Haladó logika

Mihálydeák Tamás
mihalydeak@inf.unideb.hu

2008. június 20.

Tartalomjegyzék

1. A klasszikus elsőrendű logika szabatos felépítése

1.1. A klasszikus elsőrendű logika nyelve

Definíció:
Klasszikus elsőrendű nyelven az
$$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form\rangle$$
rendezett ötöst értjük, ahol

1. $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, =, \forall, \exists, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
2. Var $(= \{x_n : n = 0, 1, 2, \dots\})$ a nyelv változóinak megszámlálhatóan végtelen halmaza.
3. $Con = \bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathcal{F}(n) \cup \mathcal{P}(n))$ a nyelv nemlogikai konstansainak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza. ($\mathcal{F}(0)$ a névkonstansok, $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú függvényjelek, $\mathcal{P}(0)$ az állításkonstansok, $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú predikátumkonstansok halmaza.)

Notes:

4. Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok $(n = 0, 1, 2, \dots)$ páronként diszjunktak.
5. A nyelv terminusainak a halmazát, azaz a $Term$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
   (a) $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
   (b) Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, $(n = 1, 2, \dots)$, és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor $f(t_1)(t_2)\dots(t_n) \in Term$ (vagy $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \in Term$).
6. A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a $Form$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
   (a) $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
   (b) Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
   (c) Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, $(n = 1, 2, \dots)$, és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1)(t_2)\dots(t_n) \in Form$ (vagy $P(t_1, t_2, \dots, t_n) \in Form$).
   (d) Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
   (e) Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B) \in Form$.
   (f) Ha $x \in Var$, $A \in Form$, akkor $\forall xA$, $\exists xA \in Form$.

Notes:

Definíció:
Legyen $L^{(1)}$ egy olyan klasszikus elsőrendű nyelv, amelyben $\mathcal{P}(0) = \emptyset$. Az $L^{(1)}$ hasonlósági típusának (vagy egyszerűen típusának) nevezzük a $t = \langle \mathcal{F}, \mathcal{P}, \tau \rangle$ rendezett hármast, ahol $\mathcal{F} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(n)$, τ pedig egy olyan függvény, amelyre teljesülnek a következők:

- $Dom(\tau) = \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$
- ha $f \in \mathcal{F}(n)$, akkor $\tau(f) = n$
- ha $P \in \mathcal{P}(n)$, akkor $\tau(P) = n$

Megjegyzés:
Legyen $t = \langle \mathcal{F}, \mathcal{P}, \tau \rangle$ egy olyan rendezett hármas, amelyre teljesül, hogy

1. a $\mathcal{F}, \mathcal{P}, LC$ páronként diszjunktak;
2. τ a $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ halmazon értelmezett a természetes számok halmazába képező olyan függvény, amelyre teljesül, hogy ha $P \in \mathcal{P}$, akkor $\tau(P) > 0$.

Ekkor a t-hez egyértelműen megadható egy olyan elsőrendű nyelv, amelynek típusa t. (A fenti két feltételt teljesítő rendezett hármasokat típusnak vagy hasonlósági típusnak nevezzük.)

Notes:

Legyen $L^{(1)}$ egy $t = \langle \mathcal{F}, \mathcal{P}, \tau \rangle$ típusú elsőrendű nyelv.

- A $Term$ halmaz elemeit t típusú kifejezéseknek (terminusoknak, termeknek), a $Form$ halmaz elemeit pedig t típusú formuláknak nevezzük. (Jelölés: $K(t) = Term, F(t) = Form$)
- A 6. a, b, c szabályok által létrejött formulákat prímformuláknak (vagy atomi formuláknak) nevezzük.
- $F(t)$ részhalmazait t típusú elméleteknek nevezzük. (Jelölés: Γ, Δ)
- A t típus számosságán az $|\mathcal{F}| + |\mathcal{P}|$ számosságot értjük.
- A $t_1 = \langle \mathcal{F}_1, \mathcal{P}_1, \tau_1 \rangle$ típus résztípusa a $t_2 = \langle \mathcal{F}_2, \mathcal{P}_2, \tau_2 \rangle$ típusnak ($t_1 \subseteq t_2$), ha $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ és $\tau_1 = \tau_2 \restriction \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_1$.

A formulaindukció tétele:
Tegyük fel, hogy valamilyen Φ állítás igaz a prímformulákra, továbbá ha igaz az A és B formulára, akkor igaz a $\neg A, (A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B)$, $\forall x A$, $\exists x A$. Ekkor Φ igaz az összes formulára.

Notes:

1.2. A klasszikus elsőrendű logika szemantikája

1.2.1. Az interpretáció fogalma

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)}$ nyelv egy *interpretáció*jának nevezzük, ha

- $U \neq \emptyset$ azaz U nemüres halmaz;
- $Dom(\varrho) = Con$
  - Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n) \quad (n \neq 0)$, akkor $\varrho(f) \in U^{U^{(n)}}$
  - Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n) \quad (n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$ ($\varrho(P) \in \{0, 1\}^{U^{(n)}}$).

Notes:

1.2.2. Az értékelés fogalma

Az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó v *értékelés*en egy olyan függvényt értünk, amely teljesíti a következőket:

- $Dom(v) = Var$;
- Ha $x \in Var$, akkor $v(x) \in U$.

A *módosított értékelés* fogalma: Legyen v egy tetszőleges $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés, $x \in Var$ egy változó és $u \in U$ egy objektum. Ekkor bármely $y \in Var$ esetén

$$v[x : u](y) = \begin{cases} u, & \text{ha } y = x; \\ v(y), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Notes:

1.2.3. Szemantikai szabályok

Legyen adott egy $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és egy rá támaszkodó v értékelés.

- Ha $a \in \mathcal{P}(0)$, akkor $|a|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \varrho(a)$.
- Ha $x \in Var$, akkor $|x|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = v(x)$.
- Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, $(n = 1, 2, \dots)$, és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor $|f(t_1)(t_2)\dots(t_n)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \varrho(f)(\langle |t_1|_v^{\langle U,\varrho\rangle}, |t_2|_v^{\langle U,\varrho\rangle}, \dots, |t_n|_v^{\langle U,\varrho\rangle}\rangle)$
- Ha $p \in Con(0)$, akkor $|p|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \varrho(p)$
- Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor

$$|(t_1 = t_2)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha } |t_1|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = |t_2|_v^{\langle U,\varrho\rangle} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Ha $P \in Con(n)$ $(n \neq 0)$, $t_1, \dots, t_n \in Term$, akkor

$$|P(t_1)\dots(t_n)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \langle |t_1|_v^{\langle U,\varrho\rangle}, \dots, |t_n|_v^{\langle U,\varrho\rangle}\rangle \in \varrho(P); \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Notes:

- Ha $A \in Form$, akkor $|\neg A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1 - |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle}$.
- Ha $A, B \in Form$, akkor

$$|(A \supset B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1, \text{ és } |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \wedge B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1, \text{ és } |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \vee B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0, \text{ és } |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \equiv B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Ha $A \in Form, x \in Var$, akkor

$$|\forall x A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0, & \text{ha van olyan } u \in U, \text{ hogy } |A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|\exists x A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha van olyan } u \in U, \text{ hogy } |A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho\rangle} = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Notes:

Definíció:
Legyen $t = \langle \mathcal{F}, \mathcal{P}, \tau \rangle$ egy hasonlósági típus, $L^{(1)}$ egy t típusú nyelv, $\langle U, \varrho \rangle$ pedig $L^{(1)}$ egy interpretációja. Ekkor az $\mathcal{I} = \langle U, \varrho \rangle$ interpretációt t típusú struktúrának nevezzük.

Megjegyzés:

- Ha $A \in Form$, $\mathcal{I} = \langle U, \varrho \rangle$ egy interpretáció, v egy $\mathcal{I}$-re támaszkodó értékelés, akkor $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle}$ értéket az A formula $\mathcal{I}$ struktúrán felvett v értékelés melletti értékének nevezzük.
- Ha $\mathcal{I} = \langle U, \varrho \rangle, |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$, akkor $\mathcal{I} \vDash A[v]$. (A igaz az $\mathcal{I}$ struktúrán a v értékelés mellett.)
- Ha minden v értékelésre $\mathcal{I} \vDash A[v]$, akkor azt mondjuk, hogy A igaz a $\mathcal{I}$ struktúrán: $\mathcal{I} \vDash A$
- Ha $\mathcal{I} \vDash A$, akkor $\mathcal{I}$ strukturális modellje A-nak.
- Előfordulhat, hogy valamely A-ra $\mathcal{I} \nvDash A$ és $\mathcal{I} \nvDash \neg A$ teljesül.

Notes:

Lemma:
$\mathcal{I} \vDash A$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{I} \vDash \forall x A$, ahol $x \in Var$ tetszőleges.

Az A formula szabad változóinak a $V(A)$ halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:
Definíció:

1. Ha A prímformula (atomi formula), akkor $V(A)$ az A formulában szereplő változók halmaza.
2. $V(\neg A) = V(A)$
3. $V((A \supset B)) = V((A \wedge B)) = V((A \vee B)) = V((A \equiv B)) = V(A) \cup V(B)$
4. $V(\forall x A) = V(\exists x A) = V(A) \setminus \{x\}$

Lemma:
Legyenek v és v' olyan $\mathcal{I}$-re támaszkodó értékelések, melyekre minden $x \in V(A)$ esetén $v(x) = v'(x)$. Ekkor $\mathcal{I} \vDash A[v]$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{I} \vDash A[v']$.

Notes:

Definíció:
Az $A \in Form$ formula zárt, ha $V(A) = \emptyset$. A t típusú zárt formulák halmazát $F^0(t)$-vel jelöljük.

Az előző lemma alapján ha A zárt formula, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

- minden v értékelésre $\mathcal{I} \vDash A[v]$,
- valamely v értékelésre $\mathcal{I} \vDash A[v]$,
- $\mathcal{I} \vDash A$

Az univerzális lezárt fogalma:
Ha $A \in Form, V(A) = \{x_0, x_1, \ldots x_{n-1}\}$, akkor az A formula univerzális lezártja a $\forall x_{n-1} \ldots \forall x_1 \forall x_0 A$ formula. (Jelölés: $\bar{A}$)

Lemma:
$\mathcal{I} \vDash A$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{I} \vDash \bar{A}$

Notes:

1.3. A szemantikai következményfogalom

Definíció:
Legyen t egy hasonlósági típus, $L^{(1)}$ egy t típusú nyelv, $\Gamma \subseteq F(t)$ és $A \in F(t)$.

- $\mathcal{I} \vDash \Gamma$, ha minden $A \in \Gamma$ esetén $\mathcal{I} \vDash A$.
- Ha $\mathcal{I} \vDash \Gamma$, akkor $\mathcal{I}$-t a Γ elmélet (strukturális) modelljének nevezzük.
- Az A formula szemantikai következménye a Γ elméletnek, ha minden t típusú $\mathcal{I}$ struktúrára, $\mathcal{I} \vDash \Gamma$ esetén $\mathcal{I} \vDash A$ teljesül. (Jelölés: $\Gamma \vDash A$)
- Ha $\emptyset \vDash A$, akkor az A formulát logikai igazságnak nevezzük. (A igaz minden t típusú struktúrában. Jelölés: $\vDash A$)
- Ha $\vDash (A \equiv B)$, akkor az A és B formulákat logikailag ekvivalensnek nevezzük. (Jelölés: $A \Leftrightarrow B$)

Megjegyzések:

- $\mathcal{I} \vDash \Gamma$, ha minden $A \in \Gamma$ esetén $\mathcal{I} \vDash A$.
- Ha $\Gamma \vDash A$, akkor az A formulát a Γ elmélet tételének nevezzük.
- A szemantikai következmény szemléletes tartalma: a Γ formulahalmaznak szemantikai következménye az A formula, ha A igaz Γ minden strukturális modelljében.

Notes:

1.3.1. A következményreláció tulajdonságai

- Ha $A \Leftrightarrow B$, akkor $\{A\} \models B$ és $\{B\} \models A$.
- Az előző állítás megfordítottja nem igaz.
- Ha $\Gamma \models (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \models B$. (Dedukció tétel)
- A dedukció tétel megfordítása nem igaz.

Notes:

2. Modellelméleti alapfogalmak

Legyen a továbbiakban $t = \langle \mathcal{F}, \mathcal{P}, \tau \rangle$ egy rögzített típus, és $\mathcal{I}$ egy t típusú struktúra ($\mathcal{I} = \langle U, \varrho \rangle$).

Definíció:
Az $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ t típusú struktúrák izomorfak ($\mathcal{I}_1 \approx \mathcal{I}_2$), ha a struktúrák alaphalmazai (U_1, U_2) között van olyan $g : U_1 \to U_2$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- minden $f \in \mathcal{F}(n)$ n-változós függvényjel és $u_1, \ldots, u_n \in U_1$ esetén $g(\varrho_1(f)(u_1, \ldots, u_n)) = \varrho_2(f)(g(u_1), \ldots, g(u_n))$;
- minden $P \in \mathcal{P}(n)$ n-változós relációjel és $u_1, \ldots, u_n \in U_1$ esetén $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle \in \varrho_1(P)$ akkor és csak akkor, ha $\langle g(u_1), \ldots, g(u_n) \rangle \in \varrho_2(P)$.

Megjegyzések:

- Ha két struktúra izomorf, akkor alaphalmazaik számossága megegyezik.
- A struktúrák izomorfizmusa ekvivalencia reláció.

Notes:

Lemma:
Legyen v egy $\mathcal{I}_1$ feletti értékelés. Jelölje $g(v)$ azt az $\mathcal{I}_2$ feletti értékelést, melyre $g(v)(x) = g(v(x))$. Ekkor tetszőleges $A \in F(t)$ formulára teljesül, hogy

- $|A|_v^{\langle U_1, \varrho_1 \rangle} = |A|_{g(v)}^{\langle U_2, \varrho_2 \rangle}$, azaz $\mathcal{I}_1 \vDash A[v]$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{I}_2 \vDash A[g(v)]$
- $\mathcal{I}_1 \vDash A$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{I}_2 \vDash A$

Definíció:
Legyen κ egy számosság. A $\Gamma \subseteq F(t)$ t típusú elméletet κ-kategorikusnak nevezzük, ha van κ számosságú modellje, és bármely két κ számosságú modellje izomorf egymással.

Például a $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall z (z = x \vee z = y))$ egyetlen formulából álló üres típusú elmélet 2-kategorikus.

Notes:

Definíció:
Legyen $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ két t típusú struktúra. $\mathcal{I}_1$ és $\mathcal{I}_2$ elemien ekvivalens ($\mathcal{I}_1 \sim \mathcal{I}_2$), ha minden $A \in F(t)$ esetén $\mathcal{I}_1 \vDash A$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{I}_2 \vDash A$

Megjegyzés:
Az izomorf struktúrák elemien ekvivalensek, de fordítva általában nem.

Definíció:
Egy $\Gamma \subseteq F(t)$ elmélet teljes, ha bármely két modellje elemien ekvivalens.

Lemma:
Egy $\Gamma \subseteq F(t)$ elmélet pontosan akkor teljes, ha bármely zárt $A \in F(t)$ esetén $\Gamma \vDash A$ vagy $\Gamma \vDash \neg A$ teljesül.

Megjegyzés:

- Az $A \in F(t)$ formula független a $\Gamma \subseteq F(t)$ elmélettől, ha $\Gamma \nvDash \bar{A}$ és $\Gamma \nvDash \neg\bar{A}$
- Γ akkor és csak akkor teljes, ha nincs tőle független formula.

Notes:

2.1. Példák

Definíció:
Legyen $\mathcal{K}$ egy t típusú struktúrákból álló osztály. $\mathcal{K}$ axiomatizálható, ha van a formuláknak olyan $\Gamma \subseteq F(t)$ halmaza, hogy $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$ akor és csak akkor, ha minden $A \in \Gamma$ esetén $\mathcal{I} \vDash A$. A $\mathcal{K}$ végesen axiomatizálható, ha van véges Γ is.

Rendezés:

- Parciális rendezés (részben rendezés):
  - $x \leq x$: reflexív;
  - $(x \leq y \wedge y \leq x) \supset x = y$: antiszimmetrikus;
  - $(x \leq y \wedge y \leq z) \supset x \leq z$: tranzitív.
- Lineáris rendezés (vagy csak rendezés):
  - $x \leq y \vee y \leq x$
- Sűrű rendezés:
  - $\forall x \forall y((x \leq y \wedge x \neq y) \supset \exists z(x \leq z \wedge z \leq y \wedge x \neq z \wedge x \neq z))$

Notes:

- Kezdő és végpont nélküli rendezés:
  - $\forall x \exists y(y \leq x \wedge y \neq x)$
  - $\forall x \exists y(x \leq y \wedge x \neq y)$
- Diszkrét rendezés:
  - $\forall x(\exists y(y \leq x \wedge y \neq x) \supset \exists y(y \leq x \wedge y \neq x \wedge \forall z(z \leq x \supset (z = x \vee z \leq y))))$
  - $\forall x(\exists y(x \leq y \wedge y \neq x) \supset \exists y(x \leq y \wedge x \neq y \wedge \forall z(x \leq z \supset (x = z \vee y \leq z))))$
- Kezdőponttal rendelkező végpont nélküli rendezés:
  - $\exists x \forall y(y \leq x \supset y = x)$
  - $\forall x \exists y(x \leq y \wedge x \neq y)$

Notes:

Peano aritmetika:
A Peano aritmetika hasonlósági típusa: t^{PA} a 0 és 1 konstansjelekből, és a $+, \cdot$ kétváltozós függvényjelekből áll. A Peano axiómák formalizált alakja a következő:

1. $x + 1 \neq 0$
2. $x + 1 = y + 1 \supset x = y$
3. $x + 0 = x$
4. $x + (y + 1) = (x + y) + 1$
5. $x \cdot 0 = 0$
6. $x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x$
7. Tetszőleges $A(x) \in F(t^{PA})$ formulára
   $(A(0) \wedge \forall x(A(x) \supset A(x + 1))) \supset \forall x A(x)$

Notes:

3. Logikai kalkulusok

3.1. Klasszikus elsőrendű kalkulus

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ a klasszikus elsőrendű logika nyelve.
A klasszikus elsőrendű kalkulus alapsémái (axiómasémái) a klasszikus állításkalkulus alapsémái, továbbá:

- (A1): $A \supset (B \supset A)$
- (A2): $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3): $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$
- (A4): $(\forall x A \supset A^{t/x})$
- (A5): $(\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B))$
- (A6): $(A \supset \forall x A)$, ha A-ban x-nek nincs szabad előfordulása.
- (A7): $x = x$
- (A8): $((x = y) \supset (A^{x/z} \supset A^{y/z}))$

Notes:

Szabályos behelyettesítés:

- A, B, C: formulák, x, y, z: változók, t: terminus;
- (A4): A-ban x behelyettesíthető t-vel;
- (A8): A-ban z behelyettesíthető az x, y változókkal.

Alapformulák (axiómák):

1. Az alapsémák szabályos behelyettesítésével nyert formulák alapformulák.
2. Ha A alapformula, akkor a '$\forall x A$' formula is alapformula (univerzális generalizálás).

Notes:

3.1.1. Következményreláció I. (strukturális induktív definíció)

Legyen $\Gamma \subseteq Form, A \in Form$. A Γ formulahalmaznak szintaktikai következménye az A formula ($\Gamma \vdash A$), ha az alábbiak valamelyike teljesül:

1. ha $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$;
2. ha A alapformula (axióma), akkor $\Gamma \vdash A$;
3. ha $\Gamma \vdash B$, és $\Gamma \vdash B \supset A$, akkor $\Gamma \vdash A$.

Notes:

3.1.2. Következményreláció II.

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(A_1, A_2, \ldots, A_n \in Form)$ formulasorozatot a Γ $(\subseteq Form)$ formulahalmazból való levezetésnek nevezzük, ha a sorozat A_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ elemére az alábbiak valamelyike teljesül

1. $A_i \in \Gamma$;
2. A_i alapformula (axióma);
3. ha van olyan j, k index $j, k < i$, hogy $A_k =$ '$A_j \supset A_i$'.

A Γ formulahalmaznak szintaktikai következménye az A formula ($\Gamma \vdash A$), ha van olyan Γ-ból való levezetés, amelynek utolsó tagja A.

Notes:

Tétel
A következményreláció két definíciója ekivalens, azaz $\Gamma \vdash_1 A$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash_2 A$.
Bizonyítás:
Ha $\Gamma \vdash_1 A$ akkor $\Gamma \vdash_2 A$:

- Ha $A \in \Gamma$, akkor az A formula egy Γ-ból való levezetése maga az A formula, így $\Gamma \vdash_2 A$.
- Ha A alapformula, akkor az A formula egy Γ-ból való levezetése maga az A formula, így $\Gamma \vdash_2 A$.
- Indukciós lépés:
  - Ha $\Gamma \vdash_1 B$, akkor van Γ-ból való levezetése: $B_1, B_2, \ldots, B_k$, ahol $B_k = B$.
  - Ha $\Gamma \vdash_1 B \supset A$, akkor olyan Γ-ból való levezetése: $C_1, C_2, \ldots, C_l$, ahol $C_l = B \supset A$.
  - Ekkor a $B_1, B_2, \ldots, B_k, C_1, C_2, \ldots, C_l, A$ levezetés az A formulának egy Γ-ból való levezetése.

Notes:

Ha $\Gamma \vdash_2 A$ akkor $\Gamma \vdash_1 A$:

- A feltétel szerint A-nak van Γ-ból való levezetése, legyen ez $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ahol $A_n = A$.
- A levezetés tagjai szerinti indukció:
  - Ha A_i alapformula, akkor $\Gamma \vdash_1 A_i$.
  - Ha $A_i \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash_1 A_i$.
  - Ha van olyan j, k index $j, k < i$, hogy $A_k = A_j \supset A_i$, akkor $\Gamma \vdash_1 A_j$ és $\Gamma \vdash_1 A_j \supset A_i$ miatt $\Gamma \vdash_1 A_i$.

Notes:

Definíció

- Az A formulát levezethetőnek mondjuk, ha $\emptyset \vdash A$.
- Legyen $\Gamma \subseteq Form$ tetszőleges formulahalmaz. A Γ formulahalmazt *inkonzisztensnek* nevezzük, ha minden $A \in Form$ esetén teljesül, hogy $\Gamma \vdash A$.
- A Γ formulahalmaz konzisztens, ha nem inkonzisztens.

Notes:

A kalkulus és a logika kapcsolata:

- A kalkulus helyes a logikai rendszerre nézve (a szemantikai felépítésre nézve), ha teljesül, hogy ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \vDash A$.
- A kalkulus teljes a logikai rendszerre nézve (a szemantikai felépítésre nézve), ha teljesül, hogy ha $\Gamma \vDash A$, akkor $\Gamma \vdash A$.
- A kalkulus adekvát a logikai rendszerre nézve (a szemantikai felépítésre nézve), ha helyes és teljes.

Tétel (Gödel): A klasszikus elsőrendű (nulladrendű) kalkulus adekvát a klasszikus elsőrendű (nulladrendű) szemantikára nézve.

Kalkulus	Logika
$\Gamma \vdash A$	$\Gamma \vDash A$
Inkonzisztens	Kielégíthetetlen
Konzisztens	Kielégíthető
A levezethető	A érvényes

Notes:

Az adekvátsági tétel bizonyításának vázlata:

1. Helyesség:
   - Az alapformulák (axiómák) érvényes formulák.
   - A levezetési szabály szemantikai értelemben helyes.
2. Teljesség:
   - Bizonyítandó, hogy ha $\Gamma \vDash A$, akkor $\Gamma \vdash A$, azaz ha $\Gamma \nvdash A$, akkor $\Gamma \nvDash A$.
   - Ha $\Gamma \nvdash A$, akkor $\Gamma \cup \{\neg A\}$ konzisztens.
   - Be lehet bizonyítani, hogy ha egy formulahalmaz konzisztens, akkor van modellje (telítettség, szaturáltság).
   - Így a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ halmaznak van modellje, tehát kielégíthető. Következésképpen: $\Gamma \nvDash A$

Notes:

A kompaktság definíciója:

Egy $\models$ ($\vdash$) következményrelációt *kompaktnak* nevezünk, ha bármely Γ formulahalmaz és A formula esetén teljesül, hogy amennyiben $\Gamma \models A$, úgy van olyan Δ formulahalmaz, hogy Δ véges, $\Delta \subseteq \Gamma$ és $\Delta \models A$.

Kompaktsági tétel:

- A klasszikus nulladrendű kalkulus (logika) következményrelációja kompakt.
- A klasszikus elsőrendű kalkulus (logika) következményrelációja kompakt.
- Bizonyítás: Triviális

Notes:

Definíció
Az $L^{(1)}$ nyelv egy Γ formulahalmazát *maximálisan konzisztens*nek nevezzük, ha

1. Γ konzisztens;
2. Γ egzisztenciálisan komplett ($\exists$–komplett), (ha $\neg\forall x A \in \Gamma$), akkor van olyan c névkonstans, hogy $\neg A^{c/x} \in \Gamma$;
3. Γ maximális: ha $A \in Form$ és $A \notin \Gamma$, akkor $\Gamma \cup \{A\}$ inkonzisztens.

Megjegyzés:

- A maximálisan konzisztens formulahalmazokat gyakran QC–komplett formulahalmazokként emlegetik.

Notes:

Tétel
Legyen Γ egy maximálisan konzisztens formulahalmaza az $L^{(1)}$ nyelvnek. Ekkor

1. Ha $\Gamma \vdash A$, akkor $A \in \Gamma$;
2. Ha $A \in Form$ és $A \notin \Gamma$, akkor $\neg A \in \Gamma$;
3. Ha $\neg\neg A \in \Gamma$, akkor $A \in \Gamma$;
4. Ha $\neg(A \supset B) \in \Gamma$, akkor $A \in \Gamma$ és $\neg B \in \Gamma$;
5. Ha $\neg\forall A \in \Gamma$, akkor van olyan c névkonstans, hogy $\neg A^{c/x} \in \Gamma$;
6. Ha $(A \supset B) \in \Gamma$ és $B \notin \Gamma$, akkor $\neg A \in \Gamma$;
7. Ha $\forall x A \in \Gamma$ és $a \in N_0$ (a névkonstans), akkor $A^{a/x} \in \Gamma$;
8. Ha A literál, $s, t \in Term$ és $x \in Var$, akkor amennyiben $s = t \in \Gamma$ és $A^{s/x} \in \Gamma$, úgy $A^{t/x} \in \Gamma$
9. Ha $f(t_1, \ldots, t_n) \in Term$, akkor van olyan $c \in N_0$ (van olyan c névkonstans), hogy $f(t_1, \ldots, t_n) = c \in \Gamma$;
10. Ha $x \in Var$, akkor van olyan $c \in N_0$, hogy $x = c \in \Gamma$.

Notes:

Tétel
Ha a Γ formulahalmaz maximálisan konzisztens, akkor kielégíthető.

Tétel
Ha az $L^{(1)}$ nyelv Γ_0 formulahalmaza konzisztens, akkor az $L^{(1)}_{+}$ nyelvben van olyan maximálisan konzisztens Γ formulahalmaz, hogy $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Notes: