Többértékű logikák — értékréses logika

Mihálydeák Tamás
mihalydeak@inf.unideb.hu

2007. május 22.

Tartalomjegyzék

1. A klasszikus kétértékű logika

1.1. Arisztotelész (Kr.e. 384–322)

1. Az ellentmondás elve: „A legbiztosabb alapelv ez: lehetetlen, hogy egy és ugyanaz a valami ugyanakkor, ugyanabban a tekintetben vonatkozzék is valamire, meg nem is." (1005b19-23)

2. A kizárt harmadik elve: „Az ellentmondás két tagja között nem állhat fenn semmi közbeeső, hanem mindenről mindent vagy állítani vagy tagadni kell."(1011b 23-24)

Notes:

1.2. Az alapelvek mai megfogalmazásai

1. Pontosan két igazságérték létezik: az Igaz és a Hamis.
2. A nyelv minden mondata minden egyes interpretációban meghatározott igazságértékkel rendelkezik.
3. Az extenzionalitás szabálya: Egy interpretációban a nyelv bármely mondatának az igazságértékét a mondat részeinek — az adott interpretáció szerinti — extenziója (referenciája) határozza meg.

2. Többértékű logika

- Megsérti az 1. és/vagy a 2. elvet.
- A 3. elv megsérthető, de meg is tartható.
- Egyik fő történeti motiváció: a tengeri csata érvelés (Arisztotelész)

Notes:

2.1. A többértékű logikák megjelenése

1. Łukasiewicz
2. Post
3. Kleene, Bochvar

2.2. Łukasiewicz

- A nem–euklidészi geometriájához hasonlítja logikáját, ami segít kiszabadulni az arisztotelészi logika mentális kényszerzubbonyából.
- A jövőre vonatkozó állítások igazságának a kérdése: Ha a jövőre vonatkozó állítások éppúgy igazak, ahogyan a múltra vonatkozók, akkor a jövő éppen anynyira meghatározott mint a múlt (s csak annyiban különbözik a múlttól, hogy még nem vált azzá).
- Elutasítja a kizárt harmadik törvényét: a harmadik érték: 'lehetséges'.

Notes:

- A klasszikus logika általánosításaként megjelenő két konnektívum:

  1. implikáció: $\supset$

  2. negáció: $\neg$

$\supset$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

$\neg$	$\neg p$
0	1
1/2	1/2
1	0

További konnektívumok:

- $p \vee q =_{def} (p \supset q) \supset q$ Megj.: $p \vee q \not\Leftrightarrow (\neg p \supset q)$
- $p \wedge q =_{def} \neg(\neg p \vee \neg q)$
- $p \equiv q =_{def} (p \supset q) \wedge (q \supset p)$
- Tautológia (logikai igazság, érvényes formula): egy formulát 3–értékű tautológiának nevezünk, ha mindig az 1 értéket veszi fel.
- Az 1 értéket kitüntetett értéknek nevezzük.

Notes:

Hogyan jutott a fenti táblázatokhoz Łukasiewicz?

- Nincs róla elégséges információ.
- Tekintsük Łukasiewicz igazságértékeit a klasszikus értékek halmazainak:
  $0 = \{F\}$, $1 = \{T\}$, $1/2 = \{T, F\}$
- A klasszikus értékek minden egyes halmaza azoknak az értékeknek a halmazát reprezentálja, amelyeket a kijelentés a jövőben felvehet.

$\supset$	$\{F\}$	$\{T,F\}$	$\{T\}$
$\{F\}$	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$
$\{T,F\}$	$\{T,F\}$		$\{T\}$
$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$	$\{T\}$

$\neg$	$\neg p$
$\{F\}$	$\{T\}$
$\{T,F\}$	$\{T,F\}$
$\{T\}$	$\{F\}$

- Hogyan tölthető ki a hiányzó elem?
- Łukasiewicz: $\{T\}$ (vagy 1). (Tautológia: $p \supset p$)
- A reprezentáció szerint: $\{T, F\}$ (vagy 1/2).

Notes:

Łukasiewicz (kritika nélkül) átvesz két elvet a klasszikus logikából:

1. A *Principia Mathematica* eljárását kell követni: a logikát az axiómák, a helyettesítés és a modus ponens segítségével kell felépíteni.
2. Az összetett állítások értékét részei értékének függvényeként kell megadni.

A központi érték megadása:

- Łukasiewicz: van 3-értékű tautológia, de megadható paradox olvasata a *lehetséges* szándékolt jelentésének.
  - Az implikáció nem lesz igazságfüggvény.
  - Kétséges, hogy az így kapott logika valóban alternatívája lenne az arisztotelészi logikának.
- $\{T, F\}$: nincs 3-értékű szígorú értelemben vett tautológia. (Módosítani kell a tautológia fogalmát.)

Notes:

2.2.1. Feladatok

Mutassuk meg, hogy Łukasiewicz 3-értékű logikájában az alábbi sémák tautológiák:

- $A \supset (B \supset A)$
- $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$
- $((A \supset \neg A) \supset A) \supset A$
- $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$
- $(A \vee B) \equiv ((A \supset B) \supset B)$

Legyen $\diamond A =_{def} (\neg A \supset A)$

- $A \supset \diamond A$
- $\neg \diamond \neg A \supset A$
- $\neg A \supset (\neg A \supset \neg \diamond A)$

Notes:

2.2.2. Łukasiewicz n-értékű, végtelen értékű logikája:

- Az n-értékű logika logikai értékeinek a halmaza:
  $L_n = \{0, 1/(n-1), 2/(n-1), \ldots, (n-2)/(n-1), 1\}$
- Az első végtelen értékű logika esetén:
  $L_{\mathcal{N}_0} = \{s/w : 0 \leq s \leq w, s, w \in \mathcal{N}, w \neq 0\}$
  $L_{\mathcal{N}_1} = [0, 1]$
- Kitütetett elem: Mindkét esetben: 1
- $[\![\neg p]\!] =_{def} 1 - [\![p]\!]$
  $[\![p \supset q]\!] =_{def} \min(1, 1 - [\![p]\!] + [\![q]\!])$
- $p \vee q =_{def} (p \supset q) \supset q$
  $[\![p \vee q]\!] = \max([\![p]\!], [\![q]\!])$
- $p \wedge q =_{def} \neg(\neg p \vee \neg q)$
  $[\![p \wedge q]\!] = \min([\![p]\!], [\![q]\!])$
- $p \equiv q =_{def} (p \supset q) \wedge (q \supset p)$
  $[\![p \equiv q]\!] = 1 - \mid [\![p]\!] - [\![q]\!] \mid$

Notes:

Néhány tulajdonság:

- Łukasiewicz igazságszabályai esetén a $\{0,1\}$ halmaz zárt bármely konnektívumra nézve, s a bevezetett konnektívumok ezen a halmazon ugyanúgy működnek mint a klasszikus igazságértékelések.
- Így $Taut_n \subseteq Taut_2$ minden n-re.
- Lindenbaum tétel: Bármely n, m $(n, m \geq 2)$ esetén teljesül, hogy $Taut_n \subseteq Taut_m$ akkor és csak akkor, ha $m-1 \mid n-1$.
- Végtelen értékű logika esetén $Taut_\infty = \cap\{Taut_n : n \geq 2, n \in N\}$
- A rendszer funkcionálisan nem komplett, mert a 0 és 1 kivételével a konstans konnektívumok nem definiálhatóak.
- Wajsberg (1931): Łukasiewicz 3-értékű logikája axiomatizálható. (A feladatok 1-4 sémája, a helyettesítés és a modus ponens segítségével.)
- Łukasiewicz és Tarski sejtése (1930): N_0-értékű logika is axiomatizálható. (Rose, Rosser (1958), Chang(1959))

Notes:

2.3. Post többértékű rendszere (1921)

Post rendszere:

- Łukasiewicztől függetlenül dolgozta ki.
- m-értékű rendszerét a $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ halmazon definiálta.
- $[\![p \vee q]\!] = \min [\![p]\!], [\![q]\!]$
- $[\![\neg p]\!] = [\![p]\!] + 1 (mod\ m)$

A rendszer tulajdonságai:

- $m = 2$ esetén a rendszer megegyezik a klasszikus állításlogikával.
- Ha $m > 2$, akkor a rendszer nem tartalmazza a klasszikus logikát a negáció értelmezése miatt.
- A kitüntetett elem: $m-1$, A kizárt harmadik törvényének a megfelelője tautológia lesz: $p \vee \neg p \vee \neg\neg p \vee \cdots \vee \neg \ldots \neg p$
- Konnektívumai funkcionálisan komplett rendszert alkotnak.

Notes:

2.4. Kleene többértékű rendszere (1938,1952)

- A határozatlanságot vagy a jelentésnélküliséget kívánja beemelni a logikai rendszerbe. Az eredeti motivációk a rekurzív függvények elméletéből származik: egy egyébként jól működő algoritmus bizonyos bemenetek esetén nem ad eredményt (pl. végtelen ciklusba került, túllépte számítási kapacitását stb.).
- A harmadik érték a határozatlanság, definiálatlanság: I
- Kleene rendszerében egy összetett mondatnak lehet akkor is igazságértéke (F, T), ha bizonyos komponensei nem rendelkeznek igazságértékkel, azaz definiálatlanok.

