Algebra numerelor complexe şi fazorii

Numere imaginare

Cel mai bun mod de a face analiza unor circuite de ca, este prin utilizarea algebrei numerelor complexe. Algebra numerelor complexe este o extensie a algebrei numerelor reale cunoscută din liceu.Algebra numerelor complexe introduce numere complexe împreună cu regulile de adunare, scădere, înmulţire şi împărţire a acestora. În capitolele următoare se vor prezenta analiza circuitelor de ca. în care apar tensiuni şi curenţi alternativi care sunt tratate ca numere complexe denumite fazori, iar rezistenţele, condensatoarele şi bobinele sunt tratate ca numere complexe denumite impedanţe. Algebra numerelor complexe se aplică tensiunilor şi curenţilor alternativi şi elementelor de circuit de tip rezistenţă, condensator sau bobină într-un mod similar cum se aplică algebra obişnuită circuitelor de cc. Un calculator de buzunar poate să facă operaţii cu numere complexe la fel ca operaţiile cu numere reale dar pentru a înţelege modul de lucru cu aceste numere în primul rând trebuie să fie cunoscute operaţiile de bază.

Numerele obişnuite sunt numerele reale dar acestea nu sunt singura categorie cunoscută de numere, mai există şi ***numere imaginare***. Denumirea de „număr imaginar” este uneori prost înţeleasă în sensul că se află numai în imaginaţia cuiva nu sunt reale, dar în realitate acestea sunt la fel de mult folosite ca şi numerele reale. Numerele imaginare au fost inventate din necesitatea de a avea anumite numere care sunt asociate radicalului din numere negative care nu sunt numere reale. Numerele complexe au apărut după ce au apărut numerele reale fracţionare şi numerele reale negative.

Trebuie să se facă o distincţie între numerele imaginare şi numerele reale deoarece regulile de adunare, scădere, inmulţire sau împărţire diferă la cele două categorii. Nu există reguli universale pentru notaţia numerelor imaginare dar în electrotehnică şi electronică se obişnuieşte ca un număr imaginar să se noteze cu litera j adică j2, j0,01 etc.(Se reaminteşte că în matematică numerele imaginare se notează şi cu i). Regulile pentru adunarea şi scăderea numerelor imaginare sunt la fel ca la numerele reale cu specificarea că rezultatul este tot un număr imaginar ca de exemplu:

j3+j9=j13, j12,5-j3,4 =j9,1, j6,25-j8,4=-j2,15

Înmulţirea numerelor imaginare este diferită. Produsul a două numere imaginare este un număr real care este numărul care rezultă din produsul echivalent al numerelor reale dar cu semnul minus ca de exemplu:

j2j6= -12, j4(-j3)= 12, -j4(-j5)=-20

De asemenea j1(j1)=-1 de unde j1=√-1 şi similar j2=√-4, j3=√-9 etc.
Uneori în calcule pot să apară puteri ale lui j1 care sunt 1, -1, j1 sau –j1 şi care rezultă din $(j1)^2=-1$ şi apoi înmulţirea progresivă cu j1 şi evaluarea expresiei respective cu regulile prezentate anterior şi anume: $(j1)^3=j1(j1)^2=j1(-1)=-j1$, $(j1)^4=(j1)^2(j1)^2=(-1)(-1)=1$.

Produsul dintre un număr imaginar şi un număr real este un număr imaginar care cu excepţia faptului că este imaginar este la fel ca produsul a două numere reale. La împărţirea a două numere imaginare rezultatul este real la fel ca la numerele reale :

j8/j4=2, -j10/j2=-5

Se poate ţine minte că la împărţirea două numere imaginare se poate „simplifica” simbolul j ca şi cum acesta ar fi un număr. Acest mod de tratare a împărţirii a două numere imaginare este numai pentru a memora operaţia pentru că în realitate j nu este un număr ci un simbol care nu se poate simplifica, dar uneori se poate utiliza această modalitate pentru a memora anumite reguli care vor duce la un rezultat corect din punct de vedere matematic.

Dacă un număr imaginar se împarte la un număr real va rezulta un număr imaginar la fel ca la împărţirea a două numere reale (j20)/5 =j5, (-j3,6)/6=-j0,6.

Dacă un număr real se împarte la un număr imaginar rezultatul este un număr imaginar cu semn schimbat faţă de împărţirea a două numere reale 1/(j1)=-j1, -100/(j25)=j4. Regula de bază în acest caz este inmulţirea la numitor şi numărător cu j1 şi care se mai numeşte raţionalizarea numărului:

$$\frac{200}{j5} = \frac{200 * j1}{j5 * j1} = \frac{j200}{-5} = -j40$$

Reprezentarea numerelor complexe în plan

Dacă un număr real este adunat cu un număr imginar, ca de exemplu 3+j4, sau dacă numărul imaginar se scade din cel real, 5-7j se spune că se obţine un număr complex reprezentat în formă normală. Alte forme de reprezentare a numerelor complexe se vor prezenta în continuare. Un număr complex poate fi reprezentat ca un punct în planul complex după cum se arată în Fig.2.22. Axa orizontală se numeşte axa reală iar axa verticală se numeşte axa imaginară.

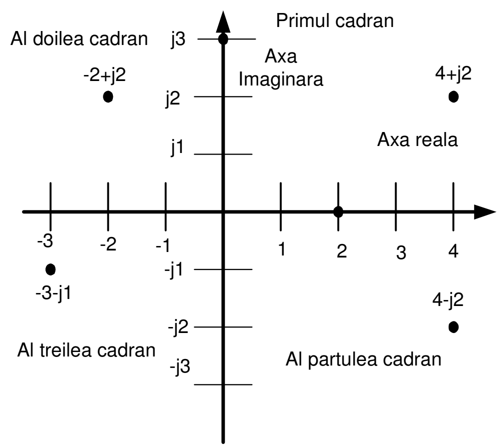

Fig.2.22. Reprezentarea în plan a numerelor complexe

Cele două axe împart planul complex în patru cadrane după cum se prezintă în Fig.2.22, ambele axe au aceiaşi unitate de măsură. Numerele reale se reprezintă ca puncte pe axa reală iar numerele imaginare se reprezintă ca puncte pe axa imaginară, pentru că numerele reale se consideră numere complexe cu partea imaginară zero iar numerele imaginare sunt numere complexe cu partea reală zero (de exemplu 2 număr real sau j3 număr complex). Numerele complexe care au şi partea reală şi partea imaginară diferite de zero sunt reprezentate în planul complex în cele patru cadrane, ca de exemplu 4+j2, -2+j2, -3-j1, 4-j2. Este evident că partea reală a numărului complex determină distanţa măsurată pe axa x iar partea imaginară a numărului complex determină distanţa măsurată pe axa y.

