D 20577
102. Band Heft 4
ausgegeben am 21.12.2000

DMV

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Der „Jahresbericht" ist das offizielle Veröffentlichungsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, für dessen inhaltliche Gestaltung im Auftrag des Präsidiums der jeweilige Herausgeber zuständig ist. Im „Jahresbericht" sollen vornehmlich Überblicksartikel über Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik, Nachrufe sowie historische Artikel und Buchbesprechungen veröffentlicht werden.

Manuskripte:

Alle für die Schriftleitung des Jahresberichts bestimmten Briefe und Manuskripte sind an Prof. Dr. A. Krieg zu richten. Für Buchbesprechungen ist Prof. Dr. H. Lange zuständig. Bücher, von denen eine Besprechung erfolgen soll, werden bei den Verlagen angefordert. Autoren von Buchbesprechungen und Artikeln werden gebeten, die vorhandenen LATEX-style-files für den Jahresbericht zu verwenden. Somit kann der Aufwand für die Satzarbeiten erheblich reduziert werden. Sollten Illustrationen in die Arbeiten integriert werden, können diese auch in das Satzsystem übernommen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Bilddaten der Abbildungen nochmals in separaten Dateien einzeln abgespeichert werden. Die LATEX-style-files sind neben weiteren Informationen im Internet verfügbar unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/dmv/index.html

Auf Anfrage können die style-files auch auf Diskette zugeschickt werden.
Grundsätzlich sollen nur solche Manuskripte eingereicht werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme zur Veröffentlichung erwirbt der Verlag das Verlagsrecht zur Vervielfältigung und Verbreitung sowie das Recht der Übersetzung in andere Sprachen.

Verlag:
GWV Fachverlage
B. G. Teubner GmbH Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden
Postfach 15 46, 65173 Wiesbaden
Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden
http://www.teubner.de
http://www.gwv-fachverlage.de

Geschäftsführer: Dr. Hans-Dieter Haenel
Verlagsleitung: Dr. Heinz Weinheimer
Gesamtleitung Anzeigen: Thomas Werner
Gesamtleitung Produktion: Reinhard van den Hövel
Gesamtleitung Vertrieb: Heinz Detering

Abo-/Leserservice:
Tatjana Hellwig
Telefon: (06 11) 78 78-1 51
Fax: (06 11) 78 78-4 23
E-Mail: tatjana.hellwig@bertelsmann.de

Marketing/Sonderdrucke:
Stefanie Hoffmann
Telefon: (06 11) 78 78-3 79
Fax: (06 11) 78 78-4 39
E-Mail: stefanie.hoffmann@bertelsmann.de

Abonnentenverwaltung:
(Änderung von Adressen und Bankverbindung, Rückfragen zu Rechnungen oder Mahnung) VVA-Zeitschriftenservice, Abt. D6F6/Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Postfach 7777, 33310 Gütersloh
Ursula Müller
Telefon: (0 52 41) 80-19 65
Fax: (0 52 41) 80-96 20
E-Mail: ursula.mueller@bertelsmann.de

Bezugsbedingungen:
Die Zeitschrift erscheint 4 mal jährlich zum Jahresabonnementspreis von DM 178 (1 299 öS; 158 sFr) inkl. Versandkosten. Der Bezug von Einzelheften ist nicht möglich. Schriftliche Kündigung des Abonnements spätestens sechs Wochen vor Ablauf des Bezugsjahres.
Für persönliche Mitglieder der DMV, die den Jahresbericht zu beziehen wünschen, ist der zwischen DMV und Verlag vereinbarte Bezugspreis maßgebend, der im Rahmen des Mitgliedsbeitrags erhoben wird.

Satz: Fotosatz Behrens, D-68723 Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, D-69502 Hemsbach

ISSN 0012-0456

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von A. Krieg
unter Mitwirkung von
U. Gather, E. Heintze, B. Kawohl,
H. Lange, H. Triebel

102. Band

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden 2000

Printed in Germany – ISSN 0012-0456
Satz: Fotosatz Behrens, Oftersheim
Druck: pagina media gmbh, Hemsbach

Inhalt

1. Abteilung

2. Abteilung

Inhalt

Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Inhalt Band 102, Heft 4

1. Abteilung

2. Abteilung

In den nächsten Heften erscheinende Arbeiten:

T. Korb, P. Schenzel: Zum Gedenken an Manfred Herrmann

Bezugshinweis

Früher erschienene Bände (ab Band 68) des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ können durch den Buchhandel oder den Verlag bezogen werden.

Nachdruck der Bände 41 bis 67 liefert: Swets & Zeitlinger, Heereweg 347b, POB 810, NL-2160 SZ Lisse/Holland

Jber. d. Dt. Math.-Verein.
102 (2000) 149–170
Mathematics Subject Classification: 60 K 35
Keywords and Phrases: Interacting spatial stochastic processes

Interacting stochastic systems: Longtime behavior and its renormalization analysis

A. Greven

Abstract

We describe typical phenomena arising in the longtime behavior of interacting spatial stochastic systems and explain how they can be analyzed using the technique of renormalization by multiple space-time scales. We shall focus on models which arise in population genetics, in particular interacting Fisher-Wright diffusions.

The main mathematical point is to give an approximate picture of the spatial stochastic system by passing to a large space-time scale view. This will lead to a simpler stochastic process called the interaction chain. The analysis of this object reduces mainly to the study of the orbit of iterations of a certain nonlinear map in function space. Properties of this orbit can be derived by finding fixed points or fixed shapes of the nonlinear map and by showing convergence properties of general orbits to the special ones generated by fixed points or fixed shapes.

An important point is that this analysis allows to explain the special role of certain specific stochastic models, which correspond to the fixed points and fixed shapes and which characterize a universality class of longtime behavior in a larger class of models.

We continue with describing directions of further research. Most important is the problem of the extension of the renormalization technique to lattice models. We present a first step in this direction, the socalled finite systems scheme.

Finally we outline the possible applications of the multi-scale analysis in mathematical biology, in particular evolution theory.

1 Introduction

(a) Motivation

Before we begin to outline the mathematical program and the results, we explain the type of models we are interested in, the typical phenomena occuring and the questions we shall treat later on. We do this for the case of the voter model, where everything is simple to state. On the other hand, the voter model arises as limit from the population models we want to treat here. Later we will turn to a set of models which are motivated by questions in mathematical biology, but which need for their definition a bit more machinery.

(i) The voter model and its longtime behavior

One prototype of a spatial locally interacting stochastic process is the voter model. We will exhibit in this model some phenomena in the longtime behavior which in fact occur in a wider class of spatial stochastic processes.

Consider a configuration of 0's and 1's on $\mathbb{Z}^d$, which is realised by a random experiment, say we independently determine the state at each site and we give probability θ to seeing a 1. This configuration $\eta = (\eta(x))_{x\in\mathbb{Z}^d} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ is subject to the random evolution given as follows (independent of the experiment determining the initial state):

• At each site we have a random clock, which rings after successive independent exponential waiting times. All clocks are independent.
• Once the clock rings at site x one of the $2d$-neighboring lattice sites y is chosen at random, independent of everything else.
• The state at x is changed to the state found at the chosen site y at the time the clock rings.

This evolution defines a Markov process $(\eta_t)_{t\geq 0}$ with values in $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, which has the following dimension dependent longtime behavior. The results now mentioned are due to Holley and Liggett (compare [L85]).

For dimension $d = 1, 2$ the system looks for t large with high probability locally like the state $\underline{0}$ or $\underline{1}$ (all sites 0 or 1). This we call *clustering*. The configurations $\underline{0}$ and $\underline{1}$ occur here in the limit with probability $1-\theta$ and θ. In formulas

$$(1.1) \quad \mathcal{L}[\eta_t] \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \theta\delta_{\underline{1}} + (1-\theta)\delta_{\underline{0}},$$

where $\Rightarrow$ denotes weak convergence of probability measures. In particular this convergence says only something about (spatial) finite windows of observation.

For dimension $d \geq 3$ the system has the property that, even for large times, at two sites $i, j \in \mathbb{Z}^d$ we see with positive probability (if $\theta \in (0,1)$) different values at the two sites, i.e. instead of clustering now *coexistence* of 0's and 1's is possible. In formulas

$$(1.2) \quad \mathcal{L}[\eta_t] \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \nu_\theta,$$

where ν_θ is an invariant measure under the evolution of the process with mean $\int \eta(x)\nu_\theta(d\eta) = \theta$ and positive asymptotically negligible correlations: $\theta^2 < \int \eta(x)\eta(y)\nu_\theta(d\eta) = \theta^2 + o(|x-y|)$.

In the case of low dimensions a natural question is the following. How do the *clusters,* i.e. the blocks of connected 0's and 1's, grow as t tends to ∞? The answer is very different in $d = 1$ and $d = 2$.

Consider first $d = 1$. Here we can simply consider the intervals of successive strings of 0's or 1's at time t. In this case it was shown by Arratia, that the cluster size, i.e. the length of a connected set of 1's and 0's, is of order $\sqrt{t}$. Precisely the following rescaling result holds ($[x]$ is the integer part of x):

$$(1.3) \quad \mathcal{L}\left[(\eta_t([x\sqrt{t}]))_{x\in\mathbb{R}}\right] \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{L}[(\hat{\eta}_\infty(x))_{x\in\mathbb{R}}],$$

and $\hat{\eta}_\infty$ is a $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$-valued random field with nontrivial correlations. In fact it is explicitly determined through annihilating Brownian motions.

Different is the situation in dimension $d = 2$. Here Cox and Griffeath discovered that the cluster size is of order $t^{\alpha/2}$ with $\alpha \in [0,1]$ rather than $t^{\frac{1}{2}}$, where in addition the exponent α is *random*. In formulas

$$(1.4) \quad \mathcal{L}\left[\left(\eta_t\left(\left[xt^{\alpha/2}\right]\right)\right)_{x\in\mathbb{R}^2}\right] \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{L}\left[\left(\eta^{\alpha}_{\infty}(x)\right)_{x\in\mathbb{R}^2}\right], \quad \alpha \in [0,1]$$

and the random fields η^α have nontrivial correlations for all $\alpha \in (0,1)$. The law of η^α is a mixture of i.i.d. measures on $\{0,1\}^{\mathbb{R}^2}$ and the mixing measure can be given in terms of the socalled standard Fisher-Wright diffusion. Another point of view important later on is the following: Let $D^N(\eta)$ be the average of the configuration η in the set $I_N = [-N,N]^2$. Then

$$(1.5) \quad \mathcal{L}\left[\left(D^{t^{\alpha/2}}\right)_{\alpha\in[0,1]}\right] \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{L}\left[(Y_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}\right]$$

where Y is explicitly known, namely $Y_0 = \theta$ and $(Y_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ is a time transformed Fisher-Wright diffusion (compare r.h.s. of (3.37) and (3.38)).

Another question of interest is the following. Suppose we consider the voter model on a finite set, say $[-N,N]^d \cap \mathbb{Z}^d$, for example we watch a simulation of the voter model. Then it is easy to see that $\underline{0}$ and $\underline{1}$ are traps which are reached after a finite random time. This is in contrast, at least for $d \geq 3$, with the behavior of the infinite system where we have coexistence of 0 and 1 for $t \to \infty$. What is then the relation between the behavior of very large finite systems and infinite ones? This question will play an important role in the sequel, in particular section 5, and has been treated by Cox and Greven for the voter model in [CG1].

(ii) The problem of universality and renormalization analysis

Now a natural question is, whether a behavior as described above, in particular the dichotomy between high and low dimension and the pattern of cluster formation in the latter, is due to the very special dynamics, or whether such behavior is *universal* in a large class of stochastic spatial evolutions. If the latter is the case, what are the reasons for this universality? Does this phenomenon occur also in models which are of interest in applications?

What we can expect is that, since the dynamics and interactions between components is local, the behavior on larger space and time scales is filtering out the more global aspects of the longtime behavior. In order to make this visible we can use *renormalization analysis*, i.e. replace the system by a sequence of new ones as follows:

- Divide the set of sites into subsets
- assign to each subset as value the average value in this set
- scale time in such a way that the sequence of renormalized systems still has random fluctuations of order one.
- Iterate this procedure to obtain a *chain of renormalized systems*.

The problem arising is that the new renormalized systems have a fairly complicated dynamics. For this reason we need a limiting procedure (which we shall call *hierarchical mean-field limit*) where the averages over blocks at each renormalization step extend over blocks and times both tending to infinity. This procedure gives indeed a simpler approximate description of the renormalized system. Once we understand this limit we can try to tackle the real system.

(iii) From particle systems to interacting diffusions
The voter model is a particular case of what is called an interacting particle system (see [L85]). In mathematical biology two particle systems, the socalled *spatial Moran model* and *branching random walks*, play an important role. In these models on each site of $\mathbb{Z}^d$ (called a colony) individuals are located which carry a certain genetic type labeled by $\{1, 2, \dots, K\}$. Hence the state of the system is an element of $(\mathbb{N}^K)^{\mathbb{Z}^d}$ a configuration giving the number of individuals of a type in each of the colonies labeled by $\mathbb{Z}^d$. The random evolution arises since individuals migrate in a random fashion and individuals are replaced randomly by a new generation (exact evolution rules shall be given in remark 2.2). In the Moran model the change of generations preserves the population size (in a colony) up to migration effects while in branching models it causes fluctuations.

Since in situations of interest one often deals with a large number of particles, one passes to the continuum limit of many particles per colony and fast reactions (change of generation). This leads to a specific class of spatial stochastic models namely *interacting diffusions*, which are defined formally in subsection 2. These stochastic systems consist of countably many spatial components. The states of the components (elements of $(\mathbb{R}^+)^K$) reflect the type composition of the colony. The components interact linearly (reflecting migration between colonies) and single colonies evolve randomly according to a diffusion process depending on the state of that component and reflecting change of generations. In a series of papers Dawson and Greven [DG93a]–[DG99b] and Baillon, Clément, Greven and den Hollander [BCGH95], [BCGH97] carried out the renormalization analysis by multiple space-time scales for this class of models.

As mentioned, there are two principal classes of models here: Branching models, where not only the decomposition in types fluctuates randomly (unlimited resources) but also the size of the population; resampling models where colonies have essentially fixed sizes of the populations (finite resources) and only the frequencies of the different types fluctuate. We shall focus here on the latter class of models (see [G00] for a survey on branching models).

Our goal in these notes will be twofold, one theoretic in nature and one in a more applied direction. First we want to analyze the stochastic systems in large space-time scales and explain the phenomenon of universality. Secondly we want to use these ideas to build a framework to study questions in the theory of evolution. For this purpose one views the process of biological evolution as driven by random fluctuations due to the change of generations (pure genetic drift) in combination with forces due to selection and mutation.

(b) Mathematical structure of the renormalization analysis

We now sketch first the general features of our approach to the study of the universality properties in the longtime behavior of spatial stochastic systems, which transforms the analysis of the stochastic system into an analysis of orbits of certain nonlinear maps.

The structure of this theory is roughly as follows. Using a collection of space-time scales we associate with the stochastic system a collection of *renormalized systems*. By then performing what we call the *hierarchical meanfield limit* we obtain a collection of limiting objects forming a Markov chain which we call the *interaction chain*:

- stochastic system on a collection of large space-time scales $\longleftrightarrow$ interaction chain.

The law of this (time-inhomogeneous) chain is described via the orbit of a certain nonlinear map defined on a function space. In the latter the points represent the possible parameters of the random mechanism in a single spatial component, in our case the local diffusion coefficients:

- interaction chain $\longleftrightarrow$ orbit of nonlinear map.

The multiple large scale properties of the original system are reflected in the asymptotic behavior of the interaction chain. This behavior however can be reduced to properties of the *orbit of a nonlinear map* and the nature of this map is such that the orbit can be analyzed using its:

- fixed points, fixed shapes.

(A fixed shape g for a map $\mathcal{F}$ acting on a function space satisfies $\mathcal{F}(ag) = \ell(a)g$ for all $a \geq 0$ and some function ℓ). These distinguished elements correspond, on the level of the original stochastic system, to certain classes of models which are "explicitly solvable" due to the duality relations they permit, which makes it easier to analyze them. These special models have been studied in great detail. They are (we shall specify them later on): interacting collections of Feller's diffusions, Fisher-Wright diffusions, critical Ornstein-Uhlenbeck diffusions and the parabolic Anderson model.

The basic result which we derive is that, in an asymptotic sense, the above mentioned distinguished models are characteristic for the behavior of models in their respective universality class. This class we can determine for a given diffusion coefficient purely analytically by deciding whether the corresponding orbit of our nonlinear map approaches the fixed points or approaches after rescaling fixed shapes corresponding to that class. In other words, we have the correspondence:

- Universality properties of the stochastic systems $\longleftrightarrow$ Universality properties of the orbit of the nonlinear map.

(c) Outline

In section 2 we present the class of models we shall consider. In subsection 3(a) we introduce the renormalization analysis and state the basic result about the hierarchical mean-field limit. In subsection 3(b) we give an explicit representation of the interaction chain and in subsection 3(c) we study the properties of this object in detail. In section 4 we define and study the nonlinear map and its orbit. In section 5 we study large finite systems, which form a first step in trying to avoid the hierarchical mean-field limit in the renormalization analysis. Finally in section 6 we outline other applications of the multiple space-time scale analysis and the hierarchical mean-field limit, namely to the study of evolutionary models in mathematical biology. Throughout the main results are stated as theorems.

2 A class of models and their longtime behavior

The theory we present can be (and has been) applied to models for populations consisting of 2 different types, finitely many types or a continuum of types. For simplicity we focus on the 2-type situation to keep notation and technicalities to a minimum. The general case can be found in [DGV95]. We shall now in a first step introduce the model and in a second step describe and explain its longtime behavior (Theorem 2.4).

(i) The class of models

Consider the process $(X(t))_{t\geq 0}$ where the states at fixed times t are of the form:

$$(2.1) \quad X = (x_i)_{i\in I} \in ([0,1])^I.$$

The x_i represent the relative frequency of one of two types in the colony $i \in I$, here I is a countable Abelian group (like $\mathbb{Z}^d$).

The dynamics is given by:

$$(2.2) \quad dx_i(t) = \sum_{j\in I} a(i,j)(x_j(t) - x_i(t))dt + \sqrt{2g(x_i(t))}dw_i(t), \qquad i \in I.$$

The ingredients $a(\cdot,\cdot), g(\cdot)$ and $w_i(\cdot)$ are as follows:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &0 \leq a(i,j) \leq c < \infty, && i,j \in I, \\ &a(i,j) = a(0,j-i), && i,j \in I, \\ &\sum_i a(0,i) < \infty, \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad g : [0,1] \longrightarrow [0,\infty),$$

$$g \text{ is locally Lipschitz}, \; g(x) > 0 \text{ for } x \in (0,1), \; g(0) = 0 = g(1),$$

$$(2.5) \quad \{(w_i(t))_{t\geq 0},\ i \in I\} \quad \text{are independent standard Brownian motions.}$$

As initial states for (2.2) we chose random configurations with a law which is translation invariant and which is independent of the Brownian motions.

The components of the system feel a *drift* towards the average of the surrounding components and a *random perturbation* given by increments of a Brownian motion magnified by a state-dependent factor $g(x_i)$.

Remark 2.1 *Under the given assumptions there exists a unique strong solution of (2.2).*

Remark 2.2 *The dynamics is obtained as diffusion limit of a particle model, called the Moran model. Consider a configuration $\eta = (\eta(i))_{i\in I} \in (\mathbb{N})^I$ of particles on I, where $\eta(i)$ denotes the number of particles at i. The particles at site i have the following stochastic evolution:*

– *Single particles migrate by carrying out independent continuous-time random walks with rate* $\bar{a}(i,j)$ *for a jump from i to j given by* $\bar{a}(i,j) = a(j,i)$.
– *Two particles are chosen at random and are then replaced by a new pair, each new particle choosing a parent at random and adapting its type.*
– *Migration and resampling occur independently, different particles act independently.*

Now let $\{\eta^{(n)}(i), i \in I\}$ *be the vector of relative frequency of type 1 in colony i. The initial number of particles is increased to* $n\eta_0$. *Then the corresponding process of relative weights* $(\eta_t^{(n)})_{t\geq 0}$ *converges as* $n \to \infty$ *to the solution of the system of SDE's given above.*

Remark 2.3 *If* $Ex_i(0) = \theta$ *for all* $i \in I$, *then* $Ex_i(t) = \theta$ *for all* $t \geq 0$, *i.e. the system is mean preserving.*

Example The following special case is called *interacting Fisher-Wright diffusion*:

(2.6) $g(x) = dx(1-x), \quad d \in (0, \infty).$

(ii) The longtime behavior

The longtime behavior of the system (2.2) results from two *competing tendencies* caused by migration and fluctuations respectively, namely:

– approach to a constant state (equal to the space average of the initial state), which are the invariant states if we put $g \equiv 0$,
– approach to the state $x_i \equiv 0$ or $x_i \equiv 1$, which are the invariant states if $a(\cdot,\cdot) = \delta(\cdot,\cdot)$.

The outcome of this competition depends on the symmetrized kernel $\hat{a}(i,j) = \frac{1}{2}(a(i,j) + a(j,i))$, namely migration winning or loosing depending on whether $\hat{a}$ is transient or recurrent. More precisely it was shown in ([CG94a], [CFG96]):

Theorem 2.4 *(Ergodic theorem)*
Assume that $\mathcal{L}(X(0))$ *is translation invariant and ergodic, with* $Ex_i(0) = \theta$.

(a) If $\hat{a}$ *is transient then for all initial laws with above properties*

(2.7) $\mathcal{L}(X(t)) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \nu_\theta,$

where ν_θ *is an extremal invariant measure of the process with*

(2.8) $E_{\nu_\theta}(x_i) = \theta$

and being translation invariant and shift-ergodic.
(b) If $\hat{a}$ *is recurrent then*

(2.9) $\mathcal{L}(X(t)) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} (1-\bar{\theta})\delta_{\underline{0}} + \theta\delta_{\underline{1}},$

where $\underline{c}$ *is the state which is identically to c.* □

This dichotomy gives only a rough picture of the large space-time scale behavior. Typical questions concerning finer properties of the longtime behavior are the following:

• In the transient situation one investigates the properties of the decomposition of the frequency of one of the two types in the equilibrium state into frequencies belonging to one genealogical cluster, i.e. the family descending from one particle at time $-\infty$ (recall the particle interpretation). This idea is made rigorous using the concept of the *genealogical process*, which describes the genealogies of the individuals in the population at time t. What is the intensity of one family in large blocks and how many families can be found contributing substantially to the mass in a large block? One finds *universality* in the sense that these properties depend on $a(i,j)$ and not so much on g.

• In the recurrent situation one finds the phenomenon of *clustering*. Clusters are large patches of values close to 0 or 1. The question is how fast do these patches grow as time tends to infinity.

In the next section we develop a tool allowing to understand the universality in the answers to these questions for large classes of models. We focus on the recurrent case. For the transient case see [DGV95], [DG96].

3 Renormalization Analysis

(a) The multiple space-time scale analysis

We proceed in three steps. We begin by adapting the model for the purpose of a multiple scale renormalization by introducing a specific choice of the index set I and defining random walks on that set. Then we define in the second step the renormalized system and conclude in the third step by giving the basic limit result.

(i) Framework for a multiple space-time scale analysis

In this section we introduce a rescaling of our interacting system with countably many components. For this purpose we begin by specifying the set of indices I to be the hierarchical group Ω_N, which is the index set suitable for population models and was introduced in population genetics by Felsenstein and Sawyer [SF83]. Ω_N is defined as:

$$(3.1) \quad \Omega_N = \{(\xi_0, \xi_1, \ldots) | \xi_i \in \{0, 1, \ldots, N-1\},\ \xi_i \neq 0 \quad \text{finitely often}\}$$

and the addition is defined as the component-wise addition modulo N. On this group Ω_N we define the hierarchical distance to be

$$(3.2) \quad d(\xi, \xi') = \inf(n \geq 0 \mid \xi_i = \xi'_i \quad \textit{forall } i \geq n\}.$$

Then we can define the k-balls

$$(3.3) \quad B_k = \{\xi \in \Omega_N | d(\xi, 0) \leq k\}.$$

Note that we have *as sets*, the following embedding:

$$(3.4) \quad \Omega_N \subseteq \Omega_M \subseteq \Omega_\infty \quad \text{for } N \leq M,$$

allowing to focus on a fixed window of observation as $N \to \infty$.

On the group Ω_N we define next an appropriate class of random walks for which the points on the surface of balls become exchangeable for the walk and for which the rate to make a jump to the surface of a larger ball scales in a suitable way. Precisely, we fix a sequence $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ of positive numbers such that

$$(3.5)\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{N^{2k}}<\infty \quad \text{for } N\geq 2.$$

Our random walk has a rate c_{k-1}/N^{k-1} to make a jump to a point within a k-ball around its present position and then chooses within that ball the target point according to the uniform distribution on this ball. In other words, the transition matrix $a_N(\cdot,\cdot)$ is given by:

$$(3.6)\quad a_N(\xi,\eta)=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{N^j}\left(c_{j-1}/N^{j-1}\right) \quad \text{if } d(\xi,\eta)=k.$$

Remark 3.1 *This random walk will need, for N large, a time of order N^j to move a distance j away from its starting point and hence the process giving the distance from the origin behaves like a process moving in a linear potential. Important is that the times N^j are for different j of different order of magnitude as $N\to\infty$, i.e. they separate.*

Definition 3.1 *(Ω_N-indexed system)*
For every N define the process $X^N(t)$ based on Ω_N and according to the definition in (2.2), replacing $a(\cdot,\cdot)$ by $a_N(\cdot,\cdot)$ given above in (3.6).