Notes:

2.4.1. Kleene erős konnektívumai (1938):

$\neg$	$\neg p$
T	F
I	I
F	T

$\wedge$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	F
F	F	F	F

$\vee$	T	I	F
T	T	T	T
I	T	I	I
F	T	I	F

$\supset$	T	I	F
T	T	I	F
I	T	I	I
F	T	T	T

$\equiv$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	F	I	T

- Kleene 1938-as logikájában nincsenek tautológiák, mert ha egy interpretáció minden állításparaméterhez a 'definiálatlan' értéket rendeli, akkor minden formula értéke definiálatlan lesz.

Notes:

2.4.2. Kleene gyenge konnektívumai (1952):

$\wedge$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	F	I	F

$\vee$	T	I	F
T	T	I	T
I	I	I	I
F	T	I	F

$\supset$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	T	I	T

- Az erős Kleene logika a parciálisan definiált igazságfüggvények elmélete.
- A gyenge Kleene rendszert a rekurzivitás matematikai elmélete motiválta: ha egy számolási folyamatban (egy algoritmus végrehajtása során) valahol fellép a determinálatlanság, akkor az egész eljárás determinálatlanná válik.
- Frege elsődleges nézete: Ha egy mondatban jelölet nélküli név szerepel, akkor a mondatnak nincs igazságértéke.

Notes:

2.5. Bochvar logikája (1938):

- A klasszikus logika és a halmazelmélet paradoxonjainak a megoldására törekedett (Russell paradoxon).
- Az értelmezett állításlogikai nyelvnek két szintje van: az egyik a hagyományos értelemben vett tárgynyelvnek, míg a másik a metanyelvnek felel meg.
- Mindkét szint tartalmaz konnektívumokat:
  - Belső konnektívumok: konzervatív általánosításai a klasszikus konnektívumoknak.
  - Külső konnektívumok: Ap: p igaz
    1. $\sim p =_{def} \neg Ap$
    2. $p\&q =_{def} Ap\&Aq$

Notes:

Belső konnektívumok:

$\neg$	$\neg p$
T	F
I	I
F	T

$\wedge$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	F	I	F

Külső konnektívumok:

A	Ap
T	T
I	F
F	F

$\sim$	$\sim p$
T	F
I	T
F	T

$\&$	T	I	F
T	T	F	F
I	F	F	F
F	F	F	F

Notes:

- A külső konnektívumok arra szolgálnak, hogy az állítások logikai értékei (igazságértékei) közötti kapcsolatot jelenítsék meg.
- Ebben a rendszerben $[\![A]\!] = [\![\neg A]\!]$ nem jelent ellentmondást, hisz mindkét érték lehet definiálatlan. Akkor a Russell paradoxon nem paradoxon többé.
- Church: A Russell paradoxont nem oldja meg ez a kezelés, mert $[\![A]\!] = [\![\sim A]\!]$ továbbra is paradox.$(R' = \{x :\sim x \in x\})$

Notes:

Néhány tulajdonság:

- Łukasiewicz igazságszabályai esetén a $\{0, 1\}$ halmaz zárt bármely konnektívumra nézve, s a bevezetett konnektívumok ezen a halmazon ugyanúgy működnek mint a klasszikus igazságértékelések.
- Így $Taut_n \subseteq Taut_2$ minden n-re.
- Lindenbaum tétel: Bármely n, m $(n, m \geq 2)$ esetén teljesül, hogy $Taut_n \subseteq Taut_m$ akkor és csak akkor, ha $m-1 \mid n-1$.
- Végtelen értékű logika esetén $Taut_\infty = \cap\{Taut_n : n \geq 2, n \in N\}$
- A rendszer funkcionálisan nem komplett, mert a 0 és 1 kivételével a konstans konnektívumok nem definiálhatóak.
- Wajsberg (1931): Łukasiewicz 3-értékű logikája axiomatizálható. (A feladatok 1-4 sémája, a helyettesítés és a modus ponens segítségével.)
- Łukasiewicz és Tarski sejtése (1930): N_0-értékű logika is axiomatizálható. (Rose, Rosser (1958), Chang(1959))

Notes:

2.6. Post többértékű rendszere (1921)

Post rendszere:

- Łukasiewicztől függetlenül dolgozta ki.
- m-értékű rendszerét a $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ halmazon definiálta.
- $[\![p \vee q]\!] = \min [\![p]\!], [\![q]\!]$
- $[\![\neg p]\!] = [\![p]\!] + 1(mod\ m)$

A rendszer tulajdonságai:

- $m = 2$ esetén a rendszer megegyezik a klasszikus állításlogikával.
- Ha $m > 2$, akkor a rendszer nem tartalmazza a klasszikus logikát a negáció értelmezése miatt.
- A kitüntetett elem: $m - 1$, A kizárt harmadik törvényének a megfelelője tautológia lesz: $p \vee \neg p \vee \neg\neg p \vee \cdots \vee \neg \ldots \neg p$
- Konnektívumai funkcionálisan komplett rendszert alkotnak.

Notes:

2.7. Kleene többértékű rendszere (1938,1952)

- A határozatlanságot vagy a jelentésnélküliséget kívánja beemelni a logikai rendszerbe. Az eredeti motivációk a rekurzív függvények elméletéből származik: egy egyébként jól működő algoritmus bizonyos bemenetek esetén nem ad eredményt (pl. végtelen ciklusba került, túllépte számítási kapacitását stb.).
- A harmadik érték a határozatlanság, definiálatlanság: I
- Kleene rendszerében egy összetett mondatnak lehet akkor is igazságértéke (F, T), ha bizonyos komponensei nem rendelkeznek igazságértékkel, azaz definiálatlanok.

Notes:

2.7.1. Kleene erős konnektívumai (1938):

$\neg$	$\neg p$
T	F
I	I
F	T

$\wedge$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	F
F	F	F	F

$\vee$	T	I	F
T	T	T	T
I	T	I	I
F	T	I	F

$\supset$	T	I	F
T	T	I	F
I	T	I	I
F	T	T	T

$\equiv$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	F	I	T

- Kleene 1938-as logikájában nincsenek tautológiák, mert ha egy interpretáció minden állításparaméterhez a 'definiálatlan' értéket rendeli, akkor minden formula érteke definiálatlan lesz.

Notes:

2.7.2. Kleene gyenge konnektívumai (1952):

$\wedge$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	F	I	F

$\vee$	T	I	F
T	T	I	T
I	I	I	I
F	T	I	F

$\supset$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	T	I	T

- Az erős Kleene logika a parciálisan definiált igazságfüggvények elmélete.
- A gyenge Kleene rendszert a rekurzivitás matematikai elmélete motiválta: ha egy számolási folyamatban (egy algoritmus végrehajtása során) valahol fellép a determinálatlanság, akkor az egész eljárás determinálatlanná válik.
- Frege elsődleges nézete: Ha egy mondatban jelölet nélküli név szerepel, akkor a mondatnak nincs igazságértéke.

Notes:

2.8. Bochvar logikája (1938):

- A klasszikus logika és a halmazelmélet paradoxonjainak a megoldására törekedett (Russell paradoxon).
- Az értelmezett állításlogikai nyelvnek két szintje van: az egyik a hagyományos értelemben vett tárgynyelvnek, míg a másik a metanyelvnek felel meg.
- Mindkét szint tartalmaz konnektívumokat:
  - Belső konnektívumok: konzervatív általánosításai a klasszikus konnektívumoknak.
  - Külső konnektívumok: Ap: p igaz
    1. $\sim p =_{def} \neg Ap$
    2. $p\&q =_{def} Ap\&Aq$

Notes:

Belső konnektívumok:

$\neg$	$\neg p$
T	F
I	I
F	T

$\wedge$	T	I	F
T	T	I	F
I	I	I	I
F	F	I	F

Külső konnektívumok:

A	Ap
T	T
I	F
F	F

$\sim$	$\sim p$
T	F
I	T
F	T

$\&$	T	I	F
T	T	F	F
I	F	F	F
F	F	F	F

Notes:

- A külső konnektívumok arra szolgálnak, hogy az állítások logikai értékei (igazságértékei) közötti kapcsolatot jelenítsék meg.
- Ebben a rendszerben $[\![A]\!] = [\![\neg A]\!]$ nem jelent ellentmondást, hisz mindkét érték lehet definiálatlan. Akkor a Russell paradoxon nem paradoxon többé.
- Church: A Russell paradoxont nem oldja meg ez a kezelés, mert $[\![A]\!] = [\![\sim A]\!]$ továbbra is paradox.$(R' = \{x : \sim x \in x\})$

Notes:

3. Az általános keretelmélet

Tételezzük fel, hogy a továbbiakban egy rögzített általános nulladrendű nyelvvel foglalkozunk:
Általános nulladrendű nyelven olyan

$$L = \langle LC, Con, Form \rangle$$

rendezett hármast értünk, amelyre teljesül, hogy

- $LC = \{-, *, (,)\}$;
- $Con = \{p, q, r, p_1, q_1, r_1, \ldots\}$ állításparamétereknek egy tetszőleges nemüres, megszámlálható halmaza;
- $Form$ az a legszűkebb halmaz, amely eleget tesz a következőknek:
  1. $Con \subseteq Form$;
  2. ha $A \in Form$, akkor $-A \in Form$;
  3. ha $A, B \in Form$, akkor '$(A * B)$'$\in Form$.

Notes:

3.1. A mátrix módszer

Definíció:
Az L nyelv mátrixán egy

$$\langle \mathfrak{A}, D \rangle$$

rendezett párt értünk, amelyre teljesül, hogy

1. $\mathfrak{A} = \langle A, f_1^{(1)}, f_2^{(2)} \rangle$ egy absztrakt algebra;
2. $D \subseteq A, D \neq \emptyset$ (A kitüntetett elemeinek a halmaza.)

Példa:
Łukasiewicz 3-értékű rendszere esetén

- $A = \{0, 1/2, 1\}$,
- $D = \{1\}$,
- $f_1(x) = 1 - x$,
-

f_2	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

Notes:

Definíció
Az L nyelv egy $\langle \mathfrak{A}, D\rangle$ ($\mathfrak{A} = \langle A, f_1, f_2\rangle$) mátrixra vonatkozó interpretációján egy $g : Con \to A$ függvényt értünk.
Az interpretáció generál egy értékelést az L nyelven:

- Ha $p \in Con$, akkor $[\![p]\!] = g(p)$.
- Ha $A \in Form$, akkor $[\![-A]\!] = f_1([\![A]\!])$.
- Ha $A, B \in Form$, akkor $[\![A * B]\!] = f_2([\![A]\!], [\![B]\!])$.

A részmátrix értelmezése:
$\langle \mathfrak{A}_1, D_1\rangle$ részmátrixa $\langle \mathfrak{A}_2, D_2\rangle$-nek, ahol $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1, f_1', f_2'\rangle$ és $\mathfrak{A}_2 = \langle A_2, f_1'', f_2''\rangle$, ha

- $A_1 \subseteq A_2$
- f_1', f_2' az f_1'', illetve az f_2'' függvényeknek az A_1 halmazra való szűkítései.

Megjegyzés:
A klasszikus logika mátrixa az összes eddig bevezetett 3-értékű logika mátrixának részmátrixa.

Notes:

Definíció:

- Legyen $\Gamma, \Delta \subseteq Form$, Γ, Δ véges. Δ következménye a Γ halmaznak az M mátrixra nézve, ($\Gamma \vDash_M \Delta$), ha teljesül a következő: ha minden g (az M mátrixra támaszkodó) interpretáció esetén, amenynyiben $[\![A]\!] \in D$ minden $A \in \Gamma$ formulára, úgy $[\![B]\!] \in D$ valamely $B \in \Delta$ formulára.
- Az A formula tautológia az M mátrixra nézve, ha $\emptyset \vDash_M A$ ($\vDash_M A$).

Az L nyelv bármely mátrixa esetén teljesülnek a következők:

1. Ha $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, akkor $\Gamma \vDash_M \Delta$.
2. Ha $\Gamma \vDash_M \Delta$, akkor $\Gamma \cup \Sigma \vDash_M \Delta \cup \Pi$ (bővítési tulajdonság).
3. Ha $\Gamma, A \vDash_M \Delta$ és $\Gamma \vDash_M A, \Delta$, akkor $\Gamma \vDash_M \Delta$ (metszet tulajdonság).

A következményrelációt lehet úgy definiálni, hogy legyen egy olyan reláció, amely teljesíti a fenti három tulajdonságot.

Notes:

Definíció:

- Absztrakt következményrelációnak nevezzük azokat a véges formulahalmazok közötti relációkat, amelyek teljesítik az alábbi tulajdonságokat:
  1. Ha $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, akkor $\Gamma \models_M \Delta$.
  2. Ha $\Gamma \models_M \Delta$, akkor $\Gamma \cup \Sigma \models_M \Delta \cup \Pi$.
  3. Ha $\Gamma, A \models_M \Delta$ és $\Gamma \models_M A, \Delta$, akkor $\Gamma \models_M \Delta$.
- Ha egy absztrakt $\vdash$ következményreláció egybeesik egy M mátrix által definiált $\models_M$ következményrelációval, akkor M a $\vdash$ következményreláció karakterisztikus mátrixa.

Notes:

A $\models_M$ (az M mátrixra támaszkodó) következményreláció néhány tulajdonsága:

- Uniformitás: Ha $\Gamma \models \Delta$, akkor $\Gamma' \models \Delta'$, ahol Γ', Δ' úgy keletkezik Γ-ból és Δ-ból, hogy a bennük szereplő formulákban valamely állításparamétert ugyanazzal a formulával helyettesítjük.
- Egy következményrelációt Γ-prímnek nevezünk, ha formulák bármely véges Δ halmaza esetén, amennyiben $\Gamma \models \Delta$, úgy $\Gamma \models A$ valamely $A \in \Delta$ esetén.

Lemma: Ha $\Gamma \not\models \Delta$, akkor van olyan $\models_1$ Γ-prím következményreláció, hogy $\models_1$ kiterjesztése a $\models$ következményrelációnak, és $\Gamma \not\models_1 \Delta$.

Bizonyítás: A Zorn lemma segítségével.

- Legyen $F = \{\models' : \models'$ kiterjesztése $\models$-nak, úgy, hogy $\Gamma \not\models' \Delta\}$. A F-ben lévő következményrelációk bármely láncának uniója is F-ben van, így a Zorn lemma szerint F-nek van maximális eleme, $\models_1$.
- Csak azt kell megmutatni, hogy $\models_1$ Γ-prím.

Notes:

Zorn lemma:
Ha E egy nemüres halmazcsalád és minden nemüres C lánc esetén $\bigcup C \in E$, akkor E-nek van egy P maximális eleme.

Másik megfogalmazás:
Tegyük fel, hogy a $\langle P, \prec \rangle$ részbenrendezett halmazban minden $R \subseteq P$ halmaznak van felső korlátja, azaz létezik olyan $x_r \in P$, amelyre $y \preceq x_r$ teljesül tetszőleges $y \in R$ esetén. Ekkor létezik olyan $x \in P$, amelyik maximális elem, melynél nincs nagyobb P-ben.

Notes:

Tétel:
A következő állítások ekvivalanesek:

- Kiválasztási axióma: Nemüres halmazok bármely $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ rendszeréhez létezik kiválasztási függvény. (Az f függvényt a $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazrendszerhez tartozó kiválasztási függvénynek nevezzük, ha $Dom(f) = \Gamma$ és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $f(\gamma) \in A_\gamma$).
- Zermelo jólrendezési tétele: Tetszőleges A halmazhoz található olyan $\prec$ reláció, amely jólrendazi A-t. (Ha minden nemüres részhalmazának van legkisebb eleme.)
- Teichmüller-Tukey lemma: Legyen A egy halmaz, és Φ az A véges részhalmazain értelmezett tulajdonság. Tegyük fel, hogy B az A olyan részhalmaza, melynek minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú. Ekkor B kiterjeszthető A-nak olyan maximális M részhalmazává, melynek minden véges részhalmaza Φ tulajdonságú.
- Kuratowski lemma: Tetszőleges $\langle P, \prec \rangle$ részbenrendezett halmaznak van maximális rendezett részhalmaza.
- Zorn lemma.

Notes:

Tétel:
Ha $\models$ egy uniform következményreláció, akkor van karakterisztikus mátrixa.

Notes:

3.2. A többértékű logikák következményrelációi

3.2.1. Bochvar logikájának következményrelációja

Jelölje $\models_B$ a Bochvar logika mátrixa által meghatározott következményrelációt. (Az egytelen kitüntetett elem legyen T)

Tétel
$\Sigma \models_B \Theta$ akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan Θ', hogy $\Theta' \subseteq \Theta$, és Θ' kielégíti a következő feltételeket:

1. $\Sigma \models \Theta'$ a klasszikus logika értelmében helyes.
2. A Θ' minden állításparamétere előfordul Σ-ban.

Notes:

3.2.2. Kleene logikájának következményrelációja

Definíció
Legyen $\vdash_K$ az a legszűkebb uniform következményreláció, amely tartalmazza a következő szekvenseket:

$p \vdash_K \neg\neg p$	$p, \neg p \vdash_K$	$\neg\neg p \vdash_K p$
$p \wedge q \vdash_K p$		$\neg p \vdash_K \neg(p \wedge q)$
$p \wedge q \vdash_K q$		$\neg q \vdash_K \neg(p \wedge q)$
$p, q \vdash_K p \wedge q$		$\neg(p \wedge q) \vdash_K \neg p, \neg q$

Tétel
$\Theta \vdash_K \Sigma$ akkor és csak akkor, ha $\Theta \vDash_K \Sigma$.

