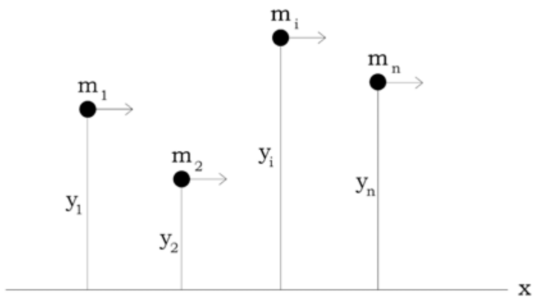
2. GEOMETRIA DELLE MASSE

MOMENTO STATICO (O DEL PRIMO ORDINE)

Sistemi discreti

Dato in un piano, un sistema di punti in cui si pensano concentrate delle masse e definite le distanze di queste da una generica retta *x* del piano, si definisce *momento statico* del sistema di masse rispetto alla retta la somma dei prodotti delle masse per le relative distanze.

$$S_x = \sum_i m_i \cdot y_i \,, \quad \text{con } i=1\ldots n$$



Il momento ottenuto dalla somma dei momenti delle singole masse è uguale al momento che si ottiene concentrando le masse nel baricentro (teorema di Varignon).

momento singole forze $S_x = \sum_i m_i \cdot y_i$

momento risultante $S_x = y_G \cdot \sum_i m_i$

Il momento risultante consente di ricavare la distanza y_G del baricentro dalla retta *x*.

$$y_G = \frac{S_x}{\sum_i m_i}$$

Dall'espressione della distanza y_G si osserva che se l'asse *x* è baricentrico, il momento statico è nullo; viceversa se il momento rispetto ad un asse è nullo, questo è baricentrico. Questa proprietà risulta utile per determinare la posizione del baricentro di un sistema.

Sistemi continui

Si può estendere quanto detto per i sistemi discreti anche ai sistemi continui, considerando le masse distribuite su una superficie. In tal caso, esprimendo la massa come $m = \mu \cdot dA$ dove μ è la densità di massa per unità di area, si ha:

$$S_x = \int_A y \cdot \mu dA \Rightarrow y_G = \frac{\int_A y\mu dA}{\int_A \mu dA}$$

Assumendo la densità $\mu = 1$, il sistema di masse elementari si riduce ad un sistema di aree (geometria delle aree).

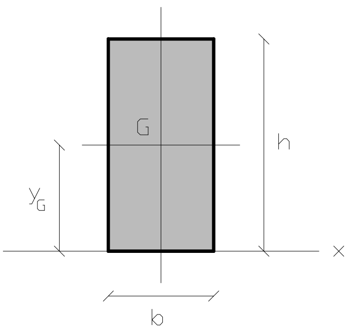
$$S_x = \int_A y dA \Rightarrow y_G = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{\int_A y dA}{A}$$

Unità di misura: $[S_x] = [m^3]$, $[y_G] = [m]$

BARICENTRO

Data una sezione di forma generica, il baricentro si può determinare decomponendo l'area totale in aree di geometrie elementari aventi baricentri noti. Il momento statico dell'intera sezione, che diviso per l'area consente di trovare il baricentro, si ottiene come somma o differenza dei momenti statici delle aree in cui è stata divisa la sezione.

√***Esempio 2.1:*** *Baricentro di una sezione rettangolare.*



$$S_x = (b \cdot h) \cdot \frac{h}{2}$$

$$y_G = \frac{b \cdot h^2}{2 \cdot b \cdot h} = \frac{h}{2}$$

Considerando che il momento statico rispetto al baricentro è nullo, si esprime la condizione $S_G = 0$ nella sola incognita y_G.

$$[b \cdot (h - y_G)] \cdot \frac{h - y_G}{2} - [b \cdot y_G] \cdot \frac{y_G}{2} = 0$$

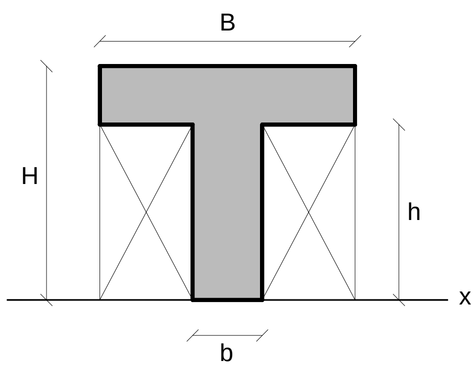
$$\frac{b}{2}\left[(h - y_G)^2 - y_G^2\right] = 0$$

$$h^2 + y_G^2 - 2hy_G - y_G^2 = 0 \qquad \text{da cui} \quad y_G = \frac{h}{2}$$

√ ***Esempio 2.2*** *Baricentro di una sezione a T.*

In questo caso è possibile:

a) *fare la somma dei momenti statici dell'ala e dell'anima e dividere per la somma delle rispettive aree;*
b) *fare riferimento alle differenze tra il rettangolo individuato da B x H e quello individuato da (B – b) x h.*



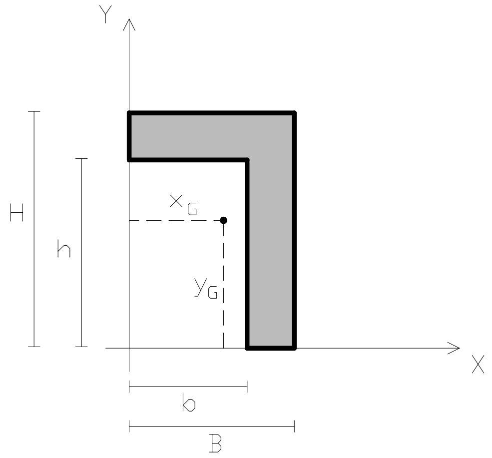
$$S_x = (B \cdot H) \cdot \frac{H}{2} - \left[(B-b) \cdot h\right] \cdot \frac{h}{2}$$

$$A = (B \cdot H) - (B-b) \cdot h$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{1}{2} \frac{(B \cdot H^2) - (B-b) \cdot h^2}{B \cdot H - (B-b) \cdot h}$$

√***Esempio 2.3:*** *Baricentro di una sezione ad L.*

In questo caso essendo la sezione asimmetrica, occorre calcolare le distanze rispetto ad entrambi gli assi x ed y.



$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2 H - b^2 h}{BH - bh}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BH^2 - bh^2}{BH - bh}$$

MOMENTO D'INERZIA (O DEL SECONDO ORDINE)

Sistemi discreti

Si definisce *momento d'inerzia* (assiale) di un sistema piano di masse rispetto ad una retta x del piano, la somma dei prodotti delle masse per i quadrati delle rispettive distanze dalla retta.

$$I_x = \sum_i m_i \cdot y^2{}_i \,, \quad \text{con i=1...n}$$

Si può anche pensare come momento statico dei momenti statici assunti quali nuove masse.

$$I_x = \sum_i (m_i \cdot y_i) \cdot y_i \,, \quad \text{con i=1...n}$$

Sistemi continui

Analogamente a quanto detto per il momento statico, la definizione del momento d'inerzia per i sistemi discreti, si può estendere al caso dei sistemi continui considerando $m = \mu \cdot dA$, ed alla geometria delle aree ponendo $\mu = 1$.

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

Si definisce *raggio d'inerzia* il rapporto:

$$\rho_x^{\,2} = \frac{\int_A y^2 dA}{\int_A dA} = \frac{I_x}{A}$$

Unità di misura: $[\mathrm{I_x}] = [\mathrm{m}^4]$

√***Esempio 2.4*** *Momento d'inerzia sezione rettangolare*

Con riferimento ad una sezione rettangolare (b x h), si valutano:
momento d'inerzia assiale rispetto all'asse x

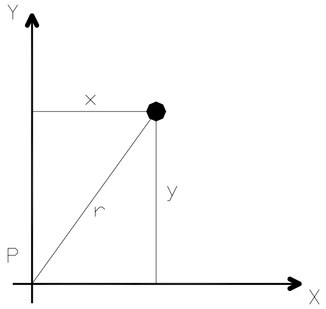
$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b\ dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h \cdot b = \frac{bh^3}{3}$$

momento d'inerzia assiale rispetto all'asse baricentrico

$$I_G = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \cdot dA = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{+h/2} \cdot b = b\left[\frac{h^3}{3\cdot 8} - \left(-\frac{h^3}{3\cdot 8}\right)\right] = \frac{bh^3}{12}$$

MOMENTO D'INERZIA POLARE

Il momento d'inerzia polare rispetto a un punto P è uguale alla somma dei momenti d'inerzia rispetto a due rette ortogonali qualsiasi passanti per P.

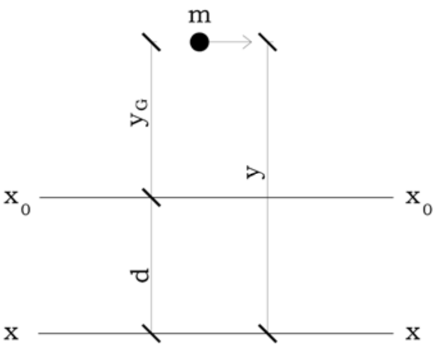


$$r^2 = \left(x^2 + y^2\right)$$
$$I_p = \sum m\, r^2 = \sum m\, x^2 + \sum m\, y^2$$

$$I_p = I_x + I_y$$

Unità di misura: $[\mathrm{I_P}] = [\mathrm{m}^4]$

Teorema del trasporto (o Teorema di Huygens)



Il baricentro G appartiene alla retta x_0.

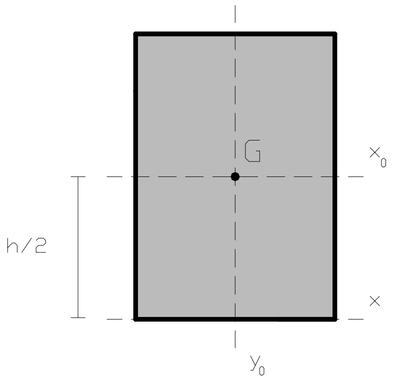
$$I_x = \sum m\, y^2 \qquad\qquad y = y_G + d$$

$$I_x = \sum m\left(y_G + d\right)^2 = y_G{}^2 \sum m + d^2 \sum m + 2d\; y_G \sum m$$

e poichè $y_G \sum m = S_G = 0$ (il momento statico baricentrico è nullo), l'espressione si riduce ai primi due termini

$$I_x = I_G + d^2 A$$

√***Esempio 2.5:*** *Momento d'inerzia polare di una sezione rettangolare.*



$$I_{x_0} = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b\; dy = \frac{bh^3}{12} \qquad\qquad I_{y_0} = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_p = \sum m\left(y^2 + x^2\right) = \sum my^2 + \sum mx^2 = I_{x_0} + I_{y_0}$$

$$I_p = \frac{bh^3}{12} + \frac{b^3 h}{12} = \frac{bh}{12}\left(h^2 + b^2\right)$$

Ipotizzando b=20 cm, h=30 cm , si ha:

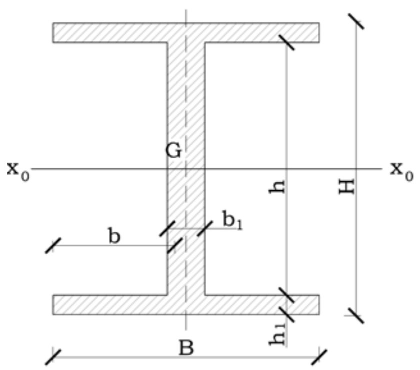
$I_{x_0} = 45000\, cm^4$, $\quad I_{y_0} = 20000\; cm^4$, $\quad I_x = 18000\, cm^4$, $\quad I_p = 65000\; cm^4$

√***Esempio 2.6:*** *Relazione fra il momento d'inerzia baricentro e quello di un asse qualsiasi*

Con riferimento ad una sezione rettangolare, dal teorema del trasporto segue la relazione tra il momento d'inerzia assiale rispetto all'asse x e quello baricentrico x_0:

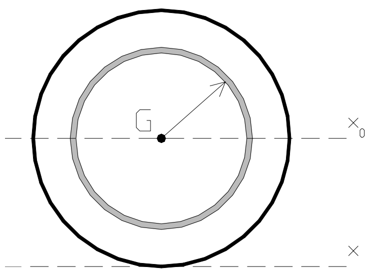
$$I_G = I_x - \frac{h^2}{4} \cdot A = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

√***Esempio 2.7:*** *Momento d'inerzia baricentrico di una sezione a doppio T doppiamente simmetrica.*



$$I_{x_0} \;=\; 2 \cdot \left[\frac{Bh_1^3}{12} + Bh_1\left(\frac{h + h_1}{2}\right)^2\right] + \frac{b_1 h^3}{12} \;=\; \frac{BH^3}{12} - 2\frac{bh^3}{12}$$

√***Esempio 2.9:*** *Momento d'inerzia della sezione circolare*



$$A = \pi R^2 \qquad\qquad S_x = \pi R^3$$

In questo caso è più semplice calcolare il momento polare e da questo il momento d'inerzia.

$$I_G = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{2} R^4 \text{ ,essendo: } I_p = I_x + I_y \text{ e } \quad I_x = I_y$$

il momento rispetto ad un diametro e quindi baricentrico è :

$$I_{x_0} = \frac{I_G}{2} = \frac{\pi}{4} R^4$$

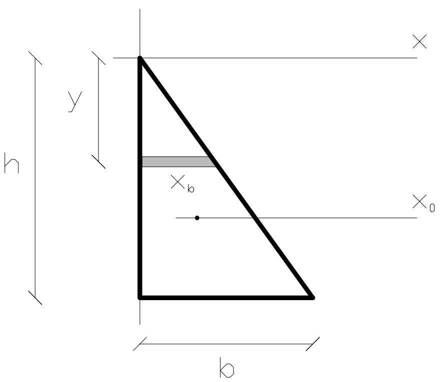
Il momento d'inerzia rispetto ad una tangente e quindi rispetto ad x è

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4} + R^2 \cdot \pi R^2 = \frac{5}{4} \pi R^4$$

Nel caso di una sezione cava (corona circolare)

$$I_G = \frac{\pi}{2}\left(R_{est}^4 - R_{\mathrm{int}}^4\right), \qquad\qquad I_{x_0} = \frac{\pi}{4}\left(R_{est}^4 - R_{\mathrm{int}}^4\right)$$

√***Esempio 2.10:*** *Momento d'inerzia di una sezione triangolare.*

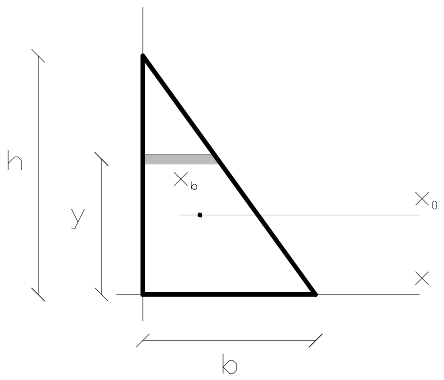


La base delle areole dA nel caso del triangolo varia linearmente con l'altezza

$$x_b : y = b : h \qquad \Rightarrow \qquad x_b = \frac{b \cdot y}{h} \qquad dA = b \cdot \frac{y}{h} \cdot dy$$

momento d'inerzia rispetto all'asse per l'estremità del vertice

$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot \frac{by}{h} dy = \frac{b}{h} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{bh^3}{4}$$



$$x_b : (h-y) = b : h \qquad \Rightarrow \qquad x_b = \frac{b\cdot(h-y)}{h}$$

momento d'inerzia rispetto all'asse tangente alla base

$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{h}(h-y)\,dy = \int_0^h by^2 dy - \int_0^h \frac{b}{h} y^3 dy = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

momento d'inerzia baricentrico

$$I_{x_0} \quad \Rightarrow \quad I_x = I_{x_0} + A\cdot\left(\frac{h}{3}\right)^2$$

$$I_{x_0} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2}\cdot\frac{h^2}{9} = \frac{3-2}{36} bh^3 = \frac{bh^3}{36}$$

Moduli di resistenza

Si definiscono moduli di resistenza di una sezione rispetto a G:

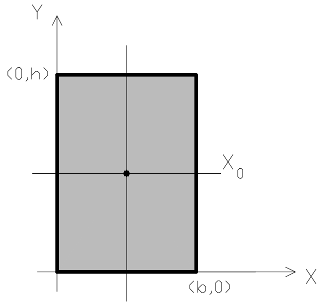
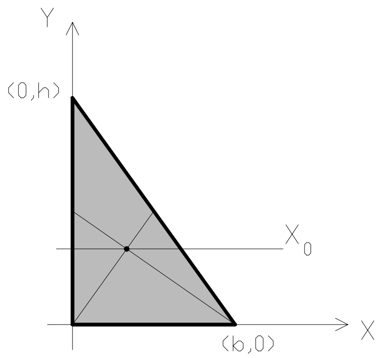
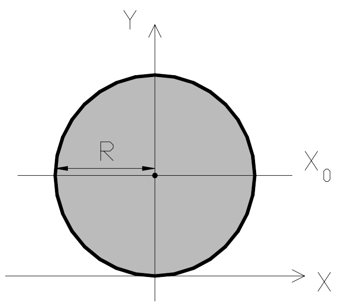
$$W_{\inf} = \frac{I_{x_0}}{y_{G,\inf}} \qquad\qquad W_{\sup} = \frac{I_{x_0}}{y_{G,\sup}}$$

essendo $y_{G,\inf}$ ed $y_{G,\sup}$ le distanze dai lembi estremi della sezione (dai punti più esterni, tangenti al contorno nel caso di forma qualsiasi). Unità di misura: $W_{\sup/\inf}\left[m^3\right]$

√***Esempio 2.8: Modulo di resistenza di una sezione rettangolare.***

$$W_{\sup} = W_{\inf} = \frac{bh^3}{12}\cdot\frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} \qquad \left[cm^3\right]$$

Proprietà statiche ed inerziali di aree a geometria elementare

	S_{x_0}	S_x	I_{x_0}	I_x
	0	$\frac{bh^2}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^3}{3}$
	0	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^3}{12}$
	0	πR^3	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{5}{4}\pi R^4$