(ii) The renormalization scheme
The system $X^N(t)$ will now be analyzed using a collection of space-time scales which *separate if $N\to\infty$*.

Begin with the spatial rescaling. Define

$$(3.7)\quad x_{\xi,k}=\frac{1}{N^k}\sum_{\xi'\in B_k(\xi)}x_{\xi'} \quad \text{with } X=(x_\xi)_{\xi\in\Omega_N},$$

in other words, $x_{\xi,k}$ is the *block average* of X in the k-ball around ξ.

Next we consider the time scales:

$$(3.8)\quad t\to N^j t,\quad j\in\mathbb{N}.$$

Often it is more convenient, in order to get a simpler limiting object, to use

$$(3.9)\quad t\longrightarrow s(N)N^j t,$$

with $s(N)$ satisfying: $s(N)\to\infty$ as $N\to\infty$ and $s(N)=o(N)$. (We shall see later that with this choice we get equilibration on the j-th level.)

The above ingredients allow us to define for every pair $(k,j)\in\mathbb{N}^2$ the following collection of rescaled functionals of the process $(X^N(t))_{t\geq 0}$:

$$(3.10)\quad x^N_{\xi,k}(s(N)N^j t).$$

Of particular interest will be the following collection defined for fixed j:

Definition 3.2 *(Finite-N interaction chain)*
We call

$$(3.11) \quad \left\{x^N_{\xi,k}(s(N)N^j t);\ k = 0, 1, \dots, j+1\right\}.$$

the finite-N interaction chain of level j.

This way we look for N large at a system which evolved for a long time and we observe a whole hierarchy of block averages.

(iii) The basic limit result (hierarchical mean-field limit)
The idea is that for N large the collection $\{x_{\xi,k}(tN^j),\ k = 0, \dots, j+1\}$ becomes approximately Markov in k, the latter running from $j+1$ down to 0, and that the transition kernel becomes simple if the block averages are based on more and more components. We refer to $N \to \infty$ in connection with $(X^N(t))_{t\geq 0}$ as the *hierarchical mean-field limit*. Here mean-field expresses the fact that if we consider only permutations of components on the surface of k-balls then the system is *exchangeable* under these permutations. On the other hand, we always work with an *infinite* interacting system and not a system of finite size, with size tending to infinity.

The following result can be proven for models with one-dimensional components [DG93c] and for multi- or infinite-dimensional models [DGV95], (for branching models see [DG96]):

Theorem 3.2 *(Basic scaling result)*
Assume that $\mathcal{L}(X^N(0))$ is i.i.d. with $Ex^N_\xi = \theta$. Then:
(a) $\mathcal{L}(\{(x_{\xi,-k}(s(N)N^j t))_{k=-j-1,-j,\dots,0}\}) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{L}((M^{(j)}_k)_{k=-j-1,-j,\dots,0})$.
(b) $(M^j_k)_{k=-j-1,\dots,0}$ *is a Markov chain which is time inhomogeneous, but at time $-k$ the transition kernel P_k is independent of j.*
(c) $\mathcal{L}((M^{(j)}_k)_{k=-j-1,\dots,0}) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{L}((M^\infty_k)_{k\in\mathbb{Z}^-})$, *with $(M^\infty_\cdot)$ being an entrance law, i.e. a Markov chain with transition kernels $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ at times $-k$.* □

In the next subsection we shall see that we can actually identify the law of $(M^j_k)_{k=-j-1,\dots,0}$ fairly explicitly.

Definition 3.3 *(Interaction chain)*
We call $(M^j_k)_{k=-j-1,\dots,0}$ the interaction chain of level j and $(M^\infty_k)_{k\in\mathbb{Z}^-}$ the entrance law of the interaction chain.

(b) Identification of the limiting dynamics

Calculation of the law of the interaction chain and its entrance law requires first the analysis of certain finite systems in slow and later in fast time scales, which amount to carrying out the *mean-field finite system scheme* (see Theorem 3.3 below). In Theorem 3.5 we identify the interaction chain by explicitly identifying the hierarchical mean-field limit dynamics on all levels j.

(i) A mean-field system and its McKean-Vlasov limit
In this section we will focus on a finite system with N-components, denoted $Y^N(t)$. In the case of one-dimensional components they have the form

(3.12) $Y^N(t) = (y_i^N(t))_{i=1,\dots,N} \in [0,1]^N$

and solve the following system of stochastic differential equations:

$$\begin{aligned} dy_i^N(t) &= c\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \left(y_j^N(t) - y_i(t)\right)\right)dt \\ &+ \sqrt{g(y_i^N(t))}dw_i(t), \quad i \in \{1,\dots,N\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

(3.14) $\mathcal{L}(Y^N(0))$ is i.i.d. with $Ey_i(0) = \theta \in [0,1]$.

We shall use the same marginal distribution $\mathcal{L}(y_0^N)$ for all N.

Next consider the process $Y^\infty(t) = (y_i^\infty(t))_{i\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ given as follows. All components evolve independently according to the following SDE:

(3.15) $dz_t = c(\theta - z_t)dt + \sqrt{g(z_t)}dw_t$,

and $\mathcal{L}(Y^\infty(0))$ is i.i.d. with the same marginal as $\mathcal{L}(Y^N(0)), N \in \mathbb{N}$.

Then one can show that $(Y^\infty(t))_{t\geq 0}$ is the infinite system corresponding to $(Y^N(t))_{t\geq 0}$ *(McKean-Vlasov limit)*:

(3.16) $\mathcal{L}((Y^N(t))_{t\geq 0}) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{L}((Y^\infty(t))_{t\geq 0})$.

(ii) The longtime behavior of the system $(Y^\infty(t))_{t\geq 0}$

For the process $(z_t)_{t\geq 0}$ there exists a unique invariant measure:

(3.17) $\Gamma_\theta^{c,g}$.

Furthermore the process Y^∞ is ergodic, i.e. for all initial states:

(3.18) $\mathcal{L}(Y^\infty(t)) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} (\Gamma_\theta^{c,g})^{\otimes\mathbb{N}}$.

(iii) The mean-field finite system scheme

The next step is to consider $(Y^N(t))_{t\geq 0}$ in the faster time scale $t \to Nt$ and in the limit $N \to \infty$. The basic idea is that the laws of the time rescaled empirical mean processes defined as:

(3.19) $(\bar{Y}^N(t))_{t\geq 0} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N y_i^N(Nt)\right)_{t\geq 0}$,

form a tight sequence. Namely observe that for every fixed N the process $\bar{Y}^N$ is a martingale w.r.t. the filtration given by $(Y^N(s))_{s\leq t}$ and with increasing process

(3.20) $\langle \bar{Y}^N\rangle_t = \int\limits_0^t \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N g(y_i^N(sN))\right)ds.$

Using the techniques from the finite system scheme (see [CG94b], [CGS1]) it was shown in [DG93a]:

Theorem 3.3 *(Mean-field finite system scheme)*

(3.21) $\mathcal{L}((\bar{Y}^N(t))_{t\geq 0}) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{L}((\tilde{z}_t)_{t\geq 0})$

where $(\tilde{z}_t)_{t\geq 0}$ *satisfies:* $\tilde{z}_0 = \theta \in [0,1]$ *and*

$$(3.22) \quad d\tilde{z}_t = \sqrt{g^*(\tilde{z}_t)}dw_t, \quad g^*(\theta) = \int_{[0,1]} \Gamma_\theta^{c,g}(d\theta')g(\theta').$$

Furthermore

$$(3.23) \quad \mathcal{L}(Y^N(tN)) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \int_{[0,1]} Q_t(\theta, d\theta')(\Gamma_{\theta'}^{c,g})^{\otimes \mathbb{N}},$$

where

$$(3.24) \quad Q_t(\theta,\cdot) = \mathcal{L}(\tilde{z}_t | \tilde{z}_0 = \theta).$$

□

This should be viewed as follows. The macroscopic variable given by the empirical mean fluctuates only on time scales of order Nt and given a value θ' for this empirical mean the system itself relaxes into the equilibrium corresponding to the center of drift given by θ'. With this scenario, however, the macroscopic variable becomes Markov in the limit, and its volatility in the state θ' is given by the mean of $g(\cdot)$ under $\Gamma_{\theta'}^{c,g}$ which we denoted $g^*(\theta')$.

Remark 3.4 *This result holds also for resampling models with infinite-dimensional components as well as for branching models ([DGV95], [DG96].*

(iv) Identification of the interaction chain
We define the transition kernels (recall (3.17)):

$$(3.25) \quad K_{c,g}(\theta, d\theta') = \Gamma_\theta^{c,g}(d\theta').$$

The key is the multi-level generalization of Theorem 3.3 given in [DG93c]:

Theorem 3.5 *(Interaction chain)*
The interaction chain $(M^j_k)_{k=-j-1,\ldots,0}$ *defined in Theorem 3.2 is the time-inhomogeneous Markov chain with initial state*

$$(3.26) \quad M^j_{-j-1} = \theta$$

and with transition kernels P_k *at time* $-k$ *given by:*

$$(3.27) \quad P_k = K_{c_k, g_k},$$

where the function g_k *on* $[0,\infty)$ *is defined recursively by* $g_0 = g$ *and*

$$(3.28) \quad g_{k+1}(\theta) = \int_{[0,\infty)} \Gamma_\theta^{c_k, g_k}(d\theta')g_k(\theta').$$

□

Remark 3.6 *The key point in order to obtain Theorem 3.5 is to generalize Theorem 3.3 to multi-level systems, which are finite systems of size* N^k *with an interaction between k different levels. The two-level situation is representative. For details on the techniques required we refer the reader to [DGV95].*

(c) Properties of the interaction chain

(i) The dichotomy: stability versus clustering

The longtime behavior of our system (recall Theorem 2.4) depends on whether we have long range or short range interaction, which corresponds to the transience respectively recurrence property of $\hat{a}$. In the case of long range interaction we have an equilibrium state of the system under which components take all values in $[0, 1]$, while in the case of short range interaction we will for large times see the approach to the traps $\underline{0}$ and $\underline{1}$.

This will be reflected in the structure of $(M_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}^-}$ as follows. In the case of strong interaction $(M_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}^-}$ describes the equilibrium joint distribution of the collection of block averages for N large, while in case of weak interaction and hence trivial M^∞ we focus on the behavior of $(M_k^j)_{k=-j-1,\dots,0}$ as $j \to \infty$ which reflects the formation of clusters occurring as time evolves.

Theorem 3.7 *(Stability versus clustering)*

$$\text{(3.29)} \qquad \textit{If} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{-1} < \infty, \textit{ then for } \quad \theta \in (0,1): \qquad M_k^\infty \in (0,1) \quad \textit{and } M_k^\infty \underset{k \to -\infty}{\longrightarrow} \theta.$$

$$\text{(3.30)} \qquad \textit{If} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{-1} = +\infty, \textit{ then}:$$

$$\text{(3.33)} \qquad M_k^\infty = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^- \quad \textit{or } M_k^\infty = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^-,$$

the two possibilities occurring with probability $1 - \theta$ *and* θ. □

Remark 3.8 *The condition* $\sum c_k^{-1} = +\infty$ *or* $< \infty$ *is equivalent to:*

(3.32) $a_N(\cdot, \cdot)$ *is recurrent respectively transient.*

Remark 3.9 *Similar statements hold in other types of models, (see [DG96], [DGV95]. [DG99b]).*

(ii) Finer analysis of the cluster formation

In the case $\sum c_k^{-1} = +\infty$ the original system forms clusters of 0's and 1's. What exactly are clusters? There are different ways to look at that. One can define a decomposition of the population according to the ancestors at time 0. This is obvious in the particle model (recall remark 2.2) but can be extended to the diffusion limit. The clusters are sets of values close to 0 or 1, which arise from the same ancestral type at time 0. From a more geometrical point of view one can consider the largest blocks contained in a set of values close to 0 respectively 1. The most transparent way however to analyze the size of the clusters is to consider *block averages*. If the clusters covers the whole block B_k, then the corresponding block average will be 0 or 1. If very many blocks of different types are covered then the value of the average is the original intensity θ and for intermediate sizes of clusters we will find a nontrivial random variable with values in $(0, 1)$. One can identify the laws of these random variables.

Considering block averages over blocks of different size corresponds in the interaction chain to a rescaling and we can distinguish two main regimes of clustering (recall section 1: (1.3), (1.4)). First, large clusters of a fixed order of magnitude but random size and second, clusters which are smaller and of random order of magnitude. Each of them requires a different type of analysis.

In the first case we consider $(M^j_{-j-1+m})_{m=0,1,\dots,j}$ in the limit $j \to \infty$. In the second case we consider $(M^j_{f_j(\alpha)})_{\alpha\in[0,1]}$ for $j \to \infty$ and for a scaling function $f_j(\cdot)$ such that $(M^j_{f_j(\alpha)})_{\alpha\in[0,1]}$ converges to a diffusion process. The scaling function is determined as follows. Find $f_j(\cdot) : [0,1] \to \{-j-1,\dots,0\}$ (with the properties $f_j(0) = -j-1$, $f_j(1) = 0$ and $f_j(\cdot)$ is monotone increasing) such that:

$$(3.33) \quad d_{f_j(\alpha')} \sum_{k=f_j(\alpha)}^{f_j(\alpha')} \frac{1}{c_k} \underset{j\to}{\longrightarrow} (\alpha - \alpha'), \quad \text{with } d_{k+1} := \frac{d_0}{1 + d_0 \sum_1^k c_k^{-1}}.$$

For example if $c_k \equiv c$, then $f_j(\alpha) = -(j+1)(1-\alpha)$ has the desired property.

The limiting processes of $(M^j_{-j-1+m})_{m\in\mathbb{N}}$ respectively $(M^j_{f_j(\alpha)})_{\alpha\in[0,1]}$ for $j \to \infty$ are called *cluster processes*. We can determine the cluster process in many cases explicitly.

Theorem 3.10 *(Cluster formation)*
Assume that $\sum c_k^{-1} = +\infty$.
(a) If $c_k = c^k$ *with* $c < 1$ *then (with convention* $M^j_k = 0$ *for* $k > 0$*):*

$$(3.34) \quad \mathcal{L}\left(\left(M^j_{-j-1+m}\right)_{m\in\mathbb{N}}\right) \Longrightarrow \mathcal{L}\left(\left(M^\infty_m\right)_{m\in\mathbb{N}}\right),$$

where M^∞ *is a Markov chain with transition kernel* $\Gamma_\theta^{c^{-1},x(1-x)}$ *independent of* g.
(b) If $d_j/c_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *then:*

$$(3.35) \quad \mathcal{L}\left(\left(M^j_{f_j(\alpha)}\right)_{\alpha\in[0,1]}\right) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \left(Y_{-\log(1-\alpha)}\right)_{\alpha\in[0,1]},$$

where (Y_t) *is (independent of the g used) a Fisher-Wright diffusion, i.e.*

$$(3.36) \quad dY_t = \sqrt{Y_t(1-Y_t)}\,dw_t, \quad Y_0 = \theta. \qquad \square$$

Remark 3.11 *The case treated in (a) corresponds in the voter model treated in section 1 to* $d = 1$, *while the case (b) corresponds to* $d = 2$.

4 Orbit of a nonlinear map and universality

(a) Fixed shapes and the orbit of the nonlinear maps $\mathcal{F}_c$

In view of the transition kernel of the interaction chain (see (3.27)–(3.29)), which depends only on $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ and on the sequence of diffusion functions $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, we can define the following nonlinear map $\mathcal{F}_c$ generating the sequence $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

To define first the domain of the map $\mathcal{F}_c$ consider the following class of functions:

(4.1) $\mathcal{G} = \{g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ | g \text{ satisfies (i) and (ii)}\}$

(*i*) $g(0) = g(1) = 0$ and $g(x) > 0$, for $x \in (0,1)$

(*ii*) g is locally Lipschitz.

Then $\mathcal{F}_c$ is defined by an nonlinear integral transformation as follows.

Definition 4.1 *(Nonlinear map $\mathcal{F}_c$)*

(4.2) $$(\mathcal{F}_c g)(\theta) = \int_{\mathbb{R}^+} g(x)\Gamma_\theta^{c,g}(dx), \quad \theta \in [0,1].$$

It can be shown that $\mathcal{F}_c$ maps $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{G}$. This allows to iterate $\mathcal{F}_c$ and to consider the *orbit:*

(4.3) $\{(\mathcal{F}_c)^n(g),\ n \in \mathbb{N}\}$.

In fact we need the more general version given by the following recipe. Fix a sequence $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ and define for this fixed sequence:

(4.4) $$\left\{\mathcal{F}^{(n)}(g), n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \mathcal{F}^{(n)} = \mathcal{F}_{c_{n-1}} \circ \ldots \circ \mathcal{F}_{c_0}.$$

Next we define

(4.5) $\tilde{g}_d(x) = dx(1-x), \quad x \in [0,1]$.

Then the following fact was shown in [BCGH95].

Theorem 4.1 *(Fixed shapes)*

(a) $\mathcal{F}_c(\tilde{g}_d) = \frac{c}{c+d}\tilde{g}_d(x), \quad x \in [0,1]$.
(b) If the function g satisfies that $\mathcal{F}_c(\tilde{d}g) = h(\tilde{d})g$ *for all* $\tilde{d} \in (0,\infty)$ *and for some function h on* $(0,\infty)$ *then* $g = \tilde{g}_d$ *for some d.* □

The first result can be checked very easily by calculating first and second moments of the equilibrium $\Gamma_\theta^{c,g}$ based on Ito's formula.

(b) Universality properties of the orbit

After one has identified all the fixed shapes one wants to know whether all other orbits are attracted by $\{(\mathcal{F}_c)^n(\tilde{g}_d), n \in \mathbb{N}\}$ for suitable d. It was shown in [BCGH95] that with $a_n = c_{n-1}^{-1} + \ldots + c_0^{-1}$:

Theorem 4.2 *(Attracting orbit)*

(4.6) $$a_n\left(\mathcal{F}^{(n)}(g)\right)(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(1-x), \quad \textit{for all } x \in [0,1].$$ □

This theorem has very important consequences. It first of all enforces that the dichotomy in the behavior of the interacting chain between $\sum c_k^{-1} < \infty$ or $\sum c_k^{-1} = +\infty$ translates into a dichotomy for the behavior of the interaction chain which is valid for *all* diffusion functions g considered. Furthermore it is the reason why Theorem 3.10 also holds for *all* diffusion functions g considered. In other words (4.6) is the reason for the universality of many features of the longtime behavior of interacting diffusions and explains the special but representative role of $g(x) = x(1-x)$ as diffusion function.

The behavior of g close to the boundary is an important feature for the cluster-formation. For the one component model the distinction can be made whether the boundary (i.e. 0 or 1) can be hit by the diffusion in finite time or not. This depends on whether g vanishes at the boundary points slower than quadratic or at least quadratic. Return to the interacting system. Now recall that the diffusions of block averages follow in the limit $N \to \infty$ diffusions with diffusion function $g_k = \mathcal{F}_{c_k} \circ \ldots \circ \mathcal{F}_{c_0}(g)$. For this function we can ask whether the corresponding diffusion hits the boundary or only converges to the boundary.

Therefore one asks for stronger forms of convergence of the sequence $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$. In particular a convergence giving for large k similar behavior close to the boundary points 0 and 1 as the limiting function.

It turns out that one has to distinguish essentially two classes of functions g: those which vanish more rapidly than quadratic close to 0 and 1 and those which are vanishing at most like x^2 or $(1-x)^2$ close to the boundary. Namely one has the following:

Theorem 4.3 *(Domains of attraction for boundary behavior)*

(a) If $\liminf_{x\to 0} x^{-2}g(x) > 0$ *and* $\liminf_{x\to 1}(1-x)^{-2}g(x) > 0$ *then there exist constants denoted* c_g, C_g *with* $0 < c_g < C_g < \infty$ *such that:*

$$(4.7) \quad c_g \le a_n \|a_n \mathcal{F}^{(n)}(g) - \tilde{g}_1\| < C_g, \quad n \in \mathbb{N}$$

where

$$(4.8) \quad \|f\| = \sup_{x\in(0,1)} \frac{|f(x)|}{|x(1-x)|} \quad \textit{and } a_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{-1}.$$

(b) If $\limsup_{x\to 0} x^{-2}g(x) = 0$ *or* $\limsup_{x\to 1}(1-x)^{-2}g(x) = 0$, *then (with* $\|\cdot\|$ *as above)*

$$(4.9) \quad \|a_n \mathcal{F}^{(n)}(g) - \tilde{g}_1\| \ge 1 \quad \textit{for all } n \ge 1.$$

(c) If $\lim_{x\to 0} x^{-2}g(x) = \ell$ *and* $\lim_{x\to 1}(1-x)^{-2}g(x) = r$, *then with* $n^*(g) = 2 + \inf(n \ge 0 : n(\ell \wedge r) \ge 1)$ we get

$$(4.10) \quad \begin{array}{ll} \mathcal{F}^{n^*(g)}(g) & \textit{has nonzero derivative at } 0 \textit{ and } 1 \textit{ and } n^*(g) \\ & \textit{is the smallest number with this property.} \end{array}$$

□

5 Extension to lattice models: Finite system scheme

In the present chapter we ask two different questions which need however the same kind of mathematics. First of all, what is the relation between spatial systems on a finite space region (only these are accessible to simulations) and the mathematical construct of a spatially infinite system. This question can be answered via the *finite system scheme* developed by Cox and Greven in [CG1].

The second question is whether we can use the analysis of sections 3 and 4 *without* taking the hierarchical mean-field limit and whether it applies to other index sets, for example $\mathbb{Z}^d$. Here many open problems remain.

These questions are important, since we have seen so far that the renormalization analysis is extremely useful to understand the large scale behavior of interacting stochastic systems with components indexed by the hierarchical group with large parameter N.

The key structural property of this index set Ω_N which we used to label components in section 3, can be expressed by saying that the blocks over which we average are subgroups and are such that we can carry out the hierarchical mean-field limit which allows to a large extent to separate what happens on the different scales.

If we would consider $\mathbb{Z}^d$ as the group indexing the components of the system and use as blocks $[-M, M]^d$ and do not change seriously the migration kernel for the interacting system then we do not have this structure. However we can view this block as a torus and then try the analysis. We still have the problem that we do not have the simplification corresponding to the hierarchical mean-field limit. Therefore we can so far only do a first step, a procedure we call *finite system scheme* ([CG1], [CG2], [CGS1], [CGS2, 98], [CDG]). We will now describe this mathematical theory.

(i) A sequence of finite models

Instead of the system formed by considering as index set of the process the hierarchical group Ω_N we consider now also $\mathbb{Z}^d$. We will also work in the framework of a fixed structure of the index set (as opposed to subsection 3, where in Ω_N we let $N \to \infty$). Our interest is in looking at the system with large finite subsets of Ω_N or $\mathbb{Z}^d$ as index sets and their relation to the corresponding infinite system. For Ω_N we would choose as finite sets B_M defined in (4.2), for $\mathbb{Z}^d$ we use $[-M, M]^d \cap \mathbb{Z}^d$. We look at M large while N and d are fixed. We focus for notational simplicity on the case $\mathbb{Z}^d$, since Ω_N is even easier to treat. The subsets $[-M, M]^d$ of $\mathbb{Z}^d$ are not anymore subgroups but quotient groups.

We denote by $(X^M(t))_{t \geq 0}$ the process

$$(5.11) \quad X^M(t) = (x_i^M(t))_{i \in I_M}, \quad I_M = [-M, M]^d \cap \mathbb{Z}^d,$$

which solves (2.2) but with the random walk kernel $a(\cdot, \cdot)$ replaced by $a_M(i,j)$ given by ($\sim$ denotes equivalence modulo $2M + 1$ in all coordinates):

$$(5.12) \quad a_M(i,j) = \sum_{\ell \sim j} a(i, \ell), \quad i \in I_M, \ j \in I_M.$$

As initial measure we consider restrictions to $[0, 1]^{I_M}$ of i.i.d. measures on $[0, 1]^{\mathbb{Z}^d}$ with mean θ of a component.

Altogether we have now as before in subsection 3(a) a sequence of finite systems $(X^M(t))_{t \geq 0}$ and an infinite system $(X(t))_{t \geq 0}$ which are related by the fact that for every $T < \infty$ on path space the following holds:

$$(5.13) \quad \mathcal{L}\Big((X^M(t))_{t \leq T}\Big) \underset{t \to \infty}{\Longrightarrow} \mathcal{L}((X(t))_{t \leq T}).$$

(ii) The main theorem of the finite system scheme

As before for the large scale analysis an important role is played by the block averages over the set I_M. Define for a configuration $X \subseteq [0,1]^{\mathbb{Z}^d}$:

$$(5.14) \quad D^M(X) = \frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{i \in I_M} x_i.$$

As time scale we consider:

$$(5.15) \quad \beta_M(t) = (2N+1)^d t.$$

In order to formulate the analogue to Theorem 3.3 we now need to replace the equilibria of the McKean-Vlasov limit by the equilibria of the real interacting system, which we introduced in (2.7) and (2.9). Define now the rescaled empirical intensity process as:

$$(5.16) \quad \bar{X}^M(t) = D^M(X^M(\beta_M(t))).$$

We will only treat here the case where $\hat{a}(\cdot,\cdot)$ is *transient*. The treatment of the case where $\hat{a}(\cdot,\cdot)$ is recurrent is more subtle and requires too much space. (See [CGS2] for further references in that situation).

Now the analogue of Theorem 3.3 reads as follows (see [CGS1]).

