

# Egyváltozós integrálás

készítette: Bodnár Péter (BOPNAAT.SZE)

*bodnar.peter@stud.u-szeged.hu*

(Közelítő és szimbolikus számítások, 2006. őszi félév)

## ***Az esszé fejezetei***

Az esszé célja az integrálás problematikájának bemutatása, hangsúlyt fektetve a numerikus integrálási módszerekre és a szoftveres megvalósításokra.

Először kimondja az integrálás és a hozzá kapcsolódó témakörök definícióit, majd nagy vonalakban vázolja az integrálás elvét. Bevezeti a primitív függvényt, a határozatlan és a határozott integrált. Egy példafüggvényen keresztül szemlélteti a Darboux-integrálközelítő összegeket, és a Riemann integrált, majd kiterjeszti a módszert tetszőleges folytonos, korlátos (differenciálható) függvényekre. Kimondja az integrálás szabályait, azonosságait, majd az integrálás alaptételét, a Newton-Leibniz szabályt. Kitér az integrálás alkalmazására a természettudományokban, majd említést tesz a módszer nehézségeiről, korlátairól, ami elvezet a numerikus integráláshoz.

Kifejti a numerikus integrálás, a kvadratúra módszerét és sajátosságait. Kitér szükségességére, hibáira, és egyéb lehetőségeire. Említést tesz az interpolációs kvadratúráról és tárgyalja a zárt alakú Newton-Cotes formulákat. Ezután néhány példa következik. Több programmal szemlélteti a numerikus integrálás megvalósítását, majd összefoglalja és értékeli az eredményeket.

## ***Bevezetés az egyváltozós integrálásba***

### **A határozatlan integrál**

A valószínűségszámításban és a fizikában gyakran előfordul, hogy egy függvény deriváltjának (sűrűségfüggvény, sebességfüggvény) ismeretében meg kell határozni annak eredeti függvényét (eloszlásfüggvény, út függvény). Gyakran szükség van arra is, hogy meghatározzuk egy függvény görbéje alatti terület értékét. Ezekre a problémákra az integrálás adja meg a választ.

Egy  $f$  függvény **primitív függvényének** nevezzük azt az  $F$  függvényt, amelyre teljesül, hogy:

$$F'(x) = f(x), \text{ és } F \text{ differenciálható.}$$

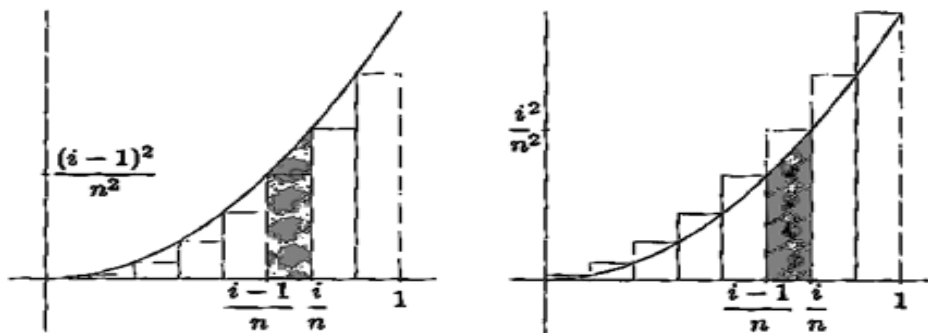
Egy függvénynek végtelensok primitív függvénye képezhető konstans hozzáadásával. Például a  $2x$  primitív függvénye  $x^2+c$ , ahol  $c$  tetszőleges valós szám lehet.

Az  $f$  függvény **határozatlan integráljának** nevezzük a primitív függvényeinek halmazát.

## A határozott integrál

Egy függvény **határozott integrálja** adott tartományon egy szám, aminek szemléletes jelentése a függvény görbéje alatti terület mérőszáma.

Hogyan jutunk el egy függvény határozott integráljához? Vegyünk egy egyszerű esetet: kíváncsiak vagyunk az  $x^2$  függvény **görbe alatti területére**  $[0;1]$  intervallumon. Folytonos függvényről van szó, ezért alkalmazható rá a következő gondolatmenet. Ránézésre belátható, hogy a keresett terület  $0$  és  $1$  közé esik. Osszuk fel a  $[0;1]$  intervallumot  $n$  egyenlő részre, és képezzünk téglalapokat a következő módon:



A bal oldali ábrán a téglalapok függőleges oldalát a függvénygörbe  $[(i-1)/n; i/n]$  tartományon vett minimuma adja, míg a bal oldalin a maximuma. Ezen téglalapok területösszege külön-külön kiszámolható, és tudjuk, hogy a függvény görbe alatti területe ezen téglalapok területösszegei közé esik. Ezeket a területösszegeket Darboux-féle alsó és felső integrálközelítő összegnek nevezzük. A Darboux-féle integrálközelítő összegek matematikai alakja:

$$\underline{s}(f, B_n) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}), \text{ ahol } m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

$$\bar{s}(f, B_n) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}), \text{ ahol } M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

A beosztás finomításával a közelítő összegek differenciája nem növekszik. Bizonyítható, hogy a beosztás növelésekor az alsó közelítő összeg nem csökken, és a felső közelítő összeg nem növekszik.

