente si el resultado es adecuado y responde a los objetivos deseados.

## Advertencias

1°) Si hacemos un sencillo estudio de errores:  $T = t/n$   $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta n}{n}$

Considerando que es difícil que nos equivoquemos al contar oscilaciones  $\Delta n = 0$ , por tanto, el error relativo con el que conocemos el periodo resulta ser igual al error relativo del tiempo total medido con el cronómetro. Según esto, si nuestro cronómetro tiene una precisión de 0,2 s significa que para un tiempo total de 50 segundos, por ejemplo, el error cometido sería

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{0.2}{50} = \frac{4}{1000}$$

adecuado al margen de error con el que trabajamos. Luego el número de oscilaciones que hay que tomar debe ser el necesario para que el tiempo total sea del orden de 50 segundos. Es decir, si las oscilaciones son lentas,  $n$  será pequeño; pero si son muy rápidas,  $n$  deberá ser grande.

- 2°) Recuérdese que se debe trabajar siempre con oscilaciones cuya amplitud sea pequeña. ( inferiores a  $14^\circ$  )
- 3°) Para contar los tiempos, se aconseja dejar que el péndulo realice algunas oscilaciones previas y empezar a contar el tiempo cuando pase por una posición de ángulo máximo. En cualquier caso, siempre habrá que considerar el tiempo transcurrido como diferencia entre el instante final y el instante inicial.

## 1.2 PENDULO FISICO

### Material

Una barra cilíndrica dotada de una cuchilla de suspensión y un soporte deslizante. Un cronómetro. Una regla.

### Objeto

Determinación del valor de la aceleración de la gravedad y del radio de giro de la barra.

### Teoría

Consideremos un cuerpo rígido cualquiera capaz de oscilar respecto a un eje que lo atraviesa. Sea  $O$  el centro de suspensión, punto por el cual pasa el eje de giro, y  $G$  el centro de gravedad del cuerpo. Cuando  $O$  y  $G$  están en la vertical es cuando  $G$  está en su posición más baja, y el equilibrio será estable.

Al separar  $G$  un ángulo  $\theta$  de dicha posición, el cuerpo estará sometido al par

$$M = - m g h \text{ sen } \theta$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo y  $h$  la distancia  $OG$ . El signo menos indica que el par se opone siempre al desplazamiento angular,  $\theta$ , de manera que se trata de un "par recuperador" que intentará llevar al cuerpo a la posición de equilibrio.

La ecuación diferencial de movimiento del cuerpo es:

$$I_0 \alpha = - m g h \text{ sen } \theta \quad [1]$$

o bien:

$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + m g h \text{ sen } \theta = 0 \quad [2]$$

donde  $I_0$  es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje que pasa por el centro de suspensión  $O$ .

Si suponemos que los ángulos son pequeños (menores de  $14^\circ$ ), podemos hacer la aproximación  $\text{sen } \theta \approx \theta$  con lo cual la resolución de la ecuación diferencial se simplifica enormemente:

$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + m g h \theta = 0 \quad [3]$$

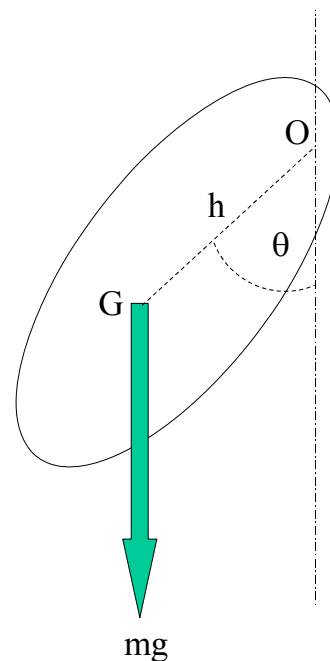


Figura 1

cuya solución es del tipo:  $\theta = \theta_0 \cos \omega t$

Para que verifique la ecuación [3] debe cumplirse que:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0 \omega \sin \omega t \quad ; \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0 \omega^2 \cos \omega t$$

$$-I_0 \theta_0 \omega^2 \cos \omega t + m g h \theta_0 \cos \omega t = 0$$

de donde se deduce que:

$$\omega^2 = \frac{m g h}{I_0} \quad [4]$$

En definitiva, el cuerpo realiza un movimiento armónico simple de periodo T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{m g h}} \quad [5]$$

Si el momento de inercia lo expresamos respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad y es paralelo al anterior, por Steiner se cumple que:

$$I_0 = I_G + m h^2 = m k^2 + m h^2 = m (h^2 + k^2)$$

siendo k el radio de giro del péndulo alrededor de G. (Se llama "radio de giro" a la distancia a la que habría que colocar una masa puntual m para que su momento de inercia respecto al eje considerado, fuera igual al momento de inercia de todo el sólido de masa m respecto a dicho eje).

La expresión [5] queda de la forma:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h^2 + k^2}{g h}} \quad [6]$$

Obsérvese que esta expresión es análoga - aunque conceptualmente diferente - a la obtenida para el péndulo simple (ec. [8]), sin más que hacer:

$$l_{eq} = \frac{h^2 + k^2}{h}$$

a la longitud  $l_{eq}$  la llamaremos "longitud equivalente del péndulo".



## Práctica

Si se separa la barra de su posición de equilibrio un pequeño ángulo y se la deja en libertad, oscilará armónicamente con periodo  $T$ . Tómese entonces el tiempo  $t$  que invierte en realizar  $n$  oscilaciones. (Ver Advertencia 1 de la práctica 1.1: "Péndulo simple").

Se repite el proceso de medida cambiando de posición el eje según diferentes posiciones  $h$  de la barra medidas desde el c.d.m. *Anote siempre dichas distancias  $h$ .* (CUIDADO:  $h$  no se mide desde el extremo de la barra, sino desde el c.d.m.).

- 1º) Con los valores obtenidos para  $T$  en función de  $h$ , represente en una hoja de papel milimetrado la gráfica  $T = f(h)$ . Debe obtenerse una variación curvilínea que presenta un mínimo en el punto donde  $h$  coincide con el radio de giro  $k$ . (fig. 2).

En efecto:

$$\frac{dT}{dh} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \frac{1 - \frac{k^2}{h^2}}{2\sqrt{l_{eq}}} = 0$$

luego  $1 - \frac{k^2}{h^2} = 0$  y por tanto  $h = k$  en el mínimo

Sin embargo, la determinación de  $g$  y  $k$  a partir de esta gráfica no es sencilla. Resulta más práctico efectuar otra representación. Para ello despejamos  $h^2$  en la ecuación [6]

:

$$h^2 = \frac{g}{4\pi^2} T^2 h - k^2 \quad [7]$$

de manera que al representar  $h^2 = f(T^2 h)$  se debe obtener una línea recta de pendiente:

$$a = \frac{g}{4\pi^2}$$

y ordenada en el origen

$$b = -k^2$$

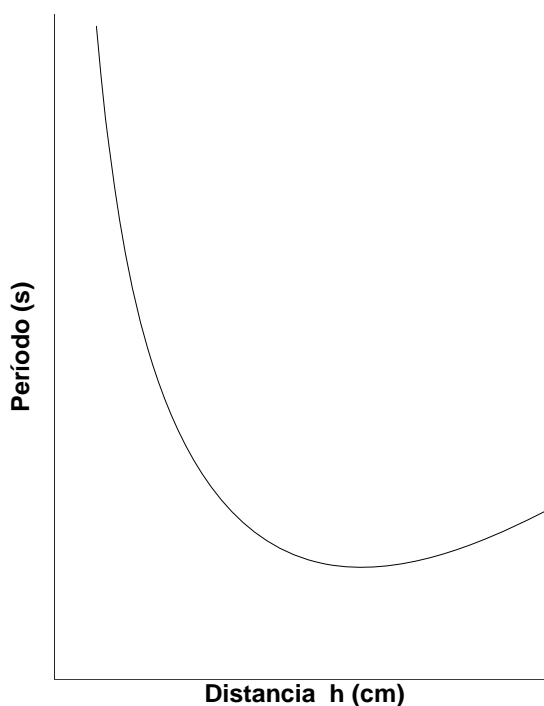


Figura 2

- 2º) En otra hoja de papel milimetrado represente gráficamente la función [7]. Los puntos experimentales vienen dados por las parejas de coordenadas  $(x = T^2 h, y = h^2)$ .

Dichos puntos seguirán una variación lineal  $y = \mathbf{a} x + \mathbf{b}$  de pendiente  $\mathbf{a}$  y de ordenada en el origen  $\mathbf{b}$ . Cuando haya calculado  $a$  y  $b$  como se indica en el siguiente apartado, obtenga dos puntos (suficientemente separados) que cumplan la ecuación de la recta, llévelos a la gráfica y trace la recta ajustada de modo que pase por los citados puntos.

A modo de verificación del ajuste, calcule el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  que reúne el valor medio de las  $x$  y de las  $y$ . Este debe encontrarse en la recta (es una propiedad de los valores medios).

Los datos con los que ajustará la recta, deben expresarse como indica la tabla siguiente:

**TABLA I**

<b>h</b> (cm)	<b>T</b> (s)	<b>T<sup>2</sup></b> (s <sup>2</sup> )	<b>h<sup>2</sup></b> (cm <sup>2</sup> )	<b>T<sup>2</sup> h</b> (cm s <sup>2</sup> )

- 3º) Calcule la pendiente  $a$  y la ordenada en el origen  $b$ . Los valores de  $a$  y  $b$  se determinarán por mínimos cuadrados o por pares de puntos.

Atención: véase el tema 0 que es la Introducción a los Métodos de Ajuste por una recta, en este Manual del Laboratorio.

- 4º) A partir de los valores de  $a$  y  $b$  se obtendrán:
- la aceleración de la gravedad  $g = 4 \pi^2 a$  [8]
  - el radio de giro  $k = \sqrt{b}$  [9]

Calcule los errores absolutos correspondientes  $\Delta g$  y  $\Delta k$ . Observe que sus errores relativos se calculan fácilmente a partir de:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta a}{a} \qquad \frac{\Delta k}{k} = \frac{1}{2} \frac{\Delta b}{b}$$

- 5º) Comparar el valor obtenido del radio de giro  $k$  (con su error), con el valor teórico:

$$k^2 = \frac{1}{12} l^2 + \frac{1}{4} R^2$$

siendo  $l$  y  $R$  la longitud y el radio de la barras, respectivamente.

### Advertencias

Las mismas que en la práctica 1.1: "Péndulo simple".

### 1.3 PENDULO DE KATER

#### Material

Una barra dividida a intervalos regulares. Dos cuchillas y dos contrapesos. Columna de soporte con U. Un cronómetro

#### Objeto

Determinación del valor de la aceleración de la gravedad y del momento de inercia de una barra.

#### Teoría

El péndulo de Kater (péndulo reversible), es un tipo de péndulo físico o compuesto. El periodo de un péndulo compuesto fue deducido en la práctica 1.2 (expresión [5]):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{M g h}} \quad [1]$$

donde:

- $M$  es la masa total del péndulo
- $I_0$  es el momento de inercia respecto al eje de giro
- $g$  es la aceleración de la gravedad y
- $h$  la distancia del centro de oscilación al centro de gravedad (c.d.m.) (Fig.2.4.1)

Por el teorema de Steiner sabemos que:

$$I_0 = I_G + Mh^2 \quad [2]$$

donde  $I_G$  es el momento de inercia respecto a un eje paralelo al eje de giro, que pasa por el centro de masas:

$$I_G = M k^2 \quad [3]$$

y  $k$  es el "radio de giro" de la barra alrededor del centro de gravedad.

Sustituyendo  $I_0$  en la expresión del periodo [1], y con ayuda de las dos expresiones anteriores, obtenemos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h^2}{gh}}$$

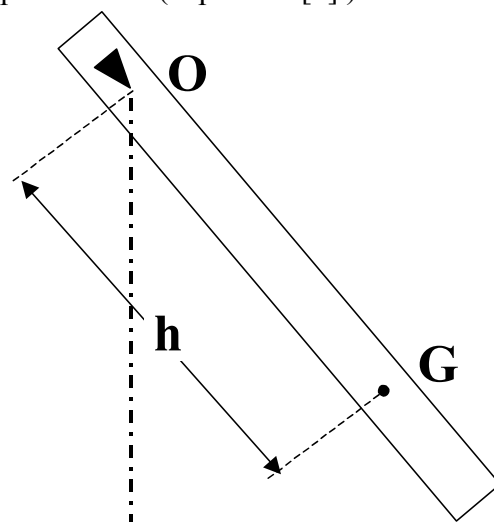


Figura 1

Si comparamos esta expresión con la del periodo de un péndulo simple:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

el periodo del péndulo compuesto sería igual al de un péndulo simple de longitud

$$l = \frac{k^2 + h^2}{h} = \frac{I_o}{Mh} \quad [4]$$

y, por tanto, esta longitud se llama longitud del péndulo simple equivalente.

Esta última ecuación puede escribirse:

$$h^2 - hl + k^2 = 0 \quad [5]$$

Y resuelta proporciona **dos valores de  $h$** :  $h_1$  y  $h_2$ , para los cuales el sistema tiene periodos iguales de oscilación. Los valores de  $h$ , soluciones de la ecuación de segundo grado, deben verificar :

$$h_1 + h_2 = l \quad [6]$$

El experimento tiene por objeto encontrar dos posiciones O y O' a un lado y otro del c. de g. de la barra para los cuales el péndulo oscile con el mismo periodo,  $T_0$  ( Fig. 2.)

La distancia entre O y G es  $h_1$  y entre O' y G es  $h_2$ ; por tanto, la distancia OO' es la suma de  $h_1$  y  $h_2$  que es “la longitud  $l$  del péndulo simple equivalente”. Conocida  $l$  podremos calcular  $g$  del modo usual (con el péndulo simple):

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2} \quad [7]$$

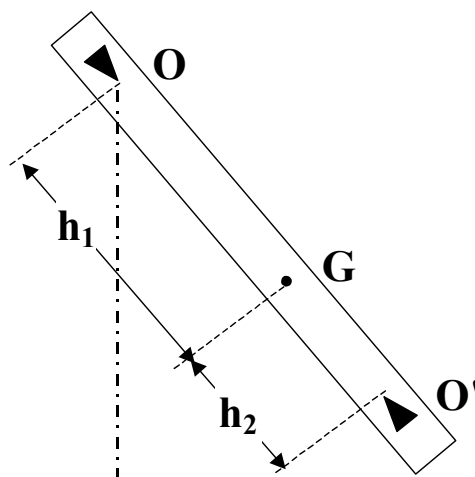


Figura 2

## Práctica

Lo característico del péndulo de Kater (Fig. 3) es que lleva *dos cuchillas* (triángulos de la figura situados en O y O') y *dos contrapesos* m y m', los cuatro elementos desplazables. Medidas experimentales sencillas permiten hallar la longitud del péndulo simple equivalente. Para ello se hace oscilar el péndulo en torno a las dos posiciones fijas O' y O manteniendo, también fija, la posición del contrapeso m'. *Se utiliza como variable la posición del contrapeso m* (ver figura 3) que se va cambiando de posición para cada medida. Se miden los periodos  $T_1(O)$  y  $T_2(O')$  para cada posición de m, que se va variando desde la ranura 1 en adelante, hasta que dichos periodos,  $T_1(O)$  y  $T_2(O')$ , se igualen.

Como ya sabemos, la longitud del péndulo simple equivalente es la distancia OO' cuando los periodos  $T_1(O)$  y  $T_2(O')$  son iguales.

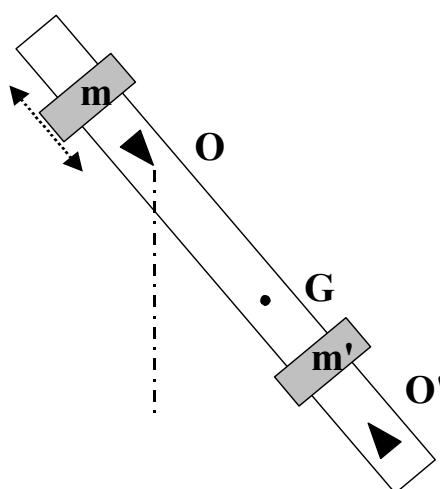


Figura 3

Con los periodos  $T_1$  y  $T_2$  debe construirse una tabla análoga a la siguiente, *variando la posición de m de 1 cm en 1 cm* :

**TABLA I**

Posición de m	$T_1(O)$	$T_2(O')$	$\Delta T$

El contrapeso m debe de centrarse, cada vez, en la ranura correspondiente.

Para obtener el periodo se debe medir un tiempo del orden de 50 s como indica la advertencia 1ª de la Práctica 1.1 "Péndulo simple".

Es importante repetir varias veces (dos o tres) el cálculo del periodo, en especial, cuando estén próximos los valores de  $T_1(O) \sim T_2(O')$ .

Cuando se igualen los periodos (dentro del error experimental) *procédase a realizar las medidas con la siguiente posición para m* y así comprobar que la anterior es, en efecto, la mejor posición de m que iguala los periodos.

## Resultados

- 1.- Dibuje el esquema del péndulo de Kater e indique claramente las posiciones de todos los elementos para la situación en que se igualan los periodos.
- 2.- Determine los valores experimentales del periodo del péndulo de Kater  $T_0$  y de  $l$  (*periodo y longitud del péndulo simple equivalente*) y a partir de ellos obtenga  $g$  con sus unidades y el error correspondiente, mediante [7] . En los siguientes apartados *se usarán siempre los valores para la posición en la que se igualan los periodos*.
- 3.- *Calcule la posición del centro de masas del sistema, con sus unidades y su error, para esta situación.*

$$X_{c.m.} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

donde  $n=5$  representa el número de masas de que consta el péndulo : 2 contrapesos, 2 cuchillas y la propia varilla. Las posiciones  $x_i$  son las de cada una de las masas  $m_i$  *medidas desde un extremo de la varilla (que se tomará como origen)*. Es importante que pese las masas en una balanza y que mida la longitud de la varilla con una precisión de  $\pm 1$  mm.

- 4.- Calcule  $h_1 = OG$  y  $h_2 = O'G$  (ver la figura 3) sabiendo que  $l = h_1 + h_2$  y que ya conoce la posición del c.d.m. A partir de ellos, halle el radio de giro  $k$  con la expresión [5]. Observe que obtendrá dos valores,  $k_1$  y  $k_2$  para el radio de giro, uno usando  $h_1$  y el otro usando  $h_2$  . Realmente el radio de giro será el obtenido como la media de los dos valores. El error del radio de giro  $k$ , será el mayor de los dos obtenidos para  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente.
- 5.- Calcule el momento de inercia del péndulo respecto del c.d.m.  $I_G$  (con sus unidades y su error), utilizando los siguientes métodos:
  - a) usando *el radio de giro  $k$  (ya calculado en 4.-)* y aplicando su definición en la ecuación [3]. Para el error utilice propagación de errores en la propia ecuación [3] .
  - b) *teóricamente por geometría de masas*. Recuerde que el momento de inercia del péndulo de Kater respecto a un eje de rotación es la suma de los momentos de inercia de todos los elementos que lo componen respecto al citado eje, en total 5 elementos, *incluido el de la propia varilla*. Para simplificar considérese que las dos cuchillas y los dos contrapesos, son masas puntuales. Para estimar su error, use la propagación de errores en la expresión empleada para el momento de inercia.

*Nota:* recuerde que el momento de inercia de una varilla respecto de su c.d.m. (el punto medio en una varilla homogénea) es  $\frac{1}{12} m_v l^2$  (siendo  $m_v$  su masa y  $l$  su longitud).

Después debe aplicar el teorema de Steiner para calcular su momento de inercia *respecto al c.d.m. del péndulo completo* (calculado en el apdo. 4.-).

Compare los dos resultados a) y b), con sus errores, e indique si el  $I_G$  obtenido a partir de resultados experimentales apdo. a), *coincide razonablemente bien* con el  $I_G$  obtenido teóricamente en el apdo. b).

*Todos los resultados deben expresarse con el número correcto de cifras significativas e indicando sus errores absolutos y relativos.*

Incluya el cuadro resumen con los valores mas representativos de la práctica:

$\left\{ \begin{array}{ll} T_0 = ( \quad \pm \quad ) \text{unidades } (\pm \quad \%) . & l = ( \quad \pm \quad ) \text{unidades } (\pm \quad \%) , \\ g = ( \quad \pm \quad ) \text{unidades } (\pm \quad \%) . & k = ( \quad \pm \quad ) \text{unidades } (\pm \quad \%) \\ X_{c.m.} = ( \quad \pm \quad ) \text{unidades } (\pm \quad \%) . & I_G = ( \quad \pm \quad ) \text{unidades } (\pm \quad \%) \end{array} \right.$
--

### Advertencias

- Para conocer las masas de: la varilla, el contrapeso y la cuchilla., deberá utilizarse la balanza que hay en el laboratorio.
- Respecto a cómo debe medirse el periodo véase la advertencia 1ª de la Práctica 1.1 "Péndulo simple".





## 1.4 MOMENTOS DE INERCIA

### Material

Dispositivo experimental con plataforma giratoria. Pesas. Cronómetro. Barra cilíndrica.

### Objeto

Determinación del momento de inercia de una barra cilíndrica. Verificación del teorema de Steiner.

### Teoría

El dispositivo experimental consta de un disco o plataforma que gira alrededor de un eje vertical OA, arrastrado por una cuerda que le produce un par de fuerzas cuando de su extremo libre se cuelga una cierta masa M.

En el instante inicial se supone que la masa **M** (suma de la masa del platillo  $m_p$  y de la masa de la pesa añadida  $m$ ) se encuentra a una cierta altura de la mesa **h**. Cuando se deja libre el sistema, el platillo descenderá con una cierta aceleración **a**, llegando a la mesa con una velocidad **v**.

A partir del principio de conservación de la energía, se tiene que la energía potencial cedida por el platillo en su caída, debe invertirse en energía cinética del sistema y en trabajo de rozamiento:

$$M g h = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + W_r \quad [1]$$

donde  $I$  es el momento de inercia del sistema respecto al eje de giro OA,  $\omega$  es la velocidad angular del sistema cuando el platillo llega a la mesa, y  $W_r$  el trabajo de rozamiento.

Para calcular el trabajo de rozamiento es conveniente evaluar la mínima masa  $m_0$ , o lastre, que habría que añadirse al platillo para que éste descienda con velocidad constante. En este momento no habría aceleración y por tanto existiría equilibrio entre la fuerza de rozamiento  $F_r$  y el peso  $(m_p + m_0) g$ . Luego el trabajo de rozamiento sería:

$$W_r = (m_p + m_0) g h \quad [2]$$

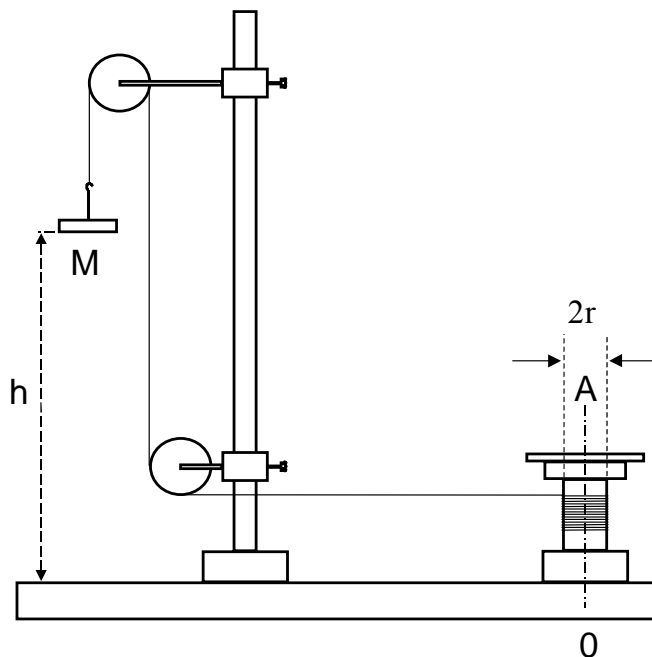


Figura 1

Podría haberse llegado a la misma conclusión a partir de la ecuación [2], pues si el sistema baja (o gira) con velocidad constante, no hay variación de su energía cinética y, por tanto, toda la disminución de energía potencial debe invertirse en trabajo de rozamiento.

Sustituyendo en la ecuación [1]  $M$  y  $W_r$  por sus valores respectivos:

$$(m_p + m) g h = \frac{1}{2} (m_p + m) v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + (m_p + m_o) g h$$

Si se supone:

- 1º) que en el instante inicial se parte del reposo:  $v^2 = 2 a h$  y
- 2º) que la cuerda arrastra perfectamente al sistema:  $\omega = v / r$ , donde  $r$  es el radio del cilindro sobre el cual se enrolla la cuerda ( ver Figura 1 ).

Al sustituir los valores anteriores en la última expresión y simplificar, queda:

$$- m_o g + m (g - a) = \left( m_p + \frac{I}{r^2} \right) a \quad [3]$$

Ahora bien, la aceleración de caída,  $a$ , puede despreciarse frente a la de la gravedad ( $g \gg a$ ), y también el término  $m_p$  frente a  $I / r^2$ , pues el momento de inercia del sistema,  $I$ , es mucho mayor que el producto  $m_p r^2$ . (Téngase presente que el momento de inercia del sistema será siempre mayor que  $1/12 m_b l^2$ , siendo  $l$  la longitud de la barra y  $m_b$  la masa de ésta).

La expresión [3] puede escribirse, entonces, con una buena aproximación, de la forma:

$$- m_o g + m g = \frac{I}{r^2} a$$

o bien:

$$a = \frac{g r^2}{I} m - \frac{g r^2}{I} m_o \quad [4]$$

que corresponde a una ecuación del tipo:

$$a = A m + B \quad (y = A x + B) \quad [5]$$

siendo la pendiente:

$$A = \frac{g r^2}{I} \quad [6]$$

y la ordenada en el origen

$$B = - \frac{g r^2}{I} m_o \quad [7]$$

## Práctica

### 1) Determinación del momento de inercia de una barra

Fíjese la barra cilíndrica a la plataforma y anótese la distancia a la que se halla el c.d.m. de la barra del eje de la plataforma

Tomando una altura de referencia,  $h$ , que corresponde a la distancia que separa la mesa de la base del platillo en el instante inicial., se mide el tiempo  $t$  que tarda en bajar el platillo cuando en él se ha colocado una masa  $m$ . A ser posible, conviene considerar siempre la misma altura  $h$ . Como tiempo de llegada puede considerarse el instante en que el platillo golpea la mesa con un toque "suave".

El cálculo de la aceleración con la que baja es inmediato a partir de estos datos:

$$a = \frac{2 h}{t^2}$$

El procedimiento experimental debe repetirse una vez más; si el valor que se obtiene es parecido al anterior, se tomará un valor medio de ambos; si fueran muy dispares, debe repetirse una tercera vez la experiencia para discernir cual de los dos valores es el mejor, tomando de nuevo el valor medio de los dos más próximos.

Se dispone de  $N$  pesas iguales. Comenzando con la primera, se repite el proceso con la  $N$  pesas. La tabla de valores debe ser análoga a la siguiente:

Altura  $h$ :                      Radio del eje  $r =$                        $\Delta r =$

Masa de una pesa  $m_u =$                        $\Delta m_u =$

**TABLA I**

$N$	$t_1$ (s)	$a_1$ (m/s <sup>2</sup> )	$t_2$ (s)	$a_2$ (m/s <sup>2</sup> )	$a$ (m/s <sup>2</sup> )

donde  $N$  es el número de pesas que se colocan en el platillo y  $m = N m_u$ .

*Realícese el procedimiento experimental al menos para tres posiciones diferentes de la barra metálica giratoria horizontal, comenzando por la posición del c.d.m. ( posición central )*

Para cada una de las tres posiciones de la barra giratoria, represéntese la gráfica:

$$a = A m + B = A^* N + B \quad (\text{siendo } A^* = \frac{g r^2}{I} m_u),$$

correspondiente a la ecuación [5] con al menos 8 puntos de coordenadas ( $x=N$ ,  $y=a$ ).

La recta que se obtiene, se ajustará por “pares de puntos”, o por “mínimos cuadrados”, obteniendo:  $A^* \pm \Delta A^*$  y  $B \pm \Delta B$ .

Con los valores de la pendiente y la ordenada en el origen calcule además del momento de inercia correspondiente  $I$ , el lastre  $m_o$  (con sus errores correspondientes) como se indica a continuación.

Puede ocurrir que, dependiendo de su masa, el platillo por sí solo, sin ninguna masa  $m$  añadida, baje ya con cierta aceleración si se le deja libre, en ese caso la ordenada en el origen  $B$  daría positiva.

Puesto que  $A = A^* / m_u$  y  $\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta A^*}{A^*} + \frac{\Delta m_u}{m_u}$ , el valor del lastre se calcula fácilmente a partir de la ordenada en el origen  $B$ :

$$m_o = -\frac{B}{A} = \dots \text{ gramos} \quad \text{y su error: } \frac{\Delta m_o}{m_o} = \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta A}{A} = \dots$$

$$\boxed{m_o = (\dots \pm \dots) \text{ g } (\pm \dots \%)}$$

Calcule el momento de inercia de la barra:

$$I = \frac{g r^2}{A} = \dots \text{ g.cm}^2, \text{ y su error: } \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta A}{A} + 2 \frac{\Delta r}{r} = \dots$$

$$\boxed{I = (\dots \pm \dots) \text{ g.cm}^2 (\pm \dots \%)}$$

## 2) Verificación del teorema de Steiner

Según el teorema de Steiner, el momento de inercia  $I_o$  de una barra respecto a un eje perpendicular a ella, que pase por el punto  $O$ , es igual al momento de inercia de la barra respecto a un eje que pase por su centro de masas,  $I_g$  y sea paralelo al anterior, más el producto de la masa de la barra,  $m_b$ , por el cuadrado de la distancia  $x$  que separa ambos ejes. Es decir:

$$I_o = I_g + m_b x^2 \quad [8]$$

Para verificar dicho teorema, en primer lugar, determine la masa de la barra  $m_b = (\dots \pm \dots)$  gramos y sustituya en la expresión del teorema de Steiner el valor de  $I_g$  que ha obtenido en el apartado anterior cuando la barra giraba en torno al eje que pasaba por el c.d.m.. A continuación calcule con dicha ecuación para al menos dos posiciones,  $x$ , de la barra los respectivos momentos de inercia  $I_{o1}$  e  $I_{o2}$  con sus respectivos errores. *Verifique el teorema de Steiner* comparando los valores obtenidos  $I_{o1}$  e  $I_{o2}$  por sustitución directa en la ecuación, con los calculados en las medidas del procedimiento del apartado 1).

## 1.5 ESTUDIO DE LA CAÍDA LIBRE

### Material

Columna graduada dotada de dos plataformas desplazables provistas de sensores de partida y de llegada. Bolas de acero de 7, 10 y 14 mm de diámetro. Contador digital.

### Teoría

La caída libre según la vertical es uno de los fenómenos más característicos de la Física. Resultan bien conocidas las leyes temporales que regulan dicha caída correspondientes al espacio

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

donde:  $h_0$  es la altura inicial del móvil,

$h(t)$  la altura al cabo de un tiempo  $t$

$v_0$  la velocidad inicial y

$g$  la aceleración de la gravedad.

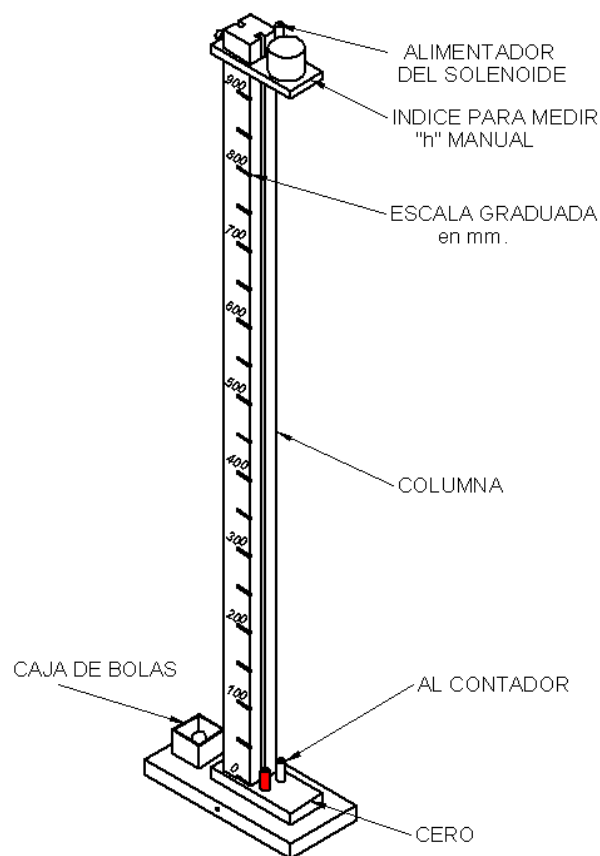
La fórmula anterior sugiere la posibilidad de determinar  $g$  si somos capaces de medir adecuadamente el resto de parámetros que figuran en la expresión.

También podemos comprobar que las leyes de caída son independientes de la masa del móvil que efectúa el movimiento de caída. En realidad siempre actúa la fuerza de fricción del móvil con el aire pero en el caso presente se debe comprobar experimentalmente que el efecto es pequeño y depende del tamaño de la bola, como se verá más adelante.

### Práctica

El objeto de la práctica es comprobar las leyes físicas de la caída libre y determinar la aceleración de la gravedad. Tomando como punto de partida la ecuación del movimiento para el espacio recorrido por la bola, se pasan a medir alturas y tiempos.

El equipo de medida consta de: 1) *Una columna vertical*, 2) *un medidor de tiempos* y 3) *una colección de bolas de diferentes masas*, como se explica a continuación.

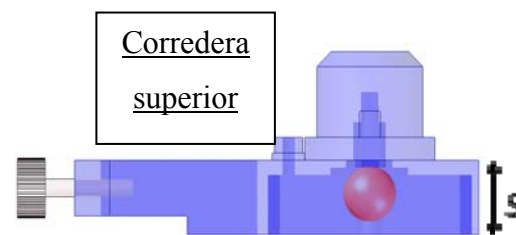


- 1) La **columna vertical** está dotada de una escala graduada en mm. La columna posee una corredera superior dotada de un tornillo de sujeción que permite situarla a cualquier altura de la misma. La corredera superior posee:
- una bobina de eje vertical que puede sujetar una bola de hierro cuando está alimentada con una corriente. Al cortar la corriente la bola queda liberada y sufre una caída libre.
  - Un índice que marca la situación inicial de la bola sobre la escala graduada.

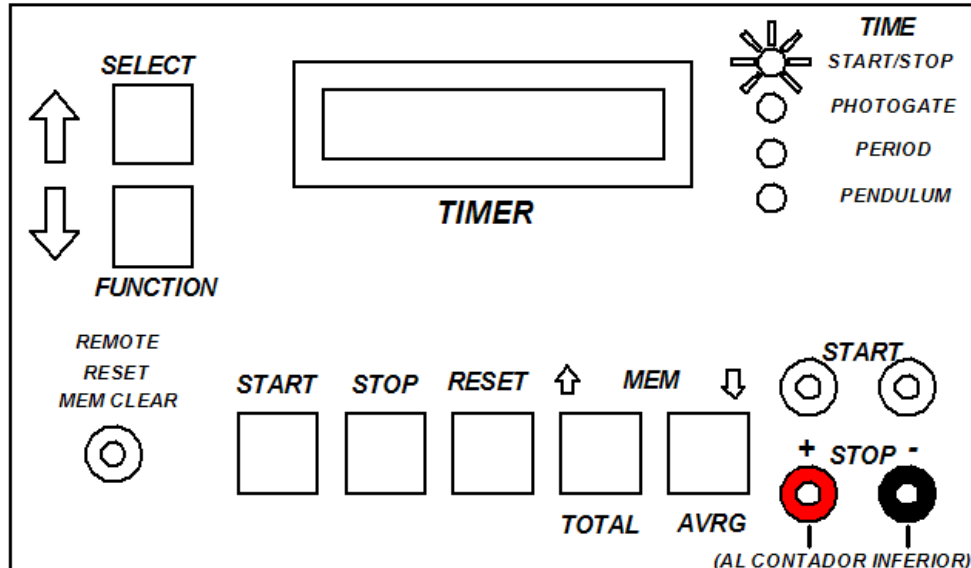
Una corredera inferior dotada de una placa de impacto donde golpea la bola al caer. La señal del impacto actúa sobre el medidor de tiempos. También dispone de un tornillo de fijación para colocarla a la altura deseada en la columna.

#### Corte de la corredera superior

En la figura se observa la posición de la bola retenida por el electroimán. La altura de la caída  $h_i$  se toma desde el centro de la bola.



- 2) Un **medidor de tiempos**.



Mediante el mando de cursores denominado “SELECT”, situado a la izquierda de la ventana digital, hay que establecer la posición “START/STOP” que se puede observar en el LED luminoso a la derecha de la ventana digital.

Las únicas conexiones que se van a utilizar en la carátula anterior del equipo son las de STOP situadas abajo a la derecha. Se conectan mediante dos cables a la base de la columna.

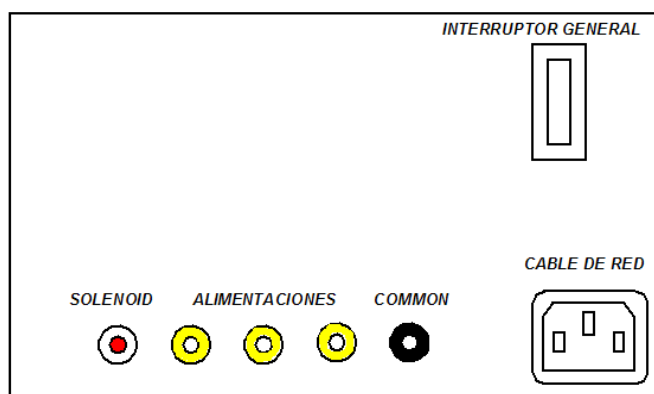
El inicio de la medida que provoca la caída de la bola se produce pulsando el botón verde START. Sobre la ventana digital aparecerá el tiempo de caída de la bola. Si se efectúan varias medidas van quedando recogidas sucesivamente en la memoria. Para leerlas basta pulsar los botones azules de la memoria en un sentido o en otro.

Manteniendo pulsado el botón azul de la derecha aparece en la ventana digital el valor promediado de todos datos recogidos en la memoria.

Manteniendo pulsado el botón azul de la izquierda aparece en la ventana digital la suma de tiempos de todos los datos recogidos en la memoria.

Pulsando el botón amarillo RESET se pone a cero la memoria.

La trasera del aparato incluye el cable de conexión a la red, el interruptor general, la toma a la izquierda para la alimentación de la bobina ( SOLENOID ) y una serie de cuatro tomas que no se van a emplear.



#### Cables de conexión

La bobina de la corredera superior debe estar conectada a la toma SOLENOID situada en la trasera del Medidor de tiempos.

Las dos tomas de la corredera inferior deben estar conectadas a las posiciones STOP de la carátula delantera del Medidor de tiempos, manteniendo el código de colores.