Notes:

3.2.3. Łukasiewicz véges értékű logikájának következményrelációja

Łukasiewicz $m+1$-értékű logikájában (Ł$_{m+1}$ esetén):

- Az igazságértékek halmaza: $\{0, 1, \ldots, m\}$.
- $[\![p \supset q]\!] = [\![q]\!] \div [\![p]\!]$, ahol $x \div y = \begin{cases} x - y, & \text{ha } x \geq y; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$
- $[\![\neg p]\!] = m \div [\![x]\!]$
- Például Ł$_5$ igazságtáblázata:

$\supset$	0	1	2	3	4	$\neg$
0	0	1	2	3	4	4
1	0	0	1	2	3	3
2	0	0	0	1	2	2
3	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0

- A fenti táblázatban 0 a 'legigazabb' és 1 a 'leghamisabb' érték.

Notes:

A többi konnektívum értelmezése:

- $p \vee q =_{def} (p \supset q) \supset q$, ekkor $p \vee q = \min(\llbracket p \rrbracket, \llbracket q \rrbracket)$
- $p \wedge q =_{def} \neg(\neg p \vee \neg q)$, ekkor $p \vee q = \max(\llbracket p \rrbracket, \llbracket q \rrbracket)$
- Ha $k \in \{0, \ldots, m\}$, akkor $J_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = k; \\ m, & \text{egyébként.} \end{cases}$

Lemma
Legyen $\llbracket \star_k(p) \rrbracket = J_k(\llbracket p \rrbracket)$. Ekkor bármely $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén $\star_k$ $Ł_{m+1}$ definiálható, azaz kifejezhető a $\supset, \neg$ segítségével.
Megjegyzés:
Magát a függvényt is szokták $Ł_{m+1}$-kifejezhetőnek mondani.

Notes:

Kérdés: Van-e ehhez a szemantikához szintaktikai következményreláció?
Legyen $\vdash_{m+1}$ az a legszűkebb uniform következményreláció, amely bármely $x, y, z \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén tartalmazza a következő szekvenseket:

1. $\vdash \star_0(p), \star_1(p), \ldots, \star_m(p)$ (Valamelyik értéket fel kell vennie a p-nek.)
2. $\star_x(p), \star_y(p) \vdash$, ha $x \neq y$. (A bemenetek nem vehetik fel egyszerre a kitüntetett értéket.)
3. $\star_x(p), \star_y(q) \vdash \star_{y \dot{-} x}(p \supset q)$ (Az implikáció bevezetése.)
4. $\star_x(p) \vdash \star_{m-x}(\neg p)$ (A negáció bevezetése.)
5. $\star_0(p) \vdash p$ (A $\star_0$ művelet kiküszöbölhetősége.)
6. $p \vdash \star_0(p)$ (A $\star_0$ művelet bevezethetősége.)

Tétel:
$\Sigma \vdash_{m+1} \Theta$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vDash_{m+1} \Theta$.

Notes:

Bizonyítás:

- A helyesség bizonyítása triviális.
- A teljesség bizonyítása:
  - Ha $\Sigma \nvdash_{m+1} \Theta$, akkor a lemmánk szerint van olyan $\vdash$ következményreláció, amely Σ-prím kiterjesztése $\vdash_{m+1}$-nek, és $\Sigma \nvdash \Theta$.
  - Legyen a g az Ł$_{m+1}$ nyelv egy olyan interpretáló függvénye, amelyre teljesül, hogy $g(p) = k$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vdash \star_k(p)$.
    * 1. és 2. szerint a g függvény szabatosan definiált.
  - 3. és 4. segítségével struktúrális indukcióval bebizonyítható, hogy bármely $A \in Form$ esetén $\Sigma \vdash_{m+1} \star_k(A)$ akkor és csak akkor, ha $[\![A]\!]_g = k$.
    * Ha $A = p$, akkor g definíciója miatt teljesül állításunk.
    * Tegyük fel, hogy $\Sigma \vdash_{m+1} \star_k(A)$ akkor és csak akkor, ha $[\![A]\!]_g = k$.
    * 4. miatt $\star_k(A) \vdash \star_{m-k}(\neg A)$.
    * A metszet tulajdonság miatt $\Sigma \vdash \star_{m-k}(\neg A)$, de $[\![\neg A]\!]_g = m - k$.

Notes:

- Belátjuk, hogy Σ minden eleme a kitüntetett értéket veszi fel.
  - Ha $A \in \Sigma$, akkor $\Sigma \vdash A$.
  - Mivel 6. szerint $A \vdash \star_0(A)$, így a metszet tulajdonság miatt $\Sigma \vdash \star_0(A)$, következésképpen $[\![A]\!]_g = 0$.
- Belátjuk, hogy Θ egyetlen eleme sem veszi fel a kitüntetett értéket.
  - Indirekt tegyük fel, hogy van olyan $A \in \Theta$, hogy $[\![A]\!]_g = 0$.
  - Ekkor azonban $\Sigma \vdash \star_0(A)$ teljesül, és $\star_0(A) \vdash A$ valamint a metszet tulajdonság miatt $\Sigma \vdash A$, így $\Sigma \vdash \Theta$, ami ellentmond $\vdash$ értelmezésének.

Notes:

Egy hagyományos axiómatikus felépítése Ł$_3$-nak (Wajsberg, 1931):

1. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$

2. $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$

3. $((p \supset \neg p) \supset p) \supset p$

A levezetési szabályok: a helyettesítés és a modus ponens.
(Lindenbaum tétel)
$\models_m \subseteq \models_n$ (azaz $\models_n$ kiterjesztése $\models_m$-nek) akkor és csak akkor, ha $n-1$ osztója $m-1$-nek.

Notes:

3.2.4. Łukasiewicz végtelen értékű logikájának következményrelációja

- A $[0,1]$ intervallum racionális számain definiált végtelen értékű logika:
  $L_{\mathcal{N}_0} = \{s/w : 0 \leq s \leq w, s, w \in \mathcal{N}, w \neq 0\}$
- Kitütetett elem: 1
- $[\![\neg p]\!] =_{def} 1 - [\![p]\!]$
  $[\![p \supset q]\!] =_{def} \min(1, 1 - [\![p]\!] + [\![q]\!])$
- $p \vee q =_{def} (p \supset q) \supset q$
  $[\![p \vee q]\!] = \max([\![p]\!], [\![q]\!])$
- $p \wedge q =_{def} \neg(\neg p \vee \neg q)$
  $[\![p \wedge q]\!] = \min([\![p]\!], [\![q]\!])$
- $p \equiv q =_{def} (p \supset q) \wedge (q \supset p)$
  $[\![p \equiv q]\!] = 1- \mid [\![p]\!] - [\![q]\!] \mid$

Notes:

Tétel:
Legyen R az $\neg$ és a $\supset$ műveletek által definiált mátrix. Ekkor R karakterisztikus mátrixa a $\models_\omega$ következményrelációnak.
Megjegyzés:

- A $\models_\omega$ következményrelációnak nincs véges karakterisztikus mátrixa.
- Łukasiewicz végtelen értékű logikáját először Wajsberg 1935-ben axiómatizálta, de nem tudjuk, hogy hogyan.
- Az első publikált bizonyítás Rose és Rosser nevéhez fűződik (1958), de több mint 50 oldal.

Notes:

3.2.5. Véges axiómatizálhatóság

- Az eddigi véges mátrixok által generált következményrelációk végesen axiómatizálhatóak voltak: véges sok séma + véges sok levezetési szabály
- Kérdés: Vajon bármely vége mátrix által generált következményreláció végesen axiómatizálható-e:
- Wronski (1979): A következő 3-értékű mátrix által generált következményreláció nem axiómatizálható végesen. (A egyetlen kitüntetett elem a 2)

$\cdot$	0	1	2
0	2	0	2
1	2	2	2
2	2	2	2

Notes:

3.3. A funkcionális komplettség kérdései

3.3.1. Definiálható függvények

Kérdés: Egy adott többértékű mátrix esetén mely függvények definiálhatóak?
Megjegyzés:
A klasszikus kétértékű mátrix funkcionálisan komplett.
Definíció:

1. Egy logikai mátrix funkcionálisan komplett, ha bármely M-en definiált $f(\vec{d})$ függvény kifejezhető egy $\varphi(\vec{p})$ formulával (azaz, amely megadható véges sok állításparaméter és az értelmezett konnektívumok segítségével). $\vec{d} = \langle i_1, i_2, \ldots, i_k \rangle, i_j \in M, \vec{p} = \langle p_1, p_2, \ldots, p_k \rangle, p_j \in Con$
2. Legyen F az $M = \{0, 1, \ldots, m\}$ halmazon definiált függvények egy tetszőleges halmaza (a konstansokat 0 argumentumú függvényeknek tekintjük). Az $N \subseteq M$ halmazt F-zártnak nevezzük, ha N zárt az F halmazba tartozó függvények alkalmazására nézve.
3. Az $X \subseteq M$ halmaz F-lezártja az a legszűkebb F-zárt halmaz, amely tartalmazza az X halmazt. $(F_{CL}(X))$

Notes:

Lemma:
Legyen $M = \{0, 1, \ldots, m\}$ és F az M halmazon definiált függvények olyan halmaza, amelyre teljesül, hogy $\min, \max, J_k \in F$ $(k \in M)$. Ekkor az M halmazon definiált n-változós f függvény akkor és csak akkor F-definiálható, ha $f(\vec{x}) \in F_{CL}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$ minden $\vec{x} \in M^{(n)}$ esetén.
Bizonyítás:

- A feltétel szükségessége triviális.
- A elégségesség bizonyítása:
- Legyen $\vec{a} \in M^{(n)}$ és $\psi_{\vec{a}}(\vec{x}) = \max(J_{a_1}(x_1), J_{a_2}(x_2), \ldots, J_{a_n}(x_n), f(\vec{a}))$ $\psi_{\vec{a}}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{a}), & \text{ha } \vec{x} = \vec{a}; \\ m, & \text{egyébként.} \end{cases}$
- $f(\vec{x}) = \min(\psi_{\vec{a}}(\vec{x}), \vec{a} \in M^{(n)})$

Notes:

Tétel:
Post $m+1$-értékű logikája funkcionálisan komplett.

