Exponenciální rovnice

V exponenciální rovnici se proměnná vyskytuje v exponentu.

Obecně bychom mohli exponenciální rovnici zapsat takto:

$$\boxed{a^{f(x)} = b^{f(x)}}$$

kde $a > 0,\ b > 0$

Příkladem velmi jednoduché exponenciální rovnice může být třeba:

$$2^x = 16\,.$$

Je jasné, že výsledek bude čtyři, protože dvě na čtvrtou je osm.

Řešení exponenciálních rovnic:

Pokud chceme vyřešit exponenciální rovnici, snažíme se ji upravit na tvar

$$\boxed{a^x = a^b}$$

kde $a > 0 \wedge a \neq 1$

Pokud máme stejné základy, musí se rovnat i exponenty a rovnice přechází na tvar:

$$\boxed{x = b}$$

Předchozí příklad upravujeme následovně:

$$2^x = 16$$

$$2^x = 2^4 \qquad \Rightarrow \qquad x = 4$$

Složitější příklad může vypadat třeba takto:

$$0,25^{2-X} = \frac{256}{2^{X+3}}$$

Nejprve převedeme obě strany na stejný základ. Na to neexistuje žádný postup, je třeba společný základ z rovnice „vyčíst“.

Vlevo je 0.25, což je $\frac{1}{4}$, vpravo v čitateli je 256, což je 2^8, mocniny dvou byste měli znát z výpočetní techniky a ve jmenovateli je základ mocniny 2.

Společný základ pro tuto rovnici bude číslo 2.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x} = \frac{2^8}{2^{x+3}}$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{2-x} = 2^{8-x-3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2x} = 2^{5-x}$$

$$2^{2x-4} = 2^{5-x} \qquad \Rightarrow \qquad 2x-4=5-x$$

$$x = 3$$

Další typ příkladu:

$$3^{2x-1} - 3^{2x-4} = 315 - 3^{2x-2}$$

Mocniny o základu tři je třeba upravit pomocí vět o mocninách takto:

$$\frac{3^{2x}}{3} - \frac{3^{2x}}{3^4} = 315 - \frac{3^{2x}}{3^2}$$

$$\frac{3^{2x}}{3} - \frac{3^{2x}}{3^4} + \frac{3^{2x}}{3^2} = 315$$

nyní vytkneme na pravé straně člen 3^{2x}

$$3^{2x}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{9}\right) = 315$$

$$3^{2x} \cdot \frac{35}{81} = 315 \qquad / \cdot \frac{81}{35}$$

$$3^{2x} = 315 \cdot \frac{81}{35}$$

$$3^{2x} = 9 \cdot 81$$

$$3^{2x} = 3^2 \cdot 3^4$$

$$3^{2x} = 3^6 \qquad \Rightarrow \qquad 2x = 6$$

$$x = 3$$

Logaritmování exponenciální rovnice

V případě, že nemůžeme rovnici upravit na tvar se stejnými základy, musíme ji logaritmovat.

$2^x \cdot 5^{2x} = 3^{x-2}$ » základy nejsou stejné a nejdou upravit, proto celou rovnici zlogaritmujeme

$\log(2^x \cdot 5^{2x}) = \log(3^{x-2})$ » nyní využijeme věty o logaritmech #1 a první závorku „roznásobíme“

$\log 2^x + \log 5^{2x} = \log(3^{x-2})$ » nyní opět využijeme věty o logaritmech #3 a „přesuneme“ exponent před logaritmus

$x \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 5 = (x - 2) \log 3$ » Roznásobíme pravou část rovnice

$x \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 5 = x \cdot \log 3 - 2 \log 3$ » Výrazy s neznámou hodíme na levou část rovnice

$x \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 5 - x \cdot \log 3 = -2 \log 3$ » Vytkneme *x*

$x \cdot (\log 2 + 2\log 5 - \log 3) = -2\log 3$ » Osamostatníme *x*

$$x = \frac{-2\log 3}{\log 2 + 2\log 5 - \log 3}$$

Substituce

Některé typy kvadratické rovnice řešíme pomocí substituce. Ukážeme si to na příkladu:

$$49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$$

$$7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0 \qquad zavedeme\, substituci\;\; y = 7^x$$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

dostáváme jednoduchou kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme a dostaneme hodnoty y=5 a y=1.

Vrátíme se zpátky k substituci a rovnici dořešíme:

$$y = 5 \quad y = 7^x \qquad \Rightarrow \qquad 7^x = 5 \qquad / \log$$

$$x \cdot \log 7 = \log 5$$

$$x = \frac{\log 5}{\log 7}$$

$$y = 1 \quad y = 7^x \qquad \Rightarrow \qquad 7^x = 1$$

$$7^x = 7^0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0$$

Úloha má dvě řešení

$$x_1 = \frac{\log 5}{\log 7} \qquad a \qquad x_2 = 0$$

Příklady

U příkladů budeme používat některé vzorce a úpravy u mocnin.

Pro jistotu je přepíšu i zde, ať je máte po ruce:

- $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $a^m / a^n = a^{(m-n)}$
- $(a^n)^2 = a^{2n}$

První příklad: Spočítejte následující exponenciální rovnici:

$2^{3x-4} = 8^{2x+1}$.

Na první pohled vidíme, že se základy na obou stranách nerovnají. Smutné. Ale na druhý pohled již jistě uvidíme úpravu, jakou můžeme provést, abychom ty stejné základy dostali. Místo osmičky budeme zkrátka počítat s 2^3, což se rovná osmi. Použitím vzorců, které jsem uvedl výše, konkrétně toho posledního, dostáváme:

$2^{3x-4} = 8^{2x+1}$ */aplikujeme poslední vzorec*

$2^{3x-4} = 2^{3\cdot(2x+1)}$ */roznásobíme exponent*

$2^{3x-4} = 2^{6x+3}$

V tuto chvíli se již základy rovnají a můžeme vypočítat jednoduchou lineární rovnici $3x - 4 = 6x + 3$:

$3x - 4 = 6x + 3$

$-3x = 7$

$x = -7/3$

Druhý příklad: Vypočítejte následující exponenciální rovnici:

$5x \cdot 2x = 100x-1$.

Zde jako obvykle vidíme, že základy stejné nejsou. Ale asi všichni tušíme, že nějak převést půjdou. Na levou stranu aplikujeme vzorec na násobení mocnin o stejném exponentu (v předchozím přehledu je to druhý vzoreček) a na pravou stranu aplikujeme stejný vzorec jako před chvílí a z 100^{x-1} uděláme

$10^{2(x-1)}$:

$5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}$ */aplikujeme druhý vzorec*

$10^x = 10^{2(x-1)}$ */roznásobíme exponent*

$10^x = 10^{2x-2}$

A už tam zase máme stejné základy a můžeme počítat klasickou lineární rovnici:

$x = 2x - 2$

$-x = -2$

$x = 2$

Třetí příklad: Vypočítejte exponenciální rovnici:

$3x + 3x+1 = 108$.

Jako vždycky se ke stejnému základu musíme nejprve dopracovat. Zde si pomůžeme vytýkáním a vytkneme z výrazu na levé straně 3^x:

$3^x + 3^{x+1} = 108$ */vytkneme* 3^x

$3^x \cdot (1 + 3^1) = 108$ */sečteme závorku*

$4 \cdot 3^x = 108$ */vydělíme 4*

$3^x = 27$

V tuto chvíli jsme upravili levou stranu a je na čase upravit pravou stranu. Poměrně jasně vidíme, že se jedná o třetí mocninu trojky:

$3^x = 27$

$3^x = 3^3$

No a už zbývá pouze poslední krok – základy se rovnají, takže položíme do rovnosti exponenty:

x=3

Čtvrtý příklad: Spočítejte následující exponenciální rovnici:

$4^{2x} - 6 \cdot 4^{x} + 8 = 0$.

V tomto případě se z exponenciální rovnice pokusíme dostat běžnou kvadratickou rovnici. Nejlépe se k ní dopracujeme za pomoci substituce

$4^{x} = a$:

$4^{2x} - 6 \cdot 4^{x} + 8 = 0$ */provedeme zmíněnou substituci*

$a^{2} - 6a + 8 = 0$

Teď už z toho máme standardní kvadratickou rovnici, takže počítáme diskriminant a kořeny:

$D = 36 - 4 \cdot 8$ */vypočítáme kořeny*

$a_{1,2}=(6 +- 2)/2$

$a_{1} = 4$

$a_{2} = 2$

Tyto dílčí výsledky ještě musíme dosadit zpět do substituce. První výsledek:

$4^{x} = 4$

$x=1$

A druhý výsledek:

$4x=2$

$4x=4½$

$x=½$

použitá literatura:

http://matematika.havrlant.net/exponencialni-rovnice