### 3) Bolas de acero de diámetros de 10 y 14 mm.

- La toma de datos consiste en construir en una Tabla (Tabla I) para cada una de las bolas disponibles. En cada Tabla *se hará constar el diámetro y la masa de la bola empleada.*
- La corredera inferior se mantendrá en la posición cero donde  $h=0$ .
- La corredera superior se situará inicialmente en la posición  $h_0 = 100 \text{ cm}$  y a continuación se irá desplazando hacia abajo *de dos en dos centímetros* hasta realizar, al menos, 10 posiciones. **Para cada altura  $h_i$  se dejará caer libremente la bola seis veces** y en la Tabla de recogida de datos *se anotará el tiempo de caída promediado de las seis veces  $\langle t_i \rangle$*

ADVERTENCIAS:

- No se olvide de “resetear” la memoria al terminar de medir los seis tiempos de caída correspondientes a cada altura  $h_i$
- Coloque cada vez la bola **bien centrada** en el electroimán superior.
- Dado que las bolas empleadas tienen distintos diámetros, es preciso determinar la posición de la parte inferior de la bola en su situación inicial de reposo cuando está sujeta por el electroimán. Un procedimiento consiste en medir con un calibre la distancia  $s \pm \Delta s$  entre el punto de contacto de la bola con la corredera y el borde inferior de la misma (*ver la figura de la corredera superior*). Así los enrase se efectuaran siempre con el borde inferior de la corredera y *bastará con agregar la distancia  $(s-R) \pm 2\Delta s$  a la lectura medida sobre la escala de la columna, siendo R el radio de la bola. Conviene medir su diámetro  $d=2R$  también con el calibre.*

**Elaboración de resultados:**Determinación de la aceleración de la gravedad

Para cada bola de masas  $m_1$  y  $m_2$ , se construirán las siguientes Tablas I y II. Con la bola de masa  $m_1$  se construye primeramente la TABLA I. A partir de ésta se elabora la TABLA II donde aparecen dos columnas nuevas, la primera con los valores calculados para  $\langle t_i \rangle^2$  y la segunda con una estimación de  $g$ , obtenida a partir de los valores  $h_i$  y  $\langle t_i \rangle^2$  empleando la fórmula de la caída libre para cada posición  $h_i$ :

$$g_i = \frac{2 h_i}{\langle t_i \rangle^2}$$

**TABLA I**  
**CAÍDA LIBRE**

BOLA N° \_\_\_\_ diámetro  $d \pm \Delta d$  masa  $m \pm \Delta m$  distancia  $s \pm \Delta s$

Altura de caída [ cm ]	Tiempo [ s ]
$h_0$	$\langle t_0 \rangle$
$h_1$	$\langle t_1 \rangle$
...	...
$h_i$	$\langle t_i \rangle$
$h_{i+1}$	$\langle t_{i+1} \rangle$
...	...
$h_n$	$\langle t_n \rangle$



**TABLA II**  
**DETERMINACIÓN DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD**

BOLA N° \_\_\_\_\_ diámetro  $d \pm \Delta d$  masa  $m \pm \Delta m$  distancia  $s \pm \Delta s$

Altura de caída [ cm ]	Tiempo [ s ]	$\langle t_i \rangle^2$	$g$
$h_0$	$\langle t_0 \rangle$	$\langle t_0 \rangle^2$	$g_0$
$h_1$	$\langle t_1 \rangle$	$\langle t_1 \rangle^2$	$g_1$
...	...	...	...
$h_i$	$\langle t_i \rangle$	$\langle t_i \rangle^2$	$g_i$
$h_{i+1}$	$\langle t_{i+1} \rangle$	$\langle t_{i+1} \rangle^2$	$g_{i+1}$
...	...	...	...
$h_n$	$\langle t_n \rangle$	$\langle t_n \rangle^2$	$g_n$

a partir de la TABLA II se determinará la aceleración de la gravedad empleando tres procedimientos:

1<sup>er</sup> Procedimiento :

Con los datos de las columnas 1 y 3 se trazaré la gráfica de  $n + 1$  puntos  $(h_i, \langle t_i \rangle^2)$ .

Se ajustará una recta a los citados puntos de la ley de caída libre:  $h = \frac{g}{2} t^2$ , en la forma  $y = a x + b$  [ $y = h, x = t^2$ ]. Obtenga  $a \pm \Delta a$  y  $b \pm \Delta b$  por "pares de puntos" o por "mínimos cuadrados". A partir de la pendiente resultante del ajuste  $a$  y de la ordenada en el origen  $b$ , se trazaré la recta correspondiente y se determinará  $g_1 \pm \Delta g_1$ .

2<sup>o</sup> Procedimiento :

Se promediarán los  $n + 1$  valores de  $g$  de la 4<sup>a</sup> columna y al resultado obtenido para  $\bar{g}_2$  se le asociará el error del promedio, obteniendo  $g_2 \pm \Delta g_2$ .

3<sup>er</sup> Procedimiento :

Se tomará un sólo valor de  $g_i$  juntamente con los  $h_i$  y  $\langle t_i \rangle^2$  correspondientes, preferiblemente de los primeros de la TABLA II. Se presentará  $g_i$  como resultado y se le asociará el error derivado de la propagación de errores en la ley de caída libre que aparece a continuación:

$$\frac{\Delta g_i}{g_i} = \frac{\Delta h_i}{h_i} + 2 \frac{\Delta \langle t_i \rangle}{\langle t_i \rangle}$$

obteniendo así  $g_3 \pm \Delta g_3$ .

Finalmente, con los resultados obtenidos, se elaborará la Tabla de resultados siguiente (Tabla III):

**TABLA III**  
**RESULTADOS:**  
**DETERMINACIÓN DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD**

Masa de la bola [ g ]	1 <sup>er</sup> Procedimiento ( ajuste recta ) [ cm. s <sup>-2</sup> ]	2 <sup>o</sup> Procedimiento ( promedio ) [ cm. s <sup>-2</sup> ]	3 <sup>er</sup> Procedimiento ( valor seleccionado ) [ cm. s <sup>-2</sup> ]
$m_1 \pm \Delta m_1$	$g_1 \pm \Delta g_1$	$g_2 \pm \Delta g_2$	$g_3 \pm \Delta g_3$
$m_2 \pm \Delta m_2$	$g'_1 \pm \Delta g'_1$	$g'_2 \pm \Delta g'_2$	$g'_3 \pm \Delta g'_3$

- REPITA EL PROCESO ANTERIOR PARA LA BOLA DE MASA  $m_2$  (Tablas I, II y II).

INDIQUE cuál de los tres procedimientos para la determinación de  $g$  con su error, 1) *un valor seleccionado*, 2) *la media estadística* y 3) *el derivado del ajuste a una recta*, es mejor y por qué.

## Observaciones

### Influencia del radio de la bola

Un refinamiento de la formulación física de la caída libre permite estimar la influencia del radio  $R$  de la bola en el valor de  $g$  obtenido experimentalmente. En efecto, la ley de Newton aplicada a la caída de la bola se puede expresar:

$$m_b a = P - E - F_f = (m_b - m_a) g - 6\pi R \eta v$$

donde :  $P$  es el peso de la bola,

$E$  la fuerza de empuje,

$F_f$  la fuerza de fricción que actúa sobre la bola (ley de Stokes válida para bajas velocidades y cuerpos esféricos),

$m_b$  la masa de la bola ;

$m_a = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{aire}}$  masa del volumen de aire que desaloja la bola.

$a$  la aceleración de la bola,  $\eta$  la viscosidad del aire,  $v$  la velocidad de la bola.

Si la densidad del material de la bola es  $\rho$ , la ley anterior puede ponerse:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho a = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - 1) g - 6\pi R \eta v \quad (N)$$

de donde se deduce:

$$a = \left( \frac{\rho - 1}{\rho} \right) g - \left( \frac{9 \eta}{2 \rho} \right) \frac{v}{R^2} \approx g - k \frac{v}{R^2} \quad (m/s^2)$$

NOTA: Observe que la densidad de la bola es  $\rho \gg 1 \text{ kg/m}^3$  (es del orden de  $10^4 \text{ kg/m}^3$ ). Por lo tanto, el efecto perturbador de la fuerza de fricción *disminuirá al aumentar el radio de la bola*. Aún siendo pequeño el efecto, debería de obtenerse un mejor valor de  $g$  para la bola de mayor diámetro cuando tenemos, por ejemplo, el caso de bolas con radios del orden del doble una de la otra ( $R=3,5$  y  $7$  mm respectivamente), al disminuir la contribución del rozamiento del aire.

## 2. PRÁCTICAS DE TERMODINAMICA

### 2.1 LEYES DE BOYLE Y GAY-LUSSAC

#### Material

Aparato de Boyle. Termómetro de mercurio de 100 °C. Cazo eléctrico a 127 voltios.

#### Objeto

Comprobación experimental de la ley de Boyle-Mariotte para los gases perfectos. Calibrado de un termómetro de gas a volumen constante

#### Teoría

La ley de los gases perfectos establece que:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{constante}$$

siendo  $p$ ,  $V$  y  $T$ , la presión, el volumen y la temperatura absoluta de dicho gas respectivamente. El valor de la constante para un mol de gas es  $R = 8,314 \text{ J/mol. K}$ .

Para su comprobación experimental, se divide la práctica en dos partes:

- en la primera, se comprueba que

$$p V = \text{Constante}, \text{ cuando la temperatura no varía} \\ (\text{Ley de Boyle-Mariotte})$$

- en la segunda, que :

$$p = k T, \text{ donde } k \text{ es una constante de proporcionalidad, cuando el volumen no varía} \\ (\text{termómetro de gas; Ley de Gay Lussac})$$

## Práctica

### PRIMERA PARTE

#### 2.1.1 Comprobación de la ley de Boyle-Mariotte

Al deslizar verticalmente el vaso (2) de mercurio (figura 1), se consigue variar la altura de la columna de Hg y, en consecuencia, aplicar diferentes presiones sobre el volumen de aire encerrado dentro del tubo (1). Desde la posición más baja, hasta el tope máximo con que tropieza el vaso (2) en su recorrido, la variación total que experimenta el volumen es de 8 cm siendo el área interior del tubo de 1 cm<sup>2</sup> aproximadamente. Por ello, se tomarán 7 u 8 valores correspondientes a variaciones de 1 cm<sup>3</sup> aprox., en el volumen del gas, midiendo las respectivas diferencias entre las alturas de las columnas de mercurio.

Así, p.ej., cuando el vaso (2) se encuentra en la posición C, y el nivel de mercurio dentro del tubo está en la posición B, quiere decirse que la presión total que actúa sobre el gas es:

$$p = p_0 + (1_C - 1_B) \cdot d_{Hg} \cdot g \quad [1]$$

siendo  $p_0$  la presión atmosférica y  $d_{Hg}$  la densidad del mercurio. Es obvio que cuando la lectura C está por debajo de B, la diferencia  $1_C - 1_B$  es negativa. Es decir, la presión del gas es menor que la presión atmosférica.

Durante toda la práctica se puede considerar que la temperatura de la habitación permanece constante, y entonces:

$$p \cdot V = \text{constante} = k \quad [2]$$

Si se representa la gráfica  $p = p(V)$  se debe obtener una hipérbola ( $p = k/V$ ) en la que resulta difícil apreciar la bondad de las medidas. Es preferible, pues, tomar logaritmos en la ecuación [2] y obtener:

$$\log p = -\log V + \log k \quad [3a]$$

porque se puede aproximar a una recta:  $y = ax + b$ .

Teniendo en cuenta que  $V = S(l_A - l_B)$ , donde  $S$  es la sección del tubo, la ecuación [3a] se puede transformar en la siguiente:

$$\log p = -\log(l_A - l_B) + \log k' \quad [3b]$$

más cómoda de representar y de ajustar.

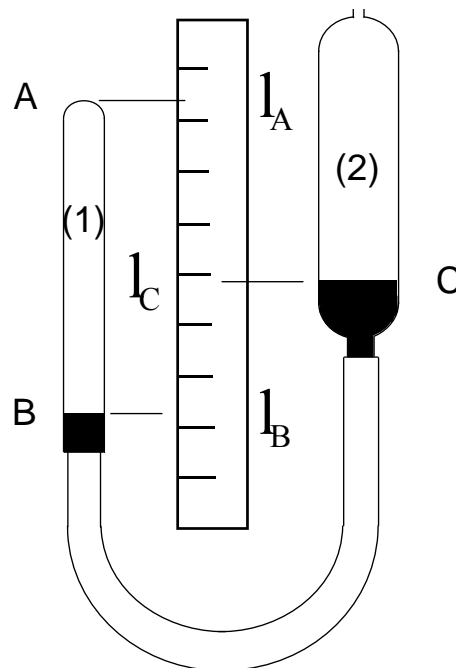


Figura 1

### Elaboración de resultados:

1. Construya una tabla con con las parejas de valores de la presión  $p$  y de la variación ( $l_A - l_B$ ) correspondiente de 7 u 8 medidas (repita cada posición al menos dos veces y tome como valor la media en cada caso) . Para la presión  $p$  utilice, por comodidad , unidades de cm de Hg y , por tanto, el segundo sumando de la ec. [1] vendrá dado **sólo** por la variación ( $l_C - l_B$ ) expresada en cm (véase la segunda advertencia a continuación)
2. Represente gráficamente las parejas de puntos (  $\log(l_A - l_B)$  ,  $\log p$  ) y realice el ajuste por una recta a la ecuación [3b] , ya sea por pares de puntos o por mínimos cuadrados. Lógicamente, debe obtenerse:  $\mathbf{a} = -1$  ;  $\mathbf{b} = \log k'$

Estime a con su error y verifique que es del orden de la unidad.

*Si se cumple, habrá verificado adecuadamente la ley de los gases perfectos a temperatura constante (Ley de Boyle-Mariotte).*

Por ser las variaciones de  $\log p$  y de  $\log V$  muy pequeñas, será necesario tomar una escala adecuada en la gráfica, que nos permita comprobar si la variación es lineal.

### Advertencias

- a) Cuando acabe de medir, debe dejar el vaso (2) en su posición más baja, para que el gas contenido en el tubo (1) no esté comprimido.
- b) En la expresión [1] se debe tener presente que si  $p_0$  se expresa en cm de mercurio, el segundo término ( $l_C - l_B$ ).  $d_{Hg} g$  puede calcularse directamente en cm de Hg tomando directamente las diferencias de alturas entre C y B :  $l_C - l_B$  expresadas en cm. En cambio, si se multiplica esta diferencia de alturas, en cm, por  $d_{Hg} = 13,56 \text{ g/cm}^3$  y por la aceleración de la gravedad  $g = 980 \text{ cm/s}^2$ , el término que se obtiene estará expresado en dinas/cm<sup>2</sup> (barias), y en ese caso habría que pasar la presión atmosférica,  $p_0$ , a estas unidades, para poder hacer la suma correctamente. Tome la medida de  $p_0$  en el barómetro del Laboratorio.

## SEGUNDA PARTE:

2.1.2 *Termómetro de gas a volumen constante. Ley de Gay-Lussac*

Manteniendo ahora el volumen constante, se comprobará la proporcionalidad que existe entre la presión y la temperatura para un gas ideal, y se calculará dicha constante de proporcionalidad:

$$p = k.T \quad [4a]$$

Para mantener el volumen de gas constante será necesario enrasar siempre el nivel de mercurio en la marca A, para conseguir que el volumen del gas sea siempre el mismo. Si se aumenta la temperatura del gas contenido en la esfera (1), éste se dilata y tiende a expandirse, desplazando el nivel de mercurio de la marca A. Para volverlo a dicha posición se subirá convenientemente con mucho cuidado el vaso (2).

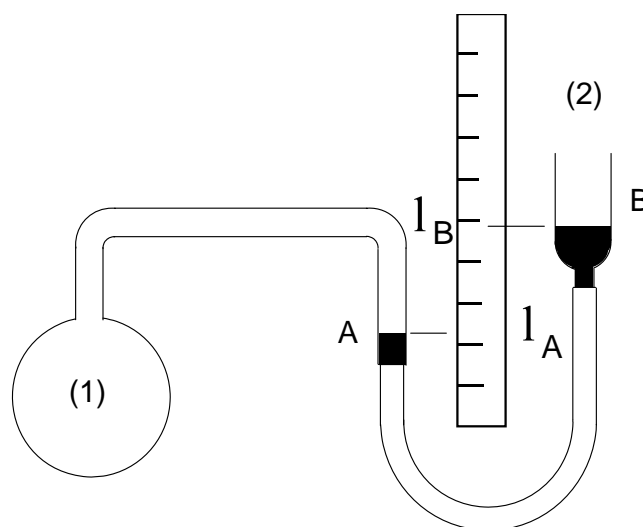


Figura 2

Las variaciones de temperatura que experimenta el sistema gaseoso deberán ser, según la ley de los gases perfectos, proporcionales a las variaciones de presión que se han debido aplicar para que de nuevo el mercurio enrasede en A.

Para calentar el gas se utiliza un cazo eléctrico que se llena de agua hasta que ésta cubre completamente la esfera. Se calienta el agua y se miden distintos valores de la presión a diferentes temperaturas.

Es de advertir que la temperatura deberá permanecer constante mientras se hace la medida. Para conseguirlo, se recomienda desenchufar unos dos grados antes de llegar al valor aproximado que se desea, y esperar que la temperatura del agua, que sigue subiendo momentáneamente, empiece a descender. Durante esta operación hay uno o dos minutos en que la temperatura permanece constante, intervalo que debe aprovecharse para hacer la medida correspondiente de la presión.

Si  $l_0$  representa la altura de la columna de mercurio correspondiente a la presión atmosférica  $p_0$ , la ley de Gay-Lussac [4a], expresada en cm de mercurio se puede poner:

$$l_0 + (l_B - l_A) = k' T \quad [4b]$$

con  $T = 273 + t$ . De aquí, se deduce:

$$(l_B - l_A) = k' t + b \quad [4c]$$

donde  $t$  representa la temperatura del gas expresada en °C y donde  $k'$  y  $b$  son dos constantes. La ley [4c]:  $(l_B - l_A) = f(t)$ , se puede ajustar por una recta. Para ello:

3. Construya una tabla con las parejas de valores de la temperatura  $t$  y la presión  $(l_B - l_A)$  en cm, correspondiente, al menos para 7 u 8 medidas (repita cada posición al menos dos veces y tome como valor la media en cada caso).
4. Represente gráficamente las parejas de puntos  $(t, (l_B - l_A))$ . El nivel de mercurio debe enrasar siempre en la muesca A cada vez que se varíe la posición  $l_B$  del vaso (2), como se muestra en la figura 2

Realice el ajuste a una recta de la ecuación [4c], ya sea por pares de puntos o por mínimos cuadrados. La posición del nivel B,  $(l_B - l_A)$  respecto a la muesca A (al final del bulbo del termómetro) varía linealmente al variar la temperatura  $t$  (en grados centígrados) en la forma  $y = a x + b$ , con una pendiente  $a = k'$ . Calcúlese esta constante  $k'$  y evalúese el error cometido en su determinación.

*Si se cumple la ecuación [4c], habrá verificado adecuadamente la ley de los gases perfectos a volumen constante (Ley de Gay-Lussac).*

### Advertencias

- a) Siempre que se hace una medida a una cierta temperatura, y se va a pasar a otra más fría, deberá tenerse presente que el gas se contrae, y el mercurio tiende a introducirse en el depósito (1). Para evitarlo: ***coloque el vaso (2), como precaución, en su posición más baja, en cuanto termine de hacer las medidas.*** Si por un descuido se introdujo el mercurio en dicho recipiente, no intente sacarlo. Avise al profesor de prácticas y él se encargará de hacerlo.
- b) ***Muévase muy lentamente el vaso (2) para que en ningún momento el mercurio pase de la marca A y ¡no se introduzca en el bulbo !!.***
- c) Recuerde la advertencia b) de la parte 2.1.1.





## 2.2 DETERMINACIÓN DE CALORES ESPECÍFICOS

### Material:

Julímetro con elemento calefactor. Fuente de alimentación. Cilindros metálicos. Termómetro o termopar. Sistema de sujeción.

### Objeto:

Determinación del calor específico de dos materiales entre el Cobre, el Aluminio y el Hierro. Manejo del julímetro.

### Teoría:

El aporte calorífico suministrado a un cuerpo que no realiza trabajo se emplea en aumentar su temperatura. Para una misma cantidad de calor, este aumento de temperatura depende de la naturaleza y masa de cada material, variando de unos a otros a igual masa. Para expresar este efecto, se emplea la noción de **calor específico** definida como:

$$c = \frac{1}{m} \frac{d'Q}{dT}$$

donde **m** representa la masa de la muestra sometida a calentamiento,

**d'Q** el calor suministrado, y

**dT** el incremento de temperatura experimentado.

La relación

$$C = \frac{d'Q}{dT} \quad [1a]$$

se conoce como **capacidad calorífica** de la muestra y, a diferencia del calor específico, depende de la masa de sustancia empleada en cada caso. Para pasar a calor específico, es preciso dividirla por m.

