1.6 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ονομάζουμε παραγοντοποίηση μιας αλγεβρικής παράστασης την διαδικασία μετατροπής της παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο.

Είναι φανερό ότι η διαδικασία της παραγοντοποίησης είναι η αντίστροφη διαδικασία της ανάπτυξης. Η χρησιμότητα της παραγοντοποίησης είναι στην εύρεση του Μ.Κ.Δ. και του Ε.Κ.Π. πολυωνύμων, στην απλοποίηση κλασματικών παραστάσεων ,στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασματικών παραστάσεων, στην επίλυση εξισώσεων δευτέρου και ανώτερου βαθμού.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Κοινός παράγοντας

Όταν όλοι οι όροι ενός πολυωνύμου έχουν κοινό παράγοντα ,τότε το άθροισμα των όρων του πολυωνύμου μετατρέπεται σε γινόμενο με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

π. χ $\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha(\beta+\gamma)$,$\alpha\beta-\alpha\gamma=\alpha(\beta-\gamma)$, $\kappa\alpha+\kappa\beta+\kappa\gamma=\kappa(\alpha+\beta+\gamma)$,
$\mu\alpha-\mu\beta+\mu\gamma=\mu(\alpha-\beta+\gamma)$

Σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, όταν σ' όλους τους όρους ενός πολυωνύμου υπάρχει κοινός παράγοντας, τότε γράφουμε τον κοινό παράγοντα έξω από την παρένθεση, και μέσα στην παρένθεση γράφουμε το πηλίκο της διαίρεσης κάθε όρου του πολυωνύμου με τον κοινό παράγοντα.

π.χ $x^2yz^2+2xy^2z+3xyz=xyz(xz+2y+3)$ γιατί

$$\frac{x^2yz^2}{xyz}=xz, \frac{2xy^2z}{xyz}=2y, \frac{3xyz}{xyz}=3.$$

Είναι φανερό ότι ο κοινός παράγοντας είναι το γινόμενο που αποτελείται από το μέγιστο κοινό διαιρέτη των συντελεστών των όρων του πολυωνύμου και από τα κοινά γράμματα σ' όλους τους όρους του καθένα από τα οποία λαμβάνεται με τον μικρότερο εκθέτη.

Μερικές φορές επίσης δεν θα είναι φανερός ο κοινός παράγοντας παρά μόνο αν κάνουμε κάποιες μετατροπές γνωρίζοντας ότι

$$-(x-y)= -x+y = +(y-x).$$

π.χ $5x(x-y)-x+y=5x(x-y)-(x-y)=5x\underline{(x-y)}-1\ \underline{(x-y)}=$
$=(x-y)(5x-1)$

Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

Όταν όλοι οι όροι ενός πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τότε μπορούμε χωρίζοντας κατάλληλα τους όρους σε ομάδες (με το ίδιο πλήθος όρων) που έχουν κοινό παράγοντα και μετά την παραγοντοποίησή τους μας δίνουν κοινό παράγοντα.

π.χ $\underline{\kappa\alpha}+\underline{\kappa\beta}+\underline{\underline{\lambda\alpha}}+\underline{\underline{\lambda\beta}}=\kappa\underline{(\alpha+\beta)}+\lambda\underline{(\alpha+\beta)}=(\alpha+\beta)(\kappa+\lambda)$

Διαφορά τετραγώνων

Στην περίπτωση που το πολυώνυμο είναι ή μπορεί να γίνει της μορφής $\alpha^2-\beta^2$ τότε εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta).$$

π. χ $64x^2-81y^2=(8x)^2-(9y)^2=(8x+9y)(8x-9y)$

και $(5x+1)^2-4=(5x+1)^2-2^2=(5x+1+2)(5x+1-2)=(5x+3)(5x-1)$

Ανάπτυγμα τετραγώνου

Όταν έχουμε ένα πολυώνυμο με τρεις όρους(τριώνυμο) το οποίο είναι ανάπτυγμα τετραγώνου δηλαδή είναι (ή μπορεί να γίνει) της μορφής

$\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$,τότε χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες

$(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$.

π. χ $\kappa^2+2\kappa\lambda+\lambda^2=(\kappa+\lambda)^2$ και $49x^2+28xy+4y^2=(7x)^2+2.7x.2y+(2y)^2=(7x+2y)^2$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

Όταν έχουμε ένα πολυώνυμο με τρεις όρους (τριώνυμο) και μεγαλύτερη δύναμη του x είναι η 2η δύναμη δηλαδή το πολυώνυμο είναι τριώνυμο 2ου βαθμού και επίσης με συντελεστή του x^2 την μονάδα, συντελεστή του x το α +β και σταθερό όρο το α·β ,τότε το πολυώνυμο αναλύεται ως εξής.

$$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha.\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$$

π. χ $x^2-7x+12=x^2+(-3-4)x+(-3)(-4)=(x-3)(x-4)$

Είναι φανερό ότι για να παραγοντοποιήσουμε ένα τέτοιο τριώνυμο αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο το σταθερό του όρο και άθροισμα τον συντελεστή του x. Αυτό το επιτυγχάνουμε κάνοντας δοκιμές. Αν ο σταθερός όρος είναι αρνητικός τότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι ετερόσημοι και αν ο σταθερός όρος είναι θετικός είναι ομόσημοι και αν ο συντελεστής του x είναι θετικός είναι θετικοί ή αν είναι αρνητικός είναι αρνητικοί.

Διαφορά ή άθροισμα κύβων

Όταν ένα πολυώνυμο είναι ή μπορεί να γίνει της μορφής $\alpha^3 \pm \beta^3$,τότε χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες $\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)(\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2)$

π.χ $\quad x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

$\quad\quad x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 + 2x + 4)$

Συνδυασμός περιπτώσεων

Όταν δεν εφαρμόζεται αυτούσια κάποια από τις παραπάνω περιπτώσεις, τότε συνδυάζουμε δύο ή περισσότερες από τις περιπτώσεις αυτές.

π. χ $\underline{x^2 - 2xy + y^2} - z^2 = (x-y)^2 - z^2 = (x-y+z)(x-y-z)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ένα πολυώνυμο δεν αναλύεται πάντοτε σε γινόμενο παραγόντων
   π. χ x^2+2, x^4+3
2. Είναι φανερό από τα όσα αναφέραμε παραπάνω ότι το πλήθος των όρων ενός πολυωνύμου μας βοηθάει να καταλάβουμε σε ποια από τις περιπτώσεις θα εργαστούμε για την ανάλυση. Αν δηλαδή έχει δύο όρους είναι πιθανό να αναλύεται σε διαφορά τετραγώνων ή άθροισμα (διαφορά) κύβων .Αν έχει τρεις όρους είναι πιθανό να είναι ανάπτυγμα τετραγώνου διωνύμου .Αν έχει 2,4,6,... όρους και δεν υπάρχει κοινός παράγοντας είναι πιθανό να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της ομαδοποίησης.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενο παραγόντων ;

α) $2(x-y)(x+y)$ **β)** $2+(x-y)(x+y)$ **γ)** $4(\alpha-\beta)^2$ **δ)** $4+(\alpha-\beta)^2$

ε) $(x+2y)x-y$ **στ)** $(x+2y)(x-y)$ **ζ)** $(\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)$ **η)** $(\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)+1$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γινόμενα παραγόντων είναι οι παραστάσεις (α) , (γ) , (στ) και (ζ)

Η β δεν είναι γιατί υπάρχει άθροισμα 2+
Η δ δεν είναι γιατί υπάρχει άθροισμα 4+
Η ε δεν είναι γιατί υπάρχει άθροισμα –y
Η η δεν είναι γιατί υπάρχει άθροισμα +1

2. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες .

α) $8x + 16 = 8\cdot(\dots\dots\dots)$ **β)** $3\alpha y - y^2 = y\cdot(\dots\dots\dots)$

γ) $6x^2 + 12x = \dots\dots(x + 2)$ **δ)** $-4x^2 + 8x = -4x\cdot(\dots\dots\dots)$

ε) $\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot(\dots\dots\dots)$ **στ)** $(x-1)^2 - (x-1) = (x-1)\cdot(\dots\dots\dots)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $8x + 16 = 8\cdot(\mathbf{x+2})$

β) $3\alpha y - y^2 = y\cdot(\mathbf{3\alpha - y})$

γ) $6x^2 + 12x = \mathbf{6x}(x + 2)$

δ) $-4x^2 + 8x = -4x\cdot(\mathbf{x-2})$

ε) $\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot(\mathbf{x+1})$

στ) $(x-1)^2 - (x-1) =$
$= (x-1)\cdot(x-1-1) = (x-1)(\mathbf{x-2})$

α) Χρησιμοποιούμε τη επιμεριστική ιδιότητα βγάζοντας κοινό παράγοντα το 8.
β) Χρησιμοποιούμε τη επιμεριστική ιδιότητα βγάζοντας κοινό παράγοντα το y.
γ) Χρησιμοποιούμε τη επιμεριστική ιδιότητα βγάζοντας κοινό παράγοντα το 6x.
δ) Χρησιμοποιούμε τη επιμεριστική ιδιότητα βγάζοντας κοινό παράγοντα το -4x.
ε) Χρησιμοποιούμε τη επιμεριστική ιδιότητα βγάζοντας κοινό παράγοντα το $\sqrt{2}$.
στ) Χρησιμοποιούμε τη επιμεριστική ιδιότητα βγάζοντας κοινό παράγοντα το x-1.

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση .

Η παράσταση $3x^3 + 3x^2 + x + 1$ παραγοντοποιείται ως εξής :

α) $3x^2(x+1)$ **β)** $(x+3)(3x^2-1)$ **γ)** $(x+1)(3x^2+1)$ **δ)** $x(3x^2+x+1)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η παράσταση $3x^3 + 3x^2 + x + 1$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με την περίπτωση (γ)
Οπότε : $3x^3 + 3x^2 + x + 1=$
$=(x+1)(3x^2+1)$.

$3x^3 + 3x^2 + x + 1=$
$=3x^2(x+1)+1.(x+1)=$
$=(x+1)(3x^2+1)$
(Παραγοντοποίηση κατά ομάδες και κατόπιν κοινός παράγοντας)

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) , αν είναι σωστές , ή με (Λ) , αν είναι λανθασμένες.

α) $x^2-2^2 = (x-2)(x+2)$ **β)** $x^2-9 = (x-9)(x+9)$

γ) $112^2 - 12^2 = 100\cdot 124$ **δ)** $4y^2 - 1 = (4y-1)(4y+1)$

ε) $4x^2 - \alpha^2 = (2x-\alpha)(2x+\alpha)$ **στ)** $\alpha^2 - (\beta-1)^2 = (\alpha+\beta-1)(\alpha-\beta-1)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $x^2-2^2 = (x-2)(x+2)$ (Σ)

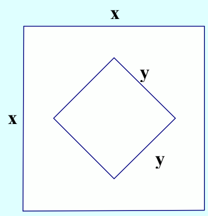
β) $x^2 – 9 = x^2 - 3^2 = (x – 3)\ (x + 3)$ (Λ)
γ) $112^2 – 12^2 = (112-12)(112+12) =$
$=100·124$ (Σ)
δ) $4y^2 – 1 = (2y)^2 - 1^2 = (2y – 1)\ (2y + 1)$ (Λ)
ε) $4x^2 – α^2 = (2x)^2 - α^2 = (2x – α)\ (2x + α)$ (Σ)
στ) $α^2 – (β–1)^2 = [α+(β-1)][α-(β-1)] =$
$= (α + β – 1)(α – β + 1)$ (Λ)

Εφαρμόζουμε την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων σε όλες τις περιπτώσεις

5. Αν ισχυριστούμε ότι το εμβαδόν του πράσινου μέρους είναι $(x–y)(x+y)$, αυτό είναι σωστό ή λάθος ;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το εμβαδόν που ζητάμε είναι $(x – y)\ (x + y)$.
Γιατί για να το υπολογίσουμε πρέπει από το μεγάλο εξωτερικό τετράγωνο να αφαιρέσουμε εσωτερικό οπότε :
$E = x^2 – y^2 = (x – y)\ (x + y)$.



Εφαρμόζουμε την ταυτότητα
$α^2 – β^2 = (α+β)(α-β)$.

6. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες .
α) $α^3 – 2^3 = (α – 2) \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$ **β)** $α^3 + 3^3 = (α + 3)\cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$
γ) $(2x)^3 – 1 = (2x – 1)\cdot (\ldots\ldots\ldots)$ **δ)** $1 + (5y)^3 = (1+5y)\cdot (\ldots\ldots\ldots)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $α^3 – 2^3 = (α – 2) \cdot (\mathbf{α^2 + 2α + 4})$
β) $α^3 + 3^3 = (α + 3)\cdot (\mathbf{α^2 – 3α + 9})$
γ) $(2x)^3 – 1 = (2x – 1)\cdot (\mathbf{4x^2 + 2x + 1})$
δ) $1 + (5y)^3 = (1+5y)\cdot (\mathbf{1 – 5y + 25y^2})$

Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες
$α^3 – β^3 = (α – β)(α^2 + αβ + β^2)$
$α^3 + β^3 = (α + β)(α^2 – αβ + β^2)$

7. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) , αν είναι σωστές ή με (Λ) , αν είναι λανθασμένες
α) $x^3 – 5^3 = (x – 5)\ (x^2 – 5x + 25)$ **β)** $8 + α^3 = (2 + α)\ (2^2 – 2α + α^2)$
γ) $(3y)^3 + 1 = (3y+1)\ (3y^2 – 3y + 1)$ **δ)** $1 – (2β)^3 = (1 – 2β)\ (1 + 2β + 4β^2)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $x^3 – 5^3 = (x – 5) \cdot (x^2 + 5α + 25)$ **(Λ)**
β) $8 + α^3 = (2 + α)\cdot (2^2 – 2α + α^2)$ **(Σ)**
γ) $(3y)^3 + 1 = (3y + 1)\cdot (9y^2 + 3y + 1)$ **(Λ)**
δ) $1 - (2β)^3 = (1-2β)\cdot (1+2β+4β^2)$ **(Σ)**

Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες
$α^3 – β^3 = (α – β)(α^2 + αβ + β^2)$
$α^3 + β^3 = (α + β)(α^2 – αβ + β^2)$

8. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες .
α) $x^2 + 6x + 9 = (\ldots..)^2$ **β)** $4α^2 – 4α + 1 = (\ldots\ldots.)^2$
γ) $y^4 – 2y^2 + 1 = (\ldots\ldots..)^2$ **δ)** $25 + 10x^3 + x^6 = (\ldots\ldots.)^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $x^2 + 6x + 9 =$ $\mathbf{(x+3)}^2$
β) $4\alpha^2 - 4\alpha + 1 =$ $\mathbf{(2\alpha-1)}^2$
γ) $y^4 - 2y^2 + 1 =$ $\mathbf{(y^2-1)}^2$
δ) $25 + 10x^3 + x^6 =$ $\mathbf{(5+x^3)}^2$

Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες
$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

9. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση .
Ο κύκλος εμβαδού $\pi\alpha^2 + 2\pi\alpha + \pi$, με $\alpha > 0$, έχει ακτίνα
α) $\alpha + 2$ **β)** $\alpha^2 + 1$ **γ)** $\alpha + 1$ **δ)** $\pi(\alpha + 1)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ο κύκλος έχει εμβαδόν
$E = \pi\alpha^2 + 2\pi\alpha + \pi =$
$= \pi(\alpha^2 + 2\alpha + 1) = \pi(\alpha+1)^2$.
Η ακτίνα του είναι $\alpha+1$.

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το π και προκύπτει το ανάπτυγμα του τετραγώνου $(\alpha+1)^2$ ταυτόχρονα όμως είμαστε στη μορφή που έχει το εμβαδόν του κύκλου ,δηλαδή $\pi\rho^2$ επομένως η ακτίνα του κύκλου είναι $\alpha+1$,**δηλαδή το γ.**

10. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

$x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha+\beta$	α	β	$(x+\alpha)(x+\beta)$
$x^2 + 3x + 2$					
$x^2 - 3x + 2$					
$x^2 + 5x - 6$					
$x^2 + 5x + 6$					
$x^2 - x - 2$					
$x^2 + x - 2$					

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha+\beta$	α	β	$(x+\alpha)(x+\beta)$
$x^2 + 3x + 2$	2	3	1	2	$(x+1)(x+2)$
$x^2 - 3x + 2$	2	-3	-1	-2	$(x-1)(x-2)$
$x^2 + 5x - 6$	-6	5	6	-1	$(x+6)(x-1)$
$x^2 + 5x + 6$	6	5	2	3	$(x+2)(x+3)$
$x^2 - x - 2$	–2	–1	–2	1	$(x-2)(x+1)$
$x^2 + x - 2$	–2	1	2	–1	$(x+2)(x-1)$

11. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες .
α) $x^2 + (\alpha + 2)x + 2\alpha = (x + \ldots.)\cdot(x + \ldots.)$
β) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = (x + \ldots.)\cdot(x + \ldots.)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $x^2 + (\alpha + 2)x + 2\alpha =$
$= \mathbf{(x + \alpha)\cdot(x + 2)}$
β) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} =$
$= \mathbf{(x + \sqrt{2})\cdot(x + \sqrt{3})}$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = (x+\alpha)(x+\beta)$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $3α + 6β$ **β)** $2x – 8$ **γ)** $8ω^2 + 6ω$

δ) $– 9x^2 – 6x$ **ε)** $8α^2β + 4αβ^2$ **στ)** $2x^2 – 2xy +2x$

ζ) $α^2β + αβ^2 – αβ$ **η)** $2α^3 – 4α^2 + 6α^2β$ **θ)** $\sqrt{2}\, xy – \sqrt{18}\, y + \sqrt{8}\, y^2$

ΛΥΣΗ

α) $3α + 6β = 3(α+2β)$

β) $2x – 8 = 2(x–4)$

γ) $8ω^2 + 6ω = 2ω(4ω+3)$

δ) $– 9x^2 – 6x = –3x(3x+2)$

ε) $8α^2β + 4αβ^2 = 4αβ(2α +β)$

στ) $2x^2 – 2xy +2x =2x(x –y+1)$

ζ) $α^2β + αβ^2 – αβ =αβ(α + β – 1)$

η) $2α^3 – 4α^2 + 6α^2β=2α^2(α-2+3β)$

θ) $\sqrt{2}\, xy – \sqrt{18}\, y + \sqrt{8}\, y^2=$

$=\sqrt{2}\, xy-3\sqrt{2}\, y+2\sqrt{2}\, y^2=$

$=\sqrt{2}\, y(x-3+2y)$

α) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 3.
β) βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2.
γ) βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2ω.
δ) βγάζουμε κοινό παράγοντα το -3x.
ε) βγάζουμε κοινό παράγοντα το 4αβ.
στ) βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2x.
ζ) βγάζουμε κοινό παράγοντα το αβ.
η) βγάζουμε κοινό παράγοντα το $2α^2$.
θ) Αφού «σπάσουμε» τις ρίζες $\sqrt{18}$ και $\sqrt{8}$ σε ρίζες του 2 βγάζουμε κοινό παράγοντα το $\sqrt{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $x (α – β) + y (α – β)$ **β)**$α(x+y)+β(x + y)$ **γ)**$(3x –1) (x – 2) – (x + 4)(x – 2)$

δ) $α^2 (α – 2) – 3 (2 – α)$ **ε)** $4x (x – 1) – x + 1$ **στ)** $2x^2 (x – 3) – 6x(x – 3)^2$

ΛΥΣΗ

α) $x (α – β) + y (α – β) = (α – β)(x+y)$

β) $α (x+y) + β (x + y) = (x+y)(α+β)$

γ) $(3x –1) (x – 2) – (x + 4)(x – 2)=$

$=(x–2)[(3x–1)–(x+4)]=(x–2)(3x–1–x-4)=$

$=(x–2)(2x-5)$

δ) $α^2 (α – 2) – 3 (2 – α) = α^2(α -2)+3(α–2)=$

$=(α – 2)(α^2+3)$

ε) $4x (x – 1) – x + 1= 4x (x – 1) –(x–1)=$

$=(x – 1)(4x–1)$

στ) $2x^2 (x – 3) – 6x(x – 3)^2 =$

$2x(x–3)[x–3(x–3)]= 2x(x–3)(9-2x)$

α) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το α-β

β)Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x+y

γ) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x-2.

δ)Αλλάζουμε το πρόσημο στην δεύτερη παρένθεση και βγάζουμε κοινό παράγοντα το α-2.
ε) Βάζουμε παρένθεση στο δεύτερο μέρος της παράστασης και βγάζουμε κοινό παράγοντα το x-1.
στ) βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2x.(x-3)

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ι) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

$x^2 + x$, $2y^2 – 5y$, $ω (ω – 3) – 2(3 – ω)$, $α (3α+1) – 4α$

ΙΙ) Να επιλύσετε τις εξισώσεις

α) $x^2 + x = 0$ **β)** $2y^2 = 5y$ **γ)** $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = 0$ **δ)** $\alpha(3\alpha+1) = 4\alpha$

ΛΥΣΗ

Ι) $x^2+x = x(x+1)$

$2y^2 - 5y = y(2y-5)$

$\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) =$

$= \omega(\omega - 3) + 2(\omega-3) =$

$= (\omega-3)(\omega+2)$

$\alpha(3\alpha+1) - 4\alpha = \alpha(3\alpha+1-4) =$

$= \alpha(3\alpha-3) = 3\alpha(\alpha-1)$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το y

Αλλάζουμε το πρόσημο στην δεύτερη παρένθεση και μετά βγάζουμε κοινό παράγοντα το ω-3

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το α

ΙΙ) α) $x^2 + x = 0 \to x(x+1)=0$

$x = 0$ ή $x+1=0$ $x = 0$ ή $x = -1$

β) $2y^2 = 5y \to 2y^2 - 5y = 0 \to y(2y-5) = 0$

$y = 0$ ή $2y-5 = 0 \to y = 0$ ή $2y = 5$

$y = 0$ ή $y = \dfrac{5}{2}$.

γ) $\omega(\omega-3) - 2(3-\omega) = 0 \to (\omega-3)(\omega+2) = 0$

$\omega-3 = 0$ ή $\omega+2 = 0$, $\omega = 3$ ή $\omega = -2$

δ) $\alpha(3\alpha+1) = 4\alpha \to \alpha(3\alpha+1) - 4\alpha = 0$

$3\alpha(\alpha-1) = 0 \to 3\alpha = 0$ ή $\alpha - 1 = 0$

$\alpha = 0$ ή $\alpha = 1$

α) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x και κατόπιν χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\alpha.\beta=0 \to \alpha=0$ ή $\beta=0$

β) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το y και κατόπιν χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\alpha.\beta=0 \to \alpha=0$ ή $\beta=0$

γ)Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\alpha.\beta=0 \to \alpha=0$ ή $\beta=0$

δ)Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\alpha.\beta=0 \to \alpha=0$ ή $\beta=0$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $x^2 + xy + \alpha x + \alpha y$ **β)** $x^3 - x^2 + x - 1$ **γ)** $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$

δ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ **ε)** $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha$ **στ)** $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha$

ζ) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y$ **η)** $x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x + \sqrt{2}$ **θ)** $\sqrt{6}\,x^2 + 2\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,x - 2$

ΛΥΣΗ

α) $x^2 + xy + \alpha x + \alpha y =$

$= (x^2+xy) + (\alpha x + \alpha y) = x(x+y) + \alpha(x+y) =$

$= (x+y)(x+\alpha)$

β) $x^3 - x^2 + x - 1 =$

$= (x^3 - x^2) + (x-1) = x^2(x-1) + (x-1) =$

$= (x-1)(x^2+1)$

γ) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = (x^3 - 5x^2) + (4x - 20)$

$= x^2(x-5) + 4(x-5) = (x-5)(x^2+4)$

δ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = (2x^3 - 3x^2) + (4x - 6) =$

$= x^2(2x-3) + 2(2x-3) = (2x-3)(x^2+2)$

α) Κάνουμε παραγοντοποίηση με ομαδοποίηση από το πρώτο όρο και το δεύτερο βγάζουμε κοινό παράγοντα το x και από τον τρίτο και τέταρτο όρο το α κατόπιν προκύπτει κοινός παράγοντας το x+y.

β) Κάνουμε πάλι το ίδιο όπως πριν αλλά τώρα βγαίνουν κοινοί παράγοντες οι x^2 και 1 αντίστοιχα οπότε προκύπτει κοινός παράγοντας το x-1

γ) Ομοίως με κοινούς παράγοντες τους x^2 και 4 αντίστοιχα οπότε προκύπτει κοινός παράγοντας ο x-5

δ) Αλλάζουμε τα πρόσημα στην

ε) $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha = (4x^2 - 8x) - (\alpha x - 2\alpha) =$
$= 4x(x-2) - \alpha(x-2) = (x-2)(4x-\alpha)$
στ) $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha =$
$=(9\alpha\beta - 18\beta^2) - (5\alpha - 10\beta) =$
$=9\beta(\alpha - 2\beta) - 5(\alpha - 2\beta) = (\alpha - 2\beta)(9\beta - 5)$
ζ) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y =$
$=(12x^2 - 8xy) - (15x - 10y) =$
$=4x(3x-2y) - 5(3x-2y) = (3x-2y)(4x-5)$
η) $x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x + \sqrt{2} =$
$=(x^3 + \sqrt{2}\,x^2) + (x + \sqrt{2}) =$
$=x^2(x + \sqrt{2}) + (x + \sqrt{2}) = (x + \sqrt{2})(x^2 + 1)$
θ) $\sqrt{6}\,x^2 + 2\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,x - 2 =$
$=(\sqrt{6}\,x^2 + 2\sqrt{2}\,x) - (\sqrt{3}\,x + 2) =$
$=\sqrt{2}\,x(\sqrt{3}\,x + 2) - (\sqrt{3}\,x + 2) =$
$= (\sqrt{3}\,x + 2)(\sqrt{2}\,x - 1)$.

δεύτερη παρένθεση και βγάζοντας κοινό παράγοντα τους x^2 και 2 προκύπτει κοινός παράγοντας το 2x-3.
ε) Όμοια με το προηγούμενο με κοινούς παράγοντες 4x και α και κατόπιν το x-2.
στ) Όμοια με το προηγούμενο με κοινούς παράγοντες 9β και 5 και κατόπιν το α-2β.
ζ) Όμοια με το προηγούμενο με κοινούς παράγοντες 4x και 5 και κατόπιν το 3x-2y.
η) Όμοια με το προηγούμενο με κοινούς παράγοντες x^2 και 1 και κατόπιν το $x + \sqrt{2}$.
θ) Όμοια με το προηγούμενο με κοινούς παράγοντες $\sqrt{2}x$ και 1 και κατόπιν το $\sqrt{3}x + 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις
α) $7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2$ **β)** $5x^2 - 8xy + 3y^2$ **γ)** $3x^2 - xy - 2y$

ΛΥΣΗ

α) $7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2 = 7\alpha^2 + 7\alpha\beta + 3\alpha\beta + 3\beta^2 =$
$= 7\alpha(\alpha+\beta) + 3\beta(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)(7\alpha+3\beta)$
β) $5x^2 - 8xy + 3y^2 = 5x^2 - 5xy - 3xy + 3y^2 =$
$=5x(x-y) - 3y(x-y) = (x-y)(5x-3y)$
γ) $3x^2 - xy - 2y^2 = 3x^2 - 3xy + 2xy - 2y^2 =$
$=3x(x-y) + 2y(x-y) = (x-y)(3x+2y)$

α) «Σπάμε» το 10αβ σε 7αβ+3αβ και κατόπιν κάνουμε παραγοντοποίηση με ομαδοποίηση με κοινούς παράγοντες τους 7α και 3β οπότε προκύπτει κοινός παράγοντας το α+β.
β) Ομοίως κάνουμε παραγοντοποίηση με ομαδοποίηση με κοινούς παράγοντες τους 5x και 3y οπότε προκύπτει κοινός παράγοντας το x-y.
γ) Ομοίως

ΑΣΚΗΣΗ 6

α) Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$.
β) Αν για τους αριθμούς α , β ισχύει $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α , β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι .

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε : $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta =$
$=\alpha\beta(\alpha+\beta) - (\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)(\alpha\beta - 1)$
β) Αφού $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$ τότε :
$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$ ή
$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta = 0$ ή

α) Κάνουμε παραγοντοποίηση με ομαδοποίηση με κοινούς παράγοντες τους αβ και 1 οπότε προκύπτει κοινός παράγοντας το α+β.
β) Χρησιμοποιούμε το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος και την ιδιότητα $\alpha.\beta=0 \rightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$
Γινόμενο δύο αριθμών μονάδα σημαίνει ότι

$(\alpha+\beta)(\alpha\beta-1)=0$. Τότε πρέπει :
ή $\alpha+\beta=0$ που σημαίνει ότι οι αριθμοί α , β είναι αντίθετοι
ή $\alpha\beta-1=0$ δηλ. $\alpha\beta=1$ που σημαίνει ότι οι αριθμοί α , β είναι αντίστροφοι

αυτοί είναι αντίστροφοι.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $2\alpha^2-2\alpha+\alpha\beta-\beta+\alpha x-x$ **β)** $2\alpha\beta-4\beta+5\alpha-10+2\alpha\gamma-4\gamma$

ΛΥΣΗ

α) $2\alpha^2-2\alpha+\alpha\beta-\beta+\alpha x-x=$
$=(2\alpha^2-2\alpha)+(\alpha\beta-\beta)+(\alpha x-x)=$
$=2\alpha(\alpha-1)+\beta(\alpha-1)+x(\alpha-1)=$
$=(\alpha-1)(2\alpha+\beta+x)$

β) $2\alpha\beta-4\beta+5\alpha-10+2\alpha\gamma-4\gamma=$
$=2\beta(\alpha-2)+5(\alpha-2)+2\gamma(\alpha-2)=$
$=(\alpha-2)(2\beta+5+2\gamma)$

α) Κάνουμε παραγοντοποίηση με ομαδοποίηση με κοινούς παράγοντες τους 2α ,β και x οπότε προκύπτει κοινός παράγοντας το α-1.
β) Κάνουμε παραγοντοποίηση με ομαδοποίηση με κοινούς παράγοντες τους 2β ,5 και 2γ οπότε προκύπτει κοινός παράγοντας το α-2.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) x^2-9 **β)** $16x^2-1$ **γ)** $\alpha^2-9\beta^2$
δ) $\alpha^2\beta^2-4$ **ε)** $36\omega^2-(\omega+5)^2$ **στ)** $4(x+1)^2-9(x-2)^2$
ζ) $\frac{1}{x^2}-16$ **η)** x^2-3 **θ)** x^2-2y^2

ΛΥΣΗ

α) $x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$
β) $16x^2-1=(4x)^2-1=(4x+1)(4x-1)$
γ) $\alpha^2-9\beta^2=\alpha^2-(3\beta)^2=(\alpha+3\beta)(\alpha-3\beta)$
δ) $\alpha^2\beta^2-4=(\alpha\beta)^2-2^2=(\alpha\beta+2)(\alpha\beta-2)$
ε) $36\omega^2-(\omega+5)^2=(6\omega)^2-(\omega+5)^2=$
$=[6\omega+(\omega+5)][6\omega-(\omega+5)]=$
$=(6\omega+\omega+5)(6\omega-\omega-5)=5(7\omega+5)(\omega-1)$
στ) $4(x+1)^2-9(x-2)^2=$
$=[2(x+1)]^2-[3(x-2)]^2=$
$=[2(x+1)+3(x-2)][2(x+1)-3(x-2)]=$
$=(2x+2+3x-6)(2x+2-3x+6)=$
$=(5x-4)(8-x)$

α) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
β) Ομοίως αφού δημιουργήσουμε το δεύτερο τετράγωνο.
γ) Ομοίως αφού δημιουργήσουμε τα δύο τετράγωνα.
δ) Ομοίως
ε) Ομοίως. Εδώ επειδή έχουμε παρενθέσεις βάζουμε αγκύλες στο άθροισμα και την διαφορά.
στ) Ομοίως

ζ) Ομοίως

ζ) $\frac{1}{x^2} - 16 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 4^2 = \left(\frac{1}{x} + 4\right)\left(\frac{1}{x} - 4\right)$

η) $x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

θ) $x^2 - 2y^2 = x^2 - \left(\sqrt{2}y\right)^2 =$
$=(x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y)$

η) Ομοίως . Εδώ θέλει προσοχή στο «φτιάξιμο» ενός ακεραίου σε τετράγωνο.

θ) Ομοίως.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις
α) $2x^2 - 32$ **β)** $28 - 7y^2$ **γ)** $2x^3 - 2x$ **δ)** $5\alpha x^2 - 80\alpha$ **ε)** $2(x-1)^2 - 8$

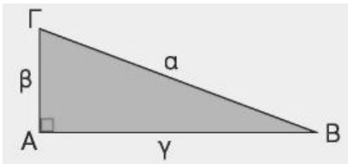
ΛΥΣΗ

α) $2x^2 - 32 = 2(x^2 - 16) = 2(x^2 - 4^2) =$
$=2(x+4)(x-4)$
β) $28 - 7y^2 = 7(4 - y^2) = 7(2^2 - y^2) =$
$= 7(2+y)(2-y)$
γ) $2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x+1)(x-1)$

α) Βγάζουμε πρώτα κοινό παράγοντα και μετά χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
β) Ομοίως
γ) Ομοίως

ΑΣΚΗΣΗ 10

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογίσετε την πλευρά γ όταν :
α) $\alpha = 53$, $\beta = 28$ **β)** $\alpha = 0{,}37$, $\beta = 0{,}12$
γ) $\alpha = 26\lambda$, $\beta = 10\lambda$.



ΛΥΣΗ

α) Είναι : $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 53^2 - 28^2 = =(53+28)(53-28) =$
$81 \cdot 25 = 2025$ άρα $\gamma = 45$
β) Είναι : $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 0{,}37^2 - 0{,}12^2 =$
$=(0{,}37+0{,}12)(0{,}37-0{,}12) = 0{,}49 \cdot 0{,}25 = =0{,}1225$, άρα $\gamma = 0{,}35$
γ) Είναι : $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (26\lambda)^2 - (10\lambda)^2 =$
$=(26\lambda + 10\lambda)(26\lambda - 10\lambda) = 36\lambda \cdot 16\lambda = 576\lambda^2$, άρα $\gamma = 24\lambda$

α) Χρησιμοποιούμε Το πυθαγόρειο θεώρημα και την ταυτότητα
$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
β) Ομοίως
γ) Ομοίως

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να επιλύσετε τις εξισώσεις
α) $x^2 - 49 = 0$ **β)** $9x^3 - 4x = 0$ **γ)** $x(x+1)^2 = 4x$ **δ)** $(x+2)^3 = x + 2$

ΛΥΣΗ

α) $x^2 - 49 = 0 \rightarrow x^2 - 7^2 = 0$
$(x+7)(x-7) = 0 \rightarrow x+7=0$ ή $x-7=0$

α) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ και την ιδιότητα

$x = -7$ ή $x = 7$

β) $9x^3 - 4x = 0 \to x(9x^2-4)=0$

$x[(3x)^2-2^2] = 0 \to x(3x+2)(3x-2)=0$

$x=0$ ή $3x+2=0$ ή $3x-2=0$

$x=0$ ή $x = -\frac{2}{3}$ ή $x = \frac{2}{3}$

γ) $x(x+1)^2 = 4x \to x(x+1)^2 - 4x = 0$

$x[(x+1)^2 - 4] = 0 \to x[(x+1)^2 - 2^2] = 0$

$x(x+1+2)(x+1-2)=0$

$x(x+3)(x-1) = 0$

$x=0$ ή $x+3=0$ ή $x-1=0$

$x=0$ ή $x=-3$ ή $x=+1$

δ) $(x+2)^3 = x+2$

$(x+2)^3 - (x+2) = 0$

$(x+2)[(x+2)^2 - 1]=0$

$(x+2)(x+2+1)(x+2-1)=0$

$(x+2)(x+3)(x+1)=0$

$x+2=0$ ή $x+3=0$ ή $x+1=0$

$x=-2$ ή $x=-3$ ή $x=-1$

$\alpha.\beta=0 \to \alpha=0$ ή $\beta=0$

β) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x και κατόπιν διαμορφώνοντας τα τετράγωνα εφαρμόζουμε την ταυτότητα $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ και τέλος χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\alpha.\beta.\gamma=0 \to \alpha=0$ ή $\beta=0$ ή $\gamma=0$ βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης.

γ) Ομοίως

δ)) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x+2 και κατόπιν διαμορφώνοντας τα τετράγωνα εφαρμόζουμε την ταυτότητα $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ και τέλος χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\alpha.\beta\gamma=0 \to \alpha=0$ ή $\beta=0$ ή $\gamma=0$ βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $x^3 - 27$ **β)** $y^3 + 8$ **γ)** $\omega^3 + 64$ **δ)** $8x^3 - 1$ **ε)** $27y^3 + 1$

ΛΥΣΗ

α) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 3^2) =$
$=(x-3)(x^2 + 3x + 9)$

β) $y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y+2)(y^2 - 2y + 2^2) =$
$=(y+2)(y^2 - 2y + 4)$

γ) $\omega^3 + 64 = \omega^3 + 4^3 = (\omega+4)(\omega^2 - 4\omega + 4^2) =$
$= (\omega+4)(\omega^2 - 4\omega + 16)$

δ) $8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1 = (2x-1)[(2x)^2 + 2x + 1^2] =$
$=(2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$

ε) $27y^3 + 1 = (3y)^3 + 1^3 = (3y+1)[(3y)^2 - 3y + 1^2] =$
$=(3y+1)(9y^2 - 3y + 1)$

α) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

β) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

γ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

δ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

ε) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $3x^3 - 24$ **β)** $16\alpha^4 + 2\alpha$ **γ)** $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\rho^3$ **δ)** $\alpha^4\beta + \alpha\beta^4$

ΛΥΣΗ

α) $3x^3 - 24 = 3(x^3 - 8) =$
$=3(x-2)(x^2+2x+2^2) = =3(x-2)(x^2+2x+4)$

β) $16\alpha^4 + 2\alpha = 2\alpha(8\alpha^3+1) = 2\alpha[(2\alpha)^3+1^3]$
$= =2\alpha(2\alpha+1)[(2\alpha)^2 - 2\alpha + 1^2] =$
$= 2\alpha(2\alpha+1)(4\alpha^2 - 2\alpha + 1)$

γ) $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\rho^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 - \rho^3) =$
$= \frac{4}{3}\pi(R-\rho)(R^2 + R\rho + \rho^2)$

δ) $\alpha^4\beta + \alpha\beta^4 = \alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) =$
$=\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

α) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 3 και μετά χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
β) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2α και μετά φτιάχνοντας τους κύβους χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
γ) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το $\frac{4}{3}\pi$ και μετά χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
δ) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το αβ και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Να συμπληρώσετε τις ισότητες α

α) $x^3 - \ldots = (x-3)\cdot(\ldots + \ldots + 9)$ **β)** $\ldots + y^3 = (2x+y)\cdot(4x^2 - \ldots + \ldots)$
γ) $\alpha^3 - \ldots = (\alpha - 2\beta)\cdot(\ldots + \ldots + 4\beta^2)$ **δ)** $\alpha^3 + \ldots = (\alpha+5\beta)\cdot(\ldots - \ldots + 25\beta^2)$

ΛΥΣΗ

α) $x^3 - 3^3 = (x-3)\cdot(x^2 + 3x + 9)$
β) $(2x)^3 + y^3 = (2x+y)\cdot(4x^2 - 2xy + y^2)$
γ) $\alpha^3 - (2\beta)^3 = (\alpha - 2\beta)\cdot(\alpha^3 + 2\alpha\beta + 4\beta^2)$
δ) $\alpha^3 + (5\beta)^3 = (\alpha + 5\beta)\cdot(\alpha^2 - 5\alpha\beta + 25\beta^2)$

α) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
β) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2α και μετά φτιάχνοντας τους κύβους χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
γ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
δ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $x^2 - 2x + 1$ **β)** $y^2 + 4y + 4$ **γ)** $\omega^2 - 6\omega + 9$ **δ)** $\alpha^2 + 10\alpha + 25$
ε) $1 - 4\beta + 4\beta^2$ **στ)** $9x^4 + 6x^2 + 1$ **ζ)** $4y^2 - 12y + 9$ **η)** $16x^2 + 8xy + y^2$
θ) $25\alpha^2 - 10\alpha\beta + \beta^2$ **i)** $(\alpha+\beta)^2 - 2(\alpha+\beta) + 1$ **iα)** $\frac{y^2}{9} - 2y + 9$ **iβ)** $x^2 + x + \frac{1}{4}$

α) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
β) $y^2 + 4y + 4 = (y + 2)^2$
γ) $\omega^2 - 6\omega + 9 = (\omega - 3)^2$
δ) $\alpha^2 + 10\alpha + 25 = (\alpha + 5)^2$
ε) $1 - 4\beta + 4\beta^2 = (1 - 2\beta)^2$
στ) $9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2+1)^2$
ζ) $4y^2 - 12y + 9 = (2y - 3)^2$
η) $16x^2 + 8xy + y^2 = (4x + y)^2$
θ) $25\alpha^2 - 10\alpha\beta + \beta^2 = (5\alpha - \beta)^2$
i) $(\alpha+\beta)^2 - 2(\alpha+\beta) + 1 = (\alpha + \beta - 1)^2$
iα) $\frac{y^2}{9} - 2y + 9 = (\frac{y}{3} - 3)^2$
iβ) $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$

α) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
β) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
γ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
δ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
ε) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
στ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
ζ)) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ κ.τ.λ

ΑΣΚΗΣΗ 16

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις
α) $3x^2 + 24x + 48$ **β)** $- y^2 + 4y - 4$ **γ)** $2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta^2$ **δ)** $4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha$

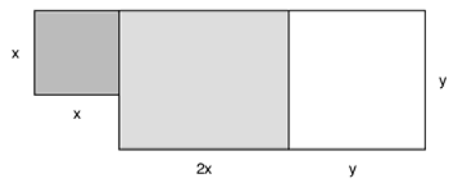
ΛΥΣΗ

α) $3x^2 + 24x + 48 =$
$=3(x^2 + 8x + 16) =$
$=3(x^2 + 2\cdot4x + 4^2) = 3(x+4)^2$
β) $- y^2 + 4y - 4 = -(y^2 - 4y + 4) =$
$= - (y - 2)^2$
γ) $2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta =$
$=2(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2) = 2(\alpha - 2\beta)^2$
δ) $4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha =$
$=\alpha(4\alpha^2 + 12\alpha + 9) = \alpha(2\alpha + 3)^2$

α) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 3 και το τριώνυμο που προκύπτει είναι ανάπτυγμα τετραγώνου και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
β) Βγάζουμε το μείον έξω από την παρένθεση και το τριώνυμο που προκύπτει είναι ανάπτυγμα τετραγώνου και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
γ) Ομοίως
δ) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ΑΣΚΗΣΗ 17

Να βρείτε :
α) Ένα πολυώνυμο που να εκφράζει το εμβαδόν του διπλανού σχήματος .
β) Την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του παραπάνω σχήματος .



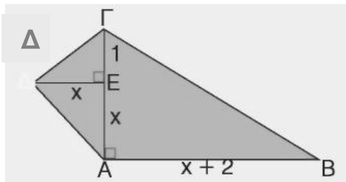
ΛΥΣΗ

α) Το ζητούμενο εμβαδόν Ε , ισούται με το άθροισμα :
$E = x^2 + (2x+y)y = x^2 + 2xy + y^2 =$
$= (x+y)^2$
β) Διαπιστώνουμε από τα παραπάνω ότι η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου είναι x+y

α) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το άθροισμα των εμβαδών ενός τετραγώνου πλευράς x και ενός ορθογωνίου διαστάσεων 2x+y , y .Κατόπιν χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
β) Από το πρώτο ερώτημα διαπιστώνουμε ότι το παραπάνω σχήμα έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς x+y

ΑΣΚΗΣΗ 18

Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου , που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τετράπλευρου ΑΒΓΔ .



ΛΥΣΗ

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και του ΑΔΓ .

Είναι λοιπόν $E = \frac{1}{2}(x+2)(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)x = \frac{1}{2}(x+1)(x+2+x) =$

$\frac{1}{2}(x+1)(2x+2) = = \frac{1}{2}(x+1)\cdot 2\cdot(x+1) = (x+1)^2$.

Η ζητουμένη πλευρά του τετραγώνου είναι x+1

ΑΣΚΗΣΗ 19

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα
α) $x^2 + 3x + 2$ **β)** $y^2 - 4y + 3$ **γ)** $\omega^2 + 5\omega + 6$ **δ)** $\alpha^2 + 6\alpha + 5$
ε) $x^2 - 7x + 12$ **στ)** $y^2 - y - 12$ **ζ)** $\omega^2 - 9\omega + 18$ **η)** $\alpha^2 + 3\alpha - 10$

ΛΥΣΗ

α) $x^2 + 3x + 2 = (x+1)((x+2)$
β) $y^2 - 4y + 3 = (y-1)(y-3)$
γ) $\omega^2 + 5\omega + 6 = (\omega+2)(\omega+3)$
δ) $\alpha^2 + 6\alpha + 5 = (\alpha+1)(\alpha+5)$
ε) $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$
στ) $y^2 - y - 12 = (y-4)(y+3)$

α) Θέλουμε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα 3 και γινόμενο 2. Αυτοί είναι το 1 και το 2 και το τριώνυμο αναλύεται σύμφωνα με την ταυτότητα
$x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha.\beta = (x+\alpha)(x+\beta)$
β) Οι αριθμοί είναι το -1 και το -3.
γ) Οι αριθμοί είναι το 2 και το 3.
δ) Οι αριθμοί είναι το 1 και το 5.
ε) Οι αριθμοί είναι το -3 και το -4.
στ) Οι αριθμοί είναι το -4 και το 3.

ζ) $\omega^2-9\omega+18=(\omega-3)(\omega-6)$

η) $\alpha^2+3\alpha-10=(\alpha+5)(\alpha-2)$

ζ) Οι αριθμοί είναι το -3 και το -6.

η) Οι αριθμοί είναι το 5 και το -2.

ΑΣΚΗΣΗ 20

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2+(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}$ β) $x^2+(2\alpha+3\beta)x+6\alpha\beta$ γ) $x^2+(3-\sqrt{2})x-3\sqrt{2}$

ΛΥΣΗ

α) $x^2+(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=$

$=(x+2)(x+\sqrt{3})$

β) $x^2+(2\alpha+3\beta)x+6\alpha\beta=$

$=(x+2\alpha)(x+3\beta)$

γ) $x^2+(3-\sqrt{2})x-3\sqrt{2}=$

$=(x+3)(x-\sqrt{2})$

α) Θέλουμε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα $2+\sqrt{3}$ και γινόμενο $2\sqrt{3}$.Αυτοί είναι το 2 και το $\sqrt{3}$ και το τριώνυμο αναλύεται σύμφωνα με την ταυτότητα $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha.\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$

β) Οι αριθμοί είναι το 2α και το 3β.

γ) Οι αριθμοί είναι το 3 και το $-\sqrt{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 21

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\omega^2+10\omega+8$ β) $3\alpha^2-12\alpha-15$ γ) $\alpha x^2-7\alpha x+6\alpha$

ΛΥΣΗ

α) $2\omega^2+10\omega+8=2(\omega^2+5\omega+4)=$

$=2(\omega+1)(\omega+4)$

β) $3\alpha^2-12\alpha-15=3(\alpha^2-4\alpha-5)=$

$=3(\alpha-5)(\alpha+1)$

γ) $\alpha x^2-7\alpha x+6\alpha=\alpha(x^2-7x+6)=$

$=\alpha(x-1)(x-6)$

α) Αφού βγάλουμε κοινό παράγοντα το 2. Θέλουμε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 4 .Αυτοί είναι το1 και το 4 και το τριώνυμο αναλύεται σύμφωνα με την ταυτότητα $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha.\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$

β) Ομοίως βγάζουμε κοινό παράγοντα το 3 και οι αριθμοί είναι το -5 και το 1.

γ) Ομοίως βγάζουμε κοινό παράγοντα το α και οι αριθμοί είναι το -1 και το -6.

ΑΣΚΗΣΗ 22

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης.

α) $1453.1821-1453.821$ β) $801^2+199.801$ γ) 998^2-4

δ) $999.1001+1$ ε) $999^2+2.999+1$ στ) $97^2+6.97+9$

ΛΥΣΗ

α) $1453.1821-1453.821=1453(1821-821)=1453.10^3$

β) $801^2 + 199.801 = 801(801 + 199) = 801.1000 = 801000$

γ) $998^2 - 4 = 998^2 - 2^2 = (998 + 2)(998 - 2) = 1000.996 = 996000$

δ) $999.1001 + 1 = (1000 - 1)(1000 + 1) + 1 = 1000^2 - 1 + 1 = 1000^2$

ε) $999^2 + 2.999 + 1 = (999 + 1)^2 = 1000^2$

στ) $97^2 + 6.97 + 9 = 97^2 + 2.3.97 + 3^3 = (97 + 3)^2 = 100^2$

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4$ β) $x^4 - 1 + x^3 - x$ γ) $x^3(x^2 - 1) + 1 - x^2$

δ) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$ ε) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta$ στ) $x^2 - 2xy + y^2 - \omega^2$

ζ) $1 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2$ η) $y^2 - x^2 - 10y + 25$ θ) $2(x - 1)(x^2 - 4) - 5(x - 1)(x - 2)^2$

ι) $(y^2 - 4)^2 - (y + 2)^2$ ια) $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$ ιβ) $(x^2 + 9)(\alpha^2 + 4 - (\alpha x + 6)^2$

ΛΥΣΗ

α) $x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4 =$

$= y^2(x^2 - 4) - (x^2 - 4) =$

$= (x^2 - 4)(y^2 - 1) = (x + 2)(x - 2)(y + 1)(y - 1)$

β) $x^4 - 1 + x^3 - x = (x^2)^2 - 1^2 + x(x^2 - 1) =$

$= (x^2 + 1)(x^2 - 1) + x(x^2 - 1) =$

$= (x^2 - 1)(x^2 + 1 + x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

γ) $x^3(x^2 - 1) + 1 - x^2 = x^3(x^2 - 1) - (x^2 - 1) =$

$= (x^2 - 1)(x^3 - 1) =$

$= (x + 1)(x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

δ) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2 = (x^2 + 9)^2 - (6x)^2 =$

$= (x^2 + 9 + 6x)(x^2 + 9 - 6x) = (x + 3)^2(x - 3)^2$

ε) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta = (\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \beta) =$

$= (\alpha - \beta)(\alpha - \beta - 1)$

στ) $x^2 - 2xy + y^2 - \omega^2 = (x - y)^2 - \omega^2 =$

$= (x - y)^2 - \omega^2 = (x - y + \omega)(x - y - \omega)$

α)Κάνουμε ομαδοποίηση «βγάζοντας» κοινό παράγοντα από τους δύο πρώτους και από τον τρίτο και τον τέταρτο όρο. Κατόπιν βγαίνει κοινός παράγοντας από τους δύο όρους και τέλος υπάρχουν δύο διαφορές τετραγώνων.
β) Στους δύο πρώτους όρους υπάρχει διαφορά τετραγώνων και στους επόμενους δύο βγάζουμε κοινό παράγοντα. Κατόπιν βγαίνει κοινός παράγοντας από τους δύο όρους και τέλος υπάρχει και μια διαφορά τετραγώνων.
γ) Βάζουμε παρένθεση στους δύο τελευταίους όρους αλλάζοντας το πρόσημο. Κατόπιν προκύπτει κοινός παράγοντας. Τέλος υπάρχει μια διαφορά τετραγώνων και μια διαφορά κύβων.
δ) Δημιουργούμε την διαφορά τετραγώνων και κατόπιν προκύπτουν δύο αναπτύγματα τετραγώνων.
ε) Οι τρεις πρώτοι όροι είναι ανάπτυγμα τετραγώνου και στους δύο τελευταίους βάζουμε παρένθεση αλλάζοντας το πρόσημο οπότε προκύπτει κοινός παράγοντας.
στ) Οι τρεις πρώτοι όροι είναι ανάπτυγμα τετραγώνου και κατόπιν προκύπτει διαφορά τετραγώνων.

ζ) $1-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2=1^2-(\alpha-\beta)^2=(1+\alpha-\beta)(1-\alpha+\beta)$

η) $y^2-x^2-10y+25=(y-5)^2-x^2=(y-5+x)(y-5-x)$

θ) $2(x-1)(x^2-4)-5(x-1)(x-2)^2=$
$=(x-1)(x-2)(-3x+14)$

ι) $(y^2-4)^2-(y+2)^2=(y^2-4+y+2)(y^2-4-y-2)=$
$=(y^2+y-2)(y^2-y-6)$

ή $(y^2-4)^2-(y+2)^2=(y+2)^2(y-2)^2-(y+2)^2=$
$=(y+2)^2\left[(y-2)^2-1\right]=(y+2)^2(y-2+1)(y-2-1)=$
$=(y+2)^2(y-1)(y-3)$

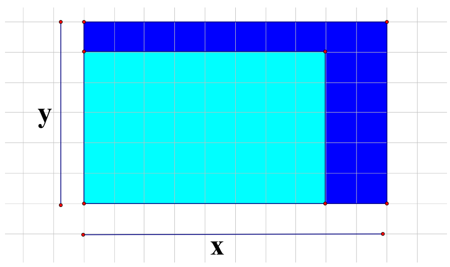
ια) $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-(2\alpha\beta)^2=$
$=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta)=$
$=\left[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\right]\left[(\alpha-\beta)^2-\gamma^2\right]=$
$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$

ιβ) $(x^2+9)(\alpha^2+4)-(\alpha x+6)^2=$
$=x^2\alpha^2+4x^2+9\alpha^2+36-(x^2\alpha^2+12\alpha x+36)=$
$=x^2\alpha^2+4x^2+9\alpha^2+36-x^2\alpha^2-12\alpha x-36=$
$=4x^2+9\alpha^2-12\alpha x=(2x)^2-(2x)(3\alpha)+(3\alpha)^2=(2x-3\alpha)^2$

ζ) Παρατηρούμε την ύπαρξη αναπτύγματος τετραγώνου
ι) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων.
ή Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων και βγάζοντας κοινό παράγοντα δημιουργείται και άλλη διαφορά τετραγώνων.
ια) Δημιουργούμε την διαφορά τετραγώνων και κατόπιν μέσα στις παρενθέσεις υπάρχουν δύο αναπτύγματα τετραγώνου. Μετά τις αντικαταστάσεις των αναπτυγμάτων τετραγώνου προκύπτουν διαφορές τετραγώνων
ιβ) Κάνουμε τις πράξεις και μετά την αναγωγή ομοίων όρων προκύπτει ανάπτυγμα τετραγώνου.

ΑΣΚΗΣΗ 24

Ενός ορθογωνίου οικοπέδου οι διαστάσεις x,y μειώθηκαν, επειδή έπρεπε να αυξηθεί το πλάτος των διπλανών δρόμων. Αν το εμβαδόν του οικοπέδου που απέμεινε είναι xy-x-2y+2, να βρείτε ποια θα μπορούσε να είναι η μείωση κάθε διάστασης του.



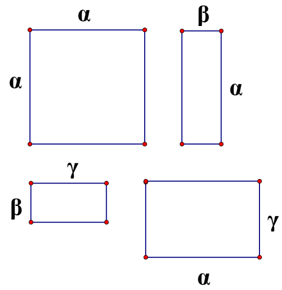
ΛΥΣΗ

$xy-x-2y+2=$
$=x(y-1)-2(y-1)=$
$=(y-1)(x-2)$

Παραγοντοποιούμε την παράσταση που μας έχουνε δώσει με ομαδοποίηση. Άρα η πλευρά x μειώθηκε κατά 2 ενώ η πλευρά y μειώθηκε κατά 1.

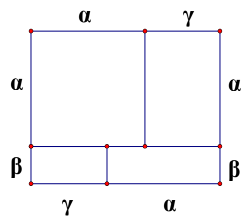
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. α) Πώς πρέπει να τοποθετήσουμε τα τέσσερα σχήματα ώστε να προκύψει ένα ορθογώνιο.
β) Ποιες θα είναι οι διαστάσεις του;



ΛΥΣΗ

α) Τα τέσσερα σχήματα πρέπει να τοποθετηθούν όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα:



β) Οι διαστάσεις του σχήματος που θα προκύψει είναι όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα είναι: α+β, α+γ αφού είναι:
$α^2+αβ+βγ+αγ=α(α+β)+γ(α+β)=(α+β)(α+γ)$.

2. α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $α^2β-α+β-αβ^2$.
β) Αν για τους άνισους αριθμούς α, β ισχύει $α^2β-α=αβ^2-β$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί είναι αντίστροφοι.

ΛΥΣΗ

α) $α^2β-α+β-αβ^2=α(αβ-1)-β(αβ-1)=$
$=(αβ-1)(α-β)$

β) $α^2β-α=αβ^2-β \to α^2β-α+β-αβ^2=0$
$\to (αβ-1)(α-β)=0 \to αβ-1=0$ ή $α-β=0$
αλλά $α \neq β$ οπότε $αβ=1$

α) Κάνουμε παραγοντοποίηση με ομαδοποίηση και κατόπιν κοινό παράγοντα.

β) Με την βοήθεια του πρώτου ερωτήματος παραγοντοποιούμε.
Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα α.β=0 τότε α=0 ή β=0
Χρησιμοποιούμε τον ορισμό για τους αντίθετους αριθμούς.

3. Αν δύο ακέραιοι διαιρούμενοι με το 6 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, τότε να αποδείξετε ότι, η διαφορά τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 12.

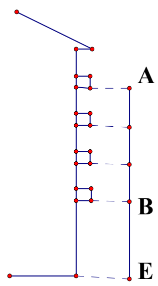
ΛΥΣΗ

Αν α και β είναι οι δύο ακέραιοι τότε είναι:
$α=6κ+υ$ και $β=6λ+υ$ οπότε έχουμε:

$$\alpha^2-\beta^2=(6\kappa+\upsilon)^2-(6\lambda+\upsilon)^2=$$
$$=(6\kappa+\upsilon+6\lambda+\upsilon)(6\kappa+\upsilon-6\lambda-\upsilon)=$$
$$=(6\kappa+6\lambda+2\upsilon)(6\kappa-6\lambda)=$$
$$=2(3\kappa+3\lambda+\upsilon)6(\kappa-\lambda)=$$
$$=12(\kappa-\lambda)(3\kappa+3\lambda+\upsilon)$$

Εφαρμόζουμε την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων
Από την πρώτη παρένθεση βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2 και από την δεύτερη παρένθεση το 6.
Παρατηρούμε ότι η παράσταση που προκύπτει διαιρείται με το 12 ,άρα είναι πολλαπλάσιο του 12.

4. Αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει από το σημείο Α, τότε μέχρι να φτάσει στο έδαφος θα μεσολαβήσει χρόνος t_1 sec. Αν το αφήσουμε να πέσει από το σημείο Β, θα μεσολαβήσει χρόνος t_2 που είναι 2 sec μικρότερος. Αν το άθροισμα των χρόνων t_1 και t_2 είναι 6 sec, να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ .(g=10m/sec).



ΛΥΣΗ

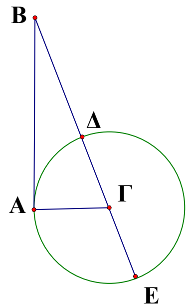
Η απόσταση ΑΒ =ΑΕ- ΒΕ

Είναι όμως $AE=\frac{1}{2}gt_1^{\,2}$ και $BE=\frac{1}{2}gt_2^{\,2}$ οπότε:

$$AB=\frac{1}{2}gt_1^{\,2}-\frac{1}{2}gt_2^{\,2}=\frac{1}{2}g\left(t_1^{\,2}-t_2^{\,2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}.g(t_1-t_2)(t_1-t_2)$$
$$AB=\frac{1}{2}.10.2.6=60m$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο της φυσικής $s=\frac{1}{2}gt^2$
Εφαρμόζουμε την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων
Αντικαθιστούμε το t_1-t_2=2sec και το t_1+t_2=6 sec

5. Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^0) είναι: ΒΔ=12cm ,ΒΕ=27 cm, να εξηγήσετε γιατί ΑΒ= 18cm.



ΛΥΣΗ

$$AB^2=B\Gamma^2-\rho^2=$$
$$=(B\Gamma+\rho)(B\Gamma-\rho)=BE.B\Delta=27.12=$$
$$=324=18^2\rightarrow AB=18\,cm$$

Χρησιμοποιούμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ
Εφαρμόζουμε την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων
Αντικαθιστούμε τα ΒΕ και ΒΔ.

6. Να αποδείξετε ότι:
α) Ο αριθμός $κ^2+κ$ είναι άρτιος,, όπου κ ακέραιος αριθμός.
β) Ο αριθμός $κ^2+7κ$ είναι άρτιος,, όπου κ ακέραιος. αριθμός.
γ) Το τετράγωνο ενός περιττού ακέραιου διαιρούμενο δια 8 δίνει υπόλοιπο 1.

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός $κ^2+κ$ είναι άρτιος,, γιατί:
$κ^2+κ=κ(κ+1)$,δηλαδή είναι ίσος με το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων που είναι άρτιος αριθμός.
β) Ο αριθμός $κ^2+7κ$ είναι άρτιος,, γιατί:
$κ^2+7κ=κ(κ+7)$ που είναι άρτιος γιατί
Αν κ άρτιος , δηλαδή κ=2λ έχουμε
$κ(κ+7)=2λ(2λ+7)=2ρ$ όπου $ρ=λ(2λ+7)$
Αν κ περιττός , δηλαδή κ=2λ+1 έχουμε
$κ(κ+7)=(2λ+1)(2λ+8)=2(λ+4)(2λ+1)=2ρ$ όπου $ρ=(λ+4)(2λ+1)$
γ) Αν κ= 2λ+1 ο περιττός τότε είναι:
$(2λ+1)^2=4λ^2+4λ+1=4(λ^2+λ)+1$
Αν τώρα λ άρτιος τότε λ=2ρ
$(2λ+1)^2=4λ^2+4λ+1=4(λ^2+λ)+1=4.(4ρ^2+2ρ)+1=8(2ρ^2+ρ)+1$ αληθεύει.
Αν τώρα λ περιττός τότε λ=2ρ+1
$(2λ+1)^2=4λ^2+4λ+1=4(λ^2+λ)+1=4.(4ρ^2+4ρ+1+2ρ+1)+1=$
$=4(2ρ^2+6ρ+2)+1=8(ρ^2+3ρ+1)+1$ αληθεύει.

ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΘΕΜΑ 1^0

Α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $5x^2 + 15xy - 10x\omega - 25x = 5x(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

β) $\alpha(x^3+2) - \beta(x^3+2) + (x^3+2) = (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

γ) $25x^2 - 9 = (\ldots\ldots - 3)(\ldots\ldots + 3)$

δ) $16x^2 - 24x + 9 = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$

ε) $x^2 + (3+2)x + 3.2 = (\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) $x^2(\alpha+\beta) - (\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)x^2$ β) $9 - 6\alpha + \alpha^2 = (\alpha - 3)^2$

γ) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)$

ΘΕΜΑ 2^0

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $3x^3$-$12x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $4x^3=12x+x^3$

ΘΕΜΑ 3^0

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A=x^4-x^2$, $B=x^3+2x^2-x-2$ και Α-Β