Theorem 5.1 *(Finite system scheme)*

$$(5.17) \quad \mathcal{L}\Big(\big(\bar{X}^M(t)\big)_{t\geq 0}\Big) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{L}\big((\tilde{z}_t)_{t\geq 0}\big),$$

where $(\tilde{z}_t)_{t\geq 0}$ *satisfies:* $z_0 = \theta \in [0,1]$ *and*

$$(5.18) \quad d\tilde{z}_t = \sqrt{g^*(\tilde{z}_t)}dw_t, \quad g^*(\theta) = \int_{[0,1]^{\mathbb{Z}^d}} \nu_\theta(dX) g(x_0).$$

Furthermore with ν_θ denoting the extremal equilibrium from (2.7):

$$(5.19) \quad \mathcal{L}(X^M(\beta_M(t))) \underset{t\to\infty}{\Longrightarrow} \int_{[0,1]} Q_t(\theta, d\theta')\nu_{\theta'},$$

where

$$(5.20) \quad Q_t(\theta,\cdot) = \mathcal{L}(\tilde{z}_t|\tilde{z}_0 = \theta).$$

□

As before we see on the macroscopic time scale the fluctuation of the intensity process and then the interaction forces the process locally on shorter time scales into the equilibrium dictated by the macroscopic intensity. Therefore again the evolution of the intensity becomes Markov, since the intensity suffices to determine the domain of attraction of the extremal equilibria.

A particular consequence of our theorem is, that the behavior of the finite system, even though it eventually hits simply the traps $\underline{0}$ or $\underline{1}$, on time scales comparable to the system size, exhibits different features. Namely it stabilizes in a *quasi-equilibrium*, which is the equilibrium of the infinite system at the current total intensity and which only changes after times of the order of the system size. Passing to the infinite system the quasi-equilibria become equilibria.

The problem now still open is to extend the analysis above to nested collections of systems whose sizes grow at different scales. Before we had, since we carried out the hierarchical mean-field limit, an automatic separation of scales and of the interaction on all levels. This is not the case if we work with $\mathbb{Z}^d$ or Ω_N for fixed N.

(iii) The fixed shape property

Notice that now the nonlinear map $g \to g^*$ involves averaging over a measure which lives on $[0,1]^{\mathbb{Z}^d}$ rather than $[0,1]$. Define:

$$(5.21)\quad \mathcal{F}(g)(\theta) = \int_{[0,1]^{\mathbb{Z}^d}} \nu_\theta(dX) g(x_0).$$

Then one has the following fact (see [CGS2], recall $\tilde{g}_d(x) = d(x(1-x))$.

Theorem 5.2 *(Fixed shape property)*

$$(5.22)\quad \begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{g}_d) = &\ (1 + d\hat{A}(0,0))^{-1} \tilde{g}_d, \\ & \text{with } \hat{A}(0,0) = \int_0^\infty \widehat{a}_t(0,0)dt \quad \text{and } \widehat{a}_t = \sum_{n=0}^\infty e^{-t} \cdot \frac{t^n}{n!} \widehat{a}^n. \end{aligned}$$

If $\mathcal{F}(dg) = h(d)g$ for all $d \in (0,\infty)$ for some function h on $[0,1]$, then

$$(5.24)\quad g = const\ \tilde{g}_1.$$

□

Remark 5.3 *Similar results as in Theorem 5.1 and Theorem 5.2 can be obtained for models involving infinitely many types as in the Fleming-Viot process (see [CG94b] or for branching systems [CGS1]).*

6 Applications in mathematical biology

The multiple space-time scale analysis combined with the hierarchical mean-field limit are the ideal instruments to construct a mathematical framework in which we can treat those questions in *evolution theory* concerning the longtime behavior of populations under the influence of migration, selection, mutation, recombination and random fluctuations due to change of generation. The reason for this is that the main interest is focused on the longtime behavior, but this cannot be identified simply with a limit of $t \to \infty$. Namely the law of a biological system before reaching equilibrium evolves by passing for long times through multitudes of states which all are: *quasi-equilibria*. The main goal is to capture in a macroscopic view the transitions from one quasi-equilibrium to another.

The models described in section 2 allow to model migration and change of generation called "pure genetic drift" (this is of course mathematically no drift term, but a diffusion term) in a population of two types. We can however generalize the results to models with K-types, in fact even to a continuum of types. This was carried out in [DGV95]. The main new ingredients we then still have to add to the evolution mechanism of the models we described are:

- selection
- mutation
- recombination.

These terms mean the following. The various types of a population have a different fitness in their environment compared to other types in that environment and as time evolves fitter types take over in the different populations, in other words, selection takes place. On the other hand new types are introduced into the population via mutations. For these effects suitable models are well known and their diffusion limits have been constructed. They are known as Fleming-Viot processes with selection and mutation. In addition types may combine (cross-over) to produce a new type, this mechanism is called recombination. The corresponding spatial models have been constructed in [DG99a].

Note that mutation increases the diversity of the population, selection decreases the diversity, while migration helps mutants to spread and thereby helps selection to easier wipe out inferior types. In other words, mutation and selection effects compete and are both enhanced by migration. The problem is to understand better the *combined effect* of all the three mechanism.

A key observation is that the types are grouped according to differences in fitness, which are of different order of magnitude. Similarly mutations occur at rates which are of different orders of magnitude and fitter more "complex" types are also more stable towards mutations. This implies that the evolution of such systems has to be analyzed in time scales of *different order of magnitude*. For this however our renormalization scheme is tailored. Typical questions in this context are:

- What is the combined effect of the competing forces of selection (reducing diversity) and mutation (increasing diversity) in the presence of migration between the colonies? The *combination of selection, mutation and migration leads to new effects, which can be approximated by passing to the hierarchical mean-field limit, where they can be answered.*
- What is the role of subpopulations in which rare mutants occurred? Do these mutants spread via migration and selection or via mutations appearing everywhere?

Some of these questions have already been approached with the multiple space-time scale analysis and we refer the reader to [DG99a] for the details. In particular one can show that the speed of selection changes dramatically if the migration is recurrent instead of transient, moving from exponential decay to sub-exponential decay. However many interesting problems are still open in this area, for example the role of rare mutants in connection with migration. This is addressed in forth-coming work by Dawson and Greven [DG00].

References

[BCGH95] Baillon, J.B., Clément, Ph., Greven, A., den Hollander, F.: *On the attracting orbit of a nonlinear transformation arising from renormalization of hierarchically interacting diffusions, Part I: The compact case*, Can. J. of Math., Vol. **47**, 3–27 (1995).

[BCGH97] Baillon J.B., Clément, Ph., Greven, A., den Hollander, F.: *On the attracting orbit of a nonlinear transformation arising from renormalization of hierarchically interacting diffusion. Part II: The non-compact case*, J. of Funct. Anal., vol. **146**, (1), 236–298 (1997).

[CDG] Cox, J.T., Dawson, D.A., Greven, A.: *Mutually catalytic super branching random walks: Large finite systems and renormalization analysis.* (In preparation 2000).

[CG1] Cox, J.T., Greven, A.: *The longtime behavior of some finite particle systems*, Prob. Theory and Rel. Fields **85**, 195–237 (1990).

[CG2] Cox, J.T., Greven, A.: *Ergodic theorems for systems of locally interacting diffusions*, Ann. of Prob. **22**(2), 833–853 (1994).

[CFG96] Cox J.T., Fleischmann, K., Greven, A.: *Comparison of interacting diffusions and an application to their ergodic theory.* Probability Theory Rel. Fields, **105**, 513–528, (1996).

[CG94a] Cox, J.T., Greven, A.: *The finite systems scheme: An abstract theorem and a new example.* Proceedings of CRM Conference on Measure valued processes, Stochastic partial differential equation and interacting Systems. CRM and Lecture Notes Series of the American Mathematical Society. Vol. **5**, 55–68 (1994).

[CG94b] Cox, J.T., Greven, A.: *Ergodic theorems for systems of locally interacting diffusions*, Ann. or Prob. **22(2)**, 833–853 (1994).

[CGS1] Cox, J.T., Greven, A., Shiga, T.: *Finite and infinite systems of interacting diffusions*, Prob. Theory and Rel. Fields **102**, 165–197 (1995).

[CGS2] Cox, J.T., Greven, A., Shiga, T.,: *Finite and infinite systems of interacting diffusions*, Part II, Math. Nachrichten **192**, (1998).

[DG93a] Dawson D.A., Greven, A.: *Multiple Time Scale Analysis of Hierarchically Interacting Systems*, Stochastic Processes, A Festschrift in Honour of Gopinath Kallianpur. S. Cambanis, J.K. Gosh, R.L. Karandikar, P.K. Sen eds., Springer, 51–59 (1993).

[DG93b] Dawson D.A., Greven, A.: *Multiple Scale Analysis of Interacting Diffusions*, Prob. Theory Rel. Fields **95**, 467–508 (1993).

[DG93c] Dawson D.A., Greven, A.: *Hierarchical models of interacting diffusions: multiple time scales, phase transitions and cluster formation*, Prob. Theory Rel. Fields, **96**, 435–473 (1993).

[DG96] Dawson, D.A., Greven, A.: *Multiple space-time scale analysis for interacting branching models*, EJP **Vol 1**, paper 6 (1996).

[DG99a] Dawson D.A., Greven, A.: *Hierarchically interacting Fleming-Viot processes with selection and mutation* EJP, vol. **4**, paper 14, 1–84 (1999).

[DG99b] Dawson D.A., Greven, A.: *State dependent multi-type spatial branching processes and their longtime behavior*, Manuscript 1999.

[DG00] Dawson D.A., Greven, A.: *On the effect of migration in spatial Fleming-Viot models with selection and mutation.* (In preparation 2000).

[DGV95] Dawson D.A., Greven, A., Vaillancourt, J.: *Equilibria and quasi-equilibria for infinite systems of Fleming-Viot processes.* Transactions of the American Math. Society, Vol.**347**, Number 7, 2277–2361, (1995).

[FG94] Fleischmann, K., Greven, A.: *Diffusive clustering in an infinite system of hierarchically interacting Fisher-Wright diffusions.* Prob. Theory Rel. Fields. **98**, 517–566, (1994).

[FG96] Fleischmann, K., Greven, A.: *Time-space analysis of the cluster-formation in interacting diffusions* EJP, Vol. **1**, Paper 6, 1–46, (1996).

[G00] Greven, A.: *Renormalization Analysis of interacting spatial stochastic systems*, Manuscript to appear in Proceedings of the Academy Colloquium "Infinite-dimensional stochastic analysis", 11–12 February 1999, Amsterdam, Eds. Ph. Clément, F. den Hollander, J. van Neerven and B. de Pagter, (2000).

[HS98] den Hollander, F., Swart, J. M.: *Renormalization of hierarchically interacting isotropic diffusions*, J. Stat. Phys. **93**, 243–291 (1998).

[K96] Klenke, A.: *Different clustering regimes in systems of hierarchically interacting diffusions*, Ann. Probab. **24(2)**, 660–697 (1996).

[K97] Klenke, A.: *Multiple scale analysis of clusters in spatial branching models*, Ann. Probab. **25(4)**, 1670–1711 (1997).

[L85] Liggett, T. M., *Interacting Particle Systems*. Springer, New York (1985).

[SF83] Sawyer, S., Felsenstein, J.: *Isolation by distance in a hierarchically clustered population* J. Appl. Probab. **20**, 1–10 (1983).

[W99] Winter, A.: *Multiple scale analysis of spatial branching processes under the Palm distribution*, PhD-Theses (1999).

Acknowledgment We thank our coworkers on the described research namely on the stochastic side J. T. Cox, D. Dawson and on the analytic sides J.B. Baillon, Ph. Clément and F. den Hollander, for the permission to present this material.

Andreas Greven
Mathematisches Institut
Universität Erlangen-Nürnberg
Bismarckstr. 1 $\frac{1}{2}$
91054 Erlangen
Germany
greven@mi.uni-erlangen.de

Eingegangen 03.05.00

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 102 (2000) 171–177
Mathematics Subject Classification: 01 A 70

Cantor-Medaille für Volker Strassen[1]

A. Schönhage, Bonn

Volker Strassen wurde am 29. April 1936 in Düsseldorf-Gerresheim geboren. Nach seinem Abitur am dortigen Neusprachlichen Gymnasium studierte er ab 1955 an den Universitäten Köln, Freiburg, München, Göttingen, zuerst Musik und Philosophie, später Mathematik und Physik. In Göttingen schloß er sich K. Jacobs an, bei dem er 1961 das Diplom in Mathematik erwarb und 1962 (mit der Arbeit [1]) promoviert wurde. Danach arbeitete Strassen einige Jahre an der University of California in Berkeley, bald als Assistant Professor, später als Associate Professor am dortigen Statistics Department. Zwischenzeitlich nutzte er ein Habilitandenstipendium der DFG, um 1966 in Erlangen, wohin K. Jacobs inzwischen gegangen war, die heimische venia legendi zu erlangen. In diese Zeit fielen auch die ersten internationalen Erfolge, mit einem Sektionsvortrag beim Internationalen Mathematiker-Kongreß in Moskau 1966 (vgl. [5]).

1968 folgte Strassen einem Ruf an das Institut für Angewandte Mathematik der Universität Zürich. Zugleich mit diesem Ortswechsel vollzog sich bei ihm ein wesentlicher Wandel in seinen Interessen, wovon noch zu berichten sein wird. Dort in Zürich verbrachte er zwei Jahrzehnte kreativen Schaffens. In der ihm eigenen kommunikativen Art hat er dabei seinen Schülern wie manchem Kollegen gerade auch im deutschsprachigen Umfeld viele Anregungen gegeben. Besonders sei seine enge fachliche und freundschaftliche Verbindung mit Ernst Specker (ETH Zürich) erwähnt. – Seit 1988 ist Strassen nun Professor an der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Konstanz. Wir freuen uns, daß er es (trotz fernerer Lockungen) vorgezogen hat, in unserer Nähe zu bleiben.

Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Das frühe mathematische Werk von Strassen hat seinen Schwerpunkt in der Stochastik. Auf diesem Gebiet stieß er in kurzer Zeit zu grundlegenden Resultaten vor, die seitdem die Entwicklung der mathematischen Statistik und der Wahrscheinlichkeitstheorie stark beeinflußt haben.

Schon in seiner Dissertation [1] wird diese Innovationskraft deutlich. Zur Analyse von Situationen, in denen man die statistische Natur von Beobachtungs-

[1] Laudatio zur Verleihung der Cantor-Medaille an Volker Strassen auf der Jahrestagung der DMV am 06. 09. 1999 in Mainz.

fehlern nicht genau kennt, schlägt Strassen einen robusten mathematischen Ansatz vor, der die üblichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch unendlich alternierende Kapazitäten im Sinne der Potentialtheorie ersetzt. In diesem Kontext beweist er eine entsprechende Verallgemeinerung der informationstheoretischen Kodierungssätze von Shannon. Dazu entwickelt er mithilfe einer geeignet konstruierten Radon-Nikodym-Dichte für Kapazitäten eine neue Version des Neyman-Pearson-Lemmas aus der statistischen Testtheorie. Insbesondere zeigt er, daß sich das Testen von zusammengesetzten Hypothesen, die durch Kapazitäten definiert sind, immer auf einen Test für zwei passende Wahrscheinlichkeitsverteilungen reduzieren läßt, simultan für jeden Stichprobenumfang und jedes Signifikanzniveau. In der verallgemeinerten Form von Huber und Strassen [10] für Kapazitäten der Ordnung 2 ist dieser Satz eines der schönsten und tiefsten Resultate auf dem Gebiet der robusten Statistik.

Die durch Kapazitäten definierten Hypothesen werden in [3] durch Kugeln in der Prohorov-Distanz beschrieben. Zugleich arbeitet Strassen ein viel allgemeineres Prinzip heraus: eine Integraldarstellung für stetige lineare Funktionale auf einem Banachraum, die durch eine Mischung von sublinearen Funktionen dominiert werden. Daraus ergeben sich weitreichende Konsequenzen für die Existenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Produkträumen mit vorgegebenen Randverteilungen und zusätzlichen Restriktionen. Viele Kopplungsargumente der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Statistik und der mathematischen Physik lassen sich auf dieses allgemeine Prinzip von Strassen zurückführen.

In seinen Arbeiten [2, 4, 5] zum Satz vom iterierten Logarithmus leistet Strassen einen glanzvollen Beitrag zu einem klassischen Kerngebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie. Seine Idee eines „starken Invarianzprinzips" eröffnet ein völlig neues Kapitel der Forschung. Sei S_n die n-te Partialsumme einer Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Die fast sichere Asymptotik dieser Partialsummen wird durch Khintschins Satz vom iterierten Logarithmus und seine Verallgemeinerung von Hartman und Wintner exakt beschrieben:

$$\limsup \left(S_n / \sqrt{2n \log\log n} \right) = 1.$$

Strassen zeigt in [4], daß hierzu die Existenz des zweiten Moments nicht nur hinreichend sondern auch notwendig ist. In [2, 5] legt er aber einen ganz neuen viel tiefer liegenden Aspekt dieses Phänomens frei, indem er die stetigen „Bilanzkurven" η_n betrachtet, die durch lineare Interpolation der Werte S_i an den Stellen i/n entstehen. Er zeigt, daß die Folge der Funktionen $\eta_n / \sqrt{2n \log\log n}$ fast sicher relativ normkompakt im Raum $C[0, 1]$ ist und daß die Menge ihrer Häufungspunkte aus allen absolutstetigen Funktionen x mit $x(0) = 0$ und $\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt \leq 1$ besteht. Die reskalierten Bilanzkurven kommen also jeder bei 0 startenden Kurve mit mittlerer kinetischer Energie $\leq 1/2$ immer wieder beliebig nahe, und zu jeder anderen Kurve wird schließlich Abstand gehalten.

Strassen beweist zunächst eine analoge Aussage für die Brownsche Bewegung. In dieser Form ist sein Satz eines der schönsten Resultate zur Feinstruktur der Brownschen Pfade seit den grundlegenden Einsichten von Paul Lévy. – *Hans*

Föllmer war als Student in Paris 1966 im Kolloquium für Wahrscheinlichkeitstheorie Zeuge, wie Lévy, der sonst immer schwieg, nach einem Vortrag über Strassens Satz vom iterierten Logarithmus aufstand und sagte: *„C'est un beau théorème"*. – Der Satz für Partialsummen wird dann durch ein neuartiges „starkes Invarianzprinzip" auf den Satz für die Brownsche Bewegung zurückgeführt: Strassen zeigt, daß sich eine Brownsche Bewegung B und eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit Partialsummenfolge (S_n) und der gewünschten Verteilung so auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum konstruieren lassen, daß für die Bilanzkurven η_n fast sicher gilt:

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |\eta_n(t) - B(nt)| = o\left(\sqrt{2n \log\log n}\right).$$

Während das klassische Invarianzprinzip von Donsker eine Approximation im Sinne schwacher Konvergenz liefert, erlaubt also das starke Invarianzprinzip von Strassen, direkt auf der Ebene des fast sicheren Pfadverhaltens zu argumentieren. Konzeptionell wie technisch war dies ein Durchbruch, der im folgenden Jahrzehnt intensive Forschung auslöste. Inzwischen ist das starke Invarianzprinzip als eine der elegantesten und kraftvollsten Approximationsmethoden sowohl in der Theorie der stochastischen Prozesse wie in der mathematischen Statistik fest etabliert.

Algorithmen

Bis Ende der 60-er Jahre bestand bei numerischen Mathematikern irgendwie die Meinung, das Invertieren von $n\times n$-Matrizen oder auch das Auflösen n-reihiger linearer Gleichungssysteme erfordere jedenfalls einen Mindestrechenaufwand der Ordnung n^3, so wie bei den üblichen Varianten von Gauß-Elimination. Dieses „Dogma" hat Strassen mit der kleinen aber bahnbrechenden Arbeit [6] widerlegt. Rekursiv mit Blöcken der Größen $2, 4, 8, \ldots$ operierend reduziert er Matrixinversion auf Matrixmultiplikationen und kann für diese die asymptotisch bessere Zeitschranke $O(n^{\log 7})$ beweisen ($\log_2 7 < 2.81$). Mit der zugrundeliegenden Pointe, daß die Multiplikation von 2×2-Matrizen $A \cdot B$ mit 7 statt 8 Einzelmultiplikationen geht, hat er ein Stück mathematischen Urgesteins zutage gefördert. Diese 7 ist übrigens optimal, und de Groote hat später gezeigt, daß es dafür (bis auf elementare Umformungen) überhaupt nur jenen einen Algorithmus gibt: man beginne mit $(a_{1,1} + a_{2,2}) \otimes (b_{1,1} + b_{2,2})$ als erstem Produkt, dazu passend weitere 6 Produkte zu finden wird dann zur Denksportaufgabe.

Für die Multiplikation n-stelliger ganzer Zahlen kannte man schon asymptotische Zeitschranken $n^{1+o(1)}$. Strassen hatte die entscheidend neue Idee, dafür die 1965 von Cooley und Tukey wiederentdeckte FFT zu nutzen. In der gemeinsamen Arbeit [7] haben wir das in zwei Varianten ausgeführt, einmal approximativ rechnend via $\mathbb{C}$, dann auch ganz diskret mit den Restklassenringen $\mathbb{Z}$ mod F_k, wobei fehlende Primalität der Fermatzahlen $F_k = 2^{2^k} + 1$ nicht stört, weil man FFT's mit $\omega = 2$ als 2^{k+1}-ter Einheitswurzel mod F_k benutzt. Mißt man „Bitkomplexität" als Zahl der logischen Gatter in entsprechenden Schaltkreisen oder als Schrittzahl von Turingmaschinen, dann ergibt sich so $\mu(n) = O(n \log n \log\log n)$ als die (bis heute) beste Rechenzeitschranke dieser Art.

Weitgehend analog geht so auch die Multiplikation in Polynomringen $K[t]$ mittels FFT's in $K[t] \bmod (t^M + 1)$ mit $M = d \cdot 2^k$ und $\omega = t^d$, wobei nun arithmetische Operationen in K gezählt werden. Mittels gängiger divide-and-conquer Techniken findet man dann auch für Aufgaben wie Multiplikation von n Faktoren $(t - v_j)$ oder Auswertung eines Polynoms n-ten Grades an n Stellen fast lineare Schranken der Form $O(\mu(n) \cdot \log n)$. Den allgemeinen Nutzen solcher Methoden hat Strassen bei seinem Vortrag [12] auf der DMV-Tagung 1975 in Tübingen demonstriert, indem er ($K = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ wählend) Berechnungen von $m! \bmod N$ mit $m^{1/2+o(1)}$ Operationen skizzierte und damit zeigte, daß Faktorisierung großer $N \in \mathbb{N}$ in *deterministischer* Zeit $N^{1/4+o(1)}$ gelingt. Optimisten werden hier einwenden, daß dies mit *probabilistischen* Methoden (meist) schneller geht; in der Tat hat Strassen selbst den ersten probabilistischen Algorithmus in der Zahlentheorie erfunden. Eine frühe Fassung des Monte-Carlo Tests [13] ließ ihn gar so optimistisch sein, 1974 mit E. Specker zu wetten, bis 1984 werde ein Algorithmus gefunden sein, der Primalität von N in polynomieller Zeit $(\log N)^{O(1)}$ entscheidet (vgl. [17, p. 540]). – V. Strassen verlor die Wette und lud seinen Opponenten „alsbald" zu einer Ballonfahrt ein.

Algebraische Komplexitätstheorie

Hier soll an einigen typischen Beispielen erläutert werden, wie sich solche zuvor geschilderten Einzelbefunde im Strassenschen Werk nach und nach methodisch verdichten und im Verbund mit den Resultaten anderer Mathematiker innerhalb von gut zwei Jahrzehnten ein faszinierendes neues Gebiet der Mathematik etabliert haben: die *Algebraische Komplexitätstheorie.* Strassen hat mit seinen Arbeiten zu Problemen der Berechnungskomplexität, durch leitende Mitgestaltung von mehr als zehn Oberwolfachtagungen zum Thema „Komplexität" und besonders auch durch seine Ergebnisberichte [17, 20] maßgeblich zur Formung dieses Gebietes beigetragen.

Glücklicherweise kann hier bezüglich näherer Einzelheiten, genauer Definitionen und weiterer Referenzen auf die wohlgelungene, knapp drei Jahre junge Monographie [B] verwiesen werden, die ein authentisches Bild des Gebietes vermittelt. Weitere Perspektiven (in neuer Spiegelung) bietet auch Strassens kürzlich erschienene Besprechung [21] dieses Buches.

Gradschranke. Einsicht in die Komplexität eines Berechnungsproblems gewinnt man, wenn die aus Algorithmen resultierenden oberen Schranken durch entprechende *untere* Schranken ergänzt werden, die im Idealfall mit jenen übereinstimmen. Für die oben erwähnte Multiplikation von Polynomen (wie auch für FFT) konnten bei Zählung *aller* Operationen allerdings bisher keine solch „guten" unteren Schranken gezeigt werden, oder die oberen Schranken sind noch zu groß! Schönere Resultate hat man für das sogenannte Ostrowski-Maß, bei dem man, in $K(x_1, \ldots, x_n)$ über einem Körper K rechnend, nur „wesentliche" Multiplikationen, Divisionen zählt, während $+, -$ und Multiplikationen mit $\lambda \in K$ kostenfrei sein sollen. Dann findet man hier und da wirklich adäquate untere Schranken durch Betrachtung von Invarianten wie Dimension oder Transzendenzgrad von Koeffizientenmengen oder auch mit Pan's Substitutionsmethode.