En muchas ocasiones, especialmente cuando se trabaja con gases, se emplea el concepto de calor específico molar, pero en esta práctica no se va a utilizar de esta forma.

El calor específico de una sustancia depende del tipo de transformación que tenga lugar durante el calentamiento y de la temperatura. En esta práctica, como en muchas transformaciones de la naturaleza, consideramos que el calentamiento se efectúa a presión constante. Por otro lado, dado que el intervalo de temperaturas de la experiencia no es muy grande, también podremos considerar sin gran error que los calores específicos permanecen constantes al variar la temperatura.

### Advertencias previas:

- 1) Para evitar **quemaduras**, en ningún caso se cogerá el elemento calefactor con las manos. Cuando haya que manejarlo, se tomará siempre por el ganchito superior.
- 2) El alumno se abstendrá de manipular los mandos de la fuente de alimentación. Se limitará a encenderla y apagarla cuando lo exija el desarrollo de la práctica, comprobando que los valores de tensión y corriente suministrados son los recomendados. Ante cualquier duda se dirigirá al profesor de prácticas.

## **Práctica**

El objeto de la práctica es, en principio, muy sencillo. Se trata de suministrar cantidades de calor conocidas a diversas sustancias y medir los incrementos de temperatura experimentados por éstas.

El equipo consta de:

1. Una fuente de alimentación capaz de proporcionar una corriente conocida con una diferencia de potencial baja, también conocida. La potencia suministrada es el producto de las dos magnitudes  $V$  e  $I$ .
2. Un elemento calefactor donde la energía suministrada por la fuente se transforma en calor.
3. Un julímetro alimentado por la fuente anterior, capaz de controlar la energía suministrada al calefactor.
4. Tres cilindros metálicos de aluminio, hierro y cobre, protegidos térmicamente para evitar fugas de calor y provistos de dos huecos; el primero, axial, para situar el calefactor, y el segundo, paralelo al anterior y un poco más estrecho, para colocar el termómetro.

### Desarrollo

- A)** Manteniendo la fuente de alimentación y el julímetro apagados, se sitúa el elemento calefactor en el hueco correspondiente de uno de los cilindros metálicos hasta que haga tope en el fondo. Se coloca el termómetro o el termopar en el segundo hueco.

Se toma la lectura  $\theta_0$  del termómetro cuando éste se encuentre bien asentado en su posición.

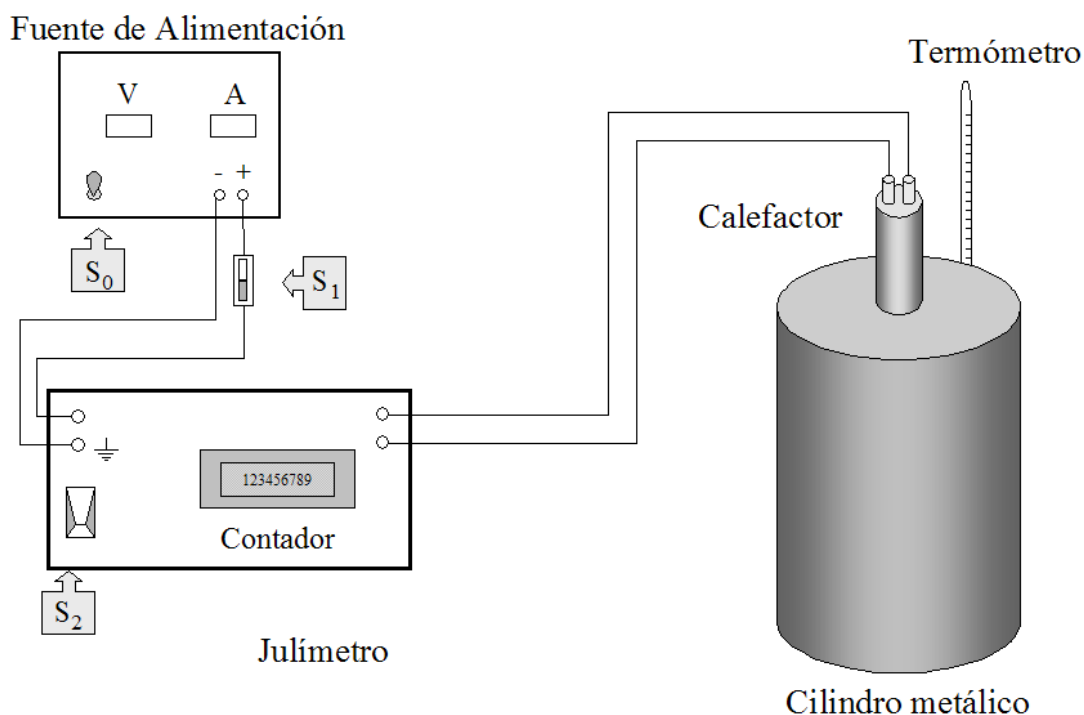


Figura 1

**B)** A continuación, se enciende la fuente de alimentación (interruptor  $S_0$ ) manteniendo abierto el interruptor  $S_1$  de suministro. También se pulsa el botón de puesta a cero del contador mecánico del julímetro.

Posteriormente, se pulsan simultáneamente los interruptores  $S_1$  y el de encendido del julímetro,  $S_2$ . El sistema empezará a suministrar energía al calefactor. Comprobar que la tensión de alimentación es de 10 voltios y la corriente, 2.5 amperios aproximadamente.

NOTA: Si emplea el julímetro Unilab ( de color amarillo ), el contador empezará a marcar, produciendo un golpe a cada paso. Cada unidad (o sea, cada paso) corresponde a 100 julios .

*Para cada uno de los dos materiales, se toman lecturas de 5.000 en 5.000 julios (50 en 50 unidades del contador Unilab ) y se anotan en una tabla análoga a la **TABLA I** (una para cada material), junto con el tiempo (dato complementario) y la temperatura indicada por el termómetro o el termopar. La última lectura se tomará a los 30.000 julios ( 300 unidades en el contador Unilab ).*

**TABLA 1**  
**CURVA DE CALENTAMIENTO**

MATERIAL: \_\_\_\_\_ MASA: \_\_\_\_\_  $\pm$ .....

Calor (kJ)	Temperatura (°C)	Tiempo

- C) Finalizada la construcción de la TABLA I, se apagarán los interruptores de la fuente de alimentación ( $S_0$ ) y del julímetro ( $S_2$ ), y se abrirá el interruptor  $S_1$ .

Con las debidas precauciones, se pasarán el calefactor y el termómetro o el termopar a otro cilindro metálico con el que se repetirá toda la experiencia tal y como se ha desarrollado para el primer cilindro. Se construirá una tabla de datos similar a la TABLA 1.

#### Elaboración de resultados:

Los resultados experimentales correspondientes a las dos tablas (una para cada material) construidas se llevan a **una gráfica común** en papel milimetrado para las parejas de valores ( $Q$ ,  $\theta$ ). Por comodidad, en el eje horizontal se pondrán las cantidades de calor  $Q$  suministradas por el calefactor a través del julímetro expresadas en **kilojulios**, y en el eje vertical las temperaturas  $\theta$  alcanzadas en °C. En principio, cada familia de puntos debe permanecer alineada. A partir de [1a] se puede obtener una función lineal de  $Q = f(\theta)$ . Como se aprecia en la ecuación [1b], la pendiente de la recta que se obtiene para cada material, determinará la inversa de su capacidad calorífica.

De la definición de la capacidad calorífica, ecuación [1a] se puede obtener una ecuación en incrementos finitos:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad \Rightarrow \quad \Delta Q = C(\theta - \theta_0) = C\theta - C\theta_0$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{C} \Delta Q + \theta_0 \quad [1b]$$

Las parejas de datos ( $Q$ ,  $\theta$ ) se ajustarán por pares de puntos o por mínimos cuadrados a rectas del tipo:

$$\theta = a Q + \theta_0$$

donde **a** representa la inversa de la capacidad calorífica,  $C = 1/a$ , y  $\theta_0$  la temperatura inicial de la muestra.

Como resultado del ajuste se obtendrán  $a$ ,  $\theta_0$ , con sus errores respectivos, **para cada una de las dos rectas**. Con todo ello, se construye una tabla de elaboración de resultados, análoga a la TABLA II

TABLA II

Sustancia	$a \pm \Delta a$ °C/kJ	$\theta_0$ °C	C J/°C	$c \pm \Delta c$ J/°Cg

El error  $\Delta m$  se estimará a partir de la operación de pesada.

El error de los calores específicos se estimará partiendo del error cuadrático medio,  $\Delta a$ , para  $a$  y empleando la propagación de errores:  $\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta m}{m}$

Finalmente los valores de los calores específicos (junto con sus errores) que aparecen en la tabla **se pasarán a cal °C<sup>-1</sup> g<sup>-1</sup>**, y se presentarán del modo que indica la tabla III.

Tabla III

Sustancia	$c$ (cal °C <sup>-1</sup> g <sup>-1</sup> )
1 <sup>a</sup>	
2 <sup>a</sup>	

*Coméntese si los resultados obtenidos son adecuados teniendo en cuenta el error obtenido, el orden de magnitud y observando cuál de las dos sustancias debe tener un mayor calor específico.*



## 2.3 DETERMINACION DEL COEFICIENTE ADIABATICO, $\gamma$ (Método de Clément-Desormes)

### Material

Vasija de vidrio aislada térmicamente dentro de una caja. Manómetro con agua coloreada incorporado a la vasija, para medir la presión del aire que hay en su interior. Bomba de presión para comprimir el aire. Llaves de paso.

### Objeto

Medida de la razón entre los calores específicos de un gas a presión y volumen constantes

### Teoría

En Termodinámica se llama proceso isotermo a aquél en el que la temperatura del sistema permanece constante ( $\Delta T = 0$ ), proceso isócoro al que se verifica a volumen constante ( $\Delta V = 0$ ) y proceso adiabático a aquél en que el sistema no intercambia calor con el exterior ( $\Delta Q = 0$ ).

La práctica se reduce a la realización de dos procesos: uno adiabático y otro isócoro.

El gas contenido dentro de la vasija es comprimido hasta una presión  $p_1$  (Fig. 1). Si en este momento se le deja expandir adiabáticamente hasta alcanzar la presión atmosférica  $p_0$ , ocupará un volumen final  $V_2$  dado por la relación:

$$p_1 V_1^\gamma = p_0 V_2^\gamma \quad [1]$$

siendo  $V_1$  el volumen que el gas ocupaba a la presión  $p_1$ .

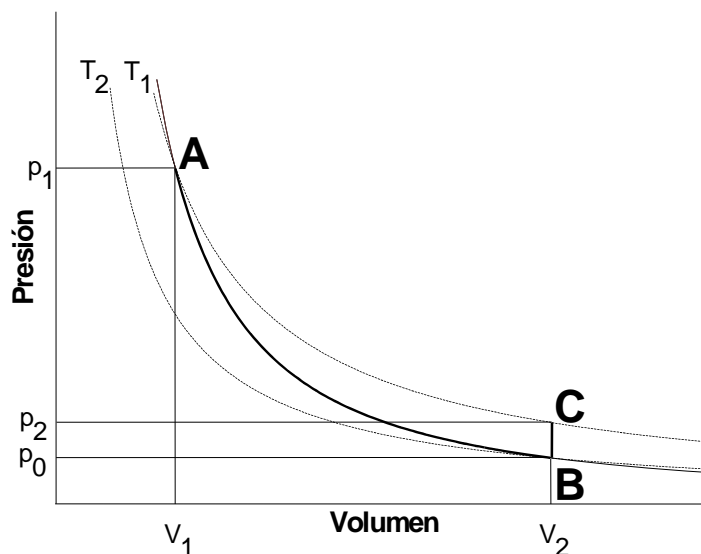


Figura 1

Al pasar del estado A al B el gas se enfría, pasando de una temperatura  $T_1$  a otra  $T_2$  ( $T_2 < T_1$ ). Si se le deja que recupere la temperatura inicial, a volumen constante, llegará a un estado C final, correspondiente a una presión  $p_2$ .

Se ha realizado, en definitiva, una transformación abierta ABC, con un tramo adiabático AB y otro isócoro BC. Es fácil comprobar que se puede pasar directamente de A a C siguiendo un proceso isotermo (Fig. 1) y entonces

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad [2]$$

Relacionando [1] y [2], se obtiene

$$\frac{p_1}{p_0} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^\gamma$$

o bien

$$\gamma = \frac{\log p_1 - \log p_0}{\log p_1 - \log p_2} \quad [3]$$

### Práctica

Una vasija llena de aire está cerrada con un tapón provisto de una válvula de seguridad A, una llave de paso L (Fig. 2) y un manómetro M para medir la presión del gas contenido dentro de la vasija.

Se va a realizar el proceso termodinámico  $A \rightarrow B \rightarrow C$  siguiendo tres pasos:

- ✓ 1º Abriendo la llave de paso L (ver advertencia 1ª), se introduce aire a presión mediante la bomba (advertencia 2ª). Cerrando inmediatamente dicha llave (aislando el recinto) se mide en el manómetro la presión  $p_1$  del gas (posición A del diagrama P-V de la figura 1):

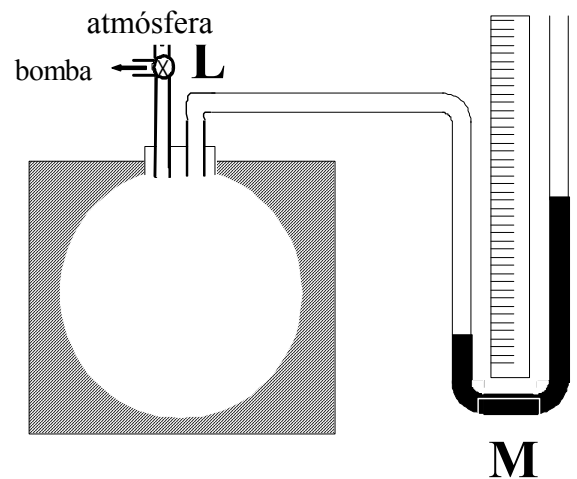


Figura 2

$$p_1 = p_0 + \rho_{\text{agua}} g h_1 \quad [4]$$

( $h_1$  es la diferencia de alturas entre las dos columnas del manómetro). Anotada dicha lectura :

- ✓ 2º se abre la llave L para dejar expandir el gas durante un breve instante de tiempo (proceso  $A \rightarrow B$ , fig. 1). Durante este periodo se oye silbar el aire al salir, hasta llegar a la presión atmosférica  $p_0$ , cerrándola inmediatamente (posición B fig. 1).
- ✓ 3º Se esperan dos minutos (proceso  $B \rightarrow C$ ), que es el tiempo aproximado que tarda en alcanzar un valor estacionario la columna del manómetro, llegando a la posición final C, de la figura 1 y se mide la nueva presión  $p_2$ :

$$p_2 = p_0 + \rho_{\text{agua}} g h_2 \quad [5]$$

( $h_2$  es la diferencia de alturas entre las dos columnas del manómetro de la figura 2)



A partir de los valores de  $p_1$  y  $p_2$  se puede calcular  $\gamma$ , ya que  $p_0$  se medirá en el barómetro del laboratorio.

Nótese que la expresión [3] puede expresarse también en forma lineal tomando logaritmos decimales:

$$\log p_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \log p_2 - \frac{1}{\gamma - 1} \log p_0 \quad [6]$$

Antes de tomar logaritmos verifique que todos los sumandos de [3] tengan las mismas unidades

(ver advertencia 3ª).

### Elaboración de resultados:

- De acuerdo con la ecuación [6], se debe obtener una recta al representar la función:

$\log p_1 = a \log p_2 + b$ , siendo de pendiente  $a = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$  y ordenada en el origen

$$b = \frac{\log p_0}{\gamma - 1}.$$

- La tabla de valores debe ser entonces del tipo:

**Tabla I**

( $p_0 = \dots\dots\dots \pm \dots\dots$  cm de Hg . Ver advertencia 4ª)

$h_1$ (cm)	$h_2$ (cm)	$p_1$ (cm de H <sub>2</sub> O)	$p_2$ (cm de H <sub>2</sub> O)	$\log p_1$	$\log p_2$

Represente gráficamente los puntos ( $\log p_2, \log p_1$ ).

Realice el ajuste por una recta mediante 'pares de puntos' o 'mínimos cuadrados', calculando  $a$  y  $b$  con sus errores respectivos. En la misma gráfica, trace la recta calculando previamente dos puntos de la misma.

Finalmente, conocida la pendiente de la recta  $a$ , calcule el valor de  $\gamma$  (con su error):

$$\gamma = \frac{a}{a - 1} \quad [7]$$

Para obtener el error de  $\gamma$ , es conveniente tomar logaritmos neperianos en la expresión [7]:

$$\ln \gamma = \ln a - \ln(a - 1)$$

a partir de ésta expresión se obtiene finalmente:

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta a}{a - 1} \quad [8]$$

### Advertencias

- 1ª) *Cuidado al comprimir el gas con la bomba.* No debe pasarse del codo del manómetro, pues en tal caso actuaría de sifón, *saliendo despedida toda el agua como si fuera un surtidor.*
- 2ª) Cuando se comprime el gas de la vasija mediante la bomba será necesario no accionar bruscamente ésta, pues aparte de poder deteriorarla se produce un efecto térmico perjudicial para la práctica. En efecto, el aire insuflado por la bomba bruscamente está a mayor temperatura que el contenido dentro de la vasija y entonces la presión del manómetro no queda estabilizada, sino que disminuye hasta que el gas alcanza el equilibrio térmico. Será necesario, pues, hacerlo suavemente para que el gas no se caliente.
- 3ª) Por ser el manómetro de agua, se aconseja utilizar como unidad más cómoda de presión el centímetro de agua. De manera que para poder calcular  $p_1$  y  $p_2$  en las ecuaciones [4] y [5] se pasará  $p_0$  a centímetros de agua. Es decir, a la lectura que indica el barómetro del laboratorio, expresado en cm, se le multiplica por 13.56 que es la densidad del mercurio. El término  $\rho_{\text{agua}} g h$ , expresado en cm de agua, viene dado directamente por el valor de  $h$ . En consecuencia:

$$p_1 \text{ (cm de agua)} = 13.56 \cdot p_0 \text{ (cm de Hg)} + h_1 \text{ (cm)}$$

$$p_2 \text{ (cm de agua)} = 13.56 \cdot p_0 \text{ (cm de Hg)} + h_2 \text{ (cm)}$$

### 3. PRÁCTICAS DE ELECTROMAGNETISMO

#### 3.1 EL POLÍMETRO DIDÁCTICO

##### Material

Polímetro. Fuente de alimentación. Placa de resistencias

##### Objeto

Conocer el funcionamiento de un polímetro.

Montajes necesarios para utilizarlo como amperímetro, voltímetro y óhmetro.

##### Teoría

Un polímetro es un medidor eléctrico universal. Las magnitudes eléctricas que mide habitualmente son:

- 1) En corriente continua ( $\equiv$ , C.C.)  
corriente  
diferencias de potencial (tensión)  
resistencias
- 2) En corriente alterna ( $\sim$ , C.A.)  
corriente  
diferencias de potencial (tensión)

Existen polímetros analógicos y digitales. Los primeros son más simples y el elemento sensible está constituido por un instrumento de medida de corriente; una aguja gira sobre una escala graduada señalando sobre la misma el valor que adquiere la magnitud que se está midiendo.

Para usar el polímetro analógico en una u otra modalidad (intensidad, voltaje, resistencia) existe un conmutador con el que se selecciona la magnitud que interesa medir en cada caso. Las magnitudes se pueden medir en distintos márgenes por lo que suele existir un segundo conmutador para seleccionar estos márgenes. En los polímetros digitales el margen de medidas se selecciona automáticamente, bastando tan sólo elegir la modalidad de medida deseada.

El polímetro didáctico (Figura 1) es analógico y consta de una placa base sobre la que se encuentra el instrumento de medida y un esquema donde se representan las conexiones internas del aparato. No posee conmutadores para las diferentes magnitudes y escalas y en su lugar dispone de una serie de bornes sobre los cuales el alumno construye cada uno de los circuitos de medida.

