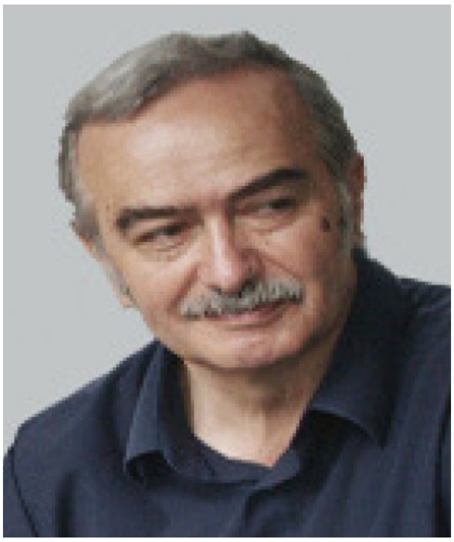
Научная (авто)биография

(до 2011 г)

САРДАНАШВИЛИ Геннадий Александрович,

физик-теоретик, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник кафедры теоретической физики Физического факультета Московского государственного университета



(in English: http://www.g-sardanashvily.ru/sard-biography-engl.pdf)

Содержание

Энциклопедическая справка

Родился 13 марта 1950 г. в Москве.

В 1967 г. окончил 2-ую математическую школу с серебряной медалью и поступил на физический факультет МГУ. В 1973 г. с отличием окончил физический факультет, а в 1976 г. – его аспирантуру, под руководством профессора Д.Д. Иваненко.

С 1976 г. работает на кафедре теоретической физики физического факультета МГУ, в настоящее время – ведущий научный сотрудник. В 1989 – 2004 гг. был также a visiting professor в University of Camerino в Италии.

Область научных интересов:

геометрические методы теории поля, классической и квантовой механики; теория калибровочных полей; теория гравитации.

Дипломная работа: «*Конечномерные представления конформной группы*» (1973 г.).

Кандидатская диссертация: «*Формализм расслоений в некоторых моделях теории поля*» (1980 г.).

Докторская диссертация: «*Хиггсовская модель классического гравитационного поля*» (1998 г.).

Главные научные результаты:

геометрическая формулировка классической теории поля (где классические поля представляются сечениями расслоений);

обобщенные теоремы Нетер для общего случая редуцированных вырожденных лагранжевых теорий (в терминах когомологий);

лагранжева БРСТ теория поля;

дифференциальная геометрия композиционных расслоений;

классическая теория хиггсовских полей

калибровочная теория гравитации (в которой гравитационное поле описывается как хиггсовское, обуславливающее нарушение пространственно-временных симметрий);

ковариантный (полисимплектический) гамильтонов формализм классической теории поля;

геометрическая формулировка классической нерелятивистской механики (в терминах расслоений);

геометрическая формулировка релятивистской механики (в терминах одномерных подмногообразий);

обобщение теорем Лиувилля – Арнольда, Нехорошева и Мищенко – Фоменко о координатах «действие-угол» для вполне интегрируемых и суперинтегрируемых гамильтоновых систем на случай некомпактных инвариантных подмногообразий.

В 1979 – 2011 гг. читал спецкурсы по алгебраическим и геометрическим методам в теории поля на кафедре теоретической физики физфака МГУ.

В 1989 – 2004 гг. читал лекции по геометрическим методам в теории поля в University of Camerino (Italy).

Автор курса «*Современные методы теории поля*» в пяти томах [9,11,13,14,21].

Опубликовал 20 книг и более 300 научных статей.

Основатель и главный редактор международного журнала “*International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*” (World Scientific, Singapore).

Главные научные результаты

Геометрическая формулировка классической теории поля

В отличие от классической и квантовой механики и квантовой теории поля, классическая теория поля, единственная, допускает исчерпывающую математическую формулировку. Она основана на представлении классических полей сечениями гладких расслоений.

Лагранжева теория на расслоениях и грассмановых многообразиях

Поскольку поля представляются сечениями расслоений, лагранжева теория поля строится как лагранжева теория на расслоениях. Стандартной математической техникой для формулировки такой теории являются многообразия струй сечений расслоений. Поскольку рассматривается лагранжев формализм произвольного конечного порядка, его удобно развивать на многообразии Фреше струй бесконечного порядка $J^\infty Y$ расслоения $Y \to X$ из-за наличия операций повышающих порядок. Он формулируется в алгебраическом терминах вариационного бикомплекса, не апеллируя к вариационному принципу. На многообразии $J^\infty Y$ вводится алгебра внешних дифференциальных форм как прямой предел алгебр внешних дифференциальных форм на многообразиях струй конечного порядка. На этой алгебре определяется так называемый вариационный бикомплекс, элементами которого являются лагранжианы *L*, а одним из операторов кограницы – вариационный оператор δL Эйлера – Лагранжа. Ядро этого оператора является уравнением Эйлера – Лагранжа. Были определены когомологии вариационного бикомплекса, результатами чего являются решение глобальной обратной вариационной проблемы (какие лагранжианы *L* вариационно тривиальны, т. е. $\delta L = 0$) и глобальная первая вариационная формула $dL = \delta L + d_H J$, из которой следует первая теорема Нетер.

Построение лагранжевой теории поля предполагает рассмотрение лагранжевых систем как четных, представляемых сечениями расслоений, так и нечетных грассмановых переменных. Поэтому лагранжев формализм в терминах вариационного бикомплекса был обобщен на грассмановы многообразия.

Обобщенная вторая теорема Нетер для редуцированных вырожденных лагранжевых систем

В общем случае редуцированной вырожденной лагранжевой системы ее оператор Эйлера – Лагранжа удовлетворяет нетривиальным тождествам Нетер, которые не являются независимыми, а подчиняются нетривиальным тождествам Нетер первого порядка, в свою очередь, удовлетворяющим тождествам Нетер второго порядка и т. д. Иерархия этих тождеств Нетер при определенном когомологическом условии описывается точным коцепным комплексом, называемым Kozul – Tate complex. Обобщенная вторая теорема Нетер сопоставляет этому комплексу коцепную последовательность, коцепной оператор которой, называемый калибровочным оператором, состоит из калибровочных симметрий лагранжиана системы, калибровочных симметрий первого и высшегод порядков, параметризуемых четными и нечетными полями духов. Эта коцепная последовательность и Kozul – Tate complex тождеств Нетер полностью характеризуют вырожденность лагранжевой системы, что необходимо для ее квантования..

Обобщенная первая теорема Нетер для калибровочных симметрий

В самом общем случае калибровочной симметрии лагранжиана системы полей показано, что соответствующий сохраняющийся ток сводится к суперпотенциалу, т. е. имеет вид $J^\mu = W^\mu + \partial_\nu U^{\mu\nu}$, $U^{\mu\nu} = -U^{\nu\mu}$, где *W* обращается в 0 на уравнениях Эйлера – Лагранжа.

Лагранжева БРСТ теория поля

Предварительным шагом для квантования редуцированной вырожденной лагранжевой системы полей является ее так называемое БРСТ расширение. Показано, что такое расширение возможно, если калибровочный оператор расширяется до нильпотентного БРСТ оператора, действующего на духовые поля. В этом случае вышеупомянутая коцепная последовательность становится комплексом, называемым БРСТ комплекс, а исходный лагранжиан допускает соответствующее БРСТ расширение, зависящее от исходных полей, антиполей, индексирующих тождества Нетер нулевого и высшего порядков, и духовых полей, параметризующих калибровочные нулевого и высшего порядков симметрии.

Ковариантный (полисимплектический) гамильтонов формализм классической теории поля

Приминение симпликтического гамильтонова формализма консервативной классической механики к теории поля ведет к бесконечномерному фазовому пространству, когда каноническими переменными являются значения полей в каждый отдельно взятый момент времени. Он не является партнером лагранжевого формализма классической теории поля. Уравнения Гамильтона на таком пространстве не являются обычными дифференциальными уравнениями и никак не сопоставимы уравнениям Эйлера – Лагранже теории поля. Для теории поля с лагранжианами первого порядка был разработан ковариантный гамильтонов формализм на полисимплектических многообразиях, когда канонические моменты отвечают производным полей по всем пространственно-временным координатам. Лагранжев формализм и ковариантный гамильтонов формализм эквивалентны для полевых моделей с гиперрегулярными лагранжианами. Исчерпывающее соответствие между ними было установлено в классе почти регулярных лагранжианов, к которому относятся все основные полевые модели.

Дифференциальная геометрия композиционных расслоений

В ряде моделей теории поля и механики используются композиционные расслоения $Y \to \Sigma \to X$, когда сечения расслоения $\Sigma \to X$ описывают, например, фоновые поля, хиггсовские поля или функции параметров. Это обусловлено тем, что при заданном сечении *h* расслоения $\Sigma \to X$ индуцированное расслоение $h^*Y \to X$ является подрасслоением расслоения $Y \to X$. Были установлены соотношения между связностями на расслоениях $Y \to X$, $Y \to \Sigma$, $\Sigma \to X$ и $h^*Y \to X$. В результате, для данной связности *A* на расслоении $Y \to \Sigma$ был определен так называемый вертикальный ковариантный дифференциал *D* на сечениях расслоения $Y \to X$, такой что его сужение на $h^*Y \to X$ совпадает с обычным ковариантным дифференциалом для связности, индуцируемой на расслоении $h^*Y \to X$ связностью *A*. Для приложений важно то, что лагранжиан физической модели, рассматриваемой на композиционном расслоении $Y \to \Sigma \to X$, факторизуется именно через вертикальный ковариантный дифференциал *D*.

Классическая теория хиггсовских полей

Хотя спонтанное нарушение симметрий является квантовым эффектом, было предложено, что в классической калибровочной теории на главном расслоении $P \to X$ оно характеризуется условием редукции структурной группы Ли *G* этого расслоения к некоторой ее замкнутой подгруппе Ли *H*. Согласно известной теореме такая редукция имеет место тогда и только тогда, когда фактор-расслоение $P/H \to X$ допускает глобальное сечение *h*, которое интерпретируется как классическое хиггсовское поле. Рассмотрим композиционное расслоение $P \to P/H \to X$ и ассоциированное с $P \to P/H$ расслоение $Y \to P/H$. Это композиционное расслоение $Y \to P/H \to X$, сечения которого описывают систему материальных полей с точной группой симметрий *H* и хиггсовских полей. Это лагранжева теория на композиционном расслоении $Y \to P/H \to X$. В частности, лагранжиан материальных полей зависит от хиггсовских полей через вертикальный ковариантный дифференциал, определяемый связностью на расслоении $Y \to P/H$. Примером такой системы материальных и хиггсовских полей являются дираковские спинорные поля в гравитационном поле.

Калибровочная теория гравитации, в которой гравитационное поле описывается как хиггсовское, обуславливающее нарушение пространственно-временных симметрий

Поскольку калибровочной симметрией лагранжианов теории гравитации являются общие ковариантные преобразования, теория гравитации мировом многообразии *X* строится как классическая теория поля в категории так называемых натуральных расслоений над *X*. Примерами таких расслоений служат касательное *TX* и кокасательное *T*X* расслоения над *X*, их всевозможные тензорные произведения и расслоение *LX* реперов в *TX*. Последнее является главным расслоением со структурной группой *GL(4,R)*. Принцип эквивалентности в геометрической формулировке устанавливает редукцию это структурной группы к подгруппе Лоренца *SO(1,3)*, что обуславливает существование глобального сечения *g* фактор-расслоения $LX/SO(1,3) \to X$, каковое является псведоримановой метрикой, т. е. гравитационным полем на *X*. Это позволяет трактовать метрическое гравитационное поле как хиггсовское. Получаемая теория гравитации является аффинно-метрической, динамические переменные которой – это псевдриманова метрика и общая линейная связность на *X*. Хиггсовская природа гравитационного поля *g* проявляется в том, что в разных псевдоримановых метриках представления $dx^\mu \to \gamma^a$ касательных ковекторов dx^μ матрицами Дирака γ^a, а следовательно, операторы Дирака, действующие на спинорные поля, неэквивалентны. Полная система спинорных полей с точной группой симметрий Лоренца и гравитационных полей описываются сечениями композиционного расслоения $S \to LX/SO(1,3) \to X$, где $S \to LX/SO(1,3)$ - спинорное расслоение, ассоциированное с $LX \to LX/SO(1,3)$.

Геометрическая формулировка классической нерелятивистской механики в терминах расслоений

Гамильтонова формулировка автономной классической механики на симплектических многообразиях не распространяется на неавтономную механику, допускающую зависящие от времени преобразования. Было предложено описать нерелятивистскую механику в полном виде, допускающем зависящие от времени преобразования, как частный случай классической теории поля на расслоениях $Q \to R$ над осью времени *R*. Однако ее существенное отличие от классической теории поля состоит в том, что связности на расслоениях $Q \to R$ всегда плоские и поэтому не являются динамическими переменными. Они характеризуют системы отсчета в нерелятивистской механике. Пространством скоростей и фазовым пространством нерелятивистской механики являются соответственно многообразие струй первого порядка J^1Q сечений расслоения $Q \to R$ и вертикальное кокасательное расслоение *V*Q* к расслоению $Q \to R$. Была разработана геометрическая формулировка гамильтоновой и лагранжевой нерелятивистской механики относительно произвольных систем отсчета и в самом общем виде механики, описываемой динамическими уравнениями второго порядка.

Геометрическая формулировка релятивистской механики в терминах одномерных подмногообразий

В отличие от нерелятивистской, релятивистская механика допускает преобразования времени, зависящие от пространственных координат. Она формулируется в терминах одномерных подмногообразий конфигурационного многообразия *Q*, когда пространством нерелятивистских скоростей является многообразие струй первого порядка J_1^1Q одномерных подмногообразий многообразия *Q*, на котором строится лагранжев формализм релятивистской механики.

Обобщение теорем Лиувилля – Арнольда, Нехорошева и Мищенко – Фоменко о координатах «действие-угол» для вполне интегрируемых и суперинтегрируемых гамильтоновых систем на случай некомпактных инвариантных подмногообразий.

Другие опубликованные результаты

Спинорные представления конформной группы.

Топология неподвижных точек группы перенормировок.

Гомотопическая классификация калибровочных полей с нулевой напряженностью.

Математическая модель дискретного пространства-времени.

Геометрическая формулировка принципа эквивалентности.

Описание гравитационных сингулярностей как сингулярностей пространственно-временных слоений.

Пространство Уиллера – Де Витта пространственных метрик с топологическими переходами.

Калибровочная модель «пятой силы» как поля дислокаций пространства-времени.

Производящий функционал квантовой теории поля как мера на пространстве обобщенных функций.

Закон сохранения энергии-импульса в аффинно-метрической и калибровочной теориях гравитации.

Неавтономная механика с неголономными связями.

Геодезическая форма динамических уравнений нерелятивистской механики.

Классическая и квантовая механика систем, зависящих от параметров.

Геометрия симплепктических расслоений.

Геометрическое квантование неавтономной классической механики.

Дифференциальная геометрия простых градуированных многообразий.

Бигамильтоновы частично интегрируемые системы и КАМ теорема для них.

Неавтономные вполне интегрируемые и суперинтегрируемые гамильтоновы системы.

Геометрическое квантование вполне интегрируемых и суперинтегрируемых гамильтоновых систем в переменных «действие-угол».

Стабильность по Ляпунову относительно зависящих от времени римановых метрик.

Относительные и итерированные БРСТ когомологии.

Неэквивалентные представления ядерных алгебр канонических коммутационных соотношений.

Обобщение Serre – Swan теоремы на некомпактные и градуированные многообразия.

Определение дифференциальных операторов в некоммутативной геометрии.

Законы сохранения в Chern – Simons топологической теории.

Классические и квантовые поля Якоби вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

Неадиабатический оператор голономии для вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

Квантовая механика относительно разных систем отсчета.

Лагранжева и гамильтонова теория подмногообразий.

Геометрическое квантование гамильтоновой релятивистской механики.

Супергравитация как суперметрика на супермногообразиях.

Тождества Нетер дифференциальных операторов.

Дифференциальные операторы на обобщенных функциях.

Главные научные работы

Книги

1. G. Sardanashvily, O. Zakharov. Gauge Gravitation Theory (World Scientific, Singapore, 1992).
2. G. Sardanashvily. Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory (World Scientific, Singapore, 1995).
3. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily. New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory (World Scientific, Singapore, 1997).
4. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily. Gauge Mechanics (World Scientific, Singapore, 1998).
5. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily. Connections in Classical and Quantum Field Theory (World Scientific, Singapore, 2000).
6. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily. Geometric and Algebraic Topological Methods in Quantum Mechanics (World Scientific, Singapore, 2005).
7. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily. Advanced Classical Field Theory (World Scientific, Singapore, 2009).
8. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily. Geometric Formulation of Classical and Quantum Mechanics (World Scientific, Singapore, 2010).

Статьи

1. G. Sardanashvily. Gravity as a Goldstone field in the Lorentz gauge theory, *Phys. Lett. A* **75** (1980) 257 – 258.
2. D. Ivanenko and G. Sardanashvily. Foliation analysis of gravitational singularities, *Phys. Lett. A* **91** (1982) 341 – 344.
3. D. Ivanenko and G. Sardanashvily. The gauge treatment of gravity, *Phys. Rep*. **94** (1983) 1 – 45.
4. G. Sardanashvily and O. Zakharov. On functional integrals in quantum field theory, *Rep. Math. Phys.* **29** (1991) 101 – 108.
5. G. Sardanashvily. On the geometry of spontaneous symmetry breaking, *J. Math. Phys*. **33** (1992) 1546 – 1549.
6. G. Sardanashvily and O. Zakharov. On application of the Hamilton formalism in fibred manifolds to field theory, *Diff. Geom. Appl*. **3** (1993) 245 – 263.
7. G. Sardanashvily. Constraint field systems in multimomentum canonical variables, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 6584 – 6603.
8. G. Giachetta and G. Sardanashvily. Stress-energy-momentum of affine-metric gravity. Generalized Komar superportential, *Class. Quant. Grav.* **13** (1996) L67 – L71.
9. G. Sardanashvily. Stress-energy-momentum tensors in constraint field theories, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 847 – 866.
10. G. Sardanashvily. Stress-energy-momentum conservation law in gauge gravitation theory, *Class. Quant. Grav*. **14** (1997) 1371 – 1386.
11. G. Sardanashvily. Hamiltonian time-dependent mechanics, *J. Math. Phys*. **39** (1998) 2714 – 2729.
12. G. Sardanashvily. Covariant spin structure, *J. Math. Phys*. **39** (1998) 4874 – 4890.
13. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Nonholonomic constraints in time-dependent mechanics, *J. Math. Phys*. **40** (1999) 1376 – 1390.
14. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Covariant Hamiltonian equations for field theory, *J. Phys. A* **32** (1999) 6629 – 6642.
15. L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. On the geodesic form of second order dynamic equations, *J. Math. Phys*. **41** (2000) 835 – 844.

16. L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Constraints in Hamiltonian time-dependent mechanics, *J. Math. Phys.* **41** (2000) 2858 – 2876.
17. G. Sardanashvily. Classical and quantum mechanics with time-dependent parameters, *J. Math. Phys.* **41** (2000) 5245 – 5255.
18. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Iterated BRST cohomology, *Lett. Math. Phys.* **53** (2000) 143 – 156.
19. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Cohomology of the infinite-order jet space and the inverse problem, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 4272 – 4282.
20. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Covariant geometric quantization of nonreletavistic time-dependent mechanics, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 56 – 68.
21. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Geometric quantization of mechanical systems with time-dependent parameters, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 2882 – 2894.
22. E. Fiorani, G. Giachetta and G. Sardanashvily. Geometric quantization of time-dependent completely integrable Hamiltonian systems, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 5013 – 5025.
23. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Action-angle coordinates for time-dependent completely integrable Hamiltonian systems, *J. Phys. A* **35** (2002) L439 – L445.
24. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Geometric quantization of completely integrable Hamiltonian systems in the action-angle variables, *Phys. Lett. A* **301** (2002) 53 – 57.
25. E. Fiorani, G. Giachetta and G. Sardanashvily. The Liouville-Arnold-Nekhoroshev theorem for non-compact invariant manifolds, *J. Phys. A* **36** (2003) L101 – L107.
26. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Jacobi fields of completely integrable Hamiltonian systems, *Phys. Lett. A* **309** (2003) 382 – 386.
27. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Bi-Hamiltonian partially integrable systems, *J. Math. Phys.* **44** (2003) 1984 – 1997.
28. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Nonadiabatic holonomy operators in classical and quantum completely integrable systems, *J. Math. Phys.* **45** (2004) 76 – 86.
29. D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Noether's second theorem for BRST symmetries, *J. Math. Phys.* **46** (2005) 053517.
30. D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Noether's second theorem in a general setting. Reducible gauge theories, *J. Phys. A* **38** (2005) 5329 – 5344.
31. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Lagrangian supersymmetries depending on derivatives. Global analysis and cohomology, *Commun. Math. Phys.* **259** (2005) 103 – 128.
32. D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. The antifield Koszul – Tate complex of reducible Noether identities, *J. Math. Phys.* **46** (2005) 103513.
33. G. Sardanashvily, Geometry of classical Higgs fields, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **3** (2006) 139 – 148.
34. E. Fiorani and G. Sardanashvily. Noncommutative integrability on noncompact invariant manifolds, *J. Phys. A* **39** (2006) 14035 – 14042.
35. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Quantization of noncommutative completely integrable Hamiltonian systems, *Phys. Lett. A* **362** (2007) 138 – 142.
36. G. Sardanashvily, Graded infinite order jet manifolds, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **4** (2007) 1335 – 1362.
37. E. Fiorani and G. Sardanashvily. Global action-angle coordinates for completely integrable systems with noncompact invariant submanifolds, *J. Math. Phys.* **48** (2007) 032901.
38. L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. Quantum mechanics with respect to different reference frames, *J. Math. Phys.* **48** (2007) 082104.
39. G. Sardanashvily, Supermetrics on supermanifolds, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **5** (2008) 271 – 286.
40. D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. The KT-BRST complex of a degenerate Lagrangian system, *Lett. Math. Phys.* **83** (2008) 237 – 252.
41. G. Sardanashvily, Classical field theory. Advanced mathematical formulation, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **5** (2008) 1163 – 1189.
42. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily. On the notion of gauge symmetries of generic Lagrangian field theory, *J. Math. Phys.* **50** (2009) 012903.
43. G. Sardanashvily, Gauge conservation laws in a general setting. Superpotential, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **6** (2009) 1046 – 1057.
44. G. Sardanashvily, Superintegrable Hamiltonian systems with noncompact invariant submanifolds, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **6** (2009) 1391 – 1420.
45. G. Sardanashvily, Relativistic mechanics in a general setting, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **7** (2010) 1307 – 1319.

Студенческий период и первые работы

В 1967 г. я окончил Московскую математическую школу №2 с серебряной медалью и поступил на физический факультет МГУ. Освоившись, начал заниматься самообразованием и ходил на кружок теоретической физики, проводившейся для студентов младших курсов проф. Д.Д. Иваненко, его сотрудниками и аспирантами. Я изначально хотел заниматься теоретической физикой, но на факультете было три теоретических кафедры. Под влиянием кружка, его широкой тематики, я решил поступать на кафедру теоретической физики к Д.Д. Иваненко. Время от времени даже посещал его научный семинар.

В середине третьего курса, весной 1970 г., я распределился на кафедру теоретической физики. На кафедру был конкурс, туда, как и на другие теоретические кафедры, стремились попасть лучшие студенты курса. На кафедру зачисляли 12 человек, и надо было пройти собеседование. В ходе собеседования я почувствовал, что меня заведомо берут – у меня была всего один потерянный бал (одна четверка за все экзаменационные сессии), да и, по-видимому, Д.Д. Иваненко предупредил, что я – к нему.

Поступив на кафедру, я в качестве будущего дипломника официально вошел в группу Иваненко: ходил на его научные семинары, продолжал самообразование, присматривался, кто чем в его группе занимается.

На 4-ом курсе я «прикрепился» к Андрею Владимировичу Булинскому (не путать с математиком Александром Вадимовичем, как это имеет место на сайте Math-Net.Ru). Он окончил физический факультет в 1968 г., но в аспирантуру не попал и работал на кафедре высшей математики Московского физико-технического института. Он продолжал сотрудничать с Д.Д. Иваненко и занимался алгебраической квантовой теорией: алгебры квантовых наблюдаемых, их представления, квантовые динамические системы и т. п. Все это было за рамками учебных курсов физфака. Работая с ним, я получил хорошую подготовку в этой области, которая мне потом очень пригодилась. В одной из своих статей, вышедшей в журнале *Теоретическая и математическая физика* в 1971 г., он даже меня благодарит за «полезные дискуссии». Хотя не помню, чтобы от меня действительно был какой-либо толк. Алгебраическая квантовая теория – предмет сложный, математически изощренный. Моего уровня было явно недостаточно, чтобы получить по этой теме какие-то оригинальные результаты и подготовить дипломную работу. К тому же сам Андрей Владимирович все реже и реже стал приходить в группу и на семинары Иваненко, по-видимому, потеряв надежду вернуться на факультет. Поэтому Д.Д. Иваненко предложил мне, хотя бы из прагматических соображений, сменить тему и научного руководителя (не будучи кандидатом наук, А.В. Булинский формально не мог быть научным руководителем моей дипломной работы).

В то время в науке и на семинарах Иваненко активно обсуждалась конформная теория поля на основе так называемой 15-параметрической конформной группы, включающей группы Лоренца и Пуанкаре. Естественно встал вопрос о построении спинорного представления этой группы, чем я и занялся. Моим научным руководителем был «назначен» докт. физ.-мат. наук Д.Ф. Курдгелаидзе – многолетний сотрудник Д.Д. Иваненко, с которым он развивал нелинейную мезонную и спинорную теории. Но моя чисто алгебраическая по своим методам тема была от него далеко, он мало, чем мог мне помочь, и я работал фактически самостоятельно. Я построил спинорное представление конформной группы на 8-спинорах, которые также реализовывали CPT преобразования, и написал для них конформно-инвариантное уравнение Дирака. Мне эта работа до сих пор нравится. Я доложил ее на 3-й Советской гравитационной конференции в Цахкадзоре, Армения в октябре 1972 г. и еще до этого направил статью в журнал «Вестник МГУ, физика и астрономия» [24]. Однако по какой-то причине эта статья вышла гораздо позже – только в марте 1975 г. В январе 1973 г. я защитил дипломную работу «Конечномерные представления конформной группы», руководителями которой значились Д.Д. Иваненко и Д.Ф. Курдгелаидзе.

Чтобы завершить эту тему, я в 1973 г. построил также нелинейные представления конформной группы методом так называемых «нелинейных реализаций». Он был незадолго до этого разработан, позволял строить представление группы как расширение представления ее картановской подгруппы, и был весьма тогда популярен. Его изложение можно найти в нашей книге «Калибровочная теория гравитации» [4]. Эта работа была доложена на Всесоюзном симпозиуме «Новейшие проблемы гравитации» в Москве и вышла в Тезисах его докладов. Она стала моей первой научной публикацией, но развития не имела. Вопреки надеждам конформная группа так пока и «не заиграла».

Окончив физический факультет в феврале 1973 г., я в апреле был зачислен в аспирантуру на кафедру теоретической физики к Д.Д. Иваненко. Работа по конформной группе была завершена, и передо мной открылся широкий спектр направлений исследования. Интересуясь очень многим, Д.Д. Иваненко предоставлял полную свободу деятельности своим аспирантам. Моим непосредственным руководителем был он сам, между нами никто не стоял, и я мог делать, что хочу.

А хотел я разного. Меня интересовали выходы за рамки стандартной теории поля на базе новых для теоретической физики математических методов: алгебраических, геометрических и топологических. Д.Д. Иваненко это поощрял, поскольку было ясно, что стандартная теория поля свои возможности исчерпала. И я занялся поиском и освоением таких новаторских методов. Хотя риск был большой – могло ничего не получиться, ни публикаций, ни диссертации. Как потом оказалось, с публикациями проблем не было, а вот кандидатская диссертация задержалась.

Второй период (1973 – 1978 гг.)

Калибровочная теория гравитации: попытки построения

Поступив в 1973 г. в аспирантуру, я среди прочего обратился к калибровочной теории гравитации. Это направление развивалось в группе Иваненко в начале 60-х, но потом заглохло с отъездом Г.А. Соколика, хотя продолжало обсуждаться на семинаре Иваненко, поскольку вело к столь увлекавшей его теории гравитации с кручением.

К тому времени уже стало ясно, что калибровочная теория адекватно формулируется в формализме расслоений, хотя исчерпывающее изложение этой формулировки появилось позднее в двух обзорных статьях: M. Daniel and C. Viallet в *Reviews of Modern Physics* и T. Eguchi, P. Gilkey and A. Hanson в *Physics Reports* в 1980 г. Поэтому я активно занялся изучением дифференциальной геометрии, подспорьем чему стал вышедший в 1975 г. перевод книги Р. Зуланке и П. Винтгена, «Дифференциальная геометрия и расслоения». Известный двухтомник Ш. Кобаяси и К. Номидзу в русском переводе появился только в 1981 г. Параллельно я занимался общей топологией по книгам Бурбаки и К. Куратовского.

Моя первая статья по калибровочной теории гравитации [22] вышла в сентябре 1974 г. Ее автором был я, но Д.Д. Иваненко, чтобы быть уверенным, привлек в качестве моего соавтора Б.Н. Фролова, который до этого занимался калибровочной теорией гравитацией. В статье уже упоминаются расслоения. Через три месяца вышла моя вторая статья [23], где я уже был единственным автором.

К тому времени, когда я обратился к калибровочной теории гравитации, проблеме было уже почти 20 лет. В 1954 г. C. Yang and R. Mills предложили первую калибровочную теорию для группы симметрий *SU(2)*. А уже в 1956 г. R. Utiama обобщил эту теорию для произвольной группы Ли внутренних симметрий *G*, включая теорию гравитации как калибровочную теорию группы Лоренца. Естественно было предположить, что калибровочная теория гравитации должна содержать в себе эйнштейновскую ОТО. В ОТО гравитационное поле отождествляется с псевдоримановой метрикой, а симметриями являются общие ковариантные преобразования. Однако трудность возникла со статусом псевдоримановой метрики и общих ковариантных преобразований, которым нет аналога в калибровочной схеме Янга – Миллса, поскольку калибровочные поля представляются связностями на расслоении $Y \to X$ со структурной группой *G*, а калибровочные преобразования – это так называемые вертикальные автоморфизмы *Y*, проектируемые на тождественное отображение *X*. Общие ковариантные преобразования таковыми не являются. Чтобы преодолеть эти трудности в работе Утиямы, в начале 60-х T. Kibbl, D. Sciama и др. предложили трактовать гравитацию, представленную тетрадным полем, как калибровочное поле для группы трансляций. Все равно это выходило за рамки калибровочной схемы Янга – Миллса – Утиямы для внутренних симметрий, поскольку предполагало нетождественные преобразования базы *X* тензорных расслоений. Я тоже начал с этой модели, но вскоре отказался от нее, поскольку она не укладывалась в формализм расслоений. Почти четыре года я безрезультатно возился с другими вариантами, пока не пришел к трактовке гравитации как хиггсовского поля, которая впервые была изложена в моей статье [30] в 1978 г., но об этом ниже.

Аспирантура закончилась в 1976 г., и, хотя диссертацию я к тому времени не представил, меня оставили работать на факультете в группе Иваненко. Почему? Я думаю потому, что ряду эвристических идей Д.Д. Иваненко я сумел придать строгую математическую форму. Ведь в 70-е я занимался не только калибровочной теорией гравитации. И Иваненко в меня поверил. Во-первых, ему понравился формализм расслоений своей универсальностью и то, что в его группе работают такими современными для того времени методами. Во-вторых, мы разработали модель праспинора как своего рода продолжение его единой спинорной теории. В-третьих, нами была реанимирована его давняя идея дискретного пространства. Он начал со мной публиковаться [26,27,31,32,35,36], а Д.Д. Иваненко, заботясь о своем реноме, был весьма щепетилен, когда соглашался на соавторство.

Другие модели

В течение пяти лет с 1973 г. по 1978 г., помимо калибровочной теории на геометрическом языке расслоений, я предпринял целый ряд попыток выйти за рамки традиционных математических методов в теоретической физике и постараться применить новый для теоретиков (но не для математиков) математический аппарат. Я полагал, что вряд ли добьюсь успеха там, где десятки и сотни теоретиков до меня, применяя известные методы, ничего не достигли и что могу рассчитывать на результат только, если применю что-то, что до меня никто не использовал. Я углубился в алгебру и топологию. Из всех этих изысканий четыре темы были доведены до публикаций.

Сосредоточившись в основном на классической теории поля, где применяются геометрические методы, я всегда продолжал держать в голове квантовую теорию и квантовую теорию поля. Начиная еще со своей студенческой работы с А.В. Булинским, я продолжал заниматься квантовыми алгебрами, в частности, полями C*-алгебр и их возможным применением. Результатом стала статья «К проблеме гравитационного вакуума» [30] и тезисы “The geometrization of quantum systems by C*-algebra bundles” на 9-ой Международной гравитационной конференции в Иене (ГДР) в 1980 г., в которой я участвовал и выступал с докладом. Уже много позже, в 00-е, я использовал этот формализм в развернутом виде для описания квантовой неконсервативной механики в своих книгах [15,16,18] и ряде статей.

Формулировка калибровочной теории в формализме расслоений ввела в рассмотрение новые физические объекты – топологические заряды и числа. Дело в том, что характеристические классы неэквивалентных расслоений над многообразием *X* являются топологическими инвариантами, т. е. они одни и те же для гомотопически эквивалентных многообразий X, и более того они выражаются через когомологические классы Де Рама так называемых характеристических форм, построенных из напряженности калибровочных полей на *X*. Такие характеристические формы называются топологическими зарядами, а их интегралы по многообразию *X*, если оно компактно – это топологическими числами. Примерами таких топологических чисел служат заряд монополя, инстантонное число и т. п. Возникла идея, что те или иные характеристики элементарных частиц являются именно такими топологическими числами и хорошо бы описать системы с переменными значениями топологических характеристик. Была предложена такая модель, где топологические характеристики принимали свои значения с определенной вероятностью согласно некоторой функции распределения. Д.Д. Иваненко это понравилось, мы опубликовали одну работу [35], но дальше дело не пошло, поскольку так и не удалось предложить динамику возможных изменений топологии. Позже я вернулся к описанию топологических переходов, но уже в стандартной теории гравитации.

В 1930 г. Д.Д. Иваненко и В.А. Амбарцумян выдвинули идею дискретности пространства-времени внутри атомного ядра, чтобы посредством введения фундаментальной длины решить некоторые проблемы, возникшие в то время в физике ядра. Идея дискретности тогда конструктивного развития не получила, но многие ученые время от времени к ней обращались из общих соображений, ограничиваясь, как правило, рассмотрением решеток. Своего рода ее воплощением оказалась теория калибровочных полей на решетках, которая позволила делать некоторые стимулирующие расчеты. В 1965 г. вышла исторически-обзорная книга А.Н. Вяльцева «Дискретное пространство-время» (М., Наука). Д.Д. Иваненко сам неоднократно возвращался к этой идеи. В 70-е г. у него этой тематикой занимался Г. Горелик, но ничего нового не получилось. Все это естественно обсуждалось на семинарах Иваненко, и эти обсуждения побудили меня задуматься над проблемой. Я сразу отказался от дискретного пространства-времени как дискретного топологического пространства (к которому относятся и решетки). Тогда что? Я предложил вполне несвязные топологические пространства, которые возникают в целом ряде теоретических моделей (таковым является, например, множество рациональных чисел). Д.Д. Иваненко это опять же понравилось, и были опубликованы две работы [32,34]. Более того, это была настолько хорошо сформулированная математическая модель, что мою заметку «Дискретное пространство-время» взяли в издававшуюся тогда очень ответственную пятитомную «Математическую энциклопедию» [33].

Однако наиболее обещающей из выдвинутых мною тогда моделей была идея праспиноров (которая без особого развития и сейчас остается «обещающей») [26,31,44]. Известно, что корневые диаграммы простых комплексных алгебр Ли допускают группы отражений – группы Вейля, которые являются конечными группами Кокстера. Более того, классификация простых комплексных алгебр Ли и их вещественных подалгебр проводится именно по конечным группам Кокстера. Они же являются группами симметрий весовых диаграмм неприводимых представлений этих алгебр Ли, к которым относятся как алгебры внутренних, так и пространственных симметрий. Возникла идея, что можно заменить алгебры и группы Ли симметрий соответствующими конечными группами Кокстера. Порождающие элементы s этих групп обладают свойством, что $ss=1$, и все разнообразие этих групп обусловлено тем, как разные порождающие элементы между собой не коммутируют. Простейшая группа Кокстера состоит из двух элементов $(s,1)$ и служит группой симметрий 2-спинора. Давайте предположим, что физический мир в своей основе состоит из таких спиноров, назовем их праспинорами, так что при взаимодействии их группы преобразований Кокстера перестают быть коммутативными, порождая всё известное многообразие симметрий элементарных частиц. Более того, можно пойти еще дальше и отождествить элементы простейшей группы Кокстера *(s,1)* с простейшей логической системой суждений («нет», «да»). Д.Д. Иваненко эта модель очень понравилась. Он видел в ней перспективу продолжения своей и Гейзенберга единой нелинейной теории поля, которая к тому времени отошла в сторону в свете теории калибровочных полей. Стало ясно, что взаимодействие частиц описывается обменом медиаторов – калибровочных полей, а не нелинейностями, хотя и не везде. Например, взаимодействие поля куперовских пар в теории сверхпроводимости – это нелинейность, а может быть и взаимодействие хиггсовского вакуума, и праспиноров … Модель праспиноров представлена в нашей книге «Гравитация» [3] и в статьях [26,31,44], но дальнейшего развития не получила, поскольку неясно, как описывать динамику систем с конечными группами.

Хотя в более общем плане это побудило дать классификацию калибровочных полей с дискретными группами симметрий [41]. Соответствующие расслоения – это накрытия. Такие поля отвечают за эффекты типа Аронова – Бома, квантования магнитного заряда и ведут к модели «флаксонов». Я их неоднократно упоминаю в своих книгах.

Вся моя деятельность в период 1973 – 1978 гг., в конце концов, была оформлена в весьма эклектичную кандидатскую диссертацию «Формализм расслоений в некоторых моделях теории поля», которую я защитил в 1980 г. Но в ней уже приводится калибровочная модель гравитации как хиггсовского поля, которая составила главный предмет третьего периода моей научной деятельности в 1978 – 1990 гг.

Третий период (1978 – 1990 гг.)

Калибровочная теория гравитации: решение проблемы

В 70-е в теории поля уже было фольклором, что спонтанное нарушение симметрий сопровождается хиггсовскими и голдстоновскими полями. Это подсказывалось теоремой Голдстона в квантовой теории, методом нелинейных реализаций групп (частным случаем индуцированных представлений), составляло хиггсовский механизм генерации массы частиц в объединенных калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий. Спонтанное нарушение симметрий квантовый эффект, когда вакуум (или основное состояние) инвариантен относительно не всей группы преобразований, а только ее некоторой подгруппы точных симметрий. Проблема состояла в том, как описывать спонтанное нарушение симметрий в классической калибровочной теории. Это нужно, потому что лагранжиан в производящем функционале для функций Грина квантовых полей – лагранжиан классических полей, и в нем фигурирует классическое хиггсовское поле. Классическая калибровочная теория описывалась в формализме расслоений, и естественно возникал вопрос, чем является хиггсовское поле в этом формализме.

В 1975 г. вышел русский перевод книги Р. Зуланке, П. Винтген, «Дифференциальная геометрия и расслоения», один из параграфов которой был посвящен так называемым *G*-структурам, когда структурная группа главного реперного расслоения *LX* над многообразием *X* редуцирована к некоторой своей замкнутой подгруппе *H*. В общем случае произвольного главного расслоения *P* со структурной группой Ли *G* такая конструкция редукции структурной группы описывалась в книге Н. Стинрода «Топология косых произведений» 1953 г., которую я нашел в библиотеке мехмата. Известная теорема устанавливает, что такая редукция имеет место тогда и только тогда, когда существует глобальное сечение *h* фактор-расслоения $P/H \to X$. Поскольку это сечение принимает значения в фактор-пространстве *G/H*, можно считать, что оно представляет классическое хиггсовское (или голдстоновское) поле. Если *P=LX* и *H* – группа Лоренца *SO(1,3)*, тогда *h* – глобальное сечение расслоения *LX/SO(1,3)* – это псевдориманова метрика на многообразии *X*. Поэтому я предположил, что псевдориманова метрика – гравитационное поле – имеет статус хиггсовского в калибровочной теории гравитации. Это было опубликовано в моих тезисах на 8-й Международной гравитационной конференции в Канаде в 1977 г. и в статье [37].

Д.Д. Иваненко такая трактовка гравитации понравилась, поскольку еще в середине 60-х он предположил, что гравитационное поле может быть по своей физической природе голдстоновским из-за нарушения пространственно-временных симметрий, обусловленных кривизной. Однако такое нарушение симметрий (и, следовательно, хиггсовский характер гравитационного поля) не следовало из калибровочного принципа, и надо было подвести под него принципиальную основу. И я такой принцип нашел – принцип эквивалентности, но переформулированный в геометрических терминах.

В вышеупомянутой книге Зуланке – Винтгена *G*-структуры рассматривались как своего рода реализация идеи геометрии инвариантов Клейна – Чженя, а именно: если структурная группа расслоения *G* редуцирована к своей подгруппе *H*, то существует атлас этого расслоения с *H*-значными функциями перехода, и, следовательно, на этом расслоении определены *H*-инварианты. В то время на семинаре Д.Д. Иваненко не раз обсуждался принцип эквивалентности в теории гравитации, его различные варианты (слабейший, слабый, среднесильный, сильный и т. д.). Все эти варианты слишком физические по своим формулировкам, чтобы служить основанием для математической калибровочной теории гравитации. Они характеризуют возможность перехода к СТО в некоторой системе отсчета. Характеризуя СТО как геометрию инвариантов группы Лоренца, я пришел к идее сформулировать принцип эквивалентности в духе геометрии инвариантов Ф. Клейна как требование существования лоренцевских инвариантов в некоторой системе отсчета, что в свою очередь предполагает редукцию структурной группы реперного расслоения *LX* над многообразием *X* к группе Лоренца, а, следовательно, и существование гравитационного поля на *X* [40,43,45] Такой геометрический принцип эквивалентности подвел фундамент под нашу трактовку гравитационного поля как хиггсовского в калибровочной теории гравитации. Калибровочная теория гравитации в целом сложилась. Это была аффинно-метрическая теория, динамическими переменными в которой служили псевдориманова метрика как хиггсовкое поле и общая линейная связность как калибровочное поле. Мы с Д.Д. Иваненко опубликовали обзор [51] в *Physics Reports* в 1983 г., на который традиционно ссылаются в числе основополагающих работ по калибровочной теории гравитации. Предложенная нами калибровочная теория гравитации была также изложена в книгах [3,4].

Наш вариант калибровочной теории гравитации был замечен, никем не опровергался, но и не то, чтобы стал широко признанным. Теоретики не спешили отказаться от трактовки гравитационного поля как калибровочного поля трансляций. Хотя еще в 1982 г. я опубликовал статью [50], в которой специально доказывал в формализме расслоений, что отождествление тетрадного поля с так называемой припаивающей формой (трансляционной частью общей аффинной связности) является математической ошибкой.

Поэтому я занялся исследованием возможной физической интерпретации трансляционной компоненты аффинной связности. Я знал вышедшую в 1983 г. книгу A. Kadic, D. Edelen, A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations (ее русский перевод появился в 1987 г.), в которой калибровочное поле трансляций на 3-мерном многообразии описывало дислокации в теории сплошных сред. Опираясь на этот результат, я разработал модель, в которой трансляционная часть аффинной связности на 4-мерном многообразии описывала новую гипотетическую структуру – своего рода дислокации этого многообразия [67,69,72]. В частности, они могли быть ответственны за юкавскую добавку к ньютоновскому потенциалу – так называемую «пятую силу» [75,79,84]. В то время такого рода поправки активно искали, но в результате по крайней мере на лабораторных расстояниях ничего так и не нашли.

Геометрический принцип эквивалентности обуславливает не только существование гравитационного поля на многообразии, но и пространственно-временную структуру на нем. Дело в том, что, если структурная группа реперного расслоения LX редуцирована к группе Лоренца (пусть g – соответствующее гравитационное поле), то она всегда редуцирована и к ее максимальной компактной подгруппе $SO(3)$. Соответствующим хиггсовским полем является 3-мерное пространственно-подобное подрасслоение F касательного расслоения TX многообразия X, которое задает его пространственно-временное расщепление $TX = F + R$, т. е. пространственно-временную структуру на X. Если подрасслоение F инволютивно, то мы имеем ассоциированное с данным гравитационным полем g пространственно-временное слоение X. Отсюда у меня возникла идея описывать гравитационные сингулярности как особенности пространственно-временных слоений, тем более что наиболее признанный критерий гравитационных сингулярностей по так называемой b-неполноте геодезических имеет ряд недостатков [48,49]. Была дана классификация сингулярностей пространственно-временных слоений, включая нарушения причинности, топологические переходы через критические точки и каустики слоений [56,58,65]. Но и этот способ описания гравитационных сингулярностей не идеален. Например, каустики пространственно-временного слоения могут иметь место и в случае регулярного гравитационного поля.

Одним из наиболее активно развиваемых обобщений теории гравитации является супергравитация. Однако она в основном строится как обобщение калибровочной теории группы Пуанкаре путем расширения ее алгебры Ли до той или иной суперbegin алгебры. Получаемые в таком подходе хиггсовские суперполя, трактуемые как супегравитационное поле, не имеют геометрической природы. Поэтому я предположил, что следует строить теорию супергравитации как суперметрики на супермногообразии, вводя ее из условия редукции структурной супергруппы соответствующего суперрасслоения. Это было сделано в рамках существовавшего тогда формализма супермногообразий [63,64]. Я вернулся к этой проблеме позже, почти через десять лет, уже на другом математическом уровне.

И, всё-таки, завершенной картины калибровочной теории гравитации не получалось. Во-первых, оставалось непонятной физическая подоплека геометрического принципа эквивалентности – он выглядел формальным. Во-вторых, оставалось неясным, что является калибровочными преобразованиями в калибровочной теории гравитации. В эйнштейновской ОТО, которую должна включать в себя калибровочная теория гравитации, таковыми служат общековариантные преобразования. Но что такое эти преобразования в формализме расслоений?

Понадобилось еще почти 10 лет и более продвинутый математический аппарат, чтобы всё встало на свои места.

Квантовая теория поля: производящий функционал как мера

Тот факт, что гравитационное поле по своей физической природе является хиггсовским, обратил мое внимание на общую проблему описания хиггсовского вакуума. В объединенных моделях фундаментальных взаимодействий его возникновение трактуется как своего рода фазовый переход при определенной энергии (температуре). Я предпринял различные попытки подступиться к этой проблеме [49,54,59,68]. В частности, разрабатывалась идея, что хиггсовский вакуум является источником хиггсовского гравитационного поля [68]. Однако сколько-нибудь содержательной теории хиггсовского вакуума до сих пор не построено.

Занимаясь проблемой хиггсовского вакуума, я столкнулся с тем, что вообще нет какой-либо математически корректной формулировки квантовой теории поля, ни аксииоматической, ни в форме теории возмущений. Последняя формулируется на языке так называемых функциональных интегралов, но они не являются какими-либо истинными интегралами, а их свойства задаются по аналогии с интегралами на конечномерных пространствах, чтобы воспроизводить феймановские диаграммы. Занимаясь известной конструкцией ГНС в квантовой теории, я знал о возможностях ее расширения на ненормированные инволютивные алгебры и, в частности, на алгебру свободных полей, представляемых пробными (быстро убывающими на бесконечности) функциями. Эти функции образуют ядерное пространство S. Непрерывными формами на этой алгебре являются обобщенные функции, составляющие дуальное пространство S'. Проблема была с описанием системы взаимодействующих полей, рождающихся и исчезающих в какие-то моменты времени. Такая система характеризуется хронологическими формами на пространстве S, но они не являются непрерывными. Однако я обнаружил, что, если перейти виковским поворотом к евклидовым полям, на них хронологические формы (евклидовы функции Грина) оказываются непрерывными. Более того, они задаются производящим функционалом, который в силу известной теоремы представляется некоторой мерой на пространстве обобщенных функций S'. Эта конструкция закладывает хорошую математическую основу квантовой теории поля [80,86]. Она была расширена на фермионные поля [83]. Однако проблема состоит в том, что выписать эти меры в явном виде, за исключением гауссовых мер для полей без взаимодействия, невозможно. Кроме того, свойства этих мер отличаются от тех, которые приняты для функциональных интегралов в известной пертурбативной квантовой теории поля. Например, не существует трансляционно инвариантной меры Лебега на S', и я даже пробовал использовать этот факт для описания хиггсовского вакуума [89].

В дальнейшем, я неоднократно возвращался к попыткам построить производящий функционал в квантовой теории поля как меры, но пока безуспешно. Впрочем, на языке мер удалось описать неэквивалентные представления алгебр канонических коммутационных соотношений, моделируемых над ядерными пространствами [133].

Четвертый период (1990 – 1999 гг.)

Формализм многообразий струй

Осенью 1987 г. в рамках научного сотрудничества между МГУ и University of Camerino (Italy) в Москву приехал профессор Luigi Mangiarotti. Он делал доклад на семинаре Иваненко. Доклад был геометрический, по аппарату расслоений, но я мало что понял. А весной 1989 г. я сам поехал к нему на месяц в Италию. С тех пор наше сотрудничество продолжается более 20 лет. Я открыл новые для себя геометрические методы, которые позволили дать исчерпывающую математическую формулировку классической теории поля и классической нерелятивистской механики.

Занимаясь калибровочной теорией в формализме расслоений, я столкнулся с тем, что динамика этой теории формулируется в традиционной форме – функционал действия, вариации полей, вариационные уравнения и т. п., не связанной с геометризацией. В то же время, в математике уже давно был разработан аппарат многообразий струй для теории нелинейных дифференциальных операторов, дифференциальных уравнений и лагранжевой теории. Однако он был совершенно неизвестен теоретикам, да и сейчас остется малоизвестным. Именно его рассказывал Luigi Mangiarotti на семинаре Иваненко.

Суть формализма многообразий струй состоит в том, что сечения расслоения $Y \to X$ отождествляются, если их значения и их частные производные до некоторого порядка k совпадают в точке x многообразиях X. Ключевым является то, что множество всех таких классов образует гладкое конечномерное многообразие J^kY, которое называется многообразием струй k-порядка сечений расслоения $Y \to X$. Это позволяет при анализе дифференциального уравнения k-порядка рассматривать не некое бесконечномерное функциональное пространство гладких сечений, а конечномерное многообразие струй, и задавать дифференциальное уравнение как некоторое его подмногообразие. Соответственно дифференциальный оператор на сечениях $Y \to X$ определяется как отображение многообразия J^kY в некоторое расслоение $E \to X$, а лагранжиан *k*-порядка *L* – как *n*-форма (*n*=dim *X*) на J^kY.

Более того, связности на расслоении $Y \to X$ тоже выражаются в терминах многообразий струй: они представляются сечениями расслоения $J^1Y \to Y$. Таким образом, многообразия струй составляют язык дифференциальной геометрии. Дело в том, что линейные связности, как и линейные дифференциальные операторы, можно описывать разными способами, а нелинейные – только в формализме многообразий струй.

В 1989 – 90 гг. я был занят освоением формализма многообразий струй, а мои первые работы, где он использован, это статьи 1991 – 92 гг. по классической теории спонтанного нарушения симметрий [90,91], многоимпульсной гамильтоновой теории поля [92,93] и книга по калибровочной теории гравитации [6].

В то время мое внимание также привлек формализм дифференциальных операторов на модулях над произвольной алгеброй [10]. Он также включал аппарат струй модулей, а также вел к дифференциальной геометрии (дифференциальные формы, связности и пр.) на модулях. Этот формализм, в частности, лежит в основе некоммутативной геометрии. Его связь с дифференциальной геометрией на расслоениях выражается известной Serre – Swan теоремой (обобщенной мной на некомпактные многообразия [16]), что всякий проективный модуль конечного ранга над кольцом гладких функций на многообразии *X* является модулем сечений некоторого векторного расслоения над *X*, и обратно. В дальнейшем я неоднократно обращался к этому формализму для построения геометрии на градуированных многообразиях и для геометрической формулировки неавтономной квантовой механики [15,16,17,18].

Лагранжева теория поля

В тот период я в основном ограничивался рассмотрением лагранжева формализма первого порядка и его применением к полевым моделям, которые в основном являются лагранжевыми теориями именно первого порядка. Обычно уравнения Эйлера – Лагранжа в формализме многообразий струй выводятся из так или иначе сформулированного вариационного принципа. Но я брал за основу так называемую первую вариационную формулу, в которой уже фигурировал оператор Эйлера – Лагранжа. Он может быть введен алгебраически, без апелляции к вариационному принципу, как оператор кограницы так называемого вариационного комплекса, к чему я пришел несколько позже.

Первая вариационная формула также ведет непосредственно к лагранжевым законам сохранения. Дело в том, что в формализме многообразий струй инфинитезимальный генератор однопараметрической группы преобразований представляется векторным полем *u* на конфигурационном пространстве, и лагранжиан *L* инвариантен относительно этих преобразований, если его производная Ли вдоль *u* равна 0. Тогда из первой вариационной формулы следует, что сохраняется соответствующий ток симметрий вдоль *u*.

В первую очередь, я переформулировал калибровочную теорию в формализме многообразий струй, когда калибровочные поля (связности на главном расслоении $P \to X$ со структурной группой *G*) представляются сечениями расслоения связностей $C = J^1 P \to X$. Ключевым было получение канонического разложения конфигурационного пространства $J^1 C$ калибровочной теории.

Еще один результат следовал из рассмотрения законов сохранения в калибровочной теории. Дело в том, что по определению ток энергии-импульса – это ток симметрии вдоль векторного поля *u* на *C*, которое является поднятием некоторого ненулевого векторного поля на *X*. Такое поднятие не единственно, и поэтому ток энергии-импульса не единственен. Два разных таких поднятий *u* и *u'* отличаются на вертикальное векторное поле *v=u-u'* на *C*, имеющее нулевую проекцию на *X*. Токами симметрий вдоль вертикальных полей являются нетеровские токи внутренних симметрий. Поэтому разные токи энергии-импульса отличаются друг от друга нетеровскими токами симметрий. Более того, всякий сохраняющийся ток энергии-импульса в общем случае имеет такую нетеровскую составляющую, обусловленную внутренними симметриями лагранжиана [104].

Все эти изыскания по лагранжевой теории поля в формализме многообразий струй были изложены в книге [7] в 1993 г. и в последующих книгах [8,10].

Геометрия композиционных расслоений

Формализм струй, когда я с ним познакомился, был вполне разработан в приложении к теории дифференциальных операторов и дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, а также, как я уже упомянул, в основных аспектах к лагранжевомому формализму. Казалось, что мне как теоретику его надо только применить к конкретным полевым моделям: калибровочной теории, теории гравитации. Однако пришлось заняться и рядом принципиальных вопросов: геометрия композиционных расслоений, лагранжева теория в формализме вариационного бикомплекса, тождества Нетер и вторая теорема Нетер.

Композиционным расслоением называется композиция расслоений $Y \to \Sigma \to X$. Они возникают в целом ряде моделей теории поля и в механике. В механике это модели с параметрами, представляемыми сечениями расслоения $\Sigma \to X$. В теории поля это системы с фоновым полем и модели с нарушением симметрий, например, теория гравитации, когда сечения расслоения $Y \to \Sigma$ – это хиггсовские поля. Суть состоит в том, что, если *h* – сечение расслоения $\Sigma \to X$, то сужение $Y \to \Sigma$ на подмногообразие *h(X)* в Σ является подрасслоением $h^* Y \to X$ расслоения $Y \to X$, описывающим систему в присутствии данного фонового поля (или параметрической функции) *h(X)*.

Была известна связь между многообразиями струй расслоений $Y \to \Sigma$, $Y \to X$ и $\Sigma \to X$, из которой я получил соотношение между связностями на этих расслоениях и, главное, новый дифференциальный оператор на сечениях расслоения $Y \to \Sigma$, названный вертикальным ковариантным дифференциалом, определяемым связностью *A* на $Y \to \Sigma$. Дело в том, что, будучи ограниченным на *h(X)*, этот оператор совпадает с обычным ковариантным дифференциалом, задаваемым ограничением связности *A* на $h^* Y \to X$. Таким образом, этот вертикальный ковариантный дифференциал должен фигурировать при описании динамики полевых систем на композиционном расслоении. Эта конструкция была опубликована в 1991 в статье [91] и уже использована в книге [6] для описания спиноров в гравитационном поле. Впоследствии я неоднократно ее использовал в различных моделях теории поля и механики. Одной из них, ключевой для построения калибровочной теории гравитации, является классическая теория поля с нарушением симметрий.

Полевые модели с нарушением симметрий и хиггсовские поля

Я уже упоминал книгу Р. Зуланке и П. Винтгена, «Дифференциальная геометрия и расслоения», один из параграфов которой был посвящен так называемым *G*-структурам, когда структурная группа реперного расслоения редуцирована к своей подгруппе. Это связывалось с идеологией геометрии инвариантов Ф. Клейна. В более общем плане под *G*-структурой понимается, когда структурная группа Ли *G* главного расслоения $P \to X$ редуцируема к своей замкнутой подгруппе (следовательно подгруппе Ли) *H*. Это означает, что существует атлас главного расслоения *P* и ассоциированных с ним расслоений с *H*-значными функциями перехода или, эквивалентно, что имеется главное подрасслоение *P′* расслоения *P* со структурной группой *H*. Тогда может существовать ассоциированное с *P’* расслоение $Y \to X$, типичный слой *V* которого допускает действие не группы *G*, а только ее подгруппы *H*. Сечения такого расслоения описывают материальные поля в ситуации нарушения симметрий с группой *G* до подгруппы точных симметрий *H*. При этом ключевым является тот факт, что редукция структурной группы *G* к подгруппе *H* происходит тогда и только тогда, когда существует глобальное сечение *h* фактор-расслоения $P/H \to X$ с типичным слоем *G/H*. Более того, имеет место взаимно однозначное соответствие между сечениями *h* фактор-расслоения $P/H \to X$ и *H*-подрасслоениями P^h расслоения *P*. Сечения фактор-расслоения $P/H \to X$ трактуются как классические хиггсовские поля, так что сечения ассоциированного с P^h расслоения $Y^h \to X$ описывают материальные поля *s* с точной симметрией *H* в присутствии хиггсовского поля *h*. Эта трактовка была предложено мной (и независимо польским теоретиком А. Траутманом, который, однако, потом этим вопросам не занимался) в начале 80-х [43,45]. Проблема, однако, состояла в том, что для разных хиггсовских полей *h* расслоения $Y^h \to X$ могут быть не эквивалентны. Поэтому материальные поля *s* с точной симметрией *H* могут рассматриваться только в паре с определенным хиггсовским полем *h*. Естественно встает вопрос, как описать всю совокупность материальных полей с нарушенной симметрией и хиггсовских полей.

Для этого я предложил рассмотреть композиционное расслоение $P \to P/H \to X$, где $P \to P/H$ – главное расслоение со структурной группой *H*, и ассоциированное с $P \to P/H$ расслоение $Y \to P/H$ с типичным слоем *V*. Тогда сечения композиционного расслоения $Y \to P/H \to X$ описывают весь комплекс материальных и хиггсовских полей в случае спонтанного нарушения симметрий [90,91,150]. Действительно, в силу упомянутых выше свойств композиционных расслоений, ограничение на подмногообразие *h(X)* в *P/H* расслоения $Y \to P/H$ – это в точности расслоение $Y^h \to X$. Лагранжиан такого комплекса выражается через связность на расслоении $Y \to P/H$ и вертикальный ковариантный дифференциал.

Вся эта конструкция была применена мною для описания дираковских спинорных полей в гравитационном поле.

Калибровочная теория гравитации: окончательная формулировка

Предложенная мною и Д.Д. Иваненко в начале 80-х калибровочная модель гравитации, где метрическое гравитационное поле описывалось как хиггсовское, имела тот недостаток, что в ней не определялись калибровочные преобразования теории гравитации. Вопрос обсуждался [57,77]. Поскольку калибровочная теория гравитации, очевидно, должна включать в себя эйнштейновсую ОТО, ее калибровочными преобразованиями являются общековариантные преобразования, но не было ясности в определении самих этих общековариантных преобразований. Ответ был найден опять же в рамках формализма расслоенных пространств. Это преобразования, которые характеризуют так называемые натуральные расслоения (natural bundles).

Ограничимся рассмотрением однопараметрических групп преобразований и их инфинитезимальных генераторов, каковыми являются векторные поля. Пусть $Y \to X$ – расслоение. Генераторами однопараметрических групп диффеоморфизмов его базы *X* являются векторные поля на *X*. Такое векторное поле может быть разными способами, например посредством связности, поднято до векторного поля на расслоении *Y*. Но такое поднятие $u \to u'$ в общем случае не будет функториальным, т.е. не будет гомоморфизмом алгебры Ли *T(X)* векторных полей на X в алгебру Ли *T(Y)* векторных полей на Y, поскольку коммутатор поднятий *[u',v']* не обязательно равен поднятию коммутатора *[u,v]'* векторных полей *u* и *v* на *X*. Однако существуют расслоения, которые допускают функториальное поднятие *Fu* векторных полей *u* на базе *X*, при котором имеет место упомянутый выше гомоморфизм алгебры Ли *T(X)* в *T(Y)*. Эти расслоения называются натуральными. К ним относятся касательное *TX*, кокасательное *T*X* расслоения над *X*, их всевозможные тензорные произведения, расслоение линейных реперов *LX* и все ассоциированные с ним расслоения, но не только. Именно функториальное поднятие *Fu* на натуральное расслоение *Y* векторных полей на его базе *X* представляют собой генераторы однопараметрических групп общековариантных преобразований *Y*. Таким образом, теория гравитации должна строиться как классическая теория поля на натуральных расслоениях [101,105,108,126]. В частности, отсюда вытекает следующее.

Группа общековариантных преобразований является подгруппой группы автоморфизмов *Aut(LX)* реперного расслоения *LX*. Но лагранжианы теории гравитации, в частности лагранжиан ОТО, инвариантны только относительно общековариантных преобразований, а не общих реперных преобразований из *Aut(LX).* Поэтому гравитационное поле (псевдориманова метрика), в отличие от хиггсовских полей в калибровочной теории внутренних симметрий, не сводится калибровочными преобразованиями к метрике Минковского и поэтому является динамической переменной.

Ток энергии-импульса в теории гравитации – это ток симметрии именно вдоль функториального поднятия *Fu* векторных полей *u* на *X*. Он приводит к обобщенному суперпотенциалу энергии-импульса Комара [101,105].

Спинорные расслоения не являются натуральными и не реализуют общековариантные преобразования. Поэтому встает вопрос об описании дираковских фермионных полей в теории гравитации. Поскольку эти поля допускают только преобразования Лоренца, имеет место ситуация спонтанного нарушения симметрий. В этом случае спинорное поле описывается только в паре с определенным гравитационным полем g, а именно сечениями спинорного расслоения S^g ассоциированного с редуцированным лоренцевским подрасслоением $L^g X$ реперного расслоения LX. Тогда в соответствии с общей схемой описания спонтанного нарушения симметрий в классической теории поля вся совокупность спинорных и гравитационных полей представляется сечения композиционного расслоения $S \to LX/SO(1,3) \to X$, где $S \to LX/SO(1,3)$ – ассоциированное с $LX \to LX/SO(1,3)$ спинорное расслоение [108,109]. В частности, расслоение $S \to X$ является натуральным, и может быть определен ток энергии-импульса спинорных полей.

Проясняется и хиггсовский характер гравитационного поля. Он выражается в том, что для разных гравитационных полей g и g' спинорные расслоения S^g и $S^{g'}$ не эквивалентны, поскольку не эквивалентны представления в них касательных ковекторов матрицами Дирака и, соответственно, не эквивалентны операторы Дирака.

Ковариантная гамильтонова теория поля

Классическая теория поля формулируется как лагранжева теория. Все фундаментальные полевые уравнения являются уравнениями Эйлера – Лагранжа, получаемые как вариационные уравнения некоторого лагранжиана. В то же время классическая автономная (консервативная) механика допускает как лагранжеву, так и гамильтонову формулировки, которые, однако, не эквивалентны. Гамильтонова формулировка механики основана на симплектической геометрии, которой наделяется фазовое пространство. Естественно, еще давно встал вопрос о гамильтоновой формулировке теории поля. Однако непосредственное распространение симплектического гамильтонова формализма на теорию поля, когда канонические моменты отвечают производным полевых функций только по времени, ведет к бесконечномерным фазовым пространствам, где каноническими переменными являются функции в каждый данный момент времени. Уравнения Гамильтона на таком пространстве не являются обычными дифференциальными уравнениями и никак не сопоставимы уравнениям Эйлера – Лагранже теории поля. Такая симплектическая гамильтонова конструкция используется исключительно в квантовой теории поля для получения коммутационных соотношений операторов квантовых полей.

В то же время конечномерное фазовое пространство можно получить, если рассматривать канонические моменты, отвечающие производным полевых функций по всем пространственно-временным координатам. Такой подход получил название ковариантной гамильтоновой теории поля. Рассматриваются разные варианты такой формулировки – полисимплектическая, мультисимплектическая, *k*-симплектическая, в зависимости от выбора фазового пространства и вводимой на нем структуры, обобщающей симплектическую геометрию. Этой проблемой в 1990 г. заинтересовался мой студент, а потом сотрудник Олег Захаров, который в 1992 г. опубликовал самостоятельно статью в *Journal of Mathematical Physics*. Но у него возникла проблема построения гамильтоновых уравнений поля, аналогичных лагранжевым. Я эти уравнения построил, и затем вплотную заинтересовался этой тематикой.

Мы развивали полисимплектический гамильтонов формализм на расслоениях, который в случае расслоений над временной осью *X=R* приводил к гамильтоновой механике с обычными каноническими переменными. Была построена глобально определенная полисимплектическая форма на фазовом пространстве, развит полисимплектический гамильтонов формализм и при заданном лагранжиане построены соответствующие гамильтонианы. Основные результаты были представлены в [92,93] в 1992 г., а в 1993 в [94] была опубликована уже вполне развернутая теория. Главная проблема состояла в том, что лагранжев и гамильтонов формализмы на расслоениях не эквивалентны, если только лагранжиан не является гиперрегулярным, т. е., когда отображение Лежандра конфигурационного пространства в фазовое – это диффеоморфизм. В общем случае, одному и тому же лагранжиану могут соответствовать разные гамильтонианы, или вообще ни один. Исчерпывающие соотношения между лагранжевым и полисимплектическим гамильтоновым формализмами можно дать в случае так называемых полурегулярных и почти регулярных лагранжианов. Основные теоремы были приведены в работах [94,97] и книгах [7,8], а в окончательном виде эти соотношения были опубликованы в книге [10] в 1997 г. и в статье [116] в 1999 г.

Полисимплектический гамильтонов формализм рассматривался в применении к основным полевым моделям, которые все являются почти регулярными. Изучалась возможность квантования полей в ковариантных канонических переменных [98,142], однако вопрос остается открытым, поскольку пока до конца не изучены дополнительные калибровочные симметрии, возникающие у полевых моделях в этих переменных.

Нерелятивистская классическая механика: геометрическая формулировка на расслоениях

Когда во второй половине 90-х мои итальянские коллеги, предложили мне заняться классической нерелятивистской механикой, я удивился: что в этой области можно сделать нового. Однако оказалось, что классическая механика представляет себе более сложный объект для геометрической формализации, чем классическая теория поля.

Гамильтонова формулировка консервативной классической механики на симплектическом многообразии *Q* давно и хорошо разработана. Она распространяется на неконсервативные системы, если не рассматривать зависящие от времени преобразования. Фазовым пространством для такой системы является прямое произведение $M \times R$, наделенное структурой Пуассона с симплектическими слоями *(M,t)*.

У меня с моими итальянскими коллегами возникла идея описать нерелятивистскую механику в полном виде, допускающем зависящие от времени преобразования, как частный случай классической теории поля на расслоениях $Q \to R$ над осью времени *R*. Правда, существенное отличие от классической теории поля состоит в том, что связности на расслоениях $Q \to R$ всегда плоские и поэтому не являются динамическими переменными. Они характеризуют системы отсчета в нерелятивистской механике. Были разработана геометрическая формулировка гамильтоновой (на фазовом пространстве – вертикальном кокасательном расслоении *V*Q* расслоения $Q \to R$) и лагранжевой (на пространстве скоростей J^1Q) неконсервативной механики относительно произвольных систем отсчета [107,112] и в самом общем виде механики, описываемой динамическими уравнениями второго порядка [115,119].

В наиболее полном виде эта формулировка была представлена в 1998 г. в книге [12] и в 2010 г. в книге [18].

Пятый период (1999 – 2010 гг.)

Классическая теория поля: полная геометрическая формулировка

Применение формализма расслоенных пространств и многообразий струй позволило подойти к построению исчерпывающей геометрической формулировки классической теории поля, в которой классические поля представляются сечениями гладких расслоений, а сама классическая теория поля – это лагранжев формализм на гладких расслоениях. При этом надо было довести до полноты сам этот формализм.

Во-первых, мне не нравился вариационный принцип, поскольку он исходит из неизвестно на чем основанного условия минимальности функционала действия.

Во-вторых, дополнительного исследования требовали калибровочные преобразования, которые в квантовой теории заменяются БРСТ преобразованиями, общий случай редуцированных вырожденных лагранжевых систем и вторая теорема Нетер для них.

В-третьих, все надо было сформулировать в глобальном виде на произвольных преобразованиях.

Однако конкретным толчком к разработке развернутой классической теории поля послужил известный в квантовой теории поля БРСТ формализм для гамильтоновых систем и попытки создания его лагранжева аналога.

Наиболее полно геометрическая формулировка классической теории поля изложена в книге [17] и в резюмирующей статье [160].

а) Вариационный бикомплекс

Поскольку рассматривается лагранжев формализм произвольного конечного порядка, его удобно развивать на многообразии Фреше струй бесконечного порядка $J^\infty Y$ расслоения $Y \to X$ из-за наличия операций повышающих порядок. Он формулируется в алгебраическом терминах вариационного бикомплекса, не апеллируя к вариационному принципу. На многообразии $J^\infty Y$ вводится алгебра внешних дифференциальных форм Ω^∞ как прямой предел алгебр внешних дифференциальных форм на многообразиях струй конечного порядка. Ее элементы зависят от струй ограниченного порядка. На этой алгебре определяется так называемый вариационный бикомплекс, элементами которого являются лагранжианы *L*, а одним из операторов кограницы – вариационный оператор δL Эйлера – Лагранжа, ядро которого $\delta L = 0$ является уравнением Эйлера – Лагранжа [10,124].

В качестве следующего этапа необходимо было определить когомологии вариационного бикомплекса. Это оказалось весьма сложной технической задачей. Для ее решения я использовал то, что алгебра Ω^∞ внешних форм является подалгеброй более общей алгебры, элементы которой зависят от струй, порядок которых локально ограничен. На этой алгебре также задается вариационный бикомплекс, когомологии которого определяются согласно абстрактной теореме де Рама. Было доказано, что когомологии вариационного бикомплекса на обеих алгебрах совпадают [123,124,128].

Следствием этого результата являются решение глобальной обратной вариационной задачи (какие лагранжианы *L* вариационно тривиальны, т. е. $\delta L = 0$) и глобальная первая вариационная формула $dL = \delta L + d_H J$, из которой следует первая теорема Нетер.

б) Лагранжева теория четных и нечетных полей на градуированных многообразиях

Построение лагранжевой теории поля предполагает рассмотрение полей как с четной, представляемых сечениями расслоений, так и нечетной грассмановой градуировкой. К последним относятся дираковские фермионные поля, духовые поля и антиполя в БРСТ формализме. Предлагаются разные варианты определения нечетных полей на градуированных многообразиях и супермногообразиях. И те, и другие многообразия описываются в терминах пучков градуированных коммутативных алгебр. Однако градуированные многообразия характеризуются пучками на гладких многообразиях, а супермногообразия получаются склеиванием пучков на супервекторных пространствах. Рассматривая нечетные поля на гладком многообразии, я следовал вышеупомянутой Serre – Swan теореме, обобщив ее на градуированные многообразия [147]. Поэтому лагранжев формализм в терминах вариационного бикомплекса был обобщен на градуированные многообразия [146,147,155].

Согласно известной Batchelor теоремы всякое градуированное многообразие изоморфно так называемому простому градуированному многообразию, характеристическим пучком которого является пучок сечений внешнего произведения некоторого векторного расслоения. В физических приложениях этот изоморфизм обычно изначально задан, и можно ограничиться рассмотрением таких простых градуированных многообразий. Мною была развита геометрия простых градуированных многообразий в терминах геометрии модулей над градуировано коммутативными кольцами в частности, построена дифференциальная градуированная алгебра внешних форм на градуированном многообразии, определены связности (отличавшиеся от связностей на градуированных расслоения) и т. п. [15].

Еще одной проблемой было задание струй нечетных полей. Формализм струй градуированных расслоений для этой цели не подходил, поскольку предполагал рассмотрение полей не на гладких, а на градуированных многообразиях. Поэтому был использован аппарат дифференциальных операторов и модулей струй опять же на модулях над градуировано коммутативными кольцами [146,155].

в) Редуцированные вырожденные лагранжевы системы. Обобщенная вторая теорема Нетер

Всякий оператор Эйлера – Лагранжа удовлетворяет тождества Нетер, которые, однако, могут быть тривиальными. Если они нетривиальны, лагранжева система называется вырожденной. Нетривиальные тождества Нетер всегда подчиняются тождествам Нетер первого порядка, которые тоже могут быть тривиальными. Если они нетривиальны, вырожденная лагранжева система называется редуцированной, и т. д. Проблема состояла в том, чтобы разделить тривиальные и нетривиальные тождества Нетер нулевого и высшего порядков. Такое разделение было осуществлено в терминах когомологий. В результате в самом общем случае удалось дать описание редуцированной вырожденной лагранжевой системы, оператор Эйлера – Лагранжа которой удовлетворяет нетривиальным тождествам Нетер, которые не являются независимыми, а подчиняются нетривиальным тождествам Нетер первого порядка, в свою очередь, удовлетворяющим нетривиальным тождествам Нетер второго порядка и т. д. Иерархия этих тождеств Нетер при определенном когомологическом условии описывается точным коцепным комплексом нечетных и четных антиполей, называемым Kozul – Tate комплексом [147,157].

Это описание было распространено на тождества Нетер для произвольного дифференциального оператора [148].

Получив иерархию тождеств Нетер для редуцированных вырожденных лагранжевых систем, естественно было обобщить на нее вторую теорему Нетер, связывающую тождества Нетер с калибровочными преобразованиями. Это было сделано. Обобщенная вторая теорема Нетер сопоставляет этому комплексу коцепную последовательность, коцепной оператор которой, называемый калибровочным оператором, состоит из калибровочных симметрий лагранжиана системы, калибровочных симметрий первого и высшего порядков, параметризуемых четными и нечетными полями духов [157,161]. Эта коцепная последовательность и Kozul – Tate комплекс тождеств Нетер полностью характеризуют вырожденность лагранжевой системы, что необходимо для ее квантования.

г) Лагранжева БРСТ теория поля

БРСТ теория возникла в рамках квантовой теории калибровочных полей, когда учет вырожденности лагранжиана Янга – Миллса приводил к его замене в производящем функционале некоторым модифицированным лагранжианом, зависящим от духовых полей и инвариантным относительно БРСТ преобразований. Эти преобразования получались заменой функций параметров в калибровочных преобразованиях нечетными духовыми полями и их расширением на сами эти духовые поля. БРСТ теория преимущественно развивается в рамках гамильтонова формализма со связями, но разрабатывался также ее лагранжев вариант. Основными работами в этом направлении были статьи J.Gomis, J.Paris, S.Samuel в 1995 г. и G.Barnish, F.Brandt, M.Henneaux в 2000 в *Physics Reports*, а также предшествующие последней работы этих авторов в *Communication in Mathematical Physics*. В этих работах, однако, использовалось так называемое условие регулярности, наследовавшееся из БРСТ теории гамильтоновых систем со связями и неприменимое к тождествам Нетер, которые, в отличие от алгебраических условий связи, являются дифференциальными тождествами. Кроме того, эта теория развивалась для полей на R^n.

Я интересовался БРСТ теорией, как своего рода «предквантовой» теорией поля – необходимым этапом к процедуре БВ-квантования полей. Поскольку БРСТ оператор нильпотентен, я в 2000 г. провел расчет его относительных и итерированных когомологий на произвольном многообразии *X* [123]. В 2005 г. я вернулся к БРСТ теории в связи с рассмотрением общего типа калибровочных преобразований, зависящих от производных полей произвольного порядка [146]. Позже, занявшись тождествами Нетер, я отказался от уже упоминавшегося условия регулярности и ввел новое когомологическое условие. В 2008 г., получив полное описание редуцированных вырожденных лагранжевых систем, я занялся исследованием их БРСТ расширения. При этом, было показано, что такое расширение возможно, если калибровочный оператор продолжается до нильпотентного БРСТ оператора, действующего на духовые поля. В этом случае вышеупомянутая коцепная последовательность для калибровочного оператора становится комплексом, называемым БРСТ комплексом, а исходный лагранжиан допускает соответствующее БРСТ расширение, зависящее от исходных полей, антиполей, индексирующих тождества Нетер нулевого и высшего порядков, и духовых полей, параметризующих калибровочные нулевого и высшего порядков симметрии [157]. Для ряда полевых моделей такое БРСТ расширение было построено.

д) Обобщенная первая теорема Нетер для калибровочных симметрий

Доказанная обобщенная вторая теорема Нетер привела к рассмотрению наиболее общего вида симметрий лагранжевых систем.

Понятие калибровочного преобразования пришло из калибровочной теории Янга – Миллса на главных расслоениях. Там это автоморфизм главного расслоения. Однако рассмотрение общих лагранжевых систем на расслоении $Y \to X$ потребовало расширить это понятие. А именно, пусть $E \to X$ - некоторое векторное расслоение, инфинитезимальным калибровочным преобразованием на расслоении $Y \to X$ называется дифференциальный оператор на произведении $E \times Y$ со значениями в векторных полях на *Y*, т. е. отображение $u\colon J^k(E \times Y) \to TY$ [146,161]. Это определение формализует условие, что калибровочное преобразование зависит от функций параметров (сечений расслоения $E \to X$) и их производных и в общем случае от производных полевых функций. При этом в обобщенной второй теореме Нетер функции параметров калибровочного преобразования заменяются нечетными духовыми полями [161].

Следует отметить, что калибровочные преобразования не обязательно образуют замкнутую алгебру. Было показано, что это так, если калибровочный оператор расширяется до нильпотентного БРСТ оператора [161].

Калибровочное преобразование *u* называется калибровочной симметрией лагранжиана *L*, если производная Ли лагранжиана *L* вдоль *u* равна нулю. В этом случае выполняется обобщенная первая теорема Нетер. Она является следствием первой вариационной формулы и устанавливает существование сохраняющегося тока вдоль симметрии *u*. При этом в самом общем случае калибровочной симметрии лагранжиана системы полей показано, что соответствующий сохраняющийся ток сводится к суперпотенциалу, т. е. имеет вид $J^\mu = W^\mu + \partial_\nu U^{\mu\nu}$, $U^{\mu\nu} = -U^{\nu\mu}$, где *W* обращается в 0 на уравнениях Эйлера – Лагранжа [162].

Квантовая неавтономная механика: геометрическая формулировка

Формулировка неавтономной классической механики в терминах расслоений побудило распространить эту формулировку на неавтономную квантовую механику.

Хотя существуют разные процедуры квантования: алгебраического, геометрического, деформационного и др. [16], я обратился к методу геометрического квантования, обобщающего каноническое квантование на произвольное симплектическое многообразие и в менее распространенном варианте расширенного на пуассоновы многообразия.

Я разработал геометрическое квантование симплектических слоений, которое, в сравнении с геометрическим квантованием пуассоновых многообразий, имело то важное преимущество, что при ограничении на каждый лист симплектического слоения оно приводило к его квантованию [16,127]. Этот метод геометрического квантования был применим именно к нерелятивистской механике, фазовое пространство *V*Q* которой – это именно симплектическое слоение. Результатом стало квантование неавтономной механики в терминах гильбертовых расслоений над осью времени R [16,18,127]. Причем, поскольку разные связности на конфигурационном пространстве $Q \to R$ характеризуют разные системы отсчета, можно сопоставить квантования, например операторы Гамильтона, в разных классических системах отсчета [18,154].

Механические системы с параметрами

Важным примером неавтономных систем в механике являются системы с зависящими от времени параметрами. Меня они привлекали тем, что в таких системах возможен топологический эффект – геометрическая фаза Бери.

Для описания механических систем с параметрами было предложено применить формализм композиционных расслоений. Конфигурационное пространство такой системы представляется композиционным расслоением $Q \to \Sigma \to R$, где сечения расслоения $\Sigma \to R$ характеризуют зависящие от времени параметры [18,121]. Ключевым является то, что ее лагранжиан и гамильтониан выражаются через вертикальный ковариантный дифференциал и зависят от связности на расслоении $Q \to \Sigma$. Такая связность задает оператор голономии (часть оператора эволюции, зависящую от производных функций параметров) и определяет вышеупомянутую геометрическую фазу Бери. Однако, если не прибегать к адиабатическому условию, выделить эту фазу можно только, если оператор голономии коммутирует с динамической часть оператора эволюции.

В гамильтоновой формулировке фазовое пространство системы с зависящими от времени параметрами представляет собой симплектическое слоение на листы в фиксированный момент времени и с фиксированными значениями параметров. Поэтому к нему может быть применена процедура геометрического квантования симплектических слоений. В результате получаем квантовую систему, характеризуемую расслоением на гильбертовы пространства над базой Σ, связностью на котором является квантовый оператор эволюции, включающий квантовый оператор голономии [18,129].

Впоследствии в качестве примера я рассмотрел вполне интегрируемые гамильтоновы системы с параметрами. В этом случае эволюция переменных «действие» осуществляется только оператором голономии, который определяет на них геометрическую фазу Бери [18,140].

Релятивистская механика: геометрическая формулировка

Струи сечений расслоения являются частным случаем струй подмногообразий. Я обратил на них внимание еще в середине 90-х и использовал для формулировки нерелятивистской механики [10,12].

В отличие от нерелятивистской, релятивистская механика допускает преобразования времени, зависящие от пространственных координат. Поэтому она формулируется в терминах одномерных подмногообразий конфигурационного многообразия *Q*, когда пространством нерелятивистских скоростей является многообразие струй первого порядка $J^1_1 Q$ одномерных подмногообразий многообразия *Q*.

Был построен гамильтонов формализм релятивистской механике и проквантован методом геометрического квантования [137].

Проблема, однако, возникла с построением лагранжева формализма релятивистской механики, поскольку $J^1_1 Q$ не является расслоением над *R*, на котором такой формализм мог бы быть построен. Эту трудность удалось преодолеть только 10 лет спустя [17] и в результате завершить геометрическую формулировку релятивистской механики [18,164].

Интегрируемые гамильтоновы системы: обобщение на случай некомпатных инвариантных подмногообразий

Изучение интегрируемых гамильтоновых систем консервативной механике не лежало в главном русле моих исследований, и они попали в мое поле зрения случайно. Тем более, что трудно было предположить возможность обобщения фундаментальной теоремы Лиувилля – Арнольда о координатах «действие-угол» в окрестности инвариантного подмногообразия вполне интегрируемой гамильтоновой системы.

Эта теорема были доказаны для случая компактных инвариантных подмногообразий. Сначала в ней доказывается, что такое компактное инвариантное подмногообразие - это многомерный тор, а потом этот факт используется тем простым образом, что всякая функция на таком торе – циклическая.

Мне показалось, что это условие можно обойти. Не предполагая изначально компактности инвариантного подмногообразия интегрируемой гамильтоновой системы, можно показать, что это многомерный цилиндр, а потом удалось построить в его окрестности обобщенные координаты «действия-угол». Все это заняло меньше месяца. Приведу хронологию связанных с этим событий.

Я прилетел в Италию 21.11.2001, и 03.12.2001 мы опубликовали в arXiv статью о геометрическом квантовании [221], где еще нет и речи о вполне интегрируемых гамильтоновых системах системах. Как пример такого квантования, я заинтересовался вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами и 14.12.2001 мы опубликовали статью об их квантовании [222]. Наверно, тогда и возникла идея обобщить теорему Лиувилля – Арнольда. Однако 19.12.2001 я опубликовал в arXiv еще одну работу [223] по стабильности Ляпунова, а затем 21.12.2001 я вернулся в Москву. В январе – феврале 2002 я сделал еще четыре новые работы, совсем не связанные с интегрируемыми гамильтоновыми системами. Последняя из них [227], весьма важная, была представлена в arXiv 06.02.2002, а 18.02.2002 была послана первая статья [228] по интегрируемым гамильтоновым системам с некомпактными инвариантными подмногообразиями. Таким образом, конкретно обобщение теоремы Лиувилля-Арнольда, включая написание статьи, заняло около 10 дней, а 09.03.2002 была представлены уже серьезно проработанная статья на эту тему [130] в *Journal of Mathematical Physics*. Затем, 06.04.2002, я вновь прилетел в Италию, и 24.04.2002 мы послали еще одну статью [132] в *Journal of Physics A*.

Далее было естественно обратиться к частично интегрируемым гамильтоновым системам, и в 2003 г. мы обощили на случай некомпактных инвариантных подмногообразий теорему Нехорошева [134,136]. При этом были рассмотрены бигамильтоновы системы, и был описан класс структур Пуассона, относительно которых данная частично интегрируемая гамильтонова система таковой является [136].

Поскольку интегрируемые гамильтоновы системы – это, все таки, не мой предмет, в то время я и не подозревал о существовании суперинтегрируемых гамильтоновых систем. Они «попались мне на глаза» в 2006 во время очередной поездки к моим итальянским коллегам, и мы обобщили характеризующую их теорему Мищенко – Фоменко на случай некомпактных инвариантных подмногообразий [151]. Мы опирались на тот факт, что такое подмногообразие фактически является инвариантным подмногообразием некоторой частично интегрируемой гамильтоновой системы, и использовали наше обобщение теоремы Нехорошева.

Полученные нами результаты касались обобщенных координат “действие-угол» в окрестности некомпактного инвариантного многообразия. Известны были топологические препятствия для существования глобальных координат «действие-угол» для вполне интегрируемых гамильтоновых систем с компактными инвариантными подмногообразиями. Мы обобщили эти результаты на общий некомпактный случай [153]. Более того, оказалось, что фазовое пространство суперинтерируемой системы в общем случае распадается на открытые подобласти, где эта система разная – ее интегралы движения образуют разные алгебры Ли [163]. Примером является система Кеплера, чье фазовое пространство распадается на две области. В одной из них инвариантные подмногообразия – эллипсы, и интегралы движения образуют алгебру Ли *so(3)*, в другой же это – гиперболы, и алгебра Ли интегралов движения – это *so(2,1)*, а граница между ними – парабола.

Примером интегрируемых гамильтоновых систем с некомпактными инвариантными подмногообразиями являются неавтономные интегрируемые гамильтоновы системы, инвариантные подмногообразия которых заведомо содержат ось времени. Теория таких интегрируемых гамильтоновых систем была разработана [18,131].

Используя метод геометрического квантования, мы осуществили квантование в переменных «действие-угол» вполне интегрируемых и суперинтегрируемых гамильтоновых систем в [132,152], включая неавтономные вполне интегрируемые системы [130]. Следует заметить, что, поскольку преобразования между исходными переменными и переменными «действие-угол» не являются линейными, квантования в тех и других переменных не эквивалентны. Однако, как уже отмечалось, именно в переменных «действие-угол» удается построить неадиабатический классической и квантовый операторы голономии для вполне интегрируемой гамильтоновой системы [16,18,140].

В этот период был проведен еще целый ряд исследований: неавтономная механика с неголономными связями [112], классические и квантовые поля Якоби вполне интегрируемых гамильтоновых систем [135], стабильность по Ляпунову относительно зависящих от времени римановых метрик [226,230] и др.

Изложение мой научной биографии на данный момент ограничивается 2010 г., и я надеюсь, что она будет продолжена.

Список научных публикаций (1974 – 2011 гг.)

Книги

1. Д. Д. Иваненко, П. И. Пронин, Г. А. Сарданашвили, *Групповые, геометрические и топологические методы в теории поля. Часть I.* (Изд. МГУ, М., 1983).
2. Д. Д. Иваненко, П. И. Пронин, Г. А. Сарданашвили, *Групповые, геометрические и топологические методы в теории поля. Часть II.* (Изд. МГУ, М., 1983).
3. Д. Д. Иваненко, Г. А. Сарданашвили, *Гравитация* (Наукова Думка, Киев, 1985); 2, 3, 4-е изд. (Изд. УРСС, М., 2004, 2005, 2008, 2010); перевод на испанский: *Gravitacion* (URSS, 2005).
4. Д. Д. Иваненко, П. И. Пронин, Г. А. Сарданашвили, *Калибровочная теория гравитации* (Изд. МГУ, М., 1985).
5. Д.Д. Иваненко, Ю.Н. Обухов, Г.А. Сарданашвили, *Введение в геометрическую теорию калибровочных полей* (Высшая школа, М., 1991) (не опубликована).
6. G. Sardanashvily, O. Zakharov, *Gauge Gravitation Theory* (World Scientific, Singapore, 1992).
7. G. Sardanashvily, *Gauge Theory in Jet Manifolds* (Hadronic Press, Palm Harbor, FL, USA, 1993).
8. G. Sardanashvily, *Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory* (World Scientific, Singapore, 1995).
9. Г. А. Сарданашвили. Современные методы теории поля. 1. Геометрия и классические поля (Изд. УРСС, М., 1996); 2-е изд. (2011).
10. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory* (World Scientific, Singapore, 1997).
11. Г. А. Сарданашвили. Современные методы теории поля. 2. Геометрия и классическая механика (Изд. УРСС, М., 1998); 2-е изд. (2011).
12. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, *Gauge Mechanics* (World Scientific, Singapore, 1998).
13. Г. А. Сарданашвили. Современные методы теории поля. 3. Алгебраическая квантовая теория (Изд. УРСС, М., 1999); 2-е изд. (2011).
14. Г. А. Сарданашвили, Современные методы теории поля. 4. Геометрия и квантовые поля (Изд. УРСС, М., 2000); 2-е изд. (2012).
15. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, *Connections in Classical and Quantum Field Theory* (World Scientific, Singapore, 2000).
16. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, *Geometric and Algebraic Topological Methods in Quantum Mechanics* (World Scientific, Singapore, 2005).
17. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, *Advanced Classical Field Theory* (World Scientific, Singapore, 2009).
18. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, *Geometric Formulation of Classical and Quantum Mechanics* (World Scientific, Singapore, 2010).
19. Г.А. Сарданашвили, *Дмитрий Иваненко – суперзвезда советской физики. Ненаписанные мемуары* (Изд. УРСС, М., 2010).

20. Г.А. Сарданашвили, *Я – ученый. Заметки теорфизика* (Изд. УРСС, М., 2010).
21. Г. А. Сарданашвили. Современные методы теории поля. 5. Гравитация (Изд. УРСС, М., 2011).

Статьи

(неполный список)

22. Г.А. Сарданашвили, Б.Н. Фролов, Гравитация и компенсирующие поля, *Известия вузов СССР, Физика* (1974) N9, 47 – 51.
23. Г.А. Сарданашвили, Компенсация, нелинейность, геометрия, *Известия вузов СССР, Физика* (1974) N12, 128 – 134.
24. Г.А. Сарданашвили, Спинорные представления конформной группы, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1975) N3, 316 – 323.
25. Г.А. Сарданашвили, Компенсация и нелинейная теория, *Известия вузов СССР, Физика* (1975) N12, 7 – 13.
26. Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили, К идее праспинора, *Известия вузов СССР, Физика* (1976) N5, 144 – 146.
27. Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили, Новые аспекты теории компенсации, В сб. *Актуальные проблемы теоретической физики* (Изд. МГУ, М., 1976) 97 – 116.
28. Г.А. Сарданашвили, Компенсация и струнная модель частиц, *Известия вузов СССР, Физика* (1977) N5, 144 – 145.
29. Г.А. Сарданашвили, Системы с взаимодействием и расслоения, *Известия вузов СССР, Физика* (1978) N1, 10 – 14.
30. Г.А. Сарданашвили, К проблеме гравитационного вакуума, *Известия вузов СССР, Физика* (1978) N7, 137 – 139.
31. Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили, К модели праспинора, *Известия вузов СССР, Физика* (1978) N10, 78 – 81.
32. Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили, К модели дискретного пространства-времени, *Известия вузов СССР, Физика* (1978) N11, 144 – 145.
33. Г.А. Сарданашвили, Дискретное пространство-время, *Математическая энциклопедия*, т.2 (Изд. Советская энциклопедия, М., 1978) 205 – 206.
34. Г.А. Сарданашвили, Математические аспекты гипотезы дискретности пространства-времени, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1979) N2, 68 – 69.
35. Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили, Модели с переменной топологией, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1979) N3, 71 – 74.
36. Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили, Расширения эйнштейновской гравитации и перспективы единой калибровочной теории, *Известия вузов СССР, Физика* (1980) N2, 54 – 66.
37. G. Sardanashvily, Gravity as a Goldstone field in the Lorentz gauge theory, *Phys. Lett. A* **75** (1980) 257 – 258.
38. Г.А. Сарданашвили, А.А. Гвоздев, Фазовый переход в модели нелинейного фермионного поля, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1981) N1, 106 – 109.
39. Г.А. Сарданашвили, А.А. Гвоздев, О топологии неподвижных точек ренорм-групп, *Известия вузов СССР, Физика* (1981) N4, 114 – 115.
40. Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили, Принципы относительности и эквивалентности в калибровочной теории гравитации, *Известия вузов СССР, Физика* (1981) N6, 79 – 82.
41. Г.А. Сарданашвили, Калибровочные поля в случае дискретных симметрий, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1981) N5, 41 – 43.
42. Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили, Новые концепции единых теорий и модель праспиноров, В сб. *Тезисы III Всесоюзного совещания по философским вопросам современного естествознания* (Москва, 1981) 53 – 57.
43. D. Ivanenko, G. Sardanashvily, On the relativity and equivalence principles in the gauge theory of gravitation, *Lett. Nuovo Cim*. **30** (1981) 220 – 223.

44. D. Ivanenko, G. Sardanashvily, Preons as prespinors, *Compt. Rend. l'Acad. Bulg. Sci.* **34** (1981) 1073 – 1074.
45. D. Ivanenko, G. Sardanashvily, Relativity principle and equivalence principle in the gauge gravitational theory, *Compt. Rend. l'Acad. Bulg. Sci*. **34** (1981) 1237 – 1239.
46. Г.А. Сарданашвили, В.П. Янчевский, О топологии космологических моделей вблизи критических точек, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1982) N4, 71 – 73.
47. Г.А. Сарданашвили, В.П. Янчевский, Пространственно-временные слоения в теории гравитации, *Известия вузов СССР, Физика* (1982) N9, 20 – 23.
48. D. Ivanenko, G. Sardanashvily, Foliation analysis of gravitational singularities, *Phys. Lett. A* **91** (1982) 341 – 344.
49. Г.А. Сарданашвили, А.В. Субботин, Неинвариантность вакуума в калибровочных моделях, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1983) N4, 58 – 60.
50. Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили, В.П. Янчевский, Гравитационные сингулярности как особенности пространственно-временных слоений, В сб. *Применение методов классической и квантовой теории к решению физических задач* (Изд. Куйбышевского ун-та, Куйбышев, 1983) 6 – 18.
51. G. Sardanashvily, What are the Poincaré gauge fields? *Czech. J. Phys. B* **33** (1983) 610 – 615.
52. D. Ivanenko, G. Sardanashvily, The gauge treatment of gravity, *Phys. Rep*. **94** (1983) 1 – 45.
53. В.Д. Джунушалиев, Г.А. Сарданашвили, Калибровочные поля со скрытой топологией, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1984) N4, 66 – 68.
54. Г.А. Сарданашвили, А.В. Субботин, Хиггсовские поля как конденсат, *Известия вузов СССР, Физика* (1984) N7, 8 – 12.
55. Г.А. Сарданашвили, Об определении групп калибровочных преобразований, *Известия вузов СССР, Физика* (1984) N12, 52 – 57.
56. Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили, В.П. Янчевский, О критерии гравитационных сингулярностей, В сб. *Фундаментальные взаимодействия* (Изд. МГПИ, М., 1984) 176 – 187.
57. G. Sardanashvily, On the definition of gauge transformation group in gauge theory, *Ann. der Physik* **41** (1984) 23 – 28.
58. G. Sardanashvily, Space-time foliations, *Acta Phys. Hung*. **57** (1985) 31 – 40.
59. Г.А. Сарданашвили, Б.Л. Ихлов, Хиггсовский вакуум в теории гравитации, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1986) N2, 17 – 19.
60. Г.А. Сарданашвили, О.А. Захаров, Суперсимметрия элементарных частиц, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1986) N3, 64 – 66.
61. В.Д. Джунушалиев, Г.А. Сарданашвили, Суперпространство Уиллера – ДеВитта и топологические переходы в теории гравитации, *Известия вузов СССР, Физика* (1986) N12, 73 – 75.
62. Д.Д. Иваненко, Г.А. Сарданашвили, Голдстоновская теория гравитации, В сб. *Проблемы гравитации* (Изд. МГУ, М., 1986) 108 – 129.
63. D. Ivanenko, G. Sardanashvily, Goldstone type supergravity, *Progr. Theor. Phys*. **75** (1986) 969 – 976.
64. G. Sardanashvily, O. Zakharov, Fiber bundle formalism for supergravity, *Pramana-J. Phys*. **26** (1986) L295 – L299.
65. G. Sardanashvily, V. Yanchevsky, Caustics of space-time foliations in General Relativity, *Acta Phys. Polon. B* **17** (1986) 1017 – 1028.
66. D. Ivanenko, G. Sardanashvily, On the Goldstone gravitation theory, *Pramana-J. Phys.* **29** (1987) 21 – 37.
67. G. Sardanashvily, M. Gogberashvily, The dislocation treatment of gauge fields of space-time translations, *Mod. Phys. Lett. A* **2** (1987) 609 – 616.
68. Г.А. Сарданашвили, А.Е. Микула, Экранирование кварк-кваркового потенциала, *Известия вузов СССР, Физика* (1988) N2, 82 – 85.
69. Г.А. Сарданашвили, М.Я. Гогберашвили, Гравитация и калибровочная теория дислокаций, *Известия вузов СССР, Физика* (1988) N3, 71 – 74.
70. Г.А. Сарданашвили, Каустики пространственно-временных слоений, *вузов СССР, Физика* (1988) N9, 32 – 37.
71. Г.А. Сарданашвили, Э.Г. Тимошенко, Каустики гравитационных волн, В сб. *Материалы VII Всесоюзной конференции «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации»* (Ереван, 1988) 125 – 127.

72. G. Sardanashvily, M. Gogberashvily, Translation gauge fields and space-time dislocations, *Ann. der Physik* **45** (1988) 297 – 302.
73. Г.А. Сарданашвили, Э.Г. Тимошенко, Гравитационные сингулярности типа каустик, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1989) N1, 75 – 77.
74. Г.А. Сарданашвили, О.А. Захаров, О хиггсовском свойстве гравитационного поля, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1989) N5, 70 – 72.
75. Г.А. Сарданашвили, М.Я. Гогберашвили, Калибровочная теория трансляций и поправки к ньютоновскому потенциалу, В сб. *Экспериментальные тесты теории гравитации* (Изд. МГУ, М., 1989) 51 – 55.
76. G. Sardanashvily, B. Ikhlov, Higgs gravitation vacuum in the gauge gravitation theory, *Acta Phys. Hung.* **65** (1989) 79 – 84.
77. G. Sardanashvily, O. Zakharov, Gauge transformations in gravitation theory, *Acta Phys. Polon. B* **20** (1989) 651 – 658.
78. G. Sardanashvily, O. Zakharov, On the Higgs feature of gravity, *Pramana-J. Phys*. **33** (1989) 547 – 554.
79. Г.А. Сарданашвили, Э.Г. Тимошенко, Калибровочная модель пятой силы, *Вестник МГУ, Физика, Астрономия* (1990) N4, 70 – 72.
80. О.А. Захаров, Г.А. Сарданашвили, О функциональных интегралах в теории поля, *Известия вузов СССР, Физика* (1990) N9, 53 – 58.
81. L. Mangiarotti, K. Marathe, G. Sardanashvily, Equivalence principle, Lorentz structures and theories of gravitation, *Nuovo Cim. B* **105** (1990) 757 – 770.
82. G. Sardanashvily, Spontaneous symmetry breaking in the gauge gravitation theory, *Preprint IC/90/73 ICTP*, Triest.
83. G. Sardanashvily, O.Zakharov, On generating functionals in algebraic quantum field theory. Fermion fields, *Preprint IC/90/130 ICTP*, Triest.
84. G.Sardanashvily, The gauge model of the fifth force, *Acta Phys. Polon. B* **21** (1990) 583 – 587.
85. Г.А. Сарданашвили, Спонтанное нарушение симметрий в калибровочной теории гравитации, В сб. *Перспективы единой теории* (Изд. МГУ, М., 1991) 182 – 204.
86. G. Sardanashvily, O. Zakharov, On functional integrals in quantum field theory, *Rep. Math. Phys.* **29** (1991) 101 – 108.
87. G. Sardanashvily, Gauge gravitation theory, *Int. J. Theor. Phys.* **30** (1991) 721 – 735.
88. G. Sardanashvily, Gauge theory of gravity, In Vol. *Problems of Modern Physics* (World Scientific, Singapore, 1991) 75 – 99.
89. G. Sardanashvily, Higgs vacuum from the axiomatic viewpoint, *Nuovo Cim. A* **104** (1991) 105 – 111.
90. G. Sardanashvily, Spontaneous symmetry breaking and multidimensional coordinate space, *Nuovo Cim. B* **106** (1991) 575 – 578.
91. G. Sardanashvily, On the geometry of spontaneous symmetry breaking, *J. Math. Phys*. **33** (1992) 1546 – 1549.
92. G. Sardanashvily, O.Zakharov, The multimomentum Hamiltonian formalism for field systems, In Vol. *Proceedings of the XX International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics* (World Scientific, Singapore, 1992) 387 – 396.
93. G. Sardanashvily, O. Zakharov, Multimomentum Hamiltonian formalism in gauge theory, *Int. J. Theor. Phys.* **31** (1992) 1477 – 1504.
94. G. Sardanashvily, O. Zakharov, On application of the Hamilton formalism in fibred manifolds to field theory, *Diff. Geom. Appl*. **3** (1993) 245 – 263.
95. G. Sardanashvily, Multimomentum Hamiltonian formalism. Energy-momentum conservation laws, В сб. *Проблемы современной физики*, Вып. 1 (Изд. Белка, М., 1994) 54 – 67.
96. G. Sardanashvily, Multimomentum canonical quantization of fields, *Hadronic Journal* **17** (1994) 227 – 245.
97. G. Sardanashvily, Constraint field systems in multimomentum canonical variables, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 6584 – 6603.
98. G. Sardanashvily, Multimomentum Hamiltonian formalism in quantum field theory, *Int. J. Theor. Phys.* **33** (1994) 2373 – 2387.
99. G. Giachetta, G. Sardanashvily, Energy-momentum superpotentials in gravitation theory, In Vol. *Gravity, Particles and Space-Time* (World Scientific, Singapore, 1996) 471 – 506.
100. G. Sardanashvily, Gravity as a Higgs field, In Vol. *New Frontiers in Gravitation* (Hadronic Press, Palm Harbor, FL, 1996) 299 – 336.
101. G. Giachetta, G. Sardanashvily, Stress-energy-momentum of affine-metric gravity. Generalized Komar superportential, *Class. Quant. Grav.* **13** (1996) L67 – L71.

102. G. Sardanashvily, Relativistic theory of gravity, In Vol. *Proceedings of the XIX Workshop on High Energy Physics and Field Theory (Protvino, 1996)* (IHEP Press, Protvino, 1997) 184 – 196.
103. G. Sardanashvily, Stress-energy-momentum tensors in constraint field theories, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 847 – 866.
104. G. Sardanashvily, Energy conservation laws and antimatter, *Hyperfine Interaction* **109** (1997) 117 – 122.
105. G. Sardanashvily, Stress-energy-momentum conservation law in gauge gravitation theory, *Class. Quant. Grav*. **14** (1997) 1371 – 1386.
106. Г.А. Сарданашвили, Фоновая геометрия в калибровочной теории гравитации, *Теоретическая и математическая физика* **114** (1998) 470 – 480.
107. G. Sardanashvily, Hamiltonian time-dependent mechanics, *J. Math. Phys*. **39** (1998) 2714 – 2729.
108. G. Sardanashvily, Covariant spin structure, *J. Math. Phys*. **39** (1998) 4874 – 4890.
109. G. Sardanashvily, Universal spin structure, *Int. J. Theor. Phys.* **37** (1998) 1275 – 1297.
110. G. Sardanashvily, General covariant transformations of spin structure, *Grav. & Cosm.* **4** (1998) 61 – 68.
111. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Nonrelativistic equations of motion as geodesic equations, *Grav.& Cosmol.* **4** (1998) 249 – 256.
112. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Nonholonomic constraints in time-dependent mechanics, *J. Math. Phys*. **40** (1999) 1376 – 1390.
113. R. Giambò, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Relativistic and non-relativistic geodesic equations, *Nuovo Cim. B* **114** (1999) 749 – 766.
114. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, BRST-extended polysymplectic Hamiltonian formalism, *Nuovo Cim. B* **114** (1999) 939 – 955.
115. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Nonrelativistic geodesic motion, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 2703 – 2717.
116. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Covariant Hamiltonian equations for field theory, *J. Phys. A* **32** (1999) 6629 – 6642.
117. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G.Sardanashvily, Energy-momentum conservation laws. Gauge approach, *Grav. & Cosmol.* **5** (1999) 92 – 100.
118. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, The Koszul-Tate cohomology in covariant Hamiltonian formalism, *Mod. Phys. Lett. A* **14** (1999) 2201 – 2209.
119. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, On the geodesic form of second order dynamic equations, *J. Math. Phys*. **41** (2000) 835 – 844.
120. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Constraints in Hamiltonian time-dependent mechanics, *J. Math. Phys*. **41** (2000) 2858 – 2876.
121. G. Sardanashvily, Classical and quantum mechanics with time-dependent parameters, *J. Math. Phys*. **41** (2000) 5245 – 5255.
122. G. Sardanashvily, SUSY-extended field theory, *Int. J. Mod. Phys. A***15** (2000) 3095 – 3112.
123. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Iterated BRST cohomology, *Lett. Math. Phys.* **53** (2000) 143 – 156.
124. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Cohomology of the infinite-order jet space and the inverse problem, *J. Math. Phys*. **42** (2001) 4272 – 4282.
125. G. Sardanashvily, Cohomology of the variational complex in field-antifield BRST theory, *Mod. Phys. Lett. A* **16** (2001) 1531 – 1541.
126. Г.А. Сарданашвили, Классическая калибровочная теория гравитации, *Теоретическая и математическая физика* **132** (2002) 318 – 328.
127. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Covariant geometric quantization of nonreletavistic time-dependent mechanics, *J. Math. Phys*. **43** (2002) 56 – 68.
128. G. Sardanashvily, Cohomology of the variational complex in the class of exterior forms of finite jet order, *Int. J. Math. and Math. Sci.* **30** (2002) 39 – 48.
129. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Geometric quantization of mechanical systems with time-dependent parameters, *J. Math. Phys*. **43** (2002) 2882 – 2894.
130. E. Fiorani, G. Giachetta, G. Sardanashvily, Geometric quantization of time-dependent completely integrable Hamiltonian systems, *J. Math. Phys*. **43** (2002) 5013 – 5025.
131. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Action-angle coordinates for time-dependent completely integrable Hamiltonian systems, *J. Phys. A* **35** (2002) L439 – L445.
132. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Geometric quantization of completely integrable Hamiltonian systems in the action-angle variables, *Phys. Lett. A* **301** (2002) 53 – 57.

133. G. Sardanashvily, Nonequivalent representations of nuclear algebras of canonical commutation relations. Quantum fields, *Int. J. Theor. Phys.* **41** (2002) 1541 – 1562.
134. E. Fiorani, G. Giachetta, G. Sardanashvily, The Liouville-Arnold-Nekhoroshev theorem for non-compact invariant manifolds, *J. Phys. A* **36** (2003) L101 – L107.
135. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Jacobi fields of completely integrable Hamiltonian systems, *Phys. Lett. A* **309** (2003) 382 – 386.
136. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Bi-Hamiltonian partially integrable systems, *J. Math. Phys*. **44** (2003) 1984 – 1997.
137. G. Sardanashvily, Geometric quantization of relativistic Hamiltonian mechanics, *Int. J. Theor. Phys***.** **42** (2003) 697 – 704.
138. E. Fiorani, G. Giachetta, G. Sardanashvily, An extension of the Liouville-Arnold theorem for the non-compact space, *Nuovo Cimento B* **118** (2003) 307 – 317.
139. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Noether conservation laws in higher-dimensional Chern-Simons theory, *Mod. Phys. Lett. A* **18** (2003) 2645 – 2651.
140. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Nonadiabatic holonomy operators in classical and quantum completely integrable systems, *J. Math. Phys.* **45** (2004) 76 – 86.
141. G. Sardanashvily, G. Giachetta, Preface: What is geometry in quantum theory, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **1** (2004) 1 – 22.
142. D. Bashkirov, G. Sardanashvily, Covariant Hamiltonian field theory. Path integral quantization, *Int. J. Theor. Phys***.** **43** (2004) 1317 – 1333.
143. D. Bashkirov, G. Sardanashvily, On the BV quantization of gauge gravitation theory, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **2** (2005) 203 – 226.
144. D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Noether's second theorem for BRST symmetries, *J. Math. Phys*. **46** (2005) 053517.
145. D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Noether's second theorem in a general setting. Reducible gauge theories, *J. Phys. A* **38** (2005) 5329 – 5344.
146. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Lagrangian supersymmetries depending on derivatives. Global analysis and cohomology, *Commun. Math. Phys*. **259** (2005) 103 – 128.
147. D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, The antifield Koszul – Tate complex of reducible Noether identities, *J. Math. Phys*. **46** (2005) 103513.
148. G. Sardanashvily, Noether identities of a differential operator. The Koszul-Tate complex, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **2** (2005) 873 – 886.
149. G. Sardanashvily, Gauge gravitation theory from the geometric viewpoint, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **3** (2006) N1, v – xx.
150. G. Sardanashvily, Geometry of classical Higgs fields, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **3** (2006) 139 – 148.
151. E. Fiorani, G. Sardanashvily, Noncommutative integrability on noncompact invariant manifolds, *J. Phys. A* **39** (2006) 14035 – 14042.
152. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Quantization of noncommutative completely integrable Hamiltonian systems, *Phys. Lett. A* **362** (2007) 138 – 142.
153. E. Fiorani, G. Sardanashvily, Global action-angle coordinates for completely integrable systems with noncompact invariant submanifolds, *J. Math. Phys*. **48** (2007) 032901.
154. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Quantum mechanics with respect to different reference frames, *J. Math. Phys*. **48** (2007) 082104.
155. G. Sardanashvily, Graded infinite order jet manifolds, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **4** (2007) 1335 – 1362.
156. E. Fiorani, G. Sardanashvily, Noncommutative integrability on noncompact invariant manifolds, *Spanish Roy. Math. Soc.* **11** (2007) 280 – 284.
157. D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, The KT-BRST complex of a degenerate Lagrangian system, *Lett. Math. Phys*. **83** (2008) 237 – 252.
158. G. Sardanashvily, Mathematical models of spontaneous symmetry breaking, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **5** (2008) N2, v – xvi.
159. G. Sardanashvily, Supermetrics on supermanifolds, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **5** (2008) 271 – 286.
160. G. Sardanashvily, Classical field theory. Advanced mathematical formulation, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **5** (2008) 1163 – 1189.
161. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, On the notion of gauge symmetries of generic Lagrangian field theory, *J. Math. Phys*. **50** (2009) 012903.
162. G. Sardanashvily, Gauge conservation laws in a general setting. Superpotential, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **6** (2009) 1046 – 1057.

163. G. Sardanashvily, Superintegrable Hamiltonian systems with noncompact invariant submanifolds. Kepler system, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **6** (2009) 1391 – 1420.
164. G. Sardanashvily, Relativistic mechanics in a general setting, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **7** (2010) 1307 – 1319.

Статьи в *arXiv*
(Los Alamos National Laboratory, USA)

165. G. Sardanashvily, Multimomentum Hamiltonian formalism in field theory, **hep-th/9403172**.
166. G. Sardanashvily, Multimomentum Hamiltonian formalism in quantum field theory, **hep-th/9404001**.
167. G. Sardanashvily, Gravitation singularities of the caustic type, **hep-th/9404024**.
168. G. Sardanashvily, Multimomentum Hamiltonian formalism in field theory. Geometric supplementary, **hep-th/9405013**.
169. G. Sardanashvily, Gravity as a Higgs field. I. Geometric equivalence principle, **gr-qc/9405013**.
170. G. Sardanashvily, Gravity as a Higgs field. II. Fermion-gravitation complex, **gr-qc/9407032**.
171. G. Sardanashvily, Hamiltonian field systems on composite manifolds, **hep-th/9409159**.
172. G. Sardanashvily, True functional integrals in algebraic quantum field theory, **hep-th/9410107**.
173. G. Sardanashvily, Gauge gravitation theory. What is world geometry? **gr-qc/9410045**.
174. G. Sardanashvily, Gravity as a Higgs field. III. Nongravitational deviations of gravitational fields, **gr-qc/9411013**.
175. G. Sardanashvily, Five lectures on the jet manifold methods in field theory, **hep-th/9411089**.
176. G. Sardanashvily, Energy-momentum conservation law in Hamiltonian field theory, **gr-qc/9412041**.
177. G. Sardanashvily, Differential geometry of composite fibred manifolds, **dg-ga/9412002**.
178. G. Sardanashvily, Energy momentum conservation laws in affine-metric gravitation theory, **gr-qc/9501009**.
179. G. Sardanashvily, Composite spinor bundles in gravitation theory, **gr-qc/9502022**.
180. G. Sardanashvily, Stress-energy-momentum tensor in constrained field theories, **gr-qc/9503038**.
181. G. Sardanashvily, Fermions in gravitation theory, **gr-qc/9508046**.
182. G. Giachetta, G. Sardanashvily, Stress-energy-momentum tensors in Lagrangian field theory. Part 1. Superpotentials, **gr-qc/950061**.
183. G. Giachetta, G. Sardanashvily, Stress-energy-momentum of affine-metric gravity. Generalized Komar superportential, **gr-qc/9511008**.
184. G. Giachetta, G. Sardanashvily, Dirac equation in gauge and affine-metric gravitation theories, **gr-qc/9511035**.
185. G. Giachetta, G. Sardanashvily, Stress-energy-momentum tensors in Lagrangian field theory. Part 2. Gravitational superpotential, **gr-qc/9511040**.
186. G. Sardanashvily, K. Kirillov, Energy-momentum in gauge gravitation theory, **gr-qc/9611068**.
187. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Differential geometry of time dependent mechanics, **dg-ga/9702020**.
188. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Universal spin structure in gauge gravitation theory, **gr-qc/9705058**.
189. G. Sardanashvily, Background geometry in gauge gravitation theory, **gr-qc/9709054**.
190. G. Sardanashvily, Non-symplectic geometry of first order time-dependent mechanics, **dg-ga/9710003**.
191. G. Sardanashvily, Covariant spin structure, **gr-qc/9711043**.
192. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Relativistic and non-relativistic equations of motion, **gr-qc/9805081**.
193. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Dynamic connections in analytical mechanics, **math-ph/9805024**.
194. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Nonholonomic constraints in time-dependent mechanics, **math-ph/9807014**.
195. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Energy-momentum and gauge conservation laws, **gr-qc/9807054**.

196. G. Sardanashvily, On the geometric arena of supermechanics, **math-ph/9903040**.
197. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, On the bracket problem in covariant Hamiltonian field theory, **hep-th/9903220**.
198. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Covariant Hamiltonian field theory, **hep-th/9904062**.
199. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Constraints in Hamiltonian time-dependent mechanics, **math-ph/9904028**.
200. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Non-relativistic geodesic equations, **gr-qc/9905107**.
201. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, On the geodesic form of non-relativistic dynamic equations, **math-ph/9906001**.
202. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, The Koszul-Tate cohomology in covariant Hamiltonian formalism, **hep-th/9907181**.
203. G. Sardanashvily, SUSY-extended field theory, **hep-th/9911108**.
204. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Jets and connections in commutative and non-commutative geometry, **math-ph/9911030**.
205. G. Sardanashvily, Quantum mechanics with time-dependent parameters, **quant-ph/0004005**.
206. G. Sardanashvily, On quantum evolution as a parallel transport, **quant-ph/0004050**.
207. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, On the obstruction to the exactness of the variational bicomplex, **math-ph/0004024**.
208. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, On the global calculus in local cohomology in BRST theory, **hep-th/0005023**.
209. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Cohomology of the infinite-order jet space, **math-ph/0005009**.
210. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Cohomology of the variational complex, **math-ph/0005010**.
211. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Cohomology of the variational bicomplex on the infinite order jet space, **math/0006074**.
212. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Global calculus in local BRST cohomology, **hep-th/0006143**.
213. G. Sardanashvily, Constraints in polysymplectic (covariant) Hamiltonian formalism, **math-ph/0008024**.
214. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Quantum Jacobi fields in mechanics, **quant-ph/0011093**.
215. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Covariant geometric quantization of non-relativistic Hamiltonian mechanics, **quant-ph/0012036**.
216. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Geometric quantization of non relativistic and relativistic Hamiltonian mechanics, **math-ph/0012030**.
217. G. Sardanashvily, Remark on the Serre-Swan theorem for non-compact manifolds, **math-ph/0102016**.
218. G. Sardanashvily, Cohomology of the variational complex in BRST theory, **hep-th/0102175**.
219. G. Sardanashvily, Differential geometry of fibre bundles over foliated manifolds, **math-ph/0108020**.
220. G. Sardanashvily, Geometric quantization of symplectic foliations, **math/0110196**.
221. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Geometric quantization of mechanical systems with time-dependent parameters, **quant-ph/0112011**.
222. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Geometric quantization of completely integrable Hamiltonian systems in the action-angle variables, **math-ph/0112083**.
223. G. Sardanashvily, The covariant Lyapunov tensor and the Lyapunov stability with respect to time-dependent Riemannian metrics, **math-ph/0112044**.
224. G. Sardanashvily, Holonomic control operators in quantum completely integrable Hamiltonian systems, **quant-ph/0201050**.
225. G. Sardanashvily, On the geometric foundation of classical gauge gravitation theory, **gr-qc/0201074**.
226. G. Sardanashvily, The Lyapunov stability of first order dynamic equations with respect to time-dependent Riemannian metrics, **nlin/0201060**.
227. G. Sardanashvily, Nonequivalent representations of nuclear algebras of canonical commutation relations. Quantum fields, **hep-th/0202038**.
228. E. Fiorani, G. Giachetta, G. Sardanashvily, Geometric quantization of time-dependent completely integrable Hamiltonian systems, **quant-ph/0202093**.

229. G. Sardanashvily, Deformation quantization in covariant Hamiltonian field theory, **hep-th/0203044**.
230. G. Sardanashvily, The Lyapunov stability of first order dynamic equations with respect to time-dependent Riemannian metrics. An example, **nlin/0203031**.
231. G. Sardanashvily, Ten lectures on jet manifolds in classical and quantum field theory, **math-ph/0203040**.
232. G. Sardanashvily, Energy-momentum conservation laws in gauge theory with broken invariance, **hep-th/0203275**.
233. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Action-angle coordinates for time-dependent completely integrable Hamiltonian systems, **math/0204151**.
234. E. Fiorani, G. Giachetta, G. Sardanashvily, Action-angle coordinates around a noncompact invariant manifold of a completely integrable Hamiltonian system, **math/0205122**.
235. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Jacobi fields of completely integrable Hamiltonian systems, **math-ph/0205026**.
236. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Holonomy control operators in classical and quantum completely integrable Hamiltonian systems, **math/0205244**.
237. G. Sardanashvily, Energy-momentum tensors in gauge theory, **hep-th/0207021**.
238. G. Sardanashvily, Classical gauge theory of gravity, **gr-qc/0208054**.
239. G. Sardanashvily, Geometric quantization of relativistic Hamiltonian mechanics, **gr-qc/0208073**.
240. G. Sardanashvily, The bracket and the evolution operator in covariant Hamiltonian field theory, **math-ph/0209001**.
241. G. Sardanashvily, Hopf algebras of canonical commutation relations, **quant-ph/0209066**.
242. E. Fiorani, G. Giachetta, G. Sardanashvily, The Liouville-Arnold-Nekhoroshev theorem for non-compact invariant manifolds, **math/0210346**.
243. G. Sardanashvily, Recursion operators between degenerate Poisson structures, **math/0211025**.
244. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, A note on the KAM theorem for partially integrable Hamiltonian systems, **math/0211211**.
245. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Bi-Hamiltonian partially integrable systems, **math/0211463**.
246. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Non-adiabatic holonomy operators in classical and quantum completely integrable systems, **quant-ph/0212108**.
247. G. Sardanashvily, The quasi-periodic stability (the KAM theorem) for partially integrable systems, **math/0301068**.
248. G. Sardanashvily, The gauge condition in gravitation theory with a background metric, **gr-qc/0301066**.
249. G. Sardanashvily, Noether conservation laws issue from the gauge invariance of an Euler-Lagrange operator, but not a Lagrangian, **math-ph/0302012**.
250. G. Sardanashvily, Noether conservation laws in classical mechanics, **math-ph/0302027**.
251. G. Sardanashvily, Noether conservation laws in quantum mechanics, **quant-ph/0302123**.
252. G. Sardanashvily, Noether conservation laws in infinite order Lagrangian formalism, **math-ph/0302063**.
253. G. Sardanashvily, Gauge conservation laws in higher-dimensional Chern-Simons models, **hep-th/0303059**.
254. G. Sardanashvily, Energy-momentum conservation laws in higher-dimensional Chern-Simons models, **hep-th/0303148**.
255. G. Sardanashvily, On the notion of a differential operator in noncommutative geometry, **math-ph/0303062**.
256. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Generalized Lagrangian symmetries depending on higher order derivatives. Conservation laws and characteristic equation, **math-ph/0304025**.
257. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Lagrangian symmetries and supersymmetries depending on derivatives. Conservation laws and cohomology, **math-ph/0305014**.
258. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Lagrangian symmetries and supersymmetries depending on derivatives. Global analysis, **math/0305303**.
259. G. Sardanashvily, On the definition of higher order differential operators in noncommutative geometry, **math-ph/0308013**.
260. G. Sardanashvily, Jets of modules in noncommutative geometry, **math-ph/0310046**.
261. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Noether conservation laws in higher-dimensional Chern-Simons models, **math-ph/0310067**.

262. G. Sardanashvily, Algebras of infinite qubit systems, **quant-ph/0311080**.
263. G. Sardanashvily, G. Giachetta, What is geometry in quantum theory, **hep-th/0401080**.
264. B. Bashkirov, G. Sardanashvily, The BRST extension of gauge non-invariant Lagrangians, **hep-th/0401176**.
265. B. Bashkirov, G. Sardanashvily, Covariant Hamiltonian field theory. Path integral quantization, **hep-th/0402057**.
266. G. Sardanashvily, 50 Years of gauge theory. Mathematical aspects, **hep-th/0406047**.
267. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Lagrangian supersymmetries depending on derivatives. Global analysis and cohomology, **hep-th/0407185**.
268. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Geometric and algebraic topological methods in quantum mechanics, **math-ph/041040**.
269. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Polysymplectic Hamiltonian formalism and some quantum outcomes, **hep-th/0411005**.
270. B. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Noether's second theorem in a general setting. Reducible gauge theories, **math/0411070**.
271. G. Sardanashvily, On algebras of gauge transformations in a general setting, **math/0411635**.
272. B. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Noether's second theorem for BRST symmetries, **math-ph/0412034**.
273. B. Bashkirov, G. Sardanashvily, Space-time BRST symmetries, **hep-th/0412232**.
274. D. Bashkirov, G. Sardanashvily, On the BV quantization of gauge gravitation theory**, hep-th/0501254.**
275. G. Sardanashvily, The variational bicomplex on graded manifolds and its cohomology, **math/0504529**.
276. G. Sardanashvily, Noether identities of a differential operator. The Koszul-Tate complex, **math/0506103**.
277. D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, The antifield Koszul-Tate complex of reducible Noether identities, **math-ph/0506034**.
278. G. Sardanashvily, Geometry of classical Higgs fields, **hep-th/0510168**.
279. D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, On necessary and sufficient conditions of the BV quantization of a generic Lagrangian field theory, **hep-th/0511014**.
280. G. Sardanashvily, On the mathematical hypothesis of phenomena like the confinement, **hep-th/0511111**.
281. G. Sardanashvily, Gauge gravitation theory from the geometric viewpoint, **gr-qc/0512115**.
282. D. Bashkirov, G. Sardanashvily, Lagrangian BV quantization of Ward identities, **hep-th/0602213.**
283. G. Sardanashvily, Green function identities in Euclidean quantum field theory, **hep-th/0604003.**
284. E. Fiorani, G. Sardanashvily, Noncommutative integrability on noncompact invariant manifolds, **math/0604104**.
285. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Quantization of noncommutative completely integrable Hamiltonian systems, **quant-ph/0604151**.
286. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Lagrangian and Hamiltonian dynamics of submanifolds, **math-ph/0604066.**
287. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Noether’s inverse second theorem in homology terms, **math-ph/0605618.**
288. G. Sardanashvily, Reduction of principal superbundles, Higgs superfields, and supermetric, **hep-th/0609070.**
289. E. Fiorani, G. Sardanashvily, Global action-angle coordinates for completely integrable systems with noncompact invariant submanifolds, **math/0610790.**
290. G. Sardanashvily, Axiomatic classical (prequantum) field theory. Jet formalism, **hep-th/0612182.**
291. G. Sardanashvily, A dilemma of nonequivalent definitions of differential operators in noncommutative geometry, **math/0702850.**
292. D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, The KT-BRST complex of a degenerate Lagrangian system, **math-ph/0702097.**
293. L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Quantum mechanics with respect to different reference frames, **quant-ph/0703266.**
294. G. Sardanashvily, Axiomatic quantum field theory. Jet formalism, **0707.4257.**
295. G. Sardanashvily, Graded infinite order jet manifolds, **0708.2434.**
296. G. Sardanashvily, Relative nonrelativistic mechanics, **0708.2998.**

297. G. Sardanashvily, On the mathematical origin of quantum space-time, **0709.3475.**
298. G. Sardanashvily, Supermetrics on supermanifolds, **0801.0088.**
299. G. Sardanashvily, Mathematical models of spontaneous symmetry breaking, **0802.2382.**
300. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, On the notion of gauge symmetries of generic Lagrangian field theory, **0807.3003.**
301. G. Sardanashvily, Classical field theory. Advanced mathematical formulation, **0811.0331.**
302. G. Sardanashvily, Superintegrable nonautonomous Hamiltonian systems, **0905.3842.**
303. G. Sardanashvily, On incompleteness of classical field theory, **0905.3912.**
304. G. Sardanashvily, Gauge conservation laws in a general setting. Superpotential, **0906.1732.**
305. G. Sardanashvily, Fiber bundles, jet manifolds and Lagrangian theory. Lectures for theoreticians, **0908.1886.**
306. G. Sardanashvily, Lectures on supergeometry, **0910.0092.**
307. G. Sardanashvily, Lectures on differential geometry of modules and rings, **0910.1515.**
308. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Advanced mechanics. Mathematical introduction, **0911.0411.**
309. G. Sardanashvily, Superintegrable Hamiltonian systems with noncompact invariant submanifolds. Kepler system, **0911.0992.**
310. G. Sardanashvily, Differential operators on Lie and graded Lie algebras, **1004.0058.**
311. G. Sardanashvily, Relativistic mechanics in a general setting, **1005.1212**.
312. G. Sardanashvily, Differential operators on Schwartz distribution. Jet formalism, **1010.4768.**

Приложение. Из книги: «Я – ученый. Заметки теорфизика»

В качестве приложения приведены три автобиографических раздела из моей книги «*Я – ученый. Заметки теорфизика*» (УРСС, 2010).

До физфака

Родился я 13 марта, но это «несчастливое» число никак до сих пор не сказалось на моей судьбе. Меня нисколько не занимают «счастливые» и «несчастливые» числа, даты и приметы, гороскопы и предсказания.

Еще в XVI веке Леонардо да Винчи после одной из битв тщательно осмотрел прямо на поле боя ладони погибших, но не обнаружил никакой общей закономерности линий, которая предрекала бы им столь печальную судьбу – вполне научных подход.

Мои родители были студентами «керосинки» (ныне Университет нефти и газа) и жили в общежитии на Студенческой. Его здания и сейчас существуют, и даже небольшая горка, с которой я катался зимой (я недавно там был). Они делили с другой парой «женатиков» маленькую комнатушку, поделенную пополам занавеской. Поэтому меня в несколько месяцев от роду отправили в Мелекесс (переименованный потом в Димитровград), к бабушке (по линии мамы, у папы родители умерли). С ней я жил безвыездно до трех лет, а потом месяцами – до школы. Я не помню, чтобы меня это сколько-нибудь травмировало. Родители еще долго обретались по общежитиям и только в 1959 г. получили двухкомнатную квартиру на Ленинском 67. Папа был уже доцентом и от безнадеги совсем было собрался перебираться в Уфимский нефтяной институт, но тут его студенческий друг стал ректором «керосинки»…

Мой дедушка был строителем. Прораб, начальник стройки. Возводил элеваторы в Мелекессе, потом в Калинине (теперь опять Тверь) и в Орше. Жили мы при стройке или прямо на стройке. Бабушка – из сибирских крестьян, самостоятельная, с врожденным чувством собственного достоинства: никаких «сюсюканий». Я был накормлен, ухожен и в остальном предоставлен сам себе. В Гражданскую войну дедушка был «красным командиром» и одно время даже секретарем райкома партии. Потом по мобилизации его направили в институт и на строительство Магнитки. Он тоже был очень самостоятельный, ершистый, с начальством «ладить» не умел и не хотел. У обоих никакой религиозности. Бабушка любила рассказывать, как в детстве на нее четырежды надевали крест и всякий раз она перекусывала цепочку. В последний раз сломала зуб, и от нее отстали. С гордостью этот сломанный зуб показывала. Но о своем сельском попе вспоминала по-доброму: он был хороший человек, учил ее грамоте. Из моих родственником по обеим линиям никто не был религиозным. Люблю ради подковырки цитировать Остапа Бендера из «Золотого теленка»: «Вы не в церкви, вас не обманут».

От бабушки я, по-видимому, унаследовал два важных для моего научного будущего качества. Она всегда рано вставала, и я рано встаю, поздно ложусь и вообще не люблю спать: столько времени теряется зря. В молодости иногда спал всего по 2-3 часа в сутки, а то и вообще не спал по два дня. Однако предпочитаю следовать правилу Уинстона Черчеля: «Никогда не сидеть, если можно лежать». На упреки жены отвечаю, что «хороший муж на дороге не валяется, он валяется на диване». Бабушка была неутомима. И мне до недавнего времени ничто не было «влом» (как сейчас говорят). Жил как дышал. Шучу, что «самый практичный муж – это теоретик», ведь он может работать дома, а значит и по дому, и с детьми сидеть.

Предоставленный от завтрака до обеда и от обеда до ужина сам себе, я был как Маугли, но не в джунглях, а на стройке: лесопилка, канавы, машины, краны, песок и кирпичи, каменщики, грузчики, штукатуры и маляры. Сердобольные рабочие меня называли прорабом и наливали внуку начальника 50 г. разбавленного самогона. Буквально «пить и ходить я начал одновременно». Во-первых, детям еще до года тогда было принято давать кагор для здоровья и профилактики. Во-вторых, стройка. В-третьих, грузинская традиция от отца наливать детям при общем застолье сухое вино. Я не спился, как пугают в книжках. Наверное, у меня такая биохимия. Наоборот, с детства выработалось здоровое отношение к алкоголю, без тяги и фетишизации. Пил только в компании, но не за компанию. Мало пьянел и свою меру знал. «Неспособность не есть добродетель». Голова – это мое главное научное оборудование, которое должно быть в рабочем состоянии, тем более что оно всегда при мне.

Никогда не курил. Зачем? Чтобы быть «своим»? Я вообще-то коллективист, но я не «свой». Где-то в Библии будто бы (не проверял) приведены слова Христа: «Я не там, где все». Впрочем, раньше курение имело вполне утилитарный смысл: надо было перебить вонь грязных тел и одежды.

Живя на стройке, я, конечно, знал весь матерный лексикон с детства, и поэтому никакой особостью эти слова для меня не обладали. Но никто в семье ни при каких обстоятельствах, в гневе или во хмелю, никогда матерного слова не сказал. Это значило бы унизить прежде всего себя. Не вслух в сердцах иногда сорвется что-нибудь.

В Орше в 56-м году дедушке наконец дали квартиру близко к центру и недалеко от Днепра. Я целые дни проводил на реке: ловил рыбу, купался, переплывая Днепр вдоль и поперек. Благо он там не широкий и не глубокий, хотя течение быстрое. Я часами не вылезал из воды. Настолько накупался в детстве, что сейчас в воду как-то и не тянет. Что там делать? Скучно, все испробовано. Так же и с рыбной ловлей, и с фотографией. И по лесам и болотам находился, и у костра насиделся настолько, что теперь запах костра раздражает. И на машине с родителями напутешествовался: папа, вернувшись в 62-м из двухгодичной командировки в Индию, купил «Волгу». После этой командировки мы жили хотя и не богато, но по советским меркам в достатке. Он потом стал проректором «керосинки», ездил в загранкомандировки по линии ЮНЕСКО. Поэтому при вступлении во взрослую жизнь у меня не было потребительских фетишей. Самоудовлетворение давало «не то, что имеешь, а то, что умеешь». И тут еще в школе я «оттянулся по полной программе» (как теперь говорят).

В детстве я ярких способностей не проявлял и моим развитием особенно не занимались. Конечно, были какие-то кружки, занятия. Иногда я начинаю сожалеть об этом: вот если бы… Мои родные мне возражают, что гением я бы все равно не стал, и они правы. Гениями рождаются, хотя не все гении раскрываются.

Читать я научился только в школе и увлекся чтением в четвертом классе. Моими книгами стали: «Библиотека приключений», Жюль Верн, наш фантаст А.Р. Беляев, «Приключения Шерлока Холмса» и «Затерянный мир» Конан Дойля (потом интересовался палеонтологией), морские повести и рассказы Станюковича, «Три мушкетера», «Граф Монте-Кристо», «Гиперболоид инженера Гарина» и «Петр Первый» Алексея Толстого – более или менее стандартный мальчишеский набор того времени. В шестом классе я увлекся «космической» фантастикой. Она обратила мой взгляд к звездам, передо мной разверзлась Вселенная. Но моей культовой книгой тогда стали «Похождения бравого солдата Швейка» Гашека. Я ее перечитывал частями много раз. Меня привлекали вовсе не «приземленные» сцены и лексикон, я еще тот лексикон знал. Как я теперь понимаю, меня завораживала какая-то естественная парадоксальность, вывернутость всего, что бы ни говорил и ни делал Швейк:

– Не страдаете ли вы падучей?
– Извиняюсь, нет. Правда, один раз я чуть было не упал на Карловой площади, когда меня задел автомобиль…

Когда моих детей в школе учили, что дважды два – четыре, я не преминул отметить, что бывает и один, и даже ноль (в числовых полях по модулю три и два соответственно). И так не раз, я считал нужным в целях воспитания показать им, что в жизни многое неоднозначно. Сейчас они мне пеняют: у них, оказывается, развился комплекс неуверенности в чем-либо, и не дают мне «портить» внучку.

В 61-м году, как я уже упоминал, папу послали на два года в Индию организовывать нефтяной факультет в университете в Каракпуре. По тогдашним правилам в такую длительную командировку надо было хотя бы на год ехать с женой (чтобы не «загулял»). Они взяли с собой моего брата Сергея. Он на четыре года младше меня, ему исполнялось семь лет и надо было идти в школу, но программу первого класса разрешали пройти дома. Меня не брали, поскольку в Каракпуре не было русской школы. Там вообще тогда не было русских. Я очень хотел поехать, настолько, что целую неделю буквально бился в истерике со слезами и криком. Это была моя единственная в жизни истерика. Меня не взяли, и я остался с бабушкой. Помню, институт дал автобус и мы ночью провожали их в Шереметьево. Тогда там стоял всего один двухэтажный домик со смотровой площадкой на крыше. Когда с бабушкой вернулись домой, я немного поплакал, заснул и проснулся уже взрослым, отвечающим сам за себя. Ведь бабушка ни в школе, ни во многом другом не могла мне помочь.

В школе я учился почти на одни пятерки. Не все давалось с лету, приходилось в меру работать. Это было полезно. В седьмом классе я увлекся географией. Родители одной из моих одноклассниц были учеными-географами, и они организовали у себя дома географический кружок с воскресными и летними выездами на природу, исследованиями, докладами. Я занимался геоморфологией: рельеф, шурфы, разрезы, схемы слоев и т. д. Это был мой первый методологический опыт научной работы. Стал ходить в кружок юного географа на географическом факультете МГУ, ездил на полевую практику на его базу в Красновидово. Думал стать географом. Все перевернулось после восьмого класса.

Я учился в восьмилетке, и после ее окончания надо было переходить в другую школу. Мне хорошо давалась школьная математика, я участвовал в математических олимпиадах, но не блистал. Там всегда давали одну-две нестандартные, на сообразительность, задачи, и их я не мог решить. Но пошел поступать во 2-ю математическую школу, на Ленинском проспекте, недалеко от дома. Сдал вступительные тесты и был зачислен, причем в один из ведущих классов. Набирали шесть девятых классов: три ведущих математических и три тоже математических, но второго уровня, для тех, кто послабее.

Насколько я знаю, 2-я школа и сейчас в топе (at the top) московских математических школ, но тогда она была лучшей и уступала только 18-му интернату при МГУ. Этот интернат собирал лучших со всей страны (но не москвичей), в первую очередь – победителей всесоюзных и республиканских олимпиад. Он до самого недавнего времени оставался на высоте, а что сейчас, не знаю, из-за ЕГЭ. Если вы хотите понять, что такое умный человек, тогда пообщайтесь с выпускником (тогдашнего) 18-го интерната. Это и есть умный человек, и дело не в его математических способностях. Хотя, конечно, я несколько схематизирую ситуацию.

Мой выпуск 67-го года и предыдущий 66-го были самыми сильными выпусками 2-й школы за всю ее историю. Нам преподавали знаменитые теперь Е.Б. Дынкин, И.А. Манин, Э.Б. Винберг, заходил И.М. Гельфанд. Мой брат Сергей тоже учился во 2-й школе. Он поступил в нее в шестой класс, когда я был в десятом. Сейчас он – доктор наук, профессор, проректор Университета нефти и газа.

Потом 2-ю школу фактически разогнали. Конечно, ее контингент был непростой: гении, дети творческой интеллигенции. Царил дух фронды, в том числе и политической. Как-то в стенгазете появилась статья о том, что «комсомол – это корабль, облепленный ракушками». Еле отбились тогда от райкома комсомола. В школе была хорошо поставлена литература, проводились встречи с литераторами, в том числе диссидентами: Якобсоном и др. Вмешался КГБ. Все это было решено придушить. И придушили на 30 лет.

Два года во 2-й школе были одними из лучших в моей жизни. Они – моя гордость. Там я сделал себя. Среди моих одноклассников были гении (правда, потом я о них ничего не слышал). Я не гений. Я знал это по олимпиадам, но это меня не травмировало. И с моими негениальными способностями у меня был большой простор для саморазвития. Не сделав меня гением, природа одарила меня другой способностью – выдерживать продолжительное интеллектуальное напряжение, днями, неделями и месяцами, прессовать себя тем сильнее, чем ближе финал работы. Далеко не каждому это дано, даже гению. Эта способность – моя главная гордость, и я не комплексую, что я не гений, хотя было бы, конечно, неплохо.

В 1985 г., сдавая в издательство книгу с Д.Д. Иваненко, я все же «передавил». Неделю я спал по 2-3 часа в сутки и заработал инфаркт, но узнал о том, что это был инфаркт, только через 20 лет.

Во 2-й школе я занимался по 18 часов в сутки – в ванне, в туалете, во сне – и мне все удалось. Это был кайф! Я, как уже говорил, «оттянулся по полной программе». Спасибо родителям, они меня кормили, поили и ни на что не отвлекали. В конце десятого класса нам дали новую квартиру в том же доме, и при переезде они не попросили меня даже сумку перенести. Хорошо помню, как сижу посреди пустой комнаты еще в старой квартире, передо мной стул, на стуле лежит чемодан, на котором я решаю одну за другой задачи с автоматизмом вычислительной машины.

В школе нам преподавали две математики: стандартную школьную и дополнительные разделы алгебры, геометрии, теории множеств. Последнюю вели преподаватели и аспиранты мехмата. По этой математике я в первом полугодии получал четверки, а потом – по всем предметам пятерки (кроме русского языка, с грамотностью у меня были проблемы, пришлось даже нанять репетитора). Именно эта математика очень развивала вариабельность, способность самому осваивать новый материал, что очень пригодилось на физфаке, который не обеспечивал теоретику полноценного математического образования. В конце десятого класса каждому дали своего рода курсовую работу – решить некую математическую проблему. Я пошел «перпендикулярным» путем, зато освоил самостоятельно дифференциальное и интегральное исчисление, которое в школе тогда не преподавали.

На нас в девятом классе опробовали и новый курс биологии, включавший основы генетики и молекулярной биологии (после краха Хрущева и поддерживаемого им Лысенко). Это было очень полезно для развития общего мировоззрения, той же вариабельности. Моя жена Аида, однокурсница, окончила кафедру биофизики физфака и занимается молекулярной биологией в приложении к канцерогенезу. От нее я тоже кое-что знаю о современной биологии. Мне в свое время очень понравилась книга Ирвинга Стоуна «Происхождение» о Чарльзе Дарвине, а именно – ход его мыслей как ученого. Сейчас в России поднялась волна мракобесия: и дилетантского, и религиозного. Если вы так против Дарвина, то будьте последовательны: не ходите в больницы и аптеки, а лечитесь молитвой и корой дуба.

Отличник во 2-й школе, я вовсе не был «ботаником». В школе шла бурная общественная и приятельская жизнь, в которой я активно участвовал. Я был заместителем секретаря, а фактически – секретарем комсомольской организации школы. В ней состояло около 700 человек, и она была крупнейшей первичной комсомольской организацией Ленинского района.

Ей полагался освобожденный секретарь, на ставке, и нам прислали молодого парня после армии. Парень был простой, но хороший. Конечно, ему было с нашим контингентом трудно, но мы с ним отлично сработались. Я и в старой школе был комсомольским секретарем, но не из каких-то идейных или карьерных соображений, а просто интересно: общаешься, да и не трудно. Только не надо быть упертым и занудой: если что-то нельзя, но очень хочется, то можно. Я и на физфаке занимался общественной работой. Дважды командиром возил стройотряды. Природа в какой-то мере одарила меня системным мышлением. Я по этому поводу не задаюсь, но оно помогает в научной деятельности. Я умею выделять главное. Это моя универсальная методологическая «отмычка».

Системное мышление дается человеку от рождения. Это когда его голова удерживает цельную картину системы и осознает каждый ее элемент во взаимосвязи с другими. Организационные способности – проявление системности мышления. Системное мышление либо есть, либо его нет. Поэтому подчас простые малограмотные люди из низов становятся лидерами страны, например при революции. Однако системное мышление, как и хитрость, еще не означает ум.

Поступив во 2-ю школу, я не оставил географию. Летом после девятого класса я поехал в экспедицию с полевой группой географического факультета. Тогда еще не были открыты нефтяные месторождения Западной Сибири и в устье Оби планировалось построить гигантскую гидроэлектростанцию, затопив при этом всю Западно-Сибирскую низменность. Наша экспедиционная группа состояла из пяти человек: трех сотрудниц географического факультета, меня – рабочего (копать шурфы и пр.) и местного водителя. Мои родители очень нервничали, папа на вокзале, когда провожали меня, был белый лицом, но они ни слова не сказали. Я благодарен им: где-то с восьмого класса они дали мне карт-бланш в выборе жизненного пути. Сибирь произвела сильное впечатление: первозданная природа, простор, безмолвие и безлюдье. Помню Тобольск, кремль, домики декабристов, береговой обрыв, на котором, по преданию, сидел Ермак. До XX века Тобольск был столицей Сибири, но Транссиб проложили южнее, через Тюмень, и Тобольск захирел. Помню еще только строившийся Уренгой и тайгу у порога гостиницы, захудалый тогда Ханты-Мансийск, Иртыш, Обь. Из Ханты-Мансийска в Тюмень возвращались самолетом, и два часа под крылом «кукурузника» простирались одни болота с редкой щетиной леса. Степь (казахстанская, украинская), море, горы и звездное небо всегда производили на меня впечатление. Горы это тоже простор, только ввысь.

По-видимому, от рождения у меня в мозгу сложилось стремление (некая система связей между нейронами) «если делать, то по-большому» (как говорит хорошая подруга жены Татьяна Рябых, тоже выпускница физфака). В детстве мне очень нравилась фраза из «Петра Первого» Алексея Толстого, когда Лефорт наставляет молодого Петра: «Замахивайся на большее, а по малому – только кулак отшибешь». Когда мне было без малого три года (в конце 52-го или начале 53-го), в Мелекессе (или Брянске?), где я жил с бабушкой и дедушкой, проходили какие-то выборы. Меня взяли на избирательный участок (взрослым – пиво, детям – конфеты). Там, как любила рассказывать бабушка, кто-то, умилившись карапузу, спросил меня: «Кем ты хочешь стать, когда вырастишь?» Я ответил: «Сталиным, а то он старенький, и, когда умрет, его надо будет заменить». Дедушку не арестовали, наверное не успели: Сталин в марте 1953 г. умер. Теперь это наша семейная легенда. И во взрослой жизни, еще в советское время, из административных должностей меня впечатлял только пост члена Политбюро, а из наград только Звезда Героя соцтруда. Впрочем, я достиг гораздо большего: я делаю науку на мировом уровне и мои научные результаты – навсегда, неважно, будут ли их связывать с моим именем или нет.

Мои старшие товарищи по сибирской экспедиции отговаривали меня поступать на географический факультет («Не с твоим умом», – говорили). Но только в середине десятого класса я вдруг решил, что пойду на физфак МГУ. Наши преподаватели с мехмата предлагали мне поступать на мехмат, но я знал, что на письменном экзамене по математике последнюю задачу билета, «на гениальность», не решу и заведомо получу не выше четверки. Идея была такая: окончить школу с серебряной медалью и сдавать на физфаке только два экзамена, письменную и устную математики. Получив две пятерки, я как медалист освобождался от физики и сочинения. О трудностях с русским языком я уже упоминал. Что касается физики, нам ее хорошо преподавали, но на уровне явлений, объяснений, опытов. А для сдачи экзамена на физфак нужны были законы, формулы и решение задач.

Как всегда, «гладко было на бумаге, да забыли про овраги». Устную школьную математику мы сдавали заранее, в марте или апреле. И я неожиданно получил четверку: забыл подготовить один из вариантов какой-то геометрической теоремы. Мои школьные учителя все понимали и за выпускное сочинение поставили мне пятерку, хотя, наверное, на какие-то мелочи в нем они просто закрыли глаза. Таким образом, я окончил школу с серебряной медалью. На мраморной доске медалистов 2-й школы есть моя фамилия.

То, что я окончил 2-ю математическую школу в те ее легендарные годы, тоже моя гордость. Там я впервые ощутил себя профессионалом.

Мы сдавали выпускной экзамен по школьной математике весной, чтобы освободить время для подготовки к вступительным экзаменам. С самого начала, в девятом классе, наш школьный учитель математики сказал, что его главная цель – подготовить нас к вступительным экзаменам. До сих пор (вернее до ЕГЭ) главный критерий уровня математической школы – это сколько ее учеников куда поступили. Нашему школьному математику было, наверное, за семьдесят: маленький, лысый, полноватый, очень энергичный старичок. В нем чувствовалась давняя-давняя, едва ли не гимназическая, закваска. Он давал методику решения задач, и потом мы решали, решали и решали их, вырабатывая автоматизм. Билет по письменной математике на физфаке МГУ содержал пять задач, из которых первые четыре, по алгебре и тригонометрии, были на стандартные методы, а пятая задача, обычно геометрическая, требовала сообразительности. Первые четыре задачи надо было решить не задумываясь, «на автомате», максимум за полчаса, оставив все остальное время на последнюю. Устный экзамен по математике тоже в основном сводился к решению задач.

Потом, работая на физфаке, я неоднократно участвовал в приемных экзаменах. Подход был такой: раз абитуриент решает задачи, значит он умный, а если он чего-то не знает, то потом выучит, по мере надобности. Однажды меня с напарником попросили «внимательно» отнестись к некой абитуриентке. Конечно, пожалуйста, ведь из всех поступающих важно не упустить лучшие 3 – 5%, а кто будут остальные, не очень важно. Эта девочка не знала ничего, абсолютно, ноль. При всем нашем нежелании, мы могли ей поставить только двойку. После этого меня к вступительным экзаменам не привлекают уже 30 лет – ну и хорошо.

Решив поступить на физфак, я готовился только к экзаменам по математике, не от самоуверенности, не из расчетливости или «на авось». Не помню, как и почему, но о других экзаменах я напрочь забыл. Я решал и решал задачи, одну за одной, как автомат, из всех университетских сборников по всем естественным факультетам, кроме последних задач мехматовских билетов. Их я даже не пытался решать. Тогда был простой критерий гениальности: кто решил все на письменной математике на мехмате – тот гений. Их были единицы. Их брали всегда, несмотря ни на что. Так же и на физфаке. Абитуриент, сдавший на пять две математики, на физике мог нести чушь – его все равно брали, и за сочинение ему всегда ставили проходную тройку. Конечно, действовал негласный ценз по национальному, социальному и, наверное, каким-то другим критериям. Но топ-листа абитуриентов, который выявлялся на математике, он не касался, хотя бы из чисто утилитарных соображений: в каждой учебной группе (их на курсе 20) должны быть 2-3 сильных студента-«паровоза», чтобы другие вольно или невольно на них ориентировались и подтягивались.

В нашей группе таким «паровозом» был я. Когда на одном (и только на одном за все 5 курсов) экзамене по физике мне поставили четверку, вся группа остолбенела: что же с ними будет? – но обошлось. Однако я забегаю вперед, в следующий раздел книги.

Именно готовясь к вступительным экзаменам, я почувствовал себя профессионалам – в решении задач. Я мог решить любую экзаменационную задачу по математике на любом факультете МГУ, кроме пресловутых последних задач мехматовских билетов. Я без труда восстановил этот профессионализм, когда, как я уже упоминал, занялся репетиторством.

Я сдал обе математики на пятерки. Я был очень горд. Я до сих пор горжусь этим. Это был чисто поставленный опыт с однозначным результатом. Я продемонстрировал класс прежде всего самому себе. Родители были счастливы, особенно папа: его сын с блеском поступил в лучший вуз страны и, как казалось, один из лучших университетов мира. Мне тоже так представлялось, но я ошибался.

Физфак. Полувысшее образование

Всю мою научную жизнь меня не оставляет досада, что я не получил достаточного систематического высшего образования.

При этом я вполне удовлетворен своим школьным образованием, конечно благодаря 2-й математической школе. Хотя я совершенно не согласен с доминирующим мнением о высоком уровне советского школьного образования, даже в его естественнонаучной части. Если так, то где результат? Доля России в мировой инновационной продукции составляет 0.3%, при этом США – 39% и даже Китая – 3%. Отвечают, что у нас, конечно, плохо с внедрением, но зато сильная фундаментальная наука. Это еще один миф. За последние 40 лет (с 1970 г.) у страны всего три Нобелевские премии по науке, а у разгромленной в войне Германии – 18, и даже у маленькой Швейцарии – восемь.

Сейчас я понимаю, что в школе, как и во всем советском обществе, господствовал принцип: всегда во всем есть одно правильное мнение, а все остальные мнения не правильны. Этот принцип был политически мотивирован и опирался на одну из основ марксистской гносеологии – утверждение, что объективная истина, хотя и всегда относительна, но единственна, поскольку единственна реальность. Это ошибочно даже для естественных наук и заведомо неправильно в отношении социума. Однако такая, казалось бы, абстрактная гносеологическая ошибка имела вполне конкретное следствие: этот принцип внедрялся тотально. Его даже самое невинное нарушение могло породить цепную реакцию. Поэтому «разномыслие» в советском обществе выпалывалось на корню, где бы то ни было. При этом главной задачей советской науки ставилось выработать научно обоснованное правильное мнение, а советского среднего и высшего образования – безальтернативно утвердить это мнение в сознании людей. Надо признать, что принцип «существования и единственности правильного мнения» имеет также глубокие исторические и патерналистские традиции в российском обществе: это своего рода менталитет. Поэтому он так медленно изживается в современной России. Даже на бытовом уровне люди порой не в состоянии договориться, потому что настоять на своем мнении или согласиться с чужим для них то же, что подчинить или, соответственно, подчиниться («я начальник – ты дурак»).

Обучение на физфаке продолжается пять лет, и полгода дается на дипломную работу. Однако в совокупности около года съели военная подготовка (один полный день в неделю в течение трех лет), курс общественных наук, обязательные занятия физкультурой, месяц на «картошке» (и это нашему курсу еще повезло). Таким образом, по специальности я учился всего четыре года. Конечно, уже со второго курса я занялся самообразованием, но даже теорию групп так толком и не знаю. Недавно опять с этим столкнулся: подалгебра Ли алгебры Ли группы Ли не обязательно является алгеброй Ли подгруппы Ли этой группы. Казалось бы, сядь и выучи, ничего сложного. Но проблема в том, что, не получив систематического математического образования, я не знаю, чего я не знаю и что мне надо выучить.

Бесполезным для меня как теорфизика оказался и физический практикум (один день в неделю на первом и втором курсах). Маятники, пружины, дифракция и интерференция – это была допотопная физика еще XIX века (что сейчас, не знаю). Единственное, что тогда он реально давал – методику обработки экспериментальных данных. Но мне она так и не пригодилась, а вот моей жене даже очень, в сравнении с медиками, которые вообще не понимают, что такое ошибка эксперимента.

Придя на физфак МГУ в 1967 г., я застал его, казалось бы, в самом расцвете. Его кафедры пестрели академиками и лауреатами. После мехмата он считался самым престижным вузом страны. Но это была надводная, блестящая на солнце верхушка айсберга. Его подводной, скрытой для сторонней публики частью было то, что на 80-90% физфак был «завязан на оборонку». Большинство из этих академиков и лауреатов стали таковыми именно за оборонные работы. Если такой академик и лауреат на старости лет с гонором и апломбом начинает заниматься, например, гравитацией, получается «и смех и грех». Ведь он академик, грубо говоря, по автоматам Калашникова, а не по гравитации. Но студентов младших курсов все это не касалось. Распределение по кафедрам происходило в середине третьего курса.

Лишь много позже я понял, насколько правильно сделал, выбрав физфак МГУ. Он был единственным в стране вузом, где готовили по теоретической физике. Что-то было в Ленинградском университете, что-то в Новосибирске, Киеве, еще кое-где. Знаменитые МИФИ и Физтех теоретиков не готовили, они на 200% работали на «оборонку». Там все студенты получали такую форму секретности, что даже в соцстраны не могли выехать десятилетиями. На физфаке же, за исключением отделения ядерной физики, общей секретности не было, хотя велось много хоздоговорных тем по секретным тематикам.

МГУ был и, наверное, остается лучшим вузом страны, чтобы провести студенческие годы. В нем в какой-то мере культивировался стиль демократизма и взаимного уважения («ты меня уважаешь, я тебя уважаю – мы с тобой уважаемые люди»), фактически была определенная свобода посещения (вернее непосещения) текущих занятий, студентов не прессовали учебным контролем в ходе семестра. Уже поэтому мы с женой хотели, чтобы наши дети поступили в МГУ. И дочь моего брата тоже училась в университете. Но главное, сама возможность запросто встретить какого-нибудь ученого с легендарным именем в коридоре, аудитории или буфете раздвигала границы мира. Тогда такие ученые на физфаке были. Правда, лекции они читали, как правило, плохо (не надо верить мифам, сам их слушал), да и частенько отлынивали. Но масштаб личности всегда чувствовался. Их главным вкладом в обучение были дипломники и аспиранты.

Например, не то атомную, не то ядерную физику нам читал академик Л.А. Арцимович. По мне, лекции были так себе. Возможно, материал описательного характера просто меня не впечатляет, поскольку в нем нет мыслительных цепочек, интеллектуальной интриги. Но было несомненно, что он – Ученый, интеллектуальная элита.

На физфак брали только умных. Конечно, были и по договоренности, по блату, но это тоже были умники. Другие учиться на физфаке все равно бы не смогли. Моя жена Аида на полгода старше меня и поступала на год раньше, когда был совместный выпуск одиннадцатых и десятых классов. Она из престижной 711-й школы на Кутузовском проспекте, где учились дети многих партийных шишек, но по математике и физике это была обычная школа. Аида на физфак МГУ не прошла и хотела поступать на следующий год, но ее мама, Рея Валиевна, о которой я уже говорил, ультимативно отправила ее в Уфу, к бабушке, где ее приняли на физфак в Уфимский университет. Рея Валиевна преподавала физику в 5-й школе, тоже «элитной» и тоже на Кутузовском проспекте. Там училась дочь Полянского, в то время – члена Политбюро. Рея Валиевна попросила его помочь перевести Аиду в МГУ. Такие переводы практикуются, формально в них нет ничего незаконного, но возникают разные проблемы. Для него проблем не было. Он позвонил ректору МГУ Петровскому, тот – декану физфака, грозному и твердокаменному Фурсову, и Аиду взяли с потерей года на физфак, на первый курс. Так мы с ней оказались 1 сентября 1967 г. в одной студенческой группе. Сейчас она, как я уже говорил, молекулярный биолог, доктор наук, работала одно время во Франции. Там, в лаборатории в Марселе, они расшифровали один из генов. Ген оказался важным для ангиогенеза (образования кровеносных сосудов) в раковых опухолях. Красивый результат, который вошел в мировую науку, навсегда. Это доставляет ей удовлетворение, и мне тоже.

Умники шли на физфак МГУ, коротко говоря, за «нобелем». В Физтех, например, за «нобелем» не идут: за ракеты «нобеля» не дают. Конечно, шли не потому, что всерьез рассчитывали получить Нобелевскую премию (хотя…), а чтобы заниматься в жизни интересным, значимым для общества делом, реализовать себя и быть свободным, по крайней мере от дураков. Все с амбициями, с волей. Почти всех их жизнь потом обманула. Из нашего выпуска, 450 человек, собственно в науке остались едва ли более дюжины, двое из них – я и моя жена. Этим я тоже горжусь, тем, что не изменили себе. Хотя в 90-е, когда Аида вернулась из Франции, мы почти пять лет подрабатывали выездной торговлей по предприятиям и организациям, беря товар у «челноков». И «челноки», и продавцы были сплошь интеллигенция из институтов и вузов, даже из Гнесинки. За один выезд мы зарабатывали больше своих месячных зарплат. Но науку не бросали.

Тот, кто ушел из науки, – всегда неудачник, даже если потом он стал миллиардером, президентом страны или «совестью» нации. И он это знает. Он больше неудачник, чем те, кто совсем вне науки. Ибо эти пребывают в счастливом и самодовольном неведении. А он знает, чего лишился. Ученый, открывая явления и законы природы, как бы участвует в сотворении мира, получает (повторюсь) уникальную, недоступную другим людям возможность стать наравне с Богом, или самим Богом. Это его профессиональный кайф. Впрочем, и другие занятия приносят свои удовольствия.

Как известно, Эйнштейну предлагали стать первым президентом Израиля, но он отказался под политическим предлогом. Но я думаю, что этот пост «завсклада» его просто не привлекал. Рассказывают, что уже упоминавшаяся Маргарет Тэтчер как-то встречалась с делегацией парламентариев нашей страны и спросила одного из них, кто он по профессии. Тот гордо ответил: «Я политик!». «А я химик-технолог», – скромно сказала Тэтчер.

Много лет я регулярно получаю приглашения из издания «Who is Who» дать свое резюме для их ежегодного выпуска. Пару раз я так и сделал, а потом бросил заниматься этой ерундой. В прошлом 2009 году такое приглашение получила и моя жена. Мы решили, что муж и жена в одном томе – это «прикольно», и позволили себе такое эксклюзивное развлечение. Мне также приятно, что у нас «университетская» семья. Обе наши дочери окончили МГУ: Лена – филологический факультета, а Ира – экономический, но она не бухгалтер, а преподает на своем факультете историю экономических учений, как бы «теоретическую» экономику.

Начитавшись научной фантастики, я пришел на физический факультет, чтобы заниматься самой что ни на есть фундаментальной наукой в мировом масштабе (а то и вселенском, в духе Стругацких). Будучи студентом, я продолжал почитывать научную фантастику. Меня привлекали нестандартные идеи, из которых я считаю самой интересной разумный океан в «Солярисе» Лема. Причем научно-популярная литература меня совсем не притягивала. Во 2-й школе я уже выработал математический стиль мышления, и рассуждения «на пальцах» меня коробили. По этой же причине мне не особенно нравился курс теоретической физики Ландау – Лифшица: там тоже многое «на пальцах». Впрочем, не надо быть математическим снобом. Например, фундаментальное уравнение сверхпроводимости Гинзбурга – Ландау, а именно его последний нелинейный член, фактически тоже было «высосано из пальца», в нем даже сначала неправильно стоял заряд «e» электрона вместо заряда «$2e$» куперовской пары.

Современная наука подразделяется на фундаментальную, прикладную и технологическую. Фундаментальная наука открывает новые законы, прикладная наука использует уже известные законы в прикладных целях, а технологическая наука разрабатывает технологии для производства желаемого продукта. Еще в конце XIX века почти вся наука была фундаментальной, а в XVI веке науки вообще не было. Даже математика в XIX веке была не вполне наукой, пока не признала правомерность доказательства существования не путем построения. Сейчас к фундаментальной науке можно отнести лишь наиболее абстрактную часть математики и теоретическую физику (теория поля и элементарных частиц), а также Большой адронный коллайдер в CERN и, возможно, что-то из молекулярной биологии. Поступая на физфак, я шел на теоретическую физику.

На физфаке несколько теоретических кафедр. Тогда это были: кафедра теоретической физики, кафедра квантовой статистики и теории поля, возглавлявшаяся Н.Н. Боголюбовым, и кафедра квантовой теории и электродинамики, на которой совместителями были несколько академиков из круга Ландау (в мое время: сам Л.Д. Ландау, Л.М. Леонтович – зав. кафедрой, Я.Б. Зельдович и И.М. – не Е.М. – Лифшиц). Для них она, собственно, в 1954 г. и была со скандалом отпочкована от кафедры теоретической физики. Ландау уже на кафедре не появлялся, он болел, а в 1968 г. умер, но «дух Ландау» продолжал витать, кто-то даже сдавал какие-то теорминимумы. В 1966 г. из кафедры теоретической физики выделилась кафедра квантовой статистики. Я не буду здесь углубляться в историю и отсылаю интересующихся к своей книге «Дмитрий Иваненко – суперзвезда советской физики. Ненаписанные мемуары» (УРСС, 2010).

Все эти кафедры были связаны с ведущими физическими институтами: ФИАН, ИТЭФ, Дубна, «капичник», «стекловка». Они давали вроде бы сносное для 70-х годов теоретическое образование на уровне уже упомянутого курса «Теоретическая физика» Ландау – Лифшица и книги «Введение в теорию квантованных полей» Боголюбова – Ширкова. Однако теория групп – альфа и омега теоретической физики с 50-х годов – на физфаке не изучалась. Она и сейчас преподается только один семестр, студенты ее не знают. Один раз теорию групп у нас попробовали читать математики с мехмата (известный ныне А.А. Кириллов), но ничего не получилось: слишком разный стиль. Они скрупулезно углублялись в доказательства теорем и лемм, а теоретикам это не столь важно, им нужны формулировки теорем и их следствия. Также не было и сейчас нет в программе физфака алгебраической квантовой теории (представления инволютивных топологических алгебр, конструкции ГНС), еще в 50-х годах ставшей фундаментом квантовой механики и квантовой статистики. В конце 70-х годов, с развитием теории калибровочных полей, стала набирать силу новая теоретическая физика, основанная на геометрии расслоений и алгебраической топологии. Этой математики на физфаке не знали и не преподавали, и до сих пор фактически не преподают, только «галопом по Европам» в моем полугодовом курсе «Геометрические методы теории поля». Кто-то что-то разрозненное по мере надобности читает в своих спецкурсах, но систематического математического образования студенты-теоретики на физфаке МГУ, да и нигде в стране, не получают. В какой-то мере этот недостаток компенсируется самообразованием, но оно не гарантирует от пробелов и дилетантства.

Я, как уже писал, знаю это по себе. Много лет я занимаюсь геометрическим аппаратом и его применением, но время от времени обнаруживаю, что не знаю факты, которые являются фольклором для любого профессионального геометра (например, что всякое ориентируемое трехмерное многообразие параллелизуемо).

«Мы все учились понемногу, чему-нибудь и как-нибудь» – это (по-видимому, со времен Пушкина) хроническая системная болезнь отечественного высшего образования, начиная с уровня третьего курса, когда надо переходить от основ к современной тематике. Поэтому и приходится говорить о полувысшем образовании. И чем дальше, тем хуже. Учить уже некому. Средний возраст вузовских преподавателей подбирается к 60, и сил нет, и знания устарели. Впрочем, сами преподаватели, кого ни спроси (и ректоры, и министр) взахлеб убеждают, что все o'k: и они сами еще «как огурцы», и студенты такие интересующиеся, и Уральский университет в будущем станет нашим Кембриджем. Нас все время отсылают в будущее, как в анекдоте про чиновника, который пеняет посетителю: «Я вам все время говорю прийти завтра, а вы каждый раз приходите сегодня!». И что у нас сегодня? Сейчас в известных мировых рейтингах из всех российских вузов упоминается только МГУ где-то между 200-й и 500-й позициями, да иногда в конце первой тысячи мелькнет Петербургский университет. Можно эти рейтинги не признавать, но именно по ним судят во всем мире: «Вы из Петербургского университета? Это где-то в Сибири? Простите, в наших списках его нет. Вот девять китайских университетов – в первой сотне, вот Южноафриканский университет на 197 месте, а вот ниже и ваш МГУ…». Нет в мировых рейтингах и элитной «вышки» (Высшей школы экономики), и самого карьерного (по официальным данным) вуза страны – Высшей школы КГБ (или ФСБ?).

Фактически страна обманывает свою молодежь, обещая ей передовое образование, особенно ее наиболее талантливых 2-3%, которые могли бы пойти в науку. Они и идут, но в Европу и США – добирать знания. Тем более что PhD student (аспирант) в США получает 2 тысячи долларов, что в три раза больше, чем профессор МГУ, а питание и ширпотреб там дешевле. Несколько лет назад у моей жены (она работает в НИИ при Онкоцентре на Каширке) был дипломник с кафедры биофизики физфака. Защита проводилась в два дня с интервалом в неделю. Его отодвинули на второй день, потому что некоторых надо было обязательно поставить на первый: сразу после защиты они уезжали за границу, даже не дождавшись вручения дипломов. Два самых талантливых моих (и кафедры) студента уехали в

Калифорнийский технологический институт в США. Однако поток сдающих TOEFL и покидающих страну год от года редеет: уровень подготовки падает. Да и здесь наши выпускники идут в фирмы (не в физику, а в офисы) сразу на 30 – 40 тысяч рублей при моих 22 тысячах. Чего мне их учить?

В начале 80-х мы с моим другом и коллегой Петей Прониным пытались выстроить некую стройную систему спецкурсов по современным математическим методам для теоретиков и для начала даже выпустили в 1983 г. учебное пособие «Групповые, геометрические и топологические методы в теории поля» в двух частях. Ничего не получилось. Математическая подготовка студентов, приходящих на третьем курсе на кафедру, совершенно недостаточна. Из предыдущего только семестровый курс линейной алгебры дает им элементарное представление о векторных пространствах и матрицах. Раньше ситуацию несколько исправлял кружок, который мы, сотрудники и аспиранты Д.Д. Иваненко, вели для студентов младших курсов. Порой собиралось до сотни студентов. На занятиях рассматривались как вполне «технические» вещи, например преобразования Лоренца или основы все той же теории групп, так и новейшие достижения в физике элементарных частиц или космологии. Студенты часто мало что понимали, но «дух захватывало». Кружок стимулировал их самообразование. Многие потом шли на теоретические кафедры, в теоретическую физику. Причем иногда приходили вполне подготовленные студенты, сразу включавшиеся в научную работу. Я сам прошел через этот кружок и потом много раз выступал на нем. Он прекратил свое существование в самом начале 90-х годов: Д.Д. болел, я месяцами был в Италии, Пете пришлось серьезно подрабатывать, Юра Обухов (еще один сотрудник Д.Д.) уехал по гранту в Германию.

В 1990 г. мы с Юрой Обуховым и Д.Д. подготовили толстый учебник по геометрическим и топологическим методам в издательстве «Высшая школа». Уже пришла корректура. Но наступил 1991 г., издательство запросило денег, денег у нас, конечно, не было, книга так и не вышла. Но я упрямился. В 1996 – 2000 гг., как бы в «контру» Ландау – Лифшицу, я опубликовал четырехтомный курс «Современные методы теории поля» общим объемом почти 800 стр., «на пользу Отечеству», не получив за это ни копейки. Это как бы сегодняшний теорминимум для тех, кто собирается заниматься современной теорфизикой. Он выставлен на всех «пиратских» сайтах научной литературы, что по нынешним временам весьма престижно. На его базе я читаю на кафедре уже упоминавшийся курс «Геометрические методы теории поля», очень поверхностный. Все, что я могу дать нынешним студентам, это знание о том, чего именно они не знают. Если надо, то потом смогут узнать. Но почти никому мой курс в будущем не понадобится: они не пойдут в теоретическую физику.

В настоящее время повсюду в мире тот, кто занимается фундаментальной наукой, не имеет от этого никакой выгоды: он не может рассчитывать на получение патентов, доведение своего открытия до доходного применения и живет только на университетскую зарплату за преподавание. Те мизерные гранты, которые иногда можно получить на фундаментальные исследования, ничего не дают лично исследователю в карман. Нобелевская премия – как милостыня. Иной топ-менеджер или брокер за день зарабатывают больше. А нобелевский лауреат, наряженный пингвином во фрак, еще и обязан участвовать в «карнавальной» церемонии, читать банальную лекцию, потом встречаться с президентом, не отличающим бозон от бизона, и еще устраивать банкет, и благодарить, благодарить и благодарить.

Походив на уже упомянутый теоретический кружок, я быстро понял, что необходимо заняться самообразованием. Учеба давалась без большого труда, и у меня было время. Я окончил факультет с одним потерянным баллом, то есть только один экзамен сдал на четверку, а все остальные – на отлично. Это был официальный показатель, важный при распределении на кафедру и в аспирантуру. Я занимался общественной работой, спортом (боксом, культуризмом, бегом), обычными студенческими удовольствиями, и у меня все равно оставалось достаточно времени для самообразования. Моими настольными книгами стали тома Бурбаки, книги по теории групп, топологии, алгебре, в конце 70-х – по дифференциальной геометрии, алгебраической топологии, алгебраической квантовой теории. К тому, чего в физфаковской программе нет, а надо бы, в 90-е годы добавились: супергеометрия, некоммутативная геометрия, квантовые группы, геометрическое и деформационное квантования. Все это сейчас азбука теоретической и математической физики. В 2005 г. у меня вышла толстая книга «Geometric and Algebraic Topological Methods in Quantum Mechanics» по этим методам – она тоже есть на «пиратских» сайтах. Конечно, кто-то, как и я в свое время, сам добирает «понемногу чему-нибудь и как-нибудь».

У меня свой стиль чтения математических книг (физические книги я давно не читаю, я их сам пишу). Это своего рода «покрытие компактами». Во-первых, в книге заведомо мне нужно не все. Во-вторых, я не математик. Если математик чего-то не понимает, он не может двигаться дальше. Ум математика как компьютер. Он способен оперировать только полностью определенными объектами. Есть много шуток на эту тему. Приведу контршутку про физиков. Физика спрашивают: «Ты знаешь номер телефона?» Тот беззаботно отвечает: «Да, примерно». По стилю своего мышления я не математик (a mathematician), но и не теорфизик (a theoretician), я – математический физик (a mathematical physicist), но об этом чуть ниже. Если я начну читать математическую книгу последовательно, с самого начала, страницу за страницей, то далеко не продвинусь. Я изучаю ее частями, которые необязательно мне полностью понимать и которые, накладываясь друг на друга, постепенно «покрывают» интересующий меня в книге материал. По-видимому, я туповат, поскольку не сразу все схватываю. Я как бы «вживаюсь» в проблему, она постепенно осмысливается где-то в подсознании и, наконец, проясняется, как из тумана. Я отношусь к тем, кому хорошие идеи приходят потом, как говорят, «на лестнице». Например, обсудив по телефону с одной из дочерей какой-либо вопрос, бытовой или философский, я продолжаю мусолить его в голове, появляется какое-то решение, я звоню через минуту, потом возникает еще какое-нибудь, на мой взгляд, важное уточнение, я опять звоню – и так два-три раза. Дочери знают эту мою манеру и, надеюсь, не очень сердятся.

Когда я вижу на факультете молодых, жизнерадостных, как на площадке молодняка, студентов, мне их немного жалко. Они еще не знают, какие неприятности их ждут впереди, а у меня они уже позади, правда еще не все. Не знают они и что такое наука. Современная наука как бы «атомизируется». Где научные школы? Где многолюдные семинары? Где жаркие дискуссии? На конференциях царит дух толерантности: все друг с другом соглашаются. Хуже того, наука теряет свою суть – поиск истины, но об этом ниже.

«За что я люблю молодежь, ей можно рассказывать старые анекдоты», – говаривал один академик меднаук. Я тоже этим пользуюсь и из года в год на своих лекциях для релаксации рассказываю одни и те же истории. Однажды я уезжал на месяц (конечно, в Италию), и мой аспирант должен был заменить меня на занятиях. Чтобы ввести его в курс дела, что и как читать, я предложил ему побывать на паре моих лекций. И вот при нем я не смог выдавить из себя ни одной из своих традиционных сентенций, ведь он-то их уже слышал.

Еще немного о молодежи. Студентки сейчас очень ухоженные. Правда, в этом году по ЕГЭ в университет набрали много из провинции – и взгляд стал спотыкаться. Вообще, девочка, окончившая физфак, – это круто (как сейчас говорят), а окончившая мехмат – это очень круто. Она может быть милейшим существом, но для нее нет авторитетов и у нее есть воля, если она вдруг что-то захочет, а еще есть привычка на всю жизнь к умным людям. У моей жены Аиды, например, недавно появилось своеобразное хобби: она время от времени возит эксклюзивные туристические группы в Англию, Францию и Италию. А прошлым летом к нам в противоход было «французское нашествие».

При всей недостаточности полученного образования у выпускников физфака и вообще МГУ есть одно несомненное достоинство. Они способны и привыкли самостоятельно осваивать новый материал. Это особенно важно в современной теоретической физике, где каждые пять – десять лет появляются кардинально новые математические методы. Часто это своего рода «математические игры», но не только. Если физическая теория не развивается известными методами, для нее быстро находят или разрабатывают новый математический аппарат. Кто теряет способность осваивать все более продвинутые (advanced) методы (обычно после 40 лет), отступает на обочину дожимать и перелицовывать прошлые результаты, подводить итоги. Последние два года, опубликовав две научные книги, одну книгу о Д.Д. Иваненко и заканчивая эту, я тоже подвожу итоги. Но освободившись, я надеюсь еще раз «выйти на старт».

Есть ученые, которым просто интересно узнавать новое. Получив результат, такой ученый подчас и не стремится его публиковать. Ведь он-то уже знает, он свой интерес удовлетворил. Это настоящие ученые. Я отношусь к науке скорее как к спорту, не к спорту единоборств, а, например, к уже упомянутому бегу. Говоря фигурально, мне важнее тот факт, что я пробежал, чем то, куда и зачем я прибежал. Наверное, я не настоящий ученый. Но такой подход очень дисциплинирует. Например, для меня нет результата, пока он не опубликован. Я веду исследования, когда пишу статьи. Это заставляет с самого начала все четко формулировать и логически выстраивать. Поэтому я думаю и пишу сразу по-английски, на моем компьютере русский LaTeX даже не установлен. Русская научная терминология вызывает у меня затруднения. Мы в России здорово отстали, у нас нет адекватной научной терминологии. На своих лекциях я нередко спотыкаюсь, подбирая перевод с английского на русский. Современная наука разговаривает на английском. Это, что называется, «медицинский факт». Поэтому и лекции студентам по современной тематике следовало бы, с моей точки зрения, тоже читать на английском языке. А то получаются «мокроступы» и «самодвижущиеся телеги».

Правда, с английским тоже порой возникают проблемы. Когда Д.Д. Иваненко послал большой обзор по гравитации в один из юбилейных сборников к 100-летию со дня рождения А. Эйнштейна, его друг-итальянец, редактор сборника, поблагодарив, приписал: «Перевел его с вашего английского на свой английский». Нашу с Д.Д. известную статью по калибровочной теории гравитации в Physics Reports опубликовали, поскольку «работа великолепная (brilliant), хотя язык ужасен». Писал ее я, спешил, заканчивал накануне поездки в Болгарию. Когда Д.Д. прочитал корректуру, то ужаснулся и стал все переводить на «свой английский». По-моему, вышло еще хуже, к тому же мы потеряли половину гонорара. Я получил за нее через ВААП (Всесоюзное агентство по авторским правам) 400 желтых сертификатов (антураж той жизни). Наши первые две книги с Luigi Mangiarotti мы отдали редактировать англичанину, который преподавал язык в университете Camerino. Он сказал, что все неплохо и ограничился самой необходимой правкой.

На третьем курсе я распределился на кафедру теоретической физики к Д.Д. Иваненко. Не помню, почему я так решил. Наверное, повлияли его кружок и его научный семинар, на который я уже тогда похаживал, а именно их дух новизны, научной свободы и демократизма. Кроме того, только Иваненко в то время занимался на физфаке гравитацией. Я.Б. Зельдович и И.М. Лифшиц на кафедре квантовой теории тоже работали с гравитацией, но они были совместителями, и на этой кафедре, как я уже говорил, надо было сдавать обязательные теорминимумы, а мне уже претила зубрежка. К тому же, если посмотреть список сдавших теорминимум, легко выявить вполне определенную закономерность.

«Забив», как говорят сейчас студенты, на теорминимум, не лишил ли я себя того систематического образования в области теорфизики, о недостатке которого так сожалею? Абсолютно нет.

Во-первых, я уже тогда считал курс «Теоретическая физика» Ландау – Лифшица весьма средним. Как я уже отмечал, слишком многое там строится «на пальцах», чтобы представить неискушенному читателю цельную, без проблем, законченную физическую картину. А некоторые тома, например «Квантовая электродинамика», просто плохие. Д.Д. Иваненко считал этот курс коллекцией научных банальностей, вредной для студентов именно из-за «безпроблемности». Но ведь курс Ландау – Лифшица весьма популярен и за рубежом? Да, но не все так просто. Там он печатался и многократно перепечатывался в издательстве Pergamon Press в Великобритании. История этого издательства и его директора Роберта Максвелла (Ян Хох при рождении) не совсем прозрачна. В частности, у этого издательства были обширные связи с СССР и оно, например, выпустило известную трилогию Л.И. Брежнева (на «русские» же деньги).

Во-вторых, курс Ландау – Лифшица – это теоретическая физика 50 – 60-х годов. Фактически, если говорить о математических методах, все, что умели делать Ландау и его окружение – это хорошо решать нерелятивистские квантовые задачи. Но, как уже говорилось, в 70-е забрезжила совсем другая теоретическая физика, которую в нашей стране предвосхитил именно Иваненко, издав два сборника переводных статей: «Элементарные частицы и компенсирующие поля» (1964 г.) и «Теория групп и элементарные частицы» (1967 г.). Ее веяние также чувствовалось и в кружке, и на его научном семинаре. В группе Иваненко уже интенсивно занимались обобщенными моделями гравитации, в том числе гравитацией с кручением.

Была еще кафедра квантовой статистики и теории поля. Но квантовая статистика меня никогда не интересовала, хотя косвенно я с ней соприкасался, когда недолго занимался теорией поля при конечной температуре. В теории поля они все (школа Боголюбова) тогда буквально «зациклились» на дисперсионных соотношениях и «прозевали» калибровочную теорию. Меня дисперсионные соотношения не интересовали.

Пусть читатель не думает, что в то время я, студент третьего курса, был способен на сколько-нибудь глубокий анализ научных тематик, проблем и так прозорливо заглядывал в будущее теоретической физики. Это я сейчас, задним числом, все понимаю, а тогда воспринимал ситуацию интуитивно, как девушка при выборе жениха: нравится – не нравится. И угадал. Теперь я знаю, что сделал наилучший выбор, пойдя к Иваненко.

Я был студентом, аспирантом и сотрудником Д.Д. Иваненко в течение 25 лет, с февраля 1970 г. до дня его смерти 30 декабря 1994 г. Мы опубликовали 21 совместную работу, включая три книги. В течение 15 лет (с 1973 г. по 1988 г.) я был секретарем, а потом куратором секретарей его научного семинара, общаясь с ним ежедневно едва ли не часами в университете, у него дома или по телефону (порой за полночь). Я не буду здесь подробно рассказывать о Д.Д. Иваненко. Я опубликовал о нем уже упоминавшуюся книгу «Дмитрий Иваненко – суперзвезда советской физики. Ненаписанные мемуары». В конце («О Д.Д. Иваненко») я привожу два раздела из этой книги: «Научная биография» и «Личность (мнение ученика)». Здесь лишь отмечу те качества Иваненко, которые особенно повлияли на мое становление как ученого.

Во-первых, он мыслил масштабами мировой науки, и для меня с тех пор есть одна мировая наука и ее уровень, как в «Мастере и Маргарите» Булгакова: «Свежесть бывает только одна – первая, она же и последняя. А если осетрина второй свежести, то это означает, что она тухлая!»

Во-вторых, по общему мнению Д.Д.Иваненко был едва ли не самым эрудированным физиком-теоретиком в стране, он был чрезвычайно богат на стоящие идеи, и с ним было интересно. Это признавали даже его недруги.

В-третьих, он ничем не ограничивал мою научную свободу. Надо было «плыть» самому, и я «выплыл». Первая наша с ним общая работа «К идее праспинора» вышла в 1976 г. Иваненко очень дорожил своей научной репутацией и был весьма разборчив в совместных публикациях.

В-четвертых, Д.Д. получал много препринтов из Дубны, Международного центра теоретической физики Салама в Триесте, CERN, DESY, а также оттиски статей и препринты своих зарубежных коллег. Я чувствовал себя на фронте мировой науки.

Наконец, научной школой Д.Д. Иваненко был его знаменитый семинар. Один из его аспирантов А. Радюшкин на Новый 1976 год сочинил:

Каждый год из века в век
в понедельник и четверг
в 19 млад и стар –
все спешат на семинар:
дилетанты, спецы, снобы,
кваркофилы, кваркофобы...

На семинаре компетентно рассматривался очень широкий круг вопросов: от ядерной физики до космологии и от новейших математических методов до истории науки. Это значительно раздвинуло мой научный кругозор.

[После семинара его участники шли в кабинет Д.Д., где обсуждение продолжалось за чаем с печеньем. Я, тогда молодой аспирант, предложил добавлять в чай коньяк. Идея понравилась, и коньяк «обеспечивал» сам Д.Д.]

Оканчивая физический факультет в 1973 г., я фактически был теорфизиком-самоучкой, нахватавшимся многого и там и сям. У меня был всего один потерянный бал, и кафедра оставляла меня в аспирантуру у Иваненко. Студент пришел и ушел, а аспирант – это уже научная номенклатура, официально – член научной группы, потенциально – будущий сотрудник. На аспирантов распространялась кадровая политика. На физфаке она была такова: минимизировать прием в аспирантуру особо талантливых и евреев. И тех, и других выпихивали во внешнюю аспирантуру в другие институты. На предыдущем курсе были два таких очень талантливых студента: А. Линде и А. Старобинский. С Лешей Старобинским я был знаком: мы оказались в одном стройотряде, одно время он ухаживал за Аидой (не слабо: два лучших студента двух курсов), он несколько раз выступал на семинаре Иваненко. И Линде, и Старобинский ушли во внешнюю аспирантуру. Сейчас это знаменитые ученые, авторы первых моделей инфляционной Вселенной – основы современной космологии. Линде работает в Стэнфордском университете. Сейчас он – «советский и американский» ученый.

Не помню точно, но кажется, из-за аспирантуры именно Линде произошел громкий скандал. Кафедру квантовой теории и электродинамики тогда возглавлял академик Леонтович. Он хотел взять кого-то в аспирантуру. Того не оставляли. Леонтович поставил ультиматум, что уйдет с факультета, и ушел в 1971 г. Кафедра квантовой теории по сути развалилась: академики ушли. Чего Фурсов добился? Потеря для факультета была серьезной. В 1982 г. эту кафедру поделили между кафедрой теоретической физики и кафедрой физики высоких энергий, которую возглавлял и возглавляет А.А. Логунов, директор ИФВЭ в Протвино.

Процедура оставления в аспирантуру включала четыре этапа: рассмотрение кафедрой, парткомом факультета, деканом и утверждение списка Ученым Советом факультета. Кафедра меня рекомендовала. Партком стандартно рекомендовал только членов партии, даже с тройками, а против других «возражал» или «не возражал». Против меня партком «не возражал». Потом список попадал к декану В.С. Фурсову (о нем тоже кое-что есть в моей книге «Дмитрий Иваненко – суперзвезда советской физики»). Он окончательно решал, кого оставлять. После (по сути автоматического) утверждения списка Ученым Советом ничего изменить было уже нельзя. Декан меня вычеркнул. Почему? Не знаю. Наверное, из-за Иваненко, а может быть, и не только. Я был самым сильным студентом на курсе.

Не помню, как я узнал, что меня вычеркнули. Осталось в памяти только, что какие-то меры предосторожности были предприняты. Может быть, через профессора В.В. Потемкина, друга Иваненко и знакомого моего папы по ЮНЕСКО. Так или иначе, я это узнал в 12 часов, и в тот же день, в четверг, в 15.30, собирался Ученый Совет. Это была катастрофа! Д.Д. раньше 13 часов звонить было бесполезно, он поздно вставал и выключал телефон. Я прозвонился ему без чего-то 13, и в два часа дня Д.Д. (с немыслимой для него быстротой: он жил на Ломоносовском проспекте, в двух автобусных остановках от факультета) был уже у декана вместе с Потемкиным. Там он прямо поставил ультиматум: или я остаюсь в списке, или он пишет письмо в отдел науки ЦК, что на факультете его притесняют. У Д.Д. была поддержка в ЦК, Фурсов это знал и отступил (возможно, не хотел еще одного скандала, как с Леонтовичем, годом раньше). Меня взяли в аспирантуру физфака.

Я окончил аспирантуру в марте 1976 г., и уже относительно без проблем (получить ставку на факультете всегда проблема) был оставлен работать на кафедре теоретической физики в должности младшего научного сотрудника в группе Иваненко. Но на этом мое образование отнюдь не завершилось.

В 1987 г. я научно познакомился с математиком Luigi Mangiarotti из небольшого университета в городе Camerino в Апеннинах, в центральной Италии (основанного, между прочим, еще в 1336 г.). И уже более 15 лет работаю геометрическими методами (the jet bundle formalism), которыми у него овладел (см. выше многочисленный список наших совместных публикаций в ведущих мировых журналах). Хотя если какая моя работа и войдет в историю физики «всех времен и народов», то это калибровочная теория гравитации, опубликованная в Physics Reports в 1983 г.

Работая с Luigi, я окончательно стал математическим физиком. Есть большая разница между математическими физиками и физиками-теоретиками. Проще всего их различать по журналам, где они печатаются. Математические физики публикуются в «Communication in Mathematical Physics», «Journal of Mathematical Physics», «Journal of Physics A», «Letters in Mathematical Physics», «Reviews of Mathematical Physics», «Journal of Geometry and Physics» (это ведущие мировые журналы по математической физике), но они почти никогда не печатаются в математических журналах и редко – в журналах по теоретической физике. Теоретики мало публикуются в журналах по математической физике, их журналами являются: «Physical Review D», «Nuclear Physics B», «Annals of Physics», «Physics Letters A and B», «Classical and Quantum Gravity», «General Relativity and Gravitation», «Journal of Theoretical Physics». Дело в том, что математические физики оперируют только математически хорошо определенными объектами, а теорфизикам это не так важно. Достаточно, чтобы их теория могла ухватить какую-либо закономерность, а математический лоск на нее наведут потом. Подчас так и происходит. В назидание я всегда привожу своим студентам следующий пример.

Я хорошо помню, как на семинаре Д.Д. Иваненко выступал Абдус Салам – друг Иваненко, один из создателей объединенной модели электрослабых взаимодействий. Тогда он еще не стал Нобелевским лауреатом и был известен мне прежде всего своими работами по «сильной» гравитации. В то время говорили, что он «много бьет по воротам, но все время попадает в штангу». Главной составляющей его теории был так называемый хиггсовский механизм генерации массы элементарных частиц. Салам – теоретический физик, и хиггсовский член в лагранжиан его модели вводился, как говорится, «руками». Поэтому я относился к его теории электрослабого взаимодействия с некоторым математическим снобизмом, и очень ошибся.

Однако теоретики действительно слишком легки на теории. Перефразируя известные слова выдающегося советского математика А.Н. Колмогорова, можно сказать, что «богатство их теорий – от их математического невежества». Меня весьма коробит читать теоретические журналы, и я их давно не читаю. Мне как-то прислали отзыв на одну статью в главном мировом гравитационном журнале «Classical and Quantum Gravity». В нем было написано, что приведенная автором статьи формула ошибочна, но результат все равно интересен (!).

Поэтому мои претензии к физфаку, возможно, не вполне обоснованны. Он готовил и готовит именно по теоретической физике. Проблема, однако, в том, что такой науки скоро не будет. Последняя надежда – на Большой адронный коллайдер в CERN, но и это лишь отсрочка. Не зря я сменил свое научное амплуа.

Впрочем, математики тоже ошибаются, и особенно этим грешат гениальные математики. Они сразу знают правильный результат, и кропотливо выписывать доказательство им неинтересно. Это потом за них делают другие. Например, авторы знаменитой КАМ теоремы ее полного доказательства сами так и не привели. Самого, пожалуй, выдающегося математика XX века Анри Пуанкаре обвиняли в небрежности и спешке с публикациями. К 70-летию другого знаменитого математика Д. Гильберта планировали выпустить собрание его трудов, начали с немецкой дотошностью все готовить заранее, но все равно не успели, поскольку пришлось выправлять множество мелких ошибок и неточностей. В мое время студентов, сдававших спецкурс Боголюбова – Ширкова по квантовой теории поля, обязывали к зачету найти 2-3 ошибки в их книге с целью правки для очередного переиздания.

Наверное, написать серьезную книгу сразу без погрешностей в принципе невозможно: мелкие опечатки, путаница в индексах, скобки, знаки и пр. Когда их обнаруживаешь в своей уже изданной книге, становится досадно, и справедливая поговорка «не ошибается тот, кто ничего не делает», слабо успокаивает. Но еще больше нервничаешь, когда читаешь свое же доказательство: что-то уже забыл, пытаешься восстановить, но не сразу получается – тут уж впору «памперс надевать». Но, как известно, «кто многого хочет, тот много нервничает».

Сами боги

Занимаясь своей наукой, я не философствую. Я – ученый-материалист, и для меня конечной целью науки является объективная истина. Если я получаю неординарный научный результат (весьма редко!), я испытываю своего рода катарсис: облегчение после большого умственного и эмоционального напряжения и эстетическое наслаждение картиной достигнутого. Да, математическая теория может вызывать эстетические ощущения (см. ниже известный тезис Дирака). Более того, как уже говорилось, я чувствую себя словно бог, сотворивший мир. И вот, чтобы пояснить это чувство, мне придется немного пофилософствовать (о своем отношении к современной философии я пишу в разделе «Философия ни о чем»).

Истина – гносеологическая категория. Как уже отмечалось, в материалистической философии объективная истина – это «правильное отражение объективной реальности в мысли». Не буду сейчас обсуждать такое определение (например, что значит «правильное»?). Отмечу только, что, если ограничиться объективной истиной, наукой не является большая часть математики, математической и теоретической физики, развивающих абстрактные математические и теоретические модели без непосредственной связи с реальностью. Истина в таких моделях является конвенциональной, в духе философской концепции конвенционализма, теоретические принципы которого были разработаны великим французским математиком Анри Пуанкаре. Образцовым примером такой истины служит истина в уже упоминавшихся формальных системах в математической логике.

[Тот же Гедель предложил формальную логическую модель бога и доказал его существование в рамках этой модели.]

Конвенциональная истина – неотъемлемый продукт всякой математизированной науки, в том числе, конечно, и теоретической физики. Многие ученые вполне такой истиной удовлетворяются, ограничиваясь своего рода «математическими играми». Время от времени та или иная такая «математическая игра» становится особенно модной, и тогда статьи по соответствующей тематике захлестывают журналы. В 90-е годы это была, например, теория суперсимметрий, а сейчас – струнная теория и некоммутативная геометрия. В квантовой теории не ослабевает увлечение деформационным квантованием. Я тоже играю в эти игры, но стараюсь не упускать из виду реальность. Плохо то, что нет четкого различия между конвенциональной истиной и просто мнением. Любое мнение, определенным образом формализованное, может предстать как конвенциональная истина – законный продукт научной деятельности. Таким образом, происходит размывание понятия истины.

Я являюсь редактором международного журнала по математической физике «International Journal of Geometric Methods in Modern Physics» и получаю статьи из разных стран, переписываясь с их авторами. При этом я наблюдаю определенную особенность менталитета ученых из Индии и Китая. Им чуждо понятие истины, они трактуют истину как мнение. Если статья ошибочна и ее автор получает отказ, он считает, что у меня или рецензента просто другое мнение. Это не удивительно, поскольку представление об истине – продукт древнегреческой, а за ней и европейской культуры. В Индии и Китае свои великие культуры, и древние греки им «не указ». Примечательно, что ученые из мусульманских стран, как правило, следуют европейской традиции, ведь у них не было столь древней и великой культуры. В этой связи тревожит то, что ученые из стран третьего мира в последнее время начинают доминировать в мировых научных центрах и в редакциях ведущих журналов, и наука может утратить свою суть – поиск истины.

Особенностью конвенциональной истины является то, что она сама себе реальность и поэтому абсолютна, но она не однозначна. Суждение, истинное в одной формальной модели, может быть недоказуемым или вообще не выводимым – в другой. В отличие от конвенциональной истины, объективная истина в марксистской материалистической философии, хотя и относительна, но полагается единственной. Реальность единственна, и ее правильное отражение тоже единственно.

До недавнего времени такой точки зрения придерживались и ученые-физики. Более того, был широко популярен тезис Дирака: «Физический закон должен обладать математической красотой». Этот тезис он написал мелом на стене кабинета Д.Д. Иваненко на физфаке МГУ во время своего визита в 1956 г. Почти всю свою научную жизнь я тоже стремился следовать этому тезису, но сейчас понимаю, что ошибался. Современная ситуация в теоретической физике вынуждает признать следующее. Никакая сколько-нибудь сложная физическая система не описывается одной теоретической моделью. Необходимы несколько моделей, каждая из которых имеет свою область приложения и правильно характеризует только какую-то часть или какой-то один аспект физической системы. Пока, казалось бы, ничего страшного. Однако на пересечении областей приложения эти модели, как правило, принципиально не согласуются. Таким образом, в духе приведенного выше тезиса Геделя – Канта, может не существовать одного правильного отражения реальности, то есть объективная истина не обязательно является единственной.

Далеко не всегда реалистические модели удовлетворяют и приведенному выше тезису Дирака. Например, упоминавшаяся объединенная теория электрослабых взаимодействий Вайнберга – Салама – Глэшоу, экспериментально подтвержденная, математически просто корява, не зря мы в свое время «морщили нос». В частности, она содержит фундаментальную константу – так называемый угол смешивания, значение которого ну ни откуда не следует. Я сам как-то безрезультатно потратил месяц, чтобы вывести его тем или иным математическим способом.

Дело в том, что теоретики всегда стремятся развивать теорию в ее наиболее обобщенном виде, например теорию поля на произвольном n-мерном многообразии. Основанная на самых общих принципах, такая теория нередко получается математически красивой. Однако в природе реализуется ее какой-нибудь очень специальный вариант (причем, как будто «ткнули пальцем в небо»), и в нем разрешены те или иные частные конструкции, которые не могут существовать в общем виде. Например, наше пространство – это глобально-гиперболическое параллелизуемое четырехмерное многообразие. Оно, в частности, допускает глобальную систему отсчета и единое время, а в общем случае это невозможно. На таком пространстве существует нетривиальная связность с нулевой кривизной, и поэтому можно строить теорию гравитации с плоской метрикой и ненулевым кручением (теория телепараллелизма), которая сейчас очень популярна. Примечательно также, что из всех размерностей именно размерность 4 обладает следующим специфическим свойством: всякое четырехмерное топологическое пространство допускает бесконечно много неэквивалентных дифференцируемых структур. Существуют соответствующие когомологические инварианты (полиномы Дональдсона), которые различают эти структуры и могут порождать аномальные члены в производящем функционале квантовой теории поля именно на четырехмерном пространстве.

Разнообразие конвенциональных истин и многовариантность объективной истины приводит к тому, что истина в математической и теоретической физике шире реальности и «живет своей жизнью». Более того, она подменяет реальность. Действительно, когда я вижу дерево, я не держу все время в голове, что это лишь чувственный образ, а не реальное дерево, иначе «шизануться» можно. Так же и с мысленными образами. Уже само слово «истина» выражает такую подмену. Оно – существительное, которое в приведенном выше марксистском определении характеризует действие: отражение реальности, а не образ реальности. Обычно так и говорят: «установить истину», «в споре рождается истина». Научный результат, конечно, не преобразует реальность (хотя если Бог все же есть, то…). Однако он может изменить не только конвенциональную истину, но и варианты объективной истины, то есть изменить мир в восприятии людей. Например, открытие закона Ньютона, как и создание квантовой механики, конечно же, не породили другую реальность, но для человечества мир стал другим. Поэтому ученый, открывающий новое, вправе почувствовать себя богом (впрочем, за всех я не отвечаю). Но почему именно богом?

Как уже отмечалось, концепция истины (не будем конкретизировать ее определение) является порождением древнегреческой культуры. Она возникла благодаря одной особенности религии древних греков, а именно: их боги не всемогущи. Есть судьба, над которой они не властны. Зевс приковал Прометея не в наказание за то, что он дал людям огонь, а потому что Прометей знал его судьбу и знал, как ее избежать (нет, не изменить, а просто выбрать другой вариант). Зевс «волочился» за одной женщиной, сын которой будет могущественнее своего отца, кто бы он ни был. В конце концов Прометей «раскололся», но не ради прекращения страданий (электрических утюгов тогда еще не было, и применялись орлы), а по неким идейным соображениям. Концепция истины выражала представление древних греков о существовании чего-то объективного, не зависящего от воли людей и даже богов. А значит, истина превыше всего: «Платон мне друг, но истина дороже». Наверное, Аристотель все же сказал: «Платон мне учитель…». Среди учеников Платона были Аристотель, Евклид и астроном Евдокс, доказавший шаровидность Земли. Вот это была научная школа! Рассказывают, что над своим домом Платон написал: «Да не войдет сюда не знающий геометрии». Математика (сводившаяся тогда к геометрии) чрезвычайно впечатляла греков. Ее законы были для них не просто утилитарными правилами возведения инженерных сооружений, а конкретным воплощением абсолютной истины, справедливой всегда, везде и для всех. Перефразируя известное выражение, «теорема Пифагора и в Африке теорема Пифагора».

Ученый устанавливает истину, которая потом не подвластна никому и ничему, она становится справедливой всегда, везде и для всех. Поэтому ученый вправе ощущать себя богом, сотворяющим мир.

Приходится признать, что представление об объективной истине не так широко распространено, как хотелось бы. Я уже говорил о своих проблемах как редактора международного журнала. Понятие объективной истины чуждо всем существующим мировым религиям. В Европе оно сохранилось как наследие греко-римской культуры благодаря математике, римскому праву («закон есть закон») и реанимации Аристотеля Фомой Аквинским в XIII веке. В шутку можно сказать, что из всего человечества концепции истины придерживаются только 10% белых мужчин. Причем у женщин проблема с истиной является, по-видимому, системной, а не культурологической, о чем свидетельствует такое житейское наблюдение: обвинение в нелогичности не производит на женщину никакого негативного впечатления.

Отмечу также, что ученый, в силу профессии имеющий дело с истиной, в обыденной жизни испытывает одно существенное неудобство: когда он врет, он знает, что врет, даже если врет самому себе.

За все время своей научной деятельности я лишь несколько раз переживал столь смакуемое мной по всей книге «божественное» (или «божеское»?) удовлетворение. Упомяну только следующие два.

Начну с калибровочной теории гравитации (расслабься, читатель, формул не будет). Развитие калибровочной теории поля в 50 – 70-х годах дало в результате единую картину фундаментальных взаимодействий (электромагнитного, слабого и сильного) посредством калибровочных полей (Нобелевская премия 2004 г.) и привело к построению в 70 – 80-е годы сначала объединенной теории электромагнитного и слабого взаимодействий (Нобелевские премии 1979 и 1999 гг.), подтвержденной экспериментально (Нобелевская премия 1984 г.), а затем – электрослабого и сильного взаимодействий. Примером калибровочного поля является электромагнитный потенциал. Математически классические калибровочные поля адекватно описываются связностями на расслоениях. Первая работа Ч. Янга и Р. Миллса по современной калибровочной теории для изоспиновой группы появилась в 1954 г, а уже в следующей работе Р. Утиямы в 1956 г. их теория была обобщена на произвольную группу симметрий. В СССР на калибровочную теорию сначала обратил внимание только Д.Д. Иваненко, и в 1964 г. он выпустил уже упоминавшийся сборник «Элементарные частицы и компенсирующие поля». Но уже во второй половине 60-х вышли работы Л.Д. Фаддеева, В.Н. Попова и А.А. Славнова по квантовой теории калибровочных полей. В 1978 г. появилась книга Л.Д. Фаддеева и А.А. Славнова «Введение в квантовую теорию калибровочных полей», которая вывела отечественную теорфизику на передовые позиции в этой области. Есть авторитетное мнение, что А.А. Славнова «обошли» с Нобелевской премией 2004 г. Сейчас он академик РАН, зав отделом теоретической физики «стекловки» (МИАН) и по совместительству зав. кафедрой теоретической физики физфака МГУ.

Уже в своей работе 1956 г. Р. Утияма выдвинул первую калибровочную модель гравитации как калибровочную теорию группы Лоренца. С 1915 г. гравитационное поле, хотя и не без проблем, описывалось как псевдориманова метрика в рамках эйнштейновской ОТО (Общей теории относительности, более корректно: ОТО Эйнштейна – Гроссмана с лагранжианом Гильберта и уравнениями Гильберта – Эйнштейна). ОТО стала первой геометризованной теорией поля, и вслед за ней в 20-х годах последовали многократные попытки построения объединенной теории гравитации и электромагнетизма (так называемые «единые теории» 20-х годов). Они закончились неудачей. Причина была чисто математическая. Говоря современным языком, электромагнитное поле описывали в рамках геометрии касательного расслоения, а оно является связностью на комплексном линейном расслоении. Но тогда общей теории расслоений не существовало, она возникла только в 50-е. Эйнштейн упорно продолжал строить единую теорию до самой смерти в 1955 г. Однако «второго Гроссмана» не нашлось, и некто бросил едкую шутку: «*n*-ая единая теория Эйнштейна». Впрочем, кое-кто до сих пор «дует в ту же дуду»: мне приходят статьи о единой теории гравитации и электромагнетизма, и я вновь и вновь разъясняю теоретикам одну и ту же математическую ошибку.

Будучи безуспешными в описании электромагнетизма, единые теории 20-х годов в то же время стимулировали развитие геометрии псевдоримановых пространств с произвольной линейной связностью. Она стала математической базой так называемых обобщенных теорий гравитации, где гравитационное поле описывается парой: связностью и метрикой, удовлетворяющими условию метричности (формализм Палатини). В 1934 г. Д.Д. Иваненко издал перевод книги А. Эддингтона «Теория относительности», посвященной таким теориям. Кроме того, в те же 20-е годы была разработана тетрадная формулировка теории гравитации, в которой метрика заменялась тетрадным полем. В 1929 г. Д.Д. Иваненко и В.А. Фок использовали эту формулировку для своего обобщения уравнения Дирака и описания параллельного переноса спиноров в гравитационном поле (знаменитые коэффициенты Фока – Иваненко). Нобелевский лауреат Абдус Салам назвал их теорию первой калибровочной моделью (а он знал толк в калибровочных теориях).

Вернемся вновь в 1956 г., к работе Утиямы. Он рассматривал теорию гравитации в формализме Палатини, отождествляя гравитационную связность с калибровочным полем группы Лоренца. Однако проблема возникла с интерпретацией метрического (или эквивалентно тетрадного) гравитационного поля в рамках формализма калибровочных полей. Утияма ее не решил. Вскоре T. Kibble, D. Shiama и др. обратили внимание, что тетрадное поле по своему математическому виду напоминает калибровочное поле группы трансляций. Поэтому они стали развивать калибровочную теорию гравитации в разных вариантах как калибровочную модель группы Пуанкаре, содержащей подгруппу Лоренца и подгруппу трансляций. Это была ошибка, причем чисто математическая.

В группе Иваненко тоже занимались калибровочной теорией гравитации. Я присоединился к этой работе сразу после диплома. Моя первая статья по калибровочной теории гравитации вышла в 1974 г. Одновременно я занялся общей теорией калибровочных полей и ее геометрической формулировкой в терминах расслоений. Первые работы в этом направлении появились, возможно, в конце 60-х. Пришлось углубиться в дифференциальную геометрию. Вскоре стало ясно, что калибровочная теория гравитации существенно отличается от других калибровочных моделей, поскольку калибровочными преобразованиями в ней являются общие ковариантные преобразования, а не группы Ли внутренних симметрий. Математическое различие состояло в том, что калибровочные модели типа Янга – Миллса – Утиямы строятся на главных и ассоциированных расслоениях, а теория гравитации – это калибровочная теория на так называемых натуральных расслоениях, включая уже упоминавшиеся касательные расслоения.

Я употребляю здесь язык расслоений не с целью «свою ученость показать», а потому что на этом геометрическом языке все в калибровочной теории поля формулируется точно и исчерпывающим образом. Начиная с 80-х годов геометрические методы получили очень широкое распространение в теоретической физике. Дело в том, что геометрические модели математически весьма содержательны. Отождествив какую-либо физическую величину с тем или иным геометрическим объектом, я сразу могу получить развернутую теорию – это, как говорится, лишь «дело техники».

Хрестоматийным примером служит эйнштейновская ОТО. В СТО (Специальной теории относительности), сформулированной в работах А. Пуанкаре и А. Эйнштейна (1905 г.) и завершенной Г. Минковским (1908 г.), галилеевские преобразования ньютоновского пространства были заменены лоренцевскими. Уравнения электродинамики Максвелла (с которых, собственно, все и началось) уже были инвариантны относительно этих преобразований, а уравнения механики подверглись релятивизации. Следующим естественным шагом было построение релятивистской теории гравитации (сейчас так называется теория гравитации А.А. Логунова). Первым релятивистские поправки к закону Ньютона попробовал получить А. Пуанкаре. Говоря современным языком, он рассмотрел прямое запаздывающее гравитационное взаимодействие, предполагая, что скорость распространения гравитации равна скорости света. Релятивистские уравнения самого гравитационного поля в рамках СТО попытались установить М. Абрагам и Г. Нордстрем (1911 г.) путем замены классического трехмерного уравнения Лапласа – Пуассона для ньютоновского скалярного гравитационного потенциала четырехмерным уравнением в разных вариантах. Но СТО позволяла объяснить только часть меркурианской аномалии (сдвига перигелия орбиты Меркурия).

В отличие от этих попыток непосредственной релятивизации ньтоновского закона тяготения, А. Эйнштейн поставил во главу угла принцип эквивалентности (1907 – 1911 гг.), опиравшийся на факт равенства инертной и гравитационной масс, известный уже Г. Галилею, И. Ньютону, Ф. Бесселю и экспериментально вновь с большой точностью подтвержденный Р. Этвешем в конце XIX века. Отсюда последовало фундаментальное признание движения в поле тяжести как движения по инерции в искривленном пространстве. Однако решающий шаг в развитии теории был сделан, только когда А. Эйнштейн в сотрудничестве с математиком М. Гроссманом отождествили гравитационное поле с псевдоримановой метрикой (1912 – 1913 гг.). Все! Остальное было «делом техники». Но математической техники Эйнштейну как раз и не хватало. Он долго мучился с уравнениями гравитационного поля. Окончательно эти уравнения были установлены в ноябре 1915 г. немецким математиком (впоследствии «великим немецким математиком») Д. Гильбертом, воспринявшим программу Эйнштейна и сразу предложившим лагранжиан гравитационного поля и его уравнения. Эйнштейн написал правильные уравнения несколько дней спустя, и до сих пор дискутируется, знал ли он доклад Гильберта, так же как остается вопрос, видел ли он статью Пуанкаре по СТО.

Будучи студентом, я как-то купил только что изданные четыре тома трудов Эйнштейна, чтобы приобщиться к «святому» по первоисточнику. Читать это было невозможно: так все изменилось – и я их выкинул. Кстати, во время командировки в ГДР, в Потсдам, в институт, возглавлявшийся Г.-Ю.Тредером, другом Иваненко, я побывал в домике Эйнштейна на берегу озера, в котором он жил до бегства из Германии. Скромный деревянный дом дачного типа, он находился на балансе института, и Тредер обычно проводил там выходные. Никакого особого креативного духа я там не ощутил, в отличие от моей любимой Флоренции.

Вернусь к калибровочной теории гравитации. Ее формулировка в терминах расслоений сразу показала, что метрическое гравитационное поле является не калибровочным, а хиггсовским полем, ответственным за спонтанное нарушение пространственно-временных симметрий. Никаких изощренных математических построений не потребовалось. Этот факт следует непосредственно из самого определения псевдоримановой метрики, которое является частным случаем определения хиггсовского поля в общей теории калибровочных полей в формализме расслоений.

Хиггсовское поле (или хиггсовский вакуум) присутствует в калибровочной теории, помимо калибровочных и материальных полей, в ситуации спонтанного нарушения симметрий. В современных объединенных моделях фундаментальных взаимодействий почти все симметрии (за исключением цветовой симметрии кварков) нарушены, и взаимодействие с хиггсовским вакуумом ведет к появлению массы у элементарных частиц – это так называемый хиггсовский механизм генерации массы (Нобелевская премия 2008 г.). Уже упоминавшееся экспериментальное подтверждение теории электрослабого взаимодействия косвенно свидетельствует и о существовании хиггсовского вакуума. Одной из задач нового Большого адронного коллайдера в CERN как раз и является обнаружение хиггсовских частиц. Правда, никто толком не знает, какие они должны быть. Дело в том, что до сих пор нет какой-либо теории хиггсовского вакуума, хотя высказывались различные предположения: что это своего рода конденсат, что он и есть «темная материя» и т. д. Я раньше тоже несколько раз подступал к этой проблеме и в будущем, в оставшееся еще у меня время, планирую сосредоточиться именно на ней. Чисто математическая трудность состоит в том, что для описания хиггсовского вакуума надо научиться оперировать с неэквивалентными представлениями квантовых алгебр.

В конце 70-х я занимался классическим хиггсовским полем, буквально подобрав ему описание в рамках теории расслоений с редуцируемой структурной группой. Тогда на эту тему была еще работа польского математика А. Траутмана, и чуть позже появился болгарский препринт. Полученный результат я уже сообщил, но выпишу его еще раз отдельной строкой:

Гравитационное поле, описываемое псевдоримановой метрикой, по своей физической природе является классическим хиггсовским полем, ответственным за спонтанное нарушение пространственно-временных симметрий.

Спонтанное нарушение симметрий в калибровочной теории гравитации обусловлено принципом эквивалентности в его геометрической формулировке. Эта формулировка пришла мне в голову в троллейбусе, когда я возвращался с семинара Иваненко. На семинаре обсуждались различные варианты принципа эквивалентности (слабейший, слабый, среднесильный, сильный и т. д.) в связи с вышедшей незадолго в русском переводе книгой уже упомянутого Г.-Ю. Тредера «Теория гравитации и принцип эквивалентности». Все эти варианты слишком физические, чтобы служить основанием математической калибровочной теории гравитации. Они крутились у меня в голове, пока троллейбус «полз» до «Юго-Западной» (было поздно, в троллейбусе почти никого, и я не стал пересаживаться на метро). И вот, отжимая «физическую воду», я пришел к идее сформулировать принцип эквивалентности в духе геометрии инвариантов Ф. Клейна как требование существования лоренцевских инвариантов в некоторой системе отсчета, что в свою очередь предполагает редукцию структурной группы. Я горжусь этой формулировкой, можно даже сказать люблю ее. Потому что это был образцовый творческий акт, концентрированный по теме, четкий по результату, занявший всего 20 минут.

В этой связи надо отметить, что Д.Д. Иваненко и его научный семинар удивительным образом создавали креативную атмосферу. Сам Д.Д. был богат на стоящие идеи. Для меня это важно. У меня самого дефицит идей. Как правило, они – результат логических построений, и у меня очень мало эвристических («сумасшедших») идей. Про уже упоминавшегося В.А. Фока говорили, что он «поймает какую-то физическую идею, потом сам разработает, что вы не успели, а вас отставит в сторону». Я тоже ловлю идеи. «Дайте мне идею, а остальное я сделаю сам» – одна из моих любимых фраз. Идеи мне подсказывал Д.Д., идеи дает мой итальянский коллега Luigi Mangiarotti. Именно он предложил мне применить геометрический аппарат расслоений в классической механике. Я сначала рассмеялся и «по-дружески» порекомендовал ему заглянуть в Ландау – Лифшица. Но потом оказалось, что математически механика разработана гораздо хуже, чем классическая теории поля, что все очень непросто, – и мы получили неплохие результаты. С его подачи я даже «замахнулся» на знаменитые теоремы Лиувилля – Арнольда и Мищенко – Фоменко об интегрируемых системах и обобщил их на случай некомпактных инвариантных подмногообразий. Некоторые идеи я «ловил» и у своих аспирантов О. Захарова и Д. Башкирова. Однако в стандартном понимании совместная работа с кем-либо у меня не идет: пока то да се, я уже все сделал, прямо «по Фоку». Но в сторону я никогда никого не отставлял. Замечу, что именно Олег Захаров был зачинателем того, что потом вылилось в ковариантную (полисимплектическую) гамильтонову теорию поля. Он опубликовал статью в «Journal of Mathematical Physics». Но у него возникли трудности с ковариантными гамильтоновыми уравнениями, а я их построил.

Трактовка гравитационного поля как хиггсовского позволила построить калибровочную теорию гравитации. Мы опубликовали уже упоминавшийся обзор на эту тему в ведущем мировом журнале «Physics Reports». И для закрепления успеха я напечатал еще статью с доказательством того, что тетрадное поле и калибровочное поле трансляций – это разные математические объекты. Наш результат диссонировал со всем, что тогда делалось в этом направлении, и его встретили холодно. Он не оспаривается, признается, и наша статья в «Physics Reports» уже ритуально цитируется в числе основополагающих работ по калибровочной теории гравитации. Однако калибровочная теория группы трансляций для гравитации продолжает развиваться так, будто мое математическое доказательство, что это неверно, написано по-китайски. Оно действительно написано как бы «на китайском» – на языке расслоений, который подавляющее большинство теоретиков не знает. Я отношусь ко всему этому спокойно. Есть жесткая шутка: «Не старайтесь переубедить своих оппонентов, дождитесь, когда они умрут». Я следую ее первой части и даже публикую альтернативные работы в своем журнале.

Действительно, из-за чего мне волноваться? Тезис, приведенный выше курсивом, является математическим результатом. Он установлен НАВСЕГДА, согласен кто-либо с ним или не согласен, будут ли его связывать с моим именем или нет. И он справедлив везде, во всех уголках Вселенной!

Очень коротко приведу еще один, совершенно другой по своему характеру, результат. В отличие от квантовой теории поля и даже классической механики, классическая теория поля допускает исчерпывающую математическую формулировку на языке расслоений. Следуя общему стилю геометрических моделей, достаточно отождествить классические поля с сечениями расслоений, а остальное – «дело техники». Я и мои итальянские коллеги эту «технику» сделали. Итоговой стала наша недавняя книга «Advanced Classical Field Theory». Реально существуют всего три классических поля: электромагнитное, гравитационное и спинорное, но в теории рассматриваются и другие классические поля. Дело в том, что теория квантовых полей традиционно строится путем квантования классических полей, и, например, квантовая теория калибровочных полей базируется на модели классических неабелевых калибровочных полей, которых, по-видимому, нет в природе. Поэтому мы разрабатывали наиболее общий вариант редуцированной вырожденной лагранжевой теории классических полей на произвольном многообразии. Она адекватно формулируется на языке так называемых расслоений струй (jet bundles). Главная проблема состоит в том, что уравнения поля в общем случае не являются независимыми, а подчиняются тождествам Нетер, которые тоже не независимы, а удовлетворяют тождествам Нетер первого порядка, и т. д. Выстраивание этой иерархии тождеств Нетер потребовало весьма изощренной математической техники (это не принцип эквивалентности в троллейбусе придумать). Более того, мы нашли необходимые и достаточные условия, когда эти тождества вообще определены, то есть существуют полевые модели, которые в принципе не могут быть до конца описаны. В результате мы получили полную математическую формулировку классической теории поля, настолько полную, что в духе тезиса Геделя – Канта установили границы ее неполноты. Конечно, эта формулировка технически весьма сложная, и вряд ли она когда-нибудь понадобится во всем своем объеме. Но этот кусок теоретической физики нами НАВСЕГДА сделан!

Следует отметить, что чем полнее математическое описание какой-либо системы, тем оно технически сложнее. Я знаю несколько хороших книг, которые дают скрупулезное изложение некоторых важных математических тем, но читать их очень трудно, и они не пользуются популярностью. Боюсь, что наша вышеупомянутая книга именно такого рода. Теоретики заведомо ее читать не смогут, она для математических физиков и математиков.