- A rendszerben szereplő konnektívumok:
  - $[\![p \vee q]\!] = \min([\![p]\!], [\![q]\!])$
  - $[\![\neg p]\!] = [\![p]\!] \oplus 1$ $\oplus =' + \ (mod\ m+1)$
- Először megmutatjuk, hogy az 1-argumentumú függvények Post-definiálhatóak:
- $T(x) = \min(x, x \oplus 1, \ldots, x \oplus m)$ $(= 0$, ha $x \in M)$
- Ez valójában a kizárt harmadik törvényének általánosítása:
- $\models p \vee \neg p \vee \neg\neg p \vee \cdots \vee \neg \ldots \neg p$
- $T_k(x) = \min(\min(T(x) \oplus 1, x) \oplus m, x \oplus k \oplus 1) \oplus m$
- $T_k(x) = \begin{cases} m, & \text{ha } x \neq 0; \\ k, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

Notes:

- Legyen f tetszőleges egyváltozós függvény ($f : M \to M$).
- Ekkor $f(x) = \min(T_{f(0)}(x), T_{f(1)}(x \oplus m), \ldots, T_{f(m)}(x \oplus 1))$
- Így a J_k függvények is definiálhatóak, valamint $\max(x, y) = h(\min(h(x), h(y)))$, ahol $h(x) = m - x$
- Alkalmazható az előző lemma.
  - Minden egyargumentumú függvény Post-definiálható.
  - Az egyetlen nemüres Post-lezárt részhalmaza M-nek önmaga.
  - Így Post konnektívumai funkcionálisan komplett halmazt alkotnak.

Megjegyzés:

- A két felhasznált Post operátor egyre redukálható:
- Az m-értékű logika Sheffer konnektívuma lehet bázis. (Rosenberg, 1970).

Notes:

3.3.2. Łukasiewicz m-értékű logikájában definiálható függvények

- Łukasiewicz logikai rendszerei nem funkcionálisan komplettek.
- Ha egy formulában szereplő állításparaméterek csak a klasszikus igazságértékeknek megfelelő 0-t, illetve m-et veszik fel, akkor a formula is csak ezen értékek valamelyikét veheti fel.
- $Ł_3$ úgy tehető komplett́é, hogy hozzávesszük azt a függvényt, amely mindig az 1 értéket veszi fel.
- Bármely nemdefiniálható függvény felvétele komplettd teszi $Ł_3$-at.

Definíció:
Az m-értékű konnektívumoknak az S halmazát prekomplettnek nevezzük, ha nem funkcionálisan komplett, de bármely S-ben nem definiálható függvény hozzávételével funkcionálisan komplett́é válik.
Megjegyzés:
Pl.: $Ł_6$ prekomplett, $Ł_7$ nem prekomplett.

Notes:

Lemma:

Legyen F az Ł$_{m+1}$-definiálható függvények halmaza. Ha $X \subseteq \{0, 1, \ldots, m\}$ F-lezárt, akkor $gcd(x, y) \in X$ minden $x, y \in X$ esetén.

Tétel:

Az $M = \{0, 1, \ldots, m\}$ halmazon definiált n-argumentumú függvény akkor és csak akkor Ł$_{m+1}$-definiálható, ha bármely $\vec{a}$ rendezett n-es esetén $gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n, m)$ osztója $f(\vec{a})$-nak.

Következmény:
Az Ł$_{m+1}$ konnektívumai akkor és csak akkor alkotnak prekomplett halmazt, ha m prím.

Notes:

3.3.3. Bochvar logikájának következményrelációja

Jelölje $\vDash_B$ a Bochvar logika mátrixa által meghatározott következményrelációt. (Az egytelen kitüntetett elem legyen T)

Tétel
$\Sigma \vDash_B \Theta$ akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan Θ', hogy $\Theta' \subseteq \Theta$, és Θ' kielégíti a következő feltételeket:

1. $\Sigma \vDash \Theta'$ a klasszikus logika értelmében helyes.

2. A Θ' minden állításparamétere előfordul Σ-ban.

Notes:

3.3.4. Kleene logikájának következményrelációja

Definíció
Legyen $\vdash_K$ az a legszűkebb uniform következményreláció, amely tartalmazza a következő szekvenseket:

$p \vdash_K \neg\neg p$	$p, \neg p \vdash_K$	$\neg\neg p \vdash_K p$
$p \wedge q \vdash_K p$		$\neg p \vdash_K \neg(p \wedge q)$
$p \wedge q \vdash_K q$		$\neg q \vdash_K \neg(p \wedge q)$
$p, q \vdash_K p \wedge q$		$\neg(p \wedge q) \vdash_K \neg p, \neg q$

Tétel
$\Theta \vdash_K \Sigma$ akkor és csak akkor, ha $\Theta \vDash_K \Sigma$.

Notes:

3.3.5. Łukasiewicz véges értékű logikájának következményrelációja

Łukasiewicz $m+1$-értékű logikájában Ł$_{m+1}$ esetén:

- Az igazságértékek halmaza: $\{0, 1, \ldots, m\}$.
- $[\![p \supset q]\!] = [\![q]\!] \div [\![p]\!]$, ahol $x \div y = \begin{cases} x - y, & \text{ha } x \geq y; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$
- $[\![\neg p]\!] = m \div [\![x]\!]$
- Például $_5$ igazságtáblázata:

$\supset$	0	1	2	3	4	$\neg$
0	0	1	2	3	4	4
1	0	0	1	2	3	3
2	0	0	0	1	2	2
3	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0

- A fenti táblázatban 0 a 'legigazabb' és 1 a 'leghamisabb' érték.

Notes:

A többi konnektívum értelmezése:

- $p \vee q =_{def} (p \supset q) \supset q$, ekkor $p \vee q = \min([\![p]\!], [\![q]\!])$
- $p \wedge q =_{def} \neg(\neg p \vee \neg q)$, ekkor $p \vee q = \max([\![p]\!], [\![q]\!])$
- Ha $k \in \{0, \ldots, m\}$, akkor $J_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = k; \\ m, & \text{egyébként.} \end{cases}$

Lemma:
Legyen $[\![\star_k(p)]\!] = J_k([\![p]\!])$. Ekkor bármely $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén $\star_k$ $_{m+1}$ definiálható, azaz kifejezhető a $\supset, \neg$ segítségével.

Megjegyzés:

- Magát a függvényt is szokták $_{m+1}$-kifejezhetőnek mondani.

Notes:

Kérdés: Van-e ehhez a szemantikához szintaktikai következmény-reláció?

Legyen $\vdash_{m+1}$ az a legszűkebb uniform következményreláció, amely bármely $x, y, z \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén tartalmazza a következő szekvenseket:

1. $\vdash \star_0(p), \star_1(p), \ldots, \star_m(p)$ (Valamelyik értéket fel kell vennie a p-nek.)
2. $\star_x(p), \star_y(p) \vdash$, ha $x \neq y$. (A bemenetek nem vehetik fel egyszerre a kitüntetett értéket.)
3. $\star_x(p), \star_y(q) \vdash \star_{y \div x}(p \supset q)$ (Az implikáció bevezetése.)
4. $\star_x(p) \vdash \star_{m-x}(\neg p)$ (A negáció bevezetése.)
5. $\star_0(p) \vdash p$ (A $\star_0$ művelet kiküszöbölhetősége.)
6. $p \vdash \star_0(p)$ (A $\star_0$ művelet bevezethetősége.)

Tétel:
$\Sigma \vdash_{m+1} \Theta$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vDash_{m+1} \Theta$.

Notes:

Bizonyítás:

A helyesség bizonyítása triviális.