El instrumento posee dos escalas superpuestas, una superior que sirve para medir corrientes en el margen de 0 a 10 mA y la misma escala que también sirve para medir diferencias de potencial en el margen de 0 a 10 V. La escala inferior sirve para la medida de resistencias en el margen de 0 a 50 k $\Omega$ , si bien la escala se extiende hasta infinito. Las lecturas en esta escala aumentan de derecha a izquierda.

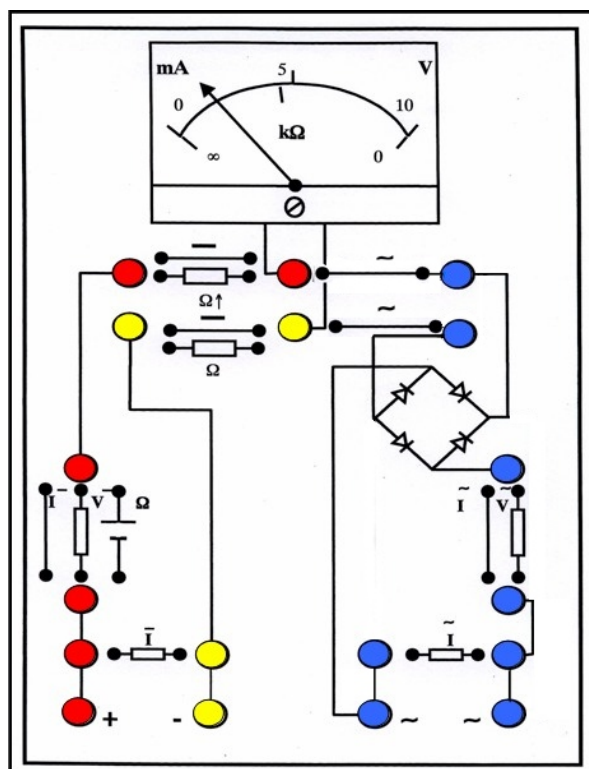


Figura 1

El elemento básico del polímetro es el instrumento de medida, un microamperímetro de tipo magnetoeléctrico (bobina móvil e imán fijo). Por lo tanto, sólo mide en C.C.. Si deseáramos medir en C.A. deberíamos rectificar la señal.

Las características (valores aproximados) del cuadro son:

$$\begin{aligned} \text{resistencia interna } R_i &= 1000 \Omega \\ \text{inversa de la sensibilidad } \bar{I}_i &= 400 \mu\text{A} \end{aligned}$$

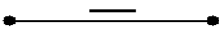
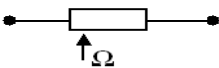
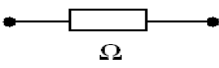
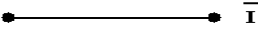
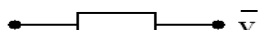

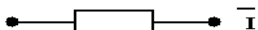
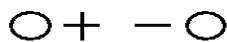
Esta última es la intensidad que, aplicada directamente a los bornes del cuadro, hace que la aguja llegue al fondo de la escala. El alumno deberá efectuar los cálculos con los valores concretos que aparecen indicados en el aparato que está usando. La corriente a fondo de escala en corriente alterna  $\tilde{I}_i$  no va a ser utilizada en la práctica.

Las conexiones para las medidas en C.C. están situadas en la parte izquierda de la placa base y para las medidas en a.c. están a la derecha de la placa base. Estas últimas no van a ser utilizadas en la práctica que nos ocupa.

Las conexiones para el circuito exterior están situadas en la parte inferior de la placa. A la izquierda aparecen las de C.C.: + (rojo) y - (negro) y a la derecha para medidas en c.a :  $\sim$  (azul).

Las conexiones internas necesarias para realizar los distintos tipos de medidas aparecen rotuladas sobre la placa. El significado de los símbolos es el siguiente:

### 1. Medidas en corriente continua:

	Cortocircuito para medidas de I y de V.
	Resistencia variable $R_p$ para medir resistencias.
	Resistencia adicional de protección $R'_p$ para medir resistencias.
	Cortocircuito para medir I.
	Conexión de $R_v$ para medir V.
	Conexión de la pila para medir R.
	Conexión del shunt $R_s$ para medir I.
	Bornes de entrada en C.C.

Cuando se aplica directamente al cuadro una intensidad  $\bar{I}_i$  la aguja llega a fondo de escala. Por tanto, para medir en el rango 0-0'4 mA podemos utilizar directamente los bornes superiores de la placa que conectan el cuadro. Sin embargo, lo que deseamos es medir intensidades en un intervalo 0-10 mA (la escala que aparece en el cuadro).

Si en un circuito exterior circulan 10 mA, está claro que no se puede hacer pasar toda esa intensidad por el microamperímetro, pues no soporta tanta corriente. Para “proteger” el microamperímetro se conecta una resistencia (shunt)  $\bar{R}_s$  en paralelo con el cuadro por la que se haga circular el exceso de corriente. Sobre la placa del polímetro tendremos, pues, el circuito siguiente (Figura 2).

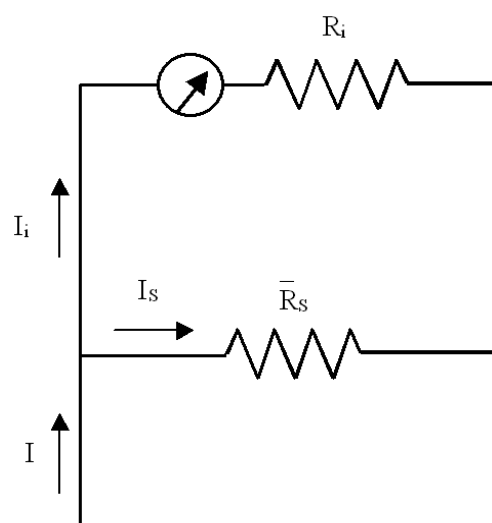


Figura 2

Para hallar  $\bar{R}_S$ , sabemos que :

$$I = \bar{I}_i + I_S \quad [1]$$

$$\bar{I}_i \cdot R_i = I_S \cdot \bar{R}_S \quad [2]$$

por tanto:

$$\bar{R}_S = \frac{\bar{I}_i \cdot R_i}{I - \bar{I}_i}$$

Sustituyendo el valor deseado,  $I = 10 \text{ mA}$ , se obtiene el valor de  $\bar{R}_S$  que hace que por el microamperímetro pasen  $\bar{I}_i$  mA cuando en el circuito exterior circulan I mA.

Cuando se han efectuado todas las conexiones indicadas en la placa, incluyendo como shunt el valor calculado, el circuito de la Figura 2 equivale a un miliamperímetro preparado para medir en el margen de valores deseado (0-10mA) que coincide con la escala. (Ver Figura 3 )

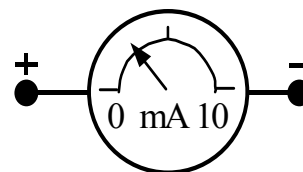


Figura 3

Para medir intensidades en un rango distinto del anterior, se calcula el shunt necesario sustituyendo en las expresiones anteriores el valor de I deseado. Las lecturas sobre la escala sirven siempre que conozcamos el valor real del fondo de escala. Así, si queremos medir entre 0 y 100 mA, una vez conectada la resistencia  $\bar{R}_S$  calculada, habría que multiplicar por un factor 10 las lecturas leídas sobre la escala. Los polímetros analógicos comerciales disponen de un conmutador para seleccionar distintas escalas. Este conmutador va cambiando la resistencia de shunt conectada al cuadro.

## 2. Medidas de diferencia de potencial

Dadas las características del microamperímetro, se sabe que aplicando al cuadro directamente una tensión  $R_i \cdot \bar{I}_i$  (aproximadamente 0'4 V), la aguja llega al fondo de escala.

Si deseamos construir un voltímetro cuyo fondo de escala sea de 10V, deberemos conectar una resistencia ( $\bar{R}_V$ ) en serie para dividir la tensión.

Cuando la aguja llegue al fondo de escala, en los bornes externos de la placa habrá un voltaje (ver Figura 4):

$$V = \bar{I}_i \cdot (R_i + \bar{R}_V) \quad [3]$$

de donde podemos despejar la resistencia necesaria:

$$\bar{R}_V = \frac{V}{\bar{I}_i} - R_i$$

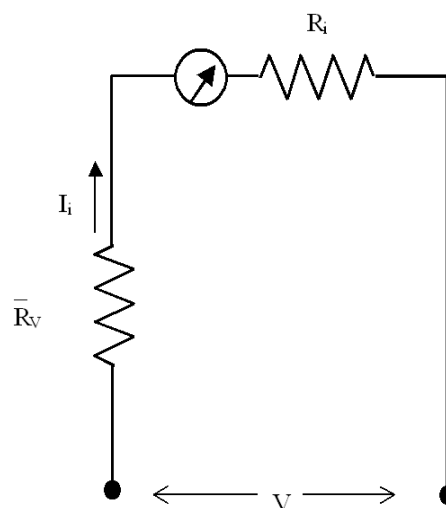


Figura 4

sustituyendo el valor deseado para la tensión:

$$V = 10 \text{ V}$$

Cuando se han efectuado todas las conexiones indicadas en la placa, incluyendo la resistencia que se acaba de calcular, el circuito de la Figura 4 equivale a un voltímetro preparado para medir en el rango de valores que indica su escala (0-10V) (Figura 5).

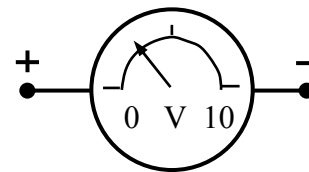


Figura 5

Lo mismo que en el amperímetro, es interesante remarcar que para medir en un rango distinto de voltajes deberemos calcular la resistencia en serie  $\bar{R}_V$  necesaria sustituyendo el valor extremo del intervalo V. La escala del polímetro didáctico se puede utilizar (aunque sus lecturas sean falsas) multiplicando sus lecturas por el factor adecuado. Por ejemplo, para medir en un rango 0-20V en primer lugar se calcula la resistencia que se debe conectar en serie para tener 20V entre los bornes exteriores + - cuando la aguja señala el fondo de escala. Conectada ésta, los valores medidos son las lecturas de la escala multiplicadas por un factor 2.

### 3. Medida de resistencias

Se conecta el circuito de la figura 6

Como elemento activo se incluye una pila que hace circular la corriente. Sea E su fuerza electromotriz y  $r_i$  su resistencia interna.

Se incluyen dos resistencias de protección, una de ellas variable.

Inicialmente se cortocircuita la resistencia R. (hacemos  $R=0$ ), y entonces se ajusta la resistencia  $R_p$  variable para que la aguja llegue al fondo de la escala. En otras palabras, la intensidad que circula por el circuito será  $I_i$  y se puede escribir:

$$E = I_i \cdot (R_i + r_i + R_p + R'_p) \quad [4]$$

Obsérvese que el fondo de escala del amperímetro coincide con el valor 0 de la escala de resistencias.

Si ahora se abre el cortocircuito (es decir, conectamos R), la nueva intensidad será

$$E = I \cdot (R_i + r_i + R_p + R'_p + R) \quad [5]$$

y se verifica que  $I < I_i$ .

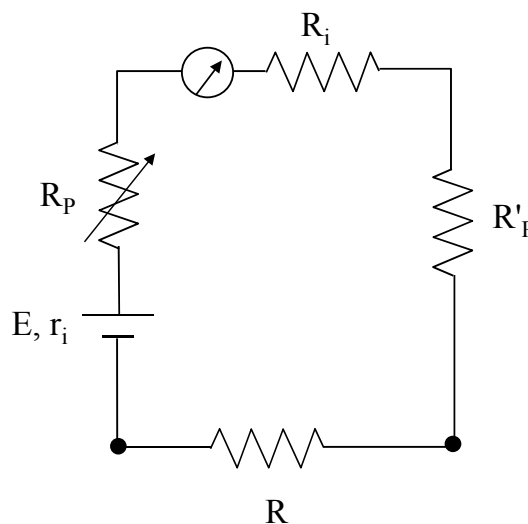


Figura 6

Combinando las dos ecuaciones [4] y [5], se obtiene:

$$R = \frac{E}{I} - \frac{E}{I_i}$$

Al ser la resistencia inversamente proporcional a la intensidad que circula, la escala de resistencias aumenta de derecha a izquierda (al contrario que la escala de intensidades). De la ecuación anterior deducimos también que la escala de resistencias no es lineal, como puede observarse en la escala. Esto implicará gran error de medida en algunos valores de R. Obsérvese que para  $I \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$ , y cuando  $I \rightarrow I_i$ ,  $R \rightarrow 0$ .

Una vez que se ha conectado el circuito de la Figura 6 siguiendo las indicaciones de la placa del polímetro, éste se convierte en un óhmetro.

Los bornes + - del polímetro son los puntos donde debemos conectar la resistencia a medir.

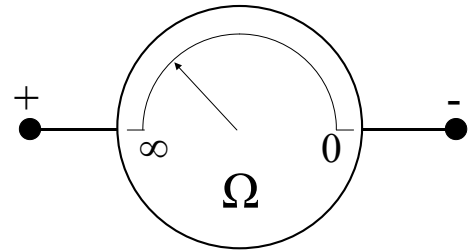


Figura 7

## Práctica

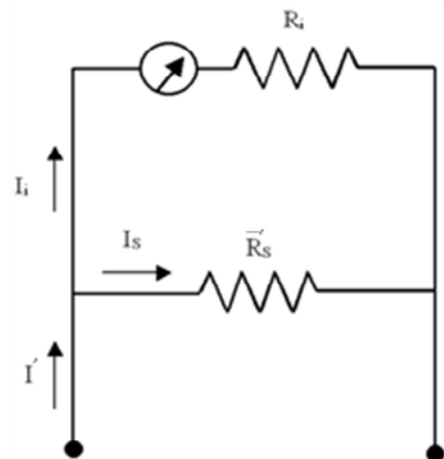
### Amperímetro.

A.- Una vez leído el apartado 1, construya el miliamperímetro realizando las conexiones indicadas en la placa del polímetro. Utilice la resistencia shunt disponible  $\bar{R}_s$ . Para ello, es necesario, previamente, realizar los apartados a) y b) siguientes.

- a) Se calculará el valor de la resistencia shunt  $\bar{R}_s$  necesaria para que el fondo de escala sea de 10 mA (utilizando [1] y [2]) :

$$\bar{R}_s = \frac{\bar{I}_i \cdot R_i}{0,010 - \bar{I}_i} \quad (S.I.)$$

Calcule también su error.



Como no es posible tener una resistencia comercial que sea exactamente la calculada  $\bar{R}_s$ , elegiremos una resistencia comercial aproximada  $\bar{R}'_s$  que sea algo menor ( $R'_1 < R_i$ ), como veremos a continuación.

Sustituyendo  $\bar{R}'_s$  en la ecuación anterior, en vez de  $\bar{R}_s$ , podemos despejar el valor aproximado  $I'$  que le corresponde (en vez de  $I=10$  mA). Al utilizar  $\bar{R}'_s$  en vez de  $\bar{R}_s$  es necesario aplicar a las lecturas de la corriente que midamos, un factor de corrección  $f_1$ .



Este valor es:  $I = f_1 \cdot I'$ , siendo  $f_1 = I(\text{calculada}) / I'(\text{aproximada})$ .

A partir de [1] y [2], tenemos:  $\bar{I}_i = \frac{I}{1 + \frac{R_i}{\bar{R}_s}}$

entonces:  $f_1 = \frac{\bar{I}_i}{I'} = \frac{\left(1 + \frac{R_i}{\bar{R}_s'}\right)}{\left(1 + \frac{R_i}{\bar{R}_s}\right)} > 1$  ya que *debe ser  $\bar{I}_i > I'$*  [6]  
(y por tanto  $\bar{R}_s > \bar{R}_s'$ )

b) Para medir con el miliamperímetro es necesario conocer el factor de corrección. Calcule dicho factor  $f_1$  con la ec. [6] y su error correspondiente. Multiplique todas sus medidas de corriente por dicho factor para dar un valor correcto de la medida.

B.- Construido el amperímetro, y con la fuente de corriente continua, conecte el circuito de la Figura 8.

Mida la intensidad que circula para las distintas salidas de la fuente  $V_{\text{fuente}}$ .

Con el valor leído para cada  $V_{\text{fuente}}$  y el medido de  $I$  se calcula el valor de la resistencia  $R_1$  que proporciona la ley de Ohm  $R_1 = V_{\text{fuente}} / I^*$ . Elabore la tabla I de resultados siguiente:

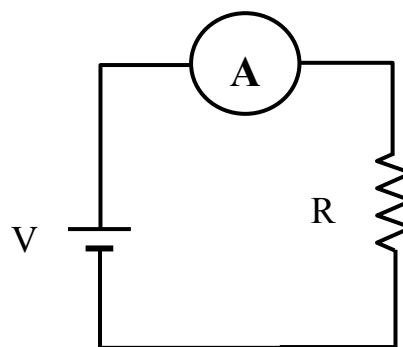


Figura 8

Tabla I  
medidas amperímetro

$V_{\text{fuente}}$ (V)	$I$ (mA)	$I^* = I \cdot f_1$ (mA)	$R_1 = V_{\text{fuente}} / I^*$
12			
1'5			

Con estas medidas, obtenga el valor medio de  $R_1$  y su error correspondiente:

$$\langle R_1 \rangle \pm \Delta R_1 = \dots \pm \dots \Omega (\pm \quad \%)$$

Compárelo con el valor de  $R_1$  por el código de colores:

$$R_1 \pm \Delta R_1 = \dots \Omega (\pm \quad \%)$$

## Voltímetro

A.- Una vez leído el apartado 2, construya un voltímetro realizando las conexiones indicadas en la placa del polímetro. Utilice la resistencia disponible  $\bar{R}_V$ . Para ello, es necesario, previamente, realizar los apartados a) y b) siguientes.

- a) Tal y como sucede en el amperímetro, no se dispone de una resistencia o combinación de resistencias con el valor exacto para que el fondo de escala sea de 10 V, lógicamente cuando la aguja señale el fondo de escala en el exterior del polímetro no habrá 10 V. Se puede calcular el valor aproximado  $V'$  del voltaje en los bornes + - del polímetro mediante la ecuación [3], sustituyendo esta vez el valor aproximado de la resistencia  $\bar{R}_V$  por la  $\bar{R}'_V$  aproximada de que disponemos. Ésta debe ser algo mayor que  $\bar{R}_V$  como veremos a continuación.

Calcule el valor  $\bar{R}_V$  para que el fondo de escala del voltímetro sea de 10 V. Para ello utilice la ec. [3] de la que se obtiene:

$$\bar{R}_V = \frac{10 V}{\bar{I}_i} - R_i \quad (S.I.)$$

Una vez calculada  $\bar{R}_V$  elija una resistencia comercial de valor próximo  $\bar{R}'_V$  (algo mayor como se verá a continuación  $R'_V > R_V$ ).

Al utilizar  $\bar{R}'_V$  en vez de  $\bar{R}_V$ , es necesario aplicar a las lecturas de la tensión que midamos, un factor de corrección  $f_V$ .

Este valor es:  $I = f_V * I'$

siendo  $f_V = I(\text{calculada}) / I'(\text{aproximada})$ .

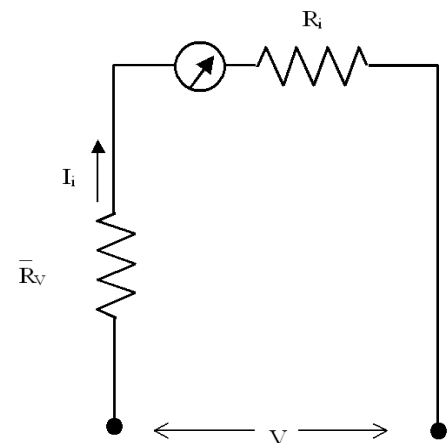
Para obtener el factor de corrección del voltímetro  $f_V$  utilice de nuevo la ec. [3] con el nuevo valor  $\bar{R}'_V$ . Calcule entonces el cociente  $I_i / I'_i$  (como en el caso del amperímetro). En este caso debe cumplirse:

$$V = \bar{I}_i \cdot (R_i + \bar{R}_V) = \bar{I}'_i \cdot (R_i + \bar{R}'_V)$$

Entonces el factor  $f_V$  es:

$$f_V = \frac{I_i}{I'_i} = \frac{R_i + \bar{R}'_V}{R_i + \bar{R}_V} > 1 \quad [7]$$

ya que debe ser  $I_i > I'_i$  y por tanto  $\bar{R}'_V > \bar{R}_V$



- b) Para medir con el voltímetro es necesario conocer el factor de corrección. Calcule dicho factor  $f_V$  con la ec. [7] y su error correspondiente. Multiplique todas sus medidas de tensión por dicho factor para dar un valor correcto de la medida.

