

2 Fourierovi redovi

2.1 Uvod

U ovom poglavlju ćemo proučavati trigonometrijski razvoj funkcije $f(x)$ definirane na nekom intervalu, kao na primjer $-\pi \leq x \leq \pi$. Trigonometrijski razvoj funkcije je suma oblika

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2.1)$$

pri čemu ta suma može biti konačna ili beskonačna. Zašto bismo uopće prikazivali funkciju na takav način? U sljedećim točkama dat ćemo odgovor na to pitanje.

2.1.1 Povijest

Trigonometrijski razvoji funkcija prvi se put spominju početkom osamnaestog stoljeća kod titranja i sličnih fizikalnih pojava, ali sve do početka devetnaestog stoljeća nisu bili sistematično proučavani.

Godine 1807. francuski fizičar i matematičar Joseph Fourier je tvrdio da se svaka funkcija na ograničenom intervalu može prikazati u obliku trigonometrijskog reda (2.1). Iako su redove sličnih oblika promatrati i njegovi veliki prethodnici poput Bernoullija, D'Alemberta i Eulera, Fourierova metoda je bila toliko napredna da je trebalo proći još petnaest godina dok ne bude priznata od autoriteta njegovog doba, Laplacea, Poissona i Lagrangea. Oni su opravdano zamjerili Fourieru nedostatak matematičke strogosti, jer su neke njegove tvrdnje bile pogrešne.

Fourier je konačno 1822. godine objavio svoj rad pod naslovom *Théorie Analytique de la Chaleur* (Analitička teorija topline) u kojem analizira problem širenja topline, opisan parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i koristi svoj revolucionarni način prikazivanja funkcija kako bi riješio taj problem.

Matematičku strogost Fourierovom radu dali su kasnije Dirichlet i Riemann.

2.1.2 Signalna analiza

Mnogo je praktičnih razloga zbog kojih funkciju prikazujemo u obliku trigonometrijske sume. Ako je $f(t)$ signal (na primjer, električni napon kao funkcija vremena ili zvuk kojeg proizvodi neko glazbalo), onda prikaz funkcije f u obliku trigonometrijske sume opisuje frekvencije pribrojnika u toj sumi. Ovdje ćemo nezavisnu varijablu označavati slovom t (vrijeme) umjesto x . Sinusoida $\sin kt$ ima temeljni period $2\pi/k$ i frekvenciju k , odnosno titra k puta na intervalu $0 \leq t \leq 2\pi$. Na primjer, signal

$$2 \sin t - 50 \sin 3t + 10 \sin 200t$$

sadrži pribrojниke s frekvencijama 1, 3 i 200. S obzirom na veličine koeficijenata koji se nalaze ispred funkcije sinus, pribrojnik s frekvencijom 3 ima puno veći utjecaj od preostalih dvaju pribrojnika. Te pribrojnice ćemo zvati harmonicima.

Jedna od glavnih zadaća signalne analize jest eliminacija visokofrekventnih zvukova. Jedan pristup u rješavanju tog problema sastoји se u prikazu funkcije f u obliku sume

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

tako da visokofrekventni koeficijenti a_k i b_k , za velike k , budu jednaki nuli.

Drugi važan zadatak signalne analize je sažimanje podataka. Tu je cilj poslati signal s najmanjim mogućim brojem podataka. Jedan pristup rješavanja tog problema opet se sastoји od prikaza signala u obliku trigonometrijske sume, te slanja samo onih koeficijenata a_k i b_k koji su veći od zadane tolerancije. Manji koeficijenti imaju praktički zanemariv utjecaj na funkciju, pa se mogu odbaciti. U ovom poglavlju ćemo pokazati da takvih velikih koeficijenata a_k i b_k ima konačno mnogo, odnosno pokazat ćemo da ti koeficijenti teže k nuli kada k ide u beskonačnost.

2.1.3 Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Trigonometrijske sume se također pojavljuju u parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. Iako parcijalne diferencijalne jednadžbe nisu tema ovog kolegija, napraviti ćemo mali odmak te istaknuti još jedan vrlo važan primjer. Promotrimo jednadžbu širenja topline

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) & t > 0, 0 \leq x \leq \pi \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= A & u(\pi, t) = B. \end{aligned}$$

Rješenje $u(x, t)$ ove diferencijalne jednadžbe je temperatura štapa duljine π u točki x te u trenutku t . Pri tome je početna temperatura štapa ($t = 0$) dana funkcijom $f(x)$, a krajevi štapa $x = 0$ i $x = \pi$ drže se redom na konstantnim temperaturama A i B . Riješiti ćemo ovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu u slučaju kada je $A = B = 0$. Kao što ćemo vidjeti u nastavku, ključnu ulogu u rješavanju te jednadžbe imat će razvoj funkcije u trigonometrijski red.

Separacija varijabli. Da bismo riješili jednadžbu širenja topline koristimo metodu separacije varijabli, odnosno rješenje tražimo u obliku

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

gdje je $T(t)$ funkcija vremena $t \geq 0$ i $X(x)$ funkcija položaja x , $0 \leq x \leq \pi$. Uvrstimo li taj oblik rješenja u jednadžbu $u_t = u_{xx}$, dobivamo jednadžbu

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t), \quad \text{odnosno} \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Lijeva strana dobivene diferencijalne jednadžbe ovisi samo o varijabli t , dok desna strana ovisi samo o x . Kako su x i t nezavisne varijable, zaključujemo da obje strane te jednadžbe moraju biti konstantne. Drugim riječima,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c \quad \text{i} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = c,$$

pri čemu je c konstanta. Iz jednadžbe $T' = cT$ slijedi da je $T(t) = Ce^{ct}$, za neku konstantu C . Zbog fizikalnih razloga, konstanta c mora biti negativna jer bi u protivnom funkcija $|T(t)|$ odnosno

temperatura $|u(x, t)|$ težila k beskonačnosti kada varijabla t teži u beskonačnost. Stoga pišemo $c = -\lambda^2 < 0$ i imamo $T(t) = Ce^{-\lambda^2 t}$. Diferencijalna jednadžba za funkciju X postaje

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Prisjetimo se, to je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Početni uvjeti $X(0) = X(\pi) = 0$ slijede iz pretpostavke da je temperatura $u(x, t) = X(x)T(t)$ jednaka nuli za $x = 0$ i $x = \pi$. Rješenje dobivene linearne diferencijalne jednadžbe je

$$X(x) = a \cos(\lambda x) + b \sin(\lambda x).$$

Kako je $X(0) = 0$ dobivamo da je $a = 0$, dok granični uvjet $X(\pi) = 0 = b \sin(\lambda\pi)$ povlači da je λ cijeli broj kojeg ćemo označiti slovom k . Primjetimo da smo isključili slučaj $b = 0$ jer bi u suprotnom funkcija X (pa prema tome i temperatura u) bila jednaka nuli. To bi imalo smisla jedino u slučaju kada bi početna temperatura štapa, $f(x)$, bila jednaka nuli.

Dakle, iz prethodnih razmatranja zaključujemo kako kod promatrane jednadžbe širenja topoline parametar λ mora biti cijeli broj k . Stoga, imamo da je $X_k(x) = b_k \sin kx$ i $T_k(t) = e^{-k^2 t}$, pa je za svaki cijeli k , funkcija

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = b_k e^{-k^2 t} \sin kx$$

rješenje jednadžbe širenja topoline uz početni uvjet $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Jedini zahtjev koji nismo iskoristili je početni uvjet $u(x, 0) = f(x)$, kojeg možemo iskoristiti promatranjem sume rješenja u_k :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) \tag{2.2}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin kx. \tag{2.3}$$

Uočimo kako je dobivena suma također rješenje jednadžbe $u_t = u_{xx}$ koja zadovoljava početne uvjete $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Prema tome, iskoristimo li uvjet $u(x, 0) = f(x)$, relacija (2.3) poprima oblik

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \tag{2.4}$$

Relacijom (2.4) opisan je razvoj funkcije $f(x)$ po sinus funkcijama. U idućim točkama naučit ćemo kako se nalaze ti razvoji, odnosno dobit ćemo eksplicitne formule za koeficijente b_k . Tako ćemo, uvrštavanjem koeficijenata b_k u relaciju (2.3) dobiti rješenje jednadžbe širenja topoline.

Iz prethodnih razmatranja zaključujemo kako su prikazi funkcija pomoću funkcija sinus i kosinus važni, ne samo s povjesnog stanovišta, nego i zbog praktičnih problema koji se pojavljuju u signalnoj analizi te kod parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

2.2 Računanje Fourierovih redova

2.2.1 Interval $-\pi \leq x \leq \pi$

U ovoj točki računamo Fourierove koeficijente a_k i b_k u trigonometrijskom Fourierovom redu

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Trebat ćemo sljedeći rezultat o ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija.

Teorem 2.1. Vrijede sljedeće relacije:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \begin{cases} 1, & n = k \geq 1 \\ 2, & n = k = 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = \begin{cases} 1, & n = k \geq 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = 0, \quad n, k \in \mathbf{Z}. \quad (2.7)$$

Drugim riječima, skup funkcija

$$\left\{ \dots, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\} \quad (2.8)$$

je ortonormirani skup u prostoru $L^2[-\pi, \pi]$.

Dokaz: Dokažimo relaciju (2.5). Primjenom formule za pretvorbu umnoška kosinusa u zbroj imamo da je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+k)x + \cos(n-k)x] dx.$$

Desnu stranu prethodne jednakosti lagano integriramo. Ako je $n \neq k$ imamo da je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+k)x}{n+k} + \frac{\sin(n-k)x}{n-k} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Ako je $n = k \geq 1$, onda je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi.$$

Konačno, ako je $n = k = 0$, relacija (2.5) poprima oblik

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2,$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost (2.6) dokazujemo na analogan način. Nadalje, relacija (2.7) slijedi iz činjenice da je podintegralna funkcija neparna. \square

Iskoristimo sada dobivene relacije ortogonalnosti kako bismo izračunali Fourierove koeficijente. Krenimo od općenitog razvoja

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (2.9)$$

Da bismo našli koeficijent a_n , pomnožimo obje strane relacije (2.9) funkcijom $\cos nx/\pi$ i integrirajmo:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \cos nx dx.$$

Korištenjem relacija ortogonalnosti (2.5) i (2.7), iz prethodne relacije dobivamo da je

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n, \quad n \geq 1.$$

Slično, množenjem relacije (2.9) sa $\sin nx$, i integriranjem, dobivamo

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = b_n, \quad n \geq 1.$$

Na kraju, integriranjem obiju strana relacije (2.9) dobivamo i preostali koeficijent a_0 . Naime, imamo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] dx,$$

pa kako je $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$, za svaki cijeli broj k , slijedi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx = a_0.$$

Prethodna razmatranja sažimamo u sljedećem teoremu.

Teorem 2.2. *Ako je $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, onda je*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \tag{2.10}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \tag{2.11}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \tag{2.12}$$

Koeficijenti a_n i b_n zovu se Fourierovi koeficijenti funkcije f .

Napomena. Bit dokaza Teorema 2.2 jest činjenica da je skup funkcija (2.8) ortonormiran. Iz Teorema 1.19 znamo da su Fourierovi koeficijenti a_n i b_n dobiveni određivanjem ortogonalne projekcije funkcije f na potprostоре razapete funkcijama $\cos nx$ i $\sin nx$ redom. Preciznije, ti koeficijenti su, do na faktor $1/\pi$, L^2 -skalarni produkti funkcije $f(x)$ s funkcijama $\cos nx$ i $\sin nx$, što i tvrdi Teorem 1.19. Dakle, Teorem 2.2 je poseban slučaj Teorema 1.19 primjenjenog na ortonormirani skup funkcija (2.8) u prostoru $L^2[-\pi, \pi]$.

Važno je uočiti kako Teorem 2.2 daje Fourierove koeficijente uz pretpostavku da se funkcija može razviti u Fourierov red. U nastavku ćemo se baviti pitanjem kada se funkcija može razviti u Fourierov red. Napomenimo još kako iz Teorema 2.2 slijedi da su Fourierovi koeficijenti zadane funkcije jedinstveni.

2.2.2 Općeniti intervali

Interval duljine 2π . Kao što smo vidjeli, Teorem 2.2 vrijedi za interval $[-\pi, \pi]$. Pokazat ćemo da taj teorem također vrijedi za bilo koji interval duljine 2π . Za takav zaključak potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 2.3. *Neka je F periodična funkcija s temeljnim periodom 2π te neka je c bilo koji realan broj. Tada vrijedi*

$$\int_{-\pi+c}^{\pi+c} F(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx. \tag{2.13}$$

Dokaz: Uvedemo li supstituciju $x = t - 2\pi$ imamo da je

$$\int_{-\pi}^{-\pi+c} F(x)dx = \int_{\pi}^{\pi+c} F(t - 2\pi)dt = \int_{\pi}^{\pi+c} F(t)dt,$$

zato jer je F periodična funkcija s periodom 2π .

Pretpostavimo da je $c \geq 0$. Tada, korištenjem prethodne jednakosti imamo da je

$$\begin{aligned} \int_{-\pi+c}^{\pi+c} F(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi+c} F(x)dx - \int_{-\pi}^{-\pi+c} F(x)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi+c} F(x)dx - \int_{\pi}^{\pi+c} F(x)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx. \end{aligned}$$

U slučaju kada je $c < 0$, dokaz leme provodi se na sličan način. \square

Primjenimo li Lemu 2.3 na funkcije $F(x) = f(x) \cos nx$ i $F(x) = f(x) \sin nx$, zaključujemo da formule (2.10), (2.11) i (2.12) iz Teorema 2.2, vrijede za bilo koji interval oblika $[-\pi + c, \pi + c]$.

Intervali bilo koje duljine. Funkcije također razvijamo u Fourierov red na bilo kojem simetričnom intervalu $[-a, a]$ duljine $2a$. U tom slučaju, Fourierov red se sastoji od trigonometrijskih funkcija $\cos(n\pi x/a)$ i $\sin(n\pi x/a)$, čiji je temeljni period jednak $\frac{2a}{n}$. Uočimo kako za $a = \pi$ te funkcije postaju $\cos nx$ i $\sin nx$, tj. funkcije koje se pojavljuju u Fourierovom redu na intervalu $[-\pi, \pi]$, što smo promatrati u Teoremu 2.2.

Slično kao i u Lemi 2.3, iskoristit ćemo jednu integralnu jednakost kako bismo Fourierove koeficijente na intervalu $[-a, a]$ izračunali pomoću Fourierovih koeficijenata na intervalu $[-\pi, \pi]$. Preciznije, neka je F funkcija definirana na intervalu $[-\pi, \pi]$. Tada, uz supstituciju $x = t\pi/a$, vrijedi sljedeća jednakost:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \frac{1}{a} \int_{-a}^a F\left(\frac{\pi t}{a}\right) dt.$$

Sada, primjenom te jednakosti možemo izvesti Fourierove koeficijente na intervalu $[-a, a]$ pomoću Teorema 2.2.

Teorem 2.4. *Ako je*

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{a} + b_k \sin \frac{k\pi x}{a} \right)$$

na intervalu $[-a, a]$, onda je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t)dt \\ a_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(t) \cos \frac{n\pi t}{a} dt \\ b_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(t) \sin \frac{n\pi t}{a} dt. \end{aligned}$$

Primjer 2.5. *Neka je*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredimo formalni Fourierov red funkcije f na intervalu $[-2, 2]$.

Rješenje: Koeficijente u Fourierovom razvoju računamo pomoću Teorema 2.4, za $a = 2$. Imamo redom

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^1 1 dt = \frac{1}{4},$$

te za $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi}.$$

Očito je $a_n = 0$ ako je n paran broj. Ako je n neparan broj tj. $n = 2k + 1$, onda je $\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^k$. Dakle,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n = 0 \\ 0, & n = 2k, k \geq 1 \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}, & n = 2k + 1, k \geq 0. \end{cases}$$

Slično, imamo

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) \sin \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{1}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right), \quad n \geq 1,$$

odakle je

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 4k, k \geq 1 \\ \frac{1}{(4k+1)\pi}, & n = 4k + 1, k \geq 0 \\ \frac{1}{(2k+1)\pi}, & n = 4k + 2, k \geq 0 \\ \frac{1}{(4k+3)\pi}, & n = 4k + 3, k \geq 0. \end{cases}$$

Dakle, Fourierov red funkcije f dan je izrazom

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right),$$

pri čemu su koeficijenti a_n i b_n dani gornjim formulama. \square

Fourierov red $F(x)$ u prethodnom primjeru je formalan jer ne znamo da li je on konvergentan ili ne. Nadalje, ukoliko je taj red konvergentan, ne znamo da li on konvergira vrijednostima funkcije $f(x)$ na zadanim intervalu. Takvim pitanjima bavit ćemo se u točkama koje slijede.

2.2.3 Fourierov red parnih i neparnih funkcija

Parne i neparne funkcije.

Definicija 2.6. Funkcija $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je parna ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki $x \in \mathbf{R}$. Funkcija f je neparna ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in \mathbf{R}$.

Prisjetimo se, graf parne funkcije je simetričan s obzirom na y -os. Kvadratna funkcija $f(x) = x^2$, bilo koja parna potencija i funkcija $f(x) = \cos x$ su primjeri parnih funkcija. S druge strane, graf neparne funkcije je centralno simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava. Na primjer, kubna parabola $f(x) = x^3$ (ili bilo koja neparna potencija) i funkcija $f(x) = \sin x$ su neparne funkcije.

Iz definicije parnosti odnosno neparnosti, lagano dobivamo svojstva umnoška dviju funkcija s obzirom na parnost:

$$\begin{aligned} \text{parna} \cdot \text{parna} &= \text{parna} \\ \text{parna} \cdot \text{neparna} &= \text{neparna} \\ \text{neparna} \cdot \text{neparna} &= \text{parna}. \end{aligned}$$

Na primjer, ako je f parna funkcija, a g neparna, onda je $g(-x)f(-x) = -g(x)f(x)$, pa je fg neparna funkcija.

Još jedno važno svojstvo parnih i neparnih funkcija sadržano je u sljedećoj lemi.

Lema 2.7. *Neka je a nenegativan realan broj.*

- Ako je F parna funkcija, onda je $\int_{-a}^a F(x)dx = 2 \int_0^a F(x)dx$.
- Ako je F neparna funkcija, onda je $\int_{-a}^a F(x)dx = 0$.

Dokaz ove tvrdnje lagano slijedi iz definicija parnosti i neparnosti funkcije te ga prepuštamo čitatelju.

Ukoliko Fourierov red neke funkcije sadrži samo kosinus funkcije, onda je očito ta funkcija parna, zato jer je kosinus parna funkcija. Slično, ako Fourierov red funkcije sadrži samo sinus funkcije, onda je ta funkcija neparna, zato jer je sinus neparna funkcija. Obrat te tvrdnje je također istinit, a sadržan je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.8. *Neka je a nenegativan realan broj.*

- Ako je $f(x)$ parna funkcija, onda njezin Fourierov red na intervalu $[-a, a]$ sadrži samo kosinus funkcije, odnosno

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{a},$$

gdje je

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x)dx \quad i \quad a_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx.$$

- Ako je $f(x)$ neparna funkcija, onda njezin Fourierov red na intervalu $[-a, a]$ sadrži samo sinus funkcije, odnosno

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{a},$$

gdje je

$$b_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx.$$

Dokaz: Ovaj teorem slijedi iz Leme 2.7 i Teorema 2.2. Naime, ako je f parna funkcija, onda je $f(x) \cos(n\pi x/a)$ parna funkcija, pa je integral te funkcije na intervalu $[-a, a]$ jednak dvostrukom integralu funkcije na intervalu $[0, a]$. Nadalje, $f(x) \sin(n\pi x/a)$ je neparna funkcija, pa je njezin integral na intervalu $[-a, a]$ jednak nuli. Slično dokazujemo i tvrdnju za neparnu funkciju f . \square

Parno i neparno proširenje funkcije. Prepostavimo da je funkcija f definirana na intervalu $[0, a]$. Takvu funkciju možemo razviti po kosinus funkcijama, odnosno po sinus funkcijama u ovisnosti o tome promatramo li parno, odnosno neparno proširenje funkcije f . Kako bismo funkciju f razvili po kosinus funkcijama, promatramo njezino parno proširenje

$$f_P(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq a \\ f(-x), & -a \leq x < 0. \end{cases}$$

Očito, f_P je parna funkcija, definirana na intervalu $[-a, a]$. Stoga se jedino kosinus funkcije pojavljuju u njenom Fourierovom razvoju. Dakle,

$$f_P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{a}, \quad -a \leq x \leq a, \quad (2.14)$$

pri čemu su koeficijenti a_k dani u Teoremu 2.8. Nadalje, kako je $f_P(x) = f(x)$ za $0 \leq x \leq a$, integralne formule u Teoremu 2.8 uključuju samo funkciju $f(x)$ (umjesto $f_P(x)$), pa razvoj (2.14) postaje

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a,$$

pri čemu su Fourierovi koeficijenti dani relacijama

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \quad \text{i} \quad a_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx.$$

Slično, da bismo funkciju f razvili po sinus funkcijama, promatramo njezino neparno proširenje

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq a \\ -f(-x), & -a \leq x < 0. \end{cases}$$

Neparna funkcija f_N sadrži samo sinus funkcije u Fourierovom razvoju. Nadalje, kako je $f_N(x) = f(x)$ za $0 \leq x \leq a$, dobivamo razvoj

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a,$$

pri čemu su koeficijenti b_k dani formulom

$$b_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx.$$

U nastavku ćemo na konkretnim primjerima razjasniti ideje koje smo ovdje izložili.