Az alsó összegek halmaza felülről, a felső összegek halmaza alulról korlátos. A teljességi axióma szerint létezik az alsó összegek legkisebb felső korlátja. Ez a **Darboux – féle alsó integrál**

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \{ \underline{s}(f, B_n) \},$$

ahol a supremum képzése az összes beosztásra történik, azaz az alsó integrál az alsó összegek halmazának legkisebb felső korlátja.

A teljességi axióma következménye szerint létezik a **Darboux – féle felső integrál**:

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \{ \bar{s}(f, B_n) \},$$

ahol az infimum képzése az összes beosztásra történik, azaz a felső integrál a felső összegek halmazának legnagyobb alsó korlátja.

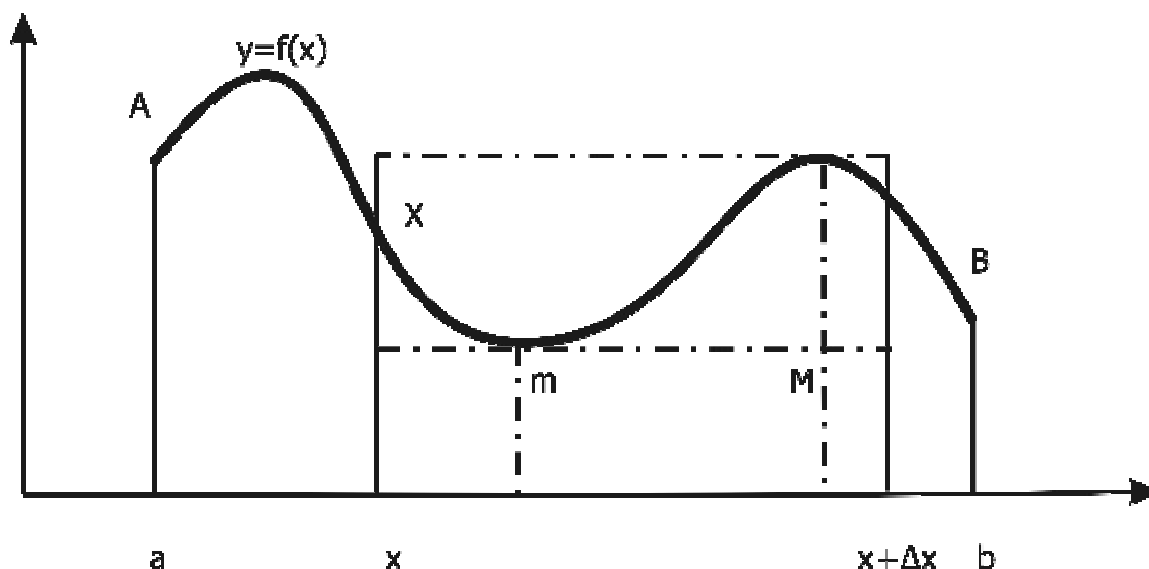
Korlátos függvény alsó és felső integrálja mindig létezik!

*Darboux tétel* (bizonyítás nélkül): Ha az  $f$  függvény korlátos az  $[a, b]$  intervallumon, akkor bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $\delta > 0$ , hogy minden  $B_n$  beosztásra, amelynek finomságára teljesül, hogy  $|B_n| < \delta$  érvényes:

$$0 < \int_a^b f(x) dx - \underline{s}(f, B_n) < \varepsilon, \quad 0 < \bar{s}(f, B_n) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon.$$

A fenti példában ( $y=x^2$ )  $[0;1]$  a sorozatok végtelenben vett határértéke rendre  $1/3$ . Mivel tudjuk, hogy a függvény görbéje alatti terület a két sorozat határértéke között van (rendőrelv), ez az érték is  $1/3$ .

A beosztás végtelen finomításával tehát meghatározható a határozott integrál értéke. Hasonló eredményre jutunk, ha vesszük az adott függvény primitív függvényét, és a keresett intervallum vég és kezdőpontján felvett értékeinek különbségét képezzük.



A Darboux alsó és felső integrálközelítő összeg az adott beosztáson kialakult tartományok minimum illetve maximum értékeivel képezi a téglalapokat, amivel az integrál értékét közelítjük. Ha az adott tartományon ehhez a függvény egy tetszőleges pontját használnánk a számoláshoz, akkor a Riemann-féle integrálközelítő összeghez jutunk. Ez ellentétben a Darboux-féle integrálközelítő összeggel, függ az adott intervallumon választott pont értékétől is, nem csak a beosztás finomságától.