În Fig.2.22 sunt reprezentate numerele complexe 4+j2 şi 4-j2 care sunt identice dar au partea imaginară cu semn schimbat. O pereche de numere complexe care au această proprietate se numesc ***complex conjugate***. Numerele complex conjugate au aceiaşi poziţie pe axa x şi au poziţii simetrice faţă de axa x pentru partea imaginară. Dacă se trasează o linie de la originea axelor la aceste puncte va rezulta un segment de aceiaşi lungime şi de acelaşi unghi faţă de axa x numai polaritatea unghiului este diferită. (Se reaminteşte că se consideră un unghi pozitiv dacă este în sensul invers de deplasare al acelor de ceasornic şi un sens negativ dacă este în sensul deplasării acelor de ceasornic). Acest mod de reprezentare grafică a numerelor complex conjugate este importantă pentru reprezentarea polară care va prezentată mai târziu. Forma normală a numerelor complexe este utilizată pentru operaţiile de adunare şi scădere. Aceste operaţii se aplică separat numerelor reale şi numerelor imaginare după cum se vede în exemplul următor : (3+j4)+(2+j5)=

5+j9 şi (2-j9)-(4-j7)=-2-j2. Dacă se doreşte înmulţirea numerelor complexe trebuie să se aplice regulile de la înmulţirea numerelor imaginare de exemplu :
(2+j3)(4+j5)=2*4 +j(2*5)+j(3*4)+(j3)(j5)=8+j22-15=-7+j22
Dacă se aplică regula de înmulţire la numere complex conjugate va rezulta un număr real format din suma patratelor numerelor reale şi imaginare adică :
(2+j3)(2-j3)=2*2 +j(2*3)-j(3*2)+(j3)(j3)=4+9=2^2+3^2=13
La împărţirea numerelor complexe se înmulţeşte numărătorul cu valoarea complex conjugată a numitorului, proces care se numeşte raţionalizare, pentru a obţine la numitor un număr real ca de exemplu : $\frac{6+j10}{3+j4}=\frac{(6+j10)(3-j4)}{(3^2+4^2)}=\frac{6*3-j24+j30+40}{25}=\frac{58+j6}{25}$

Forma polară a numerelor complexe este forma exponenţială. Forma polară sau exponenţială a numerelor complexe este foarte utilă la înmulţirea numerelor complexe dar este mai puţin utilizată la opreaţiile de scădere sau adunare cu excepţia efectuarii grafice a acestor operaţii. Cu ajutorul unui calculator de buzunar se pot efectua operaţii matematice cu numere complexe în formă normală sau în formă polară. Forma polară a numerelor complexe este $Ae^{j\theta}$ unde A este amplitudinea e este baza logaritmilor naturali (2,718..) iar θ este unghiul de defazaj. Există o formă polară scurtă pentru numerele complexe $Ae^{j\theta}$ care este A/θ, de exemplu $5e^{j45}$ este 5/45 iar -$10e^{j60}$ este -10/60. În practică se utilizează ambele forme de reprezentare a numerelor complexe dar forma polară este mai uşor de scris. Un număr scris sub forma $10e^{j60}$ este un număr complex care satisface identitatea lui Euler :

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \qquad 2.41$$

De exemplu se poate scrie astfel : $10e^{j30}$=10/30 =10cos(30) +j10sin(30)=8,66+j5. Identitatea lui Euler nu arată numai că un număr de forma $Ae^{j\theta}$ =A/θ este un număr complex ci arată şi o metodă de a converti un număr complex din forma polară în forma normală. O altă utilizarea a formulei lui Euler este la conversia unui număr complex din forma normală în forma polară. Fie o expresie normală a unui număr complex x+jy unde se cunosc x şi y şi urmează să se determine A şi θ din echivalenţa x+jy =$Ae^{j\theta}$ =A/θ. Identitatea lui Euler arată că x+jy = Acos(θ) + jAsin(θ) iar pentru ca două numere complexe să fie egale trebuie ca părţile reale şi imaginare să fie egale de unde rezultă x = Acos(θ) şi y = Asin(θ) iar dacă se face raportul celor două ecuaţii va rezulta :

$$\frac{A\sin(\theta)}{A\cos(\theta)}=\tan(\theta)=\frac{y}{x}\ldots sau\ldots\theta=(\tan)^{-1}\frac{y}{x} \qquad 2.42$$

(Se poate observa că dacă x este negativ trebuie să se adauge sau să se scadă 180 de grade pentru a se obţine unghiul θ). Deci unghiul θ este arctangenta raportului dintre partea imaginară şi partea reală a unui număr complex. Dacă se cunoaşte θ se poate afla A din una din relaţiile x = Acos(θ) sau y = Asin(θ). Amplitudinea A se poate afla şi din ridicarea la patrat a celor două relaţii şi apoi insumarea lor de unde va rezulta $A^2\cos^2(\theta)+ A^2\sin^2(\theta)=A^2=x^2+y^2$ deci amplitudinea unui număr complex exprimat în formă polară este radical din suma patratelor părţilor imaginare şi reale. Numeroase calculatoare de buzunar fac direct conversia dintre forma polară şi forma normală a numerelor complexe. Conversia numerelor complexe din forma polară în forma normală se poate pune în evidenţă şi cu metode grafice. În Fig.2.23, a se prezintă o linie care leagă originea axelor sistemului complex de coordonate cu numărul complex x+jy. Această linie formează un triunghi dreptunghic cu proiecţiile punctului pe axele reală şi imaginară, după cum se prezintă în Fig.2.23,b. Se reaminteşte din trigonometria elementară că : x = Acos(θ), y = Asin(θ) şi $A=\sqrt{x^2+y^2}$ care corespund şi cu relaţiile lui Euler. De foarte multe ori linia care leagă originea sistemului de axe cu punctul ce defineşte numărul complex este considerată o reprezentare grafică a numărului complex pentru că lungimea ei şi unghiul faţă de axa x sunt egale cu valorile numărului complex exprimat în formă polară. După cum a fost precizat mai sus un număr complex conjugat exprimat în formă normală diferă faţă de numărul complex normal numai prin semnul schimbat al părţii imaginare. În reprezentare polară diferenţa apare numai la semnul unghiului după cum se poate observa dacă se face conversia unui număr complex şi conjugatului în formă polară, 6+j5=7,81/39,8 şi respectiv 6-j5=7,81/-39,8 .