B.- Construido el voltímetro, y con la fuente de corriente continua, conectar el circuito de la Figura 9

Para comprobar el funcionamiento correcto del voltímetro, con cada voltaje de salida de la fuente se mide la diferencia de potencial en las resistencias  $R_2$  y  $R_3$ .

Con el valor leído para cada  $V_{\text{fuente}}$  y las medidas de  $V_2$  y  $V_3$  elabore la tabla II de resultados siguiente:

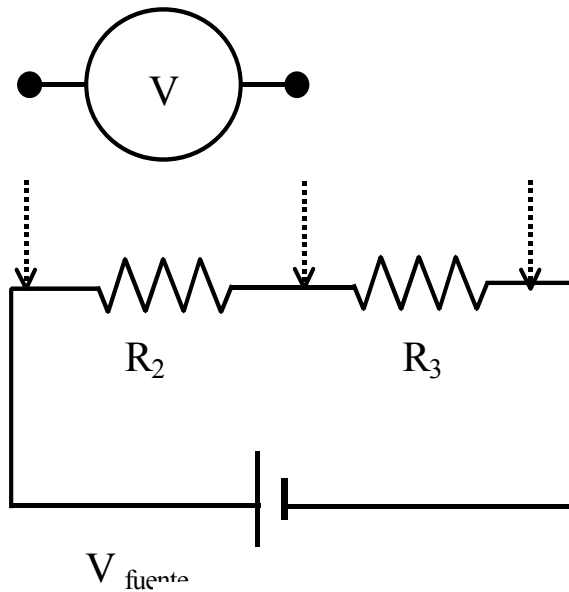


Figura 9

**Tabla II**  
**medidas voltímetro**

$V_{\text{fuente}}$	$V_2$	$V_3$	$V_2+V_3$	$(V_2+V_3) \cdot f_V$	$V_2/V_3$

En cada fila compruebe que:

$$(V_2 + V_3) \cdot f_V \approx V_{\text{fuente}}$$

Calcule el siguiente valor medio y su error

$$\left\langle \frac{V_2}{V_3} \right\rangle \pm \Delta = \dots \pm \dots (\pm \quad \%)$$

Compruebe que debe coincidir con la proporción entre las resistencias utilizadas hallada mediante el código de colores (con su tolerancia):

$$\frac{R_2}{R_3} = \dots \pm \quad \%$$

### **Medida de resistencias.**

- 1.- Conecte el circuito de la Figura 6 para  $R = 0$  , es decir cortocircuitando los bornes + .- del polímetro. Para ello se utilizan las resistencias  $R_P$  (variable) y  $R'_P$  de la placa. Como pila se conecta la salida de 1'5 V de la fuente de C.C.. Ajustar la resistencia variable para que el instrumento marque 0 k $\Omega$ .

Puesto que la escala está graduada, para medir una resistencia lo único que se debe hacer es sustituir el cable de cortocircuito por la resistencia a medir.

- 2.- Una vez leído el apartado 1, mida las resistencias de la placa, anotando su error . Construya una tabla donde se incluyan los valores de las resistencias medidas (con su error) junto con el valor comercial de las mismas y su error.  
ATENCIÓN: El error varía enormemente según la zona de la escala en la que se mida, pues la escala no es lineal. Anote el error según la zona de la escala donde se mida.

## 3.2 APARATOS DE MEDIDA

### Material

Autotransformador. Voltímetro de C.A. . Amperímetro de C.A.. Dos resistencias óhmicas de 680 ohm y 1000 ohm. Caja de resistencias 0-1000 ohm. Las resistencias presentan una tolerancia del 5%.

### Objeto

Medida de resistencias óhmicas . Estudio de su relación con las resistencias internas de los aparatos de medida.

### Teoría

Es un principio bien establecido que siempre que se proceda a la medida de una magnitud física debe cuestionarse la perturbación que el sistema experimental pueda hacer sobre el valor de dicha magnitud. Dicha cuestión, llevada al límite, nos llevaría a la consecuencia de que es imposible medir ninguna magnitud sin que esta sea perturbada por el mismo proceso de medida.

En esta práctica se trata de analizar la influencia de los aparatos de medida en la determinación de una resistencia óhmica  $R$ .

Sabido es que un amperímetro o un voltímetro, analógicos son, en síntesis, un galvanómetro de resistencia interna pequeña o grande, respectivamente. Es evidente que el amperímetro deberá ir conectado en serie con la carga  $R$ , midiendo así la corriente eléctrica que pasa por ésta, en tanto que el voltímetro deberá ir en paralelo a la carga para conocer la diferencia de potencial que existe entre sus bornes. Cuánto mayor sea la resistencia interna del voltímetro, tanto menor será la intensidad  $I_v$  que "le quite" al circuito (Fig 1), de modo que la lectura del voltímetro sería:

$$V = R (I - I_v) \cong R I \quad [1]$$

El voltímetro ideal sería aquél en el que  $R_v = \infty$  ( $I_v = 0$ )

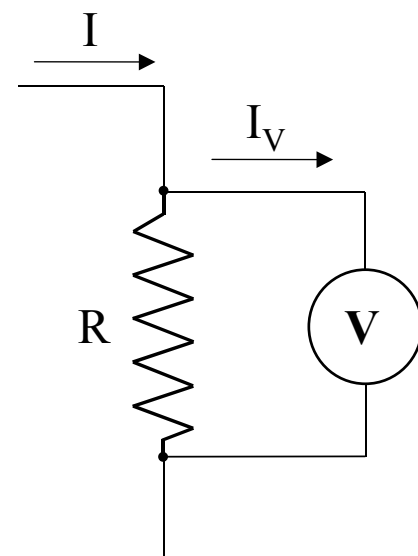


Figura 1

Quando se trabaja en C.A. resulta más adecuado hablar de "impedancia interna" en vez de resistencia interna. En general, el fabricante acostumbra a indicar el valor de esta impedancia de entrada del aparato de un modo indirecto. Es decir, suele dar la "sensibilidad"  $S$  del aparato, parámetro directamente relacionado con aquél, que indica de alguna manera la calidad del mismo, y que merece comentario aparte.

La sensibilidad de un voltímetro se mide en ohmios/voltio y, en corriente continua, es el inverso de la corriente que recorre el cuadro del galvanómetro cuando la aguja está a fondo de escala:  $I_{f.e.}$

$$S_{CC} = \frac{1}{I_{f.e.}} \quad [2]$$

La impedancia de entrada,  $(Z_{int})_{CC}$  se obtiene, simplemente, multiplicando la sensibilidad por la tensión que mide a fondo de escala  $V_{f.e.}$  el voltímetro, en la escala seleccionada.

$$(Z_{int})_{CC} = S_{CC} \cdot V_{f.e.} \quad ; \quad (Z_{int})_{CC} = \frac{V_{f.e.}}{I_{f.e.}} \quad [3]$$

De igual modo que en C.C., la sensibilidad en C.A. está relacionada con la impedancia de entrada por medio de:

$$(Z_{int})_{CA} = S_{CA} (V_{ef})_{f.e.} \quad [4]$$

En C. A. la sensibilidad suele ser menor que en C.C. a no ser que el voltímetro lleve algún dispositivo interno que compense esta acción. En efecto, la aguja del aparato responde al valor medio de la señal. Así pues, un voltímetro por el que pasa una corriente alterna:  $I=I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , marcaría cero, pues su valor medio en un período es cero. Si la frecuencia de la señal es muy pequeña, la aguja seguiría a la señal, oscilando hacia derecha e izquierda; si fuese grande, la aguja quedaría "agarrotada". Para evitarlo, los aparatos de medida en C. A. miden valores eficaces, previamente rectificadas la corriente. Por ello, en C.A. usaremos valores eficaces de corriente y tensión y la expresión que utilizaremos para la sensibilidad será la de ec. [4].

### Práctica

- 1º) Constrúyase el circuito de la figura 2 , montaje 1º. Variando la tensión del autotransformador de alimentación del circuito, tómenselo 8 o 10 lecturas en el amperímetro y en el voltímetro , calculando en cada caso el valor de  $R_0$  según la expresión:  $R_0 = \frac{V}{I}$  , anotándolo en la Tabla I .

Por último, hállese el valor medio de  $R_0$  y su error cuadrático medio.

Es evidente que el valor  $R_0$  así calculado no corresponde exactamente al verdadero valor de la resistencia óhmica  $R$ , pues la intensidad que pasa por ésta no es la total  $I$  sino

$$I' = I - I_V .$$

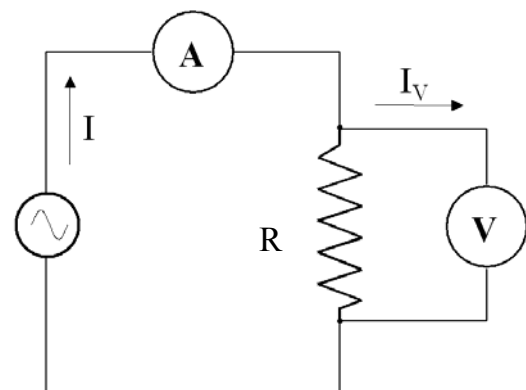


Figura 2. Montaje 1º

En la medida que  $I_v \ll I'$  entonces  $I' \cong I$  y, por tanto, se cumplirá que  $\underline{R_0} \approx \underline{R}$ . Para ello debe cumplirse que  $R_v \gg R$ . En efecto:

$$I = (I' + I_v) = \frac{V}{R} + \frac{V}{R_v} = V \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_v} \right) = V \left( \frac{1}{R_0} \right) \quad [5a]$$

$$\Rightarrow R_0 = \frac{R R_v}{R + R_v} = \frac{R}{(R/R_v) + 1} \quad (R \approx R_0 \text{ si } R_v \gg R_0) \quad [5b]$$

2°) Constrúyase ahora el circuito de la figura 3, montaje 2° y procédase de modo análogo al anterior, anotándolo en la Tabla II.

Con el montaje 2°, la resistencia  $R_1$  resultado directo de las medidas del voltímetro y amperímetro, vendrá dada por:

$$R_1 = \frac{V}{I}$$

Como en el montaje 1°, tome 8 o 10 lecturas en el amperímetro y en el voltímetro, variando la tensión del autotransformador de alimentación del circuito con diferencias entre valores consecutivos de 8 o 10 V (tabla II).

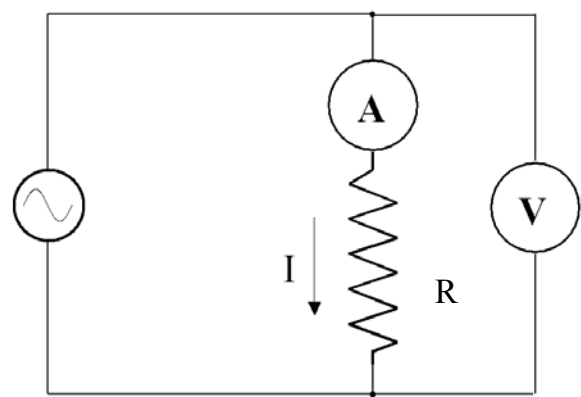


Figura 3. Montaje 2°

Calcule en cada caso el valor de  $R_1$ . Finalmente halle su valor medio y su error cuadrático medio.

Con este 2° montaje, el resultado obtenido para  $R_1$  tampoco corresponderá al verdadero valor de la resistencia  $R$ , pues si bien la corriente que pasa por la misma corresponde a la que indica el amperímetro, la lectura que indica el voltímetro  $V$ , no es exactamente la diferencia de potencial en bornes de dicha resistencia, sino:

$$V = (R + R_{amp})I = R_1 I \quad \Rightarrow \quad R = \frac{V}{I} - R_{amp} = R_1 - R_{amp} \quad [6].$$

Si  $R_{amp} \ll R_1$ , entonces de la ec. [6] obtenemos que  $\underline{R_1} \approx \underline{R}$ .

Nota: Para poder juzgar la bondad de las dos aproximaciones, la del montaje 1° y la del montaje 2°, respectivamente, conviene recordar que la resistencia del amperímetro,  $R_{amp}$ , es mucho menor que la del voltímetro  $R_v$  y, además,  $R_{amp}$  suele ser del orden de las decenas de ohmio.

3º) Comprobación de la Ley de Ohm y determinación aproximada de la resistencia.

Con los valores recogidos en la Tabla I (montaje 1º, fig. 2) y en la Tabla II (montaje 2º, fig. 3), representéense gráficamente los resultados experimentales (la intensidad  $V$  en abscisas y la tensión  $I$  en ordenadas) para cada uno de los dos montajes .

Tabla I

$V$ (volt)	$I$ (mA)	$R_0$ (ohm)

Tabla II

$V$ (volt)	$I$ (mA)	$R_1$ (ohm)

Con los datos de la tabla I, realícese el ajuste a una recta de la ecuación:

$$I = V / R_0 ,$$

para el montaje 1º, fig. 2

Análogamente, con los datos de la tabla II realícese el ajuste a una recta de la ecuación :

$$I = V / R_1 ,$$

para el montaje 2º, fig. 3 ( la intensidad  $V$  en abscisas y la tensión  $I$  en ordenadas en ambos montajes).

El comportamiento lineal entre  $I$  y  $V$  que representa La Ley de Ohm, es a su vez ‘la curva característica’ ,  $I$  respecto a  $V$ , de los conductores sólidos y líquidos a temperatura ambiente (comportamiento óhmico). Sin embargo la relación lineal entre  $I$  y  $V$ , incluso a temperatura ambiente, se cumple aproximadamente en mayor o menor grado en las medidas experimentales, tal y como se verificará en esta práctica.

A la vista de los dos ajustes realizados, se comprobará si la relación entre ambas variables ( $I$  y  $V$ ) es lineal (coeficiente de correlación próximo a 1). Obténgase la pendiente y la ordenada en el origen junto con sus respectivos errores en ambos casos.

Finalmente, determine el valor de las resistencias  $R_0$  y  $R_1$ , con su error, a partir de las pendientes de las dos rectas ajustadas . Compare el resultado así obtenido para  $R_0$  y  $R_1$  con el de sus valores medios anteriormente calculados (incluido su error) para ambas resistencias.

Teniendo en cuenta los valores de  $R_0$  y  $R_1$  obtenidos en los ajustes (para cada uno de los montajes) y dado que conocemos el valor nominal de la resistencia  $R$ , diga y razone a



la vista de los errores obtenidos, cuál de los dos valores, el de  $R_0$  o el de  $R_1$ , se acerca más al verdadero valor de  $R$  dando una breve explicación.

Debido a que :

$$(\text{montaje } 1^\circ) R = R_0 \left( \left( \frac{R}{R_V} \right) + 1 \right) \text{ ec. [5] } \quad \text{y} \quad (\text{montaje } 2^\circ) R = R_1 - R_{amp} \text{ ec. [6]}$$

$R_0$  y  $R_1$  son aproximaciones al valor de  $R$ . Para mejorar el resultado y conocer el valor de la impedancia interna de un voltímetro, haremos una estimación de la misma,  $R_V$ , en el aptdo. siguiente.

#### 4º) Cálculo de la resistencia interna del voltímetro.

Conecte el voltímetro en serie con una caja de resistencias, de valores altos, tal como indica la figura 4

Con el interruptor cerrado, en corto, varíe la tensión del autotransformador de alimentación del circuito, hasta que el voltímetro marque un 80 % aproximadamente del valor a fondo de escala  $V$  (p.ej. si el voltímetro tiene una escala 0 - 50 V tomaríamos  $V_o = 40$  voltios). A continuación, abriendo el interruptor tome las lecturas del voltímetro  $V_1$ , de 8 a 10 medidas, para diferentes valores de la caja de resistencias  $R$  (Figura 4). Construya la correspondiente tabla.

Evidentemente:

$$V_o = V_1 + R$$

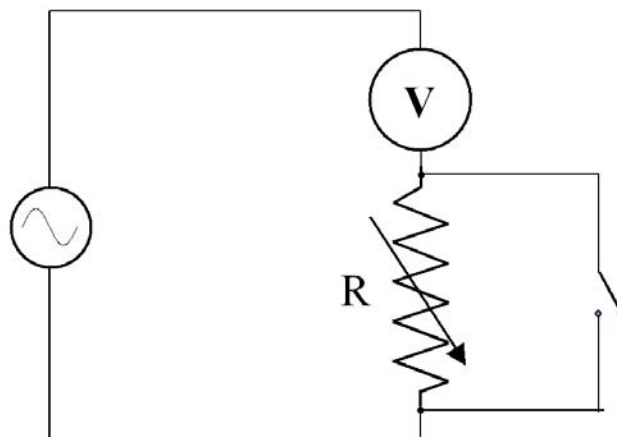


Figura 4

Despejando  $R_V$  :

$$R_V = \frac{R V_1}{V_o - V_1}$$

A partir de esta expresión, calcule  $R_V$  para cada valor de  $R$  y  $V_1$  e inclúyalo en la tabla que se acaba de construir . Calcule su valor medio, así como su error cuadrático medio, obteniendo el valor :

$$R_V = \dots\dots\dots \text{ ohm } (\pm \quad \%)$$

Obtenga la sensibilidad del voltímetro (con su error):  $S_{CA} = \frac{R_V}{(V_{ef})_{f.e.}} \quad (5) \quad ,$

(<sup>5</sup>) *f.e.* : indica a fondo de escala

luego:

$$\underline{S_{CA} = \dots\dots\dots \text{ohm/voltio } (\pm \quad \%)}$$

- 5°) Conocido el valor de la resistencia interna del voltímetro, podemos sustituir en la ecuación [5a] y calcular el valor de la resistencia  $R$  como:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_V}$$

y su error correspondiente, calculado con la operación de derivación:

$$\frac{\Delta R}{R} = R \left( \frac{\Delta R_0}{R_0^2} + \frac{\Delta R_V}{R_V^2} \right),$$

o bien, calculado con logaritmos:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R_V}{R_V} + \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{\Delta(R_V - R_0)}{(R_V - R_0)}.$$

Finalmente obtenemos para el valor de  $R$ ,

$$\underline{R = \dots\dots\dots \text{ohm } (\pm \quad \%)}$$

Este es, posiblemente, un mejor resultado para el valor de  $R$ . Depende naturalmente del propio valor de  $R_V$ . Con una resistencia interna alta para el voltímetro ( $R_V \gg R$ ), el resultado será, sin duda, el mejor de los obtenidos. Compare, pues, este resultado con los valores de los ajustes para  $R_0$  y  $R_1$  y con el valor nominal de  $R$  (incluyendo los errores de cada una de ellas). Indique, además, (razonadamente) con cuál de los dos montajes nos aproximamos más al verdadero valor de  $R$  (entendiendo por éste, el valor nominal).

- 6°) A partir de la expresión [6], y obtenido el mejor valor para  $R$ , puede hacerse una estimación de la resistencia del amperímetro:  $R_{amp} = R_1 - R$ .

Obteniendo el valor:

$$\underline{R_{amp} = \dots\dots\dots \text{ohm } (\pm \quad \%)}$$

**IMPORTANTE**: Una vez calculado el valor de la resistencia del voltímetro  $R_V$  y la del amperímetro  $R_{amp}$  se puede justificar todavía mejor la elección del montaje que ha realizado para medir  $R$ . ¿Cuál de los dos casos: a)  $R$  es del orden  $R_{amp}$  o b)  $R$  es del orden del  $R_V$  es el que se aproxima mejor al suyo?. A la vista de la respuesta y de los resultados obtenidos para  $R_0$  y  $R_1$  con sus errores incluidos, explique razonadamente por qué la elección que ha hecho del montaje para medir  $R$  del mejor modo, se corresponde bien con uno de los dos casos. Indique también *razonadamente*, qué montaje sería el adecuado si la resistencia se aproximara en valor al otro caso.

### 3.3 EL PUENTE DE HILO

#### Material

Un puente de hilo. Un microamperímetro de cero. Caja de resistencias x 1 ohm y x 10 ohm. Fuente de alimentación C.C. Dos resistores de resistencia desconocida.

#### Objeto

Medida de una resistencia eléctrica

#### Teoría

Cuando se desea conocer el valor de una resistencia  $R$ , con cierta precisión, se hace uso de los llamados "puentes de medida". De estos el más conocido es el "puente de Wheatstone" que será el que se emplee en esta práctica. Consta en esencia de 4 resistores y una batería (en nuestro caso, una fuente de alimentación de corriente continua) montados según el esquema de la figura 1.

Resolviendo el circuito por mallas, se tiene el sistema:

$$E_o = I_o (R_3 + R_4 + r_o) - I_1 R_4 - I_2 R_3$$

$$0 = -I_o R_4 + I_1 (R_1 + R_4 + r_g) - I_2 r_g$$

$$0 = -I_o R_3 - I_1 r_g + I_2 (R_2 + R_3 + r_g)$$

donde  $r_o$  es la resistencia interna de la batería, y  $r_g$  la del instrumento de medida.

En la práctica, el instrumento que se coloca en la rama BD es un microamperímetro con el cero en el centro de la escala. En el proceso de medición, se ajustan las resistencias  $R_i$  para que no pase corriente por la rama BD (Fig. 1) y el aparato marque el 0 de la escala. Se dice entonces que el puente está "equilibrado". En este momento:

$$I_1 = I_2 = I \quad [1]$$

y el sistema anterior de ecuaciones se puede ahora escribir:

$$E_o = I_o (R_3 + R_4 + r_o) - I (R_3 + R_4) \quad [2]$$

$$0 = -I_o R_4 + I (R_1 + R_4) \quad [3]$$

$$0 = -I_o R_3 + I (R_2 + R_3) \quad [4]$$

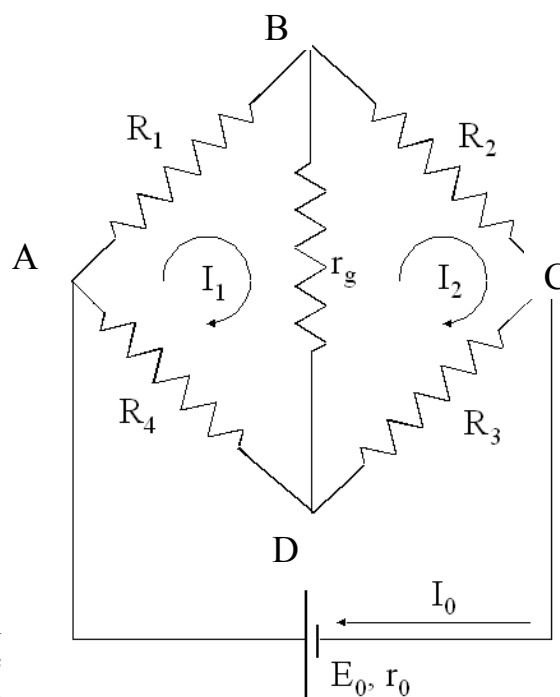


Figura 1

De las ecuaciones [3] y [4] se deduce que

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_1 + R_4}{R_2 + R_3} \quad [5]$$

y por tanto

$$R_2 R_4 = R_1 R_3 \quad [6]$$

Conocidas tres de estas resistencias se puede calcular la cuarta mediante la expresión [6]. Los puentes de medida tienen la ventaja de que es posible medir una gama muy amplia de resistencias con gran precisión. Además, la intensidad que circula por el resistor problema es muy pequeña, lo cual permite conocer el valor "en frío", sin tener que considerar la modificación que pudiera haber sufrido su valor al elevarse la temperatura por efecto Joule.

En la práctica, el "puente de hilo", es un caso particular del puente de Wheatstone. En él, las resistencias  $R_3$  y  $R_4$  se han sustituido por un hilo conductor de cierta resistencia por unidad de longitud (generalmente de una aleación de manganina o Kantall) y se busca el equilibrio del galvanómetro variando el contacto B.

Cuando se encuentra el equilibrio, aplicando la ecuación [6], donde ahora:

$$R_1 = R \quad R_2 = r \quad R_3 = R_L - R_x \quad R_4 = R_x$$

siendo  $R_L$  la resistencia total del hilo del puente y  $R_x$  la del tramo AB.

Se tiene:

$$r \cdot R_x = R (R_L - R_x) \quad [7]$$

Si la sección del hilo es uniforme, S:

$$R_L = \rho \frac{L}{S} \quad ; \quad R_x = \rho \frac{x}{S}$$

De la ecuación [7] se deduce:

$$r = R \left( \frac{L}{x} - 1 \right) \quad [8]$$

Es muy interesante observar que se obtiene mayor exactitud en la medida cuando el equilibrio se consigue en el centro del tramo AC (que llamaremos *el hilo*). En efecto, si se supone que el origen de referencia permanece fijo, se deduce de la figura 2 :

$$x = AB = x_B - x_A$$

$$L - x = BC = x_C - x_B$$

$$L = AC = x_C - x_A$$

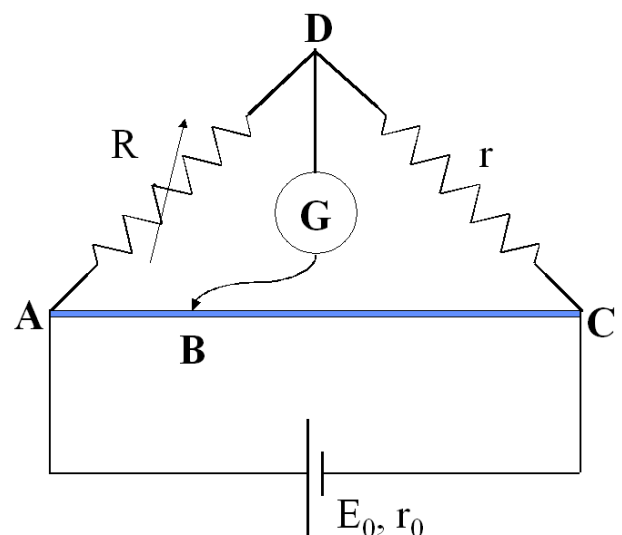


Figura 2

luego:

$$r = \frac{BC}{AB} R = \frac{x_C - x_B}{x_B - x_A} R$$

El error relativo de r dependerá de los errores en las posiciones A, B y C.

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta x_C + \Delta x_B}{x_C - x_B} + \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{x_B - x_A}$$

si se supone que  $\Delta x_A = \Delta x_C$  se puede escribir:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta R}{R} + (\Delta x_A + \Delta x_B) \left( \frac{1}{x_C - x_B} + \frac{1}{x_B - x_A} \right) \quad [9]$$

La determinación de r será tanto más precisa cuanto más pequeña sea la suma :

$$y = \frac{1}{x_C - x_B} + \frac{1}{x_B - x_A} \quad [10]$$

Imponiendo la condición de mínimo:

$$\frac{dy}{dx_B} = 0$$

se obtiene:

$$x_C + x_A = 2x_B$$

es decir, en el centro del hilo el error será mínimo, como se aprecia en la figura 3.

Por este motivo es conveniente que la resistencia de la caja de resistencias R sea del orden de magnitud que la resistencia que se desea medir, r.

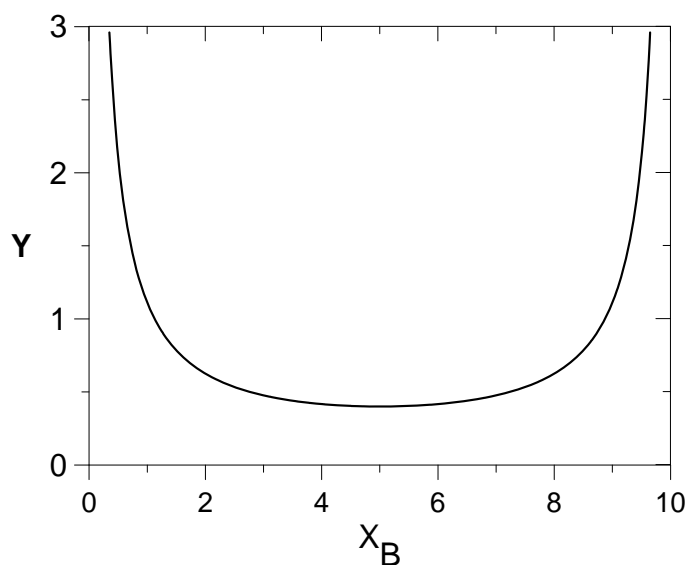


Figura 3

## Práctica

Móntese el circuito de la figura 2 .

Para tener una mayor seguridad en la determinación de r, se hace uso de una caja de resistencias R y se dan valores adecuados a ésta, para conseguir puntos de equilibrio comprendidos entre las divisiones 3 y 7 del puente, supuesto que la longitud de este es de 10 divisiones, pues en este intervalo todas las medidas tienen un margen de precisión parecido, como se aprecia en la figura 3.

Se tomarán 8 o 9 posiciones de equilibrio (*cada una de ellas al menos dos veces y tome la media*) para cada uno de los **dos resistores** de resistencia desconocida, calculándose el valor medio y el error cuadrático medio correspondiente para cada uno de ellos.

**Elaboración de RESULTADOS**

**Para cada resistor** debe realizarse una tabla como la siguiente:

**TABLA I**  
**Medida de resistencias con el puente de hilo**

<b>R</b> (ohm)	<b>x</b> (cm)	<b>1/R</b> (ohm) <sup>-1</sup>	<b>L/x</b>	<b>r</b> (ohm)

La resistencia incógnita se podrá obtener por tres procedimientos:

1º) Procedimiento 1.

Represente una gráfica que exprese en ordenadas L/x y en abscisas 1/R , debe obtenerse una recta de pendiente r. En efecto, de la ecuación [8] se tiene:

$$\frac{L}{x} = 1 + r \left( \frac{1}{R} \right)$$

Calcule la pendiente y la ordenada en el origen (con sus errores respectivos) por mínimos cuadrados o por "pares de puntos". Finalmente obtenga r con su correspondiente error. Compruebe que la ordenada en el origen es prácticamente la unidad.

2º) Procedimiento 2.

Conviene destacar que el error cuadrático medio de r calculado anteriormente da una idea de la dispersión de las medidas, pero no corresponde al error real de r pues habría que tener en cuenta el error de la caja de resistencias y el cometido en la fijación de los contactos A y B.

En efecto, tómese un valor de la tabla anterior próximo a  $x_B=50$  cm y sustitúyase en la ecuación [9], en la que se supondrá que el error de la caja de resistencia es del 5% ( $\Delta R/R=0.05$ ) , el del contacto A es de 1 mm y el de B de 2 mm ( $\Delta x_A = 0.1$  cm;  $\Delta x_B = 0.2$  cm). Hágase una estimación del error de r por propagación de errores a partir de la fórmula [9].

Halle r a partir de la expresión [8] y **asóciele** la estimación del error calculado.

3º) Procedimiento 3.

Efectúe un promedio de todos los valores de r obtenidos en la última columna de la Tabla y **asóciele** el error del promedio correspondiente.

### Advertencias

- 1º) La fuente de alimentación conviene que esté conectada únicamente cuando se va a medir.
- 2º) Recuérdese que cuando el equilibrio se obtiene en el centro del hilo, no solo es donde se comete menor error, sino que, además, sabemos que en ese momento la resistencia de la caja coincide con la resistencia problema. Conviene hacer una estimación, antes de comenzar la medida, del intervalo de variación de la caja de resistencias para que los equilibrios queden dentro de las divisiones 3 y 7, y poder espaciar así los valores de R.
- 3º) Tómese siempre 8 o 9 posiciones de equilibrio en el puente. Para cada posición tome al menos dos valores dando como resultado la media de ambos. Si difieren en más de un 30% entre sí, tómese un nuevo valor y haga la media de los tres.





### 3.4 CARGA Y DESCARGA DE UN CONDENSADOR

#### Material

Placa de componentes. Generador de c.c. de 9V ( $\pm 5\%$ ). Polímetro. Cronómetro.

#### Objeto

Comprobación de las leyes de carga y descarga de un condensador. Medida de capacidades y obtención de la constante de tiempo  $\tau$  del circuito.

#### Objeto

Comprobación de las leyes de carga y descarga de un condensador. Medida de capacidades y obtención de la constante de tiempo  $\tau$  del circuito.

#### Teoría

El condensador es un elemento básico en todos los circuitos eléctricos y electrónicos. El conocimiento de las leyes de carga y descarga del mismo es un tema central cuando tratamos de sus propiedades de almacenamiento de carga y de energía electrostática así como de sus aplicaciones a circuitos básicos en física, electrónica y comunicaciones. En esta práctica, el análisis de su funcionamiento, se lleva a cabo mediante la respuesta de un circuito eléctrico RC serie con un generador de cc. En otras prácticas del LFIS aparece de nuevo el tema de las leyes de carga y descarga del condensador, cuando se analizan los circuitos RC y RLC con el osciloscopio.

- **Proceso de carga:** Consideramos un circuito RC serie como el de la figura 1a, en el que, en el instante inicial el condensador está descargado. La ecuación del circuito:  $V_C + Ri = V_0$ , corresponde a una ecuación diferencial lineal de primer orden en  $Q$ :  $Q/C + R dQ/dt = V_0 \Rightarrow$

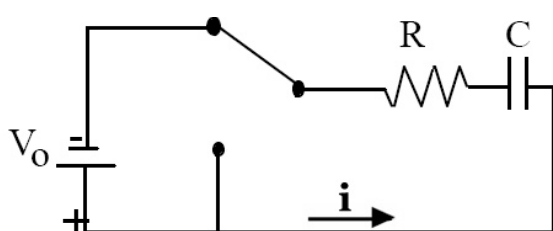


Figura 1a

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q - \frac{V_0}{R} = 0$$

Su solución  $Q(t)$  es la ley de la carga de un condensador de capacidad  $C$  a través de una resistencia  $R$  con un generador de f.e.m.  $V_0$  al cabo de un tiempo  $t$ . Esta solución también se puede expresar en términos de la d.d.p.  $V_C(t) = Q(t)/C$  entre sus armaduras y de la corriente de carga  $i(t)$ :

**Leyes de Carga:**  $V_C(t)$ ,  $Q(t)$  e  $i(t)$  tienen las siguientes expresiones:

#### Proceso de CARGA

$$V_C(t) = V_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad \text{o} \quad Q(t) = CV_C = CV_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = Q_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$i(t) = \frac{(V_0 - V_C)}{R} = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = i_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

, [1]

donde  $Q_0$  representa la carga máxima almacenada por el condensador e  $i_0$  el valor de la corriente en  $t=0$ .

Hay que destacar el coeficiente de la exponencial, el producto  $\tau = RC$ . Se llama **constante de tiempo del circuito**, tiene dimensiones de tiempo (compruébese) y expresa la mayor o menor velocidad de carga y descarga, lo que en electrónica se traduce por una mayor o menor rapidez en la respuesta del circuito en los procesos transitorios.

**En el proceso de carga**  $\tau$  representa el tiempo que el condensador tarda en adquirir una carga  $Q(\tau) = Q_0 (1 - e^{-1}) \approx 0,63 Q_0$ , que representa el 63% de su carga final,  $Q_0 = CV_0$ .

Una conclusión importante es que esa 'mayor o menor rapidez' en cargarse (o descargarse) un condensador depende de  $R$  y de  $C$  pero no de la mayor o menor tensión  $V_0$  de alimentación del circuito.

- **Proceso de descarga:** Una vez cargado el condensador con una carga  $Q_0$  y una d.d.p.  $V_{OC}$ , suprimimos la batería del circuito de la figura 1a quedando el circuito

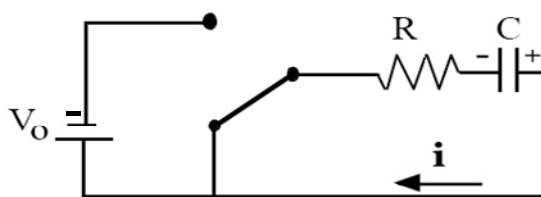


Figura 1b

que se muestra en la figura 1b, donde:

$$V_C + Ri = 0 \Rightarrow Q/C + R dQ/dt = 0$$

La ecuación diferencial es ahora:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q = 0$$

Al resolverla obtenemos **las leyes de descarga** al cabo de un tiempo  $t$  a través de la resistencia  $R$ . Estas leyes para  $Q(t)$ ,  $V_C(t)$  e  $i(t)$ , son las siguientes:

#### Proceso de DESCARGA

$$V_C(t) = V_{OC} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad Q(t) = CV_C = CV_{OC} e^{-\frac{t}{RC}} = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad [2]$$

$$i(t) = \frac{V_C}{R} = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_{OC}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = i_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

**En la descarga**, el condensador tarda un tiempo  $\tau = RC$  en reducir su potencial y su carga a  $V=V_0/e$  y  $Q=Q_0/e$  desde sus valores iniciales  $V_0$  y  $Q_0$ , es decir, en reducirse a un 37% de los mismos. Al cabo de cuatro constantes de tiempo, la exponencial  $e^{-4}$  vale 0,018, luego sólo circula un 1,8 % de la corriente inicial  $i_0$ , se puede considerar que ha terminado el régimen transitorio y el circuito pasa al estado o régimen permanente en el que  $i=0$ .

En la figura 2 se puede ver el **significado de la constante de tiempo  $\tau = RC$** , para el proceso de carga. En esta figura, al cabo de un tiempo  $t = \tau$  la tensión del condensador aumenta desde 0 a  $V_0/e = 0.63 V_0$ , siendo  $V_0$  la tensión final alcanzada (la del generador).

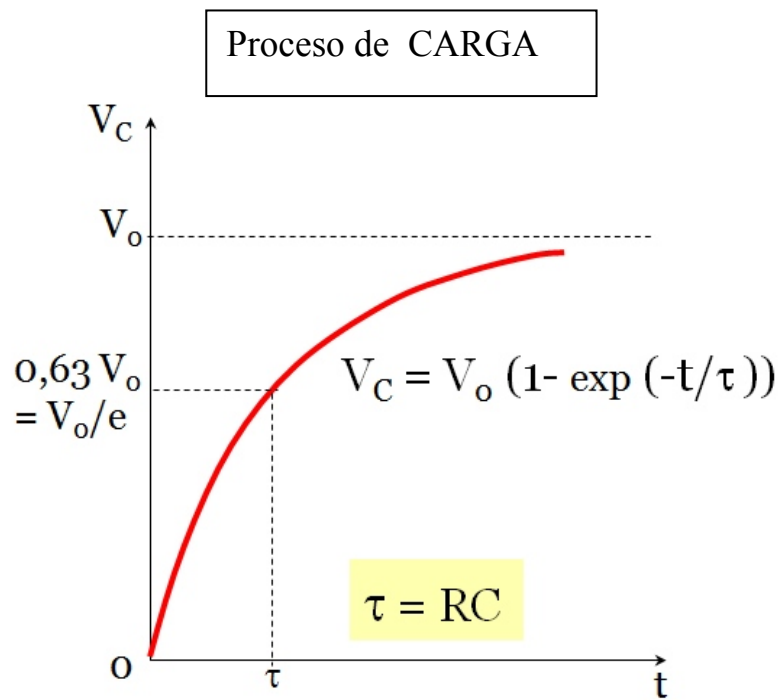


Figura 2.

Las leyes exponenciales para el proceso de carga y descarga se pueden apreciar en las figuras 3 y 4. En la figura 3 para la tensión  $V_C$  en bornes del condensador y en la figura 4 para la carga del mismo. Como la constante de tiempo  $\tau = RC$  es la que controla el comportamiento exponencial tanto de la tensión  $V$ , como de la carga  $Q$  o de la corriente  $i$  que circula por el circuito, podemos observar en las dos figuras la misma tendencia (lenta o rápida del proceso). A mayor constante de tiempo más lento será el proceso y viceversa.

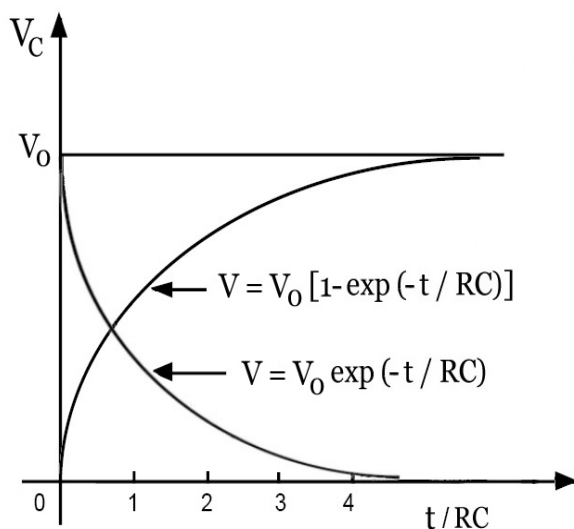


Figura 3.

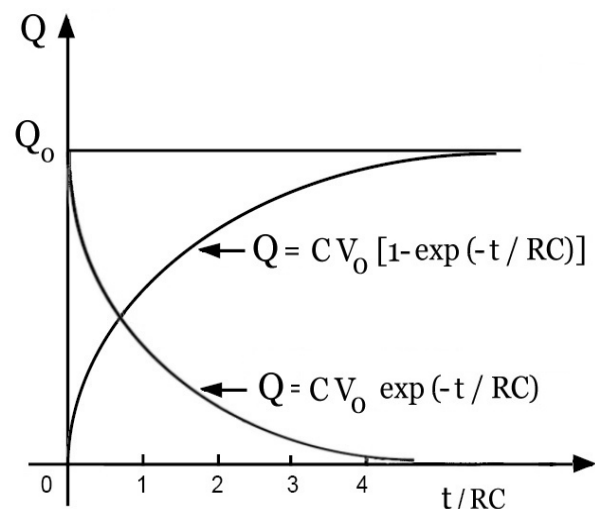


Figura 4.

En ambas gráficas se emplea  $\tau$  como unidad de tiempo.

## Práctica

### Objeto y descripción del equipo y circuito de medida

Se trata de estudiar la ley de la carga y descarga de un condensador empleando circuitos  $RC$  serie tales que el proceso temporal pueda ser seguido por el alumno con ayuda de un cronómetro ordinario y un voltímetro  $V$  para conocer la d.d.p.  $V_C ( t )$  en el condensador tanto en la carga como en la descarga (véase la figura 5).

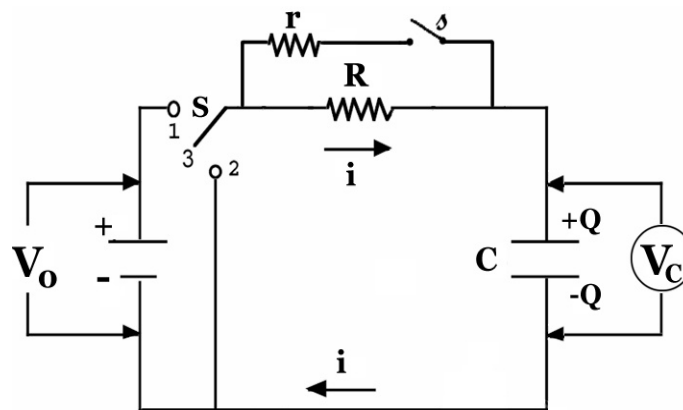


Figura 5.

El circuito empleado consta de una generador de f.e.m.  $V_0$  , una resistencia  $R$ , un condensador  $C$  y tres elementos auxiliares. Los elementos auxiliares son:

- una resistencia  $r$  ( pequeña ) en serie con un interruptor  $\delta$  cuya función es la de cargar o descargar rápidamente el condensador al cerrar dicho interruptor (constante  $\tau' = r C$  pequeña). El conjunto se conecta en paralelo con la resistencia  $R$  (grande) .

El interruptor  $\delta$  *deberá permanecer abierto normalmente*, es decir, para las operaciones de carga y descarga del condensador objeto de la práctica (figura 5).

*NOTA:* hay que cerrar  $\delta$  si se quiere realizar una carga rápida (si inicialmente estaba descargado), o si se quiere realizar una descarga rápida (estando inicialmente cargado) con el fin de iniciar el proceso de medida que se pretende.

- Un conmutador de tres posiciones  $S$  ( Figura 5 ) que permite tres alternativas:

Posición 1 *Inserción del generador de f.e.m.  $V_0$  en el circuito  $RC$* , lo que tendrá lugar para el estudio de la carga del condensador.

Posición 2 *Establecimiento de un cortocircuito.* Si se ha cargado el condensador y a continuación se desea estudiar la descarga del mismo a través del circuito  $RC$  manteniendo aislado el generador.

Posición 3 *Establecimiento de un circuito abierto* cuando se quiera abrir el circuito  $RC$  y aislar tanto el generador como el condensador. Se partirá de esta posición al comienzo de cada medida. Habrá que comprobar que todos los aparatos están conectados correctamente,

El circuito de la figura 5 muestra la conexión *correspondiente al circuito abierto* (posición **3** del conmutador **S**).

### **Desarrollo experimental**

Los elementos **S** y **♯** de la figura 5 sirven para describir las acciones de conexión y desconexión que se efectúan en el proceso de medida. *El alumno llevará a cabo estas operaciones manualmente* conectando o desconectando del circuito *RC*, la batería o la resistencia *r*, en el momento y de la forma que se indiquen.

En lugar de un voltímetro, el alumno va a disponer de un polímetro. Para ello, el selector del aparato se situará en la posición que corresponda a su función y con la escala adecuada.

El alumno dispone de tres condensadores incógnita *con la misma capacidad C* y cuyo valor comercial figura impreso en la placa (incluida su tolerancia). También dispone de tres resistencias *R* de valores conocidos.

Elija un condensador *C* y asócielo una resistencia *R*, de las tres disponibles, tal que el producto *RC* se encuentre comprendido en el intervalo de *60 a 120 segundos*. El alumno *medirá el valor de la resistencia seleccionada* para ser asociada al condensador y *encontrará una estimación de su error*. Para ello se valdrá del polímetro preparado como óhmetro.

Una vez seleccionada la pareja *RC* más adecuada se procederá a las medidas experimentales. Primero se empleará la pareja *RC elegida* para proceder a la carga del condensador y a continuación a la descarga del mismo. *Se partirá del circuito de la figura 5* teniendo: a) el conmutador **S** en la posición de circuito abierto, posición **3** (el generador aislado) y b) el interruptor **♯** también abierto.

#### ***a) Procedimiento para la carga del condensador.***

- 1º) Compruebe que el condensador está descargado (*d.d.p.  $V$  del condensador igual a  $0$*   $V$ ). Si no lo está, con el conmutador **S** en la posición 2 de cortocircuito, cierre el interruptor **♯** un momento y vuelva a abrir. Compruebe nuevamente.

Estando el condensador completamente descargado, abra el conmutador **S** (posición 3) y el interruptor **♯** para comenzar a medir.

- 2º) Pase el conmutador **S** a la posición de inserción del generador, posición 1, en el circuito *RC* a la vez que se pone en marcha el cronómetro

- 3º) Construya una tabla con los valores de *t* y de la d.d.p. del condensador  $V_C(t)$ . Complétela con los valores calculados para la Carga  $Q(t)$ , la corriente  $i(t)$  y la capacidad *C* que la obtendrá de la ley de carga [3], en cada instante t. Los intervalos de tiempo para la construcción de la tabla procurarán ajustarse a los valores sugeridos siguientes:

Constante de tiempo $\tau = RC$	Intervalo de medida ( s )
$60 \text{ s} < \tau < 90 \text{ s}$	6
$90 \text{ s} < \tau < 120 \text{ s}$	10

*El tiempo total  $t_f$  de medida en todos los casos corresponderá al menos a,  $t_f = 1,5 \cdot RC = 1,5 \tau$ , 1,5 veces la constante de tiempo.*

### **TABLA I. TOMA DE DATOS PARA LA CARGA DEL CONDENSADOR**

- 1) Valor de la resistencia medida experimentalmente:  $R \pm \Delta R$  ;
- 2) Valor nominal del condensador:  $C \pm \Delta C$  ;
- 3) Constante de tiempo aproximada:  $(RC) \pm \Delta (RC)$

$t$ (s)	$V_C$ (volt)	$Q = C V_C$ (coul)	$i = (V_0 - V_C)/R$ (mA)	$C$ ( $\mu F$ ) ec. [3]

#### ***b) Procedimiento para la descarga del condensador.***

- 1º) Compruebe que el condensador está cargado ( $V_{OC}$  próxima a  $V_0 = 9V$ ), el interruptor  $\mathcal{S}$  abierto y el conmutador  $S$  en la posición 3.
- 2º) Pase el conmutador  $S$  a la posición de inserción del cortocircuito (posición 2) en el circuito RC a la vez que se pone en marcha el cronómetro
- 3º) Construya una tabla con los valores de  $t$  y de la d.d.p. del condensador  $V_C(t)$ . Complétela con los valores calculados para la Carga  $Q(t)$ , la corriente  $i(t)$  y la capacidad  $C$  que la obtendrá de la ley de descarga [4], en cada instante  $t$ . Los intervalos de tiempo para la construcción de la tabla procurarán ajustarse a los valores sugeridos en el proceso de la carga. *El tiempo total  $t_f$  de medida en todos los casos corresponderá al menos a,  $t_f = 1,5 \cdot RC = 1,5 \tau$ , 1,5 veces la constante de tiempo.*

### **TABLA II. TOMA DE DATOS PARA LA DESCARGA DEL CONDENSADOR**

- 1) Valor de la resistencia medida experimentalmente:  $R \pm \Delta R$ ;
- 2) Valor nominal del condensador:  $C \pm \Delta C$  ;
- 3) Constante de tiempo aproximada:  $(RC) \pm \Delta (RC)$  ;
- 4) Valor inicial (máximo) de la tensión del condensador  $V_{OC} \pm \Delta V_{OC}$

$t$ (s)	$V_C$ (V)	$Q = C V_C$ (C)	$i = V_C/R$ (mA)	$C$ ( $\mu F$ ) ec. [4]

### Tratamiento de los datos experimentales

- 1º) **Dibuje los esquemas eléctricos** para la carga y la descarga.
- 2º) **Represente gráficamente la ley Q(t)** para los dos procesos, de carga y de descarga, del condensador  $C_1$ , procedentes de las Tablas I y II de toma de datos, para poder observar su naturaleza exponencial. Compárelas con la expresión teórica de las leyes [1] y [2].
- 3º) **Transforme las exponenciales de los procesos de carga y descarga en rectas y ajuste las mismas (método 1)**. Determine la capacidad de  $C_1$  (carga) y  $C'_1$  (descarga), con ellas obtenga también  $\tau_1=R C_1$  y  $\tau'_1=R C'_1$  (el valor de R debe medirse con un polímetro). Calcule los errores asociados. Compare los resultados.

Existen dos modelos de exponenciales, *las crecientes* que aparecen en la carga del condensador y *las decrecientes* que aparecen en la descarga del condensador (ver las figuras 3 y 4 respectivamente). Observe su simetría, respecto al eje x, en todas ellas.

- 4º) **Asocie dos condensadores** en a) **en serie** y b) **en paralelo** y con los valores experimentales obtenidos o bien para la carga (Tabla I), o bien para la descarga (Tabla II) determine las capacidades  $C_2$  (serie) y  $C_3$  (paralelo) por el **método 2, utilizando los valores medios** y que se describe más adelante. *Obtenga también las constantes de tiempo  $\tau_2=R C_2$  y  $\tau_3=R C_3$ , respectivamente (el valor de R debe medirse con un polímetro). Calcule los errores asociados.*

AJUSTE por UNA RECTA: Tomando logaritmos neperianos en las leyes de carga [1] y de descarga [2], las expresiones lineales que se obtienen para la tensión del condensador, son las siguientes:

#### **- Carga del condensador:**

$$\ln \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right) = - \frac{t}{RC} \quad [3]$$

que corresponde a una recta:  $y = b + m t$ , de pendiente  $m = -1/RC$ , ordenadas  $y = \ln (1 - V/V_0)$ , abscisas  $t$  y ordenada en el origen  $b \approx 0$ .

Obtenga  $m$  y  $b$  con sus errores respectivos.

**ATENCIÓN:**  $V_0$  es la tensión suministrada por la batería.

**- Descarga del condensador:**

$$\ln \frac{V}{V_{0C}} = - \frac{t}{RC} \quad [4]$$

que corresponde a una recta:  $y_1 = b_1 + m_1 t$ , de pendiente  $m_1 = -1/RC$ , ordenadas  $y = \ln V/V_{0C}$ , abscisas  $t$  y ordenada en el origen  $b_1 \approx 0$ .

Obtenga  $m_1$  y  $b$  con sus errores respectivos.

**ATENCIÓN:**  $V_{0C}$  es la tensión del condensador a  $t=0$  (valor próximo al valor nominal  $V_0$  de la tensión del generador. Por ejemplo si  $V_0 = 9V$ , un valor de  $V_{0C}$  del orden de 8,5 V a 8 V, como valor inicial, es aceptable).

- **Método 1.** Tanto para la carga como para la descarga del condensador  $C_1$  y  $C'_1$ , los puntos experimentales son las parejas  $(t, V_C)$ , que se toman de las Tablas junto con las resistencias  $R$ . A partir de ellos **se obtienen los dos puntos de las rectas** para ajustar  $[t, \ln(1 - V/V_0)]$  para la carga y  $[t, \ln V/V_{0C}]$  para la descarga. En los resultados obtenidos con el ajuste a una recta, indique claramente el valor de  $C$  obtenido para la carga  $C_1$  y para la descarga  $C'_1$  así como de las constantes de tiempo  $\tau_1$  y  $\tau'_1$  correspondientes (los cuatro valores con sus unidades y errores respectivos).
- **Método 2** para las asociaciones de dos condensadores en serie  $C_2$  y en paralelo  $C_3$ . Obtenga la capacidad  $C_2$  (serie) y  $C_3$  (paralelo) por un segundo método: se calcula  $C$  como la media de los valores obtenidos en cada una de las medidas. Tómese, en este caso como error para  $C$ , **el error cuadrático medio**. La capacidad vendrá dada por el valor medio de las medidas o bien para la carga (Tabla I), o bien para la descarga (Tabla II). Obtenga también las constantes de tiempo para las asociaciones serie y paralelo (con su error correspondiente). NOTA: Con el método 2, elija solamente la carga o la descarga para elaborar los resultados.
- Construya una tabla con los resultados de las capacidades y de las constantes de tiempo (con sus respectivos errores)

**Preguntas:**

- ¿ Cuánto tiempo ha necesitado para que el condensador alcance la mitad de la carga  $Q_0/2$  en el proceso de carga? Ayuda: vea la ec. [1].
- A mayor constante de tiempo  $RC$ , mayor tiempo es necesario para cargar o descargar el condensador. Pero, ¿ afecta el valor de la tensión del generador  $V_0$  al tiempo que tarda el condensador en cargarse o descargarse?, razónese.
- Dada una constante de tiempo,  $RC$ , si queremos duplicar la carga que almacena el condensador, ¿ necesitaremos más tiempo para lograrlo, ¿ por qué?.



## 4. APÉNDICE

### 4.1 Función de distribución "t de Student"

FACTORES DE CORRECCION, f (\*)  
(Confianza de un 68,2 %)

<b>N</b>	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>f</b>	----	1,837	1,321	1,197	1,142	1,110	1,091	1,077
<b>N</b>	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>f</b>	1,067	1,059	1,053	1,048	1,043	1,040	1,037	1,034
<b>N</b>	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>f</b>	1,032	1,030	1,029	1,027	1,026	1,024	1,023	1,022

(\*) Sabido es que el error cuadrático medio,  $\varepsilon$ , representa un margen de un 68,2 % de confianza, en el supuesto de una distribución gaussiana con un número muy grande de medidas, N. Para obtener esta misma confianza cuando N es pequeño, es necesario multiplicar  $\varepsilon$  por un factor de corrección, f (distribución "t de Student")

La estimación del error  $\Delta a$  vendrá dada por:  $\Delta a = f \cdot \varepsilon$



## 4.2 Código de Colores

### 4.2.1 Resistencias

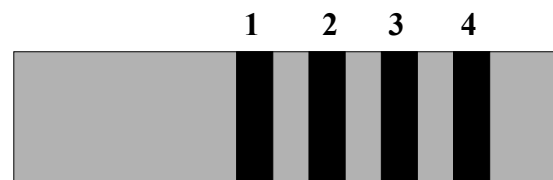
Existe un convenio internacional para la lectura de resistencias basado en un código de colores

COLOR	NUMERO
Negro	0
Marrón	1
Rojo	2
Naranja	3
Amarillo	4
Verde	5
Azul	6
Violeta	7
Gris	8
Blanco	9

La tolerancia que da el fabricante viene indicada también con un color:

COLOR	TOLERANCIA
Oro	5 %
Plata	10 %

En la figura se representa una resistencia con colores. El número 1 indica la cifra de las decenas, el número 2 indica la cifra de las unidades, el número 3 el exponente de la potencia de 10 y el número 4 la “tolerancia”.



Ejemplos: Supongamos que los colores 1, 2, 3 y 4 fuesen respectivamente:

Rojo, Rojo, Verde, Plata  $\Rightarrow$  La lectura sería:  $22 \cdot 10^5$  ohm ( $\pm 10$  %)

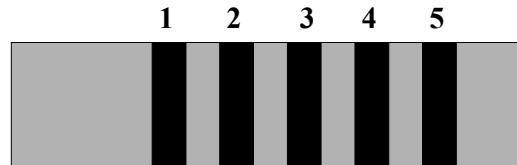
Amarillo, Verde, Azul, Oro  $\Rightarrow$  La lectura sería:  $45 \cdot 10^6$  ohm ( $\pm 5$  %)

### 4.2.2 Condensadores

Los datos característicos de los condensadores aparecen impresos en el cuerpo del mismo. La presentación puede ser en colores o alfanumérica:

#### a) Colores

La representación más frecuente es del tipo “plaqueta”, como indica la figura. El código de colores es el mismo que el de las resistencias. Los tres primeros números se leen igual que entonces, es decir:



nº 1 ⇒ decenas

nº 2 ⇒ unidades

nº 3 ⇒ exponente de la potencia de 10

tomándose como unidad por defecto “el picofaradio”.

El nº 4 indica la “tolerancia”, de acuerdo con el convenio siguiente:

COLOR	NUMERO
Negro	20 %
Blanco	10 %
Verde	5 %
Rojo	2 %
Marrón	1 %

El nº 5 indica el “voltaje máximo” en C.C. que soporta el condensador, de acuerdo con el convenio siguiente:

COLOR	NUMERO
Rojo	250 V
Amarillo	450 V
Azul	630 V

b) **Con presentación alfanumérica**

Si no aparece explícitamente la unidad, el criterio a seguir es:

- si el valor indicado es alto, la unidad por defecto es el pF.

Ejemplo:  $1000 \Rightarrow 10^3 \text{ pF} = 10^{-9} \text{ F}$ ,  $100 \text{ K} \Rightarrow 100 \text{ kpF} = 100 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 10^{-7} \text{ F}$

- si el valor indicado es bajo (1 o 0.1), la unidad por defecto es el  $\mu\text{F}$

Tolerancia

- O bien viene indicada explícitamente. P.ej. 10 %
- O bien, se indica con una letra mayúscula, de acuerdo con el siguiente criterio:

LETRA	TOLERANCIA
J	5 %
K	10 %
M	20 %

Voltaje máximo que soporta

Acostumbra a ser un número que se indica detrás de la tolerancia. La unidad por defecto es Voltios. P.ej. 630 V, o 400 V.

NOTAS

- En algunos condensadores el valor aparece con tres cifras: las dos primeras son cifras significativas y la tercera indica el exponente de la potencia de 10, en pF.

Ejemplo:

$$102 \Rightarrow 10 \cdot 10^2 \text{ pF} = 1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$$

- En el Laboratorio de Física, las placas de componentes acostumbran a tener valores de capacidad de 1  $\mu\text{F}$ , 0.1  $\mu\text{F}$  y 1 nF