Egy függvény **Riemann-integrálható** adott  $[a;b]$  intervallumon, ha a Darboux alsó és felső integrálja megegyezik. Ekkor ezt az értéket a függvény  $[a;b]$  intervallumon vett határozott integráljának nevezzük. Jele:

$$\int_a^b f(x) dx$$

**Geometriai jelentése** a függvény görbéje, az  $x$  tengely, valamint az  $a$  és  $b$  pontokba állított  $x$ -re merőleges egyenesek által határolt zárt terület. Ha ez az érték negatív, azt úgy értelmezzük, hogy a függvény az  $x$  tengely alatt fut, és a közbezárt terület nagysága a határozott integrál abszolút értéke. Adott intervallumon vett határozott integrál tehát a függvény  $x$ -tengely alatti és feletti tartományok előjeles területének összegét jelenti.

Ha az intervallum kezdő és végpontját felcseréljük, az integrál értéke ellentettjére vált.

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

Homogenitási szabály:

$$f \in R_{[a,b]}; c \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b cf'(x) dx = c \int_a^b f'(x) dx$$

konstanssal szorzott függvény integrálja úgy is meghatározható, hogy a beszorzást a függvény integrálása után végezzük el.

Additivitási szabály:

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

két függvény összegének integrálja megegyezik a függvények integráljának összegével.

## Az integrálás alaptétele

Az integrálás alaptétele a **Newton-Leibniz szabály**. Ha  $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos, integrálható  $[a;b]$ -n és  $F: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  primitív függvénye  $[a;b]$ -n akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x)]_a^b$$

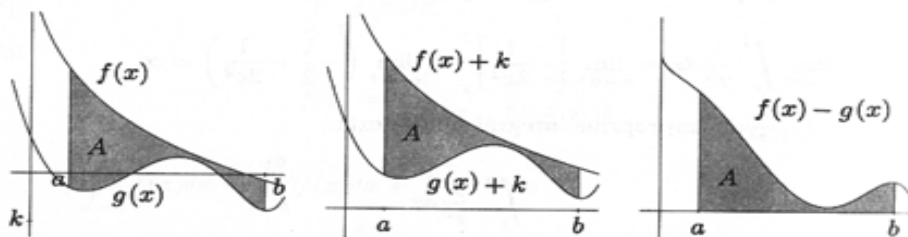
A Lagrange-féle középértéktétel segítségével belátható, hogy ezen érték mindig az alsó és felső integrálközelítő összeg közé esik. A bizonyítás teljes értékű, mivel ezek a számok az adott feltételek esetén megegyeznek. Matematikai leírása:

$$\underline{s}(f, B_n^-) \leq \Phi(b) - \Phi(a) \leq \bar{s}(f, B_n^-); n = 1, 2, 3, \dots$$

## A határozott integrál alkalmazásai:

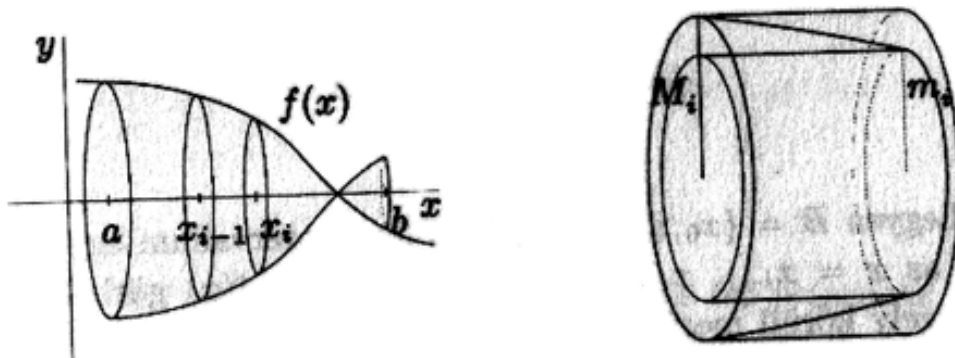
A határozott integrál geometriai jelentéséből triviálisan következik, hogy ha  $f$  és  $g$  folytonosak  $[a;b]$ -n,  $f(x) \geq g(x)$  minden  $x \in [a;b]$  esetén, akkor az  $x=a$ ,  $x=b$  és  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  grafikonok által határolt síkidom területe:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



Továbbá ha  $f$  folytonos  $[a;b]$ -n és  $f$  függvény  $x$  fölé eső ívdarabját  $x$ -tengely körül megforgatjuk, az így kapott forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Az állítás belátható a Darboux-féle integrálközelítést téglalapok helyett hengerekkel alkalmazva. Használhatjuk tehát a határozott integrált forgástestek térfogatának meghatározására. Nem tartozik szorosan a témához, de a határozott integrál alkalmazásával szépen bizonyítható nehezen becsülhető testek, pl a gömb térfogata, ha egy negyedkör egyenletével megadott függvény alatti negyedkörlapot megforgatunk.

$$V = \pi \left[ R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \frac{4R^3 \pi}{3}$$

Ha  $f$  folytonosan differenciálható  $[a;b]$ -n akkor meghatározható a függvény görbéjének  $[a;b]$ -re vett ívhossza.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Végül az  $[a;b]$ -n pozitív, folytonosan differenciálható  $f(x)$  függvény  $[a;b]$  fölé eső ívdarabjának  $x$  tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának felszíne:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Vonalak hosszúsága, területek és térfogatok nagysága, momentumok (forgatónyomaték, sűrűségek stb.), függvények átlaga és skalárszorzatai (pl. Fourier-együtthatók) mind integrál formájában fejezhetők ki.

A fizika megmaradási törvényei alapvetően integrálegyenletek alakjában vannak leírva (amelyek deriváltakat tartalmaznak); ezekből differenciálegyenleteket lehet levezetni, de numerikus megoldásuknál gyakran az integrálalakból indulnak ki.

### **Az integrálás nehézségei:**

A fenti integrálási szabályok csak a megadott feltételek mellett alkalmazhatók, nem használhatók fel tetszőleges függvény határozott integráljának meghatározásához. Ilyenek például a nem korlátos függvények, amelyek végtelenben vett határértékeit nehézségek árán, improprius integrálok bevezetésével oldhatjuk meg. Ezen felül vannak olyan függvények, amelyeknek nem tudjuk előállítani a primitív függvényét. Ilyen például a közgazdaságtan területén gyakran előforduló  $e^{-2x}$  függvény. Matematikai módszerrel belátható, hogy ennek a függvénynek nem létezik zárt alakú primitív függvénye.

### **Numerikus integrálás**

Az integrálás bonyolult függvények esetében időigényes, és bonyolult művelet. A fenti problémákat hozzávéve felmerül az igény, hogy meghatározzuk olyan függvények integrálját, amelyeknek nincs primitív függvénye, illetve gépi módszerrel könnyen és gyorsan meghatározható legyen tetszőlegesen összetett függvény határozott integrálja tetszőleges pontossággal, az időigényt figyelembe véve.

Szemben az előző analitikus hozzáállással, sok esetben a numerikus integrálás segítségével egyszerűbben és gyorsabban juthatunk el a kívánt megoldáshoz. Számos program nyújt ehhez segítséget, ilyenek például a Matlab és a Maple szoftverek. A programok által adott eredmények természetesen semmit sem érnének, ha nem adnának tájékoztatást az eredmény pontosságáról, esetleges hibáiról. A színvonalasabb szoftverek a bonyolultabb integrandusoknál üzenetekkel hívják fel a figyelmet arra, hogy analizáljuk a kapott eredményt. Ez itt azt jelenti, hogy megvizsgáljuk, vajon az integrandusnak vannak-e

szingularitásai (pólusai, ugrások), gyorsan oszcilláló részei, végtelen intervallum esetén milyen gyorsan csökken nulla felé.

A numerikus integrálást másképpen **kvadraturának** is nevezzük.

Induljunk ki a Riemann-féle értelmezésből. Ha  $f(x)$  görbe alatti terület nagyságát,  $I$ -t keressük, megadható rá egy  $n$  osztópontot tartalmazó beosztással meghatározott közelítés:

$$I_n(f) := \sum_{i=0}^n a_i f(x_i), \quad x_i \in [a, b],$$

A fenti összefüggésben az  $a_i$  értékeket súlyoknak,  $x_i$ -ket alappontoknak nevezzük.

A kvadratura képletet az alábbi formában szokás megadni:

$$I_n(f) = I_n(f, a_0, x_0, \dots, a_n, x_n)$$

A rövidség kedvéért gyakran csak  $I_n(f)$ -et használunk.

A kvadratura-formulák megtartják az integrálásnál már megismert homogenitást és additivitást:

$$Q_n(\alpha f) = \sum_{i=1}^n w_i \alpha f(x_i) = \alpha \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) = \alpha Q_n(f).$$

$$Q_n(f + g) = \sum_{i=1}^n w_i (f(x_i) + g(x_i)) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) = Q_n(f) + Q_n(g),$$

(megjegyzés: ebben a példában a súlyokat  $w_i$  értékek, az integrál értékét  $Q$  jelöli)

Mivel a kvadratura egy közelítés, be kell vezetnünk a **képlethiba** fogalmát. Jele  $R_n$

A képlethibát úgy számítjuk ki, hogy a határozott integrál értékének és a kvadraturának a különbségét képezzük.

Akkor pontos a kvadratura formula  $f(x)$ -re, ha annak képlethibája 0. Ha  $f(x)$  tulajdonságai (deriválhatóság, deriváltak korlátai) ismertek, akkor a formula képlethibája jól becsülhető.

Sok esetben nem áll fenn ilyen könnyű elemzési lehetőség. Ha csak néhány függvényérték ismert bizonyos helyeken, a kvadratura formula képlethibáját polinomokon vizsgáljuk.

A kvadratura formula pontossági rendje (röviden rendje) az  $r$  természetes szám, ha az pontos az  $1, x, \dots, x^r$  hatványfüggvényekre (tehát a képlethibája nullát ad minden  $r$ -nél nem nagyobb fokú hatványfüggvényre), de  $r+1$ -ed fokúra már nem pontos.



A rend meghatározása algebrai egyenletrendszerrel történhet. Egy egyszerűbb megoldás, ha az alappontokat rögzítjük, így a súlyokra lineáris egyenletrendszert kapunk, ami már könnyen megoldható. A  $Q_n$  n alappontos kvadratura-formula rendje legfeljebb  $2n-1$  lehet.

Ha 0 rendű formulát akarunk előállítani, pontosnak kell lennie  $f(x) = 1$ -re.

## Interpolációs kvadratura képletek

Abból indulunk ki, hogy  $f$ -et közelítjük a Lagrange-féle  $n$ -edfokú polinommal, majd a polinom integrálját számítjuk ki. Ezzel eljutunk egy interpolációs kvadratura kélethez.

$$I_n(f) := I(L_n(f)) = \sum_{i=0}^n f(x_i) a_i^{(n)},$$

Minden  $n$  alappontra épülő interpolációs kvadratura formula rendje legalább  $n-1$ . Ezutóbbi elegendő feltétel is egyben, tehát ha egy kvadratura-formula rendje legalább  $n-1$ , akkor az interpolációs kvadratura-formula.

## A Newton-Cotes formulák

A numerikus integrálásban a Newton-Cotes formulák, másnéven Newton-Cotes szabályok, formulák egy csoportját jelenti,  $n+1$  ekvidisztáns osztópontban kiértékelt integrandusra alapozva. Isaac Newton és Roger Cotes után lettek elnevezve.

Nagy  $n$ -re a formula Runge-jelenséget szenved. Ez a probléma magasfokú polinomok interpolálásakor jelentkezik, és itt a hiba exponenciálisan divergál nagy  $n$ -re. Ez a probléma feloldható Csebisev-pontok felvételével az ekvidisztáns pontok helyett.

Alternatív megoldásként a Newton-Cotes kvadraturák helyett jobb eredményt szolgáltat a Gauss-kvadratura.

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_0(f) := (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Ezt hívjuk **középpont szabálynak**. Egyszerűen használható képlet, és a beosztás finomításával a pontosság növelhető. Egy másik szabály, a **trapézformula** már nem téglalapokkal, hanem trapézokkal közelít. Képlete:

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_1(f) := \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)].$$

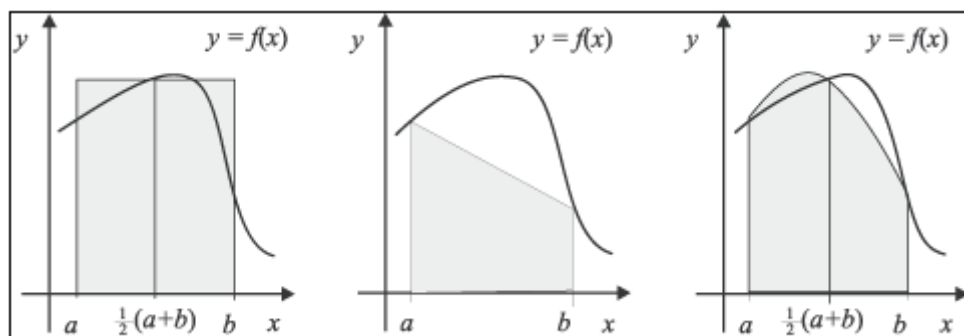
Ezek a formulák könnyen kódolhatók. Íme egy példa eljárás, ami a trapézformulát valósítja meg C++ nyelven:

```
static double Trapez(FuggvenyTip F,
/* F(x)-t integráljuk az */
    double a, double b, /* a,b intervallumon */
    int n) /* n részre osztva */
{
/* Közelítő integrálás a trapéz szabály segítségével. */
    double Int, h;
/* Int = az integrál értéke */
    int i;
    h = (b - a) / n;
    Int = 0.0;
    for (i = 1; i < n; i++) {
/* fgv. értékek összegzése */
        Int += F(a + i * h);
    }
    return (Int * h + (F(a) + F(b)) / 2.0 * h);
}
```

Előszeretettel használják a fenti kettőnek kombinációját, amit **Simpson-formulának** nevezünk. A Simpson formula gyakran jóval pontosabb eredményt ad társainál.

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_2(f) := \frac{(b-a)}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

A következő ábra grafikusán szemlélteti a formulák integrálközelítő elvét.



A tárgyalt alacsonyrendű formulák pontosságát úgy lehet javítani, hogy nem az  $[a;b]$  intervallumra, hanem ezen intervallum részintervallumaira alkalmazzuk. Jobb, ha szakaszonkénti polinomiális interpolációval dolgozunk. Mivel még a Lagrange-féle interpolációnak ilyen alkalmazása is (az eredeti intervallum felosztása részintervallumokra, a részintervallumokon rögzített alappontszámmal dolgozunk) elvezet konvergens interpolációs eljáráshoz alacsony differenciálási követelmények mellett, így ennek sikere a numerikus integrációnál is biztosított.

Az alacsonyrendű képletek csak összetett alakban és nagy pontszám esetén adnak pontosabb eredményt – ekkor viszont már a kerekítési hibák észrevehetővé válhatnak.

Innen ered a magasrendű képletek iránti érdeklődés: elég gyakori igény az, hogy egyetlenegy, lehetőleg alacsony alappontszámú formulával mindjárt elég pontos eredményt kapjunk (és magasrendű képlettel ez elérhető, ha az integrandus elegendően sima). Előre tisztázható kérdés, mekkora integrációs rend elegendő, mivel az integrálokat olyan eljárás keretében kell kiszámítani, amely eleve csak közelítő megoldást ad. Tehát az integrálok pontatlan kiszámítása nem szabad, hogy az eljárás konvergenciáját megcsorbítsa – de nem érdemes ennél pontosabb képleteket használni. Ilyen eljárások a Romberg és a Gauss-integráció.

Amennyiben  $f(x)$ -nek vagy deriváltjainak  $[a;b]$ -ben vannak szingularitásai (pólusok, ugrások), úgy célszerű az eredeti intervallumot olyan részintervallumokra felosztani, hogy a szingularitások helyei a részintervallumok végpontjaival egyezzenek meg.

Többdimenziós integrálok kiszámítását nemcsak a szükséges nagy alappontszám bonyolítja, hanem az integrációs tartomány megfelelő figyelembe vétele is súlyos probléma; itt is ajánlatos, a tartományt egyszerűbben kezelhető részekre felosztani.

## Kvadratúra a Matlab segítségével

A Matlab a kvadratúrához két függvényt biztosít, a quad és a quadl függvényeket. A quadl a régebbi quad8 függvény módosítása.

### *A quad eljárás*

A quad eljárás numerikus integrálást végez az adaptív Simpson kvadratúra-formulát alkalmazva. Szintaxisa:

quad(fun,a,b,tol,trace,varargin)

minimálisan az első három paramétert kell megadni, így az eljárás becslést ad 'fun' (a function szóból) függvény határozott integráljára [a;b] intervallumon  $10^{-6}$  pontossággal. Az eljárás vektort is elfogad, ekkor a kimenet is vektor lesz, melynek elemei X elemeinek integrálja.

A tol paraméterrel módosíthatjuk az alapértelmezett pontosságot. Nagyobb szám megadása esetén a kiértékelés gyorsabb, és kevesebb függvényhívást igényel, viszont az eredmény is pontatlanabbá válik.

Ha az eljárást [Q,C] = quad (...) alakban hívjuk, megkapjuk a felhasznált függvényhívások számát is.

A trace paraméter megadásával nyomon követhetjük a hívásszám, a, b-a és Q értékét a rekurzív Simpson algoritmus futása alatt.

Minden további paraméter a quad eljárásban úgy viselkedik, mintha 'fun' függvény kapta volna a paramétereit.

Az eljárás ügyel a lebegőpontos túlcsoordulásra és a figyelmeztet nullával való osztáskor. Quadl hatékonyabb eljárás lehet a pontos és sima integrandusoknál.

A quad által használt hárompontos Simpson formula:

$$Q1 = (h/6) * (fa + 4*fc + fb);$$

$$Q2 = (h/12) * (fa + 4*fd + 2*fc + 4*fe + fb);$$

$$Q = Q2 + (Q2 - Q1) / 15;$$

Ez a módszer legfeljebb harmadfokú polinomokra ad pontos eredményt. Párja, a quadl már a Gauss-Lobatto szabályt használja, Kronrod kiterjesztéssel, ami ötöd és kilencedfokú polinomokra is pontos választ ad.

A kvadratúra módszere adaptív, tehát részintervallumokra osztja fel a tartományt a feladat jellegének megfelelően. Ahol gyorsan változik a függvény, ott a beosztás sűrűbb. Maximum

10000 függvényhívást képes elvégezni. Ennél több esetén, vagy ha az intervallumok túl kicsik, hibaüzenetet kapunk, amiből szingularitásra lehet következtetni a függvényben.

### *dblquad, triplequad*

Ez a két eljárás két illetve háromváltozós függvények integrálására való, nem tartozik az esszé témájához. Működésük hasonló a quad-hoz. Hasonlóan megadható a pontosság, és definiálható saját közelítő eljárás, aminek hívása megegyezik a quad és quadl szintaxisával.

Vegyünk egy egyszerű példát. Analízisből ismert a  $\sin 1/x$  függvény. Ennek képe (lásd lentebb)  $x=0$ -hoz közel besűrűsödik, végtelensok metszéspontja lesz, és igen intenzíven változik. A határozott integrál megadása körülményes, a Matlab viszont közelítő eljárással, numerikus integrálással könnyedén megoldja.

sinegyperx.m fájl:

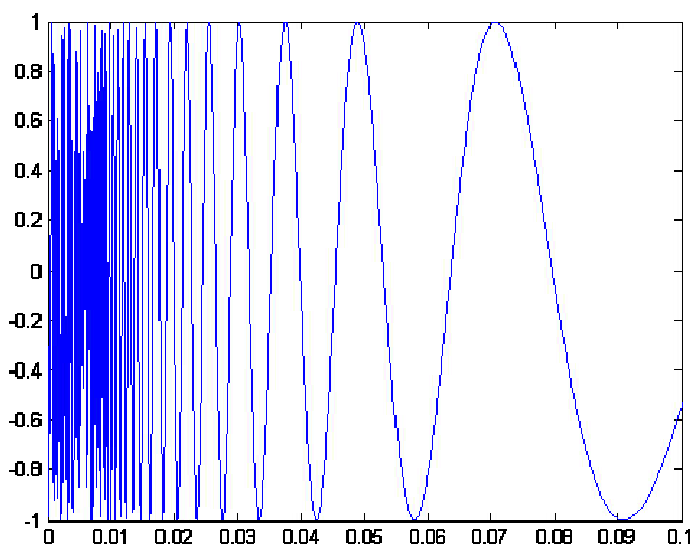
```
function y = sinegyperx (x)
y = sin(1./x);
```

Matlab:

```
>> Q = quad(@sinegyperx,0,1);
>> Q
Q =
```

```
0.5044
```

```
>> x = 0:0.0001:1;
>> y = sinegyperx(x);
>> plot(x,y)
```



A fenti példában szándékosan nem az fplot eljárást használtam. A függvény a nulla környezetében olyan sűrűvé válik, hogy az fplot ábrázolásának lépésköze nem ad rá kielégítő képet. Jobban rázoomolva az 0.0001-es lépésköz is kevésnek bizonyul. Ahogy egyre közelebb érünk az ordinátatengelyhez, tetszőlegesen kis lépésköz is kevésnek bizonyul, a függvény képének megértése szempontjából viszont az 0.0001 kielégítő.

### *trapz*

Érdekes még megemlíteni a trapz utasítást. Ez a trapézformulát valósítja meg a Matlabban. Paramétereként  $x$  és  $f(x)$  vektorpárokat kell megadni. Az algoritmus nem adaptív. A trapéz szabályt érdemes használni periodikus függvény esetén, mert itt a pontosság kiemelkedő. Ha az integrálandó függvény képletét ismerjük, érdemes a quad és quadl utasításokkal dolgozni.

### Teljes példaprogram #1, Simpson-kvadratura

Figyeljük meg a Simpson-formulát bemutató matlab-programot:

```
%parameterek interaktiv beolvasasa
fprintf( ' \n Simpson algoritmus vektorokkal \n' );
fprintf(' \n Fuggveny (aposztrófok köze): ');
func = input('');
fprintf( ' Beosztások szama (min 3): ');
m = input('');
fprintf( ' tartomány kezdete (a) = ');
a = input('');
fprintf( ' tartomány vege = ');
b = input('');
tic
% a Simpson algoritmus, idomeressel
h=(b-a)/m;
f = fcnchk(func);
x=[a:h:b]; y=feval(f,x);
v=2*ones(m+1,1);
v2=2*ones(m/2,1);
v(2:2:m)=v(2:2:m)+v2;
v(1)=1; v(m+1)=1;
q=y*v;
q=q*h/3;
fprintf( ' Az integral értéke = %3.8f', q);
toc;
```

```
>> mysimpson
Simpson algoritmus vektorokkal
Fuggveny (aposztrófok köze): 'sin(x)+x'
Beosztások szama (min 3): 100
tartomány kezdete (a) = 0
tartomány vege = 4*pi
Az integral értéke = 78.95683521
elapsed_time =

0.0310
```

## Teljes példaprogram #2, Trapézformula

```
%parameterek beolvasasa
fprintf( ' Trapezformula grafikus megjelenitessel \n' );
fprintf(' \n Fuggveny (aposztrofok kozt): ');
func = input('');
fgv = fcnchk(func);
fprintf( ' osztopontok szama (min 3): ');
n = input('');
fprintf( ' a tartomany kezdete (a): ')
a = input('');
fprintf( ' a tartomany vege (b) = ');
b = input('');
tic
%trapezformula idomeressel
    n=n;
    hold off
    h = (b-a)/n;
    x = a+(0:n)*h;  f = feval(fgv, x);
    I = h/2*(f(1) + f(n+1));
    if n>1 I = I + h*sum(f(2:n));end
        h2 = (b-a)/100;
        xc = a+(0:100)*h2;  fc = feval(fgv, xc);
        plot(xc,fc,'r'); hold on
        plot(x,f);
        plot(x,zeros(size(x)))
    for i=1:n; plot([x(i),x(i)], [0,f(i)]); end
    fprintf('\n Az integral erteke = %4.8f\n', I);
toc
```

```
>> mytrap
Trapezformula grafikus megjelenítéssel
```

```
Fuggvény (aposztrófok kozt): 'sin(x)'
osztópontok szama (min 3): 10
a tartomány kezdete (a): 0
a tartomány vege (b) = 4*pi
```

```
Az integral erteke = -0.00000000
```

```
elapsed_time =
```

```
0.1280
```

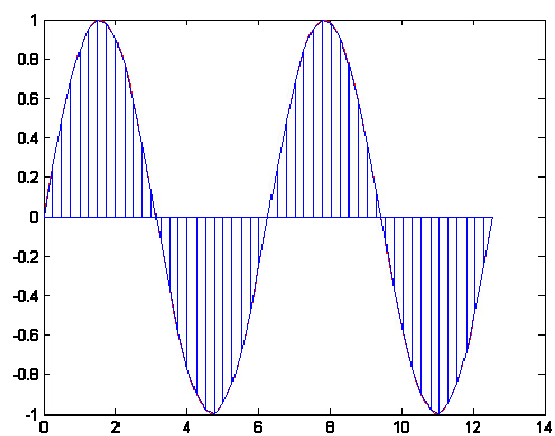
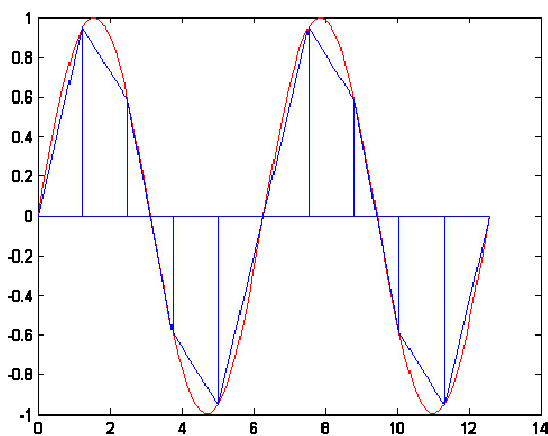
```
>> mytrap
Trapezformula grafikus megjelenítéssel
```

```
Fuggvény (aposztrófok kozt): 'sin(x)'
osztópontok szama (min 3): 50
a tartomány kezdete (a): 0
a tartomány vege (b) = 4*pi
```

```
Az integral erteke = -0.00000000
```

```
elapsed_time =
```

```
0.2110
```



## Futási idők és tolerancia

A quad utasítást vizsgáltam különböző pontosságokon.  
Az integrálandó függvény  $\sin(\exp(x))$

pontosság	idő
10e-2	0.0130
10e-6	0.0160
10e-10	0.0460
10e-14	0.4530
10e-18	2.0310

10e-22 pontosságnál már a maximum függvényhívások elérik a 10000et, ezért a kapott eredményt nem vettem már bele a táblázatba.



## **Összefoglalás**

Láthattuk, hogy az integrálás egy igen komplex témakör. Az esszé során áttekintettük a határozatlan és a határozott integrál fogalmát, megközelítettük az integrálás módszerét analitikusan Darboux és Riemann munkásságát felhasználva, majd kimondtuk az integrálás alapját képező Newton-Leibniz formulát.

Ezek ismeretében áttértünk a gépi megvalósításra, a numerikus integrálásra, a kvadraturára. A Matlab lehetőséget nyújt numerikus módszerekre, formulák alkalmazására, és a Newton-Cotes kvadraturák lekódolására. Példákkal vizsgáltuk a trapéz- és a Simpson formulákat.

Az integrálás a tudomány számos kérdésére kínál megoldást. A fizika jelentős részét képezi, a kinematika, a dinamika, a hullámtan, a jelanalízis, de még az elektromosság területén is nagy szerepe van. A közgazdaságtan és határterületei, a termelésirányítás, a valószínűségszámítás területén is elengedhetetlen a használata. A gyors és felhasználóbarát alkalmazást a Matlab segíti.

## ***Az esszéhez használt források***

Csendes Tibor – Közelítő és szimbolikus számítások, előadásjegyzet

Szalay István: Analízis, előadásjegyzet

Szabó Tamás: Kalkulus I.

Stoyan Gisbert – Takó Galina: Numerikus módszerek I.

M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables

Mihail Konstantinov – Foundations of numerical analysis

John H. Mathews and Kurtis D. Fink – Numerical methods using Matlab