A teljesség bizonyítása:

- Ha $\Sigma \nvdash_{m+1} \Theta$, akkor a lemmánk szerint van olyan $\vdash$ következményreláció, amely Σ-prím kiterjesztése $\vdash_{m+1}$-nek, és $\Sigma \nvdash \Theta$.
- Legyen a g az $_{m+1}$ nyelv egy olyan interpretáló függvénye, amelyre teljesül, hogy $g(p) = k$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vdash \star_k(p)$.

  1. és 2. szerint a g függvény szabatosan definiált.
- 3. és 4. segítségével struktúrális indukcióval bebizonyítható, hogy bármely $A \in Form$ esetén $\Sigma \vdash_{m+1} \star_k(A)$ akkor és csak akkor, ha $[\![A]\!]_g = k$.

  Ha $A = p$, akkor g definíciója miatt teljesül állításunk.

  Tegyük fel, hogy $\Sigma \vdash_{m+1} \star_k(A)$ akkor és csak akkor, ha $[\![A]\!]_g = k$.

  4. miatt $\star_k(A) \vdash \star_{m-k}(\neg A)$.

  A metszet tulajdonság miatt $\Sigma \vdash \star_{m-k}(\neg A)$, de $[\![\neg A]\!]_g = m - k$.

Notes:

- Belátjuk, hogy Σ minden eleme a kitüntetett értéket veszi fel.

  Ha $A \in \Sigma$, akkor $\Sigma \vdash A$.

  Mivel 6. szerint $A \vdash \star_0(A)$, így a metszet tulajdonság miatt $\Sigma \vdash \star_0(A)$, következésképpen $[\![A]\!]_g = 0$.

- Belátjuk, hogy Θ egyetlen eleme sem veszi fel a kitüntetett értéket.

  Indirekt tegyük fel, hogy van olyan $A \in \Theta$, hogy $[\![A]\!]_g = 0$.

  Ekkor azonban $\Sigma \vdash \star_0(A)$ teljesül, és $\star_0(A) \vdash A$ valamint a metszet tulajdonság miatt $\Sigma \vdash A$, így $\Sigma \vdash \Theta$, ami ellentmond $\vdash$ értelmezésének.

Notes:

Egy hagyományos axiómatikus felépítése $_3$-nak (Wajsberg, 1931):

1. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$

2. $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$

3. $((p \supset \neg p) \supset p) \supset p$

A levezetési szabályok: a helyettesítés és a modus ponens.

Lindenbaum tétel:
$\vDash_m \subseteq \vDash_n$ (azaz $\vDash_n$ kiterjesztése $\vDash_m$-nek) akkor és csak akkor, ha $n-1$ osztója $m-1$-nek.

Notes:

3.3.6. Łukasiewicz végtelen értékű logikájának következményrelációja

- A $[0,1]$ intervallum racionális számain definiált végtelen értékű logika:
  $L_{\mathcal{N}_0} = \{s/w : 0 \leq s \leq w, s, w \in \mathcal{N}, w \neq 0\}$
- Kitütetett elem: 1
- $[\![\neg p]\!] =_{def} 1 - [\![p]\!]$
  $[\![p \supset q]\!] =_{def} \min(1, 1 - [\![p]\!] + [\![q]\!])$
- $p \vee q =_{def} (p \supset q) \supset q$
  $[\![p \vee q]\!] = \max([\![p]\!], [\![q]\!])$
- $p \wedge q =_{def} \neg(\neg p \vee \neg q)$
  $[\![p \wedge q]\!] = \min([\![p]\!], [\![q]\!])$
- $p \equiv q =_{def} (p \supset q) \wedge (q \supset p)$
  $[\![p \equiv q]\!] = 1- \mid [\![p]\!] - [\![q]\!] \mid$

Notes:

Tétel:
Legyen R az $\neg$ és a $\supset$ műveletek által definiált mátrix. Ekkor R karakterisztikus mátrixa a $\models_\omega$ következményrelációnak.

Megjegyzés:

- A $\models_\omega$ következményrelációnak nincs véges karakterisztikus mátrixa.
- Łukasiewicz végtelen értékű logikáját először Wajsberg 1935-ben axiómatizálta, de nem tudjuk, hogy hogyan.
- Az első publikált bizonyítás Rose és Rosser nevéhez fűződik (1958), de több mint 50 oldal.

Notes:

3.3.7. Véges axiómatizálhatóság

Az eddigi véges mátrixok által generált következményrelációk végesen axiómatizálhatóak voltak: véges sok séma + véges sok levezetési szabály

Kérdés: Vajon bármely vége mátrix által generált következményreláció végesen axiómatizálható-e:

Wronski (1979): A következő 3-értékű mátrix által generált következményreláció nem axiómatizálható végesen. (A egyetlen kitüntetett elem a 2)

$\cdot$	0	1	2
0	2	0	2
1	2	2	2
2	2	2	2

Notes:

3.3.8. Definiálható függvények

Kérdés: Egy adott többértékű mátrix esetén mely függvények definiálhatóak?

Megjegyzés:

A klasszikus kétértékű mátrix funkcionálisan komplett.

Definíció:

1. Egy logikai mátrix funkcionálisan komplett, ha bármely M-en definiált $f(\vec{d})$ függvény kifejezhető egy $\varphi(\vec{p})$ formulával (azaz, amely megadható véges sok állításparaméter és az értelmezett konnektívumok segítségével). $\vec{d} = \langle i_1, i_2, \ldots, i_k \rangle, i_j \in M, \vec{p} = \langle p_1, p_2, \ldots, p_k \rangle, p_j \in Con$

2. Legyen F az $M = \{0, 1, \ldots, m\}$ halmazon definiált függvények egy tetszőleges halmaza (a konstansokat 0 argumentumú függvényeknek tekintjük). Az $N \subseteq M$ halmazt F-zártnak nevezzük, ha N zárt az F halmazba tartozó függvények alkalmazására nézve.

3. Az $X \subseteq M$ halmaz F-lezártja az a legszűkebb F-zárt halmaz, amely tartalmazza az X halmazt. $(F_{CL}(X))$

Notes:

Lemma:

Legyen $M = \{0, 1, \ldots, m\}$ és F az M halmazon definiált függvények olyan halmaza, amelyre teljesül, hogy $\min, \max, J_k \in F$ $(k \in M)$. Ekkor az M halmazon definiált n-változós f függvény akkor és csak akkor F-definiálható, ha $f(\vec{x}) \in F_{CL}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$ minden $\vec{x} \in M^{(n)}$ esetén.

Bizonyítás:

A feltétel szükségessége triviális.

A elégségesség bizonyítása:

Legyen $\vec{a} \in M^{(n)}$ és $\psi_{\vec{a}}(\vec{x}) = \max(J_{a_1}(x_1), J_{a_2}(x_2), \ldots, J_{a_n}(x_n), f(\vec{a}))$ $\psi_{\vec{a}}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{a}), & \text{ha } \vec{x} = \vec{a}; \\ m, & \text{egyébként.} \end{cases}$

$f(\vec{x}) = \min(\psi_{\vec{a}}(\vec{x}), \vec{a} \in M^{(n)})$

Notes:

Tétel:

Post $m+1$-értékű logikája funkcionálisan komplett.

Bizonyítás:

A rendszerben szereplő konnektívumok:

- $[\![p \vee q]\!] = \min([\![p]\!], [\![q]\!])$
- $[\![\neg p]\!] = [\![p]\!] \oplus 1 \; \oplus =' + \; (mod\; m+1)$

Először megmutatjuk, hogy az 1-argumentumú függvények Post-definiálhatóak:

$T(x) = \min(x, x \oplus 1, \ldots, x \oplus m)$ $(= 0$, ha $x \in M)$

Ez valójában a kizárt harmadik törvényének általánosítása:

$\models p \vee \neg p \vee \neg\neg p \vee \cdots \vee \neg \ldots \neg p$

$T_k(x) = \min(\min(T(x) \oplus 1, x) \oplus m, x \oplus k \oplus 1) \oplus m$

$$T_k(x) = \begin{cases} m, & \text{ha } x \neq 0; \\ k, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Notes:

Legyen f tetszőleges egyváltozós függvény ($f : M \to M$).

Ekkor $f(x) = \min(T_{f(0)}(x), T_{f(1)}(x \oplus m), \ldots, T_{f(m)}(x \oplus 1))$

Így a J_k függvények is definiálhatóak, valamint $\max(x, y) = h(\min(h(x), h(y)))$, ahol $h(x) = m - x$

Alkalmazható az előző lemma.

Minden egyargumentumú függvény Post-definiálható.

Az egyetlen nemüres Post-lezárt részhalmaza M-nek önmaga.

Így Post konnektívumai funkcionálisan komplett halmazt alkotnak.

Megjegyzés:

A két felhasznált Post operátor egyre redukálható:

Az m-értékű logika Sheffer konnektívuma lehet bázis. (Rosenberg, 1970).

Notes:

3.3.9. Łukasiewicz m-értékű logikájában definiálható függvények

- Łukasiewicz logikai rendszerei nem funkcionálisan komplettek.
- Ha egy formulában szereplő állításparaméterek csak a klasszikus igazságértékeknek megfelelő 0-t, illetve m-et veszik fel, akkor a formula is csak ezen értékek valamelyikét veheti fel.
- $_3$ úgy tehető kompletté, hogy hozzávesszük azt a függvényt, amely mindig az 1 értéket veszi fel.
- Bármely nemdefiniálható függvény felvétele kompletté teszi $_3$-at.