Dieses methodische Arsenal hat Strassen durch eine Gradschranke bereichert, über die er auch auf dem ICM in Vancouver 1974 [11] vortrug. Zu $f_1, \ldots, f_m \in K(x_1, \ldots, x_n)$, K algebraisch abgeschlossen, betrachtet er den Graphen W der damit gegebenen rationalen Abbildung $K^n \to K^m$ und beweist für die Komplexität $L(f_1, \ldots, f_m)$ der f's im Ostrowski-Maß die Ungleichung

(1) $\quad L(f_1, \ldots, f_m) \geq \log \deg W.$

So kann er in [9] für eine Reihe klassischer Aufgaben deren Komplexität asymptotisch exakt bestimmen, z. B. $L(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \sim \log(n!) \sim n \cdot \log n$ für die symmetrischen Grundfunktionen. In [16] wird diese Methode verfeinert auf die Berechnung polynomischer Kettenbrüche angewandt.

Baur-Strassen-Theorem. Strassen und sein Schüler W. Baur haben eine überraschend einfache Komplexitätsabschätzung für die (ersten) partiellen Ableitungen $\partial_i f$ rationaler Funktionen bewiesen: für $f \in K(x_1, \ldots, x_n)$ gilt

(2) $\quad L(f, \partial_1 f, \ldots, \partial_n f) \leq 3 \cdot L(f),$

oder mit Faktor 4 statt 3 bei Zählung aller Operationen, vgl. [15]. Dieses elegante Resultat hat seither viele Anwendungen gefunden, bei Herleitung neuer oberer wie auch unterer Schranken. Kann man z. B. zu allgemeinen $m \times m$-Matrizen X jeweils $f(\underline{x}) = \mathrm{spur}(X^{-1})$ mit $O(m^\beta)$ Operationen berechnen, dann gilt das auch für die $n = m^2$ Komponenten von X^{-2}.

Als Standardbeispiel für die andere Richtung sei hier die Anwendung auf $f = x_1^m + \cdots + x_n^m$ genannt: Kombination mit (1) ergibt

$$L(x_1^m + \cdots + x_n^m) \geq 1/3 \cdot L(x_1^{m-1}, \ldots, x_n^{m-1}) \geq n/3 \cdot \log(m-1).$$

Komplizierte Polynome. Einzelne univariate Polynome $f \in K[x]$ vom Grade n lassen sich nach den genannten Spielregeln jeweils mit $\leq 2\sqrt{n}$ wesentlichen Multiplikationen aus x herstellen, bei generischer Betrachtung erkennt man andererseits, daß mit m solchen Multiplikationen höchstens $m^2 + 2m + 2$ Parameter $\alpha_j \in K$ eingeschleust werden können; deshalb gilt für fast alle f vom Grade n $L(f) \geq \sqrt{n} - 1$. Wie aber findet man „konkrete" f dieser oder ähnlicher Mindestkomplexität?

Parallelen aus der Geschichte der Mathematik sind offensichtlich: 1874 zeigte G. Cantor mit der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$, daß fast alle reellen Zahlen transzendent sind, ohne auch nur eine zu benennen. Hundert Jahre später ist es Strassen, in gewisser Analogie zu Liouvilles Konstruktion transzendenter Zahlen, durch diophantische Betrachtungen gelungen, derart schwierige Polynome explizit anzugeben. Das hat eine Fülle weiterer Arbeiten angeregt (vgl. [B, Ch. 9]), in denen man sich durch Variation der Methoden bemühte, immer „noch konkretere" Polynome zu finden. Ein Beispiel aus [14] von Strassen und J. von zur Gathen hier zur Illustration: für nicht ganze Exponenten $r \in \mathbb{Q}$ gilt $L\left(\sum_{\nu=1}^n \nu^r x^\nu\right) \geq \sqrt{n}/O(\log n)$, während das für $r \in \mathbb{N}$ jeweils mit $O(\log n)$ Multiplikationen geht.

Bilineare Komplexität. In der systematisch angelegten Studie [8] analysiert Strassen die Hintergründe schneller Matrixmultiplikation. Er zeigt, daß man bei Berechnung quadratischer Formen (über unendlichem Körper K) von Divisionen absehen kann, und identifiziert als Kernproblem *bilineare* Komplexitätsfragen (man zählt

Produkte ohne Kommutativität). Vorrangig interessieren die bilinearen Multiplikationsabbildungen $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ von Algebren, speziell von Matrixalgebren $\mathcal{A} = K^{n \times n}$, deren Strukturtensoren man heute mit $\langle n, n, n \rangle$ bezeichnet. Strassen definiert hier den Rang dreistufiger Tensoren $t = (t_{i,j,k})$ als

$$R(t) = \min\{r : \exists u_i, v_i, w_i : \ t = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i \otimes w_i\},$$

so gilt $R\langle 2,2,2 \rangle = 7$ für die 2×2-Matrizen, und stößt bei Diskussion ganz elementarer Eigenschaften wie $R(t \otimes t') \leq R(t) \cdot R(t')$ für Tensorprodukte und $R(t \oplus t') \leq R(t) + R(t')$ auf die irritierend schwierige Frage, ob bei direkter Summe bilinearer Abbildungen nicht sogar immer Gleichheit gilt.

Die Bestimmung solcher Rangzahlen ist oft schwierig, schon für 3×3-Matrizen ist bisher z. B. nur $19 \leq R\langle 3,3,3 \rangle \leq 23$ bekannt (mögliche Abhängigkeiten vom jeweiligen Körper K können wir hier übergehen). Dennoch ist es, wie man in [B, Ch. 15] nachlesen kann, gelungen, den Exponenten der Matrixmultiplikation $\omega = \inf\{\beta : R\langle n,n,n \rangle \leq O(n^{\beta})\}$ mit vorwiegend asymptotischen Methoden (Grenzrang) um einiges besser abzuschätzen. Nachdem so Anfang der 80-er Jahre zunächst $\omega < 2.5$ erreicht war, hat Strassen in weiteren großen Arbeiten [18, 19] eine Theorie der Degeneration von Tensoren und asymptotischer Spektra entwickelt. Mit seiner „Laser-Methode“ konnte er $\omega < 2.48$ zeigen; zugleich hat er damit die Grundlage für die durch kombinatorische Zusatzüberlegungen von Coppersmith und Winograd [C] erzielte Schranke $\omega < 2.38$ geliefert.

Offene Probleme

Wie immer lebt auch dieses neue Gebiet von den Herausforderungen durch ungelöste Fragen. Ähnlich wie in Teilen der Zahlentheorie kann man viele der schwierigen Probleme zwar rasch erklären, zu deren Lösung aber werden Methoden in beachtlicher mathematischer Breite und Tiefe benötigt. Nennung dreier Probleme mag hier genügen:

- Gilt Strassens Additivitätsvermutung $R(t \oplus t') = R(t) + R(t')$?
- Ist der Exponent der Matrixmultiplikation $\omega = 2$?
- Kostet die Multiplikation von Polynomen n-ten Grades bei Zählung aller Operationen mindestens $c \cdot n \cdot \log n$?

Man sieht, das neue Feld ist gut bestellt. Wir wünschen uns und dem Träger der Cantor-Medaille 1999 auch weiterhin reiche Ernte.

References

[B] P. Bürgisser, M. Clausen, and M. A. Shokrollahi. *Algebraic Complexity Theory.* Springer, 1997.

[C] D. Coppersmith and S. Winograd. *Matrix multiplications via arithmetic progressions.* J. Symb. Comp. **9** (1990), 251–280.

[St] – im Text zitierte Publikationen von V. Strassen:

[1] *Messfehler und Information.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **2** (1964), 273–305.

[2] *An invariance principle for the law of the iterated logarithm.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **3** (1964), 211–226.

[3] *The existence of probability measures with given marginals.* Ann. Math. Stat. **36** (1965), 423–439.
[4] *A converse to the law of the iterated logarithm.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **4** (1966), 265–268.
[5] *Der Satz mit dem iterierten Logarithmus.* Proc. Int. Congress of Mathem., Moscow 1966, 527–532.
[6] *Gaussian elimination is not optimal.* Numer. Math. **13** (1969) 354–356.
[7] (mit A. Schönhage) *Schnelle Multiplikation großer Zahlen.* Computing **7** (1971), 281–292.
[8] *Vermeidung von Divisionen.* J. Reine Angew. Math. **264** (1973), 184–202.
[9] *Die Berechnungskomplexität von elementarsymmetrischen Funktionen und von Interpolationskoeffizienten.* Numer. Math. **13** (1973), 238–251.
[10] (mit P. Huber) *Minimax tests and the Neyman-Pearson Lemma for capacities.* Ann. of Stat. **1** (1973), 251–263; plus correction **2** (1974), 223–224.
[11] *Some results in algebraic complexity theory.* Proc. Int. Congress of Mathem., Vancouver 1974, Vol. 2, 497–501.
[12] *Einige Resultate über Berechnungskomplexität.* Jber. Deutsche Math.-Verein. **78** (1976) 1–8.
[13] (mit R. Solovay) *A fast Monte-Carlo test for primality.* SIAM J. Comput. **6** (1977), 84–85; plus erratum **7** (1978), 118.
[14] (mit J. von zur Gathen) *Some polynomials that are hard to compute.* Theoret. Computer Sci. **11** (1980), 331–335.
[15] (mit W. Baur) *The complexity of partial derivatives.* Theoret. Computer Sci. **22** (1983), 317–330.
[16] *The computational complexity of continued fractions.* SIAM J. Comput. **12** (1983), 1–27.
[17] *Algebraische Berechnungskomplexität.* In: Perspectives in Mathematics, Anniversary of Oberwolfach 1984 (eds. W. Jäger, J. Moser, R. Remmert), Basel 1984, 509–550.
[18] *Relative bilinear complexity and matrix multiplication.* J. Reine Angew. Math. **375/376** (1987), 406–443.
[19] *The asymptotic spectrum of tensors.* J. Reine Angew. Math. **384** (1988), 102–152.
[20] *Algebraic Complexity Theory.* Handbook of Theoret. Computer Sci., Vol. A (ed. J. van Leeuwen), Elsevier, Amsterdam 1990, 633–672.
[21] *Buchbesprechung zu* [B]. Jber. der DMV **101** (1999), 2. Abt. 19–22.

Arnold Schönhage
Institut für Informatik III
Universität Bonn
Römerstr. 164
D-53117 Bonn
schoe@informatik.uni-bonn.de

(*Eingegangen 31.08.2000*)

Jber. d. Dt. Math.-Verein. 102 (2000) 178–206
Mathematics Subject Classification: 01 A 70, 14 02, 53 02

Erich Kähler (1906–2000)*

R. Berndt, Hamburg

Die Mathematik ist ein Organ der Erkenntnis und eine unendliche Verfeinerung der Sprache und Vorstellungswelt wie eine Pflanze aus dem Erdreich, und ihre Wurzeln sind Zahlen und einfache räumliche Vorstellungen. Wir wissen nicht, welcher Inhalt die Mathematik als die ihm allein angemessene Sprache verlangt, wir können nicht ahnen, in welche Ferne und Tiefe dieses geistige Auge Mathematik den Menschen noch blicken läßt.

Erich Kähler 1941

Am 31. Mai 2000 starb Erich Kähler im Alter von 94 Jahren in seinem Haus in Wedel. Er war bis 1974 Direktor des Mathematischen Seminars der Universität Hamburg und Honorarprofessor der TU Berlin. Er war Ehrenmitglied der Hamburger Mathematischen Gesellschaft, und seit 1949 war er Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, seit 1955 der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, seit 1962 der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina und der Accademia Nazionale dei Lincei, und seit 1992 der Mailänder Accademia di Scienze e Lettere. Seine Beiträge zur Mathematischen Physik sowie der Algebraischen und der Arithmetischen Geometrie sichern ihm einen bleibenden Platz in der Geschichte der Mathematik, deren Einheit in aller Fortentwicklung er stets in den Vordergrund stellte, die aber für ihn das Instrument eines umfassenden Weltbildes ist. Diese seine Leidenschaft, über den Rahmen der Mathematik hinauszugreifen, ist vielleicht – zumindest in Teilen – erklärbar durch seine Lebensgeschichte, die nach einer offenbar glücklichen Jugend später von über das Maß des üblichen hinausgehenden tragischen Ereignissen geprägt wurde.

I

Erich Kähler wurde am 16. Januar 1906 in Leipzig geboren und ging dort bis zum Abitur in die Schule. Sein Vater, der früher 12 Jahre lang als Oboist bei der Marine gewesen war, arbeitete als Telegrapheninspektor. Er interessierte sich in sei-

* Hierbei handelt es sich um eine gekürzte Fassung eines Artikels in den Hamburger Beiträgen zur Mathematik, Heft 97 (2000).

ner Jugend zunächst für Geographie und Völkerkunde und wollte, angeregt durch die Lektüre von Sven Hedin, Forschungsreisender werden. Von der Seefahrt und den dazu nötigen Orientierungshilfen ging das Interesse weiter zur Himmelskunde und schließlich etwa vom 12. Lebensjahr an zur Mathematik. Unterstützt wurde er dabei von seinem Lehrer, Dr. Wiese, der ihm das Studium der Mathematik nahelegte.

In den letzten Jahren auf der Oberrealschule nahm er gar nicht mehr am Mathematikunterricht teil: Sein Schuldirektor hatte bei Weierstraß Vorlesungen gehört und überließ ihm seine Mitschriften, so daß Erich Kähler schon während der Schulzeit nicht nur die Vermessungskunde von Gauß und darüber hinaus Teile seines Werkes, sondern auch die Theorie der elliptischen und abelschen Funktionen kennenlernte. Mit 17 Jahren kam er auf die Idee, gebrochene Differentiationen zu studieren. Er verfaßte eine 50-seitige Abhandlung und wandte sich gemeinsam mit seinem Vater an Otto Hölder im Glauben, damit promovieren zu können. Beide wurden belehrt, daß dazu ein 6-semestriges Studium erforderlich war, und – etwas später auch – wurde ihm selbst klar, daß das Thema der Abhandlung, wenngleich auf andere Weise, bereits von Liouville bearbeitet worden war. Erich Kähler studierte dann 6 Semester in Leipzig unter besonderer Förderung von Lichtenstein. Er las insbesondere Gauß, Abel, Weierstraß, Riemann und Lagrange. Im Mai 1928 promovierte er bei Lichtenstein mit einer Arbeit zu einem Thema, das er sich selbst gesucht hatte: „Über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren, die sich aus gewissen Lösungen des n-Körperproblems ableiten." Im Anschluß daran konnte er mit einem Stipendium der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaften weiterarbeiten. Und zwar beschäftigte er sich mit der Untersuchung 4-fach periodischer Funktionen. 1929 machte er auf einer Urlaubsreise nach Laboe in Hamburg Station, wobei in einem einstündigen Gespräch mit Artin die Weichen für seinen weiteren Lebensweg gestellt wurden: Erich Kähler wurde Assistent bei Blaschke in Hamburg, vertrat aber vorher im Sommersemester 1929 noch die Assistentenstelle von Richard Brauer in Königsberg. 1930 habilitierte sich Erich Kähler mit einer Schrift über die Integrale algebraischer Differentialgleichungen. 1931/32 war er als Rockefeller Stipendiat in Rom. Er lernte die italienische Algebraische Geometrie und ihre Vertreter Enriques, Castelnuovo, Levi-Civita, Severi und B. Segre kennen und schätzen. Auch dort lernte er André Weil kennen, mit dem er lange freundschaftlichen, wissenschaftlichen Austauch pflegte und den er auch später noch 1934, 1935 und schließlich 1978 traf.

Blaschke wollte Erich Kähler bereits 1931 zu einer Professur in Rostock verhelfen. Ihm erschien es aber notwendig, als Privatdozent an dem damals in höchstem Maße anregenden wissenschaftlichen Leben am Hamburger Mathematischen Seminar teilzuhaben. Ein Ergebnis davon war die 1933 erschienene Arbeit „Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik", die später zur Bezeichnung „Kählermetrik" sowie „Kählermannigfaltigkeit" führte und über die weiter unten noch mehr gesagt werden soll. Er traf in Hamburg auch Chern, mit dem sich eine bis zu seinem Tode andauernde Beziehung wechselseitiger Hochachtung entwickelte.

1934 bot Blaschke seinem Assistenten an, mit ihm nach Moskau zu reisen und dort seine Untersuchungen über Systeme von Differentialgleichungen vorzutragen. (Daraus ist dann das Buch [13] entstanden.) Einen Teil der Reise legte er gemeinsam mit Elie Cartan zurück. In Moskau lernte er u. a. Alexandrov kennen. Ab 1935 war er wieder in Königsberg, zunächst als Vertreter einer Professur und dann ab 1936 als ordentlicher Professor. In diese Zeit fielen weitere Forschungen über mathematische Physik, so seine Formulierung der Maxwellschen Gleichungen mit Hilfe der Differentialformen.

1938 heiratete Erich Kähler Luise Günther, eine Ärztin. Von Ende 1939 an wurde seine wissenschaftliche Arbeit durch den Krieg unterbrochen. Zwei Wochen nach der Geburt seines ersten Sohnes Helmuth wurde er als Freiwilliger zur Marine eingezogen. In seinen Erinnerungen verweist er darauf, daß diese Entscheidung, Freiwilliger zu werden, stark von Nietzsches Ideen beeinflußt worden war (mit denen er zeitlebens in einem hochspannungsgeladenen Verhältnis stand). Weiter verweist er darauf, daß der Militärdienst ihn vor der Teilnahme am Parteigeschehen bewahrte. Er hatte zu viele jüdische Freunde, als daß er seine Stimme zu den Themen hätte geben können, die Feindschaft gegen das Judentum ausdrückten.

Das Kriegsende erlebte er in der Festung St. Nazaire in der Bretagne, von wo er dann für zwei Jahre in französische Gefangenschaft auf der Ile de Ré kam. Diese Zeit beschreibt er als paradiesisch in Bezug auf die Wissenschaft. Als ehemaliger Offizier brauchte er nicht zu arbeiten. Die vor dem Kriege geknüpften Verbindungen verhalfen ihm zu einer Ausnahmegenehmigung von Joliot-Curie, damals Direktor des französischen CNRS: Er durfte Bücher kaufen, diese transportieren lassen und später dann auch mitnehmen. Und auf Hilferufe an Elie Cartan und Chern hin bekam er von überall her Sonderdrucke und Literatur zugeschickt.

André Weil, der 1947 von Sao Paulo nach Chicago wechselte, versuchte – allerdings vergeblich –, ihn nach Sao Paulo zu vermitteln. Nach der Entlassung aus der Gefangenschaft 1947 folgte eine kurze Zeit als Diätendozent in Hamburg, bis er dann 1948 als Nachfolger von Koebe ordentlicher Professor in Leipzig wurde. Seit der Entlassung war er dann wieder mit seiner Familie vereint. 1942 war die Tochter Gisela geboren, und seine Frau war mit den Kindern bei Kriegsende noch mit einem der letzten Schiffe aus Ostpreußen weggekommen und dann in Seedorf in Schleswig-Holstein untergekommen. 1948 wurde der Sohn Reinhard geboren, behindert, aber in besonders inniger wechselseitiger Liebe mit den Eltern und Geschwistern verbunden.

Über die Leipziger Zeit gibt es einen schönen Bericht von Horst Schumann [Schu]. Im Nachhinein scheint dies die wissenschaftlich fruchtbarste Periode für Erich Kähler gewesen zu sein. Sein Wirken dort reicht bis in die heutige Zeit hinein und wird etwa dokumentiert in dem aktiven Interesse, das Zeidler, der früher Vorlesungen bei Erich Kähler hörte und jetzt der Direktor des dortigen MPI ist, an Kählers Werk nahm und nimmt. Er hielt dort einen 5-semestrigen Kurs, zum Teil 10-stündig pro Woche, in dem er die Algebra, algebraische Geometrie, Funktionentheorie und Arithmetik so ausbreitete, wie sie dann in seinem 1958 erschienenen, einen ganzen Band der Annali di Matematica ausmachenden 399-seitigen Hauptwerk, der „Geometria Aritmetica“ [28], zusammengefaßt wurden. Er hatte dort, „Meister“ genannt, einen Kreis von Schülern, H. Schumann, Lustig, Mehner, Eisenreich, Häuslein, Grosche und Uhlmann, mit denen er gemeinsam die zum Teil bereits vor dem Kriege entstandenen Entwürfe durchging und ausarbeitete und deren Mitwirkung auch an Stellen in der Geometria sichtbar wird. Weitere Moskau-

Reisen (zu Vorträgen im Seminar von Schafarewitsch) und seine Akademie-Mitgliedschaften sicherten Erich Kähler eine unabhängige Stellung im Verlauf der wachsenden politischen Spannungen. Doch anläßlich seines Einsatzes für die Freilassung des Leipziger Studentenpastors Schmutzler aus dem Gefängnis wurden die Spannungen für Erich Kähler so groß, daß er einen Ruf an die TU Berlin auf die Nachfolge von Schmeidler annahm.

In diese Zeit in Berlin fiel dann auch seine Arbeit am „Inneren Kalkül“ [29–33], mit dessen Hilfe er die Dirac-Gleichung des Elektrons ausformulierte.

1959 versuchte van der Waerden, Erich Kähler nach Zürich zu holen. Dieser wollte aber nicht gleich wieder wechseln. Er versuchte dann etwas später, Hirzebruch nach Berlin zu ziehen, der dann allerdings Bonn vorzog.

1964 nahm Kähler einen nach dem Tode von E. Artin an ihn ergangenen Ruf nach Hamburg an. Er wurde dort gemeinsam mit Sperner, Hasse, Witt, Collatz und Bauer Direktor des Mathematischen Seminars. Er blieb allerdings noch in Berlin wohnen und auch als Honorarprofessor in Berlin aktiv. In Berlin hatte er im zweiten Stock einer herrlichen Villa in Lankwitz eine großzügige Wohnung, bestückt und geschmückt mit Büchern aller Art. Die wunderbare Atmosphäre dort, die der Autor dieses Berichts als Student gemeinsam mit den anderen Hörern des Algebra-Kurses kennenlernen durfte, wird allen stets in Erinnerung bleiben. Und doch wurde die Familie hier vom Schicksal heimgesucht: 1966 verunglückte der Sohn Reinhard und 1970 starb Frau Luise Kähler an Leukämie (und 1988 folgte ihr noch die Tochter Gisela). Die Krankheit seiner Frau beeinflußte ganz stark sein wissenschaftliches Denken. Hatte er schon in der „Geometria“ und in dem 1953 erschienenen Text „Algebra und Differentialrechnung“ [22] eine Verbindung von Mathematik und Philosophie in einer mathematischen Ausprägung der Leibnizschen Monadologie gefunden, so wurde angesichts des persönlichen Leides das Bedürfnis immer drängender, auch in Chemie, Biologie, ja Theologie wirksam werden zu können. Ausdruck davon sind etwa die Schriften [38] und [39].

Eine glückliche Fügung ergab sich dann 1972 durch die Heirat mit Charlotte Kähler, einer Pharmazeutin, die seit dem Tode des Bruders in den letzten Kriegsmonaten Witwe war. Bis zu Erich Kählers Tod waren die beiden dann stets beieinander. Erst 1974 siedelte sich die Familie Kähler in Wedel bei Hamburg an, ganz in der Nähe der Elbe und damit des Wassers, das in Kählers Jugendträumen von der Seefahrt eine so große Rolle gespielt hatte. Und übrigens auch das Leben seines Sohnes Helmuth beeinflußt hatte, der zuerst Schiffbau studiert hatte, dann aber zur Physik überwechselte und sich jetzt als Astrophysiker an der Bergedorfer Sternwarte der Entwicklung von Sternmodellen widmet, in geographischer und wissenschaftlicher Nähe zu seinem Vater. Dessen Interessen sich, wie schon angedeutet, immer mehr dahin wandten, mit der Mathematik – und zwar insbesondere mit den Modulformen auf den Siegelschen Halbebenen und dann auch den Quaternionen-Halbräumen – ein Weltbild zu schaffen. Hierzu hatte er sich in die Philosophie von Plato, Schopenhauer, Nietzsche und vor allem Leibniz vertieft, aber darüber hinaus auch fernöstliche Philosophie erkundet. In Leipzig hatte er begonnen, Russisch, Sanskrit und Chinesisch zu lernen. So war in Berlin zu beobachten, wie er dem Wirken seiner Assistenten in den Übungen auf den hinteren Bänken des Hörsaals folgte, indem er chinesische Schriftzeichen kopierte.

In Hamburg hielt er u. a. einen Kurs Mathematik I–VIII ab, dessen sorgfältige Ausarbeitungen in der Hamburger Bibliothek eingesehen werden können. Darüber hinaus aber 1973 auch eine Vorlesung „Über die Mathematik als Sprache und Schrift" (wie übrigens auch schon in Leipzig) und 1981 „Nietzsches Philosophie als höchstes Stadium des Idealismus". Allerdings fand Erich Kähler hier in Hamburg nicht durchweg die Resonanz, die er sich wahrscheinlich wünschte. Dies ist zumindest teilweise erklärbar durch das großartige Angebot im Bereich der Mathematik und theoretischen Physik in Hamburg: zum Teil zeitgleich wirkten Persönlichkeiten von höchster Anziehungskraft wie Hasse, Witt, Sperner, Hel Braun, Pascual Jordan, Harry Lehmann, Hans Joos, Rudolf Haag, Carl Friedrich von Weizsäcker. Weitere Gründe liegen wohl auch darin, daß Erich Kähler sich zunächst zurückgezogen hatte, um seine Ideen unbeeinflußt zu verfolgen.

Auch nach seiner Emeritierung nahm Erich Kähler am wissenschaftlichen Leben des Mathematischen Seminars teil und lud häufig im Anschluß an Kolloquien oder Festveranstaltungen in sein Wedeler Heim ein. Unter der in jeder Weise umsichtigen Betreuung seiner Frau entwickelten sich stets Gespräche, die allen Teilnehmern im Gedächtnis geblieben sein dürften. Hervorzuheben ist das von Erich Kählers Nachfolger Oswald Riemenschneider ausgerichtete Festkolloquium zum 80. Geburtstag mit Vorträgen von G. W. Mackey und H. Grauert sowie das zum 90. Geburtstag mit dem vom Jubilar selbst gehaltenen Festvortrag mit dem Titel „Vom Relativen zum Absoluten". Dieses Thema hatte er gewählt in Anlehnung an den Titel eines Vortrages, in dem Max Planck 1924 über eine mögliche Arithmetisierung der Physik nachdachte. Noch bis ganz kurz vor seinem Tod verfolgte Erich Kähler diese Idee und warb überdies für die Idee eines absoluten Raumes, vermessen mit einer hyperbolischen Metrik und fixiert durch eine aus Quaternionen gebildete 10-parametrige Gruppe, die er die „neue Poincarégruppe" nannte.

II

Auf das wissenschaftliche Werk Erich Kählers und seine Auswirkungen wird an anderer Stelle ausführlicher einzugehen sein. Ein kurzer Überblick soll hier aber doch noch versucht werden, indem die folgenden Themenbereiche vorgestellt werden:

1. Zum n-Körperproblem
2. Von der Theorie der Funktionen zweier komplexer Variablen zur Topologie und Geometrie
3. Differentialoperatoren, Differentiale und Differentialgleichungen
4. Zur Arithmetischen Geometrie
   4.1 Kählerdifferentiale und -differenten
   4.2 Infinitesimal- und Differentialintegritäten
   4.3 Arithmetische Mannigfaltigkeiten und Gebilde
   4.4 Die arithmetische und topologische Integrität und Modulformen eines Körpers
5. Der innere Differentialkalkül und die Dirac-Gleichung
6. Kählers Neue Poincaré-Gruppe
7. Zur Mathematik und Philosophie

Diese Einteilung und auch die Benennung der Gebiete ist an einigen Stellen ziemlich willkürlich und geschieht nur im Bemühen, eine Übersicht herzustellen. Ist es doch gerade eines der Hauptanliegen Kählers, zu zeigen, daß im Zentrum der Mathematik die Gebiete vernetzt sind und die Disziplinen sich miteinander verwebend eine Einheit bilden. Auch recht willkürlich (durch den Kenntnisstand des Autors dieses Textes bedingt) werden nur an einigen Stellen Hinweise auf Auswirkungen und Weiterentwicklungen der jeweiligen Ansätze und Ergebnisse gegeben in der Hoffnung, auch damit schon einen Eindruck von der Vielfalt und Bedeutung von Kählers Werk zu geben.

1 Zum n-Körperproblem

Die Arbeiten [1] und [2] befassen sich mit dem 3-Körperproblem und die Arbeit [4] mit einer Anwendung gewisser Prinzipien des n-Körperproblems zur Bestimmung von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten:

Ziel der Arbeit „Transformation der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems“ [1] ist es, die Differentialgleichungen des 3-Körperproblems so umzugestalten, daß die bekannten Lagrangeschen Lösungen

- die 3 Körper bilden während ihrer ganzen Bewegung ein gleichseitiges Dreieck, d. h. sie bewegen sich in einer Ebene in Kegelschnitten, deren Brennpunkt im Schwerpunkt liegt, sowie
- die 3 Körper bilden beständig eine gerade Linie und bewegen sich in einer Ebene

durch Einführung neuer Koordinaten in möglichst einfacher Gestalt erscheinen. Die Note „Reduktion des Dreikörperproblems in geometrischer Form dargestellt“ [2] weist einen geometrischen Weg für die bekannte Reduktion der Differentialgleichungen auf ein System 7. Ordnung.

Die Dissertation: „Über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren, die sich aus gewissen Lösungen des n-Körperproblems ableiten“ [4] verallgemeinert grundlegende Untersuchungen von Lichtenstein und führt auf ein System von Integro-Differentialgleichungen, deren Auflösung von gewissen linearen Integralgleichungen abhängt. Als Ansatz dient hier, daß das ebene n-Körperproblem spezielle Lösungen hat, bei denen die n Massenpunkte Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben. Diese Lösungen geben im Allgemeinen zu Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten dadurch Anlaß, daß die Massenpunkte durch gleichschwere Flüssigkeitskörper ersetzt werden. Dabei ist jedoch vorauszusetzen, daß die Dimensionen der letzteren klein sind im Verhältnis der ganzen Konfiguration. In der vorliegenden Abhandlung werden die genauen Existenzbedingungen für solche Flüssigkeitsfiguren aufgestellt.

2 Von der Theorie der Funktionen zweier komplexer Variablen zur Topologie und Geometrie

Die Arbeiten [3] und [5–7] behandeln in ansteigender Komplexität Probleme der komplexen Funktionentheorie mehrerer Variablen. Dabei wird jeweils der Fall von zwei Variablen diskutiert, der schon die typischen Phänomene aufzeigt, die sich ergeben, wenn die klassische Riemannsche Theorie einer Variablen verlassen wird.

In der Note „Über ein geometrisches Kennzeichen der analytischen Abbildungen im Gebiete zweier Veränderlichen" [3] wird gezeigt, in welchem Sinne auch die analytischen Abbildungen von zwei Veränderlichen konform genannt werden können. Die Arbeit „Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle" [5] hat Bedeutung für die moderne Knotentheorie bekommen (s. etwa Epples Buch über die Geschichte der Knoten [Epp]). Sie handelt von der Schwierigkeit, daß zwischen geometrischen und analytischen Fragestellungen im Bereich mehrerer Variablen keine umkehrbar eindeutige Beziehung mehr besteht. Im Anschluß an Arbeiten von Brauner werden algebroide Funktionen untersucht. Dabei wird eine Funktion $z = F(x, y)$ in einer Umgebung Σ von $x = a$, $y = b$ algebroid genannt, wenn die analytische Fortsetzung von $F(x, y)$ längs beliebig in Σ verlaufender Wege immer eine endliche Anzahl verschiedener Zweige $z_i = z_i(x, y) (i = 1, \dots, n)$ gibt, die sich nur längs gewisser in Σ algebraischer Kurven P_j (d. h. mit einer Darstellung $y = f(x) = a_1 x^{m_1/n} + a_2 x^{m_2/n} + \cdots$, $0 < m_1 < m_2 < \cdots$) singulär verhalten.

Dabei kann o. E. angenommen werden, daß diese P_j Verzweigungskurven sind, längs derer einige, eventuell alle, Zweige von $z = F(x, y)$ zusammenhängen, d. h. dieselben Werte annehmen. Es gilt neue Aussagen über die Gruppe aller geschlossenen Wege zu machen, die die singulären Kurven P_j nicht treffen und von hier Rückschlüsse auf die analytische Gestalt von $z = F(x, y)$ zu machen.

In der Arbeit „Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen I" [6] wird das Problem angegangen, daß in der Theorie Funktionen mehrerer Veränderlichen nicht mehr in so reiner Form wie in der Riemannschen Funktionentheorie in einer Variablen die wesentlichen Eigenschaften der Funktionen durch die Topologie erfaßt werden. Und zwar wird hier für den Fall zweier Variablen für die Bettizahlen P_i einer vierdimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit R zu einer algebraischen Funktion $z(x, y)$ mit definierender Gleichung $f(x, y, z) = 0$ eine explizite Formel für

$$P_2 - 2P_1$$

mit Hilfe topologischer Überlegungen bestimmt.

Zur Erläuterung der Formel wird die Gleichung

$$z^3 - 3xz + 2y = 0$$

durchdiskutiert. Es ergibt sich hier $P_2 - 2P_1 = 2$.

Es wird darauf hingewiesen (p. 262), daß der Zusammenhang zwischen P_1, P_2 einzeln und diesen Bestimmungsstücken von R recht komplizierter Natur zu sein scheint.

Die Note „Über den topologischen Sinn der Periodenrelation bei vierfachperiodischen Funktionen" [7] hat offenbar Artin so sehr beeindruckt, daß er sich dafür einsetzte, daß ihr Autor bei Blaschke eine Assistenstelle bekam. Hier wird eine eindeutige analytische Funktion $\varphi(u, v)$ betrachtet, die sich im Endlichen wie eine rationale Funktion verhält und die 4 Perioden (u_i, v_i), $i = 1, \dots, 4$ hat. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer solchen Funktion ist das

Bestehen einer Periodenrelation

$$\sum_{i<k} c_{ik}(u_i v_k - u_k v_i) = 0 \qquad \text{mit} \quad c_{ik} \in \mathbb{Z}.$$

Es wird nun eine einfache topologische Begründung für diese Relation gefunden, indem die 4-dimensionale geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit R betrachtet wird, die zu dem Periodenmodul gehört, und darauf 6 in Bezug auf Homologie unabhängige geschlossene 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten S_{ik}. Homologien zwischen Linearkombinationen solcher Flächen übersetzen sich in Relationen zwischen Integralen über die Flächen. Die Vorgabe einer analytischen periodischen Funktion φ führt zur Existenz einer weiteren geschlossenen Fläche S auf R, die homolog zu den S_{ik} sein muß. Das Verschwinden des Integrals über S übersetzt sich dann in die Periodenrelation.

Die Habilitationsschrift „Über die Integrale algebraischer Differentialgleichungen" [8] enthält detailreiche Überlegungen, die eine gesonderte Würdigung verdienen. Hier sei nur soviel gesagt, daß diesmal die zweidimensionale Funktionentheorie und die zugehörigen in den vorigen Arbeiten diskutierten topologischen Hilfsmittel, insbesondere die Monodromiegruppe, verwandt werden, um über Poincaré und Picard hinausgehend Aussagen über die Integration gewisser Differentialgleichungen zu machen. Und zwar wird das allgemeine Integral

$$F(x, y) = \text{konst.}$$

einer Differentialgleichung

$$\frac{dx}{p(x,y)} = \frac{dy}{q(x,y)} \qquad \text{mit algebraischen} \quad p(x,y) \quad \text{und} \quad q(x,y)$$

als Funktion der beiden Veränderlichen x, y untersucht, und zwar insbesondere für den Fall, daß $F(x, y)$ nur isolierte singuläre Kurven besitzt, dem sich auch die von Picard eingeführten hyperabelschen Funktionen unterordnen.

3 Differentialoperatoren, Differentiale und Differentialgleichungen

Die Note „Zur Invariantentheorie von Differentialoperatoren" [9] gibt Rom als Entstehungsort an, basiert aber noch auf einer Arbeit von Bol und Howe in den Hamburger Abhandlungen von 1930. Es werden drei Differentialoperatoren in drei Variablen

$$\Delta_i = a_{i,1}\frac{\partial}{\partial x_1} + a_{1,2}\frac{\partial}{\partial x_2} + a_{i,3}\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad , \quad i = 1, 2, 3,$$

mit Kommutatoren

$$\Delta_i\Delta_j - \Delta_j\Delta_i = \sum_{l=1}^{3} c_{kl}\Delta_l \qquad (i, j, k) \in \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\}$$

und topologischen Transformationen $x'_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3), (i = 1, 2, 3)$, betrachtet und die Frage diskutiert, ob eine beliebig vorgegebene Funktionsmatrix (c_{ik}) immer als Matrix der Zusammensetzungsformeln eines Operatorensystems angesehen werden kann und wie weit dieses durch die c_{ik} festgelegt ist. Aus der Theorie die Lieschen Gruppen ist bekannt, daß für konstante c_{ik} gewisse Relationen bestehen müssen, damit ein zugehöriges Operatorensystem existiert, das dann bis auf topologische Transformationen auch eindeutig bestimmt ist. Für allgemeinere c_{ik} gibt es jedoch unter der einzigen Voraussetzung, daß gewisse aus Ableitungen der c_{ik} gebildete Determinanten von Null verschieden sind, unendlich viele (im allgemeinen auch topologisch verschiedene) zugehörige Operatorensysteme. Die c_{ik}, die im Fall konstanter Werte ein vollständiges Invariantensystem bilden, genügen also im allgemeinen Fall noch nicht zur topologischen Charakterisierung. Die Beweise stützen sich auf einen allgemeinen Existenzsatz von Riquier über partielle Differentialgleichungen.

Die Note „Sui periodi degli integrali multiple sopra una varietà algebrica" [10] ist eingebunden in die Sprache und den Gestus der italienischen algebraischen Geometrie. Sie bringt in Weiterentwicklung der bereits in der Arbeit [7] erprobten Idee einen neuen einfacheren Beweis für das Theorem von Hodge, daß die Perioden mehrfache Integrale 1. Gattung auf einer algebraischen Varietät gewisse bilineare Relationen und Ungleichungen erfüllen analog zu denen für die Perioden der abelschen Integrale. Aus diesen Ungleichungen folgt die Existenz mehrfacher Integrale 1. Gattung ohne Perioden und die Tatsache, daß die von Severi auf algebraischen Flächen betrachteten semi-exakten Integrale 1. Gattung genau die einfachen Integrale 1. Gattung von Picard sind. An diese Arbeit ist dann auch gleich angehängt Severis Auseinandersetzung ihrer Folgen für die Geometrie der Flächen in „Osservationi a proposito della nota di Erich Kähler: ‚Sui periodi degl' integrali multipli sopra una varietà algebrica'" [Sev].

Auch die Arbeit „Forme differenziali e funzioni algebriche" (1932) [11] setzt sich mit der italienischen Geometrie auseinander. Sie ist erkennbar eine Fortsetzung der vorigen Note, bringt aber entscheidende neue Definitionen, die sich in den späteren Arbeiten bis hin zur Geometria Aritmetica weiterentwickeln werden. Und zwar wird das Konzept der „symbolischen" Cartanschen Differentialformen verwandt, um einer algebraischen Varietät Differentialformen 1. Art und beliebigen Grades zuzuordnen. Dabei ist der entscheidende Punkt die Betrachtung des zu einer Gleichung

$$f(x_0,\ldots,x_n)=0$$

einer algebraischen Varietät gehörigen Funktionenkörpers und der dazu gehörigen Differentialformen

$$\omega=\Sigma A_{i_1\ldots i_p}d(x_{i_1},\ldots,x_{i_p}),$$

für die die Koeffizienten $A_{i_1\ldots i_p}$ in den Umformisierenden jeden Punktes der Varietät holomorph sind. Diese Bildung erweist sich als birational invariant und ermöglicht die Definition der Plurigeschlechter von Enriques und Castelnuovo und (mit Hilfe von Tensorformen) weiterer Invarianten für die Varietät, über die dann auch mit Hilfe dieses Konzepts Aussagen zu beweisen sind.

Die Arbeit „Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik" [12] ist offenbar die folgenreichste des gesamten Kählerschen Werkes geworden, beruht auf ihr doch die Einführung der Begriffe Kählermetrik, Kählerpotential, Kählersche Varietäten und Mannigfaltigkeiten, Kählergruppen, ja Kählergeometrie. Einen besonders schönen Überblick über den Inhalt und die Auswirkungen der Arbeit gibt J.P. Bourguignon in „Eugenio Calabi and Kähler Metrics". [Bou] Er sagt dort über die Kählergeometrie:

This subject now lies at the cross roads between many branches of Mathematics:
– *Differential Geometry*, since the basic objects of the theory are differential geometric in nature;
– *Complex Analysis*, since holomorphic maps and holomorphic bundles play an important role in Kählerian Geometry, and geometric tools from Kählerian Geometry prove useful to tackle purely complex analytic problems;
– *Algebraic Geometry*, since, via Hodge Theory, Kählerian Geometry gives insight into the cohomological structure of algebraic manifolds;
– *Global Analysis*, since it is thanks to the very substantial progress made in this area that major conjectures have been settled;
– and finally, but this may turn out to be very important for the future, *Theoretical Physics*, since today many challenges in Kählerian Geometry, such as understanding the so-called mirror symmetries, have their origin in physical models."

In seinem, wie Bourguignon sagt, „visionären Artikel" stützt sich Kähler wieder wie in seiner vorigen Arbeit [11] auf Cartans „eleganten Kalkül der symbolischen Differentialformen", der damals noch nicht ganz seine heute übliche Form angenommen hatte (das geschah dann in späteren Arbeiten Kählers). Es geht hier darum, einer komplexen Mannigfaltigkeit der Dimension n mit einer hermiteschen Metrik

$$ds^2 = \Sigma g_{i\bar{k}}\, dx_i\, d\bar{x}_k$$

Invarianten zuzuordnen. Dabei stellt sich als bemerkenswerte Ausnahme der Fall heraus, daß die ds^2 zugeordnete äußere Form (in heutiger Schreibweise)

$$\omega = i\Sigma g_{i\bar{k}}\, dx_i \wedge d\bar{x}_k$$

die Ableitung

$$d\omega = 0$$

hat. Kähler macht dann die folgenden Beobachtungen:

– Es gibt eine Funktion U (später auch häufig **Kahlerpotential** genannt) mit

$$ds^2 = \Sigma \frac{\partial^2 U}{\partial x_i\, \partial \bar{x}_u} dx_i d\bar{x}_k \qquad \text{resp. } \omega = i\partial\bar{\partial}U,$$

– Beispiele für diese Metriken werden gegeben durch

$$U = k \cdot \log(1 - \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \bar{x}_\nu), \qquad (k \text{ eine Konstante}),$$

invariant bei den hyperfuchsschen Transformationen

$$x_i' = \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n}{\alpha_{00} + \alpha_{01}x_1 + \cdots + \alpha_{0n}x_n} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

die die Einheitshyperkugel $1 - x_1\bar{x}_1 - \cdots - x_n\bar{x}_n = 0$ in sich überführen, sowie

$$U = \sum_{i=1}^{n} k_i \log(1 - x_i\bar{x}_i) \quad (k_i \text{ Konstanten}),$$

invariant bei den hyperabelschen Transformationen

$$x_i' = \frac{\alpha_i x_i + \beta_i}{\gamma_i x_i + \delta_i} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

die die Einheitskreise $1 - x_i\bar{x}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ festlassen, und Mischungen aus diesen Fällen. (Nicht von Kähler betrachtet wird der komplexe projektive Raum, der – wie unterdes wohlvertraut – Kählersch mit der Fubini-Study-Metrik ist.)

– ds^2 ist eine Einsteinmetrik, d. h. für den zugehörigen verjüngten Riemannschen Krümmungstensor gilt

$$R_{ik} = \lambda g_{ik},$$

sowie für das Potential U die Monge-Ampère Gleichung

$$\det\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial \bar{x}_j}\right) = e^{\lambda U}.$$

– Es gilt

$$R_{i\bar{k}} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \bar{x}_k} \log D(U), \quad D(U) := \det\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial \bar{x}_j}\right).$$

und für die zugeordnete äußere Krümmungsform

$$\Omega = \Sigma R_{i\bar{k}} dx_i \wedge d\bar{x}_k = \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \bar{x}_k} \log D(u) dx_i \wedge d\bar{x}_k.$$

– Aus ω und Ω lassen sich weitere invariante (n, n)-Formen bilden und zwar

$$\Omega^r \wedge \omega^{n-r} \quad \text{für} \quad 0 \leq r < n.$$

Über diese werden dann auch noch einige Untersuchungen angestellt, für die ebenso wie auf eine stattliche Literaturliste für die Untersuchungen im Anschluß an diese Arbeit auf Bourguignons Aufsatz [Bou] verwiesen wird. Hier sei nur noch darauf hingewiesen, daß Chern diese Arbeit ausführlich studiert hat und daß sie ihm erstes Beispielmaterial bei der Definition seiner charakteristischen Klassen lieferte [Ch]. Auch hat Weils Buch [Weil1] sicher einen großen Einfluß bei der Ausbreitung der anfangs genannten Begriffe gewonnen, wobei anzumerken ist, daß Weil Kählers Weitsicht in die Richtung der später bis zu den hyperkähler Strukturen ausufernden Entwicklungen damals nicht so hoch einzuschätzen schien, wie es, wie anfangs gesagt, Bourguignon tat.

Der Text „Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen" (1934) [13], füllt mit seinen 79 Seiten das Heft 1 der Hamburger Mathematischen Einzelschriften und ist 1948 neuaufgelegt. Diese Arbeit steht unter dem Einfluß von Blaschkes topologisch differential-geometrischer Schule und hat sich als sehr einflußreich erwiesen. Es geht hier darum, die Untersuchungen der Differentialgleichungen von E. Cartan mit Hilfe der Pfaffschen Formen auf Systeme auszudehnen, die durch alternierende Differentialformen höheren Grades beschrieben werden. Dabei wird der Begriff des Differentialideals als ein Ideal $\mathfrak{a}$ im Differentialring Ω mit $d\omega \in \mathfrak{a}$ für alle $\omega \in \mathfrak{a}$ eingeführt und zum Tragen gebracht. Das Buch beginnt mit einer Darstellung des Differentialformenkalküls, wobei noch die Cartansche Schreibweise $d(x_1, \ldots, x_n)$ verwendet wird aber für die äußere Ableitung einer Form ω nicht mehr ω' sonder $d\omega$ geschrieben wird. Differentialidealen werden Integralelemente zugeordnet und dies Zuordnungsverhältnis studiert, so daß sich ein Beweis des heute als Satz von Frobenius geführten Theorems als eine Aussage über vollständig integrierbare Pfaffsche Systeme ergibt (bei denen Formen $\Theta_1, \ldots, \Theta_l$ bereits eine Basis des von ihnen erzeugten Differentialideals bilden). Anschließend wird gezeigt, daß sich beliebige Systeme partieller Differentialgleichungen in Pfaffsche Systeme umwandeln lassen. Zum Schluß werden noch als Anwendungsbeispiel die Beweise für die Hauptsätze der Theorie der Lieschen Gruppen zusammengestellt.

Die „Bemerkungen über die Maxwellschen Gleichungen“ [14] sind in Königsberg entstanden. Sie leiten eine Phase ein, in der sich Kählers Arbeiten direkt auf Probleme in der Physik beziehen. Hier wird die in der vorigen Arbeit formulierte allgemeine Theorie, Differentialgleichungen mit Differentialformen zu formulieren, auf das Beispiel der Maxwellschen Gleichungen angewendet. Zunächst werden die Gleichungen in die heutzutage gängigen Formulierung

$$d\Theta_1 = 0, \quad d\Theta_2 = 4\pi\Omega$$

übersetzt, wobei Θ_1 und Θ_2 2-Formen in den 4 Variablen (x_1, x_2, x_3, t) sind, deren Koeffizienten die Komponenten die elektromagnetischen Felder sind und Ω eine 3-Form mit Ladungs- und Stromdichte als Koeffizienten. Es geht nun darum, mit Hilfe der allgemeinen Theorie physikalisch brauchbare 4-dimensionale Integralmannigfaltigkeiten zu bestimmen. Darüberhinaus widmet sich die Arbeit dann dem elektrodynmischen Potential, das hier als 1-Form ϕ mit $d\phi = \Theta_1$ auftritt. Es wird zunächst eine Greensche Formel aufgestellt und dann unter Zugrundelegung der Minkowski-Einstein Metrik mit der Hodge-Dualität gezeigt, daß ϕ im Fall, daß keine Ladungen und Ströme vorliegen, harmonisch ist, also gilt

$$\Delta\phi = 0.$$

Es folgt noch eine umfangreiche Rechnung, in der eine Integration der Maxwellschen Gleichungen nach dem Vorbilde von Kirchhoff ausgeführt wird.

Der Aufsatz „Über die Beziehungen der Mathematik zu Astronomie und Physik“, dem das Zitat am Anfang dieses Berichts entnommen stammt, ist in 2 Etappen entstanden: der Teil I besteht aus einem Vortrag, gehalten im Rahmen der Kant-Copernicus Woche der Universität Königsberg i. Pr. im Februar 1939 [16]. Anläßlich der Herausgabe eines Gedenkbandes zum 100. Todestag von Gauß am 23. Februar 1955 hat Kähler dann noch einen Teil II hinzugefügt [27]. Insgesamt ist so herausgekommen eine programmatische Erklärung mit einer detailreichen Beschreibung von Entwicklungslinien in den drei im Titel genannten Wissenschaften.

Im Teil I werden als Aufgaben für die Mathematik herausgestellt, drei Gattungen von Gleichungen allgemein zu lösen

1. die algebraischen Gleichungen
2. die Differentialgleichungen
3. die diophantischen Gleichungen.

Dabei wird festgestellt, daß die Natur genug Aufgaben der ersten beiden Gleichungsarten stellt, während die diophantischen Gleichungen „Schöpfungen des mathematischen Übermuts" seien. Sie gehören in die Zahlentheorie und Arithmetik, in der alles Entscheidende „mit denkerischer Selbstherrlichkeit" geschah, während die algebraische Analysis „unter Verheißung großer naturwissenschaftlicher Anwendbarkeit vorangetrieben worden ist". In Teil II wird dann auf die Theorie der automorphen Funktionen, die Relativitätstheorie und die Quantenmechanik eingegangen und schließlich alles zusammengefaßt unter dem Gesichtspunkt, daß die beiden Begriffe „Raum" und „Körper" im Geiste der Mathematiker um Vorrang ringen. Kähler konstatiert dabei eine allgemeine Vorrangstellung des Raumbegriffs, die er aber beseitigt sehen möchte: es erscheint ihm sinnvoll, den Begriff Körper „als den mächtigeren, den Raumbegriff herausfordernden, sichtbar zu machen".

Dieses Bestreben, den Körperbegriff in den Mittelpunkt zu stellen, das etwa schon in der Arbeit [11] anklingt, wird nun in seinen folgenden Arbeiten immer vordringlicher, die dann auch auf einen weitergehenden Einsatz der Arithmetik in der Physik zielen.

4 Zur arithmetischen Geometrie

Die 1951 in Leipzig entstandene Arbeit „Über rein algebraische Körper" [18] war die erste Publikation seit 1937 [14] resp 1941 [16] nach der durch den Krieg bedingten Unterbrechung. Wie Kähler in Gesprächen immer wieder betonte und durch Notizen belegte, waren die hierin und in der Ausarbeitung „Sur la théorie des corps purement algébriques" [19] eines 1952 in Lüttich auf einem Kolloquium über algebraische Geometrie gehaltenen Vortrages enthaltenen Grundzüge eines allgemeinen Systems für eine algebraische und arithmetische Geometrie insbesondere von (in heutiger Sprache) Modellen rein algebraischer Körper resp. algebraischen Körpererweiterungen schon vor dem Kriege angedacht. Die in den beiden eben genannten Arbeiten vorgestellten Begriffsbildungen sind dann weiter ausgeformt in der 1958 als Buch erschienenen Ausarbeitung „Algebra und Differentialrechnung" [22] mehrerer Vorträge, die Kähler auf der DMV-Tagung 1953 hielt, und in der 399-seitigen Arbeit „Geometria Aritmetica" [28]. Einen leicht zugänglichen Überblick über dies das Zentrum des Kählerschen Schaffens ausmachende immense Material bietet eine weitere Vortragsausarbeitung, nämlich der Text „Infinitesimal-Arithmetik" [34] eines im Mai 1961 auf einem internationalen Kongreß über algebraische Geometrie in Turin gehaltenen Vortrages.

Einem interessierten Leser ist deshalb zu empfehlen, erst diesen Text und etwa [18] anzusehen, bevor er sich an die Geometria Aritmetica heranwagt. Einen gewissen Überblick liefert dazu auch A. Weils review [Weil2].

Es beginnt mit: „This, in more ways than one, is an unusual piece of work. By its size, it is a book; it appears as a volume in a journal. The author is German; the book appears in Italian. The subject combines algebra and geometry, with some arithmetical flavoring; but the author, instead of following in his terminology the accepted usage in either one of these subjects, or adapting it to his purposes, has chosen to borrow his vocabulary from philosophy, so that rings, homomorphismus, factor-rings, ideals, complete local rings appear as „objects", „perceptions", „subjects", „perspectives", „individualities"". Weil gibt dann Kapitel für Kapitel eine prägnante Inhaltsangabe bis allerdings bei den letzten Kapiteln seine zunehmende Irritation über Kählers „Newspeak" und dessen Bestreben alles ab initio zu beweisen die Oberhand gewinnt und gerade einige Dinge nicht mehr in den an sich verdienten Licht aufscheinen, auf die es Kähler ankommt, nämlich die Versuche, einem Körper auf die verschiedenste Weise birationale Invarianten zuzuteilen, also insbesondere auch höher dimensionale Diskriminanten, Modulfunktionen sowie eine hermitesche Metrik.

Hier soll nun versucht werden wenigstens einen kleinen Eindruck von Kählers Gebäude der arithmetischen Geometrie zu geben.

4.1 Kählerdifferentiale und -Differenten

Kählers Grundlage ist zum einen die lokale Algebra, wobei er insbesondere in [22] und [28] aus Gründen, auf die später noch eingegangen wird, aus der Philosophie (von Leibniz „Monadologie") entlehnte Bezeichnungen verwendet. Für diesen Bericht hier bedeute unabhängig davon im Folgenden

K ein über einem Grundkörper k endlich erzeugter Körper mit $\operatorname{trgr}_k K = n$

A ein Unterring von k mit Quotientenkörper k,

$s, s', \ldots$ Stellenringe von K („Seiten" bei Kähler), die jeweils Lokalisierungen über A endlich erzeugter Ringe sind (also im wesentlichen von endlichem Typ im Sinne von EGA IV 1.3.8 [EGA]) und K als Quotientenkörper haben,

$S, S', \ldots$ Bewertungsringe von K, ausgezeichnet unter den Stellenringen eben als regulär und mit Krulldimension 1,

$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \ldots$ resp. $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots$ jeweils die maximalen Ideale von $s, s' \ldots$ resp. $S, S', \ldots$.

Ein Stellenring s von K „erweitert" einen Stellenring s_0 von K_0, falls gilt $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \cap s_0$.

Zum anderen kommen nun hinzu die von Kähler selbst geprägten Begriffe der Differentialmoduln und Infinitesimal- sowie Differentialringe, deren Elemente heute „Kählerdifferentiale" genannt werden (Hartshorne [Ha] p. 172). Die ausführlichste Begründung dafür findet sich in [22] 75–97. Es genügt aber, hier zu sagen (wie in [18] S. 71), daß für einen Ring R der Differentialmodul RdR als R-Modul aus der Gesamtheit aller Zeichen

$$adb + a'db' + \ldots \qquad \text{mit} \quad a, a', \ldots, b, b', \ldots \in R$$

besteht, wobei allgemein da das Abbild (Differential) des Elementes a von R bedeutet und die „Differentiationsregeln"

$$\begin{aligned} d(a+b) - da \;\; - db \;\; &= 0, \\ d(a \cdot b) \;\; - adb - bda &= 0, \end{aligned}$$

wenn sie für alle Elemente a, b gefordert werden, die definierenden Relationen des R-Moduls sind. In der gewohnten Weise kann dann dieser Modul zu einem „Infinitesimalring“ fortgesetzt werden und aus diesem durch Restklassenbildung nach dem von allen

$$da\,db + db\,da,\ da \cdot da \quad , \quad a, b \in R$$

erzeugten Ideal entsteht der graduierte Differentialring

$$\Omega_R = \sum_q \Omega_R^q \qquad \text{mit } \Omega_R^0 = R,\ \Omega_R^1 = RdR.$$

Für eine Relativsituation $R \supset R_0$ entstehen ebenso relative Differentialbegriffe

$$RdR/RdR_0 \qquad \text{bzw.} \quad \Omega_{R/R_0}$$

mit $dr = 0$ für $r \in R_0$.

Für einen Stellenring s von K wie oben ist der Differentialmodul $sds = \Omega_s^1$ als s-Modul endlich erzeugt und mit Hilfe der Fittingschen Determinantenideale kann dann s eine Teilerkette

$$\mathfrak{d}_0(s) \subset \mathfrak{d}_1(s) c \ldots$$

von Idealen $\mathfrak{d}_i(s)$ in s zugeordnet werden. Das Ideal $\mathfrak{d}_i(s)$ nennt Kähler „i-te Differente“ (heute auch „Kählerdifferente“) und ein großer Teil der Untersuchungen in [22] und [28] widmen sich der Berechnung dieser Differenten. Sie werden gebraucht bei der Bestimmung der gleich zu erklärenden (Differential-)Integritäten und geben insbesondere in Verallgemeinerung eines Kriteriums von Zariski ein Kriterium für die Regularität eines Stellenrings s von K mit Transzendenzgrad n über $\mathbb{Q}$ (Lemma di Mehner [28] 303.): s ist genau dann regulär, wenn $\mathfrak{d}_n(s) = s$ ist, es sei denn daß s verzweigt ist, d. h. char$K \neq$ char $s/\mathfrak{p} = p \subset \mathfrak{p}^2$ gilt, in welchem Fall $\mathfrak{d}_{n+1}(s) = s$ für die Regularität von s notwendig und hinreichend ist.

4.2 Infinitesimal- und Differentialintegritäten

In einem Zahlkörper K kann die Maximalordnung $\mathfrak{o}$, also der Ring der ganzen Elemente, charaktisiert werden als der Durchschnitt aller Bewertungsringe von K. Dies läßt sich nun auf Körper K von höherem Transzendentgrad verallgemeinern:

Jeder Stellenring s von K erzeugt zusammen mit ds, der Gesamtheit der dx mit $x \in s$, einen Unterring $[s, ds]$ des Infinitesimalringes [KdK] von K und einen Unterring $[s, ds]_\wedge$ des Differentialringes $[K, dK]_\wedge = \Omega_K$. Die Durchschnitte

$$I(K) := \bigcap_S [S, DS], \quad D(K) := \bigcap_S [S, dS]_\wedge$$

in denen S die Gesamtheit $V_1(K)$ aller Bewertungsringe von K durchläuft, sind die beiden totalen Integritäten von K, die Infinitesimal-Integrität und die Differential-Integrität. Sie sind graduiert und mit Hilfe der Ränge der darin und mit verwandten Begriffsbildungen bildbaren Moduln lassen sich offenbar birationale Invarianten bilden, die arithmetische Pendants zu den aus der algebraischen Geometrie bekannten Begriffen Geschlecht, Irregularität, Plurigeneri und Pluri-Irregularità liefern. In [28] 370. und 382. werden folgende Beispiele explizit durchgerechnet. Es sei

$$K_i = \mathbb{Q}(x,y) \quad \text{mit} \quad f_1(x,y) = x^m + y^m - 1 = 0$$
$$\text{resp.}\ f_2(x,y) = y^2 - x^3 + 23 = 0$$

Dann gilt

$$D(K_1) = \mathbb{Z} + \sum_{j+k \leq m-3} \mathbb{Z}\frac{x^j y^k}{y^{m-1}}\, dx$$

und

$$D(K_2) = I(k) + 3\sqrt{-23}I(k)\frac{dx}{y},$$

mit

$$k = Q(\sqrt{-23}),\ I(k) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{-23}}{2}.$$

Der Begriff der Integrität wird noch mit Hilfe von Divisoren zu dem relativer Integritäten modifiziert: In leichter Verallgemeinerung des klassischen Begriffs für Zahlkörper ist hier ein **Divisor** $\mathfrak{a}$ von K eine Funktion, die jedem Bewertungsring $S \in V_1(K)$ einen von 0 und K verschiedenen S-Modul $\mathfrak{a}(S)$ in K (also eine Potenz $\mathfrak{P}^r$) zuordnet. Es ist dann $\omega \in D\left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right)$ genau dann, wenn gilt

$$\omega \wedge \mathfrak{a}(S) \subset [S, dS]_\wedge \quad \text{für alle} \quad S \in V_1(K).$$

Für diese Divisoren ist offenbar in gewohnter Weise ein Klassenbegriff zu erklären und überdies mit Hilfe von Differentialen mit Polen ein Homologiebegriff. Ein Endlichkeitsbegriff wird sich erst später ergeben.

4.3 Arithmetische Mannigfaltigkeiten und Gebilde

Kähler benutzt neben dem Transzendenzgrad trgr$K$ den Begriff der arithmetischen Dimension eines Körpers K, definiert als

$$\dim_a K = \text{trgr}\ K, \ \text{wenn char}\ K = p \neq 0,$$
$$= 1 + \text{trgr}\ K, \text{wenn char}\ K = 0.$$

Der Kählersche Begriff der Mannigfaltigkeit (unmissverständlicher wäre hier das Wort „Varietät") ist – wie auch Weil sagt – weitreichender als der seine, aber enger als der Schemabegriff aus EGA. Da Kähler sich im wesentlichen dafür interessiert, mit Hilfe der Mannigfaltigkeiten Körperinvarianten zu finden, wird sein Begriff hier auch nicht in dessen voller Allgemeinheit beschrieben. Dann nämlich ist einfach bei festem Grundring $A = \mathbb{Z}$ eine arithmetische Mannigfaltigkeit V (und bei $A = k$ eine über k algebraische Mannigfaltigkeit) von K eine Gesamtheit von Stellenringen s (wie unter 4.1), die als sämtliche Lokalisierungen endlich vieler über A endlich erzeugter Ringe gewonnen werden können und die die Eigenschaft haben, daß je zwei Stellenringe aus V Lokalisierung eines gemeinsamen Ringes sind.

Im Sinne von EGA ist V die Gesamtheit der Halme eines Schemas X von endlichem Typ über A, das K als Körper der rationalen Funktionen hat, also reduziert und irreduzibel ist (und damit auch ein „Modell von K"). Unter den Mannigfaltigkeiten sind noch die als über A „geschlossen" (auch „vollständig") auszuzeichnen, für die jeder Bewertungsring Erweiterung einer in V vorkommenden Seite ist (in EGA „über A eigentlich").

In Ausdehnung des Divisorbegriffes wird nun der des „Gebildes" („figure" in [28]) eingeführt: Ein Gebilde $\mathfrak{a}$ in der Mannigfaltigkeit V ist eine Zuordnung, die jedem $s \in V$ ein Ideal $\mathfrak{a}(s)$ in s zuordnet mit der Kohärenzbedingung, daß gilt

$$\mathfrak{a}(s') = \mathfrak{a}(s)s' \text{ falls } s' \text{ Lokalisierung von } s \in V.$$

In naheliegender Weise werden Summe, Produkt und Durchschnitt von Gebilden definiert. Jedes nicht-totale Gebilde $\mathfrak{a}$ (d. h. für das nicht stets $\mathfrak{a}(s) = 0$) einer geschlossenen arithmetischen Mannigfaltigkeit bestimmt einen Divisor $\mathfrak{a}$ von K mit den durch

$$\mathfrak{a}(S) = \mathfrak{a}(s)S \quad \text{für } S \text{ Erweiterung von } s \in V$$

eindeutig bestimmten Komponenten.

Einem Gebilde $\mathfrak{a}$ ordnet Kähler dann als seine Zetafunktion die folgende Reihe (so sie denn konvergiert) zu

$$\zeta(\mathfrak{a}, t) = \sum_{\mathfrak{c} \leq \mathfrak{a}} (N\mathfrak{c})^{-t}.$$

Hier bedeutet $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{a}$ dasselbe wie $\mathfrak{a}(s) \supset \mathfrak{c}(s)$ für alle $s \in V$ und

$$N\mathfrak{c} = \prod_{S \in V} \#(s/\mathfrak{c}(s))$$

Nach einem Resultat von Lustig [Lus] konvergiert $\zeta(\mathfrak{a}, t)$ für das totale Gebilde $\mathfrak{a} = 0$ (und damit für alle Gebilde) für $\operatorname{Re} t > n$ im Fall $\dim_a K = n \leq 2$ und divergiert für $n \geq 3$ nach einem Satz von Witt [Witt].

An den Begriff der arithmetischen Mannigfaltigkeit schließen sich noch weitere Begriffsbildungen an:

Eine Mannigfaltigkeit V von K überlagert die Mannigfaltigkeit V_0 des Körpers $K_0 \subset K$ genau dann, wenn gilt

1) Jedes $s \in V$ erweitert ein $s_0 \in V_0$ (die „Spur von s"),
2) jeder Bewertungsring S von K, der ein $s_0 \in V_0$ erweitert, erweitert auch ein $s \in V$.

Damit können dann auch Mannigfaltigkeiten zusammengesetzt sowie Korrespondenzen ausformuliert werden und – ohne hier im Einzelnen darauf eingehen zu können – wird auch übriges Handwerkszeug der algebraischen Geometrie (Tangentialkegel, Schnittmultiplizitäten, ...) bereitgestellt.

Hervorzuheben ist aber noch, daß für $\operatorname{char} K = 0$ einer arithmetischen Mannigfaltigkeit V noch ihr „Raum" R zugeordnet wird: Und zwar ist hier ein Punkt P eines Körpers K ein Homomorphismus $P : s \to \mathbb{C}$ eines Stellenrings s von K, der das maximale Ideal $\mathfrak{p}$ von s als Kern hat. Für $x \in s$ wird die komplexe Zahl $P(x)$ auch $x(P)$ geschrieben und Wert von x im Punkt P genannt. Ein Zahlkörper

K hat demnach genauso viele Punkte, wie sein Grad angibt und alle diese Punkte werden von der Seite $s = K$ getragen. Einer Mannigfaltigkeit V werden alle zu allen $s \in V$ gehörigen Punkte zugeordnet und diese Menge wird zum Raum R von V durch die folgende Festlegung einer Topologie: Trägt $s \in V$ den Punkt P_0 und ist s Lokalisierung des Ringes $C = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ mit der Eigenschaft, daß alle Lokalisierungen von C zu V gehören, dann heißt die Gesamtheit aller Punkte P, die einem System von Ungleichungen

$$|x_i(P) - x_i(P_0)| < \rho \quad (i = 1, 2, \ldots, m, \ \rho > 0)$$

genügen, eine „Umgebung" von P_0.

R heißt „arithmetischer Raum", wenn er der Raum einer geschlossenen arithmetisch Mannigfaltigkeit ist, bei der alle s mit $s \supset \mathbb{Q}$ regulär sind. R zerfällt in $g = \operatorname{grad} k$ (k der größte in K enthaltene Zahlkörper) zusammenhängende kompakte Teilräume R_j, die mit einer n-dimensionalen komplexen Struktur versehen „Riemanniana" genannt werden. Mit K_j werden für $j = 1, \ldots, g$ die Körper der auf R_j meromorphen Funktionen bezeichnet, also $K_j = K^{\sigma_j} \otimes \mathbb{C}$ wobei σ_j eine Fortsetzung von $\sigma_j : k \to \mathbb{C}$ ist.

4.4 Die arithmetische und topologische Integrität und Modulformen eines Körpers

$\Omega(R)$ bezeichne den Ring der unendlich oft differenzierbaren Differentiale auf dem arithmetischen Raum R. Nach de Rham ist der Cohomologie-Ring

$$H(R, \mathbb{C}) = \sum_{m=0}^{2n} H^m(R, \mathbb{C})$$

isomorph zum Restklassenring $Z(R)/d\Omega$ des Ringes $Z(R)$ der geschlossenen Differentiale nach dem Ideal $d\Omega = \{d\omega, \omega \in \Omega(R)\}$. In diesem Ring $H(R, \mathbb{C})$ zeichnet Kähler zwei endlich erzeugte Unterringe $A(R)$, die arithmetische, und $T(R)$, die topologische Integrität aus. Dabei ist $A(R)$ das bei den naheliegenden Einbettungen aus der Differentialintegrität $D(K)$ in $H(R, \mathbb{C})$ entstehende Bild und $T(R)$ besteht aus den Klassen „topologisch ganzer Differentiale" $\tau \in \Omega(R)$ vom Grad p, d. h. denjenigen, für die gilt $d\tau = 0$ und es gibt einen $(2n - p)$-dimensionalen Zyklus γ mit

$$\int_\gamma \Theta = \int_R \tau \wedge \Theta \qquad \text{für alle} \quad \Theta \in \Omega^{2n-p}(R).$$

Kähler erwartet nun, daß sich mit Hilfe dieser Differentiale und ihrer Perioden dem Körper eigene Funktionen definieren lassen, so wie die Zetafunktion einem Zahlkörper zugeordnet ist. Und zwar schlägt er vor, Periodenmatrizen

$$A_\nu := \left(\int_{R_\nu} \tau_j^{2n-m} \wedge a_k^m \right)$$

zu betrachten, wobei $a_k^m (k = 1, \ldots, p_m \cdot g)$ eine unabhängige Basis von $D_m(K)$ und $\tau_j^{2n-m} (j = 1, \ldots, q_m)$ eine des Moduls der topologisch ganzen Cohomologie-Klassen der Dimension $2\,n - m$ ist. Für $m = 0$ reduziert sich hier

$$\Big(\det\big(\sum_\nu A_\nu\big)\Big)^2$$

auf die Diskriminanten d des Zahlkörpers k von K.

Für $n = \operatorname{trgr} K = 1$ sind alle arithmetischen Räume R von K homöomorph und zerfallen in $g = \operatorname{grad} K$ konjugierte Riemannsche Flächen R_i von Geschlecht $p = k$-Rang von $D_1(K)$. Hier kann in der üblichen Weise (τ_j^1) als kanonische Basis gewählt und dann die Reihe gebildet werden

$$\Psi_K(t) = \sum |\det(\sum_\nu A_\nu)|^{-t},$$

wobei bei einer beliebigen unabhängigen Basis a_j^1 von $D_1(K)$ über Äquivalenzklassen kanonischer Basen zu summieren ist. Diese Reihe konvergiert nach Hel Braun für $\operatorname{Re} t > p + 1$ und ist dann eine birationale Invariante von K.

Ein weiterer Zugang zu birational invarianten Bildungen ergibt sich auf folgende Weise für beliebige arithmetische Körper K mit $\operatorname{trgr} K = n \geq 1$: Für jedes $\alpha \in D_n(K)$ sind die g Zahlen

$$\int_{R_j} \alpha \wedge \overline{\alpha},\ j = 1, \ldots, g$$

unabhängig von der Auswahl des arithmetischen Raumes R zu K.

Mit $\int_R \alpha \wedge \overline{\alpha} := \sum_{j=1}^{g} \int_{R_j} \alpha \wedge \overline{\alpha}$ ist

$$\Omega(t) := \sum_{\alpha \in D_n(K)} \frac{\alpha \wedge \overline{\alpha}}{(\int_R \alpha \wedge \overline{\alpha})^{(t/2)+1}}$$

für $\operatorname{Re} t > p_n \cdot g$ ein nur von K und der Variablen t abhängiges $2n$-faches Differential. Durch Integration über R entsteht für diese t eine birationale Invariante

$$\int_R \Omega(t) = \sum_{\alpha \in D_n(K)} \left(\int_R \alpha \wedge \overline{\alpha}\right)^{-t/2}$$

und bei Koordinatisierung von R_ν ist mit

$$\Omega(t) = \Phi(t) dx_1 \wedge d\overline{x}_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge d\overline{x}_n$$

$$ds^2 = i \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \log \Phi}{\partial x_j \partial \overline{x}_l} dx_j d\overline{x}_l$$

von der Wahl der Kartenvariablen unabhängig und darum Metrik (mit „Kählerpotential"!) auf R_ν, die positiv und bei hinreichend großem Geschlecht sogar positiv definit ist bis auf höchstens $(2n-2)$-dimensionale Teilräume von R_ν in denen die Diskriminante der Metrik verschwindet.

Es ist heute allgemein Konsens, daß die Sprache der algebraischen und arithmetischen Geometrie die von EGA und SGA, also von Grothendieck, Dieudonné etc. ist. Die zwar einfacheren, aber nicht so weit reichenden Systeme von

Weil und Kähler werden da nicht gebraucht (abgesehen vielleicht von Shimura, der noch die Weilsche Sprache verwendet). Allerdings haben die Kählerdifferentiale ihre Existenzberechtigung nicht verloren und bilden auch in EGA einen wesentlichen Pfeiler. Darüber hinaus ist, ohne zukünftigen Recherchen der GA und ihres Umfeldes vorgreifen zu wollen, noch anzumerken

– Kählers Differentenbegriff hat in der Kommutativen Algebra seinen Platz gefunden und ist von Nastold, Berger und Kunz bearbeitet worden und in den Zusammenghang der dualisierenden Garben und den der ganzen Differentiale an singulären Stellen gebracht worden (s. für Literaturangaben und auch eine Verallgemeinerung Berndt [Be]).

– Kählers Zetafunktionen von Gebilden erweisen sich nur für den Bereich der arithmetischen Dimension 2 brauchbar (obwohl Kähler häufig die Hoffnung aussprach, daß auch in höheren Dimensionen durch allgemeinere Konvergenzverfahren Wertvolles zutage kommen müsste). Die von Kähler explizit ausgeführte Berechnung der Zetafunktion eines quadratischen Gebildes erweist Übereinstimmung mit einer (später) von Zagier [Zag] in anderem Kontext definierten Zetafunktion (s. dazu [Be 1]).

– Kählers Differentialintegritäten könnten auch noch für weitere Untersuchungen interessant bleiben. Ihre Nützlichkeit hat sich bisher dahingehend erwiesen, daß etwa für eine elliptische Kurve E über $\mathbb{Q}$ mit Körper K das (bis auf ± 1) eindeutig bestimmte die Integrität $D_1(K)$ erzeugende ganze Differential mit dem Nerondifferential von E übereinstimmt, und daß im Fall von Modulfunktionen-Körpern ein Zusammenhang von arithmetisch ganzen Differentialen mit denen ganzzahliger q-Entwicklung hergestellt werden kann. (s. [Be 2]).

Im gleichen Zeitraum wie die eben besprochenen, zwar in Teilen in philosophischen Termini geschrieben, aber doch eindeutig der algebraischen und arithmetischen Geometrie zuzuordnenden Arbeiten sind noch die folgenden beiden Texte entstanden, in denen erste Ansätze formuliert werden, die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie mit Hilfe der Arithmetik zu unterwandern. Die Vortragsausarbeitung "Osservazioni a proposito della dinamica", (1954) 17 Seiten [23], steht unter dem Galois'schen Motto: "Tout voir, tout entendre, ne perdre aucune idée". Sie beschreibt zunächst eine erkenntnistheoretische Interpretation klassischer Begriffe der Algebra (auf die hier später noch eingegangen werden soll) und bemerkt dann die Analogie der in den als verschränkten Produkten bekannten Algebren auftretenden Gleichungen

$$zp_\sigma = p_\sigma z^\sigma$$

mit der Lösung

$$z(t) = e^{(t-t_0)\frac{2\pi i}{h}H} z(t_o) e^{-(t-t_0)\frac{2\pi i}{h}H}$$

der von t unabhängigen Schrödingergleichung

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2\pi i}{h}(Hz - zH).$$

Ferner wird hingewiesen auf eine Verwandschaft der rechten Seite der Planckschen Strahlungsformel

$$Ed\left(-\frac{1}{kT}\right) = d\log\frac{1}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}}$$

und den lokalen Faktor einer klassischen Zeta- bzw. L-Funktion $(1 - N\mathfrak{p}^{-t})^{-1}$. Daraus wird dann das Postulat einer Korrespondenz abgeleitet zwischen Galoisfeldern mit q Elementen und harmonischen Oszillatoren der Frequenz ν mit

$$h\nu = (1/2)kT_0 \log q, \quad T_0 \text{ eine universelle Temperatur.}$$

In der (unveröffentlichten) Note „Zahlentheorie und Physik" 8 Seiten [21], wird auch dies Thema verfolgt und darüber hinaus noch vorgeführt, wie sich gewöhnliche Wellenzüge (in der 4-dimensionalen Raum-Zeit Welt), die üblicherweise durch eine Differentialgleichung fixiert werden, aus der Struktur eines elliptischen Funktionenkörpers (mit komplexer Multiplikation) konstruieren lassen.

5 Der innere Differentialkalkül und die Dirac-Gleichung

Die folgenden vier Arbeiten, in Berlin entstanden, wenden sich wieder dem Kalkül der Differentialformen zu und dienen insbesondere, im Anschluss an die Maxwellschen Gleichungen, einer neuen Formulierung der Dirac-Gleichung des Elektrons und deren Lösungen. Über die Akademieabhandlungen „Innerer und äußerer Differentialkalkül" [29] und „Die Dirac-Gleichung" [30] wird in der Note „Der innere Differentialkalkül" [31], ergänzend und vereinfachend berichtet. Schließlich ist die dem Andenken Blaschkes gewidmete Arbeit „Der innere Differentialkalkül" [32], die Ausarbeitung von acht im August 1960 in Florenz gehaltenen Vorträgen, die eine Gesamtdarstellung des inneren und äußeren Kalküls mit Anwendungen und einer 10-seitigen Formelsammlung hergibt.

Der „innere Kalkül" basiert auf der folgenden Beobachtung. Wenn in einem Raum eine Metrik g gegeben ist, kann der (Graßmannsche) „äußere" Ring der Differentiale mit der durch

$$dx^i \wedge dx^k + dx^k \wedge dx^i = 0$$

gekennzeichneten äußeren Multiplikation mit einer weiteren „inneren" (Cliffordschen) Struktur versehen werden, indem eine Multiplikation $\vee$ mit der Eigenschaft

$$dx^i \vee dx^k + dx^k \vee dx^i = g^{ik}$$

erklärt wird. Der äußeren Differentiation d entsprechend, wird nun eine innere Differentiation δ gewonnen, deren Bedeutung aus folgenden Bemerkungen ersichtlich wird.

1. $\delta u = 0$ kennzeichnet die im Sinne von Hodge harmonischen Differentiale, wenn der Raum kompakt und die Metrik positiv definit ist.
2. Der Dirac-Gleichung kann die Gestalt $\delta u = a \vee u$ gegeben werden, wobei a bis auf eine additive Konstante (die Ruhenergie) die 1-Form des Viererpotentials der Maxwellschen Gleichungen darstellt.

Hervorgehoben sei auch noch, daß der Hodge'sche Sternoperator in diesem Kalkül gerade auf die innere Rechtsmultiplikation mit dem Volumendifferential

$z = \sqrt{|\det(g_{ij})|}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ hinausläuft und der Laplace-Beltrami-Operator sich als $\Delta = \delta\delta$ schreiben läßt. Kähler diskutiert bei vorgegebener Minkowski-Metrik explizit kugelsymmetrische Lösungen allgemeiner Dirac-Gleichungen und insbesondere die Dirac-Gleichung des Elektrons und des Positrons im Coulomb-Feld. Soweit ersichtlich, ergeben sich keine Lösungen, die nicht in der Physik auf anderem Wege gewonnen wurden.

Kählers Ansätze zu den Maxwellschen Gleichungen und zur Dirac-Gleichung sind unterdes auch in die Physik-Literatur eingegangen (s. etwa Becher-Joos [BJ]).

6 Kählers neue Poincaré-Gruppe

Es werden jetzt einige Arbeiten übersprungen, die vorwiegend auf die Anwendung von (bereits anderweitig entwickelter) Mathematik in der Philosophie zielen und es wird noch auf die drei letzten in Hamburg entstandenen Arbeiten eingegangen, die im eigentlichen Sinne auch der Ausformung eines umfassenden Weltbildes dienen sollen, die aber doch auch – im Anschluss an den letzten Abschnitt – einen rein mathematischen Kern haben und Rechnungen und eine Zusammenschau verschiedener Teile der Mathematik enthalten, die sonst so nicht zu finden sind.
Die Abhandlung „Die Poincaré-Gruppe" [42] behandelt die Isometriegruppe $\mathfrak{G}$ der Metrik

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}{x_4^2}, \; x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{R}$$

als Quaternionengruppe

$$\mathfrak{G} = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H}); \; a\tilde{b} = b\tilde{a}, \; d\tilde{c} = c\tilde{d}, \; a\tilde{d} - b\tilde{c} = 1\}$$

wobei für eine Quaternion

$$q = a + bi + cij + dj \in \mathbb{H}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$
$$\overline{q} = a - bi - cij - dj$$

und

$$\tilde{q} = a + bi + cij - dj$$

gesetzt werden und G wie üblich durch

$$q \longmapsto M(q) = (aq + b)(cq + d)^{-1}$$

operiert. Die Arbeit verweist auf die Möglichkeit, hier zu diskreten Untergruppen der hier „Poincaré-Gruppe" (später dann „Neue Poincaré-Gruppe") genannten Gruppe automorphe Formen zu konstruieren, gibt eine elementare Bestimmung der Struktur der zu $\mathfrak{G}$ gehörigen (über $\mathbb{R}$ 10-dimensionalen) Liealgebra sowie eine Realisierung der Algebra als Differentialoperatoren in den Variablen $x_i (i = 1, \ldots, 4)$ und wendet dann den Kalkül der früheren Arbeiten an, um für die anfangs hingeschriebene hyperbolische Metrik die Dirac-Gleichung

$$\delta u = a \vee u, \quad a \text{ konstant}$$

zu studieren. Dabei werden zunächst einige allgemeine Reduktionsschritte ausgeführt, dann ein „kugelsymmetrischer" Fall ausgezeichnet und dieser weiter bearbeitet und insbesondere, der Fall eines Elektrons im Coulombfeld betrachtet. Es wird als Ziel formuliert, diese Rechnungen mit den klassischen Ergebnissen für die Minkowski-Metrik zu vergleichen aber dann bei der Bemerkung abgebrochen, daß hier anders als im Standardfall $H = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}$ nicht mehr Integral der Dirac-Gleichung ist.

In der Ausarbeitung „The Poincaré-Group" [43] eines Vortrags auf einem Workshop über Mathematische Physik in Canterbury findet sich eine kürzere Fassung der eben beschriebenen Rechnungen und dabei einige Zusätze, die der Vorbereitung eines Separationsansatzes zur Lösung der Dirac-Gleichung dienen.

Die Arbeit „Raum-Zeit-Individuum" [46] ist die Ausarbeitung eines Vortrages, der 1987 aus Anlaß der 750-Jahr-Feier an der TU Berlin im Anschluss an die DMV-Jahrestagung gehalten wurde. Sie stellt sich jetzt im Nachhinein als ein wissenschaftliches Vermächtnis dar: In ihr vereint sich Kählers Versuch, mit Hilfe seiner Monadologie, einer philosophischen Ausdeutung von Algebra und Arithmetik, über die im Anschluss noch mehr berichtet werden wird, ein Relativitäts- und Quantentheorie umfassendes (oder womöglich ersetzendes) Weltbild zu formen mit einer weiteren konkreten Diskussion der „Neuen Poincaré-Gruppe", die er im Verlauf der Arbeit $SL_2(\mathbb{H})$ schreibt.

Dabei wird u. a. das in den beiden vorher diskutierten Arbeiten vorkommende Material neu und detailreicher dargestellt: In Verfolgung der These, daß die Minkowski-Metrik

$$ds_0^2 = dx^2 + dx^2 + dz^2 - c_0^2 dt$$

nur eine (für große Zeiten t nach dem Urknall bei $t = 0$ gültige) Approximation an die Metrik

$$ds_1^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2}{t^2}$$

sei, wird nachgewiesen:

i) Jede Isometrie f einer Metrik

$$ds_{(\varphi)}^2 = \varphi ds_0^2, \ \varphi = \varphi(x, y, z, t)$$

läßt die Maxwellschen Gleichungen $d\theta = d(*\theta) = 0$ (θ die üblichen Feld-2-Form) invariant, also insbesondere ds_1^2 ist mit den Maxwellschen Gleichungen kompatibel.

ii) Unter (hier nur vorübergehender) Verwendung des Ringes

$$\mathbb{H} \times \mathbb{C} = \mathbb{C} + \mathbb{C}i + \mathbb{C}ij + \mathbb{C}j, \ \mathbb{C} = \mathbb{R} + \sqrt{-1}\mathbb{R}$$

der „Biquaternionen", gilt für

$$\omega = x + yi + zij + \sqrt{-1}c_0 tj$$

mit den üblichen Bezeichnungen

$$ds_1^2 = \frac{d\omega d\overline{\omega}}{(\overline{\omega}j - j\omega)^2} = \frac{|d\omega|^2}{|\omega - \tilde{\omega}|^2}$$

und diese Metrik bleibt invariant bei $\omega \longmapsto M(\omega) = (a\omega + b)(c\omega + d)^{-1}$ für alle $M \in \mathfrak{G}$

iii) $\mathfrak{G}$ ist reell 10-dimensionale Liesche Gruppe

iv) Bei

$$(x, y, z, t) \longmapsto (x, y, z, \sqrt{-1}c_0 t) =: (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

geht ds_1^2 über in

$$\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}{x_4^2}$$

und diese Metrik ist wieder invariant bei der für $q = x_1 + x_2 i + x_3 ij + x_4 j$ $(x_k \in \mathbb{R},\ k = 1 \dots 4)$ durch $q \mapsto M(q)$ gegebenen Operation von $\mathfrak{G}$ auf $\mathbb{H} \setminus \{x_4 = 0\}$.

v) $\mathbb{H}$ ist topologischer Raum mit dem für $q, q' \in \mathbb{H}$ durch $|q - q'|$ gegebenen Abstandsbegriff und $q \mapsto M(q)$ lässt sich zu einer Operation der Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}$ aller 2×2 Quaternionenmatrizen mit rechtem Spaltenrang 2 auf die Kompaktifizierung $S^4 = \mathbb{H} \cup \infty$, die „Urzelle" genannt wird, fortsetzen. Dann gilt

Satz: Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent

1) M oder $M\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}$
2) $q \longmapsto M(q)$ ist Isometrie der Metrik ds^2
3) $q \longmapsto M(q)$ ist eine Symmetrie der Urzelle S^4 und bildet die Teilzellen $S_\pm^4 = \{q, x_4 \geq 0\}$ entweder auf sich selbst oder eine auf die andere ab.

vi) Es lassen sich explizit Lösungen der zu ds^2 gehörigen Dirac-Gleichung $\delta u = \lambda u$ (λ eine konstante Zahl) bestimmen, die für $\lambda = 0$ die Maxwellschen Gleichungen als Spezialfälle enthalten.

Wie schon anfangs gesagt, enthält die Arbeit einige hochgradig spekulativen Thesen, deren mathematischer Hintergrund u. a. der folgende ist.

i) Die Neue Poincaré-Gruppe enthält als diskrete Untergruppen die Gruppen etwa

$SL_2(\mathbb{Z})$ und ihre Untergruppen

$$SL_2\left(\mathbb{Z} + m\frac{d + \sqrt{|d|}i}{2}\mathbb{Z}\right), \quad m, |d| \in \mathbb{N}$$

und bietet damit einen Rahmen für die klassischen Theorien verschiedener Arten von Modulfunktionen

ii) Jeder Quaternion $\omega = x + yi + zij + tj$ können zwei komplexe Zahlen

$$v = x + yi, \quad w = t + zi$$

zugeordnet werden. Der Körper K der auf

$$\mathbb{C} \times \mathfrak{H} = \{(v, w),\ z = \operatorname{Im} w > 0\}$$

meromorphen Funktionen hat die „erweiterte Modulgruppe"

$$SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$$

als Symmetriegruppe, die wiederum Symmetriegruppe ist für eine hermitesche Metrik auf $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ mit dem Potential

$$U = -(\lambda/2) \log \frac{w - \overline{w}}{2} - \mu\pi i \frac{(v - \overline{v})^2}{w - \overline{w}}, \quad \lambda, \mu > 0.$$

Der Körper K, von Kähler „Materie“ genannt, enthält die klassischen (Weberschen) elliptischen und Modulfunktionen und es bietet sich hier eine Brücke an zu der unterdes weit entwickelten Theorie der Jacobiformen (s. [EZ] und [BeS]).

Kähler macht nun noch mannigfache Aussagen über die Beziehungen der in K enthaltenen Körper und ihrer Stellenringe, in denen er die Grundzüge von Individuen sieht.

Ohne darüber und über den Wert seiner Auffassung, die spezielle Relativitätstheorie sei durch die Betrachtung der Neuen Poincaré-Gruppe abzulösen, hier zu urteilen, ist jedoch festzustellen, daß zumindest die Funktionen- und Zahlentheorie im Rahmen der Quaternionengruppe im Hauptstrom der allgemeinen Entwicklungen ist (s. dazu die Arbeiten von Elstrodt, Grunewald und Mennicke [EGM] und insbesondere Krieg [Kr]).

7 Zur Mathematik und Philosophie

Die bisher nicht angesprochenen Veröffentlichungen „Wesen und Erscheinung als mathematische Prinzipien der Philosophie“ [34], „Il regno delle idee“, [36], „Saggio di una dinamica della vita“ [37], „Also sprach Ariadne“ [43] sowie der Artikel „Nietzsches Philosophie als höchstes Stadium des deutschen Idealismus“ [42] bringen zusammen mit den in verschiedenen Ausbaustufen vorhandenen (unveröffentlichten) Texten „Monadologie I (Berlin 1975), Monadologie II (Hamburg 1977)“ und dem auch unveröffentlicht gebliebenen Fragment „Vom Relativen zum Absoluten“ [45] keine neue Mathematik sondern stellen Kählers leidenschaftlichen Versuch dar, mit Hilfe der Mathematik ein Physik, Theologie und Teile der Biologie und Psychologie umfassendes Weltbild so darzustellen, daß dies bei *gutem Willen* auch einem nicht mathematisch vorgebildeten Leserkreis erschließbar würde („a ogni uomo di buona volontà“, [37] p. 277).

Dabei erscheint als Kernstück, daß in diesem Weltbild nicht damit begonnen wird zu versuchen, das Geschehen in Raum und Zeit einzufangen. Sondern es wird mit Hilfe von Algebra und Algebraischer Geometrie zuerst ein erkenntnistheoretischer Apparat aufgebaut, bei dem die Relationen Objekt – Unterobjekt sowie Objekt – Quotientenobjekt Hierarchien schaffen, die bei Kähler „Reich und Ewigkeit“ konstituieren, als deren Schale dann Raum und Zeit angesehen werden können. Um dies wenigstens etwas präziser zu machen, wird hier ein Teil der Übersetzungstabelle aus der Monadologie I wiedergegeben.

Sein	additive Halbgruppe
lebendiges Sein	kommutativer Ring mit Eins
Monade	Stellenring
offenbare Monade	kommutativer Körper

Zug eines Seins s	Element von s
das Ich der Monade s	der Restklassenring $s/\mathfrak{p}$ des Stellenrings s nach dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$

Daneben wird auch die suggestive Bezeichnung „s ist Seite von K" benutzt, um auszusagen, daß s Stellenring mit Quotientenkörper K ist. Geht es nun doch darum, gewisse Körper auszuzeichnen und diese sowie die Relationen zwischen ihnen mit Hilfe des Apparats der lokalen Algebra (in der Form des „Perspektivismus" in [22]) und seines in [18] resp. [28] dazu geschaffenen Begriffs der „Varietät" (oder „Mannigfaltigkeit") eines Körpers zu untersuchen und auszudeuten.

Einen Abriß der hier genannten Grundlagen die (lokale) Algebra betreffend findet sich in [34] und die Varietäten betreffend in [35]. Eine ganz ausführliche Darstellung geben dann die Monadologie I sowie der diese zu grossen Teilen übernehmende Aufsatz [40], dessen Titel darauf anspricht, daß er als Antwort auf Nietzsches „Also sprach Zarathustra" gemeint ist. Die wohl kühnste und extremste Schrift Kählers ist der Versuch einer Dynamik des Lebens [37], in dem die aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen bzw. Jacobifunktionen bekannten Körper abgerufen werden, um als offenbare Monaden die Grundzüge eines Weltbildes zu erstellen, das bis in die Theologie greift, indem es zugleich ein Modell der Heiligen Dreifaltigkeit einbezieht. Es braucht schon die Sprachkraft Kählers eigener Worte (wie in [37] in italienisch und in der Monadologie II auf deutsch), um dies angemessen wiederzugeben. Hier sei nur soviel gesagt, daß als „Kosmos" eine Varietät bestimmt wird, deren Punkte (im Sinne von 4.3) dann ein 4-dimensionales Kontinuum ausmachen, das „Welt" genannt als Modell für unser Raum-Zeit-Kontinuum dient.

Und Anreiz zu weiterer Lektüre mag auch der Hinweis bringen, daß in Kählers System (u. a.) der folgende Satz zur mathematischen Aussage wird (Monadologie II (144)):

„Die Wissenschaft erkennt das Leben und damit die Wahrheit".

Veröffentlichungen von Erich Kähler

1. Transformation der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems. Math. Zeitschr. **24** (1926). 743–758
2. Die Reduktion des Dreikörperproblems in geometrischer Form dargestellt. Ber. der Math. Phys. Kl. der sächs. Akad. der Wiss. Leipzig, Bd. LXXIII (1926), 251–255
3. Über ein geometrisches Kennzeichen der analytischen Abbildungen im Gebiete zweier Veränderlichen. ibid. Bd. LXXX (1928), 286–290
4. Über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren, die sich aus gewissen Lösungen des n-Körperproblems ableiten (Dissertation). Math. Zeitschr. **28** (1928), 220–237
5. Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle. ibid. **30** (1929), 188–204
6. Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen I. ibid. **31** (1929), 258–269
7. Über den topologischen Sinn der Periodenrelationen bei vierfach periodischen Funktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **7** (1930), 125–131
8. Über die Integrale algebraischer Differentialgleichungen (Habilitationsschrift). ibid. **7** (1930), 355–385

9. Zur Invariantentheorie von Differentialoperatoren. ibid. **9** (1932), 64–71
10. Sui periodi degli integrali multipli sopra una varietà algebrica. Rendiconti Circolo Mat. Palermo **56** (1932), 1–6, mit einem Anhang von F. Severi: Osservatione a proposito della nota di Erich Kähler (7 p.).
11. Forme differenziali e funzioni algebriche. Mem. Accad. Italia **3**, Nr. 3 (1932), 1–19
12. Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1933), 173–186
13. Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Hamburger Mathematische Einzelschrift (Teubner 1934), 80 S.
14. Bemerkungen über die Maxwellschen Gleichungen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **12** (1937), 1–28
15. Über eine Verallgemeinerung der Theorie der Pfaffschen Systeme. Abh. Semin. Vektor- und Tensoranalysis, Moskau **4** (1937), 174–177
16. Über die Beziehungen der Mathematik zu Astronomie und Physik. Jahresber. DMV **51** (1941), 52–63
17. Die Mathematik als Sprache und Schrift. Maschinenschriftlich vervielfältigt (Leipzig 1950), 1–113
18. Über rein algebraische Körper. Math. Nachr. **5** (1951), 69–92
19. Sur la théorie des corps purement algébriques. Centre Belge Rech. Math., 2ieme colloque de géométrie algébrique (Liège 1952), 69–82
20. Riemanniana. Maschinenschriftlich vervielfältigt (Leipzig 1952), 1–86 (unvollständig)
21. Zahlentheorie und Physik. Undatierter Privatdruck, 11 Seiten, ca. 1952
22. Algebra und Differentialrechnung. Bericht über die Mathematikertagung in Berlin vom 14.–18. 1. 1953, 58–163, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (Berlin 1953), Mathematische Monographien Bd. 1. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1958.
23. Osservazioni a proposito della dinamica. Convegno internazionale di geometria differenziale (Roma 1953, 1954), 82–98
24. Heinrich Brandt (Nachruf). Jahrb. der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig 1954–1956, 246–247
25. Tensori razionali di 1^a specie sopra una varietá algebrica. Rendiconti Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., VIII. Ser. **18** (1955), 151–154
26. Zum 70. Geburtstag von Wilhelm Blaschke. Forsch. Fortschr. **29** (1955), 286–287
27. Über die Beziehungen der Mathematik zu Astronomie und Physik. C.-F.-Gauß-Gedenkband anläßlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955 (Leipzig 1957), 1–13 (erweiterte Fassung von 16)
28. Geometria aritmetica. Ann. Mat. pura appl. Serie IV, Tomo XLV (1958), 1–399
29. Innerer und äußerer Differentialkalkül. Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, Klasse für Mathematik, Physik und Technik (1960), Nr. 4, 32 Seiten
30. Die Dirac-Gleichung. Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, Klasse für Mathematik, Physik und Technik (1961), Nr. 1, 38 Seiten
31. Der innere Differentialkalkül. Abh. Math. Sem. Universität Hamburg **25** (1962), 192–205
32. Wilhelm Blaschke (Nachruf). Jahrb. der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig 1960–1962, 388–391
33. Der innere Differentialkalkül. Rend. di Mat. e Appl., V. Ser. **21** (1963), 425–523, C.I.M.E. Forme differenziali e loro Integrali 160–258 (1963).
34. Infinitesimal-Arithmetik. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. Mat. **21** (1963), 5–29
35. Bericht über einige Vorträge zur Infinitesimal Arithmetik. Seminari dell'Instituto Nazionale di Alta Matematica 1962–63

36. Wesen und Erscheinung als mathematische Prinzipien der Philosophie. Nova Acta Leopoldina, Neue Folge Nr. 173, Bd. 30 (1965), 9–21
37. Mathematik. Eine Reihe von Einzelheften. beginnend SS. 1973 Hamburg, S. 1–118 (3 Hefte); WS 1973/74 Hamburg, S. 119–346 (5 Hefte), Hamburg 1974, S. 347–591 (3 Hefte), Berlin 1975, S. 592–719 (2 Hefte).
38. Il Regno delle Idee. Atti del Convegno Internazionale di Geometria a celebrazione del centenario della nascita di Federico Enriques, Accademia Nazionale dei Lincei (1973), p. 157–163.
39. Saggio di una dinamica della vita. Atti del Convegno Internazionale sul tema: Storia, Pedagogia e Filosofia della Scienza, Accad. Nazionale dei Lincei (1973), Quaderno N.184, 275–287
40. Mathesis universalis. Maschinenschriftl. Vervielfältigung (Berlin 1975)
41. Monadologie, I. Teil (S. 1–54) und II. Teil (S. 56–147) in einem Band. (Hamburg 1978), III. Teil (Hamburg 1980), S. 1–47
42. Die Poincaré-Gruppe. Rend. Semin. Mat. Fis. Milano 53, (1983), 359–390 und in Mathematica ad diem natalem septriagesimum quintum data, Festschrift Ernst Mohr zum 75. Geburtstag, Berlin: Universitätsbibliothek der TU Berlin, Abt. Publikationen (1985), 117–144
43. The Poincaré-Group. In J. S. R. Chisholm and A. K. Common (eds.), Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Proc. Workshop, Canterbury / U.K. 1985, NATO ASI Ser., Ser. C 183, (1986), 265–272, D. Reidel Publishing Company
44. Nietzsches Philosophie als höchstes Stadium des deutschen Idealismus. Spectrum 22 (1991) 5., 44–46
45. Also sprach Ariadne. Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A 126, (1992), 105–154
46. Raum-Zeit-Individuum. Rendiconti Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL. Memorie di Matematica, 110^o (1992) Vol. XVI, fasc. 8, pagg. 115–177 und in: Begehr, Heinrich G.W. (ed.), Mathematik aus Berlin. Sammelband von Vortragsausarbeitungen zu Wissenschaft und Stadt, Publikationen der Freien Universität Berlin aus Anlaß der 750-Jahr-Feier Berlin 1987. Berlin: Weidler Buchverlag (1997), 41–105.
47. Vom Relativen zum Absoluten. Privatdruck 16.1.1998, 17 Seiten

Literatur

[BJ] Becher, P., Joos, H.: The Dirac – Kähler equation and fermions on the lattice. Z. f. Physik C (**15**) (1982) 343–363

[Be] Berndt, R.: Arithmetisch ganze Differentiale. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **47** 186–200 (1978)

[Be1] Berndt, R.: Kähler's computation of his Zeta function for an arithmetic curve of degree two. Mitteilungen der Hamburger Math. Ges. **XV**(1998) 103–122

[Be2] Berndt, R.: Différentielles arithmétiquement entières des corps de fonctions modulaires. Astérisque **41–42** 165–172 (1977)

[BeS] Berndt, R., Schmidt, R.: Elements of the Representation Theory of the Jacobi Group. Birkhäuser Basel PM 163, 1998

[Bou] Bourguignon, J.P.: Eugenio Calabi and Kähler Metrics. In: de Bartolomeis (ed) et al., Manifolds and Geometry. Proceedings of a conference held in Pisa 1993. Cambridge University Press Symp Math. **36** (1996) 61–85

[Ch] Chern, S.S.: Characteristic Classes of Hermitian Manifolds. Ann.Math. **47** (1946) 85–121

[EGM] Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J.: Groups acting on hyperbolic space. Harmonic analysis and number theory. Springer, New York 1998

[EGA] Grothendieck, A.: Éléments de Géometrie Algébrique. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes.Sci n^{os} 4, 11, 20, 32 (1960–67)
[Epp] Epple, M.: Die Entstehung der Knotentheorie. Vieweg Braunschweig/Wiesbaden 1999
[EZ] Eichler, M., Zagier, D.: The Theory of Jacobi Forms. Birkhäuser Boston PM 55, 1985
[Ha] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. Springer, New York 1977
[Kr] Krieg, A.: Eisenstein-Series on real, complex, and quaternionic Half-Spaces, Pacific J. **133** (1988), 315–354
[Lus] Lustig, G.: Über die Zetafunktion einer arithmetischen Mannigfaltigkeit. Math.Nachr. **14** 309–330 (1956)
[Schu] Schumann, H.: Erich Kähler in Leipzig 1948–1958. S. 253–259 in: 100 Jahre Mathematiches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig. VEB Verlag der Wissenschaften, Berlin 1981
[Sev] Severi, F.: Osservazione a proposito della nota di Erich Kähler: Sui periodi degli integrali multipli sopra una varietà algebraica. Rend. Circ. Matem. Palermo LVI (1932) 1–7
[Weil1] Weil, A.: Introduction à l'étude des variétés Kähleriennes. Hermann, Paris 1958
[Weil2] Weil, A.: Math.Rev. **21** (1960) 4155
[Witt] Witt, E.: Über die Divergenz gewisser ζ-Reihen. p. 369–370 in: Gesammelte Werke, Springer Berlin 1998
[Zag] Zagier, D.: Modular forms whose Fourier coefficients involve Zeta-functions of quadratic fields. p. 106–168 in LN 627, Springer Berlin 1976

Rolf Berndt
Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstr. 55
20146 Hamburg
berndt@math.uni-hamburg.de

(*Eingegangen 26.10.00*)

Buchbesprechungen

Siegmund-Schultze, R., Mathematiker auf der Flucht vor Hitler, Quellen und Studien zur Emigration einer Wissenschaft, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1998, XIV, 368 S., DM 98,–

This book appears as volume 10 in the series *Dokumente zur Geschichte der Mathematik;* and details for the first time the forced emigration of mathematicians from Nazi Germany. While dismissals have certainly been discussed previously (for example, in the article by Schappacher and Kneser: Fachverband-Institut-Staat in volume 6 of this series), here the emphasis is on those mathematicians who in a difficult and often life-threatening situation managed to emigrate. "Chose to emigrate" would be too strange a phrase and incorrect, since as is well-known, desire for emigration was far from tantamount to success at it. In addition not all those who lost their occupation chose to attempt emigration.

The arrangement of this book is somewhat unusual. After two introductory chapters, each of the succeeding chapters consists of the author's exposition of a topic followed by some documents relevant to it and detailed illustrative thumbnail sketches.

The first chapter is concerned with problem formulation and the delimiting of the concept of emigrating; the second with defining the concept of "mathematician" and some quantitative statements about persecution and emigration. For example, 45 full professors (*Ordinarien*) of mathematics were dismissed under the Nazis, apparently a far greater percentage than in other disciplines. About half these emigrated, but they came from only 13 of the 38 institutions of higher education in Germany. Of course, more than these were driven out. The book in fact closes with a number of appendices. These count 134 mathematicians who emigrated under the Nazi regime, 14 mathematicians driven to suicide or murdered by it, 39 persecuted by it but surviving without emigration, 34 others (this group includes school teachers) who did not emigrate, but details of whose situation and fate are unknown.

These first two chapters are, by the very nature of their concerns, somewhat dry and seemingly pedantic. They insufficiently predict the riches and interest that lie in the succeeding ones.

Chapter 3 is also somewhat introductory in that it discusses German emigration to the U.S. prior to 1933. This began around the turn of the century and ranged chronologically from the well-known Klein students Bolza and Maschke to John von Neumann, Eberhard Hopf, and Aurel Wintner in 1930. Hopf, of course, returned to Germany in 1936, and, though not cited by the author, as late as January 12, 1933 von Neumann apparently planned to lecture in Berlin. The U.S. was, of course, not the only site of pre-1933 German emigration, nor were only German mathematicians attracted to the U.S. Such situations are briefly mentioned, though in the succeeding material the concentration is on the United States as land of refuge, and so justifiably also in this chapter as destination.

The succeeding two chapters discuss the Nazi politics of expulsion: its scope and its "pseudo-legal" status (the notorious *Berufsbeamtengesetz* of April 7, 1933, later extended and supplemented), and the difficulties facing those contemplating emigration both in Germany and the U.S. Despite the general resistance of American immigration to refugees, especially ones of Jewish background, which has been amply discussed in other books, America was the dominant land of choice of the emigrés. This explains the author's concentration on it, though other emigration destinations are briefly mentioned. Sometimes also, as in the case of von Mises, the U.S. was the eventual destination, even though original emigration was to elsewhere.

Chapters 6 and 7 are devoted to the connections of the emigrants to colleagues remaining in Germany and their own self-image of their emigration contrasted with the ambivalent reactions of Americans to the immigrants: often an eagerness to help, counterpointed in others by a fear of aliens. In this chapter 7 the negative feelings of many Americans about the emigrés both from economic worries (there *was* after all a world-wide economic depression) and native antisemitism is also discussed and sketched. Chapters 8 and 9 discuss the political pressures in the U.S. on the emigrés, their general problems of acculturation (including language), and the effect of the U.S. entry into World War II.

Chapter 10 deals with the effect of the emigration of German mathematicians on mathematics. This chapter is somewhat more speculative than those preceding it, and includes the attacks on "German algebra" (made long after Emmy Noether's death) by Garrett Birkhoff and the late Gian-Carlo Rota. To take just one example: the emigration seems responsible for the spread of combinatorial group theory as a subject-matter over the world, instead of being primarily one fostered by German speakers. Also, an American deficiency in applications of mathematics (including probability theory) seems to have been corrected by a number of the immigrants, and was an aid to their successful immigration, completely independent of the pressures of World War II.

Chapter 11 forms an epilogue sketching the postwar connections between American and German mathematicians as affected by the emigrants.

However, it is in the selections of cited documents and thumbnail sketches that this book really lives. Sometimes, indeed, the "chapter" is merely an introduction to them (for example chapter 6 is five pages long followed by fifteen pages of documents and another fifteen of sketches). The author has made a suggestive and stimulating collection of both of these from the masses available, well illustrating the various points he wants to make. Readers may know of other examples illustrating some of these points, but here the author's emphasis rightly is on comprehensiveness of ideas covered, not on mathematicians discussed.

The subtitle of this book is *Quellen und Studien zur Emigration einer Wissenschaft,* and this the book amply fulfills, in all aspects. There is a comprehensive bibliography as well. The book is further enriched by *many* photographs, some from private sources.

The author's somewhat unusual choice of arrangement mentioned above has contributed to a positive sort of "double effect" for this book. *Mathematiker auf der Flucht vor Hitler* is highly recommended to readers of various sorts. It will be a definitive source for all future workers in this or related areas. However, more than being only a scholarly work of accuracy and care, it is also a pleasure to read and can be enjoyed by the reader with only casual interests in this period or area.

Rochester, N. Y., USA S. L. Segal

Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: Ideals, Varieties, and Algorithms, 2nd Ed. (Undergraduate Texts in Mathematics), New York u.a.: Springer 1997, 536 S., DM 88.–

Effektive Implementierungen des Buchberger-Algorithmus zur Berechnung von Gröbner-Basen sowie darauf aufbauender Algorithmen in modernen Computeralgebrasystemen wie Singular oder Macaulay2 ermöglichen die Berechnung komplizierter Beispiele in der algebraischen Geometrie. In den letzten Jahren haben solche Rechnungen dazu beigetragen, Gegenbeispiele zu Vermutungen zu finden oder neue Zusammenhänge zu erkennen. Umgekehrt, inspiriert durch komplizierte Beispiele aus der algebraischen Geometrie, haben Entwickler von Computeralgebrasystemen ihre Algorithmen und Implementierungen verfeinert.

Das Wechselspiel zwischen Computeralgebra und algebraischer Geometrie hat nicht nur die Forschung sondern auch die Lehre beeinflußt. Eine gewisse Vorreiterrolle spielt dabei das vorliegende Buch, das weltweit als Textvorlage für Vorlesungen und Seminare benutzt wird (die erste Auflage ist bereits 1992 erschienen). Das Buch führt gleichzeitig in die Theorie der Gröbner-Basen sowie in Grundbegriffe der algebraischen Geometrie ein; vorausgesetzt werden lediglich Kenntnisse aus der linearen Algebra. Dadurch werden zwei Fliegen mit einer Klappe geschlagen. Einerseits ermöglicht der Zugang über die Computeralgebra das quasi spielerische Erkennen erster Zusammenhänge innerhalb der algebraischen Geometrie. So können Studenten schon sehr früh (in Deutschland etwa ab dem dritten Semester) Beispiele aus der algebraischen Geometrie studieren, ohne bereits den ganzen abstrakten Apparat zu kennen. Andererseits motiviert das algebraisch-geometrische Wörterbuch die Notwendigkeit von Algorithmen etwa zur Berechnung von Idealdurchschnitten oder Idealquotienten von einem geometrischen, d.h. von einem anschaulichen Standpunkt aus.

Das Buch enthält neun Kapitel und vier Anhänge.

In Kapitel 1 werden einige Grundtatsachen über Polynome und affine Lösungsmengen polynomialer Gleichungen (affine Varietäten) zusammengestellt. Insbesondere gehen die Autoren auf Division mit Rest im Falle einer Variablen sowie die daraus resultierende Lösung des Ideal-Membership-Problems für diesen Fall ein. Dies liefert eine Motivation für die Einführung monomialer Ordnungen im nächsten Kapitel.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit monomialen Ordnungen, dem Divisionsalgorithmus in mehreren Variablen, Gröbner-Basen, dem Buchberger-Algorithmus sowie ersten Anwendungen (insbesondere der allgemeinen Lösung des Ideal-Membership-Problems). Dabei beweisen die Autoren auch den Basissatz von Hilbert für Polynomringe über Körpern mit Hilfe von „Dicksons Lemma“. Mit anderen Worten, sie zeigen zunächst, daß monomiale Ideale endlich erzeugt sind, und führen dann den Fall beliebiger Ideale zurück auf den monomialer Ideale mit Hilfe von Gröbner-Basen. Die Autoren übersehen, daß dieser Beweis des Basissatzes schon von Gordan in einer kurzen und sehr klaren Arbeit aus dem Jahre 1899 präsentiert wurde [Go]. „Gröbner-Basen“ (nicht aber der Buchberger-Algorithmus) sind also bereits seit hundert Jahren bekannt!

Motiviert durch Beispiele und Problemstellungen aus den ersten beiden Kapiteln geht es in Kapitel 3 um die Elimination von Variablen aus polynomialen Gleichungen (bzw. aus den entsprechenden Idealen). Zunächst wird der Eliminationssatz (wie berechnet man Eliminationsideale mit Hilfe von Gröbner-Basen?) bewiesen. Danach werden der Fortsetzungssatz (unter welchen Voraussetzungen lassen sich partielle Lösungen fortsetzen?) und der Abschlußsatz (wie bestimmt man die Gleichungen parametrisierter, affiner Varietäten?) formuliert und interpretiert. Mit Hilfe von Resultanten wird dann der Fortsetzungssatz gezeigt. Der Beweis des Abschlußsatzes wird auf spätere Kapitel verschoben.

In Kapitel 4 wird zunächst Hilberts Nullstellensatz gezeigt. Dabei wird die schwache Version mit Hilfe des Fortsetzungssatzes bewiesen (die starke Version wird wie üblich aus der schwachen Version abgeleitet). Mit Hilfe des Nullstellensatzes wird dann der erste Teil des Abschlußsatzes gezeigt. Als nächstes werden das affine algebraisch-geometrische Wörterbuch aufgebaut und entsprechende Algorithmen diskutiert. Algorithmen zur Primärzerlegung werden nicht besprochen, das würde den Rahmen des Buches sprengen (es gibt aber einige Literaturhinweise).

Kapitel 5 beschäftigt sich mit polynomialen und rationalen Funktionen auf einer affinen Varietät. Insbesondere wird erklärt, wie man in Quotientenringen algorithmisch rechnet (dies war die ursprüngliche Motivation für Macaulay zur Einführung monomialer Ordnungen und für Buchberger zur algorithmischen Behandlung von Gröbner-Basen). Zum Schluß wird mit Hilfe der in Kapitel 4 und 5 entwickelten Konzepte der zweite Teil des Abschlußsatzes bewiesen.

In Kapitel 6 werden auf elementare Art und Weise zwei Anwendungsgebiete der bisher behandelten Techniken innerhalb der Informatik diskutiert. Zum einen geht es um Anwendungen einer geometrischen Beschreibung des Konfigurationsraums gewisser Roboter, zum anderen um automatisches Beweisen innerhalb der euklidischen Geometrie. Mit dem Wu-Ritt-Prinzip wird eine zu Gröbner-Basen alternative Methode zur Manipulation polynomialer Gleichungen kurz andiskutiert (Literaturhinweise zur Vertiefung werden angegeben).

Kapitel 7 beschäftigt sich mit Invarianten endlicher Matrixgruppen, genauer mit der Berechnung von Erzeugern und Relationen der entsprechenden Invariantenringe. Nach der Behandlung symmetrischer Polynome als Beispiel wird mit Hilfe eines der beiden konstruktiven Beweise von Emmy Noether [Noe] gezeigt, daß Invariantenringe endlicher Matrixgruppen über einem Körper der Charakteristik Null endlich erzeugt sind. Der aus dem Beweis resultierende Algorithmus wird an Beispielen erläutert. Für effizientere, auf Gröbner-Basis-Techniken beruhende Algorithmen wird auf die Literatur verwiesen. Schließlich wird erklärt, wie man Relationen zwischen den Erzeugern mit Hilfe von Elimination berechnen kann.

In Kapitel 8 kommen die Autoren auf die Grundlagen der algebraischen Geometrie zurück. Es geht um projektive Varietäten, d.h. um Lösungsmengen homogener polynomialer Gleichungen im projektiven Raum. Wichtige Stichworte sind das projektive algebraisch-geometrische Wörterbuch, der projektive Abschluß affiner Varietäten, projektive Eliminationstheorie sowie der Satz von Bezout für ebene Kurven (hier werden wieder Resultanten benutzt).

Kapitel 9 ist eine Einführung in die Dimensionstheorie. Dabei wird die Dimension einer affinen oder projektiven Varietät als Grad des Hilbertpolynoms des entsprechenden Verschwindungsideals definiert. Es wird erklärt, wie man diesen Grad über das zugehörige Initialideal berechnen kann. Darüberhinaus wird im irreduziblen Fall gezeigt, daß die Dimension mit dem Transzendenzgrad des rationalen Funktionenkörpers übereinstimmt. Einige lokale Betrachtungen schließen sich an.

In den Anhängen geht es um Grundlagen aus der Algebra, Pseudocode zur Beschreibung von Algorithmen, Computeralgebrasysteme und Projekte, in denen Studenten ihre Kenntnisse vertiefen können.

Den Autoren des Buches macht die Lehre offensichtlich Spaß. Das Buch ist sehr klar geschrieben, exzellente Motivationen und Übergänge verbinden die einzelnen Themen, viele Graphiken illustrieren den Text. Die bestens ausgewählten Beispiele und Übungsaufgaben stellen eine Fundgrube für Studenten sowie Lehrende dar. Die Hauptsätze der Eliminationstheorie werden in dieser Ausführlichkeit in keinem anderen Buch dargestellt.

Für Lehrende ergeben sich neben der Qual der Stoffauswahl zwei mögliche Probleme bei der Vorbereitung eines Kurses. Zum einen wird die Theorie der Gröbner-Basen nur für Ideale (und nicht allgemeiner für Untermoduln von freien Moduln) enwickelt; insbesondere werden die Berechnung von Syzygien sowie die entsprechenden Anwendungen nicht erläutert. Zum anderen werden nur monomiale Ordnungen behandelt, die Wohlordnungen sind; insbesondere wird auf die Behandlung von Moras Tangent-Cone-Algorithmus zur Rechnung in gewissen lokalen Ringen verzichtet. Zur Schließung dieser Lücken und für weitere Anwendungen sei der Leser auf das neuere Buch [CLO] der gleichen Autoren verwiesen. Ausführliche Referenzen zur Berechnung von Primärzerlegungen bzw. zur algorithmischen Invariantentheorie finden sich in [DGP] bzw. [DJ].

[CLO] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: Using Algebraic Geometry. New York u.a.: Springer 1998

[DGP] Decker, W., Greuel, G.-M., Pfister, G.: Primary Decomposition: Algorithms and Comparisons. In: Algorithmic Algebra and Number Theory, 187–220, Springer 1998

[DJ] Decker, W., de Jong, T.: Gröbner bases and invariant theory. In: Gröbner bases and applications, London Math. Soc. Lecture Notes Series 251, 61–89, 1998

[Go] Gordan, P.: Neuer Beweis des Hilbertschen Satzes über homogene Funktionen. Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött., 240–242 (1899)

[Noe] Noether, E.: Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen. Math. Ann. **77**, 89–92 (1916)

Saarbrücken W. Decker

Malliavin, P., Stochastic Analysis (Grundlehren der math. Wiss. Nr. 313), Berlin u. a.: Springer 1997, 343 S., DM 158,–

Dieses Buch ist der gelungene Versuch, die Entwicklung der letzten 20 Jahre in einem zentralen Bereich der stochastischen Analysis auf 343 Seiten zusammenzufassen. Der Autor ist einer der Begründer der Theorie und bis heute einer der international führenden Forscher auf diesem Gebiet. Seine Pionierarbeit „Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators" (Proc. Int. Symp. S.D.E. Kyoto (1976) 195–264, Wiley and Sons, New York 1978) hat das Gebiet revolutioniert und eine völlig neue Entwicklung in Gang gesetzt. Die Anzahl der Nachfolgearbeiten ist unübersehbar.

Es war seit langem bekannt, daß die Fundamentallösungen zu Cauchy-Problemen für elliptische partielle Differentialoperatoren Dichten von Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Lösungen zugehöriger gewöhnlicher stochastischer Differentialgleichungen sind; genauer: für die Fundamentallösung $p_t(x,y)$ zum Operator

$$\frac{\partial}{\partial t} - (\sigma^T\sigma)^{ij}\partial_i\partial_j + b^i\partial_i$$

auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ gilt unter geeigneten Annahmen an die Koeffizienten, daß

$$p_t(x,y)\lambda(dy) = X_t^x(P)(dy), x \in \mathbb{R}^d, t > 0,$$

wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$, P das Wienermaß (= unendlichdimensionales Standard-Gaußmaß) auf $E := C([0,\infty) \to \mathbb{R}^d)$ und die rechte Seite die Bildmaße von P unter Abbildungen $X_t^x : E \to \mathbb{R}^d, t > 0$, sind, die die gewöhnliche stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} d(X_t^x)^i &= b^i(X_t^x)dt + \sigma^{ij}(X_t^x)dW_t^j \\ X_0^x &= x \end{aligned}$$

lösen. Malliavins grundlegende Idee war nun, einen Glattheits- und Nichtdegeneriertheitsbegriff für Abbildungen auf E so einzuführen, daß einerseits Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen diese Eigenschaften haben und andererseits man in Anlehnung an den endlichdimensionalen Fall ($E = \mathbb{R}^m, P =$ Lebesguemaß) die Existenz und vor allem die Glattheit von Lebesgue-Dichten ihrer Bildmaße auf $\mathbb{R}^d$ zeigen kann. Ein Hauptproblem war dabei, daß Lösungen von stochastischen Diffentialgleichungen keine stetigen Abbildungen auf E sind, man also einen neuen hinreichend schwachen Differenzierbarkeitsbegriff finden mußte. Die Lösung bestand in der Einführung von neuen Sobolevräumen $\mathbb{D}_r^p(E,P)$ über dem Wienerraum und den „glatten" Malliavin-Testfunktionen

$$\mathbb{D} := \bigcap_{p,r} \mathbb{D}_r^p(E,P).$$

Das erste Hauptergebnis (obwohl nicht Hauptthema dieses Buches) war der Beweis des Hörmander-Theorems mit diesen stochastisch analytischen Methoden.

Der erste Teil des Buches (Kapitel I–III) befaßt sich nun genau mit diesen Konzepten. Nach einer detaillierten Einführung in unendlichdimensionale Gaußsche Wahrscheinlichkeitsräume (Kapitel I) wird im zweiten Kapitel der unendlichdimensionale „Malliavin-Kalkül" auf abstrakten Wienerräumen entwickelt. Hier wie im gesamten Buch ist der Zugang stark geometrisch geprägt. Stichworte sind: Gradient und Divergenz auf dem Wienerraum, höhere schwache Ableitungen, Meyer-Äquivalenz, Azyklizität von komplexen Differentialformen. Im dritten Kapitel geht es dann um die Existenz und Glattheit der erwähnten Dichten.

Das Problem, daß sogar „glatte" Funktionale, d. h. solche in $\mathbb{D}$, nicht stetig sind, führte zum Problem, möglichst gute und weitestgehend vom Wienermaß unabhängige Versionen von diesen zu finden. Im zweiten Teil des Buches (Kapitel IV und V) wird dieses Problem im Rahmen der „Quasi-sure Analysis" optimal gelöst. Nach Einführung der notwendigen unendlichdimensionalen nicht-linearen Potentialtheorie, insbesondere der passenden Kapazitäten (vgl. Kapitel IV), wird die Differentialgeometrie auf dem Wienerraum in Kapitel V mit „quasi-sure" Methoden weiterentwickelt. Stichworte hier sind: Disintegration des Wienermaßes unter „glatten" Funktionalen, Satz über implizite Funktionen in endlicher Kodimension, k-Differentialformen, „Co-area formula" in unendlichen Dimensionen, Satz von Stokes.

Der dritte Teil behandelt die stochastische Integration. Ein Hauptpunkt ist, die Verbindung zum Itô-Kalkül herzustellen. Dies geschieht durch die Identifizierung des das Itô-Integral erweiternde Skorohod-Integrals als die oben erwähnte Divergenz auf dem Wienerraum. Weitere wichtige Inhalte sind: Wiener-Itô multiple Integrale, Fock-Raum, Stroock-Taylor-Formel, Stratonovich-Integral, White Noise in Kapitel VI und Chaos-Zerlegung, Itô-Darstellung, Clark-Bismut-Ocone-Formel, Itô-Kalkül für Semimartingale in Kapitel VII.

Die Teile 4 und 5 des Buches (Kapitel VIII und IX bzw. X und XI) führen an die neueste Forschung heran und sind (wie vom Autor selbst bemerkt) weitaus weniger detailliert. Der vierte Teil behandelt stochastische Differentialgleichungen. Schwerpunkte sind das sogenannte „limit theorem" und das „transfer principle". Hier geht es darum, stochastische Differentialgleichungen möglichst optimal durch gewöhnliche zu approximieren, so daß sich wesentliche Eigenschaften übertragen. Insbesondere läßt sich daraus und aus den zuvor erzielten Resultaten ableiten, daß die Lösungen der stochastischen Gleichungen (fast sicher) pfadweise differenzierbar von den Anfangswerten abhängen (vgl. Kapitel VIII). Wie glatt diese Abhängigkeit ist, wird natürlich durch den Grad der Regularität der Koeffizienten bestimmt. Kapitel IX enthält weitere Anwendungen insbesondere auf Hörmander-Hypoelliptizität. In Kapitel X wird der Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß auf dem Wienerraum diskutiert und dessen Anwendung zum Beweis der Existenz von Lebesgue-Dichten beschrieben. Kapitel XI besteht aus einer sehr konzentrierten Abhandlung aller Arbeiten seit 1992, deren Zielsetzung die Entwicklung einer stochastischen Analysis und Differentialgeometrie auf Pfad- und Schleifenräumen über Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist. U. a. werden stochastischer Parallelismus, Tangentialprozesse und partielle Integration auf Pfad- und Schleifenräumen behandelt.

Das Buch stellt sicherlich hohe Anforderungen an den Leser, ist aber nicht nur Experten, sondern jedem Mathematiker mit Interesse in Analysis, Differentialgeometrie und Wahrscheinlichkeitstheorie unbedingt zu empfehlen. Dem Autor gelingt es vorzüglich, dem Leser die Tiefe und Schönheit dieses faszinierenden Gebiets der Mathematik nahezubringen.

Bielefeld M. Röckner

de Gruyter Expositions in Mathematics

Volume 32

Boris N. Apanosov

Conformal Geometry of Discrete Groups and Manifolds

2000. 24 x 17 cm. XIII, 523 pages.
Cloth. DM 298,– /€ 152,36 /
öS 2.175,– /sFr 265,– /for USA,
Canada, Mexico US$ 128.95
• ISBN 3-11-014404-2

Contents:
I. Geometric Structures · II. Discontinuous Groups of Homeomorphisms · III. Basics of Hyperbolic Groups and Manifolds · IV. Geometrical Finiteness · V. Kleinian Manifolds · VI. Uniformization · VII. Theory of Deformations
Bibliography · Index

Volume 33

Daniel B. Shapiro

Compositions of Quadratic Forms

2000. XIII, 417 pages. Cloth.
DM 248,– /€ 126,80 /öS 1.810,– /
sFr 221,– /for USA, Canada,
Mexico: US$ 98.95
• ISBN 3-11-012629-X

The central topic of this book is the theorem of Hurwitz and Radon concerning composition formulas for sums of squares, first proved in the 1920's. Techniques from algebra and topology are used to generalize that theorem in several directions. The text includes worked examples and many exercises which develop still more variations of the central topic.

Volume 34

Marek Jarnicki / Peter Pflug

Extension of Holomorphic Functions

2000, 17 x 24 cm. X, 490 pages.
Cloth. DM 248,– /€ 126,80 /
öS 1.810,– /sFr 221,– /for USA,
Canada, Mexico US$ 98.95
• ISBN 3-11-015363-7

Contents:
I. Riemann domains · II. Pseudoconvexity · III. Envelopes of holomorphy for special domains · IV. Existence domains of special families of holomorphic functions
List of symbols · Bibliography · Index

Prices are subject to change.

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG
Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin
Telefon +49-(0)30-2 60 05-0
Fax +49-(0)30-2 60 05-251
www.deGruyter.de

de Gruyter
Berlin · New York