2.2.4 Primjeri

Neka je f funkcija te neka je $F(x)$ njezin Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= a_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned}$$

pri čemu su a_n i b_n Fourierovi koeficijenti funkcije f . Kažemo da Fourierov red *konvergira* ako prethodni limes postoji kada N teži u beskonačnost. Pomoću Teorema 2.2 i 2.4 možemo samo računati Fourierov red zadane funkcije. Za sada još nismo pokazali kada Fourierov red neke funkcije konvergira, odnosno kojoj vrijednosti on konvergira u nekoj točki. U točki 2.3 pokazat ćemo kako uz poprilično blagu pretpostavku o diferencijabilnosti funkcije f vrijedi sljedeće pravilo:

Neka je f periodična funkcija temeljnog perioda 2π .

- Ako je f neprekinuta u točki x , onda njezin Fourierov red $F(x)$ konvergira u točki x te je $F(x) = f(x)$.
- Ako funkcija f ima prekid u točki x , onda $F(x)$ konvergira aritmetičkoj sredini lijevog i desnog limesa funkcije f u točki x , odnosno

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^+} f(t) \right).$$

Uočimo kako druga tvrdnja povlači prvu, zato jer u slučaju neprekinitosti funkcije f u točki x , lijevi i desni limes iznose $f(x)$, pa je u tom slučaju $F(x) = f(x)$.

Stroge iskaze i dokaze navedenih tvrdnji dat ćemo u točki 2.3. Ovdje ćemo promotriti nekoliko primjera kako bismo uvježbali razvoj funkcije u Fourierov red, te kako bi dobili uvid u brzinu konvergencije Fourierovog reda.

Primjer 2.9. Razvijmo u Fourierov red funkciju $f(x) = x$, definiranu na intervalu $-\pi \leq x < \pi$.

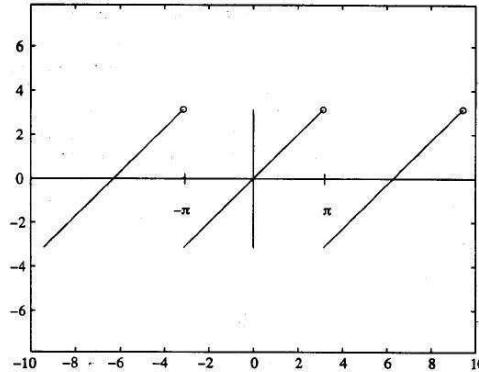
Rješenje: Zadana funkcija je neparna pa su jedino koeficijenti uz sinus funkcije različiti od nule. Stoga, primjenom formule za parcijalnu integraciju dobivamo

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx \\ &= \left(-\frac{2x \cos kx}{k\pi} \right) \Big|_0^\pi + \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos kx \, dx \\ &= -\frac{2}{k} \cos k\pi + \frac{2 \sin kx}{k^2\pi} \Big|_0^\pi = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

Prema tome, Fourierov red funkcije f na intervalu $[-\pi, \pi]$ glasi

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

Zadana funkcija $f(x) = x$ nije periodična. Njezino periodično proširenje \tilde{f} , temeljnog perioda 2π , prikazano je na slici:



Prema iskazanom pravilu, $F(x)$ konvergira ka vrijednosti $\tilde{f}(x)$ u točkama gdje je funkcija \tilde{f} ne-prekinuta. U točkama prekida funkcije \tilde{f} , tj. u točkama $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $F(x)$ konvergira aritmetičkoj sredini lijevog i desnog limesa funkcije \tilde{f} u točki x . Sa slike lagano vidimo da je $F((2k+1)\pi) = 0$, za svaki $k \in \mathbf{Z}$. \square

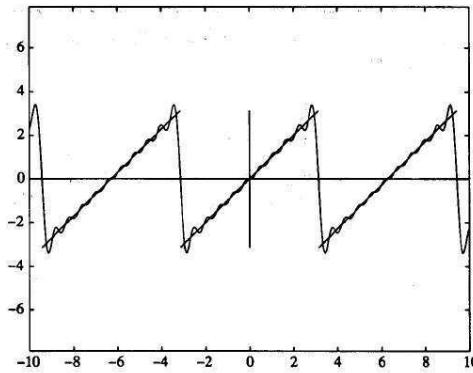
Da bismo vidjeli kojom brzinom parcijalne sume Fourierovog reda konvergiraju vrijednostima funkcije \tilde{f} , skicirat ćemo parcijalne sume

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx,$$

za različite vrijednosti N . Sljedeća slika prikazuje graf funkcije

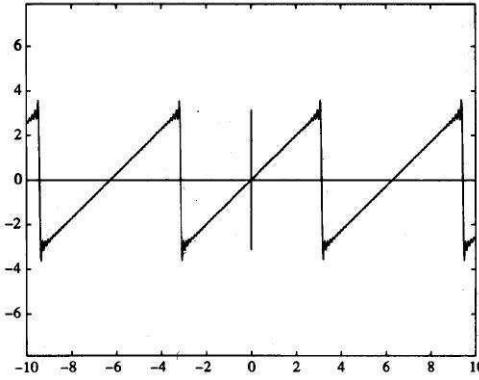
$$S_{10}(x) = \sum_{k=1}^{10} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx,$$

zajedno s grafom funkcije \tilde{f} .

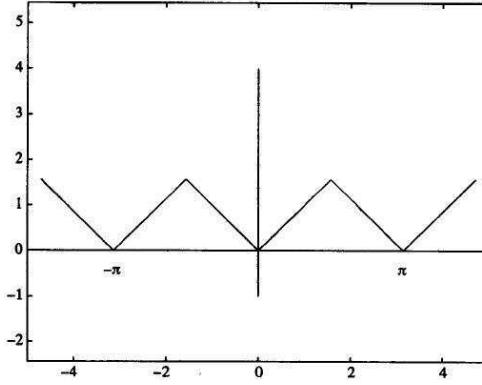


Uočimo prvo kako točnost aproksimacije $\tilde{f}(x)$ pomoći vrijednosti $S_{10}(x)$ postaje sve lošija kako se točka x približava točki prekida funkcije \tilde{f} . Na primjer, u blizini točke $x = \pi$ graf funkcije $S_{10}(x)$ u vrlo kratkom intervalu poprimi sve vrijednosti između $y = \pi$ i $y = -\pi$, što rezultira sporom konvergencijom reda u blizini točke $x = \pi$.

Nadalje, promotrimo točke grafa Fourierovog reda neposredno prije i neposredno poslije točke prekida funkcije $\tilde{f}(x)$ (na primjer, u blizini točke $x = \pi$). Zanimljivo je da je "visina" tog skupa točaka približno ista bez obzira koju parcijalnu sumu Fourierovog reda promatramo. Dakako, "širina" tog skupa točaka se smanjuje kada povećavamo broj članova u parcijalnoj sumi. Taj efekt naziva se *Gibbsov fenomen*. Sljedeća slika ilustrira Gibbsov fenomen za parcijalnu sumu $S_{50}(x)$.



Primjer 2.10. Neka je f "nazubljeni val" prikazan donjom slikom:



Funkcija f je na intervalu $0 \leq x \leq \pi$ dana formulom

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

na intervalu $-\pi \leq x \leq 0$ se proširuje do parne funkcije, a gornja slika predstavlja njezino periodično proširenje temeljnog perioda 2π . Razvijimo funkciju f u Fourierov red.

Rješenje: Kako je zadana funkcija parna, Fourierov red sadrži samo kosinus funkcije. Primjenom Teorema 2.8 dobivamo Fourierove koeficijente a_j , $j \geq 0$. Bez integriranja zaključujemo da je

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

Nadalje, za $k > 0$ dobivamo

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos jx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos jx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - x) \cos jx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos jx dx + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos jx dx - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x \cos jx dx. \end{aligned}$$

Primjenom formule za parcijalnu integraciju, nakon sređivanja dobivamo da je

$$a_j = \frac{4 \cos \frac{j\pi}{2} - 2 \cos j\pi - 2}{j^2 \pi}, \quad j > 0.$$

Nadalje, sređivanjem dobivamo da su koeficijenti a_j različiti od nule samo u slučaju kada je $j = 4k + 2$. Tada je

$$a_{4k+2} = -\frac{2}{(2k+1)^2 \pi}.$$

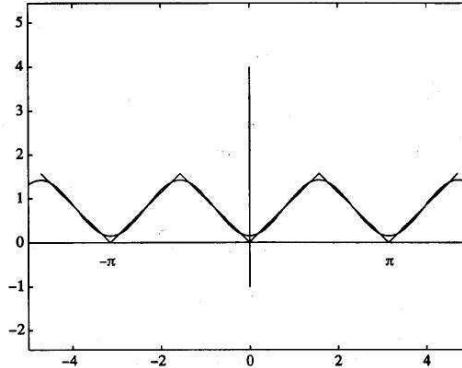
Prema tome, Fourierov red nazubljenog vala f glasi

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((4k+2)x).$$

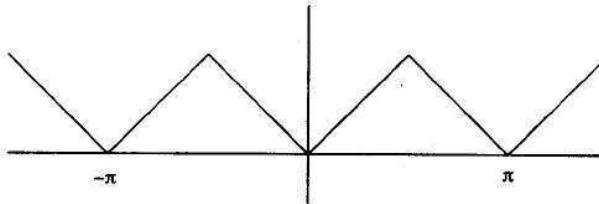
□

Funkcija f iz Primjera 2.10 je neprekinuta i periodična. Prema tome, Fourierov red nazubljenog vala se u svakoj točki x podudara s vrijednosti $f(x)$, u skladu s pravilom istaknutim na početku ove točke. Nadalje, brzina konvergencije je u tom slučaju puno brža nego u Primjeru 2.9. Kako bismo ilustrirali brzinu konvergencije, promotrimo zbroj prva dva člana Fourierovog reda iz prethodnog primjera, tj. nacrtajmo graf funkcije

$$S_2(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2 \cos 2x}{\pi}.$$



Zbroj samo dva člana ovog Fourierovog reda daje mnogo bolju aproksimaciju za nazubljeni val nego čak 1000 članova Fourierovog reda iz Primjera 2.9, za funkciju koja ima prekide. Doista, graf zbroja prvih 10 članova Fourierovog razvoja nazubljenog vala gotovo da se ne razlikuje od pripadajuće funkcije, što vidimo na donjoj slici.



Primjer 2.11. Razvijmo funkciju $f(x) = \sin 3x + \cos 4x$ u Fourierov red.

Rješenje: Uočimo kako je ova funkcija već razvijena u Fourierov red, pa ne moramo računati koeficijente. Naime, zbog jedinstvenosti Fourierovog razvoja, odnosno Fourierovih koeficijenata, zaključujemo da je $b_3 = 1$, $a_4 = 1$ te su svi preostali koeficijenti jednaki nuli. Naravno, računanjem Fourierovih koeficijenata pomoću izvedenih formula dobili bismo isti rezultat. \square

Primjer 2.12. Razvijmo funkciju $f(x) = \sin^2 x$ u Fourierov red.

Rješenje: U ovom primjeru funkcija $f(x) = \sin^2 x$ nije linearna kombinacija sinus i kosinus funkcija, ali primjenom formule

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

direktno dobivamo Fourierov red. Ovdje je $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ te su svi preostali koeficijenti jednaki nuli. \square

Primjer 2.13. Razvijmo funkciju $f(x) = x^2 + 1$, $0 \leq x \leq 1$, u Fourierov red po sinus funkcijama.

Rješenje: Kako tražimo razvoj po sinus funkcijama, zadatu funkciju prvo trebamo proširiti do neparne funkcije

$$f_N(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 1, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

Sada, primjenom Teorema 2.8 računamo Fourierove koeficijente b_k , $k \geq 1$. Imamo da je

$$b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx = 2 \int_0^1 (x^2 + 1) \sin k\pi x \, dx.$$

Uočimo kako formula f_N za neparno proširenje funkcije f nije potrebna za računanje koeficijenata b_k . Nadalje, dvostrukom primjenom formule za parcijalnu integraciju, nakon sredivanja, dobivamo da je

$$b_k = -2 \frac{2k^2\pi^2(-1)^k - 2(-1)^k + 2 - k^2\pi^2}{\pi^3 k^3}.$$

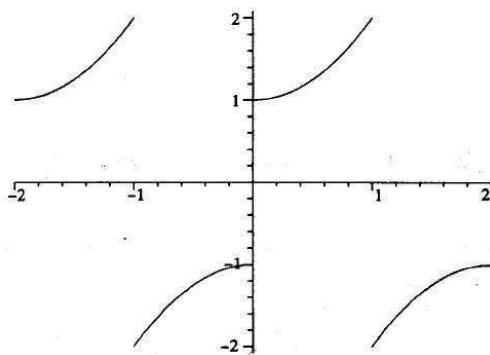
Prema tome, Fourierov red zadane funkcije je

$$F(x) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2\pi^2(-1)^k - 2(-1)^k + 2 - k^2\pi^2}{\pi^3 k^3} \sin k\pi x. \quad (2.15)$$

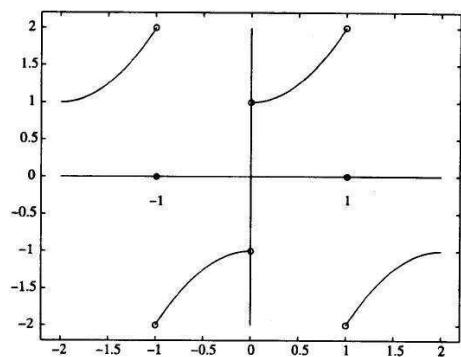
\square

U Primjeru 2.13, funkciju $f(x) = x^2 + 1$, $0 \leq x \leq 1$, prvo smo proširili do neparne funkcije f_N definirane na intervalu $-1 \leq x \leq 1$, a zatim do periodične funkcije \tilde{f}_N definirane na cijelom skupu \mathbf{R} . Uočimo da funkcija \tilde{f}_N ima prekide u svim cijelobrojnim točkama. Nadalje, aritmetička sredina lijevog i desnog limesa funkcije \tilde{f}_N u točkama prekida jednaka je nuli. Stoga, Fourierov red funkcije \tilde{f}_N konvergira k nuli u svim cijelobrojnim točkama. S druge strane, iz formule (2.15) također vidimo da je Fourierov red jednak nuli u svim cijelobrojnim točkama ($\sin k\pi = 0$), što je u skladu s prethodnim zaključkom.

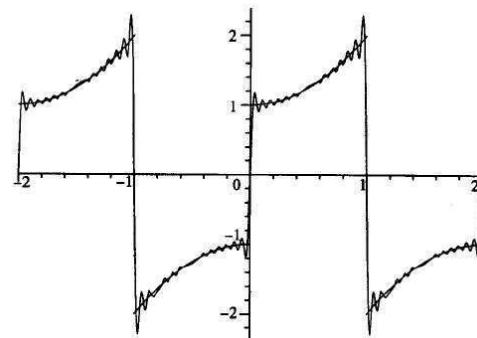
Sljedeće tri slike redom prikazuju grafove neparnog periodičkog proširenja funkcije $f(x) = x^2 + 1$, pripadnog Fourierovog reda i parcijalne sume prvih 30 članova reda.



NEPARNO PERIODIČKO PROŠIRENJE FUNKCIJE $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0, 1]$



FOURIEROV RED FUNKCIJE $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0, 1]$, PO SINUS FUNKCIJAMA



GRAF PARCIJALNE SUME PRVIH 30 ČLANOVA FOURIEROVOG REDA

Primjer 2.14. Riješimo jednadžbu širenja topline

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) & t > 0, 0 \leq x \leq \pi \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= 0 & u(\pi, t) = 0, \end{aligned}$$

gdje je $f(x)$ nazubljeni val definiran formulom

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Rješenje: U točki 2.1.3 smo pokazali da je rješenje zadanog problema dano formulom

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin kx. \quad (2.16)$$

Uvrstimo li $t = 0$ u (2.16), iz početnog uvjeta dobivamo da je

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Dakle, koeficijenti b_k moraju biti Fourierovi koeficijenti razvoja funkcije $f(x)$ po sinus funkcijama, koji su po Teoremu 2.8 dani formulom

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt dt.$$

Sada, uvrštavanjem funkcije f u formulu za b_k , te primjenom formule za parcijalnu integraciju dobivamo da je

$$b_k = \begin{cases} 0, & k = 2j, j \geq 1 \\ \frac{4(-1)^j}{(2j+1)^2 \pi}, & k = 2j+1, j \geq 0. \end{cases}$$

Konačno, uvrštavanjem dobivenih koeficijenata u relaciju (2.16), dobivamo rješenje zadanog problema širenja topline:

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \sin((2j+1)x) e^{-(2j+1)^2 t}.$$

□

Napomena: Ako u prethodnom problemu širenja topline štap ima duljinu a umjesto π , tj. ako je $0 \leq x \leq a$, onda je rješenje takve parcijalne diferencijalne jednadžbe dano formulom

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin \frac{k\pi x}{a}.$$

2.2.5 Kompleksni oblik Fourierovog reda

Često je zgodnije Fourierov red funkcije izraziti pomoću kompleksnih eksponencijalnih funkcija e^{inx} , $n \in \mathbf{Z}$.

Definicija 2.15. Neka je $t \in \mathbf{R}$. Kompleksna eksponencijalna funkcija definirana je izrazom

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

gdje je $i = \sqrt{-1}$.

Ta je definicija motivirana Taylorovim razvojem funkcije e^x oko nule. Naime, uvrstimo li $x = it$ u Taylorov razvoj

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

dobivamo

$$e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \dots.$$

Razdvajanjem realnog i imaginarnog dijela prethodnog razvoja dobivamo da je

$$e^{it} = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) + i \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) = \cos t + i \sin t,$$

gdje smo iskoristili poznate Taylorove razvoje funkcija sinus i kosinus oko nule.

Sljedeća lema opisuje račun s definiranom kompleksnom eksponencijalnom funkcijom. Dokazi tih svojstava slijede iz Definicije 2.15 i nekih osnovnih trigonometrijskih identiteta, te ih prepuštamo čitatelju.

Lema 2.16. Neka su t i s bilo koji realni brojevi. Tada je

- $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$

- $|e^{it}| = 1$

- $\overline{e^{it}} = e^{-it}$

- $e^{it} e^{is} = e^{i(t+s)}$

- $\frac{e^{it}}{e^{is}} = e^{i(t-s)}$

- $\frac{d}{dt} \{e^{it}\} = ie^{it}.$

Sljedeći teorem daje kompleksnu ortonormiranu bazu u prostoru $L^2[-\pi, \pi]$.

Theorem 2.17. Skup funkcija

$$\left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}; n \in \mathbf{Z} \right\}$$

je ortonormiran u prostoru $L^2[-\pi, \pi]$.

Dokaz: Pokazat ćemo da je

$$\frac{1}{2\pi} \langle e^{int}, e^{imt} \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Naime, primjenom trećeg, četvrtog i šestog svojstva iz prethodne leme imamo redom

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt \\ &= \left. \frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \quad \text{za } n \neq m. \end{aligned}$$

Ako je $m = n$, onda je $e^{int} \overline{e^{int}} = 1$, pa je $\langle e^{int}, e^{int} \rangle = 2\pi$, čime je dokaz završen. \square

Sada, kombiniranjem Teorema 1.19 i 2.17 dobivamo kompleksni oblik Fourierovog reda.

Teorem 2.18. Ako je $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int}$ na intervalu $-\pi \leq t \leq \pi$, onda je

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Primjer 2.19. Odredimo kompleksni Fourierov red funkcije

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ -1, & -\pi \leq t < 0. \end{cases}$$

Rješenje: Laganim računom imamo da je

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-int} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-int} dt \\ &= -\frac{i(1 - \cos n\pi)}{n\pi}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\alpha_n = \begin{cases} -\frac{2i}{n\pi}, & n = 2k + 1, k \in \mathbf{Z} \\ 0, & n = 2k, k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

pa je Fourierov red funkcije f jednak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int} = -\frac{2i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{i(2k+1)t}.$$

\square

Kompleksni Fourierov red također možemo promatrati na intervalima bilo koje duljine.

Teorem 2.20. Skup funkcija

$$\left\{ \frac{e^{in\pi t/a}}{\sqrt{2a}}; n \in \mathbf{Z} \right\}$$

je ortonormiran u prostoru $L^2[-a, a]$. Nadalje, ako je $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\pi t/a}$, onda je

$$\alpha_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) e^{-in\pi t/a} dt.$$

Veza između realnog i kompleksnog Fourierovog reda. Ako je f realna funkcija, onda se realni oblik njezinog Fourierovog reda može izvesti iz kompleksnog Fourierovog reda i obrnuto. Zbog jednostavnosti promatramo interval $-\pi \leq t \leq \pi$, iako sljedeća razmatranja vrijede za intervale bilo koje duljine. Razdvojimo, ponajprije, u kompleksnom Fourierovom redu pozitivne i negativne članove:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_n e^{int} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int}. \quad (2.17)$$

Pri tome je

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Ako je f realna funkcija, onda je

$$\alpha_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt} = \overline{\alpha_n}.$$

Prema tome, relacija (2.17) poprima oblik

$$f(t) = \alpha_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int} \right) + \left(\overline{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int}} \right),$$

odnosno,

$$f(t) = \alpha_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int} \right), \quad (2.18)$$

zato jer je $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$.

Pogledajmo sada kakva je veza između kompleksnih koeficijenata α_n i realnih koeficijenata a_n, b_n , definiranih u Teoremu 2.2. Očito je

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = a_0.$$

Nadalje, ako je $n \geq 1$, onda je

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos nt - i \sin nt) dt = \frac{1}{2} (a_n - ib_n).$$

Konačno, iz jednakosti (2.18) dobivamo

$$\begin{aligned} f(t) &= \alpha_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int} \right) \\ &= \alpha_0 + \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) (\cos nt + i \sin nt) \right) \\ &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \end{aligned}$$

što predstavlja realni oblik Fourierovog reda funkcije f . Naravno, izvedene operacije također opisuju kako se iz realnog Fourierovog reda dobiva kompleksni oblik reda.