Definíció:

Az m-értékű konnektívumoknak az S halmazát prekomplettnek nevezzük, ha nem funkcionálisan komplett, de bármely S-ben nem definiálható függvény hozzávételével funkcionálisan kompletté válik.

Megjegyzés: Pl.: $_6$ prekomplett, $_7$ nem prekomplett.

Notes:

Lemma:

Legyen F az $_{m+1}$-definiálható függvények halmaza. Ha $X \subseteq \{0, 1, \dots, m\}$ F-lezárt, akkor $gcd(x, y) \in X$ minden $x, y \in X$ esetén.

Tétel:

Az $M = \{0, 1, \dots, m\}$ halmazon definiált n-argumentumú függvény akkor és csak akkor $_{m+1}$-definiálható, ha bármely $\vec{a}$ rendezett n-es esetén $gcd(a_1, a_2, \dots, a_n, m)$ osztója $f(\vec{a})$-nak.

Következmény:

Az $_{m+1}$ konnektívumai akkor és csak akkor alkotnak prekomplett halmazt, ha m prím.

Notes:

4. Deskripciók, értékrés a logikában

4.1. Deskripciók

- olyan nevek, amelyek jelentésük által jelölnek;
- nem merev jelölők;

Notes:

4.2. A deskripciók és a tulajdonnevek

Fő kérdés: Van–e a tulajdonneveknek jelentésük?

- Frege, Russell: a tulajdonnevek rövidített leírások.
  - De: Ez szemantikai bizonytalanságot okoz a nyelvhasználatban, hiszen az *Arisztotelész* név az alábbi leírások bármelyikét rövidítheti:

    Platón tanítványa és Nagy Sándor nevelője
    Platón Sztageirából származó tanítványa

  - Mit jelent a következő mondat?

    Arisztotelész Sztageirából származott.

  - Frege: Egy tökéletes nyelvben ilyen ingadozásoknak nem szabad előfordulniok.
- Kripke: a tulajdonneveknek nincs jelentésük abban az értelemben, hogy ez meghatározná denotátumukat.

Notes:

4.3. Hogyan használjuk a deskripciókat?

Miként járulnak hozzá az őket tartalmazó mondatok jelentéséhez? Hatékony használatuk feltételei:

- Van egy és csak egy olyan objektum, amely teljesíti a deskripcióban szereplő tulajdonságot.
- Probléma: Jelentésük magában foglalja–e hatékony használatuk feltételeit?
  - Frege: nem;
  - Russell: igen

  Az USA jelenlegi elnöke Texasban született.

  Van egy és csak egy olyan objektum, ami/aki az USA jelenlegi elnöke, és ő Texasban született.
- Megkerülhetetlen probléma: a tagadás

Notes:

4.4. Formalizálás

Általános alak:

Az, ami/aki A.
Az az x, ami/aki $F(x)$.
IxA, $IxF(x)$,

ahol A, illetve $F(x)$ a klasszikus elsőrendű logika egy formulája. A deskripció egzisztenciaformulája:

- Tegyük fel, hogy az $IxF(x)$ deskripció az a–val jelölt objektumot jelöli.
- Ekkor $F(a)$ és $\forall x(F(x) \supset x = a)$
- $F(a)$ helyett: $\forall x(x = a \supset F(x))$
- a kettő együtt: $\forall x(F(x) \equiv x = a)$
- Az a név kiküszöbölése: $\exists y \forall x(F(x) \equiv x = y)$

Notes:

4.5. A deskripció szemantikája

Ahhoz, hogy az $IxF(x)$ deskripció jelöljön az szükséges, hogy a

$$H = \{u : u \in U,\ [\![F(x)]\!]_{v[x:u]} = 1\}$$

halmaz egyelemű legyen.

Ha $H = \{u_0\}$, akkor $[\![IxF(x)]\!]_v^{Ip} = u_0$.
Ha a H halmaz nem egyelemű, akkor a deskripciónak nincs denotátuma, szemantikai értékrés lép fel.

Notes:

4.6. Értékréses elsőrendű logika

- Az értékrés öröklődésének törvénye.
  - *Frege elsődleges nézete*: ha egy mondatban jelölet nélküli név szerepel, akkor a mondatnak nincs igazságértéke, (de van jelentése).
  - *Frege másodlagos nézete*: Egy logikailag perfekt nyelvben a jelölet nélüli nevek nem megengedhetők.
- Az értékrés forrásai: nevek, predikátumok.

Notes:

4.6.1. Az értékréses elsőrendű logika grammatikája

- Új logikai konstans: a deskriptor (I) és az 'igaz, hogy' ($+$) ($LC' = LC \cup \{I, +\}$).
- A deskripciók mint összetett nevek a terminusok halmazába kerülnek:
  Ha $A \in Form$ és $x \in Var$, akkor 'IxA'$\in Term$.
- A formulák halmaza a következővel bővül:
  Ha $A \in Form$, akkor '$+A$'$\in Form$.

Notes:

4.6.2. Az értékréses elsőrendű logika szemantikája

- Az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és a v értékelés fogalma ugyanaz, mint a klasszikus elsőrendű logikában.
- Ha $H = \{u : u \in U, [\![A]\!]_{v[x:u]} = 1\} = \{u_0\}$, akkor $[\![IxA]\!]_v^{Ip} = u_0$, egyébként $[\![IxA]\!]_v^{Ip} = \Theta_\iota$
- Ha az A atomi formulában előfordul olyan t terminus, hogy $[\![t]\!]_v^{Ip} = \Theta_\iota$, akkor $[\![A]\!]_v^{Ip} = \Theta_o(= 2)$
- Ha $[\![A]\!]_v^{Ip} = \Theta_o(= 2)$, akkor $[\![\neg A]\!]_v^{Ip} = \Theta_o(= 2)$
- Az igazságfunktorok örökítik az értékrést.
- Ha minden U-beli u objektumra $[\![A]\!]_{v[x:u]}^{Ip} = \Theta_o$, akkor $[\![\forall xA]\!]_v^{Ip} = \Theta_o$ és $[\![\exists xA]\!]_v^{Ip} = \Theta_o$, egyébként a klasszikus szabályok érvényesek.
- $[\![+A]\!]_v^{Ip} = 1$, ha $[\![A]\!]_v^{Ip} = 1$, és 0 máskor.
- Legyen $-A = def \neg + A$. Ekkor $[\![-A]\!]_v^{Ip} = 0$, ha $[\![A]\!]_v^{Ip} = 1$, és 1 máskor, azaz $-A$ megfelel a 'nem igaz, hogy A'-nak.
- $[\![+\neg A]\!]_v^{Ip} = 1$, ha $[\![A]\!]_v^{Ip} = 0$, és 0 máskor, azaz $+\neg A$ megfelel a 'hamis, hogy A'-nak.

Notes:

4.6.3. Centrális szemantikai fogalmak

- A centrális szemantikai fogalmak körében változatlan a kielégíthetőség és a kielégíthetetlenség fogalma.
- Szemantikai következményreláció.
  - A klasszikus gyenge következményreláció általánosítása: $\Gamma \vDash_w A$ ha $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthetetlen: azaz nem lehetnek egyszerre igazak, de értékréses logikában lehet némelyik értékréses.
  - Ekkor a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ halmaznak minden interpretációban van nem igaz eleme.
    * Ha valamely interpretációban Γ minden eleme igaz, akkor ott $[\![\neg A]\!]$ 0 vagy 2, azaz A igaz vagy értékréses.
    * Ha valamely interpretációban Γ valamely eleme értékréses, akkor $\neg A$ és így persze A bármilyen értéket felvehet (lehet hamis is).
    * Tehát a gyenge következményreláció csak azt zárja ki, hogy ha minden premissza igaz, akkor hamis legyen a konklúzió.

Notes:

Tulajdonságok:

- Ha $\Gamma \vDash_w A$, és amennyiben $\langle Ip, v\rangle$ modellje Γ-nak, úgy $[\![A]\!]_v^{Ip} = 2$, akkor minden $B \in Form$ esetén $\Gamma \cup \{A\} \vDash_w B$.
- Tehát értékréses rendszerben nem teljesül az, hogy egy formulahalmaz valamely következményével való bővítése nem szaporítja a következmények számát.
- Ha A minden interpretáció és értékelés szerint értékréses (pl.: $Ix(x \neq x) = Ix(x \neq x)$), akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ és minden $B \in Form$ esetén teljesül, hogy $\Gamma \vDash_w A$, és $\Gamma \cup \{A\} \vDash_w B$.