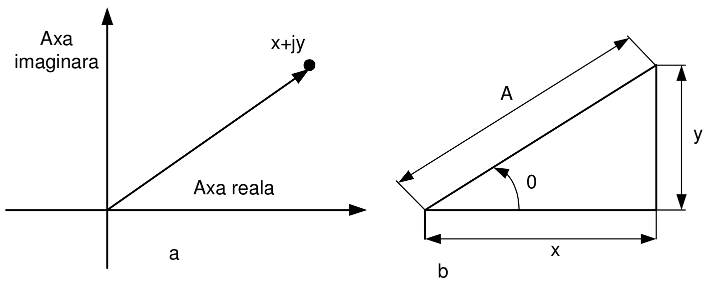

Fig.2.23. Reprezentarea grafică a unui număr complex

Se reaminteşte că forma normală a numerelor complexe este utilă la efectuarea operaţiilor de adunare şi scădere iar forma polară a numerelor complexe este utilă la efectuarea operaţiilor de înmulţire şi împărţire. Relaţiile de calcul cu numere complexe în formă polară sunt uşor de aplicat dacă se ţine cont de matematica numerelor exponenţiale. Produsul a două numere exponenţiale este $Ae^{j\theta}Be^{j\varphi} = ABe^{j(\theta+\varphi)}$ la care amplitudinea AB este produsul amplitudinilor numerelor componente iar unghiul este suma unghiurilor numerelor componente. Se poate exprima aceiaşi relaţie în formă simplificată $A/\underline{\theta}B/\underline{\varphi} = AB/\underline{\theta+\varphi}$. La fel se poate proceda în cazul operaţiei de împărţire şi va rezulta :

$$\frac{Ae^{j\theta}}{Be^{j\varphi}} = \frac{A}{B}e^{j(\theta-\varphi)} \ldots sau \ldots \frac{A/\underline{\theta}}{B/\underline{\varphi}} = \frac{A}{B}/\underline{(\theta-\varphi)} \qquad 2.43$$

Se observă că în cazul împărţirii, amplitudinea rezultantă se obţine prin împărţirea amplitudinilor numerelor complexe iar unghiul rezultant este diferenţa unghiurilor celor două numere complexe.

S18. Subiect de examen

Fazori şi diagrame fazoriale

Prin definiţie un fazor este un număr complex asociat unei unde sinusoidale defazate astfel că dacă este reprezentat în formă polară, amplitudinea fazorului este egală cu valoarea efectivă a undei sinusoidale ce reprezintă o tensiunea sau un curent, iar unghiul fazorului este unghiul de defazaj al undei sinusoidale. De exemplu **V**=3/$\underline{45^o}$ V este fazorul pentru semnalul sinusoidal v=3√2sin(2πf+45^o) V iar fazorul **I**= 0,439 /-$\underline{27^o}$ A este pentru curentul i=0,439√2sin(2πf+27^o) =0,621 sin(2πf+27^o) A. De obicei litera care simbolozează un fazor este literă mare îngroşată. În mod uzual pentru toate mărimile electrice care sunt sub formă complexă se utilizează litere mari îngroşate. De asemenea se utilizează un asterix pentru a defini o mărime complex conjugată de exemplu pentru **V** = -6+j10= 11,7/$\underline{121^o}$ rezultă **V*** =-6-j10= 11,7/-$\underline{121^o}$. Modulul unui fazor este notat cu literă mare normală iar modulul unui număr complex este notat cu două linii verticale după notaţia clasică din matematică. De exemplu pentru fazorul de curent **I**=3+j4 =5 /$\underline{53,1^o}$ A va rezulta modulul I=│3+j4 │=5.

O eroare foarte uzuală este confundarea unui fazor cu o sinusoidă. Un fazor nu este egal cu o sinusoidă pentru că un fazor este un număr complex iar o sinusoidă este o funcţie reală. Pe scurt este greşit să se scrie 3/$\underline{30^o}$ = 3√2sin(2πf+30^o). Fazorii se reprezintă în mod uzual în formă polară. Un fazor poate fi reprezentat şi în formă normală pentru că un număr complex poate să fie reprezentat cu ambele forme. Se poate observa că nu toate numerele complexe sunt fazori ci numai acele numere complexe care pot fi puse în corespondenţă cu o sinusoidă. Uneori convenţiile pentru utilizarea fazorilor diferă de la un autor la altul şi anume unii autori folosesc în locul valorii efective valoarea maximă sau în locul funcţiei sinus se utilizează funcţia cosinus cu unghiurile de fază aferente.

Una din aplicaţiile mai uzuale ale fazorilor este la însumarea unor sinusoide de aceiaşi frecvenţă. Dacă fiecare sinusoidă este transformată într-un fazor apoi fazorii sunt însumaţi şi rezultă un singur număr complex, acest număr complex corespunde cu suma celor două sinusoide. Procedura nu este tocmai simplă pentru că necesită utilizarea formei normale a unui număr complex şi mai multe transformări din forma normală la forma polară şi invers. Fie un exemplu a sumei a două sinusoide de aceiaşi frecvenţă :

v = 3sin(2t+30^o)+2sin(2t-15^o) V care se poate însuma sub forma de fazori astfel :

$$V = \frac{3}{\sqrt{2}}/\underline{30^o} + \frac{2}{\sqrt{2}}/\underline{-15^o} = \frac{4,64}{\sqrt{2}}/\underline{12,2^o}\ \text{V}$$

Transformarea de mai sus este relativ complicată dacă nu se dispune de un calculator performant care poate să facă operaţia direct. Dacă se face calculul manual paşii vor fi următorii:

- se transformă numerele complexe sub formă normală adică:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\left(30^o\right) + j\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\left(30^o\right) + \frac{2}{\sqrt{2}}\cos\left(-15^o\right) + j\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(-15^o\right) = 1,83 + j1.06 + 1,36 - j0,36$$

sau 3,19+j0,7

- apoi se determină amplitudinea şi faza numărului complex rezultat :

$$A = \sqrt{(3,19)^2 + (0,7)^2} = 3,26\,,\ \theta = arctg\,\frac{0,7}{3,19} = 12,2^o$$

- se va obţine fazorul corespunzător dacă se înmulţeşte A cu √2 adică va rezulta 4,64 de unde rezultă relaţia prezentată mai sus $V = \frac{4,64}{\sqrt{2}}/\underline{12,2^o}$ V.

Fazorul care rezultă se transformă în sinusoidă de forma v =4,64 sin(2t+12,2^o) V. Metoda se poate aplica la orice număr de sinusoide care au aceiaşi frecvenţă. Se poate observa că utilizarea notaţiei efective care ţine cont de √2 nu contribuie la rezultatul final pentru că întrega expresie se poate simplifica cu √2. Dacă problema care se rezolva conţine numai sinusoide se poate lucra cu valorile maxime ale tensiunii sau curentului în loc de valorile efective, deci termenul √2 nu se ia în considerare.

Uneori fazorii sunt reprezentaţi în planul complex ca vectori, în acest caz se spune ca se utilizează o ***diagramă fazorială***. Fazorii sunt reprezentaţi ca vectori cu originea în originea planului complex şi cu partea finală în locul unde este plasat numărul complex corespunzător. Asemenea reprezentări sunt utile pentru a observa unghiurile de defazaj dintre diferiţi curenţi şi tensiuni dintr-un circuit electric. Uneori fazorii pot să fie utilizaţi pentru adunarea sau scăderea semnalelor sinusoidale dar procedura este mai complicată, după cum a fost prezentat mai sus. O altă metodă de însumare a semnalelor sinusiodale denumită metoda funiculară se bazează pe conectarea unui fazor la sfârşitul altui fazor, unul după altul iar suma lor va fi dată de un fazor care leagă începutul primului fazor cu sfârşitul ultimului fazor. Dacă este necesar ca un fazor să fie scăzut acesta se va orienta în sens opus deci cu un defazaj de 180^o.

Aplicaţii

1.Să se afle fazorii corespunzători tensiunilor şi curenţilor descrişi de ecuaţiile următoare:
a. v1=√2(50)sin(377t-35) V, b. v2=83,6cos(400t-15)V,c. i1= √2(90,4)sin(754t+48)A, d. i2= 3,46cos(815t+30)A

2. Să se afle tensiunile şi curenţii care corespund cu fazorii descrişi de relaţiile de mai jos. Toate tensiunile şi curenţii au o frecvenţă unghiulară de 377rad/s.
a.**V**1=20/$\underline{35}$ V, b. **V**2=4-6j V , c. I1=10,2/$\underline{-41}$ mA, d. I2=-3+j1, A

3. Să se afle ecuaţia unei singure sinusoide care este echivalentă cu expresiile următoare:
a. 6,23sin(ωt)+9,34cos(ωt),
b. 5sin(4t-20)+6sin(4t+45)-7cos(4t-60)+8cos(4t+30)
c. 5sin(377t)+6cos(754t)

S19. Subiect de examen
Analiza elementară a circuitelor de ca. Impedanţa şi admitanţa

Descrierea prin fazori a elementelor de circuit

Analiza circuitelor de ca. utilizează fazori cu rezistenţe şi reactanţe într-un mod similar cum se utilizează tensiunile şi curenţii în circuitele de curent continu. Circuitul de ca. de bază denumit circuit în domeniul timp este transformat într-un circuit cu fazori în care în loc de tensiuni şi curenţi sinusoidali vor apare fazori, iar în loc de condensatoare şi bobine vor apare reactanţe. Rezistenţele din circuit rămân la fel ca la analiza de cc. deoarece rezistenţele ideale se consideră că nu sunt influenţate de frecvenţă. În continuare se face analiza circuitului cu fazori. Circuitele cu fazori au marele avantaj că rezistenţele şi reactanţele au aceiaşi unitate de măsură, respectiv Ohmul, deci se pot combina la fel ca la analiza circuitelor de cc. Analiza circuitelor de ca. cu fazori nu necesită calcule complicate ci numai calcule cu numere complexe deci algebra numerelor complexe. Prin urmare toate metodele de analiză a circuitelor de cc. se pot aplica la circuitele de ca. cu singura diferenţă că numerele care apar sunt complexe faţă de numerele reale la circuitele de cc.

Transformarea circuitelor din domeniul timp sub formă de fazori necesită stabilirea unor relaţii între curenţii şi tensiunile descrise prin fazori pentru fiecare element de circuit respectiv rezistenţă, condensator şi bobină. Se va începe prin stabilirea relaţiei între curenţi şi tensiuni pentru un rezistor de R ohmi. Pentru un curent sinusoidal de forma $i=I_m\sin(\omega t+\theta)$ va rezulta la bornele rezistorului R tensiunea $v= R\, I_m\sin(\omega t+\theta)$ cu respectarea referinţelor ca la circuitele de cc. Fazorii care rezultă sunt:

$$I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}/\underline{\theta}\ldots si\ldots V=\frac{RI_m}{\sqrt{2}}/\underline{\theta} \qquad 2.44$$

Dacă se împarte tensiunea la curent se vor simplifica I_m, θ şi √2 şi va rezulta relaţia dintre tensiunea şi curentul sub formă de fazori respectiv:

$$\frac{V}{I}=\frac{RI_m/\sqrt{2}/\underline{\theta}}{I_m/\sqrt{2}/\underline{\theta}}=R \qquad 2.45$$

Prin urmare relaţia dintre curent şi tensiune la un rezistor în ca. este similară relaţiei în cc. cu deosebirea că tensiunile şi curenţii sunt reprezentate sub formă de fazori **V/I** = R, v/i =R. În Fig.2.24 se prezintă circuitul de cc. şi circuitul de ca. în cazul unui rezistor.

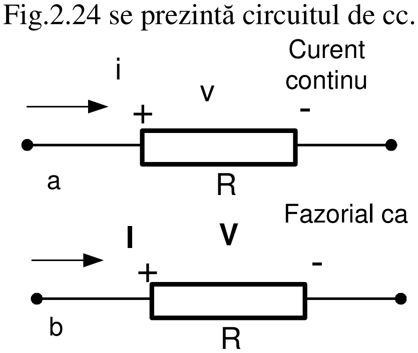

Fig.2.24. Comportarea în timp şi la curenţi şi tensiuni fazoriale a rezistoarelor.

Fie o bobină de L Henry la care se aplică un curent $i=I_m\sin(\omega t+\theta)$, tensiunea la bornele bobinei va fi $v=\omega LI_m\cos(\omega t+\theta) = \omega LI_m\sin(\omega t+\theta+90^o)$ (conform celor prezentate la capitolul bobine în ca). Fazorii corespunzători pentru curent şi tensiune sunt:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} / \underline{\theta} \ldots si \ldots V = \frac{\omega L I_m}{\sqrt{2}} / \underline{\theta + 90^o} \qquad 2.46$$

Dacă se împarte tensiunea la curent va rezulta în cadrul reprezentării fazoriale:

$$\frac{V}{I} = \frac{\omega L I_m / \sqrt{2} / \underline{\theta + 90^o}}{I_m / \sqrt{2} / \underline{\theta}} = \omega L / \underline{90^o} \qquad 2.47$$

Rezultatul $\omega L/\underline{90}$ este în formă polară iar în formă normală va fi $j\omega L$. Se reaminteşte că ωL este reactanţa inductivă definită anterior deci:

$$\frac{V}{I} = j\omega L = jX_L \qquad 2.48$$

Se poate observa că prin utilizarea notaţiei $j\omega L$ relaţia între curent şi tensiune pentru o bobină este similară cu relaţia de la rezistoare. Deci mărimea $j\omega L$ are acelaşi efect de limitare a curentului printr-o bobină ca la rezistoare şi aceiaşi unitate de măsură ohmul. Pe de altă parte datorită termenului j1 va apare o defazare de 90^o între tensiune şi curent pentru că $j1=1/\underline{90^o}$. Se poate face aceiaşi comparaţie dintre comportarea în domeniul timp şi comportarea la tensiuni şi curenţi fazoriali a bobinelor, similar ca la rezistoare **V/I**=R, **V/I**= $j\omega L$ care se prezintă în Fig.2.25.

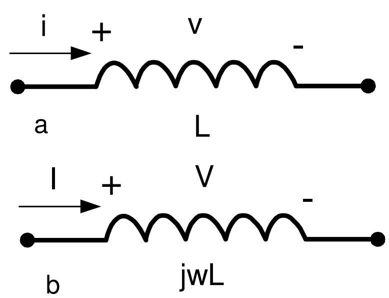

Fig.2.25. Comportarea în timp şi la tensiuni şi curenţi fazoriali a bobinelor

Simbolul unei bobine se utilizează şi la curenţi şi tensiuni fazoriale dar în loc de L se lucrează cu mărimea imaginară $j\omega L$. Este evident că tensiunile şi curenţii sunt exprimate sub formă de fazori.

Fie un condensator de C farazi la care se aplică o tensiune de forma $v=V_m\sin(\omega t+\theta)$ iar curentul care va trece prin condensator va fi $i= \omega CV_m\sin(\omega t+\theta+90^o)$. Fazorii corespunzători vor fi:

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} / \underline{\theta} \ldots si \ldots I = \frac{\omega C V_m}{\sqrt{2}} / \underline{\theta + 90^o} \qquad 2.49$$

Se face raportul tensiune pe curent şi va rezulta :

$$\frac{V}{I} = \frac{V_m / \sqrt{2} / \underline{\theta}}{\omega C V_m / \sqrt{2} / \underline{\theta + 90^o}} = \frac{1}{\omega C / \underline{90^o}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j1}{\omega C} \qquad 2.50$$

Anterior a fost definită mărimea $-1/\omega C$ ca fiind reactanţa capacitivă a unui condensator prin urmare se poate scrie:

$$\frac{V}{I} = \frac{-j1}{\omega C} = jX_C \qquad 2.51$$

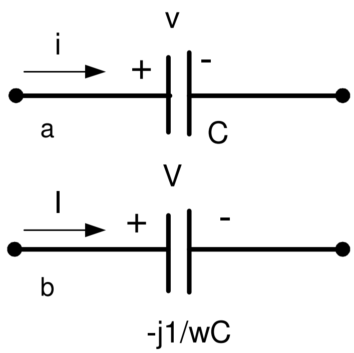

Fig.2.26 Comportarea în timp şi la tensiuni şi curenţi fazorali a condensatoarelor

Se reaminteşte că unele manuale de teoria circuitelor electrice notează reactanţa capacitivă cu X_C=1/ωC în acest caz **V/I**= -jX_C. Mărimea –j1/ωC are acelaşi efect de limitare a curentului similar ca la rezistenţe şi de asemenea se măsoară în ohmi. Dar spre deosebire de rezistenţe mărimea –j1 produce un defazaj între curent şi tensiune de -90^o. În Fig.2.26 se arată transformarea din domeniul timp în reprezentarea prin fazori pentru un condensator. Simbolul unui condensator pentru reprezentarea prin fazori a tensiunii şi curentului este acelaşi ca la domeniul timp dar în loc de C se va utiliza –j1/ωC.

Aplicaţii

1.Să se afle impedanţa în formă polară pentru o inductanţă de 0,5H în serie cu un rezistor de 20 Ω la a.0Hz, b.10Hz, c. 10kHz.

2.Se conectează în serie o rezistenţă de 2000 Ω, cu o inductanţă de 1H şi un condensator de 0,01F. Să se afle impedanţa în formă polară la a. 5krad/s, b. 10krad/s, c. 20krad/s.

3.La o bobină se aplică o tensiune de 220V şi 50Hz iar curentul care trece prin aceasta este de 2A. Curentul este înaintea tensiunii cu 40^o. Se cere să se afle rezistenţa şi inductanţa bobinei.

S20. Subiect de examen

Analiza circuitelor serie de curent alternativ. Noţiunea de impedanţă

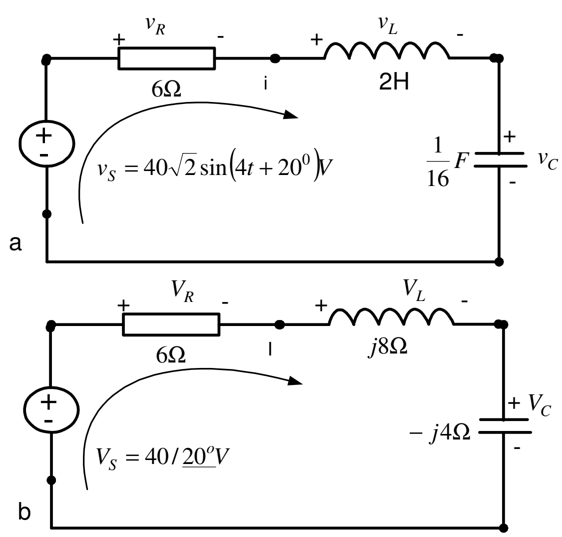

Fig.2.27. Exemplu de calcul pentru circuite de curent alternativ serie

Metoda de analiză a circuitelor serie de ca. poate fi uşor înțeleasă dintr-un exemplu simplu. Se presupune că un curent sinusoidal trece prin circuitul serie din Fig.2.27 a, la care sursa de tensiune are ω=4rad/s. Primul pas constă în desenarea circuitului echivalent cu fazori reprezentat în Fig.1.46 b în care curenții şi tensiunile au fost înlocuiți cu fazori iar bobinele şi condensatorii cu impedanțele:

jωL=j(4)2=j8 Ω, $\dfrac{-j1}{\omega C}=\dfrac{-j1}{4(1/16)}=-j4\Omega$,

Este evident că rezistențele nu se modifică. Apoi se va aplica KVL pentru circuitul cu fazori. Uneori nu este foarte clar cum se poate aplica KVL sau KCL la circuitele cu fazori. KVL se aplică la fel ca la circuitele de cc pentru tensiuni şi respectiv KCL pentru curenți. Se reaminteşte că fazorii sunt reprezentări complexe ale unor tensiuni şi curenți sinusoidali deci se poate aplica KVL şi KCL la fel ca la circuitele de cc.In urma aplicării KVL va rezulta :

$$\mathbf{V}_S=\mathbf{V}_R+\mathbf{V}_L+\mathbf{V}_C \qquad 2.52$$

Apoi se vor înlocui tensiunile cu valorile fazoriale adică $\mathbf{V}_S=40/\underline{20^o}$, $\mathbf{V}_R=6\mathbf{I}$, $\mathbf{V}_L=j8\mathbf{I}$, $\mathbf{V}_C=-j4\mathbf{I}$
În urma înlocuirilor va rezulta :

$$40/\underline{20^o}=6\mathbf{I}+j8\mathbf{I}-j4\mathbf{I}=6\mathbf{I}+j4\mathbf{I} \qquad 2.53$$

De unde va rezulta curentul prin circuit :

$$I=\frac{40/\underline{20^o}}{6+j4}=\frac{40/\underline{20^o}}{7{,}211/\underline{33{,}7^o}}=5{,}547/\underline{-13{,}7^o}A$$

şi în final i=5,547√2sin(4t-13,7°)=7,84 sin(4t-13,7°)

Analiza KVL făcută mai sus necesită calcule destul de laborioase. Calculele în circuitele de ca. se pot simplifica dacă se utilizează noțiunea de impedanță care se notează cu **Z** şi se măsoară în Ohmi. Pentru un circuit electric cu două terminale care are la borne tensiunea descrisă sub formă de fazor **V** şi prin care trece curentul fazorial **I** se defineşte impedanța ca raportul dintre tensiunea fazorială şi curentul fazorial :

$$\mathbf{Z}=\mathbf{V}/\mathbf{I} \qquad 2.54$$

Pentru ca impedanța definită de relația anterioara să existe trebuie ca circuitul să nu conțină surse de tensiune sau de curent independente dar poate să conțină anumite surse de tensiune sau curent dependente. Impedanța definită de relația de mai sus se numeşte impedanță totală sau impedanță echivalentă. Uneori se numeşte impedanță de intrare pentru anumite circuite cu 2 borne care conțin surse de tensiune sau curent comandate. În general, nu numai pentru circuitele serie, impedanța se poate scrie ca un număr complex de forma :

$$\mathbf{Z}=\mathbf{R}+j\mathbf{X} \qquad 2.55$$

Unde partea reală R este rezistența impedanței iar partea imaginară **X** este **reactanța** impedanței. Pentru circuitul serie din Fig.2.24 rezistența este R=6Ω iar reactanța este **X**=8-4=4Ω. În cazul acestui circuit rezistența depinde numai de rezistența rezistorului iar reactanța depinde numai de reactanțele bobinei şi condensatorului. În general la circuitele reale R şi X depind de toate elementele din circuit, adică rezistorul poate să aibă şi o capacitate sau inductanță parazită iar bobinele şi condensatoarele au şi o rezistență parazită. Deoarece impedanța este o mărime complexă aceasta se poate exprima şi sub formă polară adică :

$$Z=R+jX=\sqrt{R^2+X^2}\,/\underline{tg^{-1}\frac{X}{R}} \qquad 2.56$$

unde $|Z|=\sqrt{R^2+X^2}$ este modulul numărului complex iar tg^{-1}(**X**/R) este unghiul de fază al impedanței.

Unghiul de fază al impedanței **Z=V/I** este unghiul de defazaj dintre tensiune şi curent dacă unghiul este pozitiv (Se presupune că tensiunea este referința iar curentul este în urma tensiunii dacă unghiul este pozitiv). Dacă unghiul este negativ atunci curentul este înaintea tensiunii sau se poate spune că referința este curentul şi urmează tensiunea defazată. O impedanță la care unghiul de defazaj este pozitiv se spune că are o ***comportare inductivă*** pentru că între tensiune şi curent este un decalaj în sensul că tensiunea este prima şi apoi urmează curentul întârziat faţă de tensiune cu un timp proporţional cu unghiul de defazaj. Comportarea inductivă însemamnă că suma reactanţelor de tip inductiv este mai mare ca suma reactanţelor de tip capacitiv. În mod similar o impedanţă are o ***comportare capacitivă*** dacă defazajul este negativ deci curentul este înaintea tensiunii cu un timp proporţional cu defazajul negativ. Evident în acest caz suma reactanţelor capacitive este mai mare ca suma reactanţelor inductive. Impedanţele fac legătura dintre curent şi tensiune în ca. la fel cum fac legătura dintre curent şi tensiune rezistenţele în cc. deci regulile de conectare în paralel sau serie sunt similare ca la rezistenţe. De exemplu la conectarea mai multor impedanţe în serie este valabilă relaţia cunoscută de la rezistoare:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \ldots \mathbf{Z}_N \qquad 2.57$$

La fel în cazul a două impedanţe conectate în paralel se poate scrie :

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad 2.58$$

Pentru mai multe impedanţe conectate în paralel se poate aplica aceiaşi relaţie matematică ca la rezistoarele conectate în paralel. Impedanţa totală a unui circuit de ca. se poate determina la fel ca rezistenţa totală a unui circuit de cc.

Impedanţa totală a unui circuit de ca se utilizează la fel ca rezistenţa totală a unui circuit de cc. De exmplu pentru circuitul din Fig.2.27 a primul pas după determinarea circuitului echivalent cu fazori reprezentat în Fig.2.27 b este determinarea impedanţei circuitului care se conectează la bornele sursei de tensiune. Pentru că este un circuit serie impedanţa va suma impedanţelor elementelor componente adică :

$$Z = 6 + j(8-4) = 6 + j4 = 7{,}211/\underline{33{,}7}\ \ \Omega$$

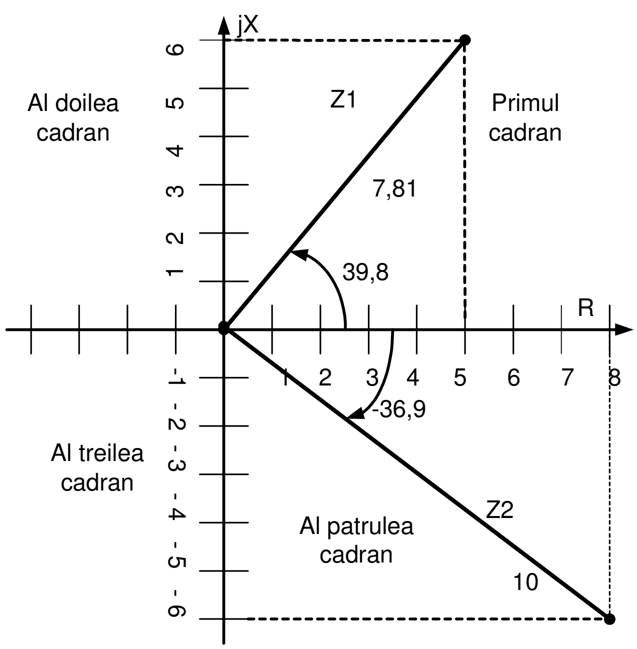

Fig.2.28. Diagrama de impedanţe pentru un circuit inductiv şi pentru un circuit capacitiv

Se poate detemina în continuare curentul fazorial dacă se împarte tensiunea sursei la impedanţa circuitului adică :

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{40/\underline{20}}{7{,}211/\underline{33{,}7}} = 5{,}547/\underline{-13{,}7}\ \text{A}$$

Dacă se cunoaşte curentul fazorial se poate determina expresia instantanee a curentului. O diagramă de impedanţe este utilizată pentru a înţelege mai bine noţiunea de impedanţă. Diagrama de impedanţe se desenează în planul impedanţelor reprezentat în Fig.2.28, care are axa orizontală asociată rezistenţelor R şi axa verticală asociată reactanţelor jX. Ambele axe au aceiaşi unitate de măsură. În această diagramă se reprezintă un circuit inductiv Z_1=6+j5= 7,81/$\underline{39,8}$ Ω şi respectiv un circuit capacitiv Z_2=8-j6=10/-$\underline{36,9}$ Ω Un circuit inductiv are diagrama de impedanţe în primul cadran iar un circuit capacitiv are diagrama de impedanţe în cadranul patru. Pentru ca diagrama de impedanţe să se reprezinte şi în cadranele 3 şi 4 trebuie ca circuitul să aibă rezistenţe negative care pot să apară numai dacă se folosesc surse comandate de tensiune sau curent.

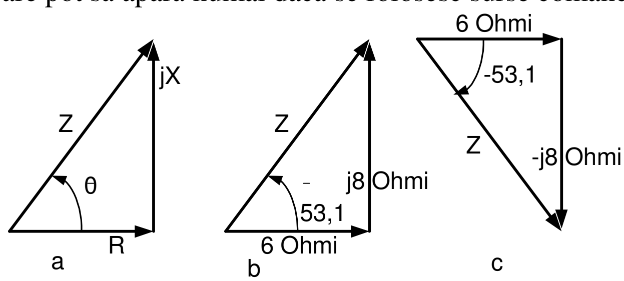

Fig.2.29. Reprezentarea impedanţelor sub formă de triunghiuri

Uneori se foloseşte reprezentarea impedanţelor sub formă de triunghiuri. Un triunghi de impedanţe reprezintă pe R, jX şi Z la care vectorul jX se trasează la finalul vectorului R iar vectorul Z leagă începutul lui R cu sfârşitul lui jX după cum se prezintă în Fig.2.29.a. În Fig.2.29 b se reprezintă impedanţa Z=6+j8=10/$\underline{53,1}$ Ω iar în Fig.2.29.c se reprezintă impedanţa Z=6-j8= 10/-53,1 Ω.

Regula divizorului de tensiune se poate aplica şi la circuitele de ca. la fel ca la circuitele de cc. Aplicarea regulii divizorului de tensiune în ca. presupune că tensiunile şi curenţii sunt exprimate ca fazori iar elementele din circuit ca impedanţe. Deci dacă la un circuit serie format din mai multe impedanţe care au impedanţa totală Z_T se aplică o sursă de tensiune alternativă V_s se poate determina tensiunea de la bornele impedanţei Z_X cu relaţia similară din cc:

$$V_X = \frac{Z_X}{Z_T} V_S \qquad 2.59$$

Aplicaţii

1.O sursă de tensiune alternativă de 240V este conectată în serie cu două componente, din care una are impedanţa 80/$\underline{60}$ Ω. Care este impedanţa celeilalte componente dacă curentul care trece prin circuit este de 2A iar acesta este în faţa tensiunii aplicate cu 40°.

2. Pentru circuitul din Fig.2.30 să se afle fazorii necunoscuţi şi sinusoidele corespunzătoare dacă frecvenţa tensiunii aplicate este de 50Hz. Să se afle puterea disipată de circuit.

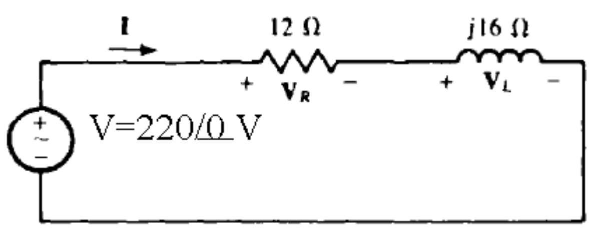

Fig.2.30. Circuit serie de ca.

3. Să se afle curenţii şi tensiunile necunoscute pentru circuitul reprezentat în Fig. 2.31.

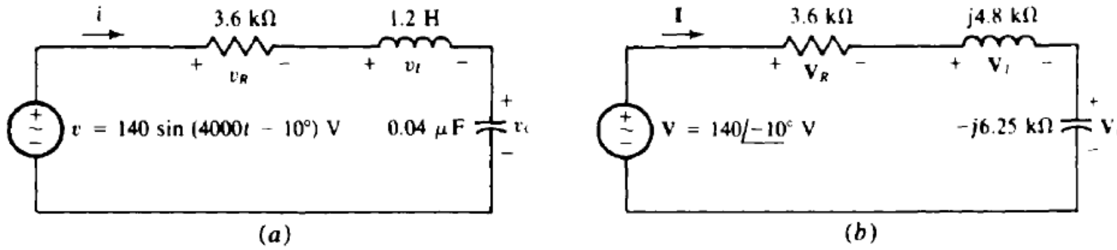

Fig.2.31. Circuit serie de ca.

S21. Subiect de examen

Analiza circuitelor paralel de curent alternativ. Noţiunea de admitanţă

Metoda de analiză a circuitelor paralel de ca se poate prezenta pe baza unui exemplu. Se presupune că se doreşte să se afle tensiune alterntivă sinusoidală v de la bornele circuitului prezentat în Fig.2.32.a. la care se aplică o sursă de curent.

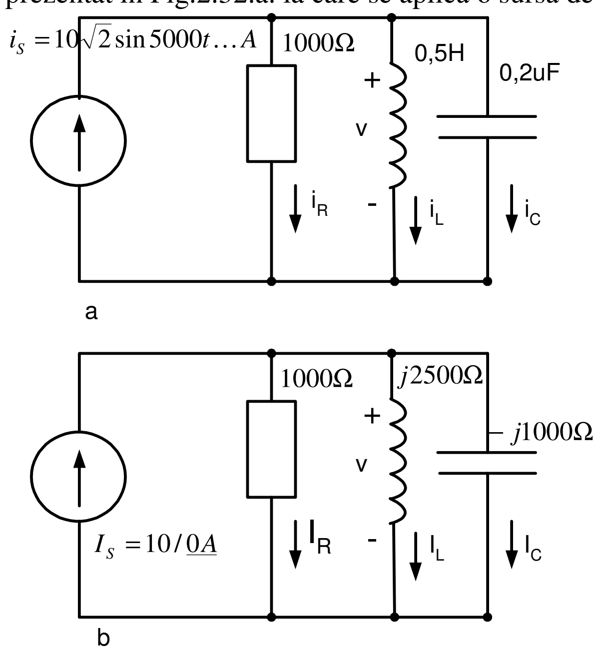

Fig.2.32. Exemplu de calcul pentru circuite de ca paralel

Conform metodelor prezentate mai sus primul pas pentru determinarea tensiunii de la bornele elementelor conectate în paralel constă în a desena schema cu fazori a circuitului prezentată în Fig.2.32.b. Se presupune că se utilizează o sursă de curent cu frecvenţa unghiulară de 5000 rad/sec. Se aplică KCL pentru acest circuit :

$$\mathbf{I}_S = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C \qquad 2.60$$

Apoi se înlocuiesc curenţii cu $10/\underline{0}$ A, $\mathbf{I}_R = \mathbf{V}/R$, $\mathbf{I}_L = \mathbf{V}/j2500$, $\mathbf{I}_C = \mathbf{V}/-j1000$ de unde rezultă :

$$10/\underline{0} = \frac{V}{1000} + \frac{V}{j2500} + \frac{V}{-j1000}$$

care apoi se poate simplifica la relaţia :

$$10/\underline{0} = (0{,}001 + j0{,}0006)V$$

de aici se poate calcula tensiunea fazorială de la bornele elementelor conectated în paralel :

$$V=\frac{10/\underline{0}}{0{,}001+j0{,}0006}=\frac{10/\underline{0}}{0{,}001166/\underline{31^o}}=8{,}6/\underline{-31^o}kV$$

Tensiunea corespunzătoare exprimată în timp este :

$$v=8{,}3\sqrt{2}\sin\left(5000t-31^o\right)=12\sin\left(5000t-31^o\right)kV$$

Deoarece tensiunea este în urma curentului circuitul are o comportare capacitivă. Comportarea capacitivă a circuitului este datorată valorii mici a reactanţei condensatorului, mai mică ca reactanţa bobinei şi care are un afect invers comparativ cu circuitul serie unde o reactanţă capacitivă mai mică ca reactanţa inductivă ar determina un comportament inductiv.

Metoda de analiză prezentată mai sus se poate simplifica dacă se utilizează admitanţa care se notează cu Y şi se măsoară în Siemenşi. Prin definiţie admintanţa este inversa impedanţei:

$$Y=\frac{1}{Z} \qquad 2.61$$

De unde va rezulta relaţia dintre tensiune şi curent:

I =YV 2.62

Prin urmare va rezulta că admitanţa unui rezistor este **Y**=1/**Z**=G, a unei bobine este **Y**=1/jωL=-j1/ωL iar a unui condensator este Y=1/(-j1ωC)=jωC.

Deoarece admitanţa este inversa impedanţei, admitanţa uniui circuit de ca. corespunde cu conductanţa unui circuit de cc. Prin urmare admitanţele unor elemente de circuit conectate în paralel se pot aduna:

$\mathbf{Y}_T=\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2+\mathbf{Y}_3+....+\mathbf{Y}_N$ 2.63

În caz general, nu numai pentru elemente conectate în paralel se poate scrie:

Y = G+j**B** 2.64

Unde **G** este conductanţa circuitului iar **B** se numeşte susceptanţa circuitului care este partea imaginară a admitanţei. Pentru circuitul reprezentat sub formă de fazori din Fig.2.32.b se poate scrie:

$$Y=\frac{1}{1000}+\frac{1}{j2500}+\frac{1}{-j1000}=0{,}001+j0{,}0006S$$

în cest caz G=0,001 S iar B=0,0006 S. În cazul acestui circuit paralel simplu conductanţa depinde numai de rezistenţa din circuit iar susceptanţa depinde numai de susceptanţele bobinei şi condensatorului. În cazul circuitelor mai complexe conductanţa şi susceptanţa depind de conductanţele şi susceptanţele elementelor componente.

Deoarece admitanţa este o mărime complexă va rezulta că poate să fie exprimată în formă polară adică :

$$Y=G+jB=\sqrt{G^2+B^2}\,/\underline{\tan^{-1}\left(\frac{B}{G}\right)} \qquad 2.65$$

unde $\left|Y\right|=\sqrt{G^2+B^2}$ este modulul iar $\tan^{-1}$(B/G) este unghiul de fază al admitanţei.

Deoarece admitanţa este inversa impedanţei unghiul de fază al admitanţei este egal cu unghiul de fază al impedanţei dar cu semn schimbat.Prin urmare unghiul de fază este pozitiv pentru un circuit capacitiv şi negativ pentru un circuit inductiv.

Admitanţa totală a unui circuit paralel de ca. se utilizează la fel ca şi conductanţa totală a unui circuit paralel de cc. De exemplu în cazul circuitului din Fig.2.32 a se trece mai întâi la circuitul cu fazori reprezentat în Fig. 2.32 b şi apoi se calculează admitanţa respectivă care este Y =0,001 +j0,0006 S =0,001166/31S. Apoi se poate determina tensiunea fazorială la bornele sursei de curent cu relaţia:

$$V=\frac{I}{Y}=\frac{10/\underline{0}}{0{,}001166/\underline{31}}V=8{,}6/\underline{-31}kV$$

În final se poate determina tensiunea instantanee v după cum a fost prezentat mai sus. La fel ca în cazul impedanței se poate reprezenta admitanța în planul complex al admitanțelor la care pe axa absciselor este conductanța G iar pe axa ordonatelor este susceptanța B. De asemenea se poate utiliza un triunghi al admitanțelor la fel ca triunghiul impedanțelor.

Regula divizorului de curent se aplică la circuitele reprezentate sub formă de fazori la fel ca la circuitele de cc. Deci dacă un circuit fazorial cu elemente legate în paralel are la intrare curentul total $\mathbf{I}_S$, curentul prin elementul de admitanță $\mathbf{Y}_X$ notat cu $\mathbf{I}_X$ se determină cu relația:

$$I_X = \frac{Y_X}{Y_T} I_S \qquad 2.66$$

unde $\mathbf{Y}_T$ este suma admitanțelor din circuit.Dacă sensurile curenților sunt diferite trebuie să se introducă semnul minus. În cazul special a două ramuri în paralel de impedanțe $\mathbf{Z}_1$ şi $\mathbf{Z}_2$ va rezulta relația:

$$I_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I_S \qquad 2.67$$

unde I_1 este curentul fazorial prin impedanța Z_1. În continuare nu se vor mai folosi expresia de curent sau tensiune fazorială pentru că notația respectivă arată că mărimile respective sunt fazoriale. Este evident că există o legatură între impedanță şi admitanță. Se reaminteşte că:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX}$$

Dacă se raționalizează (se înmulțeşte cu conjugata) va rezulta:

$$Y = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = G + jB$$

Se observă că conductanța şi susceptanța depind de rezistență şi reactanță.

Aplicații

1.Să se afle admitanța totală în formă polară pentru conexiunea paralel a unui condensator de 0,2μF cu o rezistență de 5,1 Ω la frecvențele a. 0Hz, b.100kHZ, c. 40MHz.

2.Se conectează în paralel o rezistență de 200 Ω cu un condensator de 1μF şi o bobină de 75mH. Să se afle admitanța totală în formă polară la 400Hz. Să se deseneze diagrama admitanțelor şi triunghiul admitanțelor.

3.Un circuit format din două componente legate în paralel are la borne o tensiune de 220/<u>20</u> V şi respectiv un curent de 48/<u>60</u> A la o frecvență de 2kHz . Să se afle ce elemente sunt conectate în paralel şi care sunt valorile acestor elemente.

4.Să se afle impedanța totală a circuitului din Fig. 2.33.

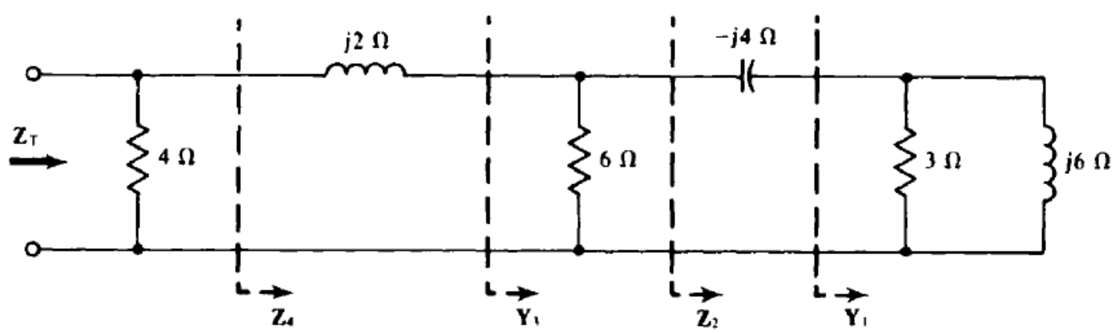

Fig.2.33. Circuit paralel în ca.