Notes:

- A klasszikus gyenge következményreláció erősitése: $\Gamma \vDash_{ws} A$, ha Γ egyetlen eleme sem hamis, akkor $[\![A]\!] = 1$.
- Trivialitás: Ha $\Gamma \vDash_{ws} A$, akkor $\Gamma \vDash_w A$.
- A klasszikus erős következményreláció általánosítása: $\Gamma \vDash_s A$ ha Γ minden modellje modellje A-nak.
- A klasszikus erős következményreláció gyengítése: $\Gamma \vDash_{sw} A$ ha Γ egyetlen modelljében sem hamis A.
- Trivialitás: Ha $\Gamma \vDash_s A$, akkor $\Gamma \vDash_{sw} A$.
- $A \vDash_s A$, $A \vDash_{sw} A$, de $A \nvDash_{ws} A$, $A \vDash_w A$.
- $A \vDash_s +A$, $A \vDash_{sw} +A$, de $A \nvDash_{ws} +A$, $A \nvDash_w +A$.
- $+A \vDash_s A$, $+A \vDash_{sw} A$, $+A \vDash_{ws} A$, $+A \vDash_w A$.
- $-A \nvDash_s \neg A$, de $-A \vDash_{sw} \neg A$, $-A \nvDash_{ws} \neg A$, $-A \vDash_w \neg A$.
- $\neg A \vDash_s -A$, $\neg A \vDash_{sw} -A$, $\neg A \vDash_{ws} -A$, $\neg A \vDash_w -A$.

Notes:

- A cáfolhatatlan, ha sohasem (egyetlen interpretáció és értékelés mellett sem) veszi fel a 0 értéket.
- A érvényes, ha minden interpretáció és értékelés mellett igaz.
- A klasszikus logikai igazságok zöme csak cáfolhatatlan lesz, hiszen ha deskripció szerepel bennük, akkor fölvehetik a 2 értéket (Pl.: $a = a$).
- Érvényes lesz viszont a következő két formula: $\forall x(x = x), \exists x(x = x)$
- A akkor és csak akkor érvényes, ha $+A$ cáfolhatatlan.

Notes:

Nyitott deskripciók kezelése:

- Minden férfinak nő a felesége.
- $\forall y(F(x) \supset G(Ix(H(x)(y))))$
- A hatókörben formula értéke nőtlen férfi esetén 2, nős (egynejű) férfiak esetén pedig 1.
- Ha egyetlen nős férfi sincs, akkor az egész formula 2 értékű.
- Ha van néhány nős férfi, s feleségeik is az individuumtartományba tartoznak, akkor a formula igaz lesz.
- Mintha a szerkezet azt mondaná, hogy a férfiak osztálya része lenne a nős férfiak osztályának.
- $\forall y(F(x) \supset G(x))$: klasszikus logikában a terjedelmi alárendeltséget fejezi ki.
- Értékréses logikában ez a rekonstrukció nem foglalja magában azt, hogy az előtag igazságtartománya része lenne az utótag igazságtartományának.

Notes:

Szubordináció: Az F predikátum alárendelt a G predikátumnak.

- $\forall y(F(x) \supset +G(x))$
- F igazsága esetén mindig igaz legyen G.
- Ekkor $\forall y(F(x) \supset +G(Ix(H(x)(y))))$ hamis lesz, ha van nőtlen férfi.
- Az eredeti mondatnak két értelmezése van:
  - Nincs olyan férfi, akinek nem nő a felesége.
  - Ekkor igaz az eredeti mondat, hiszen ellenpéldával nem cáfolható.
  - A férfiak osztálya alárendelt a nősek osztályának.
  - Ekkor hamis, hiszen vannak nőtlen férfiak is.

Notes:

- Ha F totálisan elfajuló, akkor $\forall y(F(x) \supset +G(x))$ 2 értékű, de a G elfajuló, akkor ezt nem érzékeli.
- Indokolt az "F alárendelt G-nek" mondatot igazságérték nélkülinek tekinteni akkor, ha G totálisan elfajuló.
- $A\ \mathbf{SUB}_x\ B =_{def} \forall x(A \supset +B) \wedge \forall x(B \supset B)$
- Ez 2 értékű lesz, ha $\forall xA$ vagy $\forall xB$ értéke 2. Igaz, ha az x változó minden olyan értékelése esetén, amelyben A igaz, B is igaz. Hamis egyébként.
- A kontrapozíció a $\mathbf{SUB}$ funktorra nem érvényes.
- $A\ \mathbf{SUB}_x\ B$ és $\neg B\ \mathbf{SUB}_x\ \neg A$ nem logikai szinonimák.
- A $-(A \supset A)$ akkor és csak akkor igaz, ha A kettő értékű, azaz alkalmas annak kifejezésére, hogy A-nak nincs igazságértéke.
- Az $Ix(x \neq x)$ felfogható a nullentitás neveként.

Notes:

5. Post algebrák

5.1. m-értékű halmazok

- Egy U tartomány részhalmazait egyértelműen karakterizálja a karakterisztikus függvények 2^U halmaza.
- Az U tartomány m-értékű halmazai a $\{0, 1, \ldots, m-1\}^U$ függvényhalmaz elemei.
- Ha X egy m értékű halmaza U-nak, akkor $X(a) = k$ úgy értendő, hogy annak, hogy 'a eleme X-nek' az (igazság)értéke k.
- Az U tartomány m-értékű halmazainak családja: $P(U, m)$
- Ha $X, Y \in P(U, m)$, akkor

  $$X \wedge Y(a) = \min(X(a), Y(a))$$
  $$X \vee Y(a) = \max(X(a), Y(a))$$
- $P(U, m)$ egy disztributív háló lesz a $\wedge, \vee$ műveletekre nézve.

Notes:

A halmazelméleti tartalmazás definíciója:

- $X \preceq Y$ akkor és csak akkor, ha $X(a) \leq Y(a)$ minden $a \in U$ esetén.
- $X \wedge Y$ a legnagyobb alsó korlátja az X és Y halmazoknak.
- $X \vee Y$ a legkisebb felső korlátja az X és Y halmazoknak.
- $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z$
- Legyen $\uparrow$ $P(U, m)$ legnagyobb, $\downarrow$ pedig a legkisebb eleme. $\uparrow$ az $m-1$ értékű, $\downarrow$ pedig a 0 értékű konstans függvény.
- Legyen C_k a k értékű konstans függvény. Ekkor$0 =\downarrow\preceq C_1 \preceq C_2 \preceq \cdots \preceq C_{m-1} =\uparrow$
- Klasszikus halmazok azok az m-értékű X halmazok, amelyekre $X(a) \in \{0, 1\}$ minden $a \in U$ esetén.
- A klasszikus halmazoknak egyértelmű komplementere van: $X \wedge \bar{X} =\downarrow$, $X \vee \bar{X} =\uparrow$

Notes:

- Legyen $D_k(X)$ az az m-értékű halmaza U-nak, amelyre telejsül, hogy $D_k(X)(a) = m-1$ ha $X(a) \geq k$ és $D_k(X)(a) = 0$ ha $X(a) < k$.
- Triviális, hogy $X = (D_1(X) \wedge C_1) \vee \cdots \vee (D_{m-1}(X) \wedge C_{m-1})$

Definíció:
$m+1$ rendű Post algebrán egy olyan disztributív L hálót értünk (legnagyobb elem $\uparrow$, legkisebb elem $\downarrow$), amelyre teljesülnek a következők:

- L-nek van egy olyan $\downarrow= c_0 \preceq c_1 \preceq c_2 \preceq \cdots \preceq c_m =\uparrow$ részlánca, amelyre teljesül, hogy L bármely a eleme kifejezhető $a = a_1c_1 \vee a_2c_2 \vee \cdots \vee a_mc_m$ alakban, ahol $a_i \in C(L)$.
- Ha $a \in C(L)$ és $ac_i \leq c_{i-1}$ valamely i-re, akkor $a =\downarrow$

Megjegyzés:
Triviális, hogy c_i-k diszjunktak.

Notes:

5.2. Epstein tétele

Epstein tétele 1960:
Ha L egy $m+1$ rendű $(m > 0)$ Post algebra, akkor minden $a \in L$ egyértelműen reprezentálható a következő alakban: $a = (a_1 \wedge c_1) \vee (a_2 \wedge c_2) \vee \cdots \vee (a_m \wedge c_m)$, ahol $a_i \in C(L)$ és $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m$.

Notes:

6. Irodalom

1. Alasdair Urquhart: Many-valued logic, in: D. Gabbay, F. Güenther: Handbook of philosophical logic, Vol. III, pp. 71–117.
2. Richard Grandy: Many–valued, free, and intuitionistic logics, in: Companion to philosophical logic, pp. 531–544.
3. Grzegorz Malinowski: Many–valued logic, in: Companion to philosophical logic, pp. 545–561.
4. Gottlob Frege: Logikai vizsgálódások, Osiris Kiadó, Budapest, 2000. (15–25, 118–147, 191–217)
5. William Kneale, Martha Kneale: A logika fejlődése, Gondolat Kiadó, Budapest 1987.
6. Ruzsa Imre: Bevezetés a modern logikába, Osiris Kiadó, Budapest, 2001.
7. Ruzsa Imre: Logikai szintaxis és szemantika, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.

Notes: