HAW Hamburg

Prof. Dr.-Ing. Ulrich Huber

Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau

Skript Statik

mit Übungsaufgaben und Formelsammlung

(Technische Mechanik I)

begleitend zur Vorlesung „Statik“

im WS 11/12

von Prof. Dr.-Ing. Ulrich Huber

Gliederung der Vorlesung

0 Einführung

Was ist Mechanik?

Wir wissen aus Erfahrung, dass Münchhausen sich nicht am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen kann. Mit Hilfe der Mechanik können wir erklären, warum das so ist. Mechanik leistet aber noch viel mehr: Nach Gustav Kirchhoff (dt. Physiker, 1824-1887) ist die „Mechanik" die **Lehre von den Bewegungen und Verformungen materieller Körper im Zusammenhang mit den Kräften, welche diese hervorrufen**. Die Mechanik ist somit das älteste Teilgebiet der Physik (Archimedes: Hebelgesetze) und somit eine Naturwissenschaft.

Wichtige Mechaniker

Name	Lebensdaten	Wichtigste Arbeiten
Archimedes	287-212 v. Chr.	Hebel, Schwerpunkt, Auftrieb
Galilei	1564-1642	Freier Fall, schiefer Wurf
Newton	1643-1727	Bewegungsgesetze
Euler	1707-1783	Analytische Mechanik
D'Alembert	1717-1783	Analytische Mechanik
Lagrange	1736-1813	Analytische Mechanik

Was ist „Technische Mechanik?"

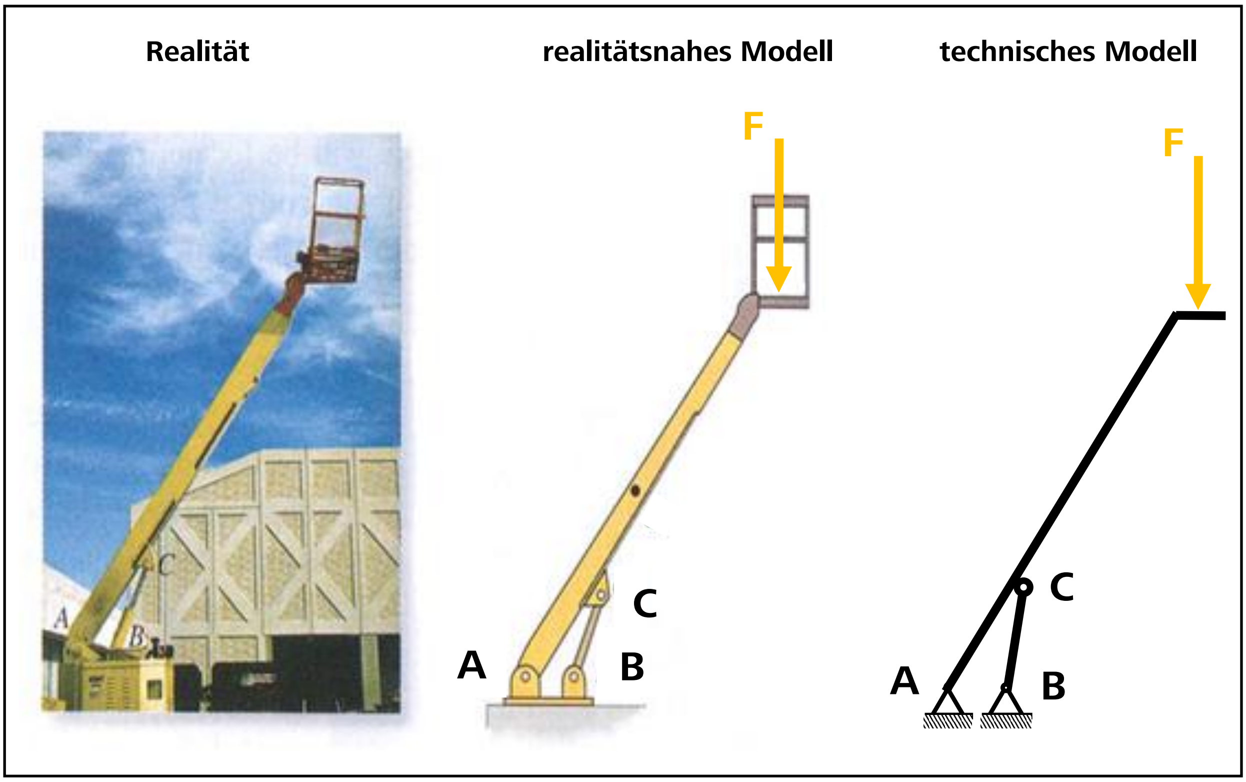
Analytische (physikalische) Mechanik	Technische Mechanik
Es wird vom Besonderen/Beispiel auf das Allgemeine geschlossen. Damit werden allgemeine Gesetzmäßigkeiten gefunden, das Detailproblem ist dabei untergeordnet	Die Technische Mechanik beschäftigt sich mit der Lösung spezieller technischer Probleme.

Welche Aufgaben hat die technische Mechanik?

- Bereitstellen von Methoden zur **Analyse technischer Systeme**
- Entwicklung von **mechanischen Ersatzmodellen** mit Hilfe vereinfachender Annahmen. Dabei muss auch die hinreichende Übereinstimmung von Modell und realem System überprüft werden.
- Berechnung von **Bewegungen, Beanspruchungen und Verformungen**

Beispiel

Mechanische Ersatzmodelle



Quelle: Russell C. Hibbeler: Technische Mechanik 1

Welche Aussagen liefert die Technische Mechanik?

- Die gewünschte Funktion eines Bauteils ist gewährleistet
- Es besteht eine ausreichende Sicherheit gegen Versagen (Bruch) von Bauteilen
- Das Bauteil verformt sich nicht unzulässig stark

Warum ist die Mechanik für den Ingenieur so wichtig?

Mechanik ist eines der wichtigsten Grundlagenfächer für den Ingenieur. Die Grundlagen aus den ersten Semestern werden in vielen weiteren Fächern wie …

… Maschinenelemente
… Festigkeit im Leichtbau
… Finite Elemente
… Leichtbaulabor
… Strukturkonstruktion
… Fahrwerks- und Antriebstechnik
… Faserverbundtechnologie

unbedingt benötigt. Auch in der späteren Berufspraxis ist Mechanik ein wesentlicher Baustein der Tätigkeit als Ingenieur.

Ergebnisse aus einer Berufspraxis ohne Mechanik-Kenntnisse:


Wie ist die Mechanik eingeteilt?

a) Nach der Grundaufgabe

Mechanik	Kinematik		→ Räuml. und zeitl. Ablauf von Bewegungen
	Dynamik	Statik	→ Kräfte im Gleichgewicht
		Kinetik	→ Kräfte und Bewegungen

Anmerkung: Im industriellen bzw. internationalen Sprachgebrauch wird die Kinetik i.A. als Dynamik (engl.: dynamics) bezeichnet. Damit entsteht eine Dreigliederung in Kinematik, Statik und Dynamik (eigentl. aber Kinetik)

b) Nach den Körpereigenschaften

Festkörper-Mechanik	Stereo-Mechanik	starre Körper	
	Elasto-Mechanik	elastische Körper	Kontinuums-Mechanik
	Plasto-Mechanik	plastische Körper	Kontinuums-Mechanik
Fluid-Mechanik	Hydro-Mechanik	flüssige Körper	Kontinuums-Mechanik
	Aero-Mechanik	gasförmige Körper	Kontinuums-Mechanik

Wie ist die Vorlesung „Technische Mechanik“ gegliedert?

TM I: Statik starrer Körper

TM II: Statik elastischer Körper (Festigkeitslehre)

TM III: Kinematik, Kinetik starrer Körper, Einführung in die Schwingungslehre

Was verbirgt sich hinter dem Begriff „Statik“ (Technische Mechanik I)?

Definition und Aufgabe der Statik

Als Statik bezeichnet man die Lehre von den **Kräften** an (materiellen) Körpern, dich sich im **Gleichgewicht** befinden. Die Statik untersucht die Bedingungen, unter denen sich der Bewegungszustand eines Körpers nicht ändert.

Die Statik liefert die Methoden zur Ermittlung von **Lagerkräften** und **–momenten**, sowie **inneren Kräften und Momenten**, die in der Festigkeitslehre, z.B. zur Bauteildimensionierung benötigt werden.

1 Grundlagen

1.1 Kraftbegriff und Vektordarstellung von Kräften

Was ist eine Kraft?

Welche Erfahrung haben Sie mit Kräften?

Galilei hat den Kraftbegriff folgendermaßen definiert:

> Physikalische Größen, die in ihrer **Wirkung Gewichtskräften** (Schwerkräften) gleich sind, heißen **Kräfte**.

Die Wirkung besteht dabei in **den Änderungen des Bewegungszustandes** und/oder der **Form** des Körpers.

Mathematisch gesehen ist die Kraft eine **vektorielle Größe.**

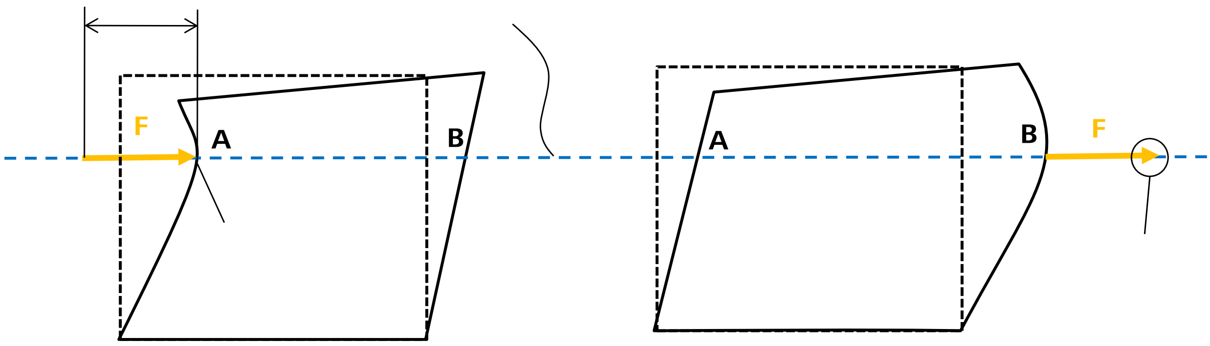
Drei Bestimmungsstücke der vektoriellen Größe (Stereostatik: Statik der starren Körper)

1.

2.

3.

In der Elastostatik (verformbare Körper) wird zusätzlich der Angriffspunkt der Kraft benötigt (Man spricht dann von gebundenen Vektoren):



Die **Verformung** des Körpers ist also abhängig vom **Angriffspunkt der Kraft**.

In der Stereostatik werden die Körper aber **idealisiert**: Es werden die sog. **„starren Körper"** verwendet. Ein starrer Körper ist **nicht deformierbar** (bzw. die Verformungen sind vernachlässigbar klein).

Folgen dieser Idealisierung „Starrer Körper":

1.

2.

Schreibweise für Vektoren

Auf den Formelbuchstaben der physikalischen Größe wird ein kleiner Pfeil gesetzt.

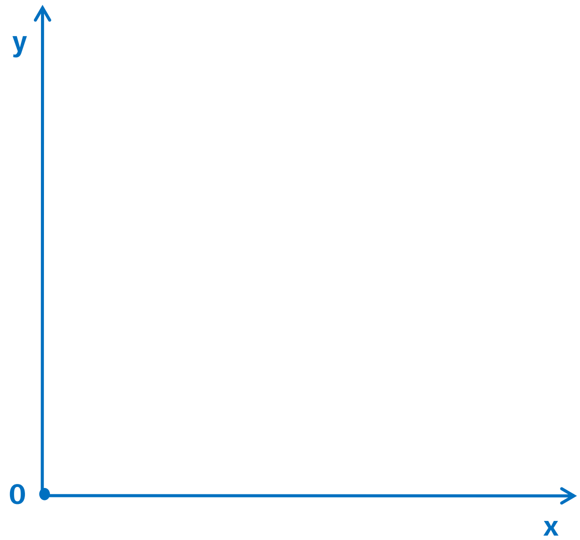
Beispiele

Kraftvektor: Geschwindigkeitsvektor: Momentenvektor:

Vektoren können im kartesischen Koordinatensystem (KOS) dargestellt werden

Beispiel

Der Kraftvektor im kartesischen KOS



1.2. Messung und maßstäbliche Darstellung von Kräften

Die numerische Festlegung (Zahlenwert) des Kraftbetrages (skalarer Wert) erfolgt durch **Messung** (d.h. Vergleich mit einer Maßeinheit), z.B. mittels Federwaage (kraftproportionale Verlängerung) oder Balkenwage (Vergleich mit bekannter Gewichtskraft).

Der Betrag der Kraft (und jeder anderen physikalischen Größe) besteht aus **Maßzahl** und **Einheit**

Beispiel

F = Maßzahl: Einheit:

Als Maßsystem wird das **Internationale System** (SI = Système International) verwendet. Es hat in der Technik **Gesetzeskraft**.

Es legt die folgenden Grundgrößen fest:

Grundgröße	**Länge**	**Zeit**	**Masse**
Einheit	Meter (m)	Sekunde (s)	Kilogramm (kg)

Diese Größen sind für die Stereostatik ausreichend. Die weiteren Grundgrößen sind:

Grundgröße	**Temperatur**	**elektr. Strom**	**Lichtstärke**	**Substanzmenge**
Einheit	Kelvin (K)	Ampère (A)	Candela (cd)	Mol (mol)

Von den Grundgrößen **abgeleitete Größen** wie z.B. die Kraft erhalten eine **Dimension** (algebraische Kombination der Grundgrößen) entsprechend ihrer Definition.

Beispiel

Für die Kraft gilt das 2. Newtonsche Gesetz (Bewegungsgesetz, s.a. TM 3)

$\vec{F} =$ Kraft = damit ist die Einheit

Graphische Darstellung von Kräften

Kräfte (oder auch Vektoren allgemein) werden als Pfeil mit definiertem Anfangs- und Endpunkt dargestellt. Die Pfeilspitze gibt den Richtungssinn des Vektors an.

Beispiel

Bei maßstäblicher Darstellung wird ein **Kräftemaßstab** benötigt. Dann gilt:

Beispiel

Die Kraft F = 20 N soll durch $\bar{F} = 5\,\text{cm}$ dargestellt werden. Wie muss der Kräftemaßstab gewählt werden?

Lösung:

Anmerkungen:

1. Übliche Angabe des Maßstabes auch: z.B: $4\,\text{N} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$
2. Maßstabsfragen sind auch bei anderen physikalischen Größen von Interesse, z.B. Länge, Moment, etc.

1.3 Charakterisierung von Kräften

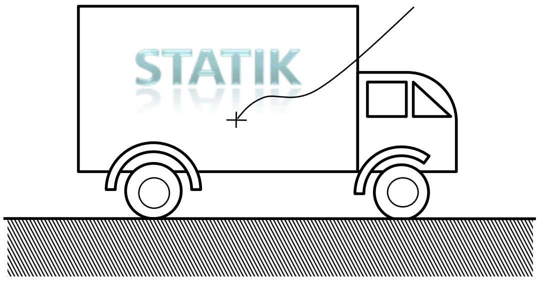
In der Natur vorkommende Kräfte sind immer

- **Volumenkräfte:** räumlich über das Körpervolumen verteilte Kräfte, z.B. Gewichtskraft
- **Flächenkräfte:** über eine Oberfläche verteilte Kräfte, z.B. Luftdruck, Wasserdruck auf Staumauer.

Dieser beiden Kräftearten finden Verwendung in der Mechanik.

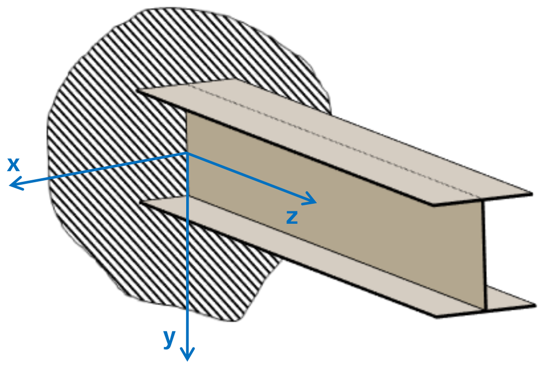
In der Mechanik existieren aber noch weitere, wichtige **Idealisierungen** von Kräften:

- **Punkt- oder Einzelkräfte:** auf einen (mathematischen) Punkt wirkende Kraft, z.B. die Zusammenfassung von Volumen- oder Flächenkräften.



- **Linienkräfte (Streckenlasten):** auf eine (mathematischen) Linie wirkende Kraft, z.B. das Eigengewicht eines Trägers entlang der Trägerlänge. Bei konstantem Querschnitt und konstanter Dichte gilt:

$$q(z) = q_0 = \text{const.} \qquad \text{Einheit: } \left[\frac{N}{m}\right]$$



Andere Einteilungen von Kräften

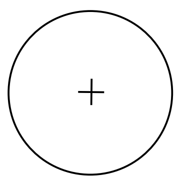
1) Nach ihrer Ursache

In **eingeprägte** Kräfte und **Reaktions**kräfte

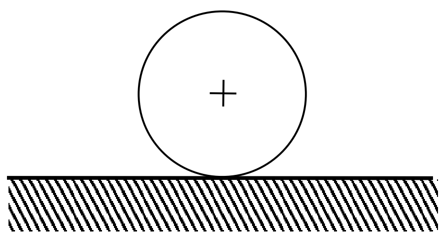
Eingeprägte Kräfte sind physikalisch vorgegebene Kräfte	Reaktionskräfte sind Kräfte, die in Folge von Einschränkungen der Bewegungsfreiheit entstehen (werden durch Freischneiden sichtbar)

Beispiel

1) Fallender Gegenstand



2) Gegenstand am Boden



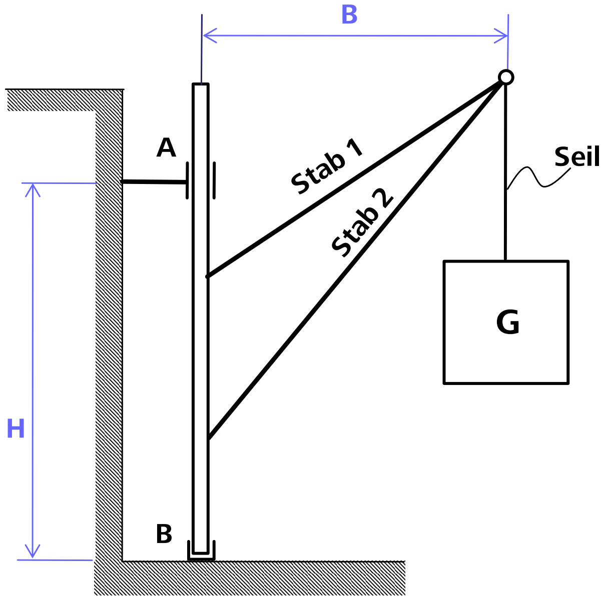
2) Nach Ihrer Lage

In **äußere** Kräfte und **innere** Kräfte (Schnittreaktionen)

Als **äußere** Kräfte werden von außen auf das System wirkende Kräfte, also eingeprägte und Reaktionskräfte, bezeichnet.	Als **innere** Kräfte werden im Inneren des mechanischen Systems wirkende Kräfte, also Schnittreaktionen (beschreiben die Kraftweiterleitung im System), bezeichnet

Beispiel

Wandkran



Ges.: a) Lagerkräfte in A, B

b) Stabkräfte in Stab 1 und 2, sowie Seilkraft

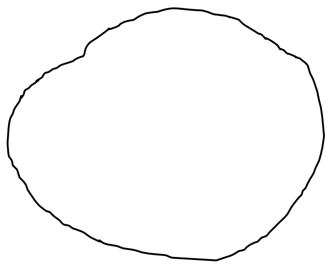
Das Kraneigengewicht wird vernachlässigt.

Weitere wichtige Begriffe:

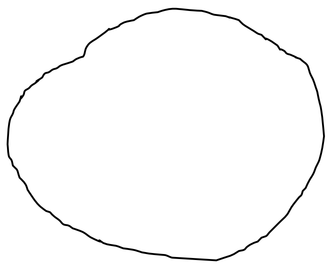
1) **Kräftegruppe**

Mehrere gemeinsam wirkende Einzelkräfte heißen Kräftegruppe. Man unterscheidet:

a) Zentrale Kräftegruppe (ZKG):



b) Allgemeine Kräftegruppen (AKG):



2) **Äquivalenz**

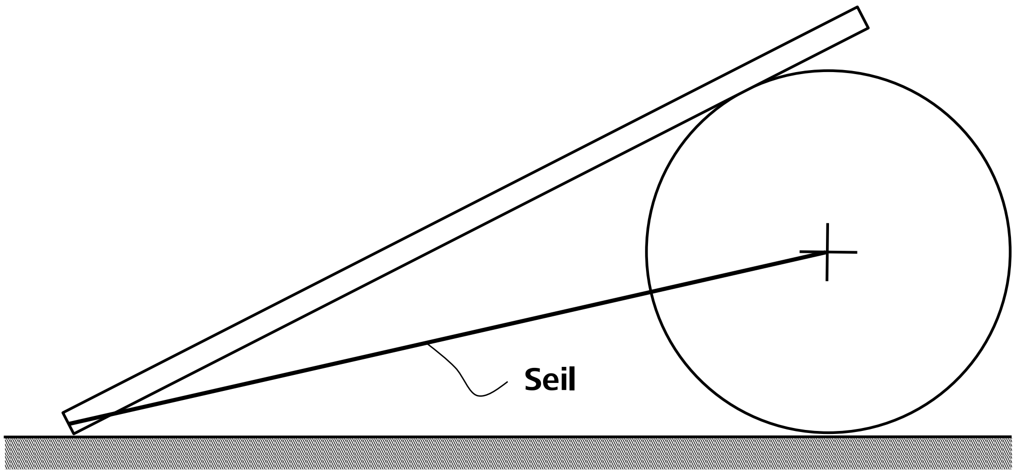
Zwei Kräftegruppen heißen Äquivalent, wenn sie auf einen starren Körper die gleiche Wirkung ausüben (in Ruhe oder Bewegung)

1.4 Das Schnittprinzip

Das Schnittprinzip dient zum **Sichtbarmachen** und **Berechnen** von **Reaktionskräften** (Lagerreaktionen, Zwangskräfte) und **inneren Kräften**.

Das Schnittprinzip ist ein **gedankliches Freischneiden** (Freimachen) eines Körpers von seinen Lagern (Bindungen) oder ein **Zerschneiden** in Teilsysteme. An **allen** Schnittstellen müssen Kräfte eingezeichnet werden, damit sich der entsprechende Körper (bzw. Teilkörper) so verhält wie das ursprüngliche System.

Beispiel



- Homogener Balken, Masse m, Länge l >> Höhe h
- Homogene Walze, Masse M, Durchmesser D
- Seil, Länge l_s

Ges.: a) Freischnitt für die Lagerreaktionen (Kräfte zw. Boden und Walze bzw. Balken)

b) Freischnitt für Seilkraft und Kontaktkraft zwischen Balken und Walze

Regeln zum Freischneiden

1. Jeder Schnitt ist in das Gesamt bzw. Teilsystem ein zu zeichnen.
2. Bei ebenen Problemen ist der Schnitt **immer als geschlossener Linienzug** einzutragen (bei räumlichen Problemen: geschlossene Hülle.)
3. An allen Schnittstellen sind **alle Lagerreaktionen** bzw. **Schnittgrößen** anzutragen, die dem mechanischen Modell zugeordnet sind.
4. Der Schnitt ist möglichst so zu legen, dass in der Ebene **maximal drei** (im Raum sechs) **unbekannte Schnittgrößen** auftreten.

1.5 Grundlegende Lehrsätze der Statik

Die Grundaussagen der Statik bilden vier Grundaussagen, die nicht bewiesen werden können, da sie selbst Ausgangspunkt der theoretischen Überlegungen sind, die aber durch die allgemeine Erfahrung bestätigt werden.

1) Erstes Newtonsches Gesetz

Jeder Körper beharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Wichtig für die Statik:

- Der Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradlinigen Bewegung heißt in der Statik **Gleichgewichtszustand** (GGZ)
- Das Trägheitsgesetz verknüpft den GGZ mit der Abwesenheit von Kräften, d.h. ein Körper ist **im Gleichgewicht** (GG), wenn eine angreifende Kräftegruppe in ihrer **Wirkung einer Nullkraft äquivalent** ist. Dies liefert für den Sonderfall zweier Kräfte den Gleichgewichtssatz.

  Zwei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie

  1.

  2.

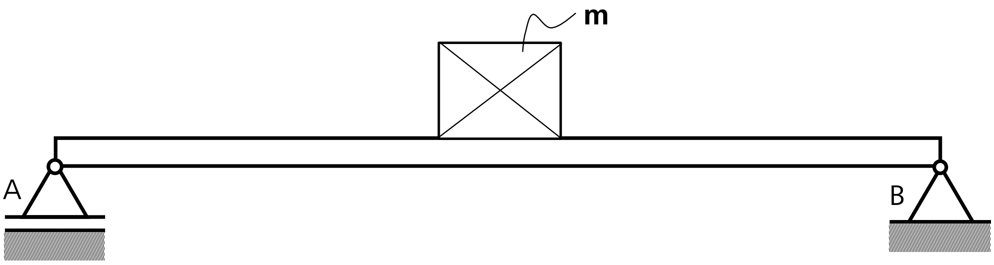
  3.

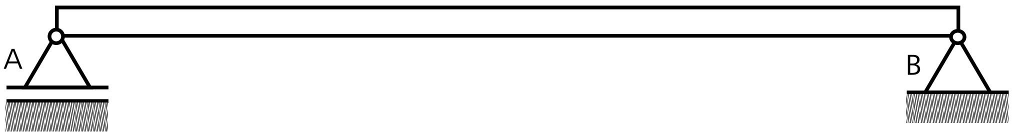
  Beispiel

2) Verschiebungssatz

Die Wirkung einer Einzelkraft auf einen starren Körper ist von der Lage des Angriffs-punktes auf der Wirkungslinie unabhängig. Kräfte am starren Körper sind linienflüchtige Vektoren, d.h. sie dürfen entlang der Wirkungslinie verschoben werden.

Beispiel





ACHTUNG: Parallelverschiebung von Kräften ist **nicht zulässig**!

Beispiel

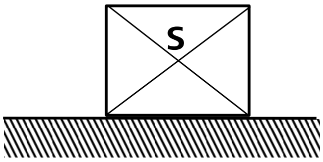
3. Reaktionssatz (Wechselwirkungssatz; drittes Newtonsches Gesetz)

Die Kräfte, die **zwei (!)** Körper **aufeinander** ausüben, sind stets gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen auf der gleichen Wirkungslinie (sind kolinear).

Kurz: **ACTIO EST REACTIO**

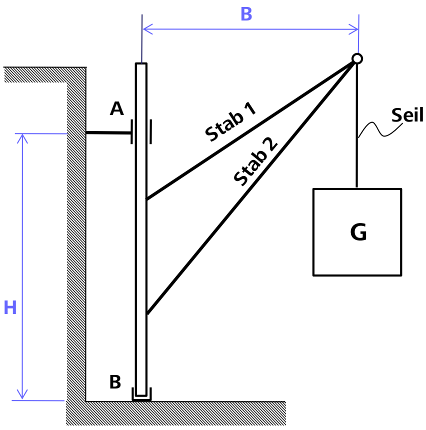
Beispiel

a) Körper auf Unterlage



➔

b) Wandkran (aus 1.3)

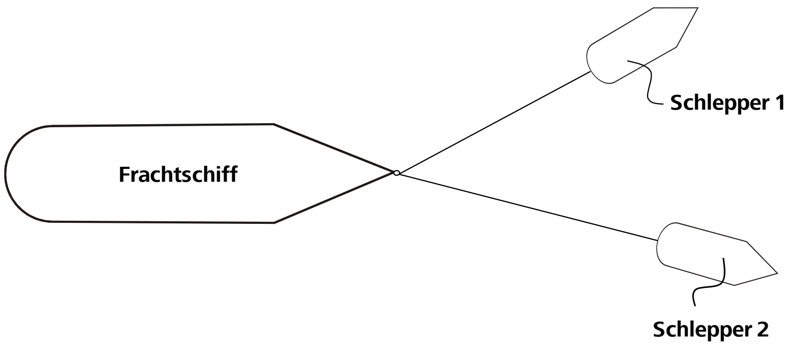


4) Parallelogrammsatz

Zwei Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ mit gemeinsamen Angriffspunkt sind der Resultierenden $\vec{F}$ gleichwertig, die sich aus der Diagonalen des Kräfteparallelogramms ergibt.

Der Parallelogrammsatz beschreibt ein wichtiges Grundproblem der Statik: Die **Zusammensetzung zweier Kräfte** mit **gemeinsamen Angriffspunkt**. Die geometrische Konstruktion entspricht der **Vektoraddition.**

Beispiel



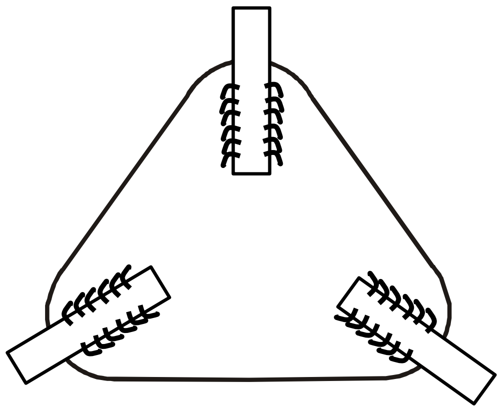
2 Kräfte mit gemeinsamen Angriffspunkt (zentrale Kräftegruppe)

2.1 Übersicht

Kräfte, deren Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden, bezeichnet man als zentrale Kräftegruppe.

Beispiel

(Starres) Knotenblech mit drei Stäben



Es liegt hier kein gemeinsamer konstruktiver Angriffspunkt vor. Liegt dennoch eine zentrale Kräftegruppe vor?

Begründung:

2.2 Zusammensetzung zweier Kräfte, Zerlegung einer Kraft

Grundlage der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften bildet der Parallelogrammsatz (Kap. 1.5).

Erste Grundaufgabe der Statik ist die Bildung der Kräftesumme: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$

2.3 Der Gleichgewichtsbegriff für zwei Kräfte (vgl. 1.5)

Es liegt ein Gleichgewichtszustand (GGZ) vor, wenn die Resultierende (die Vektorsumme) der zwei Kräfte Null ist.

$\vec{F}_1, \vec{F}_2$ liegen auf derselben Wirkungslinie, sind gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

Beispiel

2.4 Ebene zentrale Kräftegruppe (mehr als zwei Kräfte)

2.4.1 Zusammensetzung von Kräften in der Ebene

Voraussetzung

Alle Kräfte liegen in der Zeichenebene.

Aufgabe

n Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots \vec{F}_n$ durch einen Punkt sollen zur gleichwertigen Resultierenden $\vec{F}$ zusammengefasst werden, d.h. es soll eine Reduktion der Kräftegruppe auf die Einzelkraft $\vec{F}$ erfolgen.

Zeichnerische Lösung
Die Kräfte können vektoriell addiert werden. Es erfolgt also eine zeichnerische Zusammensetzung der Kräfte.

Aus Parallelogrammsatz ergibt sich:

Damit folgt:

Summation im Kräfteplan
Von einem Startpunkt 0 werden die Einzelkräfte fortlaufend in gleichem Pfeilsinn angetragen. Der Endpunkt der letzten Kraft wird mit E markiert. Die Kraft vom Startpunkt 0 zum Endpunkt E entspricht der Kräftesumme. Die Reihenfolge der Vektoraddition ist aufgrund des Kommutativgesetzes beliebig.

2.4.2 Zerlegung einer Kraft in zwei Richtungen

Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei Richtungen?

Die Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei Richtungen ist

2.4.3 Berechnung der Kräftesumme durch Zerlegung in kartesischen Koordinaten

Lösungsweg:

1) Definition eines x –y – Koordinatensystems

2) Zerlegung jeder Kraft in

3) Komponentenweise Bildung der Resultierenden

Beispiel

Berechnen Sie die Kräftesumme der folgenden tabellarisch dargestellten Kräfte

i	**F_i [kN]**	**α_i [°]**	**F_{ix} [kN]**	**F_{iy}[kN]**
1	10	40		
2	40	120		
3	60	240		
4	20	340		

Betrag der Kräftesumme:

Winkel der Resultierenden α_R?

Zeichnerische Lösung:

Rechnerische Lösung:

2.4.4 Äquivalenz und Gleichgewicht

Wiederholung „Äquivalenzprinzip“:

Zwei Kräftegruppen heißen **äquivalent**, wenn ____

____

Wiederholung „zentrale Kräftegruppe“ (aus 2.4.1):

Eine zentrale Kräftegruppe kann immer eindeutig durch eine Resultierende ersetzt werden.

Daraus ergibt sich folgende Präzisierung für Äquivalenz:

Zwei zentrale Kräftegruppen sind genau dann äquivalent, wenn ____________________________

____

Wiederholung des Gleichgewichtsbegriffs aus 2.3

Zwei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn ____

____

Allgemein: Eine zentrale Kräftegruppe ist im GG, wenn ____________________________________

____

Damit ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen auch in zeichnerischer Darstellung.

Zeichnerische Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen

Rechnerische Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen (GGBn)

Anmerkung: Mit den Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$ können **höchstens** 2 Unbekannte ermittelt werden!

Damit gilt für die **ebene, zentrale Kräftegruppe:**

2 Unbekannte:

Mehr als 2 Unbekannte:

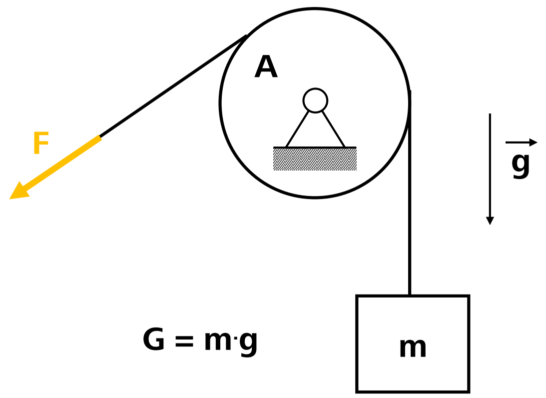
2.5. Beispiele ebener zentraler Kräftegruppen

2.5.1 Idealisierungen technischer Bauteile

a) Seil

b) Stab

c) Seilumlenkrolle



Annahmen:

Gesucht: - Lagerkraft $\vec{A}$

- Seilkraft $\vec{S}$

Lösung:

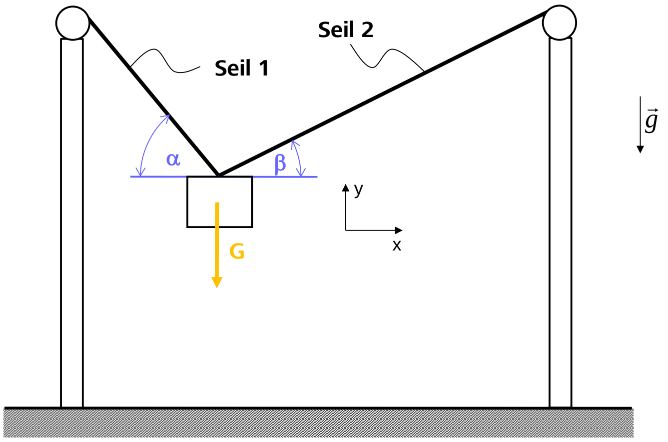
2.5.2 Rechenbeispiele

Beispiel 1

Eine Last $\vec{G}$ (z.B. eine Straßenlampe) hängt an zwei Seilen.

Geg: $\vec{G}$, α, β Zahlenwerte: α = 45°; β = 30°; G = 500 N

Ges: Seilkräfte $\vec{S}_1, \vec{S}_2$



Lösung:

a) zeichnerisch

- Lageplan: Freischnitt der Lampe, damit die inneren Kräfte sichtbar werden
- Kräfteplan (Maßstab m_f): Bestimmung der Kräfte und Winkel durch die GGBn.

Lageplan **Kräfteplan**

Zusammenfassung der zeichnerischen Lösung

Lageplan LP | **Kräfteplan KP (Maßstab m_f)**

1. $\vec{G}$, r_1, r_2 einzeichnen

2. $\overline{G}$ (maßstäblich) einzeichnen

3. r_1, r_2 durch Anfangs und Endpunkt von $\overline{G}$ zeichnen (Parallelverschiebung aus LP) und zum Schnitt bringen.

4. Pfeilspitzen gleichsinnig eintragen so dass $\overline{F}=0$ bzw. 0'=E. Daraus ergeben sich $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ nach Betrag, Richtung und Richtungssinn.

5. Richtungssinn von $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ kontrollieren

b) rechnerisch

1. Lösungsweg: Konsequente Anwendung der Vektorrechnung

Anwendung bei komplexen, räumlichen oder auch ebenen Problemen, bzw. in Computerprogrammen (für dieses Beispiel eigentlich zu aufwendig)

- Freischnitt: x-y-Koordinatensystem im Angriffspunkt bzw. Schnittpunkt der WLn.
- Annahme des Richtungssinnes der Reaktionen $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ gemäß Zugbelastung

- Kraftrichtungen durch Winkel α_1, α_1, α_G festlegen (von positiver x-Achse mathematisch positiv gezählt)

- Kraftvektoren bestimmen

- GGBn komponentenweise auswerten

2. Lösungsweg: Anschauung verwenden

- Freischnitt: x-y-Koordinatensystem im Angriffspunkt bzw. Schnittpunkt der WLn.

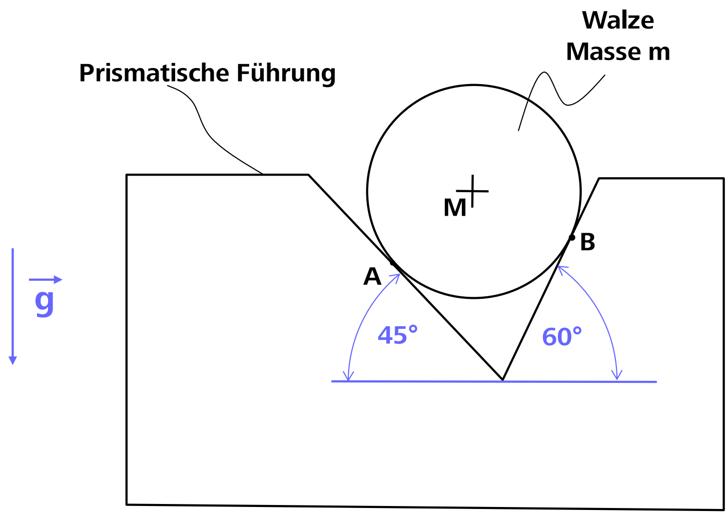
- Annahme des Richtungssinnes der Reaktionen $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ gemäß Zugbelastung

- GGBn in x- und y-Richtung auswerten. Die Vorzeichen und Winkelfunktionen ergeben sich anschaulich aus dem Freischnitt.

- Lösung des Gleichungssystems:

Beispiel 2

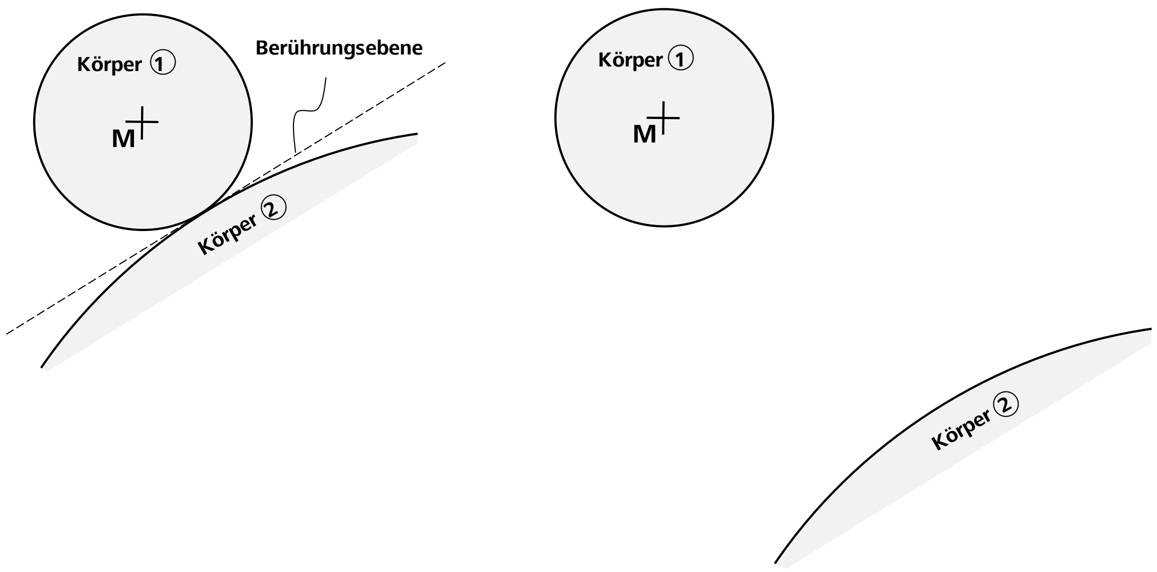
Walze mit Gewicht $\vec{G}$ in prismatischer Führung



Gesucht: Lagerkräfte (Kontaktkräfte) zwischen Walze und Führung (Reibung ist dabei zu vernachlässigen)

Zur Lösung sind zunächst einige Anmerkungen zu Kontakten zwischen Oberflächen erforderlich.

1. Bei der Berührung von zwei Körpern mit gekrümmter Oberfläche (z.B. Kugeln, Zylinder gilt:



2. An reibungsbehaftete Oberflächen gilt

   $\vec{K}$: Kontaktkraft, ist die Gesamtkraft, die zwischen den Körpern wirkt.
   $\vec{N}$: Normalkraft wirkt senkrecht zur Berührungsebene.
   $\vec{T}$: Tangentialkraft (Reib- oder Haftkraft) wirkt in der Berührungsebene.

   Es gilt:

   Bei glatter (reibungsfreier, nicht haftender) Oberfläche gilt also:

3. Berühren sich die Körper lediglich, so können sie nur gegenseitig drücken und nicht ziehen, d.h. $\vec{N}$ ist zum Inneren des Körpers, auf den sie wirkt, gerichtet.

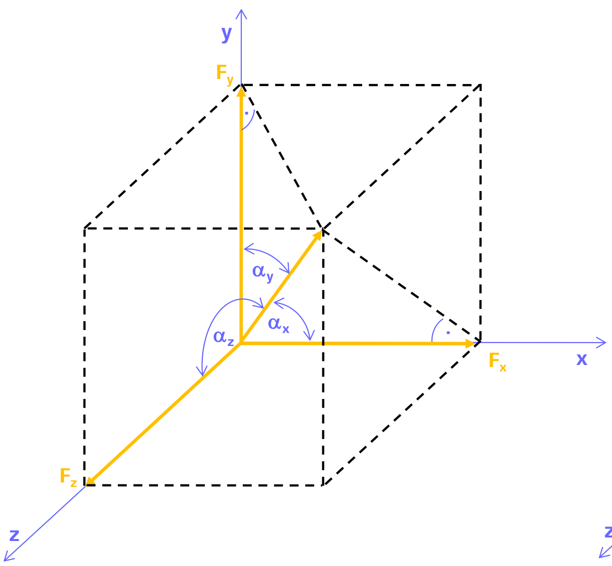
2.5 Räumliche zentrale Kräftegruppen

Mit der Komponentendarstellung einer Kraft $\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y + F_z \cdot \vec{e}_z$ in 3 Dimensionen (kartesisches Koordinatensystem) und den Komponenten

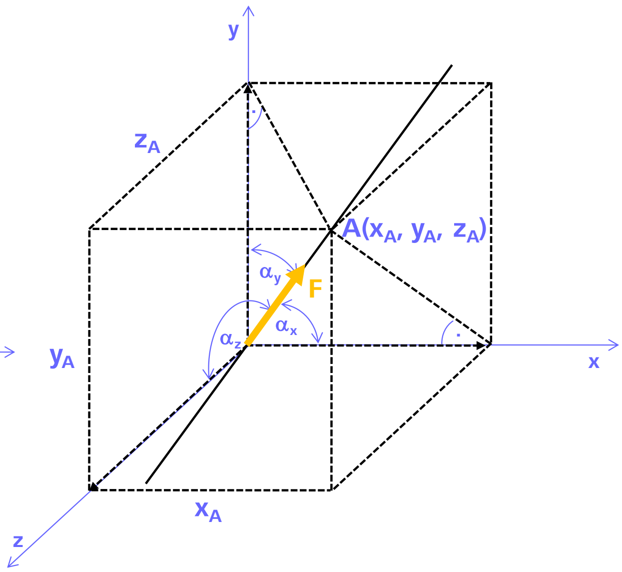
$$F_x = F \cos \alpha_x \qquad \alpha_x \angle (\vec{e}_x, \vec{F})$$
$$F_y = F \cos \alpha_y \qquad \alpha_y \angle (\vec{e}_y, \vec{F})$$
$$F_z = F \cos \alpha_z \qquad \alpha_z \angle (\vec{e}_z, \vec{F})$$

mit

- α_x, α_y, α_z: räumliche Winkelkoordinate zwischen Richtungs- und Kraftvektor
- $\cos \alpha_x$, $\cos \alpha_y$, $\cos \alpha_z$: Richtungskosinus von $\vec{F}$



Die Kraft F und ihre kartesischen Komponenten



Festlegung der Wirkungslinie mit Hilfe des Punktes A

Häufig sind nicht die Winkel α_x, α_y, α_z gegeben, sonder ein Punkt $A(x_A, y_A, z_A)$ auf der Wirkungslinie $\vec{F}$.

Dann gilt:

$$l = \overline{OA} = \sqrt{{x_A}^2 + {y_A}^2 + {z_A}^2}$$

$$\cos \alpha_x = \frac{x_A}{l}; \quad \cos \alpha_y = \frac{y_A}{l}; \quad \cos \alpha_z = \frac{z_A}{l}$$

$$F_x = F \cdot \frac{x_A}{l}; \quad F_y = F \cdot \frac{y_A}{l}; \quad F_z = F \cdot \frac{z_A}{l}$$

Für die Richtungskosinus und den Betrag von $\vec{F}$ gilt der **Satz von Pythagoras:**

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1$$

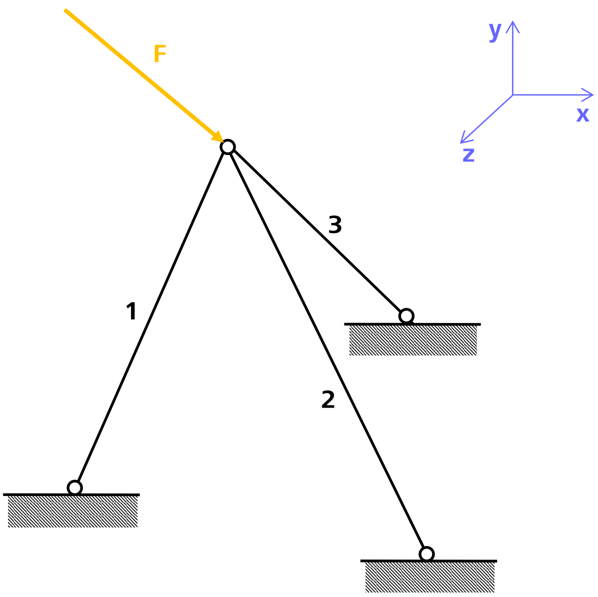
$$F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Für die Resultierende (Zusammensetzung) gilt unverändert:

Drei (!) Gleichgewichtsbedingungen für die räumliche zentrale Kräftegruppe

Anschaulich entspricht dies einem geschlossenen räumlichen Kräftepolygon. Zeichnerische Auswertungen sind räumlich jedoch unpraktikabel, deshalb werden im Raum **nur noch rechnerische Lösungen** durchgeführt.

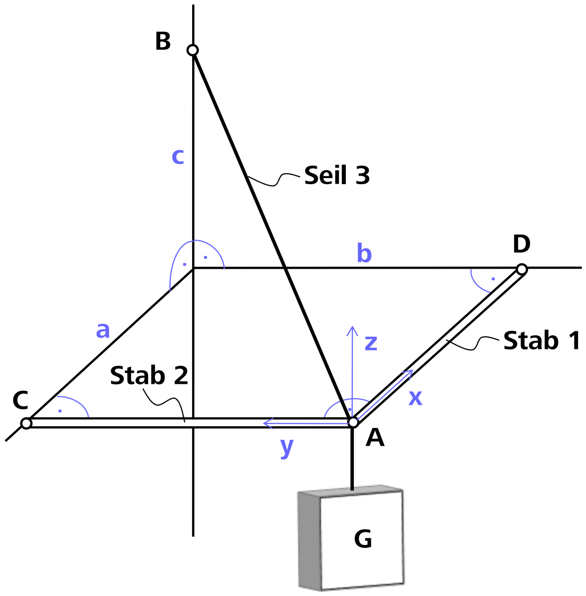
Die **Zerlegung** einer Kraft $\vec{F}$ nach **drei Richtungen** ist im Raum **eindeutig** möglich, wenn sich die drei Richtungen mit der Kraft **in einem Punkt schneiden** und **nicht in einer Ebene** liegen (Problem des Dreibeins).



Beispiel

Eine Aufhängung in einer Raumecke besteht gemäß Skizze aus zwei horizontalen Stäben 1 und 2 sowie einem schrägen Seil 3.

Ges.: Seil und Stabkräfte infolge des Gewichts G



3 Allgemeine Kräftegruppe am starren Körper

3.1 Definition

Wenn sich die Wirkungslinien der Kräfte einer Kräftegruppe nicht in einem Punkt schneiden, handelt es sich um eine **„allgemeine Kräftegruppe".**

3.2 Allgemeine Kräftegruppe in der Ebene

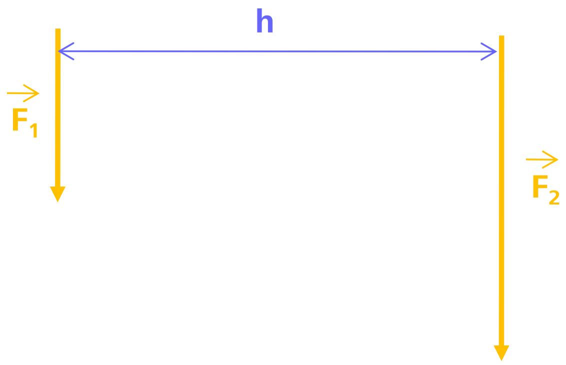
3.1.1 Kräftepaar und Moment

In 2.4.1 wurde gezeigt, wie die Resultierende einer zentralen Kräftegruppe gebildet werden kann. Nun soll folgende Frage geklärt werden:

Wie lässt sich die Resultierende $\vec{R}$ zweier paralleler Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ mit dem Abstand h bestimmen?

Gegeben: $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, h

Gesucht: Resultierende $\vec{R}$



Lösung:

Aus dieser Vorgehensweise ergeben sich zwei nicht-parallele Teilresultierende ___________________

und _______________________, die eine zentrale Kräftegruppe bilden und somit zu ihrer

Resultierenden :

zusammengefasst werden können.

Der Betrag der Resultierenden ergibt sich dann aus:

$$R = F_1 + F_2$$

Für die Abstände gilt:

$$h = a_1 + a_2$$

Gesucht wird nun eine weitere Gleichung zur Bestimmung von a_1 und a_2 (Lage der Wirkungslinie von $\vec{R}$)

Also: Die Lage der Resultierenden bei parallelen Kräfte ist bestimmbar, falls $R = F_1 + F_2 \neq 0$.
(Forderung: Nenner muss ungleich 0 sein!)

R = 0 tritt bei einem sogenannten Kräftepaar auf.

Ein Kräftepaar ist gekennzeichnet durch:

-

-

-

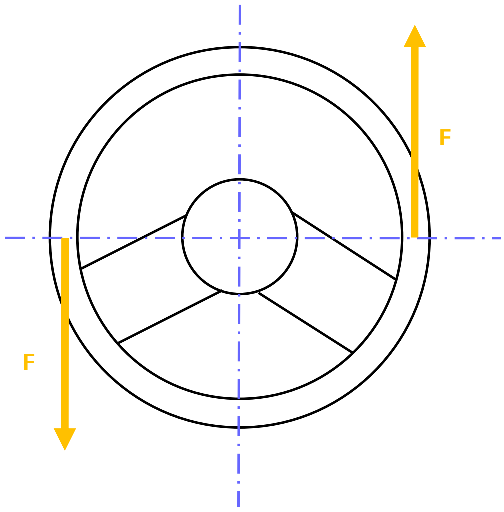
$R = \sum F_{ix} = F_1 - F_1 = 0$, d.h. die resultierende Kraft ist gleich 0, aber dennoch ist eine physikalische Wirkung vorhanden: Ein Kräftepaar versuchte einen Körper zu drehen (Drehwirkung)

Die Wirkung eines Kräftepaars wird eindeutig bestimmt durch sein (Dreh-)Moment:

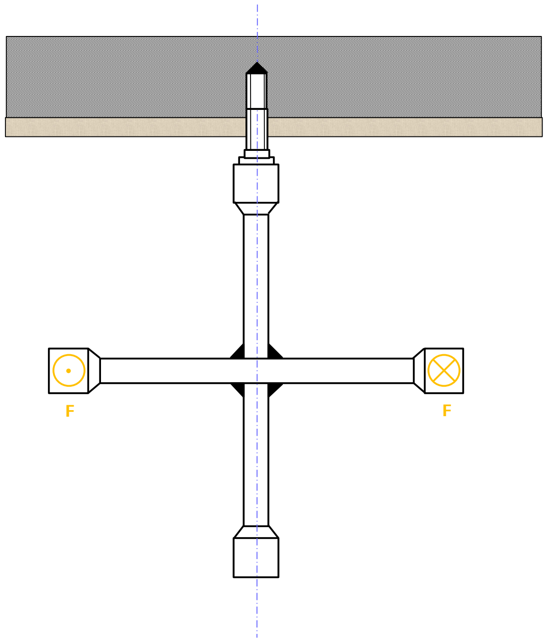
1.

2.

Beispiele für Kräftepaare



Lenkrad bei beidhändigem Lenken



Schrauben mit dem Kreuzschlüssel anziehen

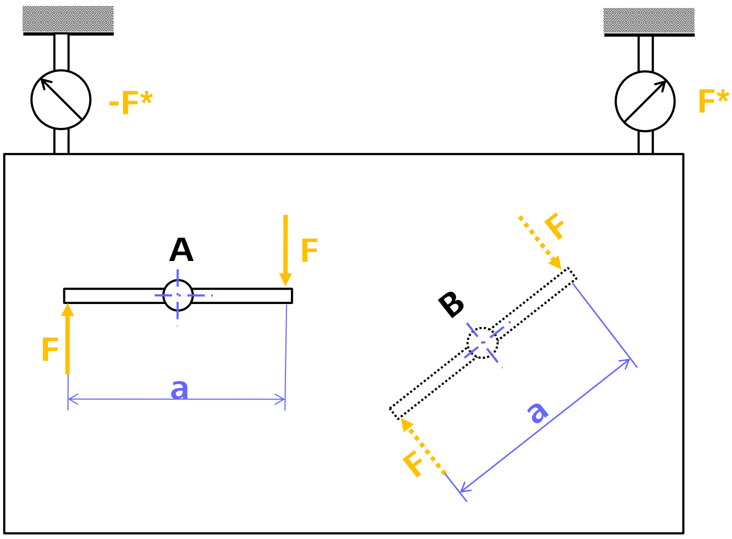
Äquivalenzsatz für Kräftepaare

Dies bedeutet, dass es beliebig viele äquivalente Darstellungen für ein Kräftepaar gibt.

Eigenschaften von Kräftepaaren
Durch geschicktes Addieren von Gleichgewichtsgruppen und Zusammenfassen zu Teilresultierenden lässt sich zeigen, dass Folgendes gilt:

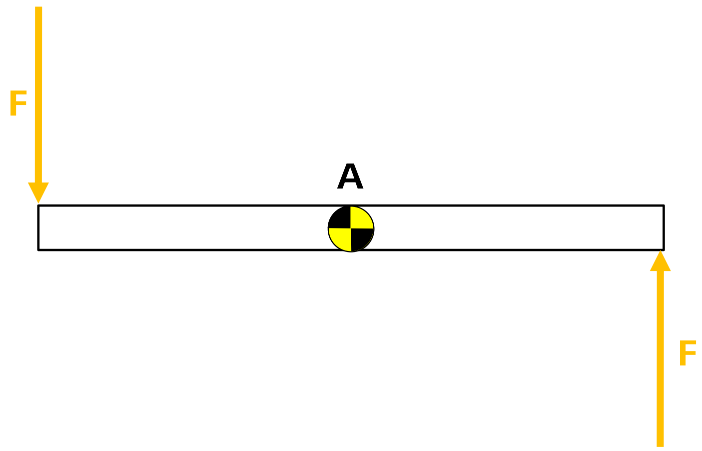
Ein Kräftepaar darf in seiner Wirkebene beliebig verschoben und gedreht werden. Zusätzlich darf die Wirkebene beliebig parallel verschoben werden. Die Wirkung des Kräftepaares auf den starren Körper ändert sich dadurch nicht.

Folgender experimenteller Aufbau zeigt dies. In beiden Fällen (Kräftepaar A und B) zeigen die Kraftmessdosen dasselbe Ergebnis an.



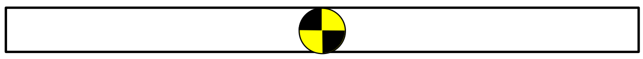
3.2.2 Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes

Aus 3.2.1 bekannt, dass ein Kräftepaar eine Drehwirkung besitzt (Moment)



Berechnung der Kräftesumme und Moment:

Frage: Was passiert bei einhändiger Handhabung?



Berechnung der Kräftesumme und Moment:

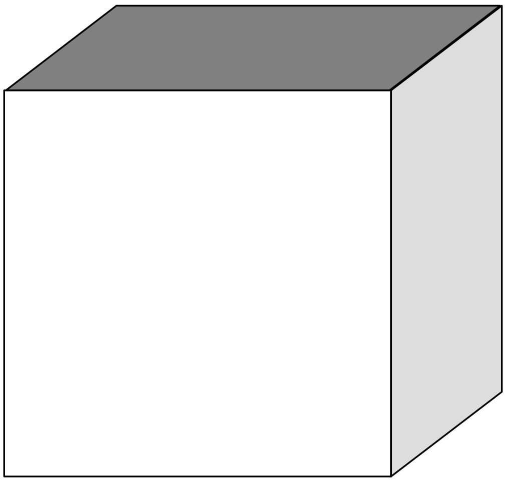
Lösung:

Ergebnis:

Darstellung eines Moments

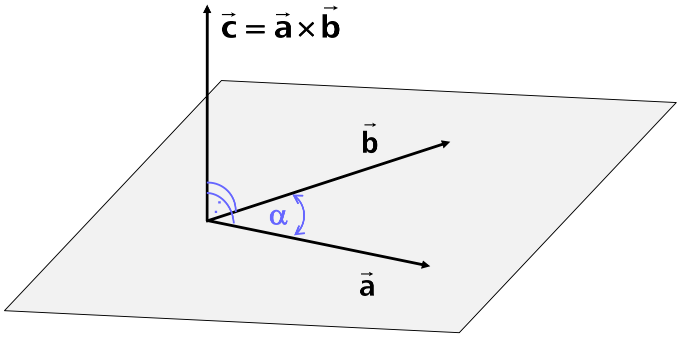
1) Gekrümmter Pfeil in der Wirkebene:

2) Gerader Pfeil mit Doppelspitze senkrecht zur Wirkebene:

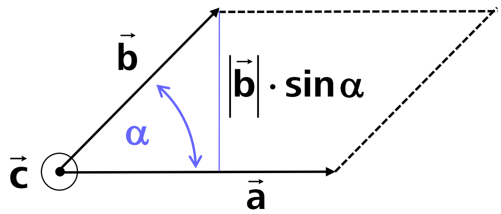


Rechte-Hand-Regel:

Exkurs: Berechnung des Moments mittels Vektorprodukt



Vektorprodukt zweier Vektoren



Sicht auf die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene

Unter dem Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ des euklidischen Raumes versteht man einen Vektor mit folgenden Eigenschaften:

a) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha$ (α: Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $0 \le \alpha \le \pi$)

b) $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

c) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

Schreibweise: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ **Sprechweise:** a kreuz b

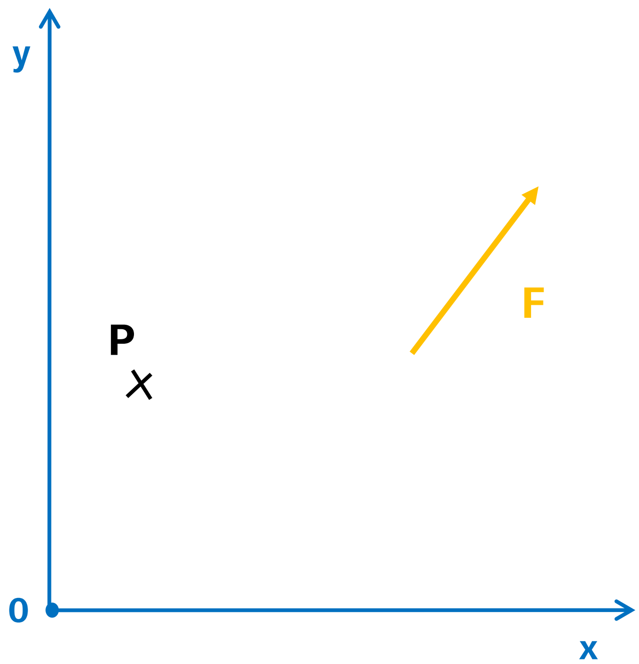
Anmerkungen:

Zu a) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha$ (der Betrag des Vektorproduktes) entspricht genau dem Flächeninhalt des Parallelogramms zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (siehe Bild oben rechts)

Zu c) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bedeutet, dass $\vec{a} \times \vec{b}$ in die Richtung weist, in die sich ein Korkenzieher bewegt, wenn man ihn so dreht, dass $\vec{a}$ sich auf dem kürzesten Weg in Richtung von $\vec{b}$ dreht (Korkenzieher-Regel)

Zu c) Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ. Es gilt: $\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.

Anwendung des Vektorproduktes auf das Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes P



Es muss nun gelten:

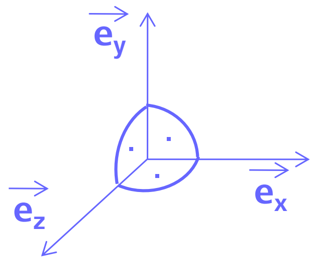
1. Betrag

2. Drehachse

3. Drehsinn

Wie wird nun das Vektorprodukt $\vec{M}^{(P)} = \vec{r}_{FP} \times \vec{F}$ konkret berechnet?

Hierzu werden zunächst die Vektorprodukte der Einheitsvektoren betrachtet.



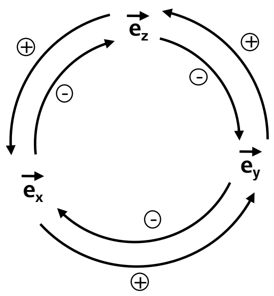
$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0} \quad \text{(wg. } \alpha = 0 \text{ ist } \sin\alpha = 0\text{)}$$

Vektorprodukte der Einheitsvektoren

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \;; \qquad \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$
$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \;; \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$$
$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \;; \qquad \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$$

Merkschema

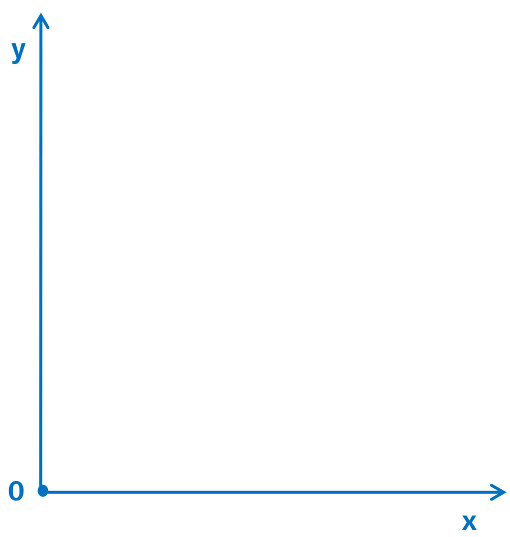


Weiter gilt mit $\lambda \in \Re$ (Skalar), $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Re^3$ (Vektoren)

$$(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

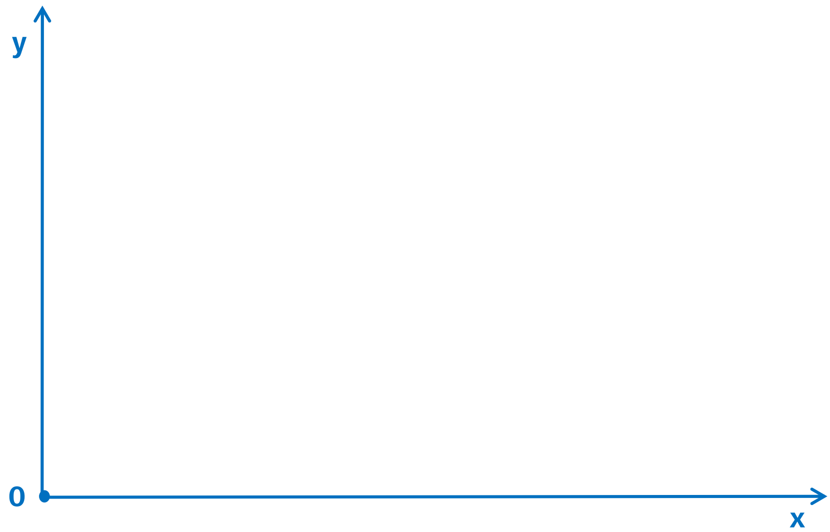
Anwendung auf ebenen Fall



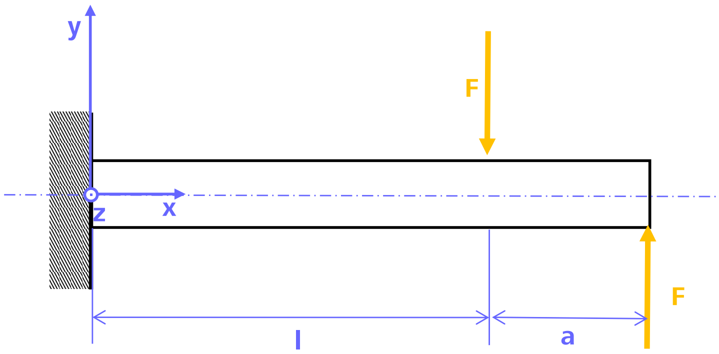
Berechnung des Momentes der Kraft F bezüglich des Koordinatenursprungs 0:

Resultierendes Moment einer allgemeinen Kräftegruppe bezüglich 0:

Vektorielle Darstellung des Momentes eines Kräftepaars:



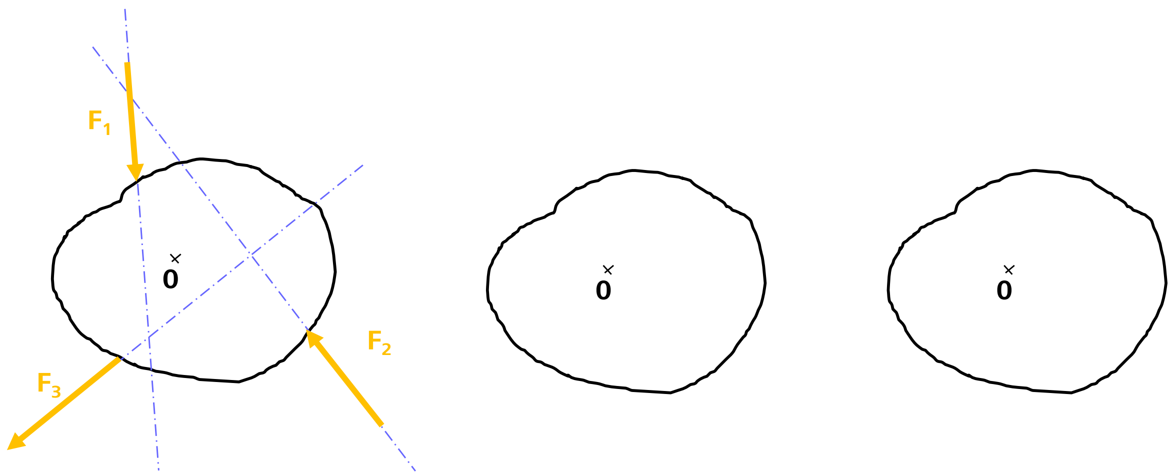
Beispiel



3.2.3 Äquivalenz und Gleichgewicht

Voraufgabe: Versetzung einer Kraft um den Abstand a

Verallgemeinerung auf n nicht-zentrale Kräfte (hier: n = 3)



Ergebnis: Eine allgemeine Kräftegruppe aus n Kräften lässt sich **reduzieren** (zusammenfassen) auf:

1.

2.

Folgerung für die Äquivalenz:

Zwei allgemeiner Kräftegruppen sind statisch äquivalent, wenn sie in der Vektorsumme der Kräfte und im resultierenden Momentenvektor dieser Kräfte bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes 0 übereinstimmen.

Damit sind die Gleichgewichtsbedingungen (GGBn) formulierbar:

Ein starrer Körper ist unter der Wirkung einer **allgemeinen, ebenen Kräftegruppe** im **Gleichgewicht** (GG), wenn sich bei der Reduktion (Zusammenfassung)

a)

b)

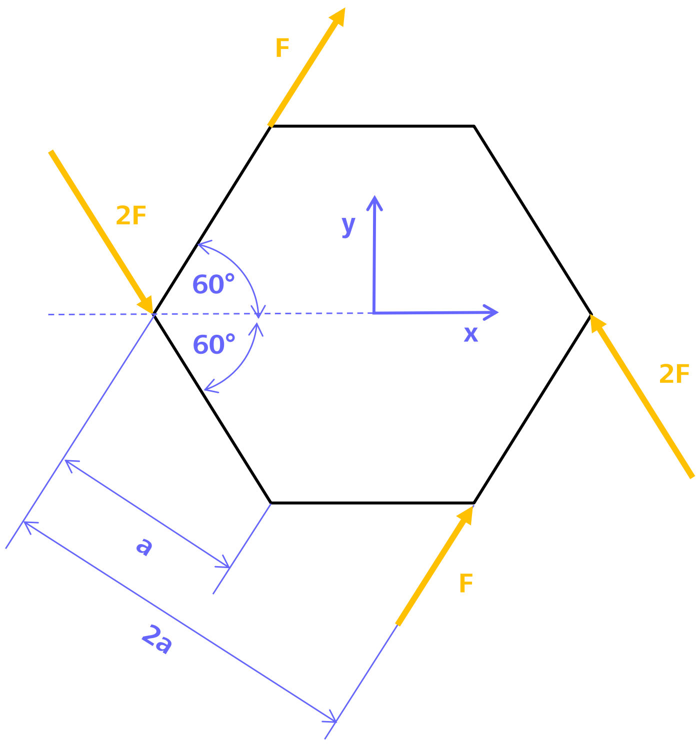
Auswertung der GGBn in kartesischen Koordinaten

Anmerkungen:

- $M_{iz}^{(0)}$ bedeutet: Moment der i-ten Kraft um die z-Achse bezogen auf den Punkt 0
- Die Momente der einzelnen Kräfte können auch anschaulich unter Beachtung des Drehsinns ausgewertet werden („Kraft mal Hebelarm“)
- Die maximale Anzahl der GGBn und der Bewegungsmöglichkeiten (Freiheitsgrade) eines starren Körpers in der Ebene sind gleich. Die Freiheitsgrade eines Körpers bestehen aus Verschiebung (Translation) in x- und y-Richtung und Drehung (Rotation) um die z-Achse.

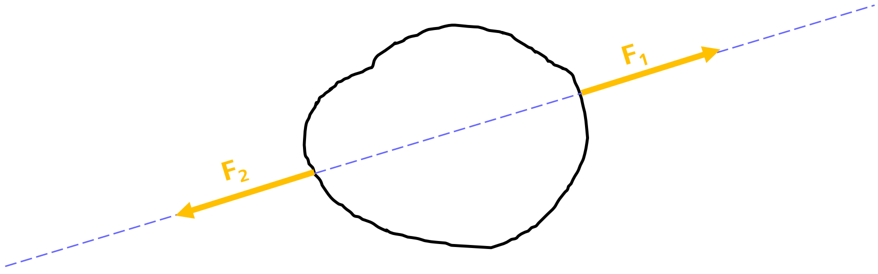
3.2.4 Beispiel

Gleichseitige Sechseckscheibe (Schlüsselweite 2a) wird durch 4 Kräfte belastet.
Gesucht werden die Größe und die Lage der Resultierenden.



Zusammenfassung: Wann ist Gleichgewicht möglich?

a) 2 Kräfte

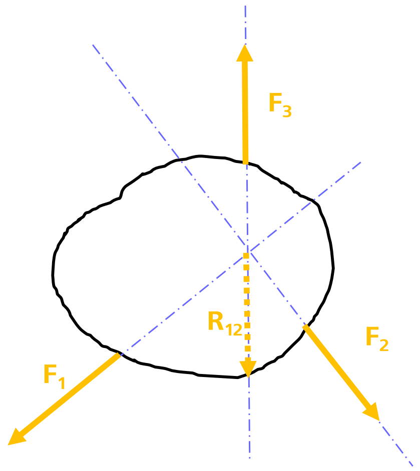


Die Kräfte müssen auf einer Wirkungslinie liegen. Gemäß Axiom 1 sind sie dann im Gleichgewicht, wenn F_1 und F_2 sind entgegengesetzt gleich groß sind.

Beispiel

Stab unter Zug/Druck Belastung

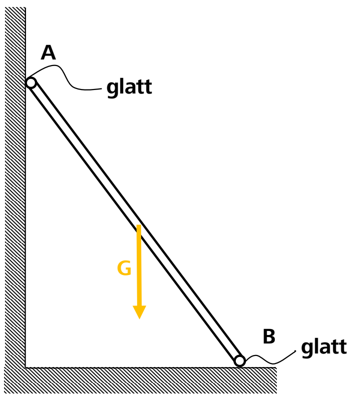
b) 3 Kräfte

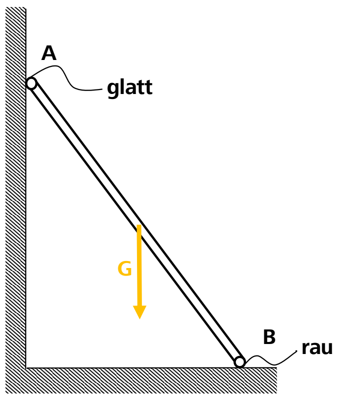


Alle Wirkungslinien müssen durch einen Punkt gehen, es muss sich also um eine zentrale Kräftegruppe handeln. Nach Zusammenfassung von Kraft 1 und 2 bleiben 2 Kräfte übrig (F_3 und R_{12}), die auf derselben Wirkungslinie liegen müssen. Dies ist nur möglich, wenn R_{12} auf der Wirkungslinie von F_3 liegt.

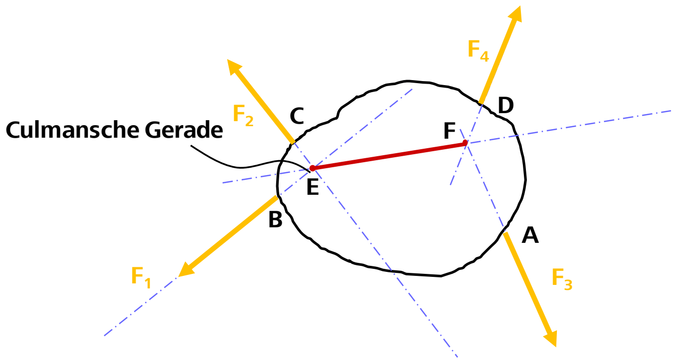
Beispiel

Leiter an einer Wand





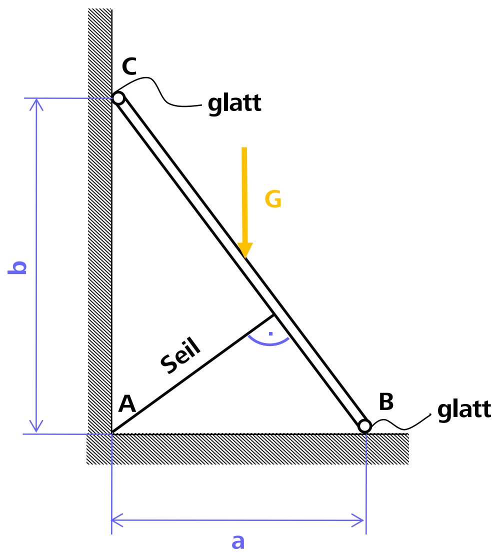
c) Vier Kräfte



Gleichgewicht ist nur möglich, wenn die Resultierenden paarweise auf der Culmanschen Gerade liegen

Beispiel

Leiter an glatter Wand und auf glattem Boden mit Seil



Geg.: G = 500 N
b = 5,2 m
a = 3 m

Ges.: Kräfte bei A, B und C

3.3 Lagerung ebener Tragwerke

Technische Konstruktionen bestehen aus Bauteilen, die Lasten aufnehmen und Kräfte übertragen müssen. Diese Konstruktionen müssen gegeneinander und Gegenüber der Umgebung gelagert werden. Solche gelagerten Körper (Tragwerke) werden nach Form und Belastung in Klassen eingeteilt, für die Idealisierungen üblich sind.

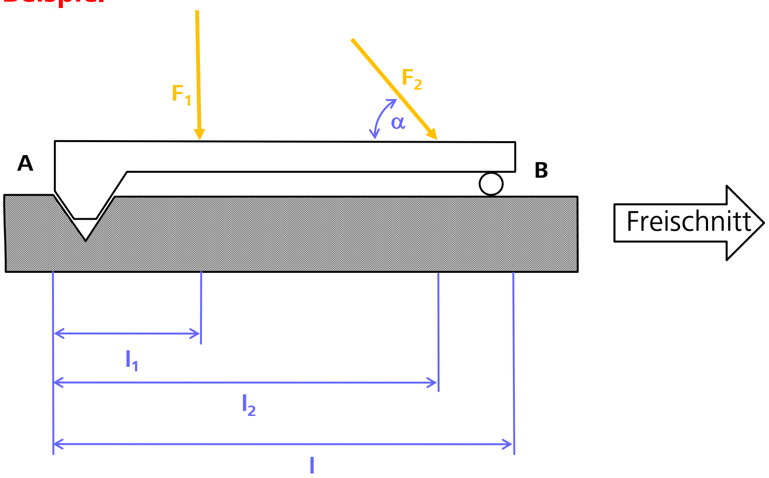
Linientragwerke (Querabmessungen sind klein gegenüber den Längsabmessungen)

- Seil: nur Übertragung von Zugkräften
- Stab: nur Aufnahme von Kräften in Richtung der Längsachse (Zug/Druck)
- Balken: Aufnahme von Kräften in Richtung der Längsachse und quer dazu
- Bogen: gekrümmter Balken
- Rahmen: Zusammensetzung starr verbundener, abgewinkelter Balkenstücke

Flächentragwerke (Dickenabmessungen sind klein ggü. den übrigen Abmessungen)
- Scheibe: nur Aufnahme von Kräften in der Scheibenebene
- Platte: Aufnahme von Kräften in der Ebene und senkrecht dazu (räumliche Statik)
- Schale: Gekrümmtes Flächentragwerk (räumliche Statik)

Im Verlauf der weiteren Vorlesung erfolgt eine **Beschränkung auf ebene Tragwerke**, die in ihrer Ebene belastet sind.
Die **Aufgabe der Lager** besteht dabei in der **Fixierung der Lage** des Tragwerks und der **Übertragung von Kräften**. Durch **Freischneiden** werden die **Reaktionskräfte** (Lagerreaktionen) in den Lagern als äußere Kräfte sichtbar.

Beispiel



Eigentliches Ziel der Mechanik ist die Tragwerksdimensionierung.

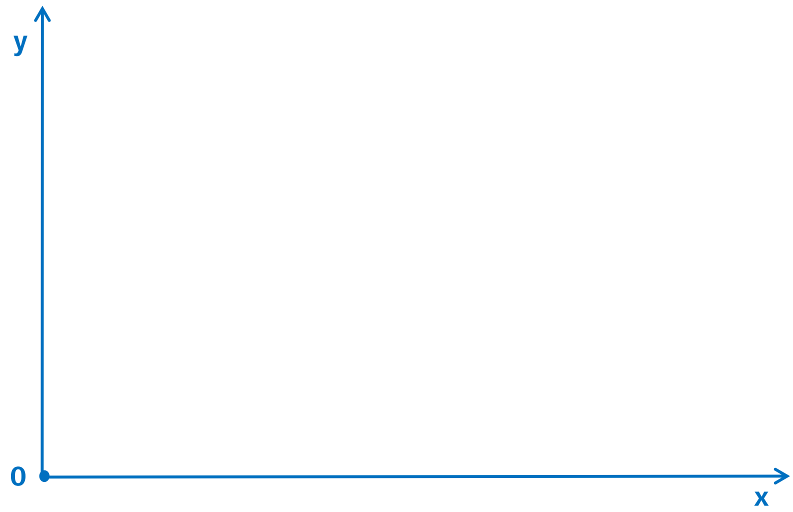
Verwendung der GGBn zur Berechnung

1. der Lagerreaktionen (= äußere Kräfte) und anschließend

2. der Schnittreaktionen (= innere Kräfte)

Die Lagerarten bei ebenen Tragwerken werden stets **reibungsfrei** angenommen (Die Reibung sei vernachlässigbar).

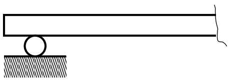
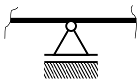
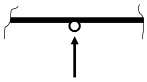
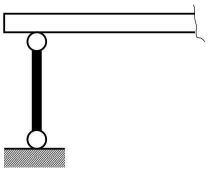
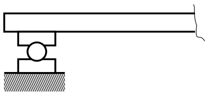
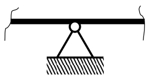
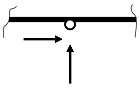
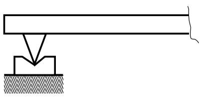
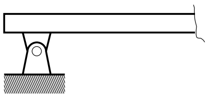
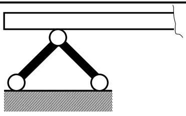
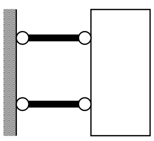
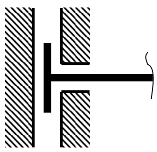
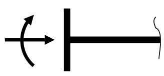
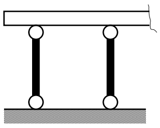
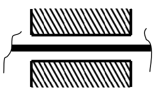
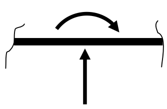
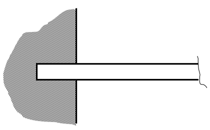
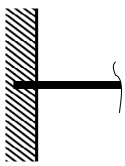
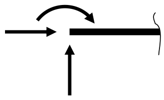
Ein starrer Körper in der Ebene hat maximal _____ unabhängige Freiheitsgrade (Bewegungsmöglichkeiten)



Lager üben **Bindungen** aus (schränken die Bewegungsfreiheit ein). Für die ebene Statik gilt:

f =

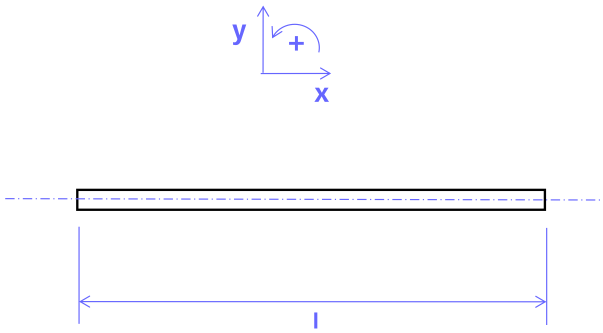
Die Lager können nach verschiedenen Kriterien eingeteilt werden, z.B. nach ihrer Wertigkeit, d.h. der Anzahl der eingeschränkten Freiheitsgrade. Folgend sind die wichtigsten Lager dargestellt.

<table>
<tr><th>Lager</th><th>Bezeichnung</th><th>Symbol</th><th>Mögliche Reaktionen</th><th>Wertigkeit</th><th>Mögliche Bewegungen</th><th>Freiheitsgrade</th></tr>
<tr><td></td><td>Rollenlager</td><td rowspan="2">„Loslager“
</td><td rowspan="2">Querkraft
</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Verschiebung (längs), Drehung</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td></td><td>Pendelstütze</td></tr>
<tr><td></td><td>Kipplager</td><td rowspan="4">„Festlager“
</td><td rowspan="4">Quer-, Längskraft
</td><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">Drehung</td><td rowspan="4">1</td></tr>
<tr><td></td><td>Schneidenlager</td></tr>
<tr><td></td><td>Gelenklager</td></tr>
<tr><td></td><td>Doppelstütze</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">Parallelstützen</td><td></td><td>Längskraft, Moment
</td><td rowspan="2">2</td><td>Verschiebung (quer)</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Querkraft, Moment
</td><td>Verschiebung (längs)</td></tr>
<tr><td></td><td>Einspannung</td><td></td><td>Längskraft, Querkraft, Moment
</td><td>3</td><td>keine</td><td>0</td></tr>
</table>

Anmerkung: Eine Pendelstütze ist ein an beiden Endpunkten gelenkig gelagerter Stab, der nur in den Endpunkten belastet ist. Daraus folgt, dass **nur Kräfte in Richtung der Verbindungslinie der Gelenke** aufgenommen werden können.

Beweis:

Freischnitt einer Pendelstütze



Berechnung der Lagerreaktionen
Für eine ebene, allgemeine Kräftegruppe, die auf einen starren Körper wirkt, stehen drei skalare Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung, nämlich:

Damit lassen sich maximal drei unbekannte Lagerreaktionen berechnen. Je nach Anzahl der verbleibenden Freiheitsgrade des Systems unterscheidet man in folgende Lagerungsfälle:

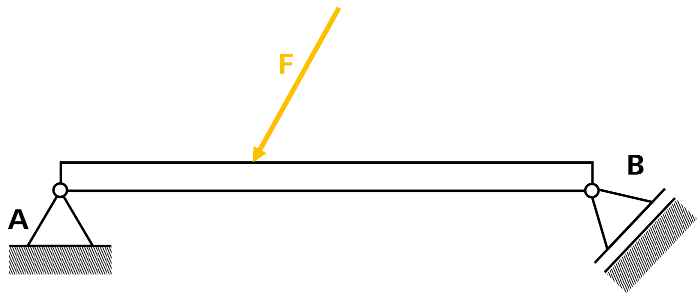
- $f = 0$: statisch bestimmte Lagerung
- $f < 0$: statisch unbestimmte Lagerung
- $f > 0$: kinematische Lagerung

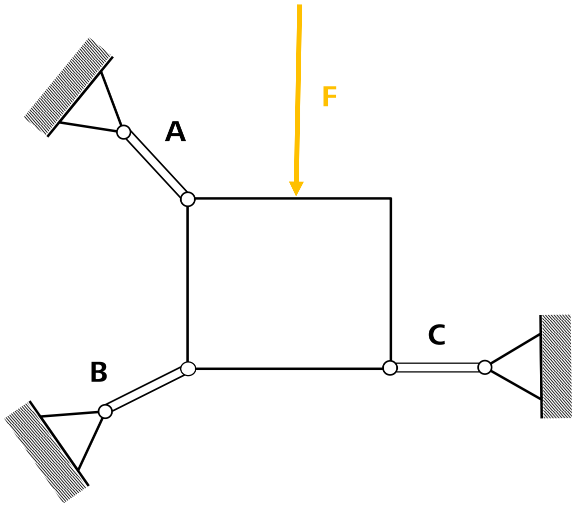
a) statisch bestimmte Lagerung

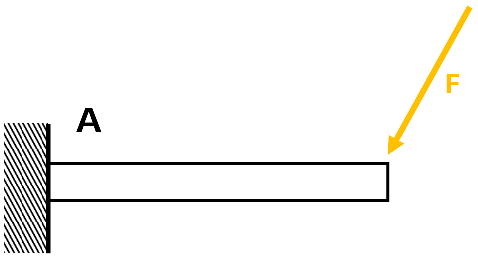
Drei unbekannte Lagerreaktionen sind aus den drei GGBn berechenbar, d.h. es sind **genau drei** Freiheitsgrade eingeschränkt.

$b = 3$ ➔ $f =$ (**notwendige**, aber nicht **hinreichende** Bedingung)

Beispiele



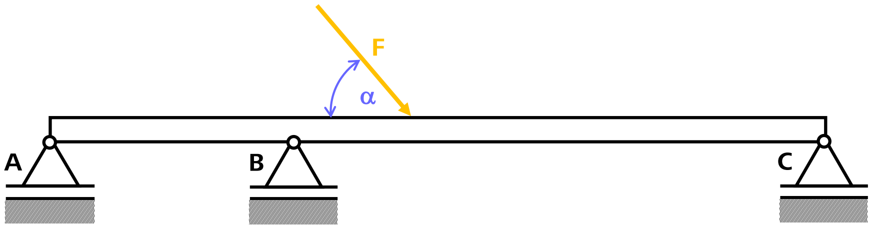




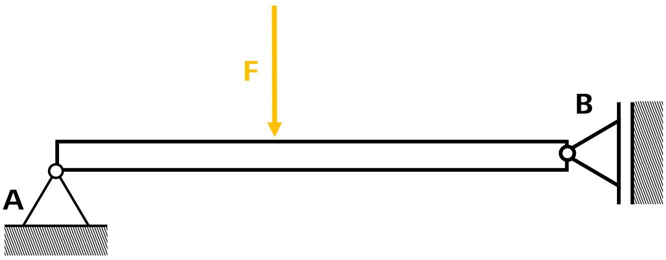
Entartete Fälle

Ein Tragwerk kann trotz f = 0 endliche oder infinitesimale Bewegungen ausführen (Das Tragwerk ist verschieblich oder wackelig), d.h. es ist kinematisch unbestimmt.

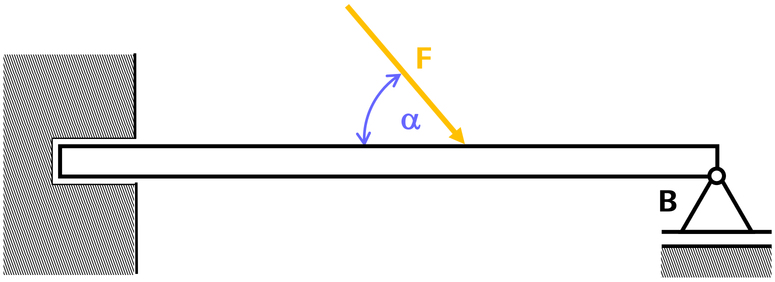
Beispiel 1



Beispiel 2



Beispiel 3



Damit gilt:

Ein Tragwerk ist im Allgemeinen ebenen Fall genau dann statisch bestimmt (und kinematisch) gelagert, wenn folgende Lagerreaktionen vorliegen:

-

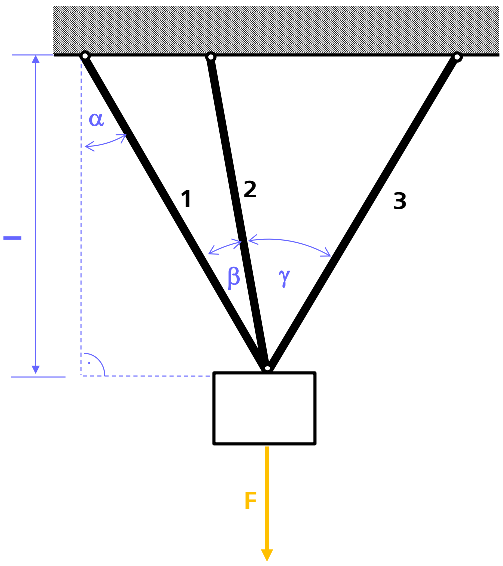
-

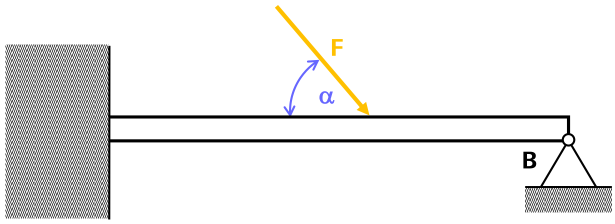
b) statisch unbestimmte Lagerung

Die Gleichgewichtsbedingungen allein genügen nicht zur Berechnung der Lagerreaktionen, die Verformungen müssen mit berücksichtigt werden.

Es gilt:

Beispiel

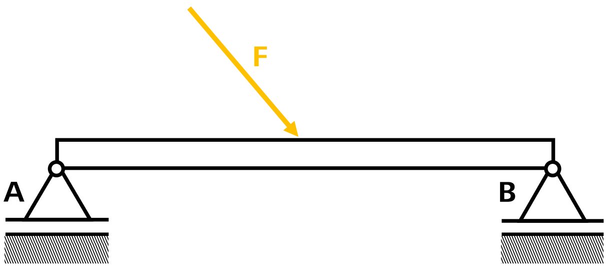




c) kinematische Lagerung

Es sind weniger als drei Freiheitsgrade eingeschränkt, eine **Bewegung ist gewollt** (Es handelt sich um einen sog. Mechanismus, z.B. Getriebe).

Es gilt:



3.3.2. Rechnerische Ermittlung der Lagerreaktionen

Zur Ermittlung der Lagerreaktionen stehen die Gleichgewichtsbedingungen für den ebenen Fall zur Verfügung.

$$\sum \vec{F} \overset{!}{=} 0 \iff$$

$$\sum \vec{M}^{(0)} \overset{!}{=} 0 \iff$$

Anmerkungen:

1. Es müssen **alle äußeren Kräfte** (eingeprägte Kräfte und Lagerreaktionen) berücksichtigt werden.
2. Der Bezugspunkt 0 ist **beliebig** wählbar, es gilt dann: $x_{i0} = x_i - x_0$; $y_{i0} = y_i - y_0$
3. Zu zwei Kräfte-GGBn und einer Momenten-GGB sind folgenden Möglichkeiten gleichwertig:

a) $\sum F_x \overset{!}{=} 0$ (bzw. $\sum F_y \overset{!}{=} 0$), $\sum M_z^{(A)} \overset{!}{=} 0$, $\sum M_z^{(B)} \overset{!}{=} 0$

unter der Voraussetzung, dass die Bezugspunkte A, B nicht auf einer Geraden parallel zur y-Achse (bzw. x-Achse) liegen.

b) $\sum M_z^{(A)} \overset{!}{=} 0, \sum M_z^{(B)} \overset{!}{=} 0$, $\sum M_z^{(C)} \overset{!}{=} 0$

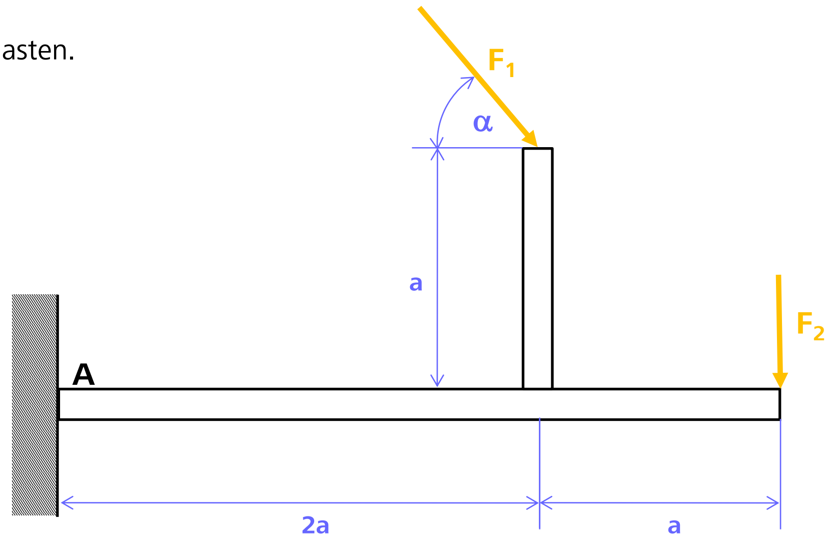
unter der Voraussetzung, dass die Bezugspunkte A,B,C nicht auf einer Geraden liegen.

Achtung

Für ebene Probleme existieren **nur drei unabhängige Gleichgewichtsbedingungen**. Werden mehr als drei Gleichgewichtsbedingungen verwendet (z.B. zwei Kräfte-GGBn und zwei Momenten GGBn), so sind diese **abhängig** voneinander.
Zusätzliche Gleichgewichtsbedingungen können **jedoch zur Kontrolle** dienen.

Beispiel

Eingespannter Träger mit zwei Einzellasten.



Gegeben: F_1, F_2, a, α

Gesucht: Alle Lagerreaktionen

Lösungsweg

1. Festlegung der positiven Koordinatenrichtungen/Drehrichtungen

2. Freischneiden
   a. Freischnitt als **geschlossenen Linienzug** in der Aufgabenskizze markieren
   b. **Alle eingeprägten Kräfte/Momente** und **alle Lagerreaktionen** in den Freischnitt (Freikörperbild) eintragen. Die Namen der Kräfte/Momente werden ohne Vektorpfeil eingetragen.
   c. Bei eingeprägten Kräften/Momenten ist der Richtungssinn **physikalisch vorgegeben**
   d. Bei den Lagerreaktionen wird ein Richtungssinn/Drehsinn **angenommen**.
   e. Benötigte Geometriedaten (Längen, Winkel) werden vollständig eingetragen

Freischnitt und Rechnung gehören immer zusammen und bilden eine untrennbare Einheit!

3. Aufstellung und Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen

z.B: $\sum F_{ix} \overset{!}{=} 0$ $\quad \sum F_{iy} \overset{!}{=} 0$ $\quad \sum M_{iz}^{(0)} \overset{!}{=} 0$

   a. Dabei wird der Bezugspunkt 0 **beliebig**, **aber zweckmäßig** gewählt
   b. Die Vorzeichen der Kräfte/Momente werden aus dem Freischnitt durch Vergleich der Richtungen der Pfeile mit den positiven Koordinatenrichtungen bzw. dem positiven Drehsinn.
   c. Die Vorzeichen der ermittelten Lagerreaktionen haben folgende Bedeutung:

„plus“ ⇔ tatsächlicher und angenommener Richtungssinn stimmen überein
„minus“ ⇔ tatsächlicher und angenommener Richtungssinn sind entgegengesetzt

Achtung
Der **Richtungssinn** von Lagerreaktionen darf im Freischnitt **nicht nachträglich geändert** werden!

3.3.3. Systeme ebener, starrer Körper

Bisher: Es wurde nur ein Tragwerk aus einem einzelnen starren Körper betrachtet

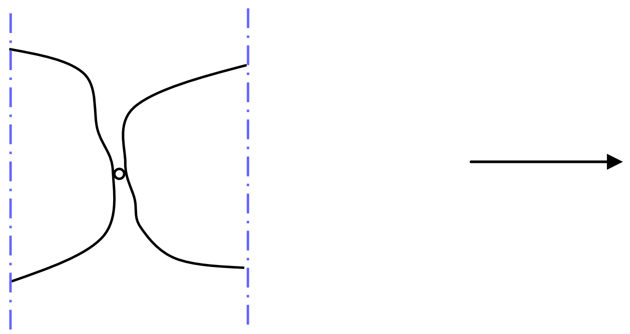
Jetzt: Es werden Tragwerke aus mehreren Starrkörpern betrachtet, die geeignet miteinander verbunden sind.

Die Verbindung der Körper wird durch reibungsfreie Verbindungselemente realisiert.

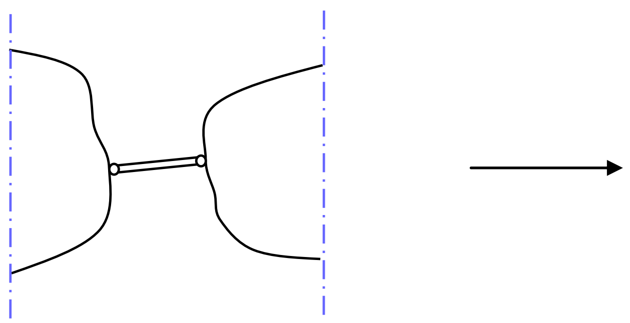
Beispiele für Verbindungsstellen

z ist hierbei die Anzahl der sogenannten Zwischenbindungen (Anzahl der unbekannten Zwischenreaktionen)

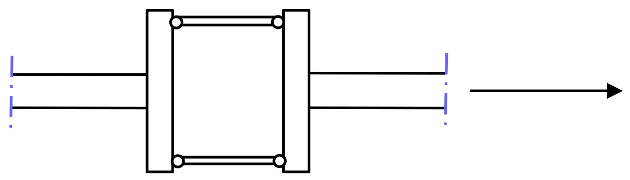
Gelenk



Pendelstab



Doppelstab



Anzahl der Freiheitsgrade (maximale Anzahl der GGB)

$3 * n$; n: Anzahl der starren Körper des Systems

Anzahl der Bindungen (unbekannte Reaktionen des Systems)

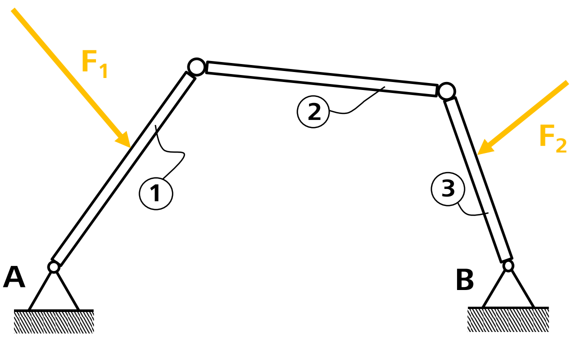
$b_{ges} + z_{ges}$

Damit: Notwendige Bedingungen für statische Bestimmtheit eines Systems

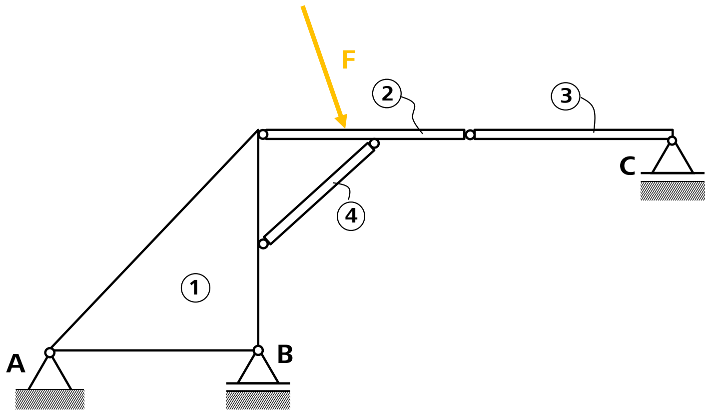
Zusätzliche, hinreichende Bedingung:

Jeder einzelne starre Körper darf weder endlich noch infinitesimal beweglich sein

Beispiel 1



Beispiel 2



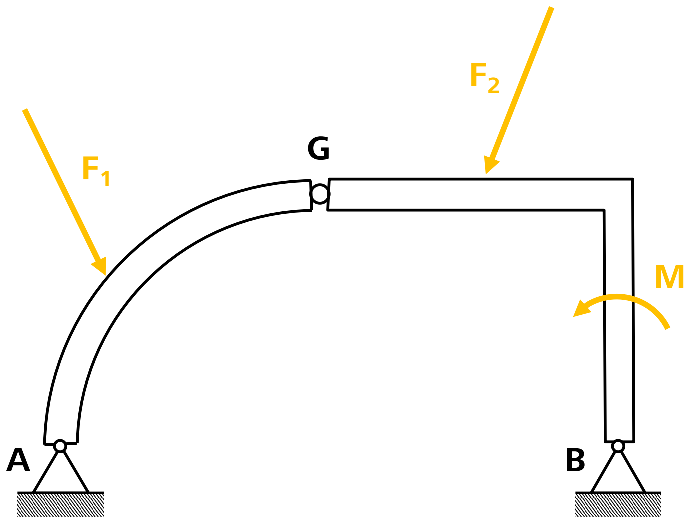
Ausführliche Beispiele zu Mehrkörpersystemen

a) Dreigelenkbogen
b) Gerberträger

a) Dreigelenkbogen

Ein Dreigelenkbogen besteht aus zwei beliebig geformten Trägern mit drei Gelenken, die **nicht auf einer Geraden** liegen. Der Dreigelenkbogen ist somit statisch bestimmt gelagert.

Beispiel



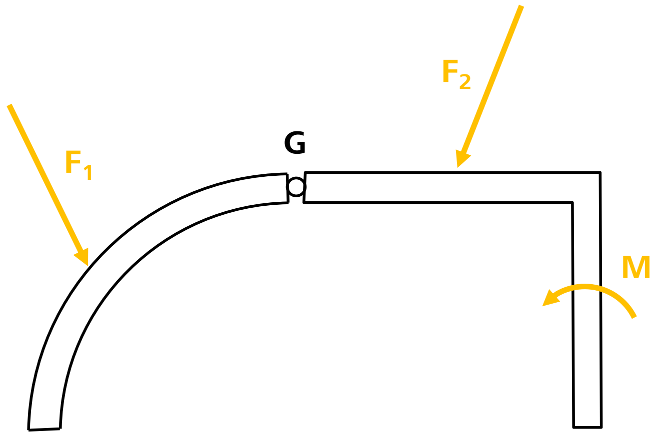
Freischnitte

Gesucht:
- Lagerreaktionen A_x, A_y, B_x, B_y
- Zwischenreaktionen Q_x, Q_y

Entartung?

Rechnerische Lösung:
3 Gleichgewichtsbedingungen für **jeden** starren Körper (d.h. für **jeden** Freischnitt)

Falls nur die Lagerreaktionen gesucht sind:
Es treten nur die Lagerreaktionen als Unbekannte auf (in diesem Beispiel: 4), diese können mit **einem Freischnitt** des Gesamtsystems berechnet werden.



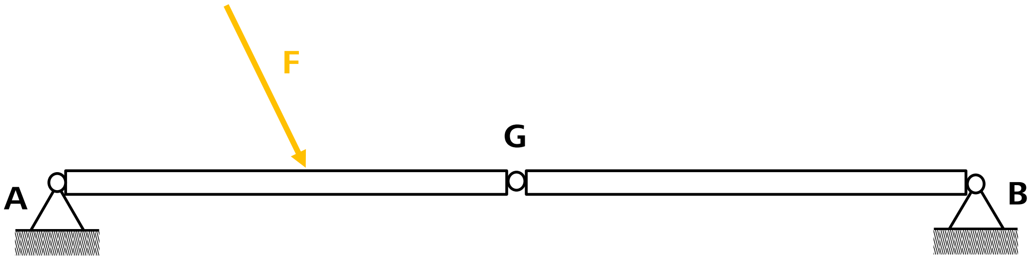
Es werden also 4 Gleichungen benötigt. Dies sind:

- 3 Gleichgewichtsbedingungen

- 1 zusätzliche Bedingung: ____

Ausnahmefall des Dreigelenkbogens

Alle Gelenke sind auf einer Geraden

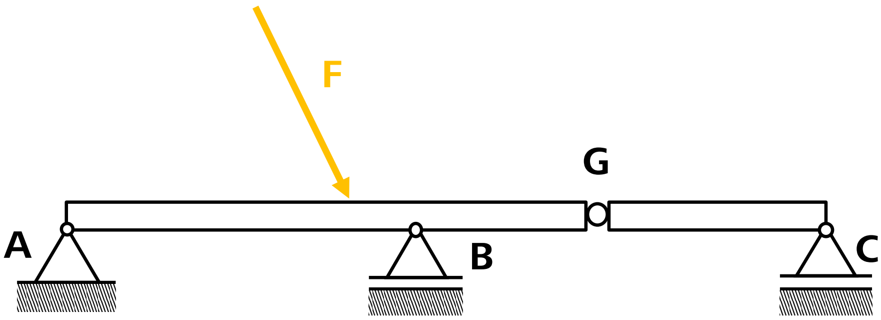


Abhilfe durch Umwandlung des Systems in ein statisch bestimmtes System, d.h. Umwandlung in einen Gerberträger.

b) Gerberträger (Gelenkbalken)

Ein Gerberträger ist ein mehrfach gestützter Durchlaufträger mit Entlastungsgelenken.

Beispiel



Der Gerberträger lässt sich beliebig erweitern. Pro Loslager muss ein weiteres Entlastungsgelenk vorgesehen werden.

Freischnitte des Gerberträgers:

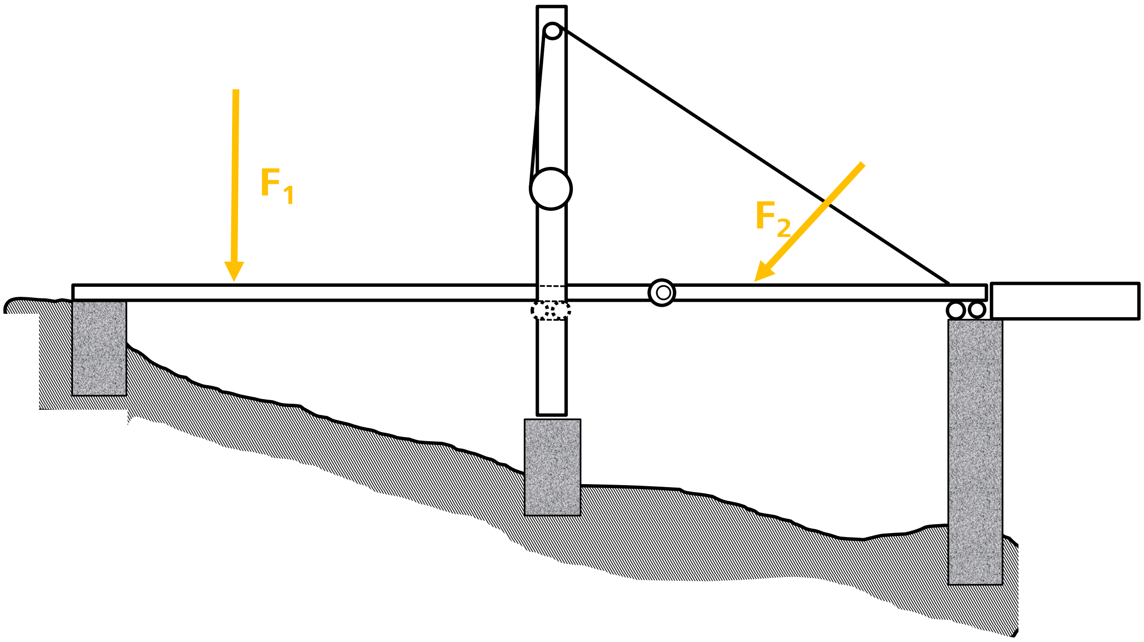
Vorteile von Gelenkbalken:

- Mehrfache Zwischenabstützung, ohne dass die statische Bestimmtheit verloren geht
- Durch die Entlastungsgelenke besteht ein günstigerer Momentenverlauf im Träger (geringere Biegemomente
- Die Entartung bei der fluchtenden Verbindung von Trägern wird vermieden

Rechnerische Ermittlung der Lagerreaktionen und Zwischenreaktionen erfolgt äquivalent zu dem Dreigelenkbogen.

Beispiel zur Anwendung eines Gerberträgers

Zugbrücke



3.3.4 Kinematische Bestimmtheit

Zur Überprüfung der kinematischen Bestimmtheit (statische Bestimmtheit) wurde bisher die **notwendige Bedingung**

$$f = 3n - (b + z)$$

zusammen mit der **hinreichenden Bedingung**, dass das System weder endlich noch infinitesimal verschieblich sein darf, verwendet.

Die hinreichende Bedingung (System weder verschieblich noch wackelig) lässt sich aber auch auf **mathematischem Weg** überprüfen. Die notwendige Bedingung gewährleistet, dass genauso viele Gleichungen wie Unbekannte zur Verfügung stehen. Die hinreichende Bedingung fordert, dass dieses Gleichungssystem auch **eindeutig lösbar** sein muss. Diese Lösbarkeit lässt sich anhand der **Determinante des Gleichungssystems** vorab überprüfen.

Das Gleichungssystem, bestehend aus den Gleichgewichtsbedingungen lässt sich wie folgt umschreiben:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Es bedeuten: A: Koeeffizientenmatrix

$\vec{x}$: Vektor der Lagerreaktionen

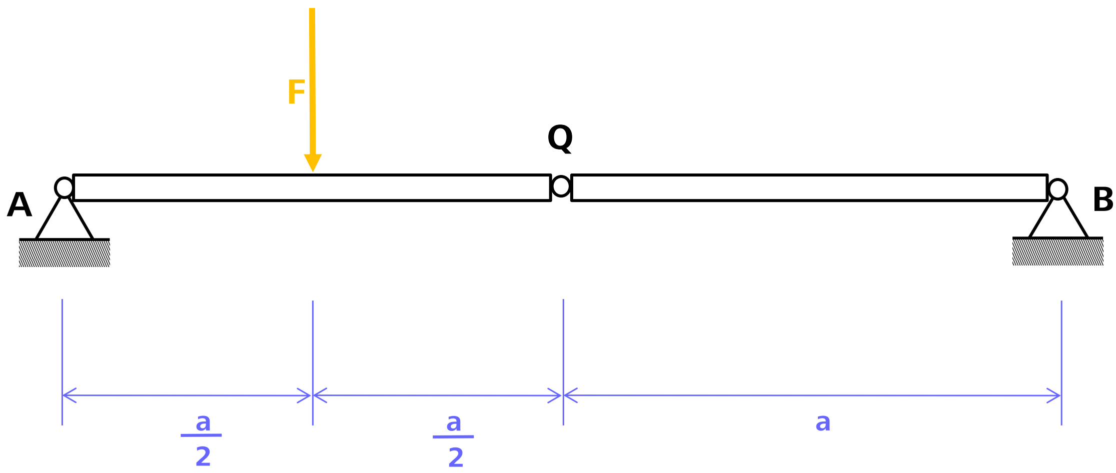
$\vec{b}$: Vektor der äußeren Belastungen

Das System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt.

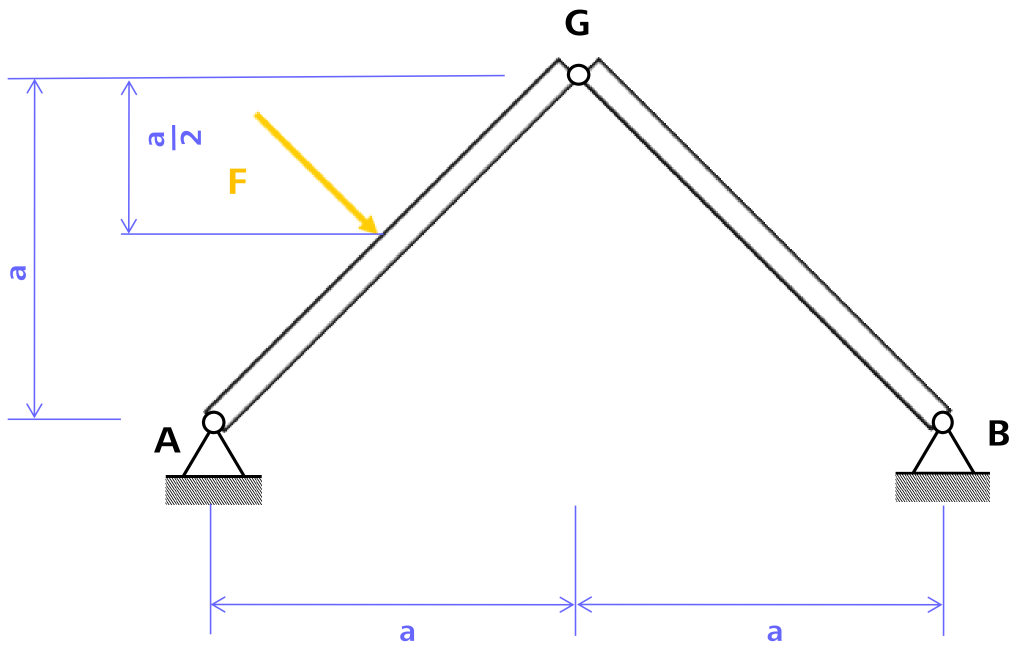
$$\det(A) \neq 0$$

(In Worten: Die Determinante des Systems muss ungleich 0 sein)

Beispiel 1



Beispiel 2

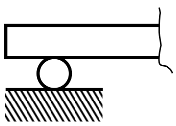
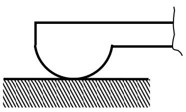
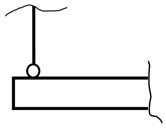
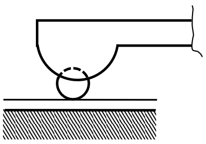
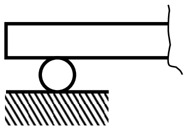
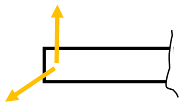
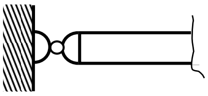
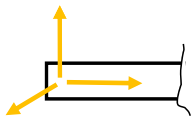
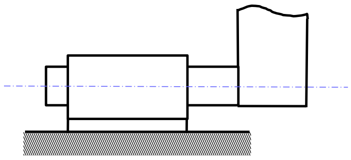
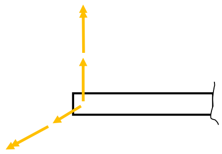
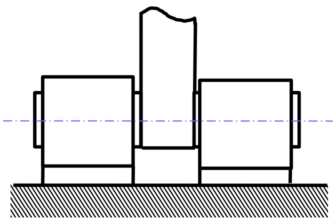
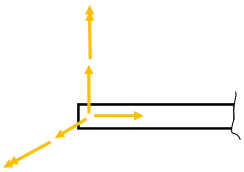
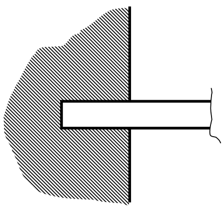
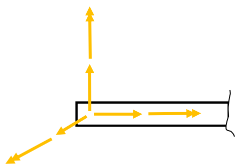


3.4 Räumliche Kräftegruppe

Ein im Raum frei beweglicher starrer Körper besitzt 6 Freiheitsgrade:

- drei Translationen (Verschiebungen) in x-, y- und z-Richtung
- drei Rotationen (Drehungen) um die x-, y- und z-Achse

Diese Bewegungsmöglichkeiten werden durch Lager eingeschränkt. Die Lager werden genauso wie in der Ebene nach ihrer Wertigkeit (Anzahl der ausgeübten Bindungen) klassifiziert.

Lagerung	Wirkende Kräfte	Wertigkeit
 Kugel  glatte Oberfläche  Seil oder Stab	 1 Kraft	1
 Rolle und Schiene  Walze auf rauer Oberfläche	 2 Kräfte	2
 Kugelgelenk	 3 Kräfte	3
 Scharnier, axial verschieblich	 2 Kräfte, 2 Momente	4
 Scharnier, axial fixiert	 3 Kräfte, 2 Momente	5
 feste Einspannung	 3 Kräfte, 3 Momente	6

Ein räumliches Tragwerk ist statisch bestimmt gelagert, wenn **6 unbekannte Lagerreaktionen** vorliegen, die **alleine aus den Gleichgewichtsbedingungen** berechnet werden können.

Analog zu den ebenen Systemen gilt:

Einkörpersystem: $f = f_{max} - b_{ges} = 6 - b_{ges}$

Mehrkörpersystem aus n Körpern: $f = f_{max} - (b_{ges} + z_{ges}) = 6n - (b_{ges}+z_{ges})$

Die Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers im Raum lauten in vektorieller Form:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \overset{!}{=} 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{M}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \left(r_{i0} \times \vec{F}_i \right) + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j \overset{!}{=} 0$$

In kartesischen Koordinaten lauten die Kräfte-Bedingungen:

In kartesischen Koordinaten lauten die Momenten-Bedingungen:

Anmerkung:

Formal lässt sich das Vektorprodukt $\left(r_{i0} \times \vec{F} \right)$ auch durch eine dreireihige Determinante darstellen:

$$\left(r_{i0} \times \vec{F}_i \right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_{i0} & y_{i0} & z_{i0} \\ \vec{F}_{ix} & \vec{F}_{iy} & \vec{F}_{iz} \end{vmatrix}$$

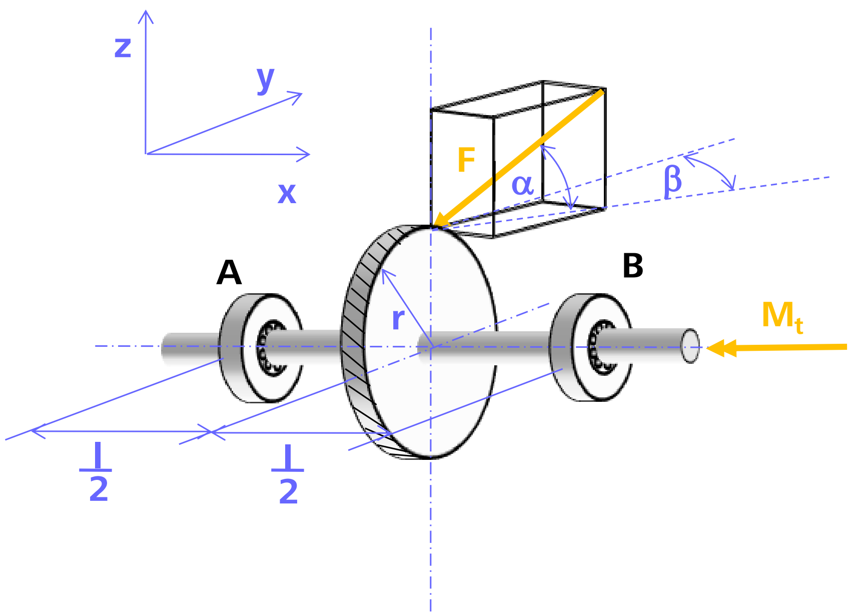
Diese Determinante lässt sich nach der ersten Zeile entwickeln und liefert so die o.a. Gleichungen.

Beispiel 1

An einem fest auf einer Welle sitzenden, schrägverzahnten Zahnrad mit dem Teilkreisradius r tritt die Zahnkraft F auf. Die Welle ist in A dreiwertig (Radial- und Axiallager), in B zweiwertig (Radiallager) gelagert. Der Antrieb erfolgt über das äußere Drehmoment M_t, das um die x-Achse dreht.

Aufgaben:

- Überprüfen Sie die statische Bestimmtheit des Systems
- Berechnen Sie die Lagerreaktionen in A und B

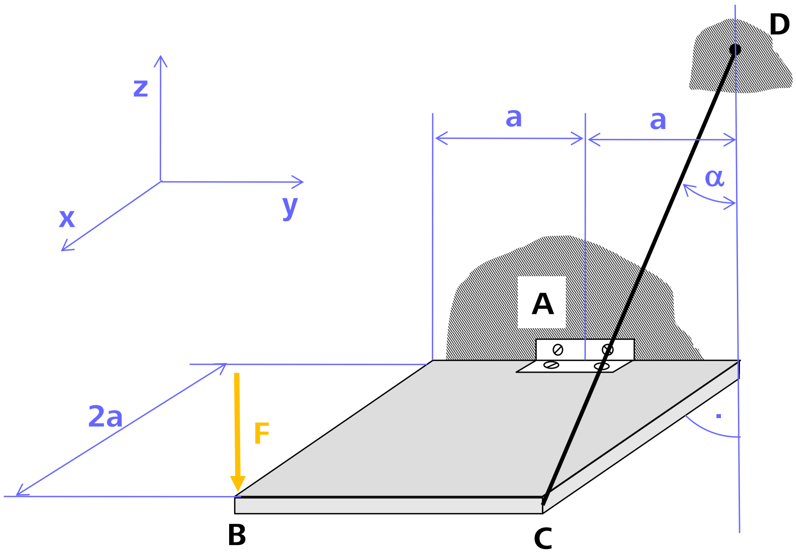


Beispiel 2

Ein quadratisches Klappbrett mit der Kantenlänge 2a ist über ein Scharnier in A drehbar befestigt. Ein Seil CD hält das Brett in waagrechter Lage. Das Brett wird durch eine vertikal gerichtete Kraft F im Eckpunkt B belastet.

Aufgaben:

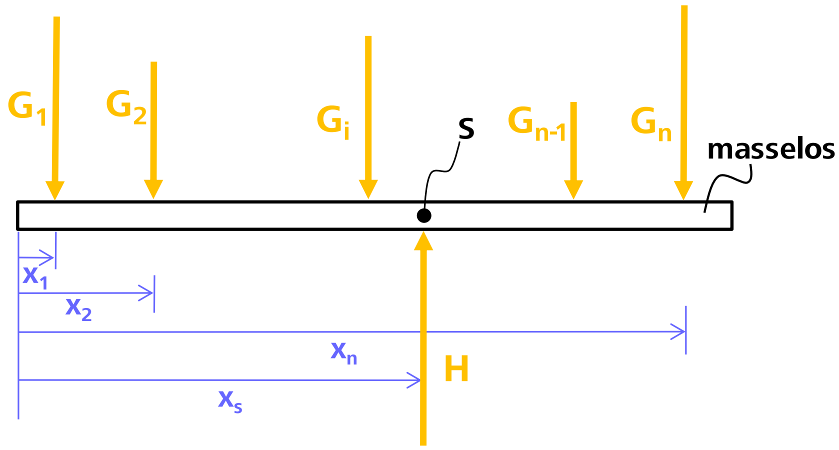
- überprüfen Sie die statische Bestimmtheit des Systems
- Berechnen Sie die Lagerreaktionen in A und die Seilkraft S



4. Schwerpunkt

4.1 Schwerpunkt einer Gruppe von parallelen Kräften

Ein Balken wird durch n parallele Kräfte G_i, (n = 1…n) belastet und von einer Haltekraft H gehalten. Gesucht ist der Ort x_s, an dem die Haltekraft H angreifen muss, damit das System im Gleichgewicht ist.

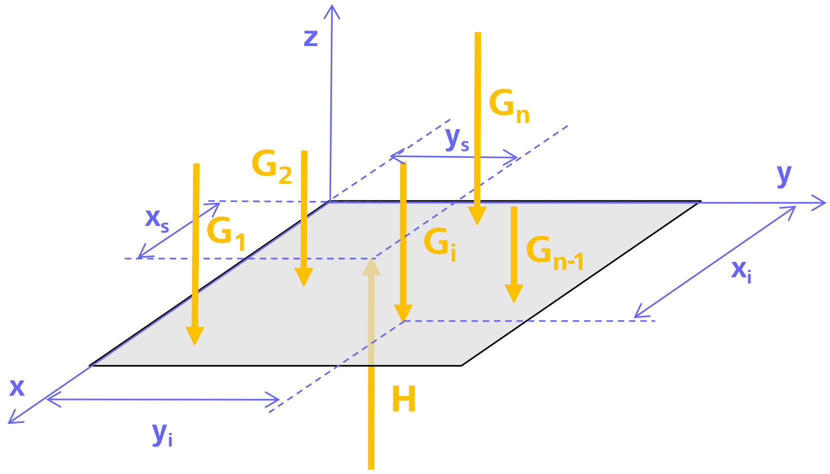


Lösung:

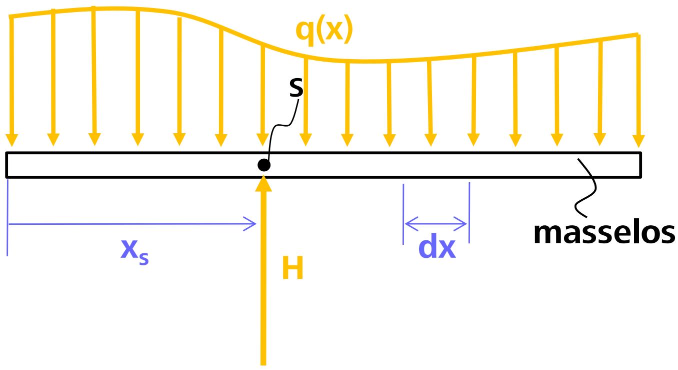
Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen

Der Punkt S im Abstand x_s vom Koordinatenursprung heißt Kräftemittelpunkt oder Schwerpunkt (Die Bezeichnung Schwerpunkt ist beim gewichtsbehafteten Körper erklärbar)

Der Kräftemittelpunkt (Schwerpunkt) lässt sich auch für eine Gruppe paralleler Kräfte ermitteln, die in einer Ebene verteilt sind.



Liegen die Kräfte nicht als Einzelkräfte vor, sondern als Linienlast (Streckenlast), so lassen sich äquivalente Gleichungen durch Verwendung der Infinitesimalrechnung erzeugen.

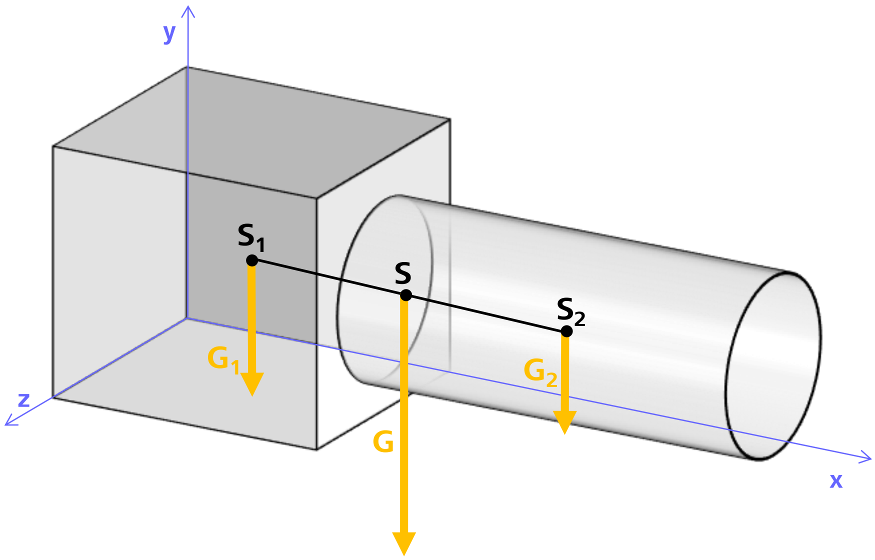


4.2. Körperschwerpunkt

Interpretiert man die Kräfte G_1 bis G_n aus den Beispielen in 4.1. als Gewichtskräfte von Körpern 1 bis n mit den Teilschwerpunktkoordinaten x_i bzw. x_i, y_i, so lässt sich das Ergebnis auch als Gesamtschwerpunkt eines Körpers aus n Teilkörpern betrachten.

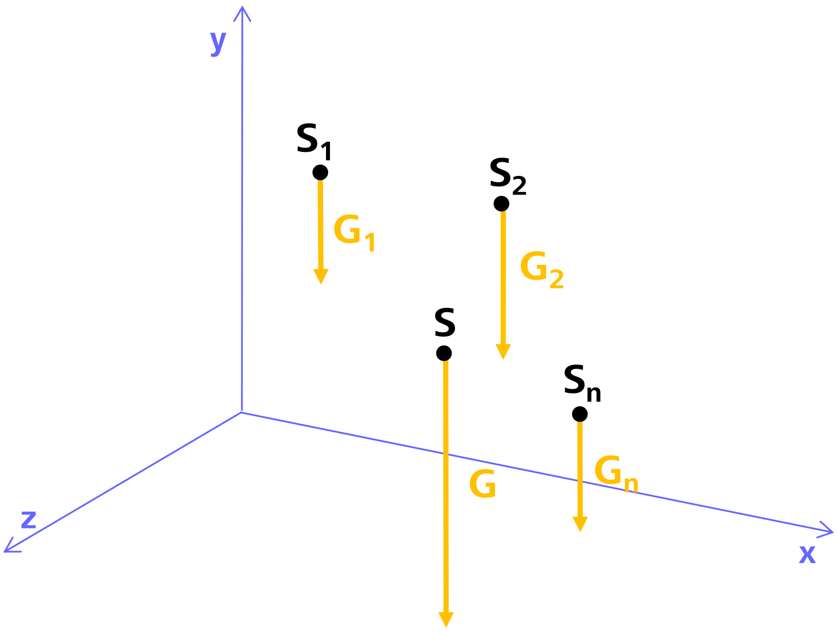
Beispiel

Körper aus zwei Teilkörpern



Allgemein

Betrachtung eines Körpers mit n bekannten Teilschwerpunkten S_i (Ortsvektoren $\vec{r}_{S_i} = (x_{S_i}, y_{S_i}, z_{S_i})$ und Teilgewichten G_i.



Gesucht: Ortsvektor $\vec{r}_S = (x_S, y_S, z_S)$ des Gesamtschwerpunktes S

Somit folgt als Ergebnis der Schwerpunkt eines Körpers aus n Teilgewichten G_i (i = 1,2,…,n) mit bekannten Teilschwerpunkten $\vec{r}_{S_i} = (x_{S_i}, y_{S_i}, z_{S_i})$:

Vektoriell

$$\vec{r}_S = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_{S_i} \cdot G_i\right) \qquad \text{mit dem Gesamtgewicht} \qquad G = \sum_{i=1}^{n} G_i$$

In kartesischen Koordinaten

$$x_S = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{S_i} \cdot G_i\right) \qquad y_S = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{S_i} \cdot G_i\right) \qquad z_S = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n}\left(z_{S_i} \cdot G_i\right)$$

Anmerkungen

- Der Name Schwerpunkt ergibt sich aus der Annahme, dass das verteilte Gewicht (die Schwere) im Schwerpunkt konzentriert werden kann, ohne dass sich die statische Wirkung auf den starren Körper ändert.
- Die Kenntnis des Schwerpunkts wird bei der Berücksichtigung von
  - Gewichtskräften (resultierende Gewichtskraft greift im Schwerpunkt an)
  - Massenkräften (siehe TM3, Kinetik)
  - Auftriebskräften

  benötigt.

Sonderfälle

1. Für ein **homogenes und gleichgerichtetes Schwerefeld** (d.h. $\vec{g} = \text{const.}$) lässt sich mit $G = mg = g\sum_{i=1}^{n} m_i$ folgende Umformung durchführen:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_{S_i} \cdot G_i\right) = \frac{g}{mg}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_{S_i} \cdot m_i\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_{S_i} \cdot m_i\right) = \vec{r}_S^{\,(M)}$$

Damit ergibt sich der Massenmittelpunkt (Massenschwerpunkt) mit dem Ortsvektor $\vec{r}_{S_i}^{\,(M)}$:

$$\vec{r}_S^{\,(M)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_{S_i} \cdot m_i\right) \qquad \text{mit der Gesamtmasse} \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

2. Hat der Körper zudem eine konstante Dichte ρ = const. (homogener Körper), so gilt mit dem Volumen V_i der Teilkörper und $m_i = \rho_i\, V_i$:

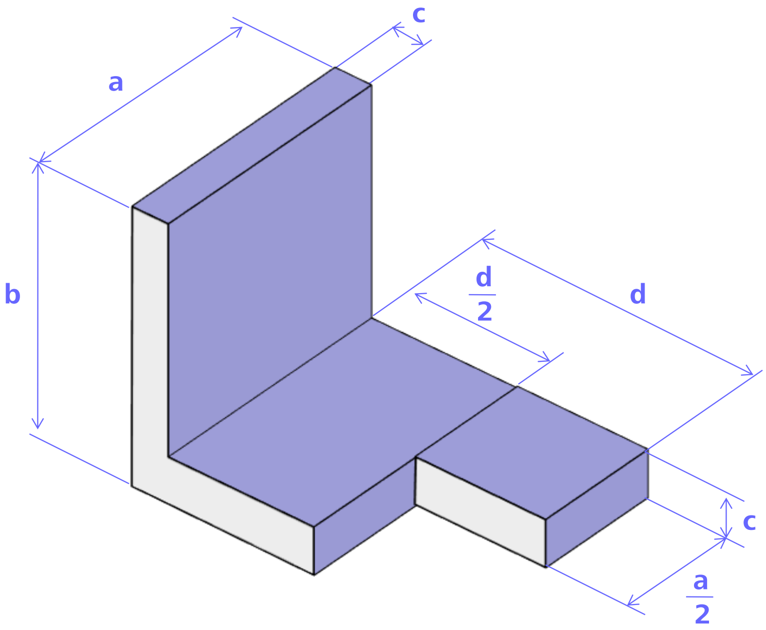
$$\vec{r}_S^{\,(M)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_{S_i}\cdot m_i\right) = \frac{\rho}{\rho V}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_{S_i}\cdot V_i\right) = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_{S_i}\cdot V_i\right) = \vec{r}_S^{\,(V)}$$

Schwerpunkt und Massenmittelpunkt sind dann identisch mit dem sog. Volumenschwerpunkt (geometrischer Körperschwerpunkt) mit dem Ortsvektor $\vec{r}_{S_i}^{\,(V)}$:

$$\boxed{\vec{r}_S^{\,(V)} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_{S_i}\cdot V_i\right) \qquad \text{mit dem Gesamtvolumen} \qquad V = \sum_{i=1}^{n} V_i}$$

Beispiel

Von dem unten skizzierten, homogenen Körper sind die Schwerpunktkoordinaten zu bestimmen.
Gegeben: a, b, c, d



Wenn sich ein Körper nicht aus einfachen Teilkörpern (Grundkörpern) zusammensetzt, dann kann der Schwerpunkt mit Hilfe der Integralrechnung bestimmt werden. Es ist hier folgender Grenzübergang anzuwenden:

$$n \to \infty, \qquad G \to dG, \qquad m \to dm, \qquad V \to dV$$

Bei Anwendung dieses Grenzübergangs wird die Summe zum Integral, so dass sich Schwerpunkt, Massenmittelpunkt und Volumenschwerpunkt folgendermaßen ergeben:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{G}\int_{(G)} \vec{r}\cdot dG \qquad \vec{r}_S^{\,(M)} = \frac{1}{m}\int_{(m)} \vec{r}\cdot dm \qquad \vec{r}_S^{\,(V)} = \frac{1}{V}\int_{(V)} \vec{r}\cdot dV$$

mit Gesamtgewicht (–masse, -volumen) $G = \int_{(G)} dG \qquad \left(m = \int_{(m)} dm; \quad V = \int_{(V)} dV\right)$

4.3 Flächenschwerpunkt

In der Festigkeitslehre (TM2) spielt der Schwerpunkt von (ebenen) Querschnittsflächen eine große Rolle (z.B. bei Biegung).

Ausgehend vom Volumenschwerpunkt kann man mit der Annahme einer konstanten Wanddicke (t = const.) des ebenen, flächigen Körpers (z.B. ein Blech) folgende Vereinfachungen aufstellen:

$$V = A\,t, \qquad V_i = A_i\,t, \qquad dV = t\,dA$$

und damit die Wanddicke t heraus kürzen:

Für Flächen aus n Teilflächen A_i (i = 1, 2, …, n) mit bekannten Flächenschwerpunkten $\vec{r}_{S_i} = (x_{S_i}, y_{S_i}, z_{S_i})$ gilt:

Üblicherweise legt man die Fläche in die x-y-Ebene, so dass sich der Flächenschwerpunkt in kartesischen Koordinaten wie folgt ergibt:

Anmerkungen

1. Aussparungen können als negative Flächen $A_i < 0$ berücksichtigt werden.
2. Eine Symmetrielinie ist stets Schwerelinie (d.h. eine Gerade durch den Schwerpunkt), sog. Symmetriesatz.

Für allgemeine, ebene Flächen lässt sich der Flächenschwerpunkt berechnen mit:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{A}\int \vec{r}\,dA$$

Kartesische Koordinaten des Flächenschwerpunktes:

$$x_S^{(A)} = \frac{1}{A}\int_{(A)} x \cdot dA \qquad y_S^{(A)} = \frac{1}{A}\int_{(A)} y \cdot dA$$

Anmerkungen:

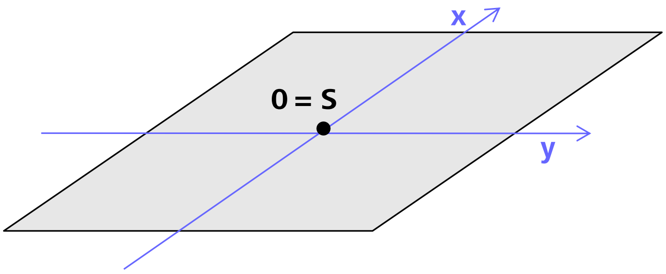
1. Schreibweise: Kurz x_S, y_S statt $x_S^{(A)}$, $y_S^{(A)}$, wenn keine Verwechslung möglich ist
2. Namensgebung: Statisches Moment der Fläche (Flächenmoment 1. Grades)

- bezüglich der x-Achse

- bezüglich der y-Achse

(Flächenmomente 1. Grades werden in der Festigkeitslehre (TM2) bei Schubbeanspruchung benötigt.)

3. Liegt der Ursprung des x-y-Koordinatensystems im Schwerpunkt der Fläche, so werden die Flächenmomente 1. Grades S_x und S_y gleich null.

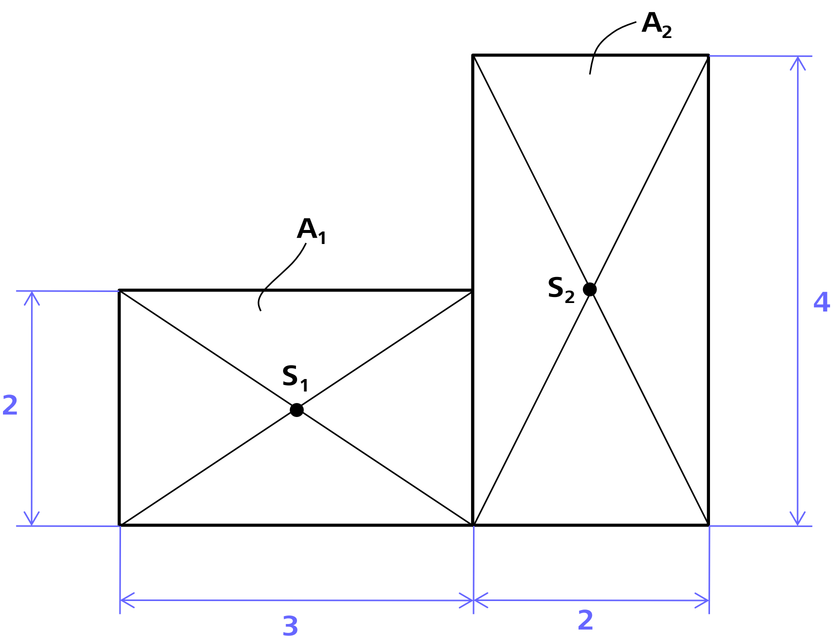


$S_x = S_y = 0$

Beispiele

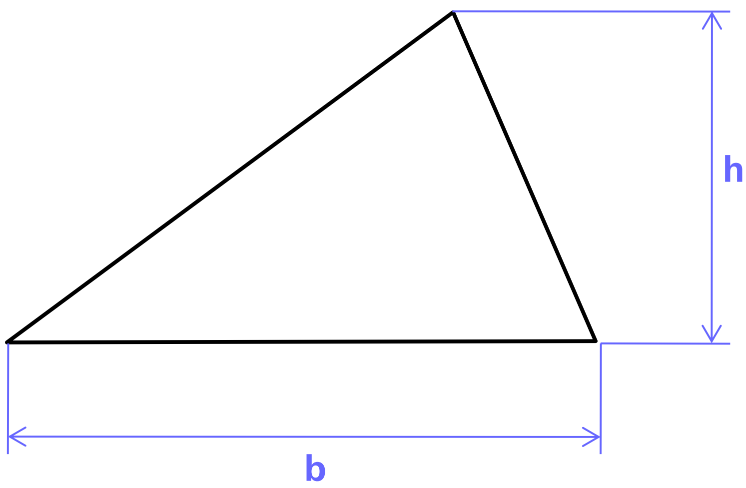
a) L-Fläche

Gesucht: Flächenschwerpunkt S mit Koordinaten x_s, y_s



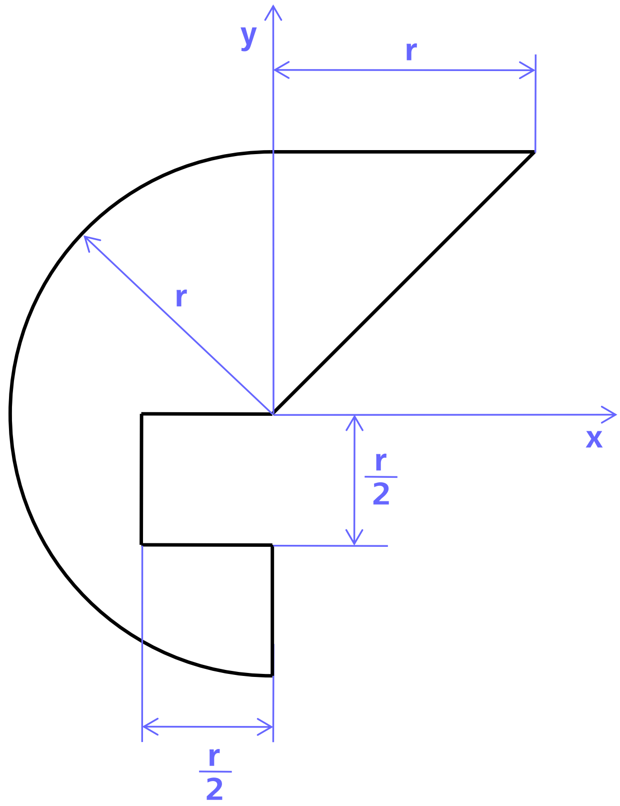
b) Beliebiges Dreieck

Gesucht: y_s Koordinate des Flächenschwerpunktes S



c) Abschließendes Beispiel

Gesucht: Flächenschwerpunkt S mit Koordinaten x_s, y_s



5. Trockene Reibung bei festen Körper
5.1. Einführung

Bisher wurden bei Kontakt zweier Körper nur Kräfte normal zur Berührfläche (Normalkräfte) berücksichtigt. Kräfte tangential zur Berührfläche (Tangentialkräfte) wurden vernachlässigt. (Idealisierung: Glatte Oberfläche).

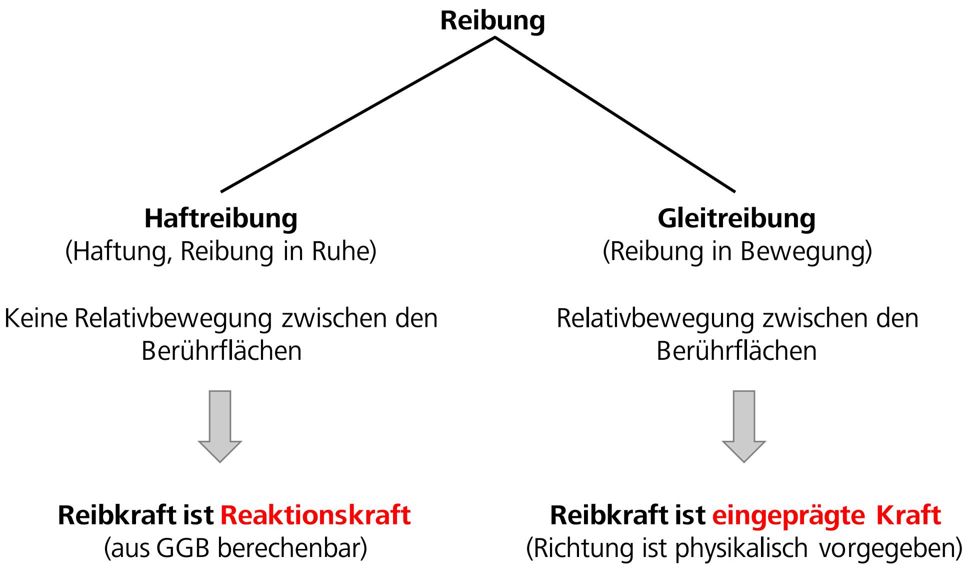
Die in der Realität auftretenden Tangentialkräfte sind **Reibkräfte**, diese sind oft von großer technischer Bedeutung, z.B.

- zwischen Reifen/Schuhsohlen/Leiter und Boden, Schraube/Nagel und Wand, Bremsbelag und Scheibe
- bei kraftschlüssigen Welle/Nabe-Verbindungen (Pressverbindungen, Kegelspannelemente), Reibkupplungen, Riementriebe u.v.m.

Oft ist Reibung jedoch auch unerwünscht, da sie mit Energieverlusten und Abnutzung verbunden ist.

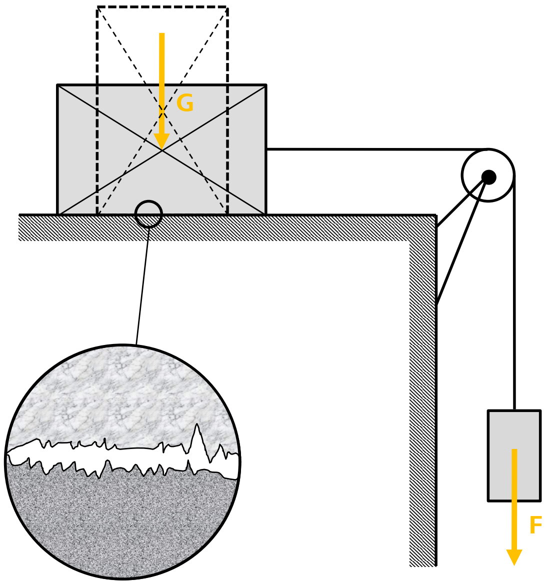
Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der sogenannten **trockenen Reibung** fester Körper (Reibung in Fluiden wird nicht behandelt). Die Berührflächen sind nicht durch einen Schmierfilm getrennt. Es sei hier schon erwähnt, dass die Reibungskräfte quantitativ stark streuen.

Man unterscheidet:



5.2 Haftreibung

Grundlegende Versuche zur Reibung wurden von dem französischen Physiker Coulomb (1781) durchgeführt. Nach ihm ist die Coulombsche Reibung benannt.



Freischnitt und GGB für Haftung (Haftreibung)

Die Experimentelle Erfahrung lässt sich folgendermaßen beschreiben:

1. Die Haftreibungskraft R_0 ist so groß, dass Gleiten verhindert wird (d.h. sie ist als Lagerreaktion aus den GGBn berechenbar). Es gibt jedoch eine Maximalkraft $R_{0.max}$, die maximal wirken kann. Wird diese Maximalkraft überschritten, setzt sich der Körper in Bewegung. Es gilt $R_0 \leq R_{0,max}$. Der physikalische Richtungssinn der Haftreibkraft ist der Bewegungstendenz entgegengesetzt.
2. Die Grenzreibungkraft $R_{0,max}$ hängt von der Beschaffenheit der Flächen und der Normalkraft ab, nicht aber von der Größe der Berührfläche

Diese Erfahrungen werden durch den folgenden, empirischen Ansatz (kein Naturgesetz!) beschrieben:

Haftreibungsansatz (Coulombsches Haftreibungsgesetz)

$$R_0 \leq R_{0,max} = \mu_0 N$$

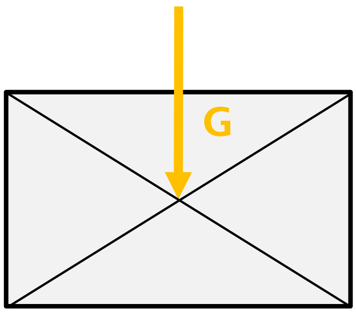
mit R_0: Betrag der Haftreibungskraft
N: Betrag der Normalkraft
μ_0: Haftreibungskoeffizient, Haftreibungszahl (dimensionslos)

Anmerkungen

1) Gleichgewicht herrscht (System bleibt in Ruhe) für eine Kraft $F \leq R_{0,max} = \mu_0 N$
Bewegung tritt ein für eine Kraft $F > R_{0,max} = \mu_0 N$
2) Grobe Anhaltswerte für Haftreibungskoeffizienten μ_0 bei trockener Reibung:

Reibpartner 1	Reibpartner 2	Haftreibungskoeffizient μ_0
Stahl	Stahl	0,15 – 0,17
Bronze	Stahl	0,2 – 0,26
GG	Stahl	0,18 – 0,24
GG	GG, Bronze	0,2 – 0,25
Stahl	Eis	0,03
Holz	Holz	0,4 – 0,65
Leder	Metall	0,6
Lederriemen	GG	0,5 – 0,6
Polytetraflourethylen	Edelstahl	0,08
PA6	Stahl	0,47

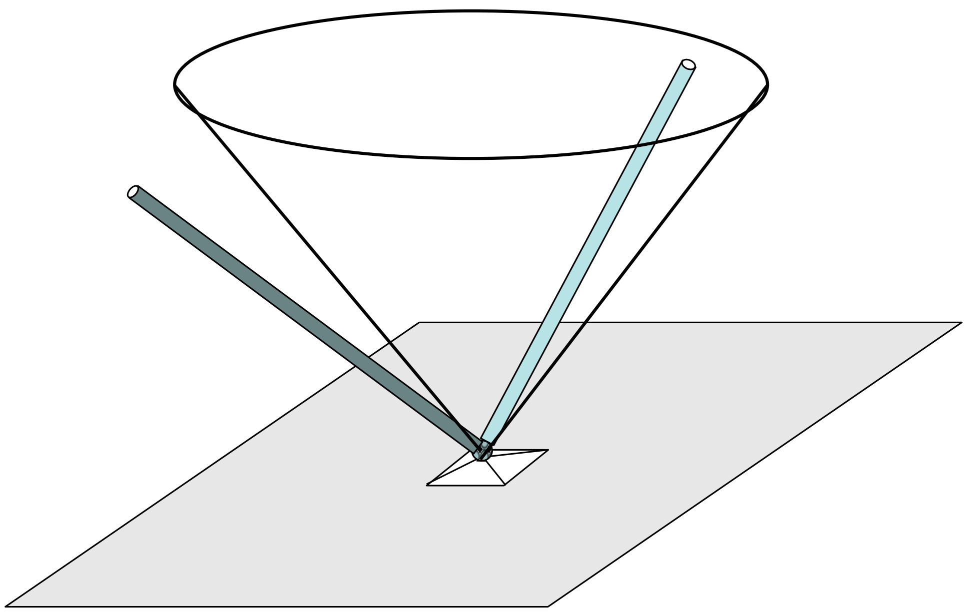
Veranschaulichung des Haftbereiches durch den Haftreibungswinkel ρ_0



Dies bedeutet: Der Körper ist im Gleichgewicht (er haftet), solange die Widerstandskraft $\vec{W} = \vec{N} + \vec{R}_0$ sich im Reibungskegel befindet.

Räumliche Betrachtung

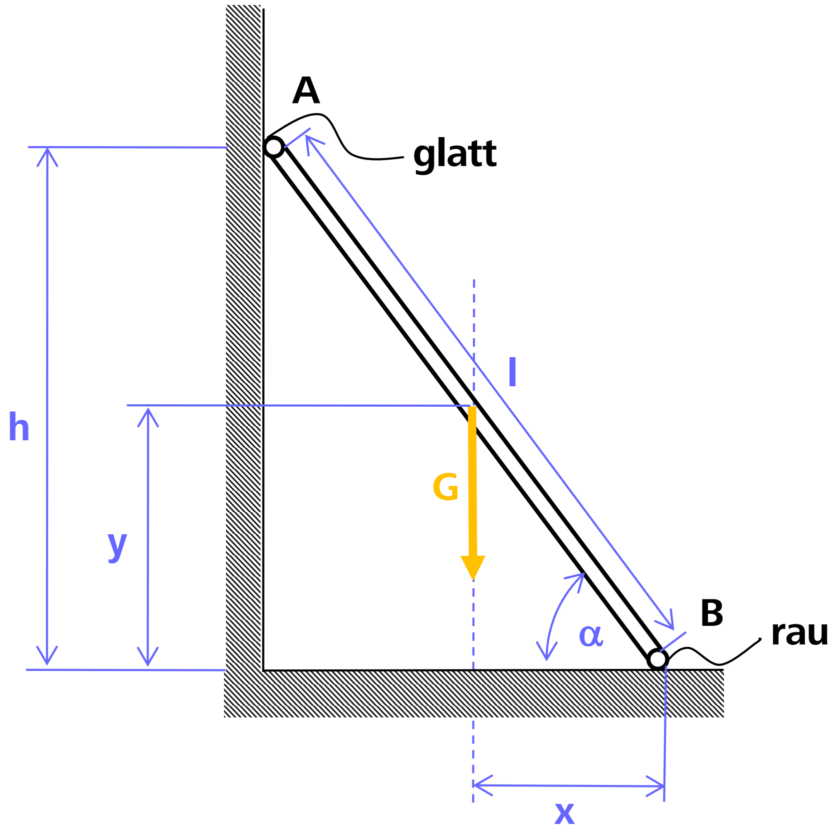
Beispiel: Pendelstütze mit verschieblichem Gelenklager auf horizontaler Unterlage



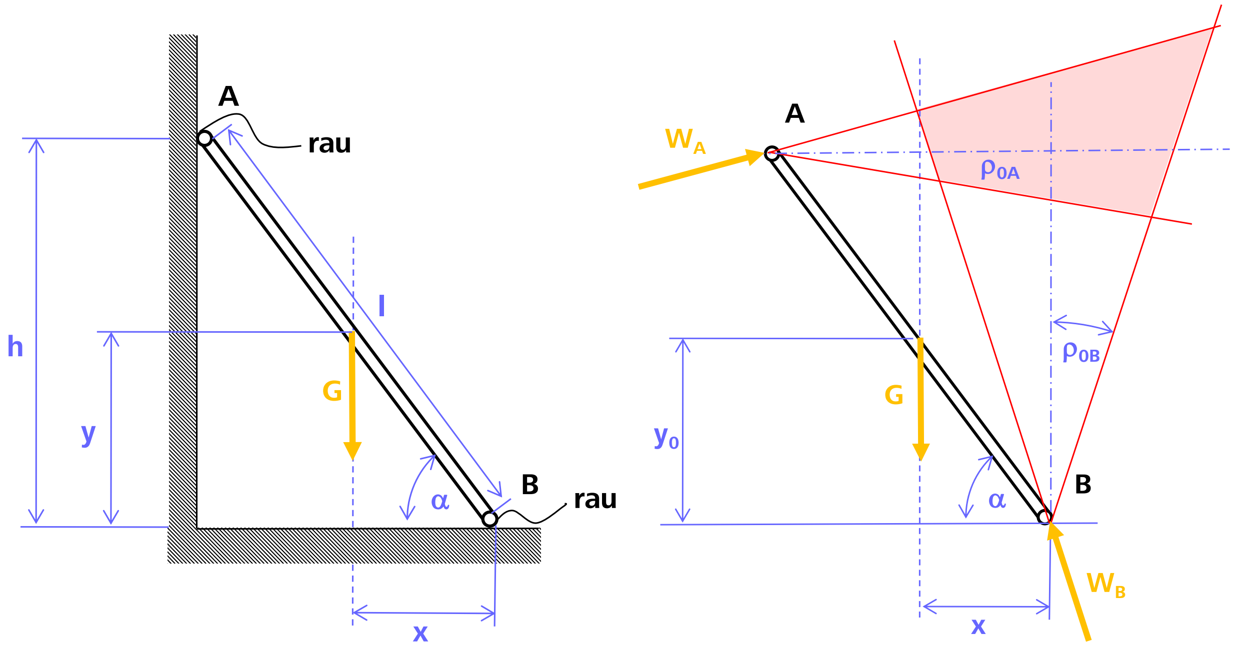
Beispiel

Leiter auf **rauem** Boden und an **glatter** Wand

Frage: Wie hoch kann die Leiter maximal bestiegen werden bei geg. $\mu_0 = \tan \rho_0$?
Gegeben: ρ_0, α, l, G

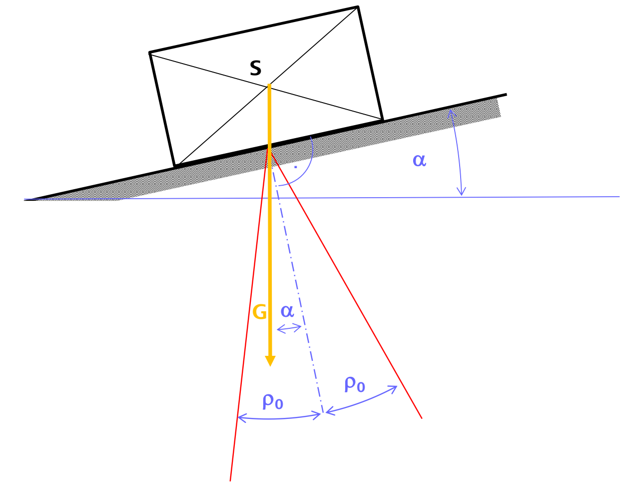


Anmerkung
Bei zusätzlich rauer Wand ist das System statisch unbestimmt. Zur Lösung des Problems müssen i.A. die Verformungen berücksichtigt werden, siehe TM 2)



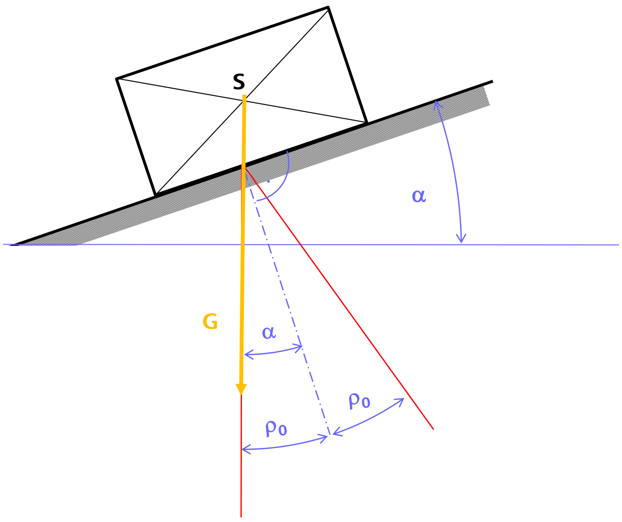
Ergebnis: die maximale Aufstiegshöhe y_0 ist ermittelbar. Die Leiter ist im Gleichgewicht, wenn der Schnittpunkt von $\vec{W}_A, \vec{W}_B, \vec{G}$ innerhalb der markierten Fläche liegt.

5.3 Gleitreibung

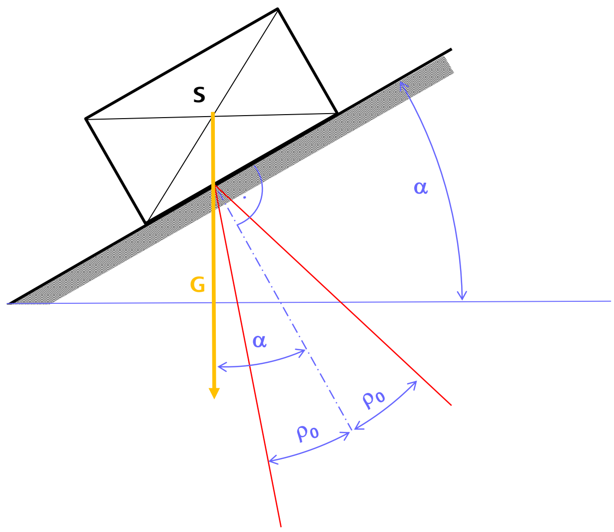


$\alpha < \rho_0$: **Haften**

Die **Haft**reibungskraft $R_0 \leq \mu_0 N$ ist eine **Reaktions- oder Lagerkraft** (aus den GGBn berechenbar!)



$\alpha = \rho_0$: **gerade noch Haften**



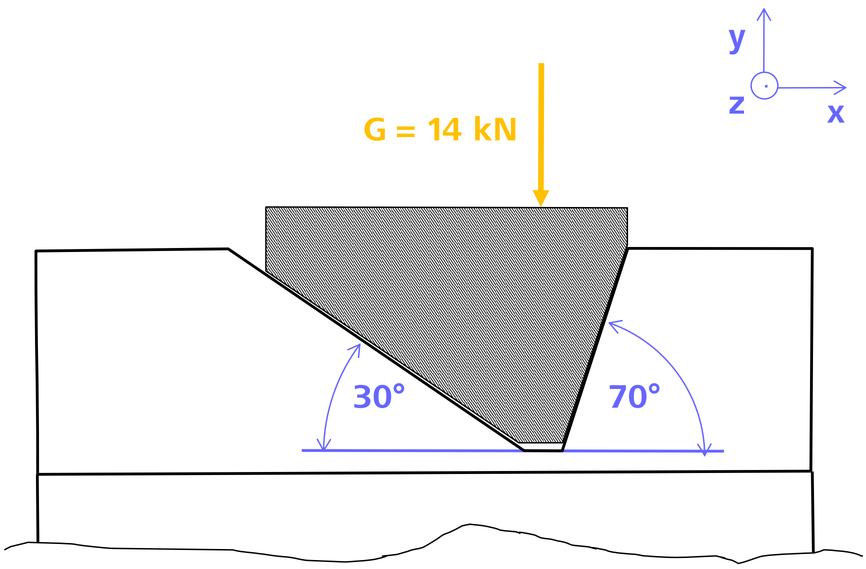
$\alpha > \rho_0$: **Gleiten**

Die **Gleit**reibungskraft $R = \mu N$ ist eine **eingeprägte Kraft** (der Bewegungsrichtung entgegengesetzt!)

Anmerkungen

- Der Gleitreibungssatz lautet $R = \mu \cdot N$ (**empirische Gleichung**, kein Naturgesetz)
- Der Gleitreibungskoeffizient μ (Gleitreibungszahl) einer Werkstoffpaarung ist in der Praxis i.A. **keine Konstante**, sondern von weiteren Parametern abhängig. Dies sind z.B. Relativgeschwindigkeit, Oberflächenbeschaffenheit, Flächenpressung, u.a.), d.h. μ ist eine (oft nichtlineare) Funktion dieser Parameter.
- Die obige Gleichung **vereinfacht** die Beschreibung der komplexen Reibungsvorgänge sehr stark (Rechnerisch einfach, aber manchmal ungenau, dies gilt auch für den Haftreibungsansatz). Im konkreten Fall sind die Abhängigkeiten experimentell zu ermitteln.
- $\vec{R}$ ist der relativen Bewegungsrichtung entgegengesetzt.
- Im Allgemeinen gilt $\mu < \mu_0$ (ineinandergreifen der Oberflächenrauigkeiten wird verhindert)
- Die Gleichung $R = \mu \cdot N$ gilt **nicht für hydrodynamische Schmiermittelreibung** (Dies wird in der Strömungsmechanik behandelt)
- Das Forschungsgebiet **Tribologie** untersucht das Reibungs- und Verschleißverhalten von Werkstoffen.

Beispiel



Es ist eine prismatische Keilnutführung, wie sie z.B. im Werkzeugmaschinenbau verwendet wird, zu berechnen. Der mit einer Kraft $\vec{G} = G \cdot \vec{e}_y$ belastete Keil bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_z$ d.h. beschleunigungsfrei.

Für eine Gleitreibungszahl $\mu = 0{,}07$ ist die dazu notwendige Verschiebekraft $\vec{F}_V = F_V \cdot \vec{e}_z$ zuerst allgemein, dann mit Zahlenwerten zu bestimmen.

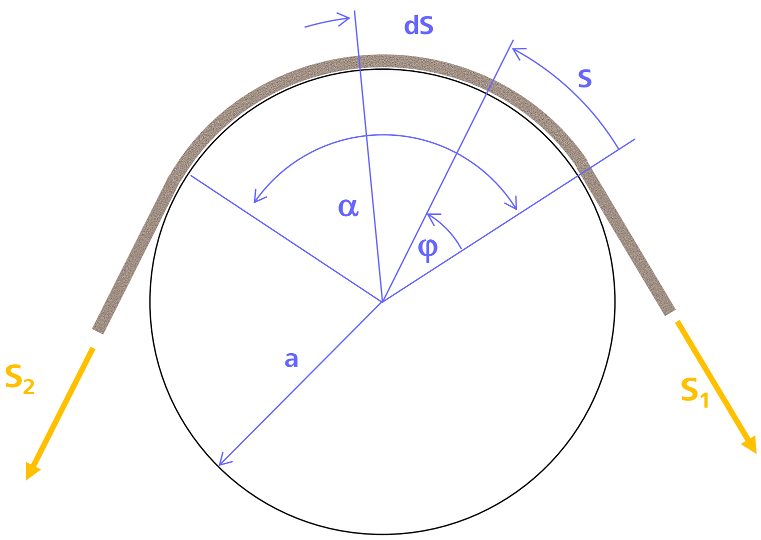
5.4 Seilreibung

Ein spezieller Fall ist die Anwendung des **Coulombschen Haft-(Gleit-)Reibungsansatzes** auf **zylindrische Körper**, die von einem **rauen „Seil"** umschlungen werden (Anwendung z.B. auf Bandbremsen, Riementriebe, Halfter von John Waynes Pferd um das Saloongeländer, u.a.)

Annahmen

- Vollkommen biegsames Seil (Überträgt nur Normalkräfte, keine Querkräfte, kein Biegemoment) über zylindrischer Umführung mit Radius a bei einem Umschlingungswinkel α.
- Gültigkeit des Coulombschen Haft-(Gleit-)Reibungsansatzes, Haft- (Gleit-) reibungskoeffizient μ_0 (μ)

Gesucht ist der Zusammenhang zwischen S_1 und S_2

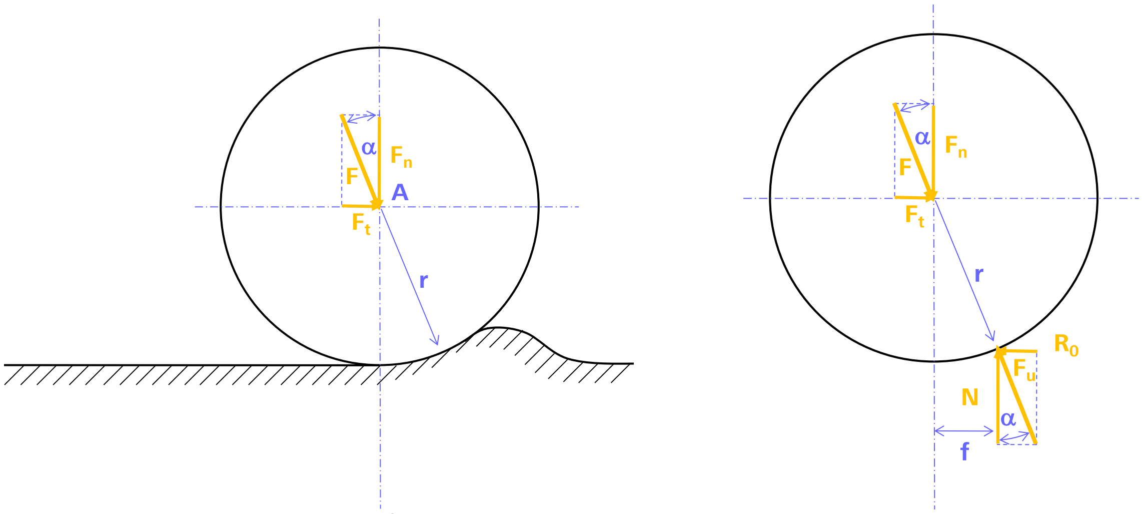


Es gelte: $S_1 > S_2$

5.5 Rollreibung

Auch beim Abrollen von zwei Körpern gegeneinander entsteht Reibung, die sogenannte Rollreibung. Sie wird durch die Deformation von Rad und Fahrbahn verursacht. Rollreibung wird grundsätzlich anders beschrieben als Haft- und Gleitreibungsvorgänge.

- Es entsteht keine Linien- sondern eine Flächenberührung (einfaches Modell: Das Rad drückt sich beim Rollen in die Unterlage ein und schiebt einen Wulst vor sich her)
- Die Wirkungslinien der Normalkraft N ist gegenüber der Traglast F_n parallel verschoben.
- Es entsteht ein bewegungshemmendes Moment (Rollreibungsmoment)



Für konstante Geschwindigkeit folgt aus den GGB:

$\sum M_{iz}^{(A)} = N \cdot f - R_0 \cdot r \cdot \cos\alpha = 0$ mit $\cos\alpha \approx \alpha$ (wegen kleinem Winkel α) folgt:

Rollreibung/Rollwiderstand:	$R_0 = \frac{f}{r} \cdot N \leq R_{0,max} = \mu_0 N$
Rollbedingung:	$\frac{f}{r} \leq \mu_0$
Rollreibungsmoment:	$M_R = N \cdot f$

Anhaltswerte für f [mm] (f heißt Hebelarm der Rollreibung)

- Stahlräder auf Schienen: $f \approx 0{,}5\,mm$
- Wälzlager: $f \approx 0{,}005\,mm \ldots 0{,}01\,mm$

Anmerkungen

- f wird experimentell bestimmt (f ist abhängig von Radlast, Raddurchmesser, Geschwindigkeit, etc.)
- Rollreibung ist meist geringer als Gleitreibung
- Häufig wird der Rollreibungs- und der Lagerreibungskoeffizient zum sog. Fahrreibungswiderstand $R_W = c_W N$ mit c_W: Widerstandszahl zusammengefasst.

6 Innere Kräfte und Momente
6.1. Einführung

Bisher wurden Tragewerke (Bauteile) oder mehrteilige Systeme immer **an den Lagern und Zwischenlagern** von der Umgebung und gegeneinander **freigeschnitten**. Wenn die eingeprägten Kräfte und Momente bekannt sind, können – statische Bestimmtheit vorausgesetzt – aus den Gleichgewichtsbedingungen die **Lager und Zwischenreaktionen** berechnet werden.

Damit sind alle **äußeren Kräfte und Momente** (eingeprägte Kräfte/Momente und Reaktionskräfte/- Momente), d.h. alle Kräfte/Momente, die von außen **auf das Tragwerk** (Bauteil) wirken, bekannt.

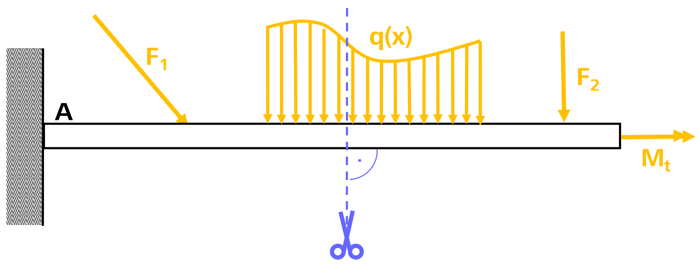
Eine wichtige Ingenieuraufgabe besteht darin, Tragwerke (Bauteile) bezüglich ihrer Abmessungen und des Werkstoffes so auszulegen (bzw. den Nachweis zu führen), dass sie die zu erwartenden **äußeren Belastungen** ertragen können, ohne zu versagen (Festigkeits- und Verformungsnachweise werden in der Festigkeitslehre behandelt). Dazu müssen die **inneren Beanspruchungen** berechnet werden – dies wird später auf den Begriff der Spannungen führen.

In diesem Kapitel wird nun folglich das Tragwerk (Bauteil) **auseinandergeschnitten**, um die **inneren Kräfte und Momente** freizulegen und zu bestimmen. Mit den Mitteln der Statik können **die resultierende Kraft** und **das resultierende Moment** der über der Schnittfläche verteilten Kräfte an dieser Schnittfläche berechnet werden. Die genaue Verteilung der Schnittkräfte über der Schnittfläche wird in der Festigkeitslehre behandelt.

In Kapitel 6.2. werden zunächst Balken und Rahmen behandelt, in Kapitel 6.3 werden sog. Fachwerke untersucht.

6.2 Balken und Rahmen
6.2.1 Schnittgrößen

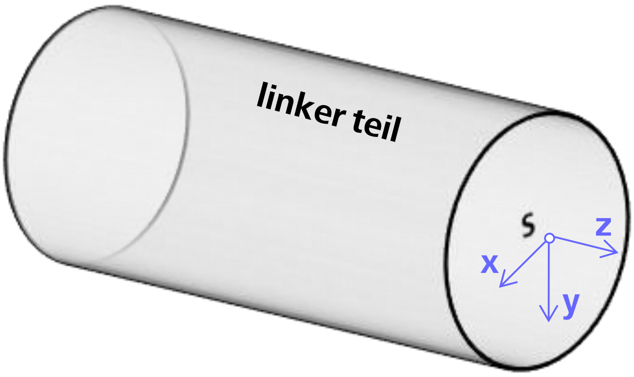
Die flächenhaft verteilten inneren Kräfte bzw. deren Resultierende werden durch einen gedachten Schnitt offengelegt und damit berechenbar gemacht.



Die auftretenden Kräfte werden folgendermaßen bezeichnet:

- o
- o
- o
- o

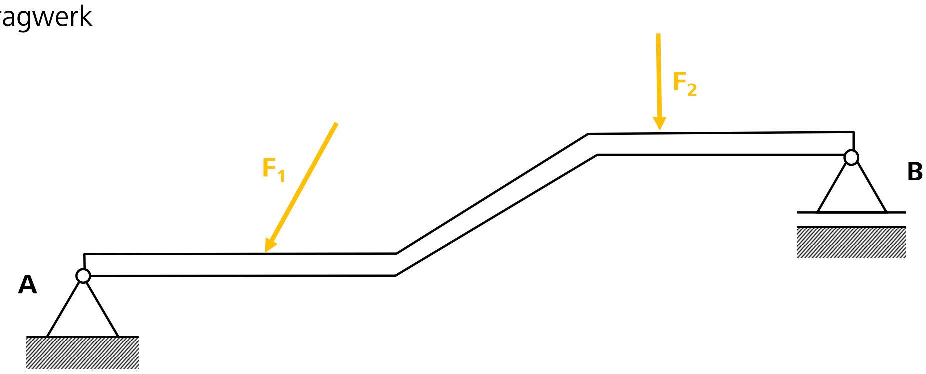
Die 6 möglichen Schnittgrößen am positiven Schnittufer



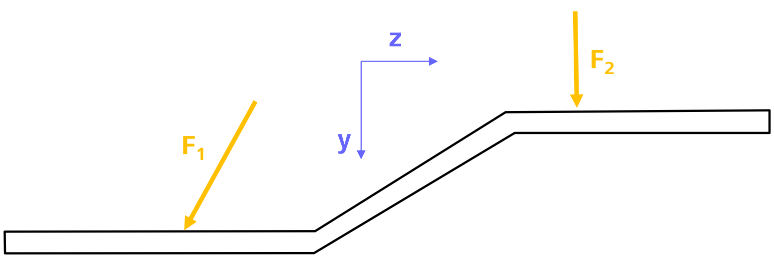
Das Schnittprinzip soll nun zunächst für ebene Balken näher erläutert werden:

Beispiel

Ebenes Tragwerk



1. **Schritt:** Globales Koordinatensystem definieren, freischneiden und Lagerreaktionen berechnen

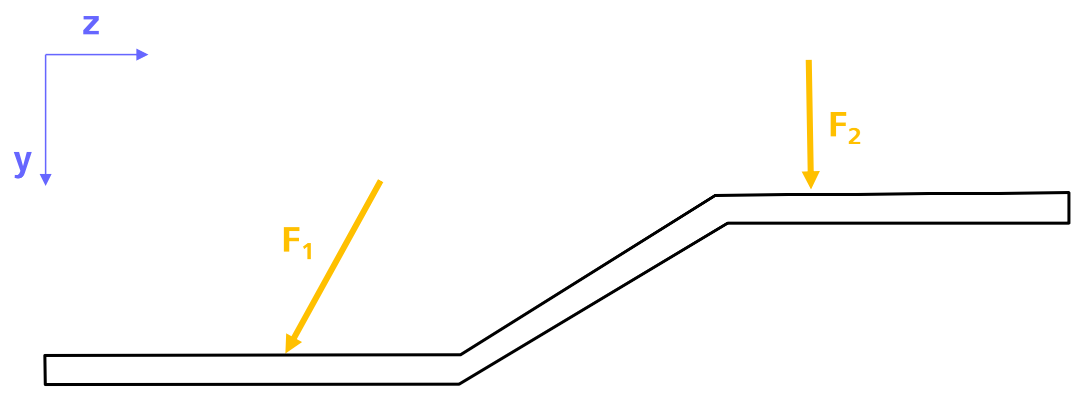


Berechnung der Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen, somit sind alle äußeren Kräfte bekannt.

2. **Schritt:** Festlegung weiterer Koordinatensysteme (ist **streng** einzuhalten!)

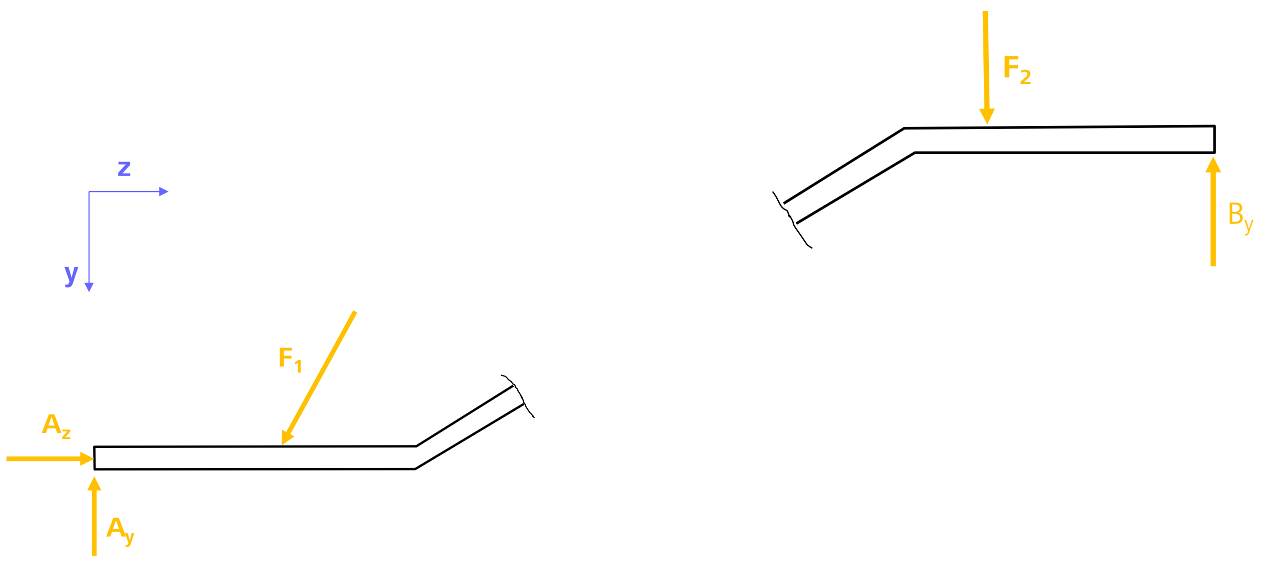
Um das Koordinatensystem festzulegen, wird zunächst die „Unterseite“ des Balkens mit einer gestrichelten Linie markiert.

Global wird die Position des Schnittes durch eine Laufkoordinate s (Bogenlänge) gekennzeichnet. Für jeden Bereich (i.A. gerade Abschnitte des Balkens, hier im Beispiel also drei) wird zusätzlich ein lokales Koordinatensystem (x', y', z'-KOS; x'', y'', z''-KOS, usw.) definiert. Diese Koordinatensysteme werden folgendermaßen orientiert: Die z-Achse zeigt in Richtung der Balkenachse, die y-Achse in Richtung der „Balkenunterseite“.



3. Schritt: Schneiden des Balkens

Der Balken wird nun an beliebiger, aber fester Stelle in **zwei** Teile zerschnitten. Es entstehen so zwei Teilsysteme. In den beiden Schnittflächen werden die Schnittgrößen angetragen. Bezogen auf die beiden Teilsysteme gilt: **ACTIO = REACTIO**!



Die Richtungen der Schnittreaktionen sind (im Gegensatz zu den Lagerreaktionen) **nicht frei wählbar**, sondern durch eine Vorzeichen-Konvention festgelegt!

Zunächst wird das positive Schnittufer definiert:

Am **positiven Schnittufer** zeigt an der Stelle s die lokale z-Achse **vom Körperinneren nach außen**. Am **negativen Schnittufer** zeigt die lokale z-Achse **in das Körperinnere hinein.**

Dann gilt für die Schnittgrößen:

Positive Schnittgrößen zeigen am **positiven Schnittufer** in **positive, lokale Koordinatenrichtung.**

Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen lassen sich dann die Schnittreaktionen berechnen:

a)

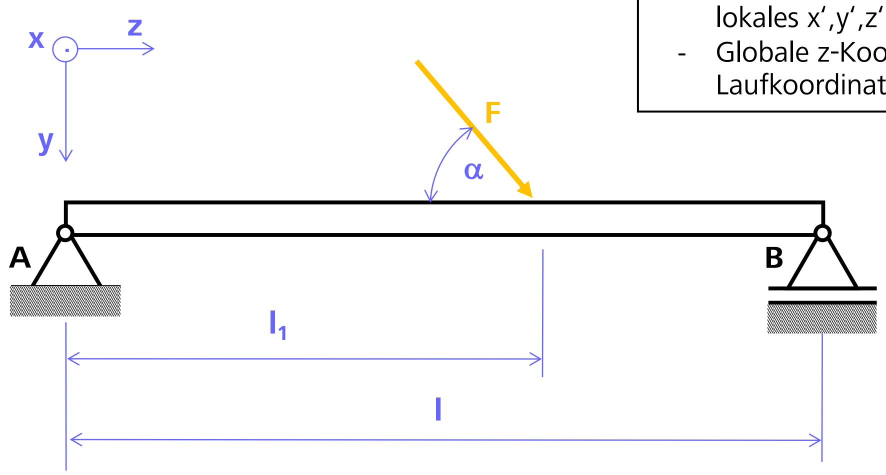
b)

c)

6.2.2 Berechnung und Darstellung der Schnittgrößen

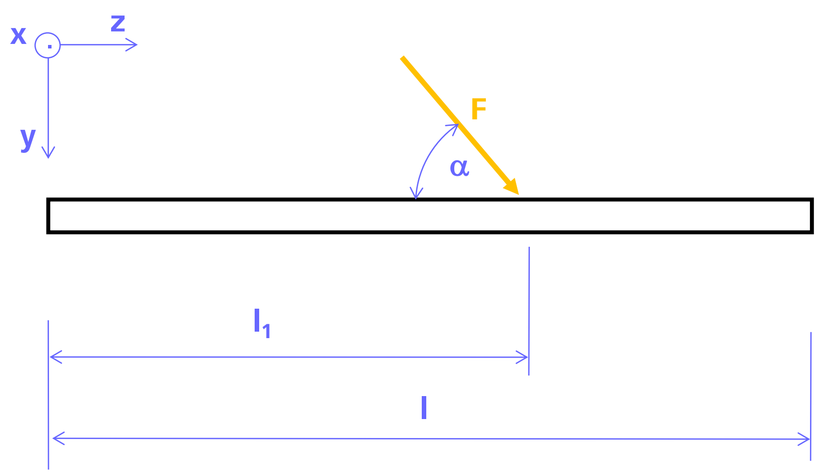
Beispiel
Gerader Balken

Besonderheiten des geraden Balkens
- Globales Koordinatensystem genügt, kein lokales x',y',z'-KOS notwendig
- Globale z-Koordinate ist als Laufkoordinate geeignet



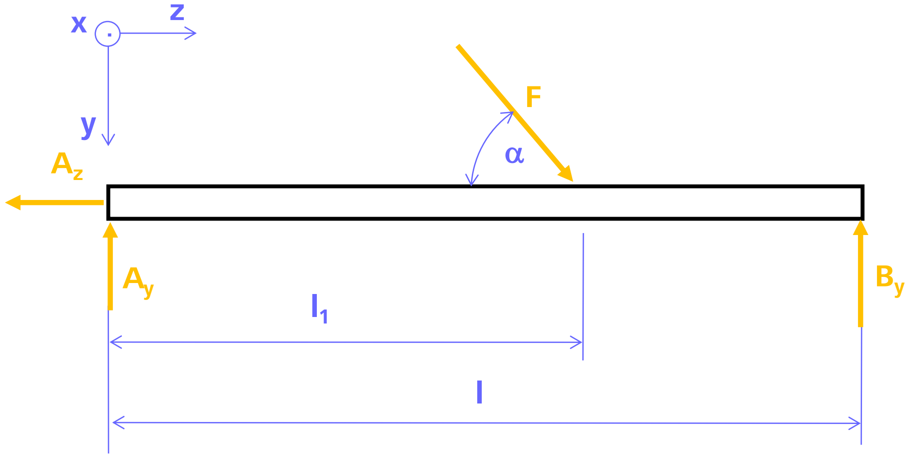
Die Berechnung der Schnittgrößen erfolgt bereichsweise, da Sprünge oder Knicke im N-, Q- und/oder M-Verlauf zu erwarten sind.

1. Schritt: Berechnung der Lagerreaktionen



2. Schritt: Einteilung des Balkens in Bereiche

Ein Bereich beginnt/endet jeweils bei äußeren Ereignissen (äußere Kräfte, Momente – auch von Auflagern (!), Linienlast beginnt/endet, Richtungsänderung der Balkenachse)



3. Schritt: Berechnung des N-, Q-, M-Verlaufes für jeden Bereich (hier: ___ Bereiche)

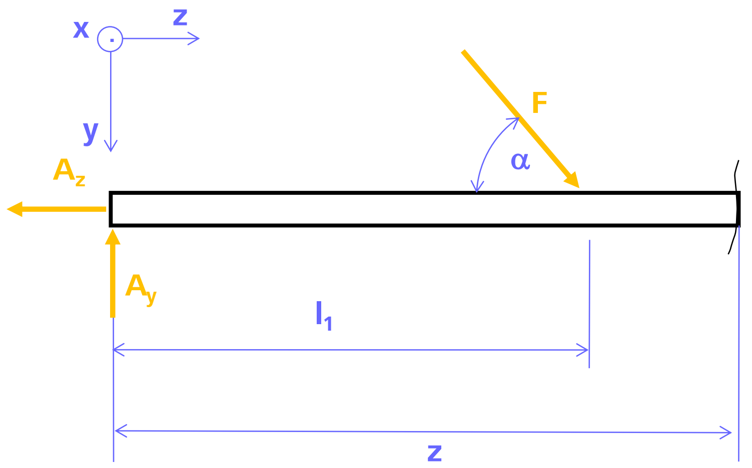
Ergebnisse des Beispiels tabellarisch

Bereich	N(z)	Q(z)	M(z)

Anmerkung
Die Wahl des Schnittufers (positiv oder negativ) zur Berechnung der Schnittreaktionen ist beliebig. Jedoch verringert eine geschickte Wahl des Schnittufers den Berechnungsaufwand.

Beispiel

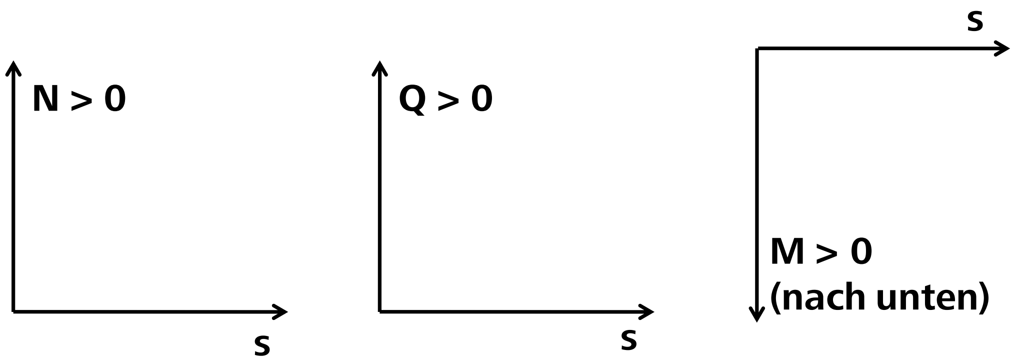
Berechnung der Schnittreaktionen im o.g. Beispiel im Bereich 2 am positiven Schnittufer.



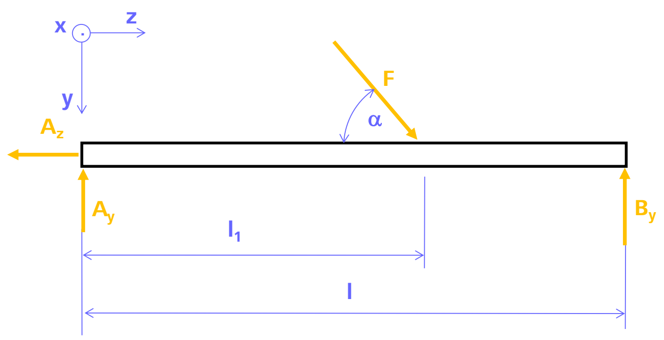
Die Schnittgrößen sind von der Laufkoordinate s (bzw. beim geraden Balken: z) abhängig. Also N(s), Q(s) und M(s) (bzw. beim geraden Balken: N(z), Q(z) und M(z)).

Eine graphische Darstellung ist deshalb sinnvoll und ermöglicht ein leichteres Erkennen der Maximalwerte der Schnittgrößen (für die Festigkeitsrechnung erforderlich).

Folgende Darstellung ist üblich:



Darstellung der Schnittgrößen aus dem o.g. Beispiel:



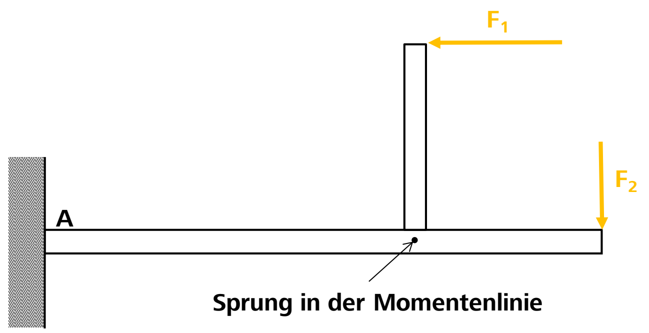
Anmerkungen

- Bei Punktlasten (Einzelkräften) haben die Normalkraft- und die Querkraft-Linien Sprünge an den Laststellen (die Größe entspricht der jeweiligen Lastkomponente). Die zugehörige Momentenlinie ist stückweise linear (stetig mit knicken, Polygonzug).

  Für die technische Bemessung werden die Werte direkt neben dem Lastangriffspunkt verwendet.

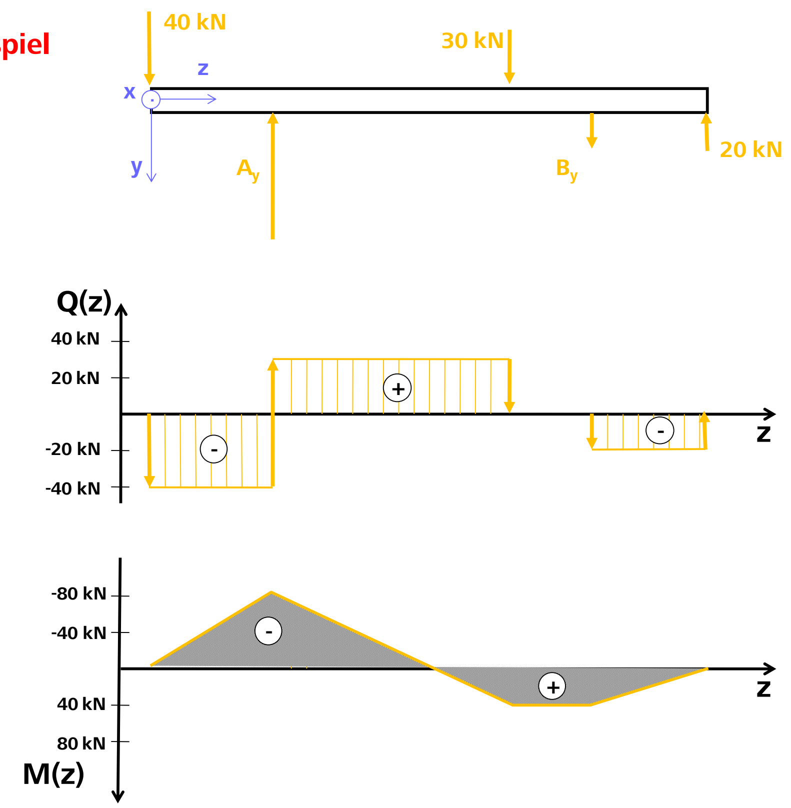
- Auftretende reine Momente (von Kräftepaaren) bewirken Sprünge in der Momenten-Linie.

Beispiel



- Momentenlinien können auch abwechselnd positiv und negativ werden.

Beispiel



- Extremale Biegemomente treten an den Stellen auf, an denen die Querkraft-Linie einen Null-Durchgang hat.

6.2.3 Streckenlasten und Linienlasten

Wiederholung: Als Streckenlasten werden Lasten bezeichnet, die entlang einer Linie kontinuierlich verteilt sind. An einem Punkt wirkt also eine Kraftintensität ([N/m])

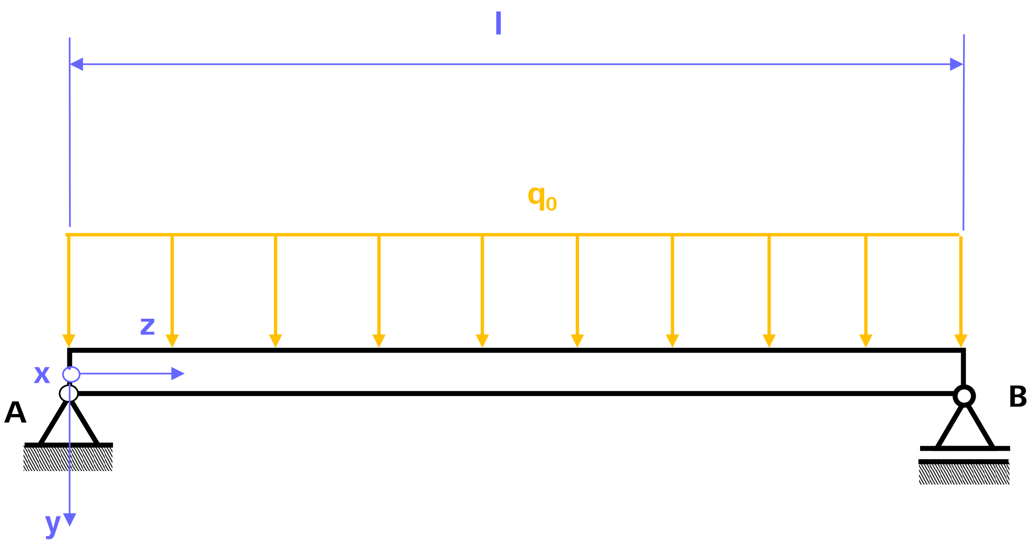
Bezeichnung einer Linienlast:

Einheit:

Einige Beispiele für Streckenlasten sind das Eigengewicht, eine Schneelast oder Schüttungen

Beispiel

Balken mit konstanter Streckenlast q_0



Voraufgabe: Bestimmung der Lagerreaktionen

Anmerkung

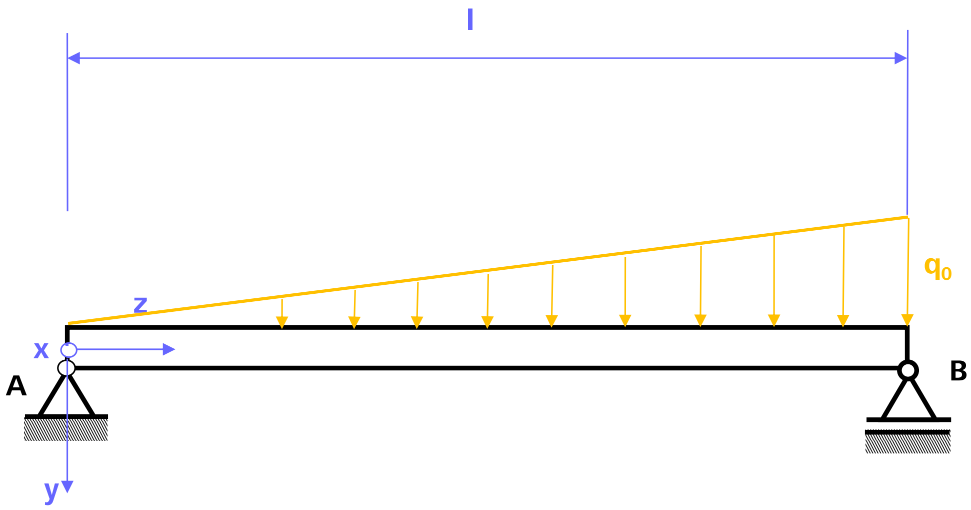
Eine **Streckenlast** lässt sich im Freischnitt generell durch eine **resultierende Einzelkraft** ersetzen mit:

1. Betrag:	Streckenlastfläche
2. Angriffspunkt:	Flächenschwerpunkt der Streckenlastfläche
3. Richtung und Richtungssinn:	wie Streckenlast

ACHTUNG: Diese Ersetzung darf erst **nach Erstellung des Freischnittes** vorgenommen werden!

Beispiel

Balken mit linear ansteigender Streckenlast



Geg.: q_0, l

Ges.: q(z), Q(z), M(z)

Vergleich der Ergebnisse für Q und M aus den drei Beispielen

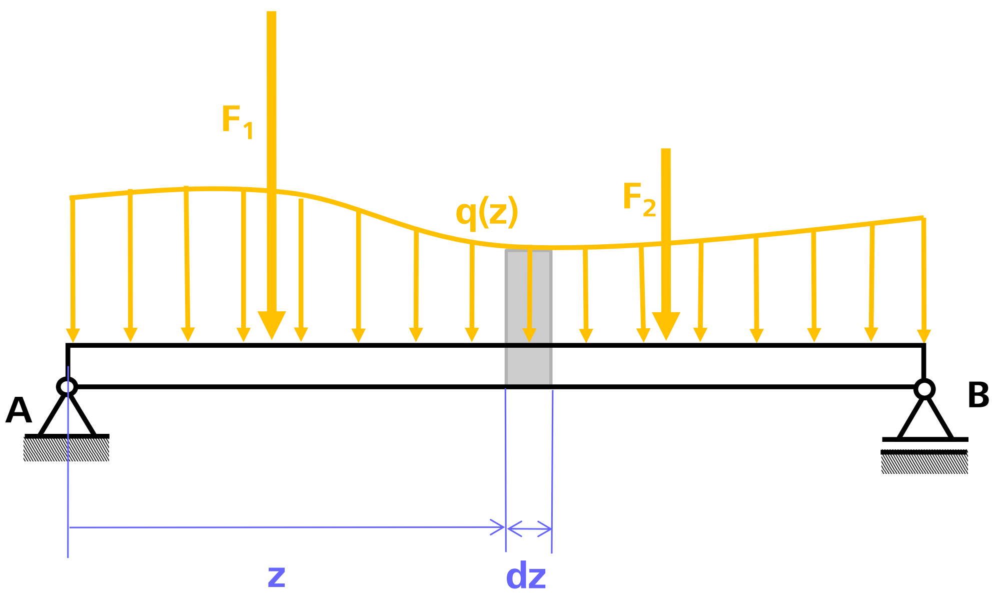
Beispiel	**Einzelkraft**		**Konstante Streckenlast**	**Dreieckslast**
Bereich	$0 \le z \le l_1$	$l_1 \le z \le l$	$0 \le z \le l$	$0 \le z \le l$
Q(z)	$F\sin\alpha\left(1-\frac{l_1}{l}\right)$	$-F\sin\alpha\left(\frac{l_1}{l}\right)$	$\frac{q_0}{2}(l-2z)$	$\frac{q_0}{6}\left(l-\frac{3}{l}z^2\right)$
M(z)	$F\sin\alpha\left(1-\frac{l_1}{l}\right)\cdot z$	$F\sin\alpha\left(l_1-\frac{l_1}{l}\cdot z\right)$	$\frac{q_0}{2}\left(lz-z^2\right)$	$\frac{q_0}{6}\left(lz-\frac{1}{l}z^3\right)$

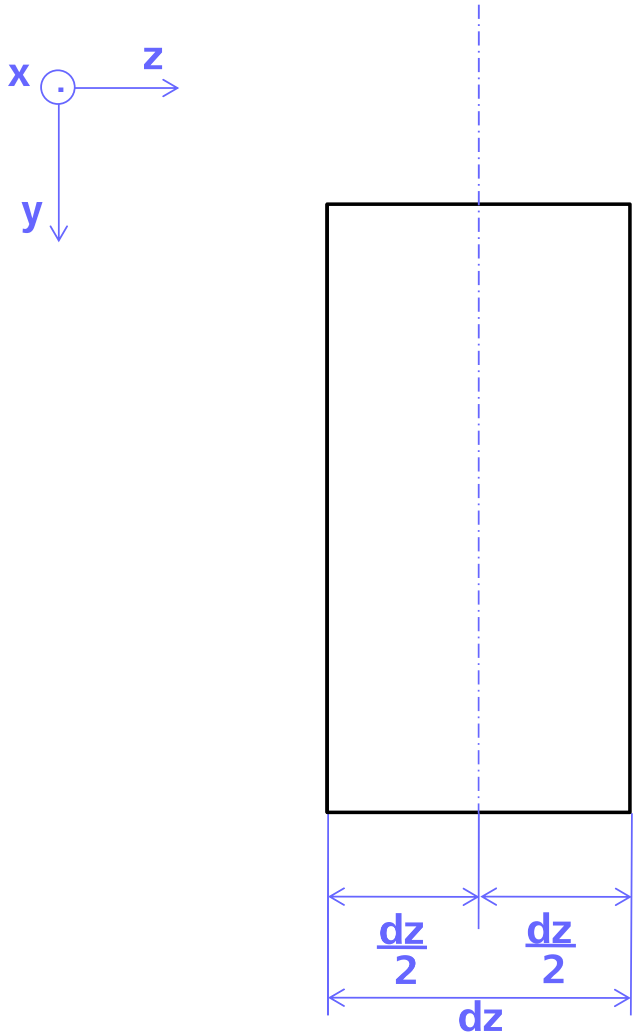
Offensichtlich entsteht Q(z) durch Differenzieren von M(z) bzw. M(z) erhält man durch Integration von Q(z).

Frage: Ist dieser Zusammenhang allgemeingültig?

6.2.4 Zusammenhang zwischen der Streckenlast q, der Querkraft Q und dem Moment M

Zur Ermittlung dieses Zusammenhanges wird aus einem geraden Balken, der mit einer beliebigen Streckenlast q(z) belastet ist, ein infinitesimal kurzes Balkenstück der Länge dz herausgeschnitten. Die Streckenlast wird an dem Balkenstück zur Resultierenden $F_R = q(z)\,dz$ zusammengefasst.





Gleichgewichtsbedingungen am abgeschnittenen Balkenstück:

Anmerkungen und Folgerungen:

1. Zur Schreibweise: $\frac{dQ}{dz} = Q'(z)$; $\frac{dM}{dz} = M'(z)$; $\frac{d^2M}{dz^2} = M''(z)$

2. M(z) ist an der Stelle extremal, an der Q(z) = 0

   Notwendige Bedingung für ein Extremum von M(z): $\frac{dM}{dz} = M'(z) = Q(z) \overset{!}{=} 0$

   Q(z) ist an der Stelle extremal, an der q(z) = 0

   Notwendige Bedingung für ein Extremum von Q(z): $\frac{dQ}{dz} = Q'(z) = q(z) \overset{!}{=} 0$

   Diese Zusammenhänge lassen sich zur vergleichenden Kontrolle von Querkraft und Biegemomenten-Linien verwenden. Die Momentenlinie ist (bei Belastung ohne Kräftepaare) abschnittsweise stetig. Sie hat Knicke an den Angriffspunkten von Einzellasten.

3. Querkraft und Momentenverläufe können statt mit den Gleichgewichtsbedingungen auch durch Integration der Differentialgleichungen (1) und (2) bzw. alternativ durch zweifache Integration der Differentialgleichung (3) bestimmt werden.

4. Zusammenhang zwischen Streckenlastverläufen und Schnittgrößenverläufen

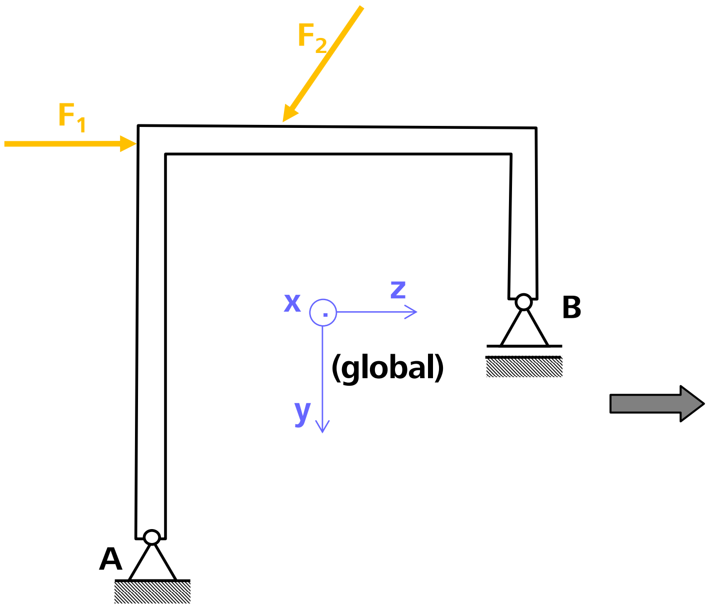
q(z)	**Q(z)**	**M(z)**
Null	Konstant	Linear
Konstant	Linear	Quadratische Parabel
Linear	Quadratische Parabel	Kubische Parabel

5. Unstetige Biegemomentenlinie

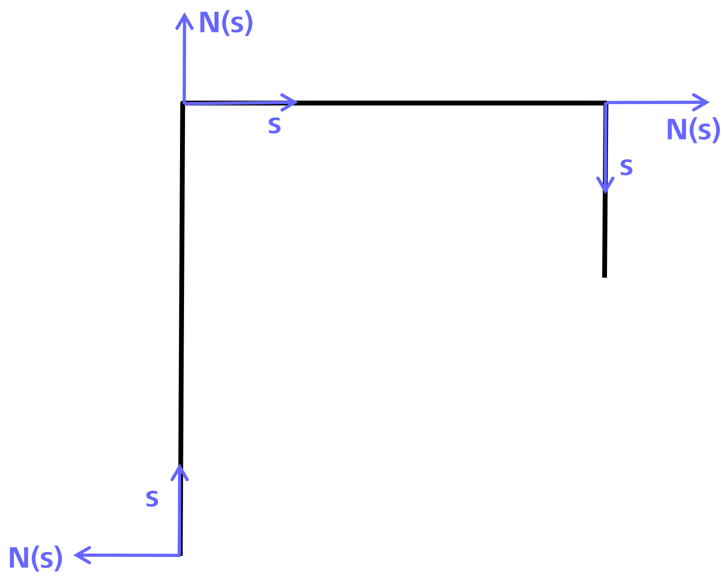
   Sprünge in der Momentenlinie treten auf bei Belastung von Balken durch
   - Angreifende Momente oder
   - Einzel- oder Streckenlasten, wenn Verzweigungen vorhanden sind.

6.2.5 Rahmen

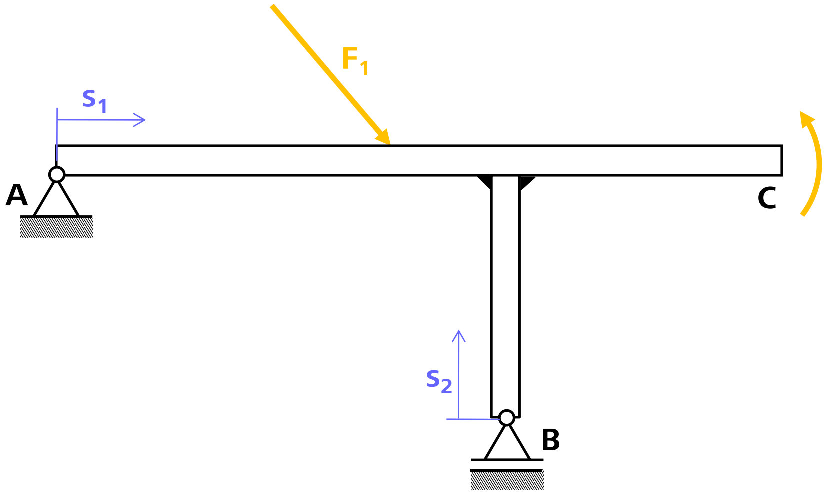
Ebene Rahmen werden in Analogie zur den bisherigen Betrachtungen behandelt. Allerdings werden jetzt die Bogenlänge s als Laufkoordinate und die lokalen x',y',z'-Koordinatensysteme zur Festlegung positiver Schnittgrößen benötigt.



N(s), Q(s), M(s) werden über der Rahmenachse aufgetragen (eine Abwicklung ist unüblich!)



Bei verzweigten Rahmen werden mehrere Laufkoordinaten benötigt. Ansonsten ist die Vorgehensweise die gleiche wie bei allen Rahmen.

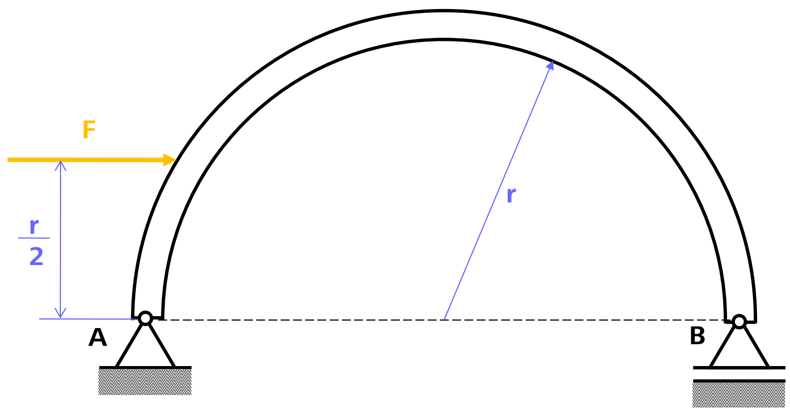


Auch räumliche Rahmentragwerke lassen sich nach der gleichen Vorgehensweise behandeln. Da hier allerdings insgesamt 6 Schnittgrößen auftreten, ist die Rechnung i.A. sehr viel aufwändiger.

Schnittgrößen am Bogenträger

Bogenträger werden prinzipiell genauso behandelt wie Rahmen. Bei kreisförmigen Bogen oder Kreisbogensegmenten kann statt einem kartesischem KOS ein Zylinderkoordinatensystem zur Darstellung der Schnittgrößen vorteilhaft sein.

Beispiel



Zunächst: Freischnitt und Bestimmung der Auflagerreaktionen

6.3 Ebene Fachwerke
6.3.1 Einführung

Unter einem Fachwerk versteht man ein Tragwerk aus geraden Stäben, die in sog. Knoten miteinander verbunden sind. Der Vorteil solcher Konstruktionen ist ihre hervorragende **Leichtbaueignung**, daher werden Fachwerke für viele technische Konstruktionen, z.B. im Brückenbau, für Kräne oder Strommasten eingesetzt.

Quelle: www.stahlbaustudium.de

Quelle: www.tu-berlin.de

Quelle: dpa

6.3.2 Grundlagen der Fachwerktheorie

In der Vorlesung werden nur **ebene Fachwerke** behandelt, die in ihrer Ebene belastet sind. Im Wesentlichen werden neben den Auflagerreaktionen die Schnittgrößen der Fachwerkstäbe berechnet. Unter folgenden, **idealisierenden Annahmen** (sog. **ideale Fachwerke**) vereinfacht sich die Bestimmung der Schnittgrößen wesentlich.

Annahmen:

1. Die **starren, geraden Stäbe** sind in den Knoten zentrisch, gelenkig und reibungsfrei miteinander verbunden, d.h. die Knoten sind **reibungsfreie, ideale Gelenke.**
2. Jeder Stab ist nur an **zwei Knoten** (Gelenke) angeschlossen
3. Äußere Lasten sind als **Einzelkräfte auf Knoten** verteilt

Daraus folgt für die idealen Fachwerke, dass **alle Stäbe Pendelstützen** sind. Sie werden demnach nur durch Normalkräfte belastet (keine Querkräfte, keine Biegemomente).

Die Aufgabe ist die Berechnung der **Stabkräfte (Normalkräfte)** nach Betrag und Richtungssinn, die Unterscheidung zwischen Zug und Druck ist hierbei wichtig (Beurteilung der Knickgefahr!)

In der Praxis sind aber…

1. …manche Lasten längs der Stäbe verteilt (z.B. Eigengewicht, Eis-/Schneelasten). Diese werden entweder vernachlässigt oder statisch äquivalent auf die Knoten verteilt.
2. … Stabanschlüsse häufig geschweißt, genietet oder geschraubt (sog. Knotenbleche). Dieser Einfluss wird vernachlässigt, da der hierdurch entstehende Fehler auf die Anschlussbereiche beschränkt ist.

Im Folgenden werden nur **statisch bestimmte Fachwerke** betrachtet, d.h. das Fachwerk ist …

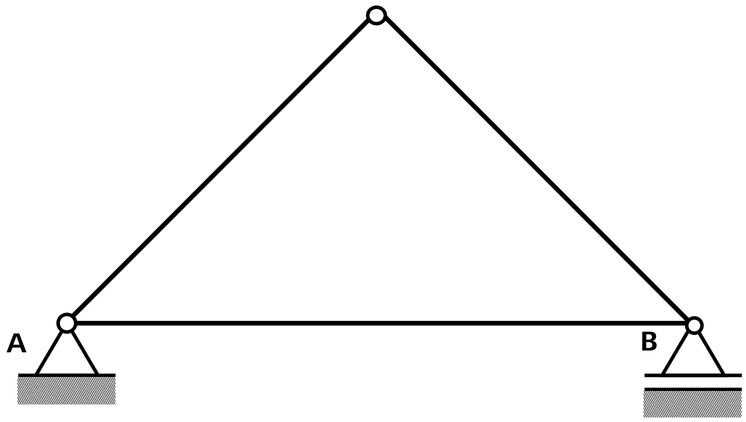
- ✓ … äußerlich statisch bestimmt: Die Lagerreaktionen lassen sich alleine aus den Gleichgewichtsbedingungen errechnen.
- ✓ … innerlich statisch bestimmt: Die Stabkräfte lassen sich bei bekannten Lagerreaktionen allein aus den Gleichgewichtsbedingungen errechnen, die kinematische Stabilität ist gewährleistet.

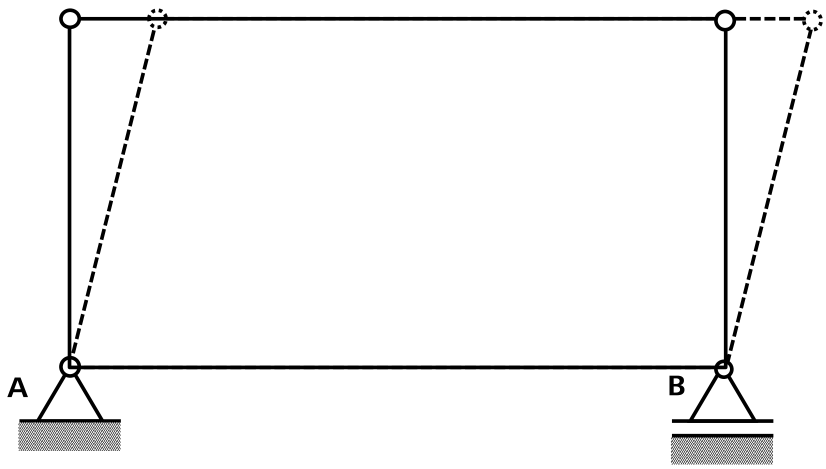
Die innerliche statische Bestimmtheit soll nun im Folgenden untersucht werden.

1. Kinematische Stabilität

Kinematische Stabilität ist gegeben, wenn die Lage aller Knotenpunkte geometrisch eindeutig festliegt (also bei Belastung keine Verschiebung erfolgt). Zur Gewährleistung der Tragfähigkeit muss sich das Fachwerk wie eine ebene Scheibe verhalten.

Beispiele





Forderung: Fachwerk darf weder beweglich noch wackelig sein.

Notwendige Bedingung hierfür:

2. Innerliche statische Bestimmtheit

Voraussetzung für die **innerliche** statische Bestimmtheit ist die **äußere** statische Bestimmtheit.

Auch hier muss gelten: Zahl der verfügbaren Gleichungen muss gleich Anzahl der Unbekannten sein.

Zahl der Gleichungen: Alle Knoten müssen bei Gleichgewicht des Gesamtfachwerkes auch einzeln im Gleichgewicht sein, jeder freigeschnittene Knoten bildet eine zentrale Kräftegruppe mit 2 GGBn (eben).

Zahl der Unbekannten: ___ Stabkräfte und ___ Lagerreaktionen

Notwendige Bedingung für innerliche statische Bestimmtheit:

Diese Bedingung ist auch **hinreichend** für sog. **einfache Fachwerke** (Dreiecksfachwerke), die **nach dem 1. Bildungsgesetz** aufgebaut werden.

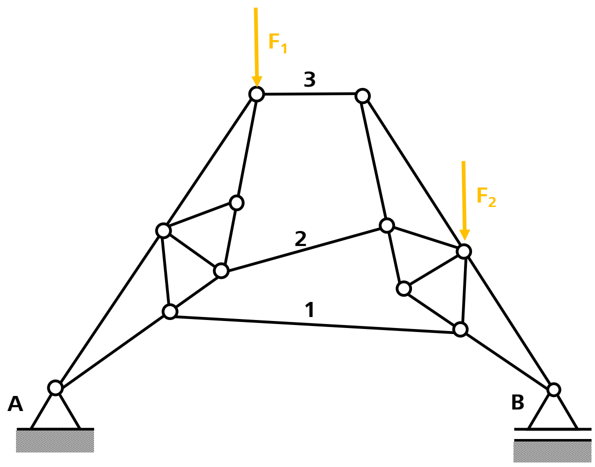
1. Bildungsgesetz

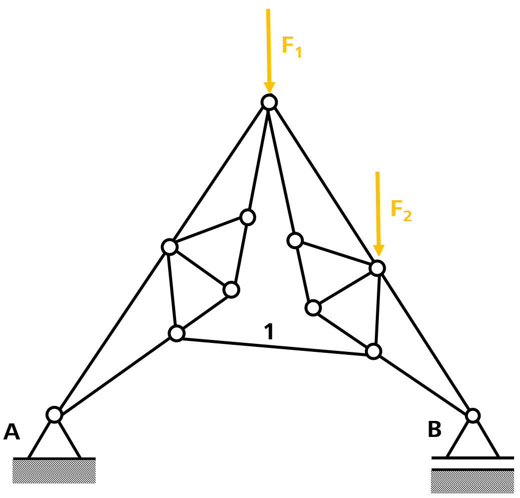
Beschreibung	Beispiel
Grundfigur: Stab mit zwei Knoten	
Weiterer Fachwerksaufbau: Anschluss je eines weiteren Knotens mit zwei nicht-parallelen Stäben (sog. Stabzweischlag), sog. Dreiecksaufbau.	

2. Bildungsgesetz

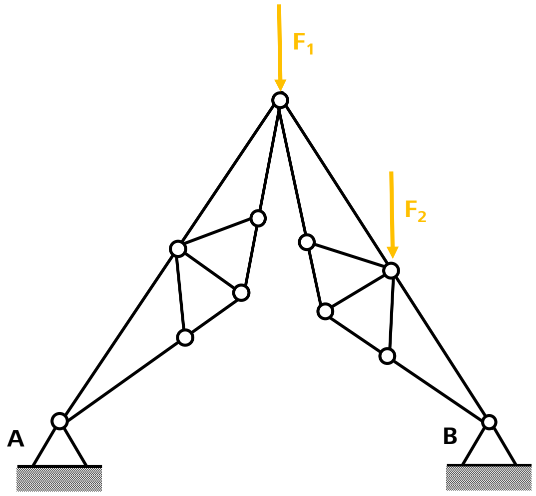
Zwei nach dem 1. Bildungsgesetz aufgebaute Fachwerke werden durch 3 Stäbe verbunden, die nicht alle parallel und nicht zentral sein dürfen. An die Stelle von 2 Stäben kann auch ein beiden Fachwerken gemeinsamer Knoten treten.

Beispiele:





Mit Fachwerken lassen sich auch Gebilde erzeugen, die einem Dreigelenksbogen entsprechen:



Bezeichnung von Stäben

1. Zugstab

Stabkraft (Normalkraft) zeigt ______________________________

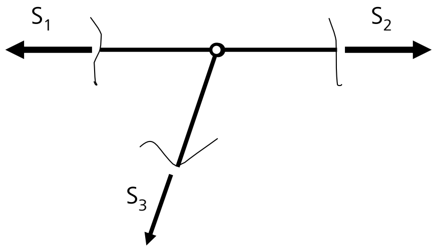
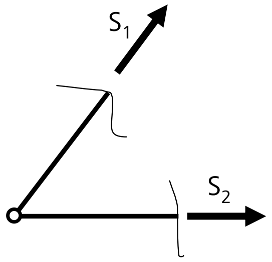
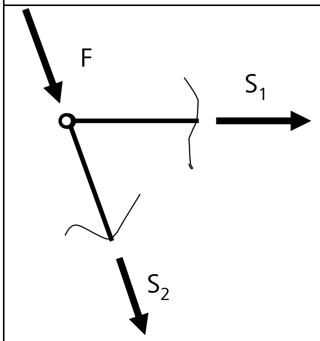
2. Druckstab

Stabkraft (Normalkraft) zeigt ______________________________

3. Nullstab

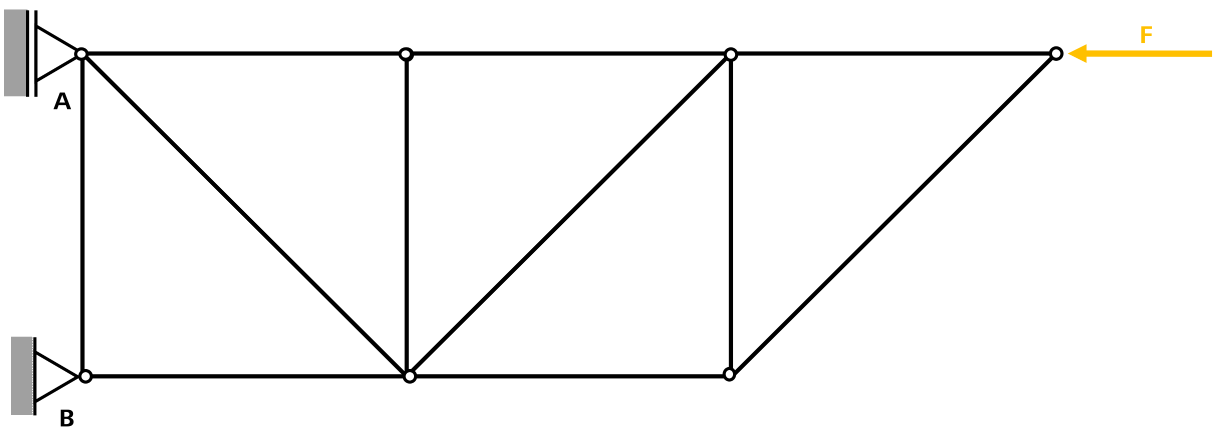
Stabkraft (Normalkraft) ist ______________________________

Einige Nullstäbe lassen sich schon vorab erkennen. Es gelten folgende drei Regeln

Skizze	Begründung	Nr. der Regel
	Unbelasteter 3-stäbiger Knoten Zwei Stäbe haben die gleiche Richtung, dann ist der dritte Stab ein Nullstab. $S_{\S} = 0$	1
	Unbelasteter 2-stäbiger Knoten Beide Stäbe sind Nullstäbe. $S_1 = S_2 = 0$	2
	Belasteter 2-stäbiger Knoten Kraft zeigt in Richtung des einen Stabes (hier S_2). Anderer Stab ist dann Nullstab. $S_1 = 0$	3

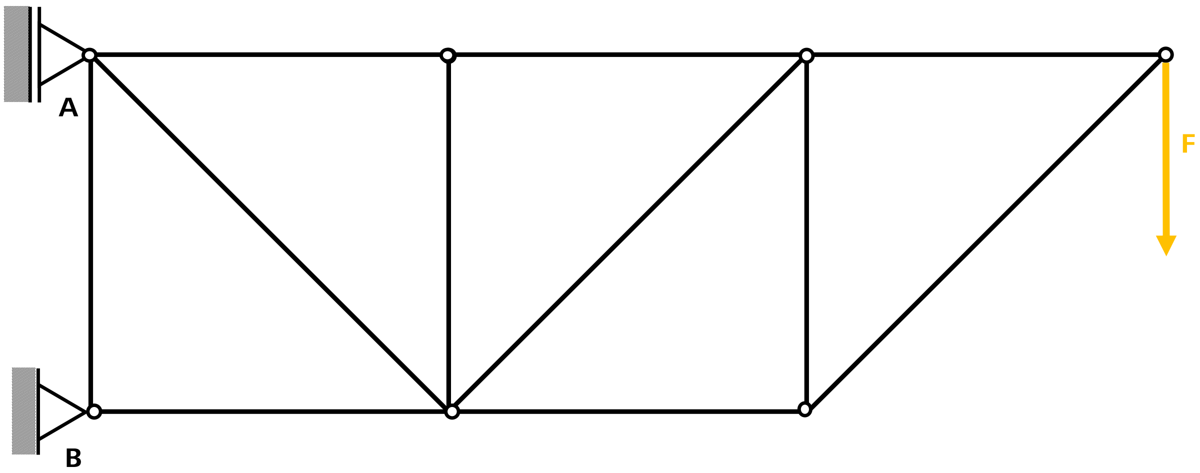
Beispiel

Statisch bestimmt gelagertes, einfaches Fachwerk,
Lastfall 1



Nullstäbe:

Lastfall 2



Nullstäbe:

Man erkennt:

1.

2.

Ermittlung von Stabkräften

- nach dem **Knotenpunktverfahren**

  Das Knotenpunktverfahren ist ein allgemeines Verfahren und bei statisch bestimmten Fachwerken **immer anwendbar**. Es werden hierbei **immer alle Stabkräfte** ermittelt (Stabkräfte werden **grundsätzlich als Zugkräfte** angenommen)

  Die Ermittlung erfolgt durch das Freischneiden aller k Knoten, für jeden Knoten werden die Gleichgewichtsbedingungen angewendet

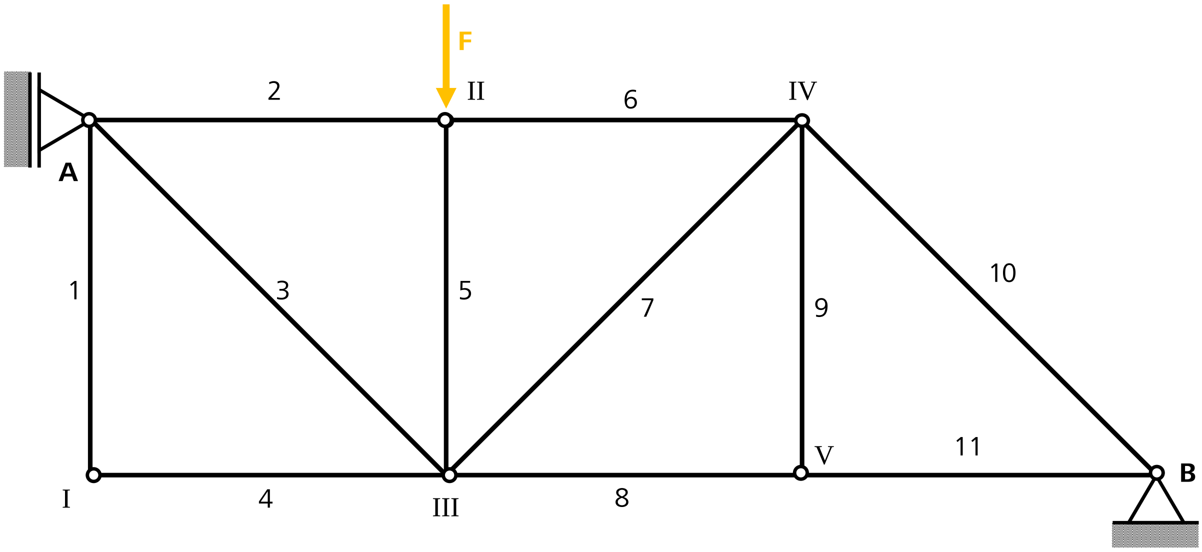
  Für jeden Knoten gilt:

- nach dem **Ritterschen Schnittverfahren** (sog. Ritterschnitt)

- **auf numerischem Weg**: Die Berechnung komplizierter, meist hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke erfolgt heute nur noch numerisch, z.B. mit der sog. Verschiebungsmethode.

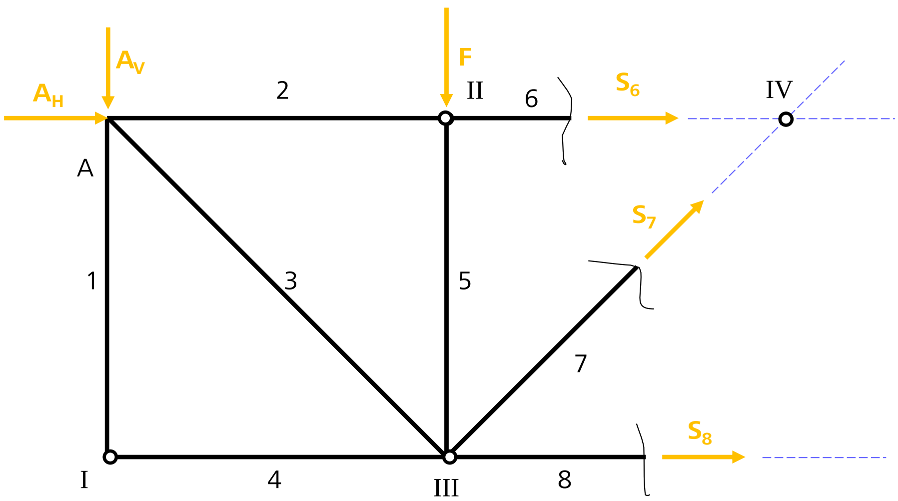
6.3.3 Der Ritterschnitt

Zur Bestimmung einzelner Stabkräfte bietet sich das Rittersche Schnittverfahren an. Ein Beispiel für ein solches Fachwerk ist in folgendem Bild dargestellt. Zunächst werden alle Auflagerreaktionen (Im Beispiel Reaktionen in A und B) bestimmt, so dass am Fachwerk nun alle äußeren Kräfte bekannt sind.



Das Fachwerk wird nun derart in **zwei Teile** zerschnitten, dass **maximal drei Stäbe mit unbekannter Stabkraft** geschnitten werden. Diese Stäbe dürfen dabei **nicht alle zentral** sein. Auch Nullstäbe zählen dabei zu den bekannten Stabkräften.

In diesem Beispiel werden die Stäbe 6, 7 und 8 geschnitten. Diese Stabkräfte sind alle unbekannt, die drei Stäbe sind nicht zentral.



Das Rittersche Schnittverfahren wendet jeweils eine Momentenbedingung an, um eine Stabkraft zu berechnen. Dabei werden die beiden in dem jeweiligen Rechenschritt **nicht** berechneten Stabkräfte zum Schnitt gebracht und das Momentengleichgewicht um diesen Schnittpunkt gebildet. In dieser Momentengleichung ist die gesuchte Stabkraft als einzige Unbekannte enthalten. Dieser Momentenbezugspunkt wird auch als Ritterpunkt bezeichnet.

Im Beispiel wird z.B. die Kraft S_8 gesucht. Zur Berechnung werden die beiden anderen unbekannten Schnittkräfte (S_6, S_7) zum Schnitt gebracht (hier Punkt IV) und um diesen Punkt das Momentengleichgewicht aufgestellt.

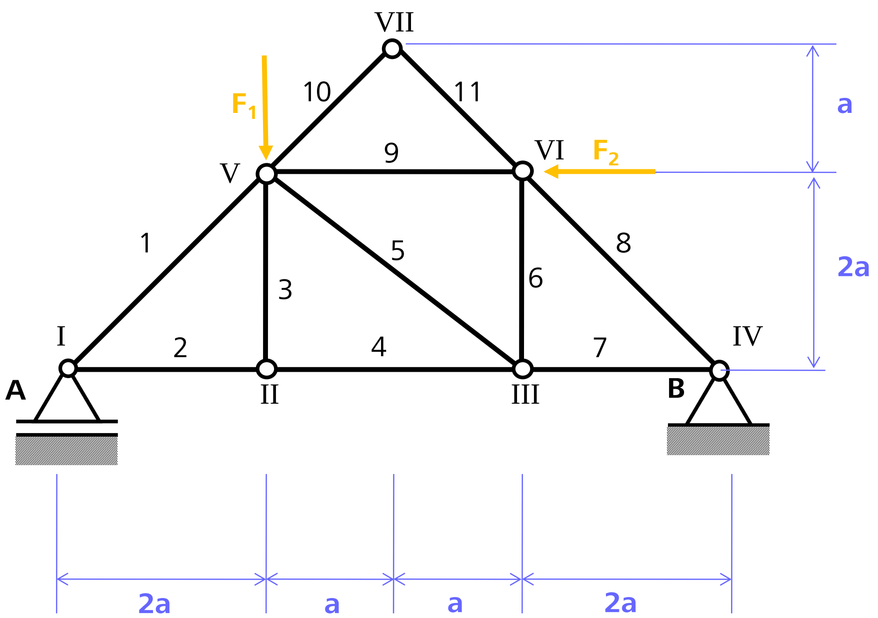
Wird die Kraft S_7 gesucht existiert hierzu kein Ritterpunkt (S_6 und S_8 sind parallel und haben damit keinen Schnittpunkt). Hier muss (wie sonst auch üblich) mit den 3 Gleichgewichtsbedingungen gearbeitet werden.

Beispiel

Das abgebildete, ebene Fachwerk wird mit zwei Kräften F_1 und F_2 belastet.

Gegeben: $F_1 = 900$ N
$F_2 = 300$ N
A

Gesucht: Stabkräfte S_4, S_5, S_6, S_7, S_9 mittels Ritterschnitt



Ergänzende Bemerkungen

- Raumfachwerke werden prinzipiell genauso behandelt wie ebene Fachwerke
- Die Ermittlung der Stabkräfte kann auch mittels graphischer Verfahren erfolgen:
    - Cremona-Plan für einfache Fachwerke
    - Hennenbergsches Stabtauschverfahren für nicht-einfache Fachwerke

  die jedoch in der Praxis numerischen Lösungsverfahren gewichen sind.

Anhang A
Übungen zur Vorlesung Statik

Aufgabe S1

An einem Ring H greifen die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ unter dem Winkel α und β gegenüber der horizontalen x-Achse an.

1. Man berechne die Resultierende $\vec{F}$ von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$
   a. In ihren Komponenten bzgl. des (x,y)-Koordinatensystems
   b. In Betrag und Richtung
2. Für :

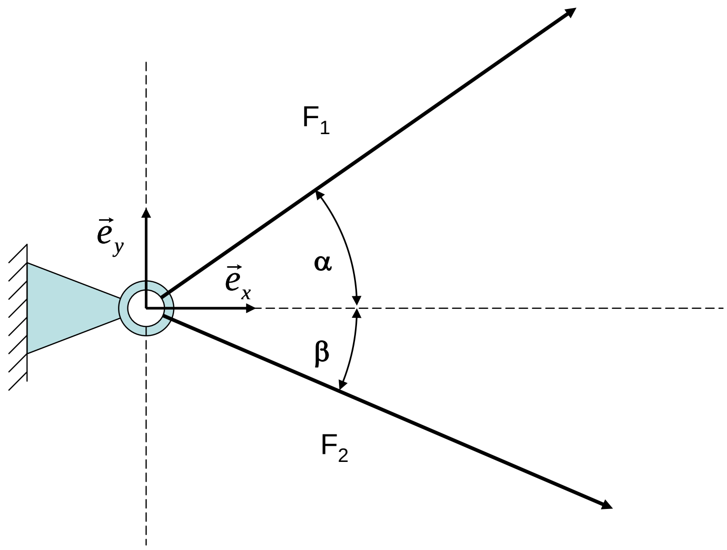
   $F_1 = |\vec{F}_1| = 50\ N$

   $F_2 = |\vec{F}_2| = 60\ N,$

   $\alpha = 30°$ und $\beta = 45°$

   bestimme man zeichnerisch Horizontal- und Vertikalkomponente der Kraft $\vec{H}$, mit der der Ring von der Umgebung gehalten wird. (Man wähle den Kräftemaßstab $m_f = 10 \frac{N}{cm}$)

   Lösung: H = 87,5 N

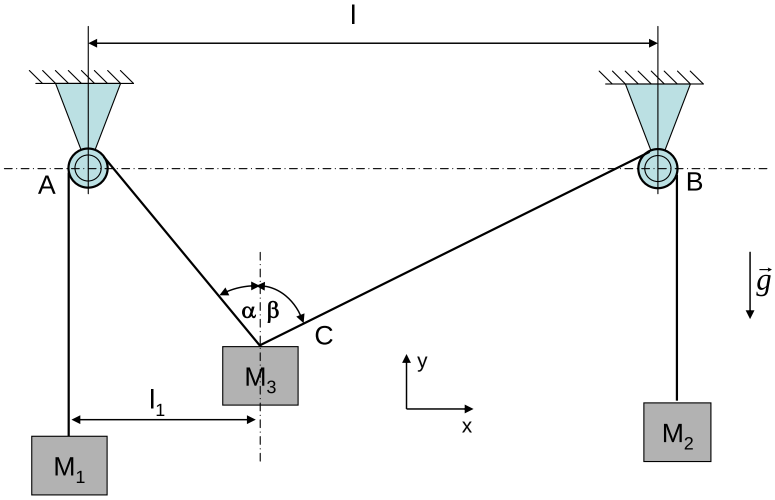


Aufgabe S2

An den Enden eines Seiles, das reibungsfrei über die auf gleicher Höhe im Abstand l befindlichen Rollen A und B mit vernachlässigbarem Radius läuft, hängen die Massen M_1 und M_2. An diesem Seil wird zusätzlich noch eine Masse M_3 so befestigt, dass sich das System im Gleichgewicht befindet.

1. Wie groß sind die Seilkräfte in den Abschnitten AC und BC?
2. Man berechne die Winkel α und β, die die Seilabschnitte mit der Vertikalen bilden
3. Für 1,5 M_1 = 2M_2 = M_3 = 2M bestimme man zeichnerisch das Verhältnis des Abstandes l_1 der Wirkungslinien der Schwerkräfte von M_1 und M_3 zum Abstand l ($m_f = \frac{1}{3}\frac{Mg}{cm}$, $m_l = 0{,}2\frac{l}{cm}$).

Lösung: $\frac{l_1}{l} = \frac{2}{5}$



Aufgabe S3

Ein Knotenblech wird über 6 angeschweißte Stäbe durch äußere Kräfte belastet. Ihre resultierende Wirkung muss bekannt sein, um dem Konstrukteur eine geeignete Befestigung des Bleches zu ermöglichen.

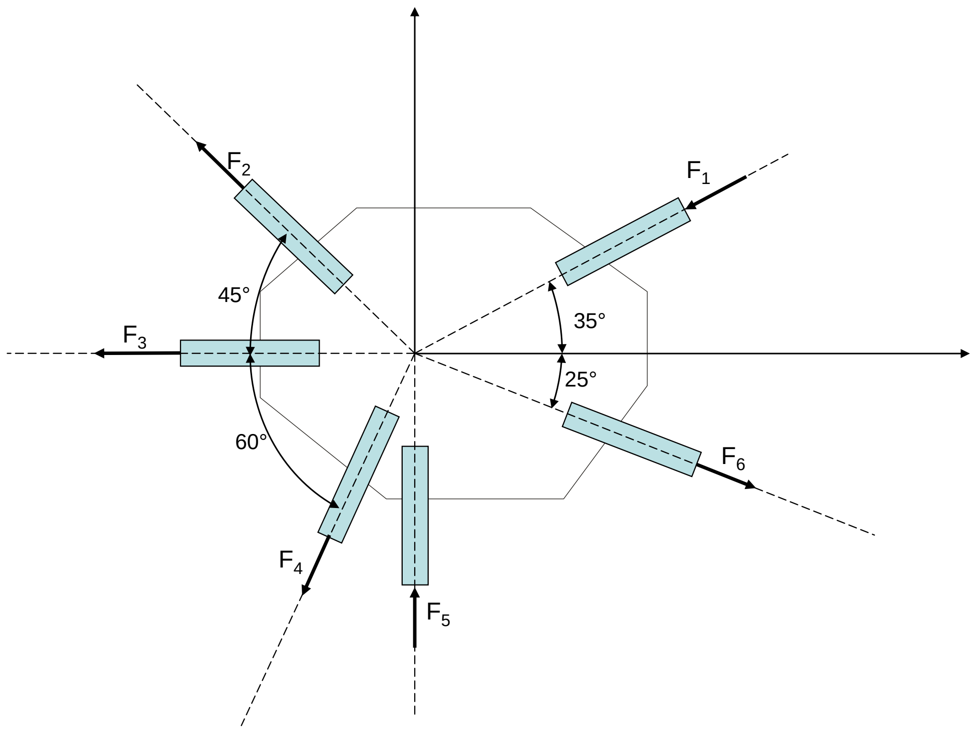
Man ermittle die Resultierende der äußeren Kräfte nach Betrag und Richtung

1. zeichnerisch $(m_f = 20\frac{N}{cm})$
2. rechnerisch

und zeichne sie in einen Lageplan ein.

Zahlenwerte: $F_1 = 70$ N, $F_2 = 60$ N, $F_3 = 80$ N, $F_4 = 90$ N, $F_5 = 50$ N, $F_6 = 80$ N

Lösung: F = 164 N



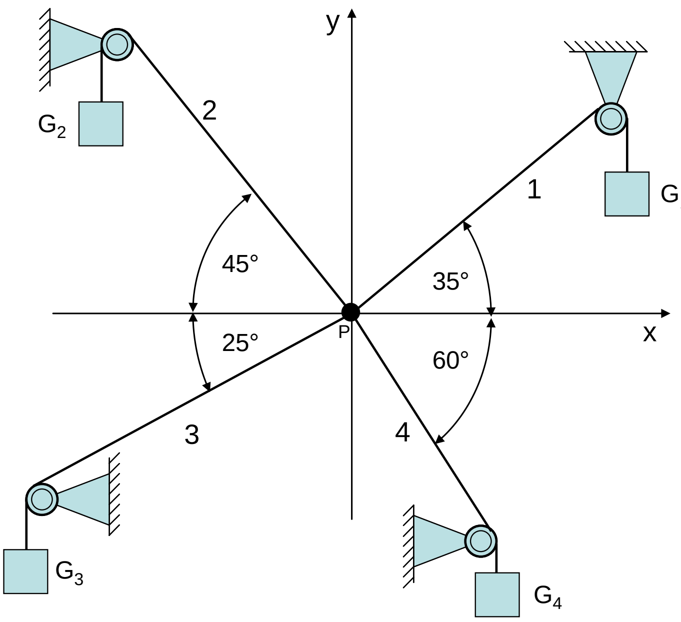
Aufgabe S4

Das Skizzierte System soll durch ein zusätzlich gespanntes Ausgleichsseil (5), welches in P angreift, in der angegebenen Lage im Gleichgewicht gehalten werden. Die Richtung des Ausgleichsseils sowie die Größe der Seilkraft $\vec{S}_5$ sind

1. zeichnerisch ($m_f = 25\frac{N}{cm}$)
2. rechnerisch

zu ermitteln. Man zeichne das Seil in einen Lageplan ein.

Zahlenwerte: G_1 = 50 N G_3 = 80 N Lösung: $|S_5|$= 101 N
G_2 = 110 N G_4 = 200 N



Aufgabe S5

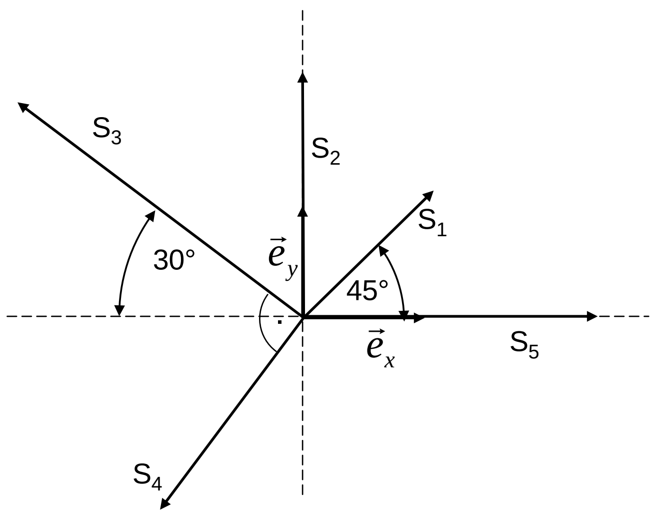
Von den 5 Kräften, die am Punkt A nach der Skizze im Gleichgewicht stehen, sind folgende Beträge bekannt: S_1 = 200 N, S_2 = 400 N, S_3 = 600 N

Man bestimme die Beträge von $\vec{S}_4$ und $\vec{S}_5$

a) zeichnerisch, wobei $\vec{S}_4$ und $\vec{S}_5$ in einen Lageplan eingezeichnet werden sollen ($m_f = 200\frac{N}{cm}$)

b) rechnerisch

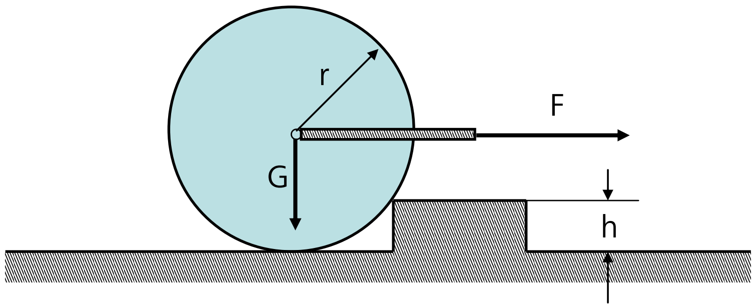
Lösung: $|\vec{S}_5|$ = 864 N



Aufgabe S6

Eine reibungsfrei gelagerte Walze mit der Masse m wird von einem Seil gezogen. Wie groß muss die Zugkraft F sein, damit die Walze (Radius r) über das Hindernis der Höhe h gezogen werden kann.
Lösung: F = 115,1 N

Gegeben: r = 60 cm
m = 20 kg
g = 10 m/s^2
h = 8 cm



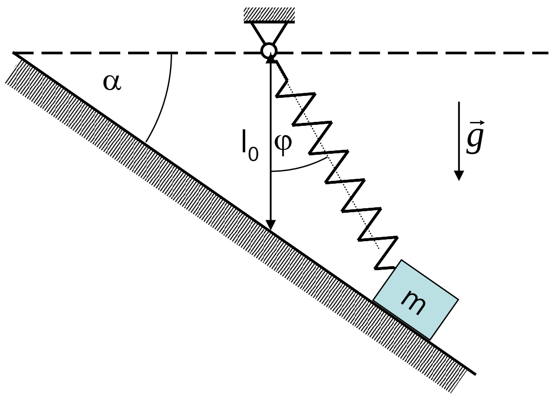
Aufgabe S7

Ein Klotz (Punktmasse m), der an einer Feder (Federsteifigkeit c, entspannte Länge l_0) befestigt ist, kann sich reibungsfrei auf einer schiefen Ebene (Winkel α gegen die Horizontale) bewegen. Berechnen Sie für die skizzierte Gleichgewichtslage den zugehörigen Winkel φ, die Längenänderung Δl der masselosen Feder und die Federkraft F.

Gegeben: α = 35°
m = 4,8 kg

c = 6,5 $\frac{N}{cm}$

l_0 = 320 mm



Lösung: Δl = 57,6 mm

Hinweis: Es ist näherungsweise die Beziehung $\beta = \alpha + \varphi$ zu verwenden! (β ist eine Hilfsgröße, kein geometrisch in der Zeichnung vorkommender Winkel!)

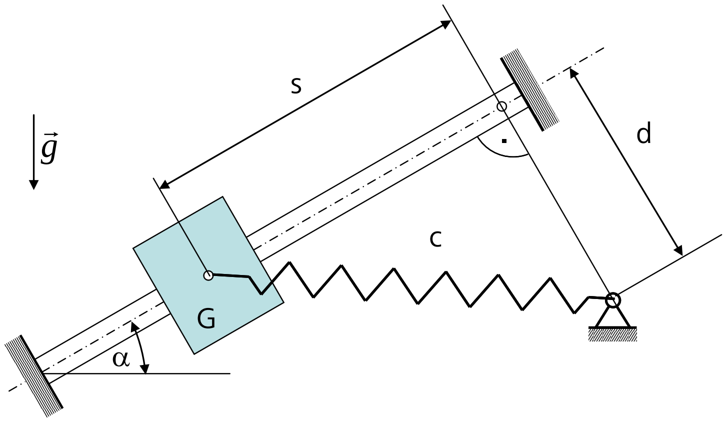
Aufgabe S8

An einer verschieblich gelagerten Muffe (Gewicht G) greift eine Feder (Federsteifigkeit c, entspannte Länge l_0=d) wie skizziert an. Die Führung (Neigungswinkel α) der Muffe wird als reibungsfrei angenommen.

Bestimmen Sie die Federsteifigkeit c der Feder, damit sich die Muffe in der Lage s=10 mm im Gleichgewicht befindet. Wie groß ist die Kraft der Muffe auf die Führung?

Gegeben: $\alpha = 30°$
$G = 100$ N
$d = 30$ cm

Lösung: c = 9007,5 N/mm



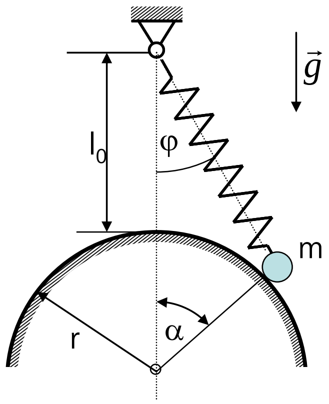
Aufgabe S9

Eine Scheibe (Punktmasse m), die an einer Feder (Federsteifigkeit c, entspannte Länge l_0) befestigt ist, kann sich reibungsfrei auf einer Zylinderoberfläche (Radius r) bewegen.

Berechnen Sie für die skizzierte Gleichgewichtslage die Verlängerung der Feder Δl und die Federkraft.

Gegeben: $r = 320$ mm
$m = 5{,}1$ kg
$c = 8{,}5\ \frac{N}{cm}$
$l_0 = 160$ mm

Lösung: $\Delta l = 22{,}36$ mm

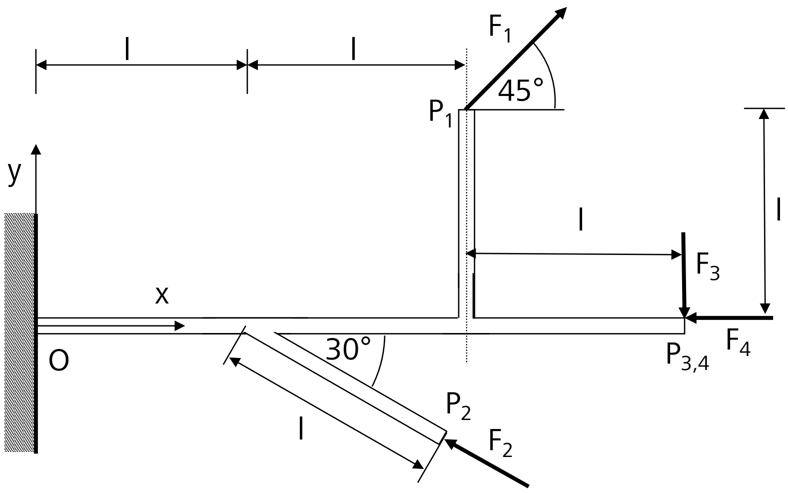


Aufgabe S10

Ein Träger ist bei O fest eingespannt und wird durch die Kräfte F_i , i = 1, 2, 3, 4 wie skizziert belastet. ($F_i = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$)

a.) Berechnen Sie die Resultierende der 4 Kräfte.
b.) Wie lauten die Koordinaten der Kraftangriffspunkte P_i, i = 1, 2, 3, 4?
c.) Berechnen Sie das im Einspannpunkt O wirkende Moment M_O.

Gegeben: F_i, l



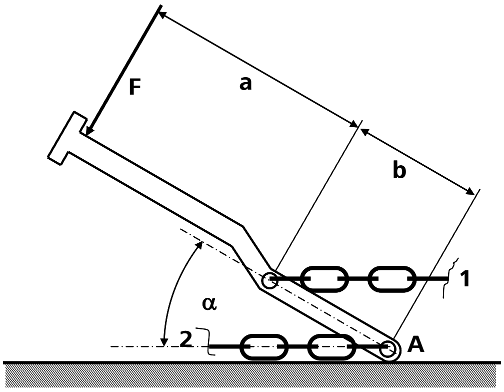
Lösung: a) $R_x = -1{,}16\ F$
$R_Y = 0{,}207\ F$
c) $M_0 = -1{,}793\ F \cdot l$

Aufgabe S11

Welche Kraft F muss an dem skizzierten Kettenspanner aufgebracht werden, um im Kettentrum 1 die Kraft F_1 zu erzeugen?
Wie groß ist die Kraft im Kettentrum 2 und die Normalkraft bei A? (Hinweis: Alle Gelenke sind reibungsfrei!)

Gegeben: $F_1 = 2{,}5$ kN
$a = 50$ cm
$b = 10$ cm
$\alpha = 30°$

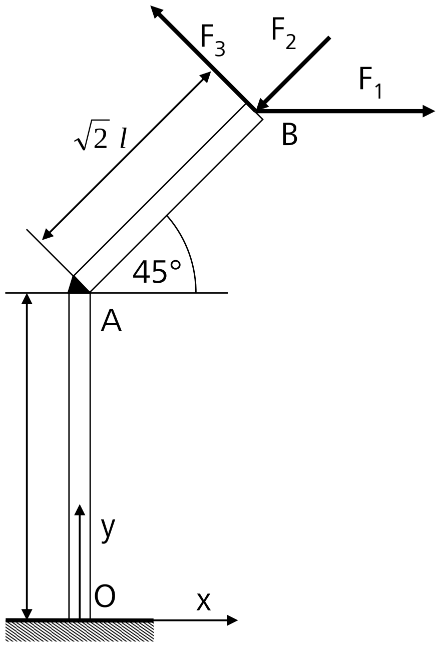
Lösung: F = 0,2083 kN



Aufgabe S12

Ein bei A zusammengeschweißter Winkelträger ist bei O fest eingespannt und wird am oberen Ende bei B durch die Kräfte F_1, F_2 und F_3 wie skizziert belastet.

a) Bestimmen Sie die Resultierende der 3 Kräfte.
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A und B.
c) Wie groß ist das auf die Einspannung wirkende Moment M_O?
d) Welches Moment wirkt an der Schweißnaht bei A?
e) Welche Bedingung müssen die Kräfte F_1 und F_3 erfüllen, damit das Moment in der Schweißnaht verschwindet?



Lösung: $M_0 = l(-2F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}F_3)$

Aufgabe S13

Untersuchen Sie, ob die auf den ebenen Dachbinder wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind. Verwenden Sie dabei folgende Bedingungen:

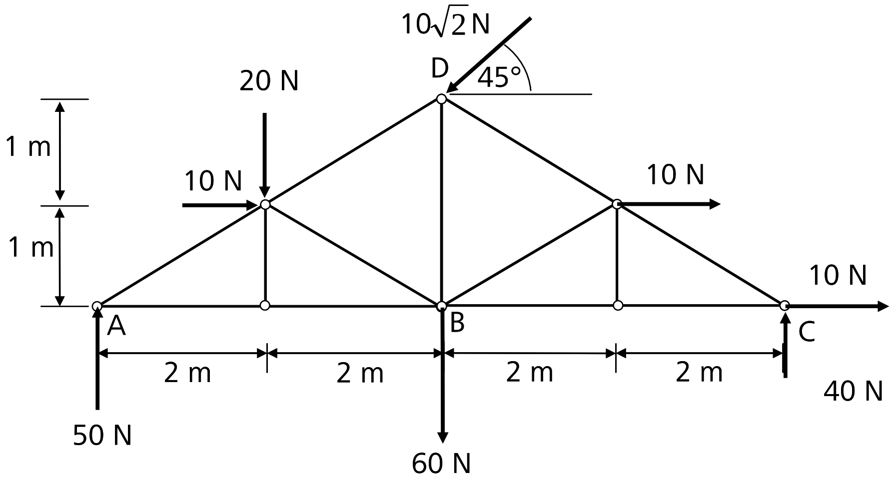
a) $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$, $\sum M_C = 0$

b) $\sum F_y = 0$, $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$

c) $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$, $\sum M_D = 0$

d) $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_A = 0$

Warum liefern a) und b) ein falsches Ergebnis?

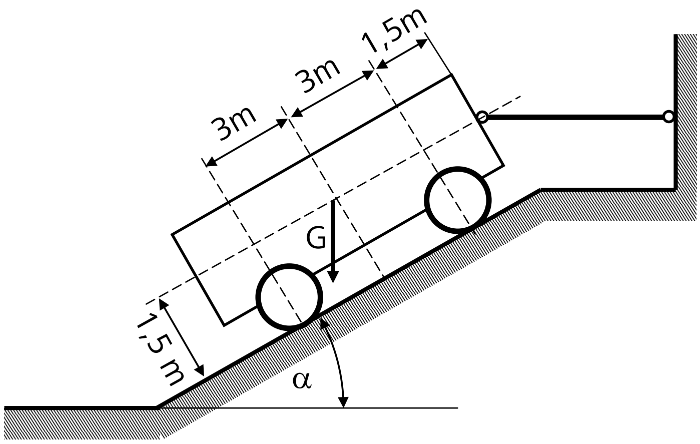


Aufgabe S14

Ein Wagen (Gewicht G) wird auf einer glatten (reibungsfreien) schiefen Ebene (Neigungswinkel α) durch ein Seil gehalten. Wie groß sind die Radkräfte und die Seilkraft?

Gegeben: $G = 100$ kN
$\alpha = 30°$

Lösung: S=57,74 kN

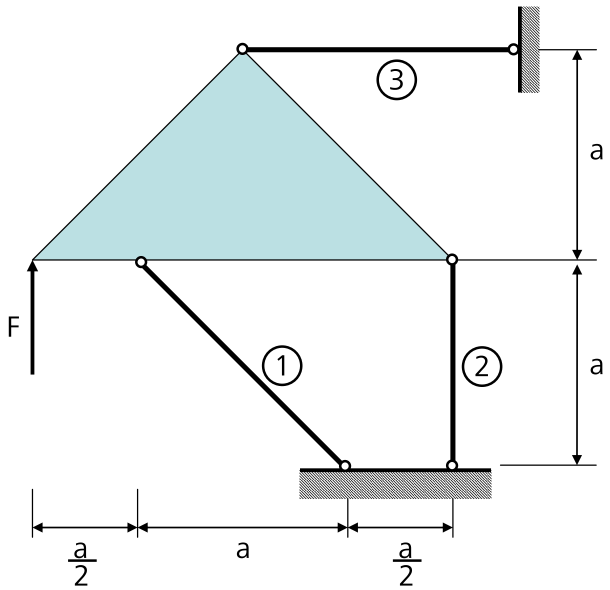


Aufgabe S15

Eine dreieckförmige Scheibe ist durch drei Stäbe gestützt und durch die Kraft F belastet. Bestimmen Sie die Stabkräfte.

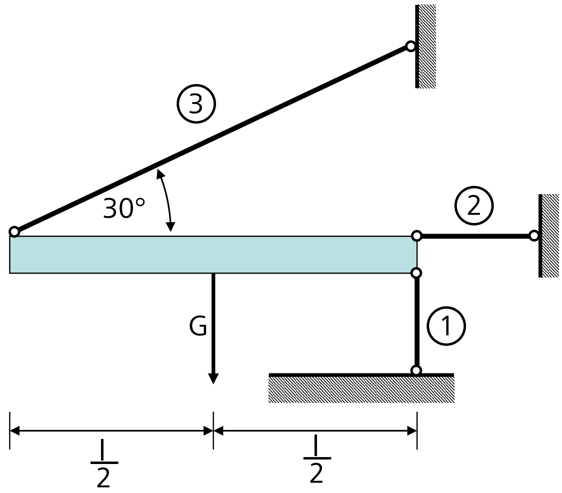
Gegeben: $F = 50$ kN

Lösung: S_2 = 10 kN



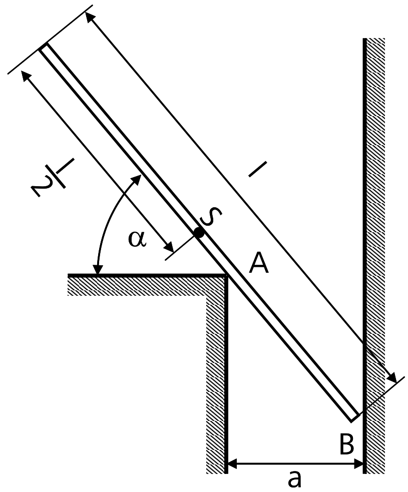
Aufgabe S16
Ein Brückenträger (Gewicht G) ist durch zwei Stäbe (1,2) und ein Seil (3) gehalten. Bestimmen Sie die Stab- und Seilkräfte.
Gegeben: G = 200 kN

Lösung: S_3 = 200 kN



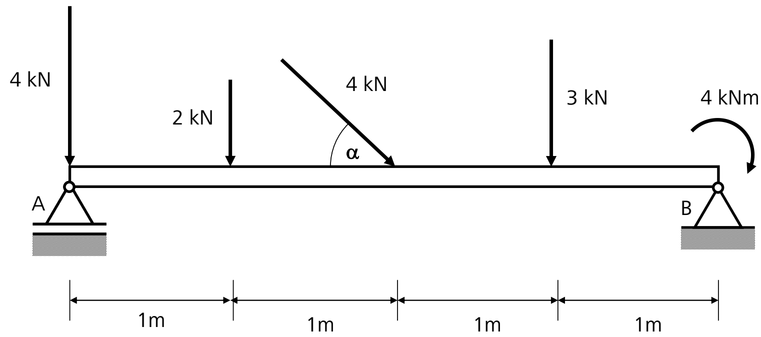
Aufgabe S17
Ein schwerer Stab (Gewicht G, Länge l) stützt sich bei A an eine glatte Ecke und bei B an eine glatte, lotrechte Wand. Wie groß ist der Winkel α, wenn sich das System nach nebenstehender Skizze im Gleichgewicht sein soll? Welche Kräfte wirken in A und B?
Gegeben: G, a, l = 4a

Lösung: $\alpha = \arccos \sqrt[3]{\frac{2a}{l}}$

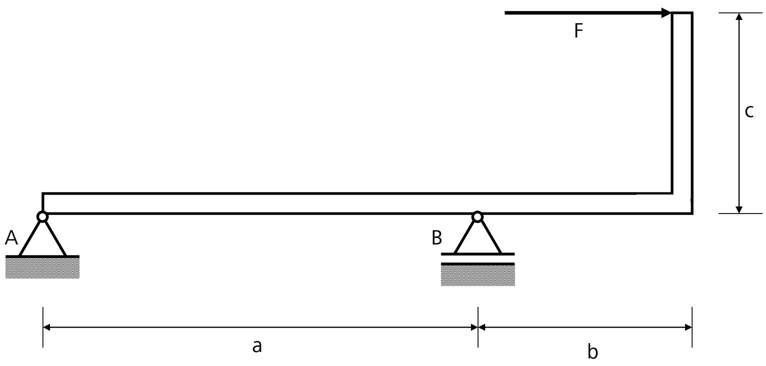


Aufgabe S18
Für die dargestellten Systeme sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen:

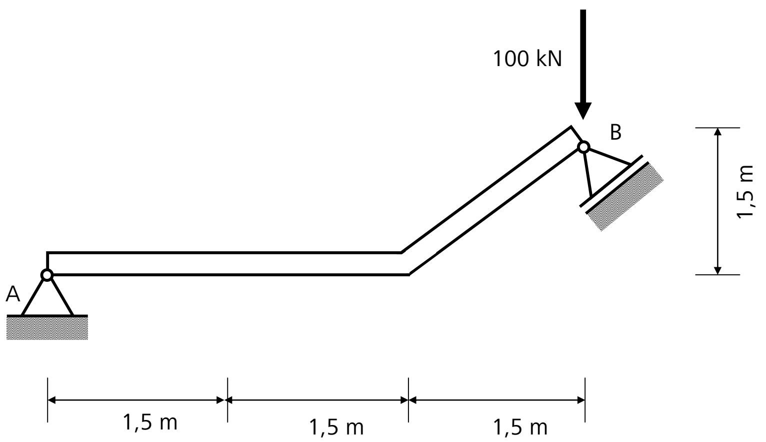
a) Gegeben: $\alpha = 30°$ **Lösung: A = 6,25 kN**



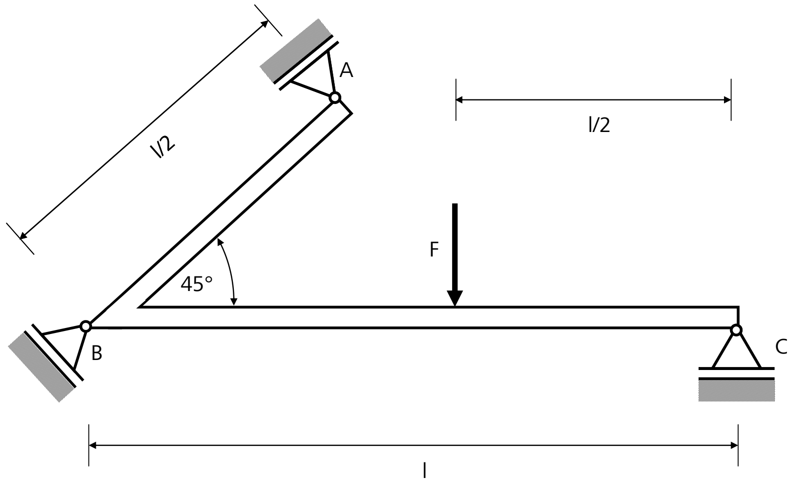
b) Gegeben: F, a, b, c **Lösung:** $B = F \cdot \frac{c}{a}$



c) **Lösung: B = 106,1 kN**



d) Gegeben: F, l **Lösung: C = 0,227·F**

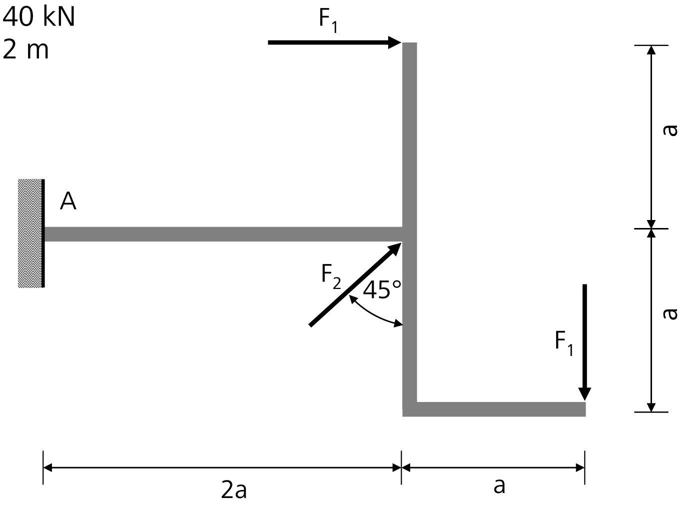


Aufgabe S19

Für die dargestellten Systeme sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen:

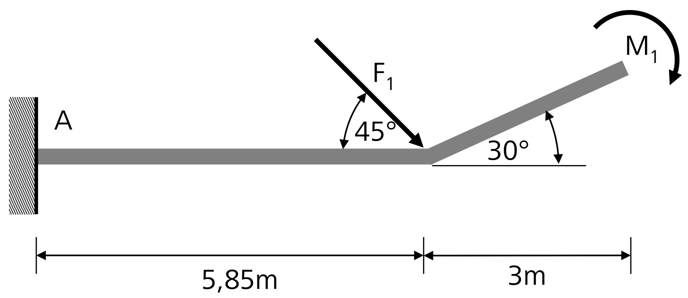
a) Gegeben: $F_1 = 30$ kN
$F_2 = 40$ kN
$a = 2$ m

Lösung: M_A = 126,86 kNm



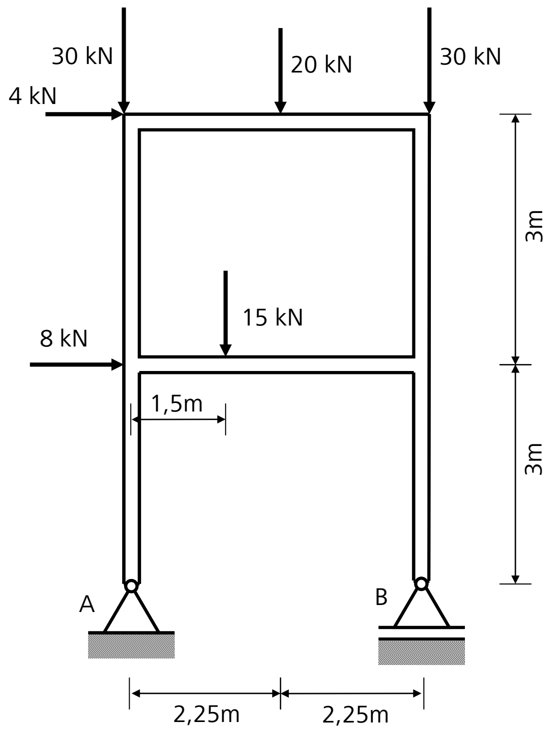
b) Gegeben: $F_1 = 49{,}5$ kN
$M_1 = 100$ kNm

Lösung: M_A = 304,75 kNm



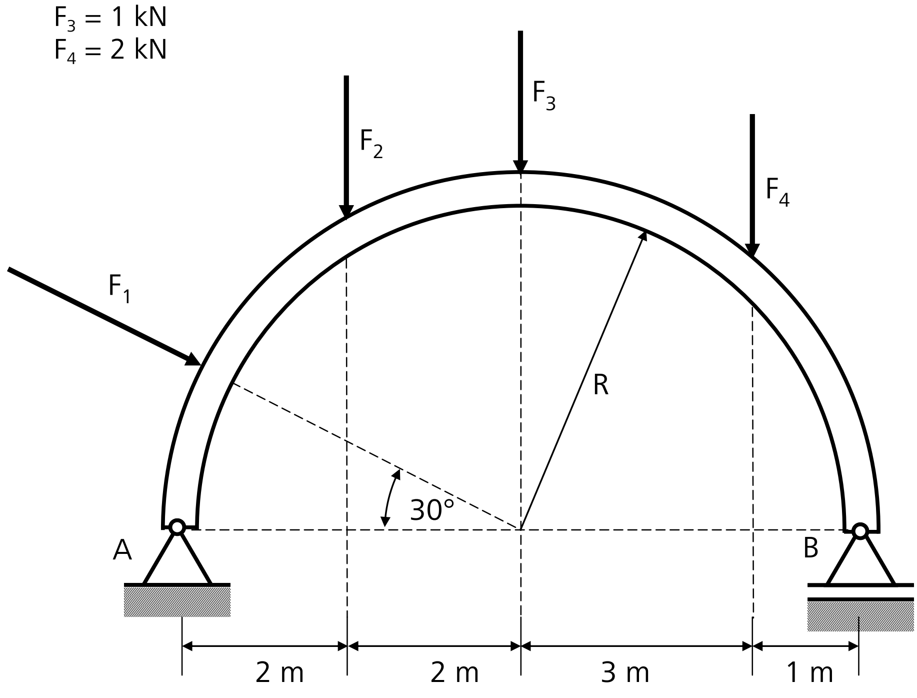
Aufgabe S20
Für die dargestellten Systeme sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen:

a) **Lösung: B = 55,67 kN**



b) Gegeben: $F_1 = 4$ kN
$F_2 = 1$ kN
$F_3 = 1$ kN
$F_4 = 2$ kN

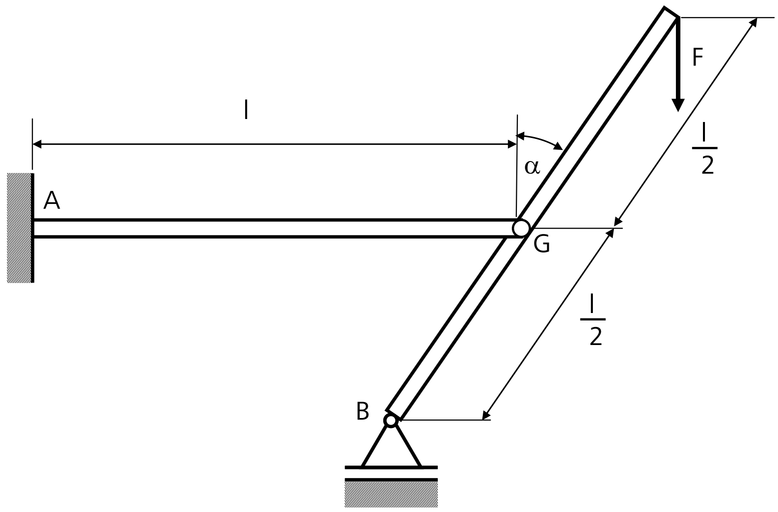
Lösung: A = 2,5 kN



Aufgabe S21

Das skizzierte zweiteilige System besteht aus einem horizontalen, in A fest eingespannten Trägerteil (Länge l), dessen Ende mit der Mitte eines unter dem Winkel α geneigten, in B einwertig gelagerten Balken (Länge l) gelenkig verbunden ist. Das System wird durch die Kraft F belastet.
Überprüfen Sie die statische Bestimmtheit des Systems für $\alpha = 0$ und $\alpha = 0$.
Durch Freischneiden im Gelenk G sind die Lagerreaktionen in A und B, sowie die Gelenkkraft in G zu berechnen.
Gegeben: F, l

Lösung: $|G_y| = 2F$ **(für** $\alpha \neq 0$**)**

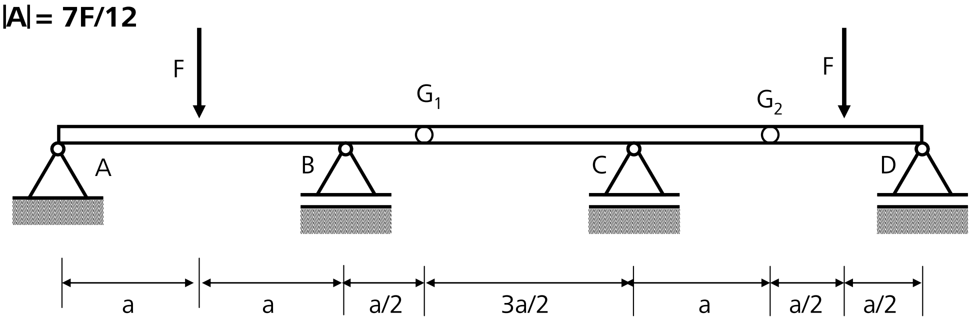


Aufgabe S22

Der dreiteilige Gerberträger ist wie skizziert bei A 2-wertig, bei B, C und D 1-wertig gelagert. Er wird im linken Teil im Abstand a vom Lager A mit der Kraft F, im rechten Teil mittig ebenfalls mit F belastet.

a.) Überprüfen Sie die statische Bestimmtheit des Systems
b.) Durch Freischneiden der Gelenke G_1 und G_2 sind alle Lagerreaktionen sowie die Gelenkkraft im Gelenk G_2 zu berechnen.

Lösung: $|A| = 7F/12$

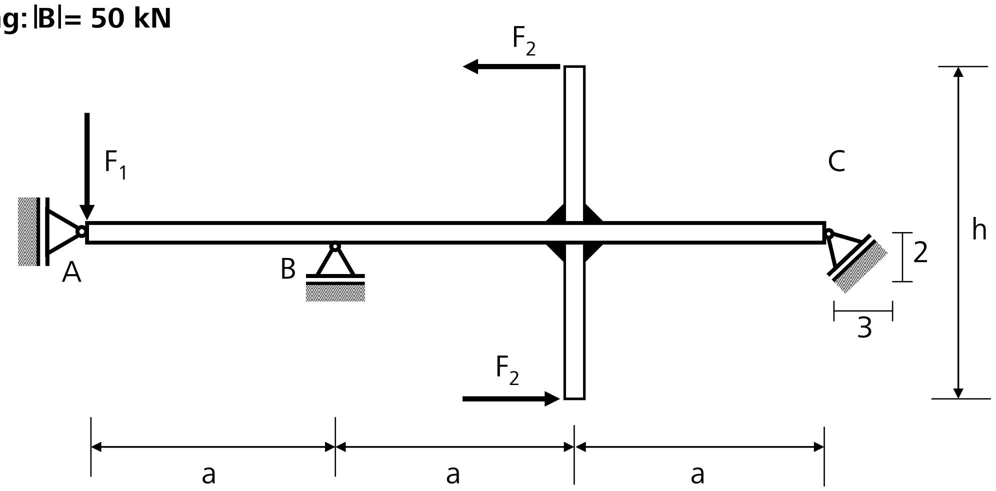


Aufgabe S23
Zur Aufnahme eines Kräftepaares sind an einem Träger wie skizziert zwei Streben angeschweißt worden.

a.) Überprüfen Sie die statische Bestimmtheit des Systems
b.) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen

Geg.: $F_1 = 30$ kN $a = 2$ m
$F_2 = 20$ kN $h = 1$ m

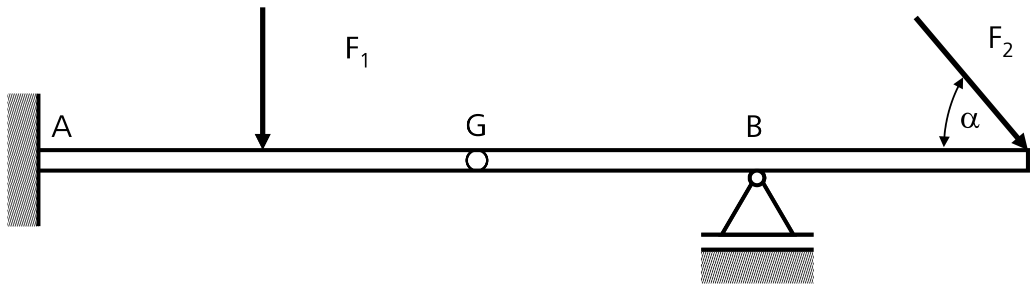
Lösung: |B|= 50 kN



Aufgabe S24
Der linke Teil eines Gerberträgers ist in A fest eingespannt und wird mittig durch die senkrecht wirkende Kraft F_1 belastet. Über ein Gelenk G ist er mit dem rechten Teil der gleichen Länge 2a verbunden, das in seiner Mitte einwertig gelagert ist und an dessen Ende die Kraft F_2 unter dem Winkel α gegenüber der Horizontalen angreift.

a.) Überprüfen Sie die statische Bestimmtheit des Systems
b.) Berechnen Sie die Lagerreaktionen in A und B sowie die Gelenkkraft G

Lösung: |B|= 2 F_2 sin α

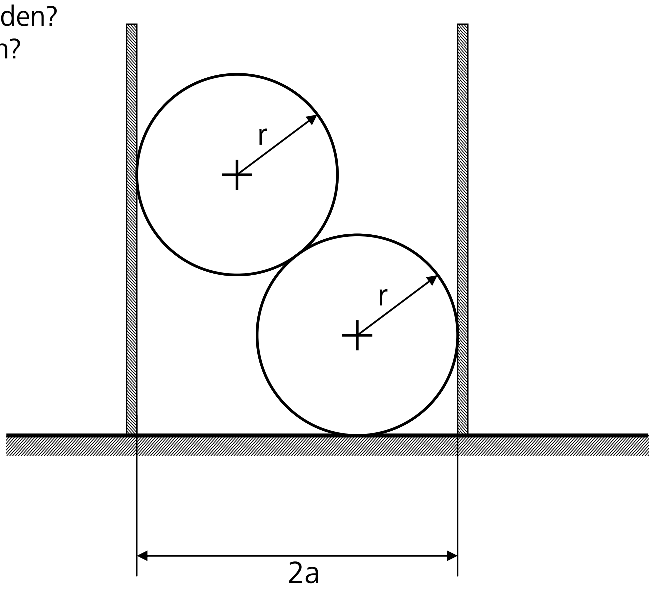


Aufgabe S25
Zwei glatte Kugeln (G, r) liegen in einem kreiszylindrischen offenen Rohrstück (G_R, Radius a), das senkrecht auf dem Boden steht.

a) Welche Druckkräfte wirken auf Rohr und Boden?
b) Ab welchem Gewicht G_R tritt kein Kippen ein?

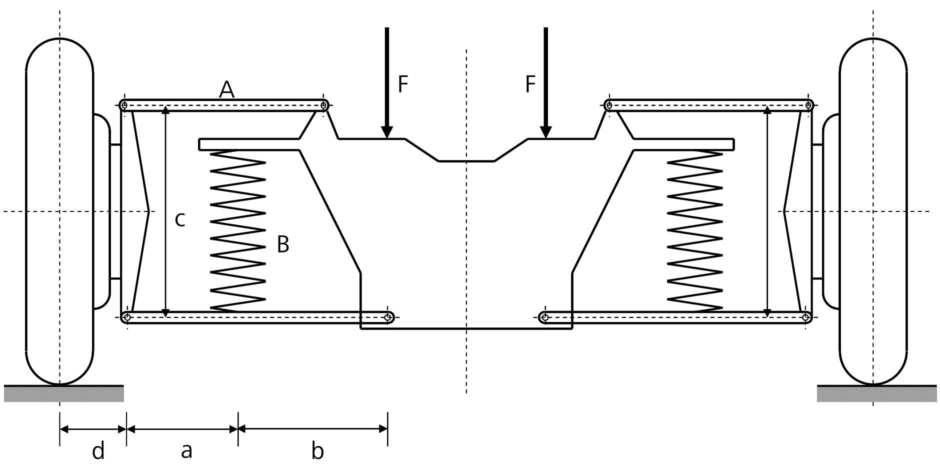
Gegeben: r = 0,75a, G

Lösung: $G_R \geq \frac{G}{2}$

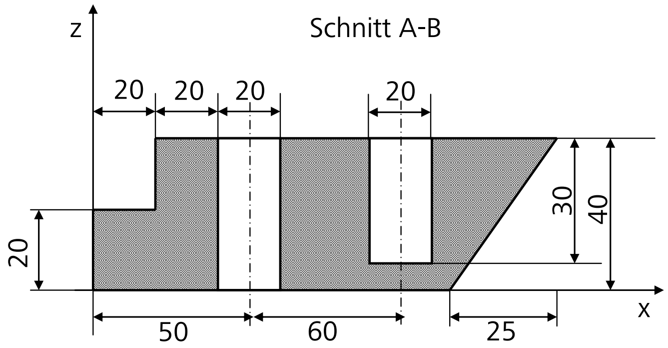


Aufgabe S26
Untenstehende Skizze stellt die Vorderwagenachse eines Kraftfahrzeuges dar. F ist die vom Fahrzeug herrührende Belastung: Das Gewicht der dargestellten Achskonstruktion sei demgegenüber vernachlässigbar.
Welche Kräfte treten in Stab A und in der Feder B auf?
Gegeben: F = 2,0 kN
a = 17,5 cm
b = 27,5 cm
c = 25,0 cm
d = 15,0 cm

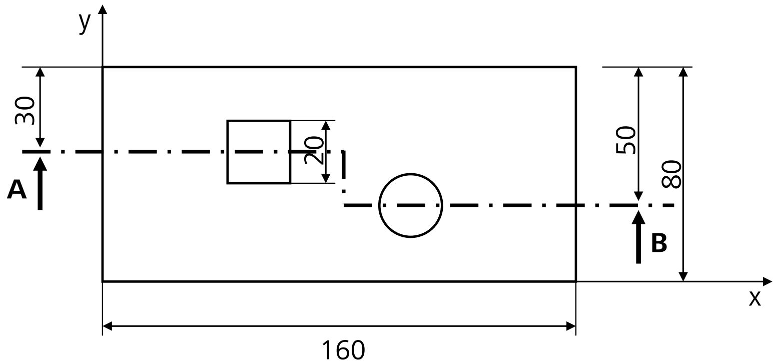
Lösung: B = 3,27 kN



Aufgabe S27
Das in der Draufsicht und im Schnitt dargestellte Werkstück ist in mm vermaßt. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunktes im dargestellten Koordinatensystem.

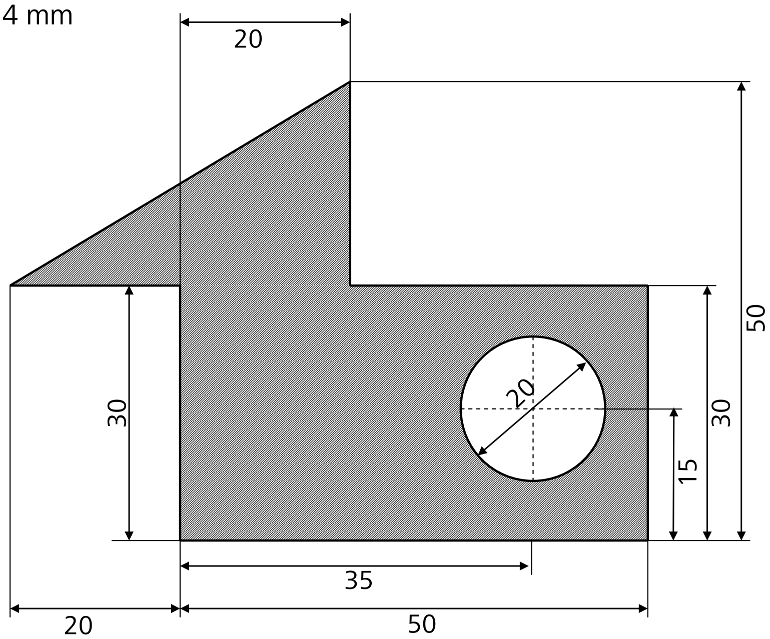


Lösung: x_S = 78,96 mm



Aufgabe S28
Für das dargestellte Profil ist der Flächenschwerpunkt gesucht.

Lösung: x_S = 18,4 mm



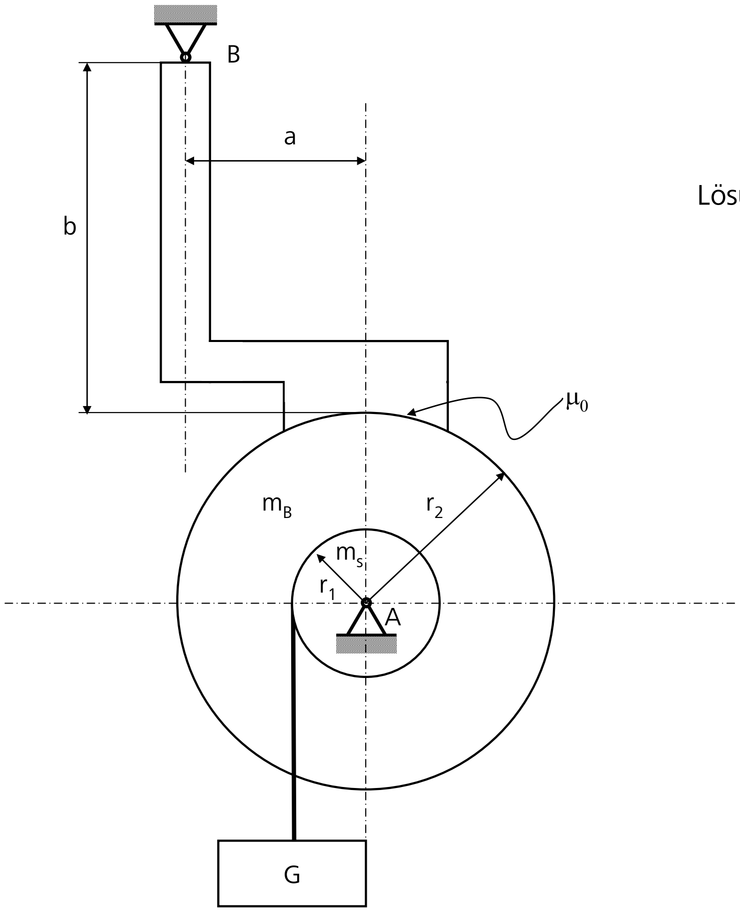
Aufgabe S29

In Handhebezeugen verhindern Klemmgesperre bei Unterbrechung der Antriebskraft das Absinken der Last. Als mechanisches Modell einer solchen selbsttätig wirkenden Bremse dient die skizzierte Anordnung. Das Absinken der Last G wird durch die zwischen Bremsscheibe und Bremsklotz auftretende Reibungskraft (Haftreibungskoeffizient μ_0) verhindert. Bremsscheibe (m_B) und Seiltrommel (m_S) sind fest miteinander verbunden und in A drehbar gelagert. Der in B drehbar gelagerte Winkelhebel (einschließlich Bremsklotz) besitze eine vernachlässigbar kleine Masse. Alle Gelenke seien reibungsfrei.

a) Man berechne die zwischen dem Bremsklotz und der Bremsscheibe auftretende Reibungs- und Normalkraft in Abhängigkeit der Last G.

b) Wie groß darf das Verhältnis der Abstände a/b höchstens gewählt werden, damit die Bremse selbsttätig anzieht.

c) Für die Haftreibungszahl μ_0 = 0,3 (Metall/Gummi) markiere man den für die Abstände a und b zulässigen Bereich unter Verwendung des Reibungskegels



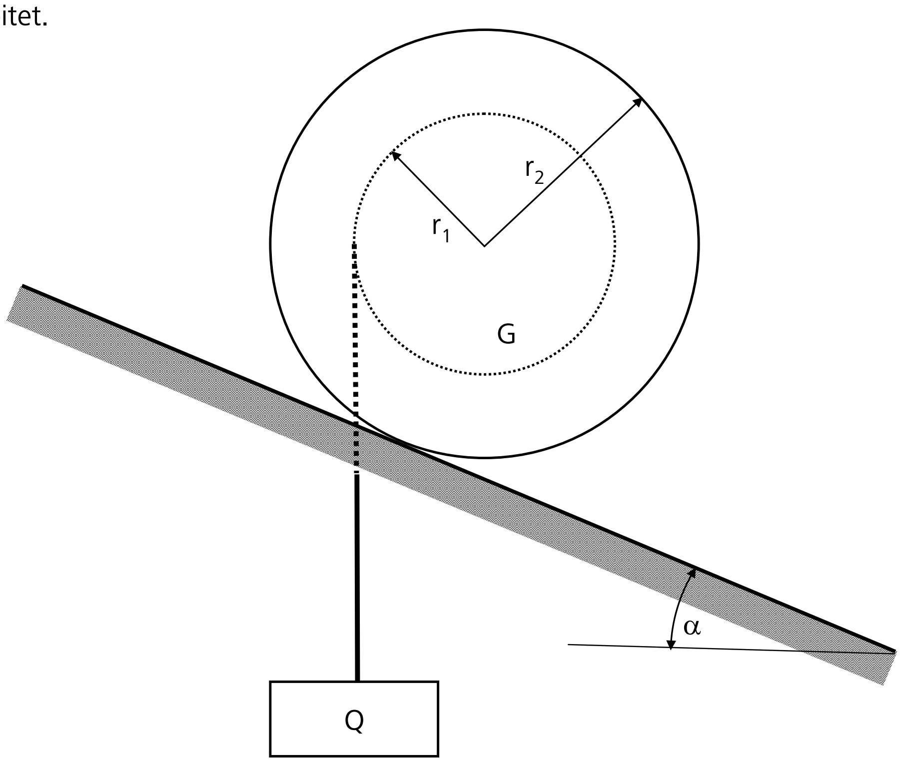
Lösung: $N = \dfrac{b}{a}\dfrac{r_1}{r_2}G$

Aufgabe S30

Eine Walze (Gewicht G) liegt auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel a. Um die Walze ist – ähnlich dem Innenteil einer Garnrolle – ein Seil um den Radius r_1 geschlungen, an dessen Ende das Gewicht Q hängt.

a) Wie groß muss das Gewicht Q sein, damit sich die Walze nicht in Bewegung setzt

b) Wie groß muss die Haftreibungszahl μ_0 sein, damit die Walze nicht von der Ebene abgleitet.



Lösung: $Q = \dfrac{G r_2 \sin\alpha}{r_1 - r_2 \sin\alpha}$

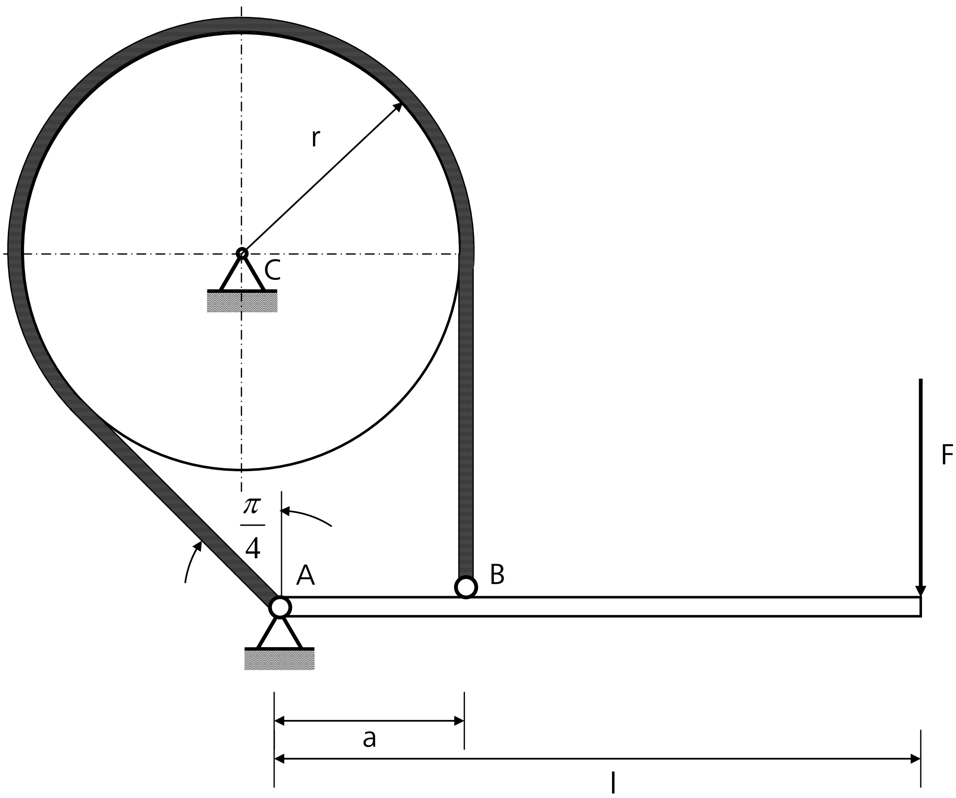
Aufgabe S31

Die in C reibungsfrei drehbar gelagerte Bremstrommel einer Bandbremse mit dem Radius r wird von einem undehnbaren Band umschlungen, dessen Ende unter dem Winkel $\pi/4$ wie skizziert befestigt ist. Der Hebel sei in A reibungsfrei gelagert und am Ende mit der Kraft F belastet. Zwischen Trommel und Band sei Reibung mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ vorhanden.

a) Berechnen Sie das erreichbare Bremsmoment für Rechtslauf und Linkslauf
b) Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn das Band die Trommel einmal mehr umschlingt

Gegeben: a, l, F, r, $\mu = 0{,}2$

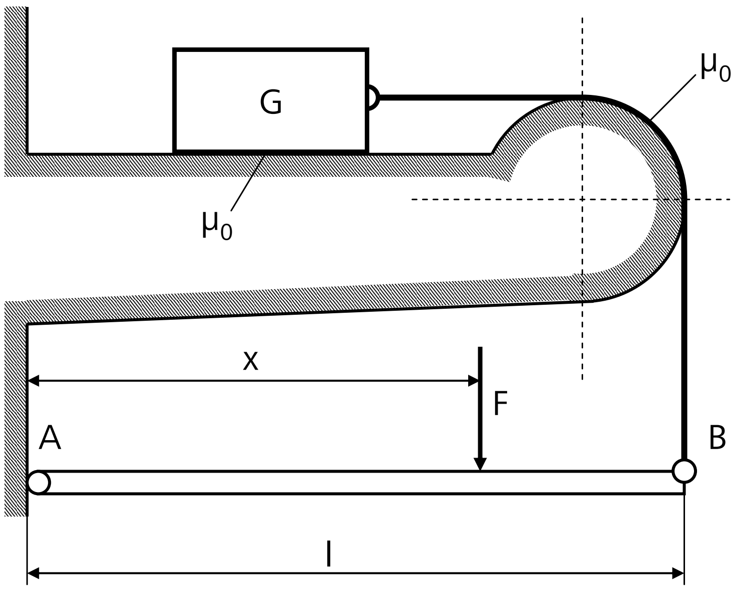
Lösung: $M_R = 1{,}2 \frac{l}{a} F r$



Aufgabe S32

Ein bei A gelenkig gelagerter, bei B durch ein Seil gehaltener Balken trägt am Ort x eine Last F. Das Seil läuft um einen rauen, feststehenden Bolzen und ist an einem Block vom Gewicht G befestigt, der nur durch Haftung verankert ist.
Gesucht ist der Bereich x, für den das System im Gleichgewicht ist.
Gegeben: G, F, l, μ_0

Lösung: $x \leq l \frac{G}{F} \mu_0 e^{\mu_0 \frac{\pi}{2}}$



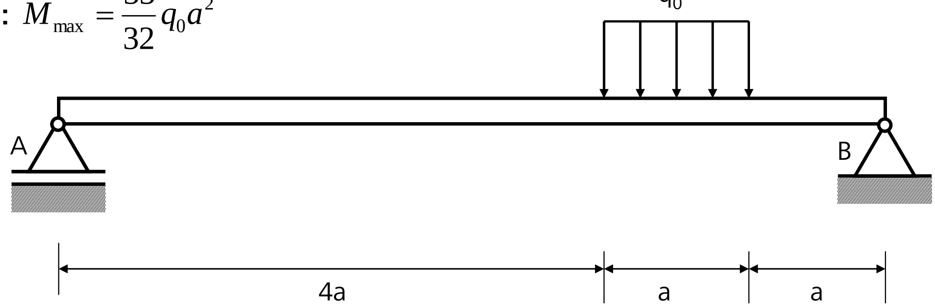
Aufgabe S33

Ein in A einwertig und in B zweiwertig gelagerter Balken der Länge 6a wird wie skizziert durch ein konstante Streckenlast q_0 belastet.

a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A und B
b) Berechnen Sie den Verlauf von Normalkraft, Querkraft und innerem Moment längs des Balkens.
c) Zeichnen Sie Normalkraft-, Querkraft- und Momentenverlauf unter Angabe der wesentlichen Ordinaten

Gegeben: a, q_0

Lösung: $M_{\max} = \frac{33}{32} q_0 a^2$



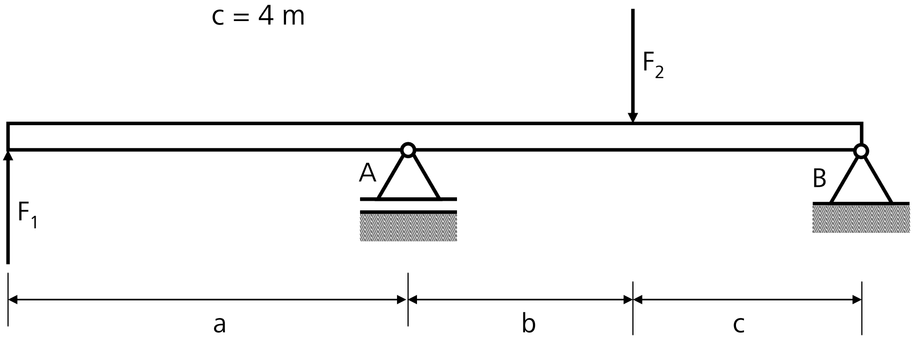
Aufgabe S34

Ein in A einwertig und in B zweiwertig gelagerter Balken wird wie skizziert durch die Kräfte F_1 und F_2 belastet.

a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A und B
b) Berechnen Sie den Verlauf von Normalkraft, Querkraft und innerem Moment längs des Balkens.
c) Zeichnen Sie Normalkraft-, Querkraft- und Momentenverlauf unter Angabe der wesentlichen Ordinaten

Gegeben: $F_1 = 3$ kN, $a = 3$ m, $F_2 = 5$ kN, $b = 5$ m, $c = 4$ m

Lösung: $M_{max} = 15{,}1$ kNm



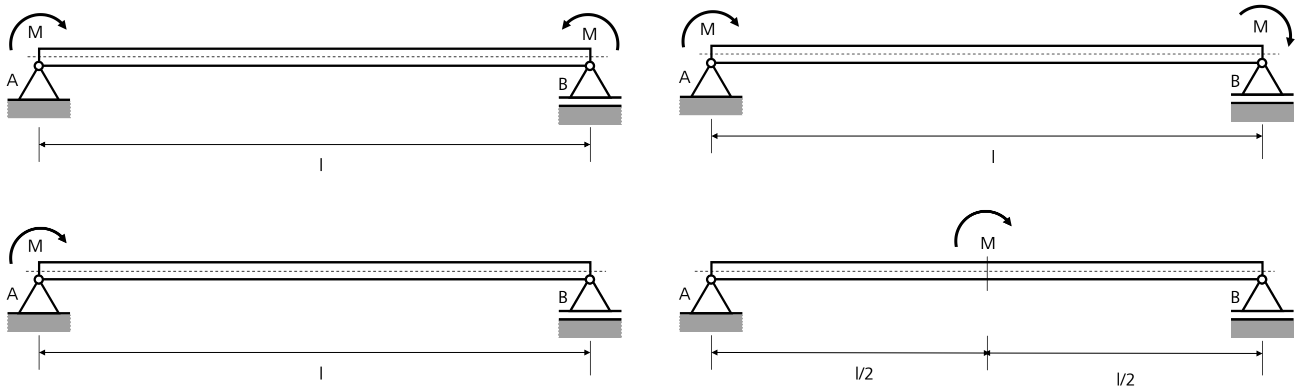
Aufgabe S35

Für die unten skizzierten Balken sind

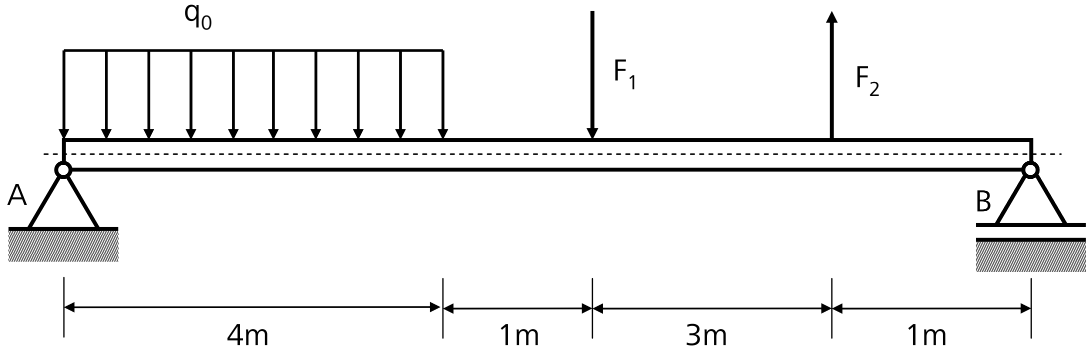
a) die Lagerreaktionen zu bestimmen
b) Querkraft- und Momentenverlauf unter Angabe der wesentlichen Ordinaten

zu zeichnen.

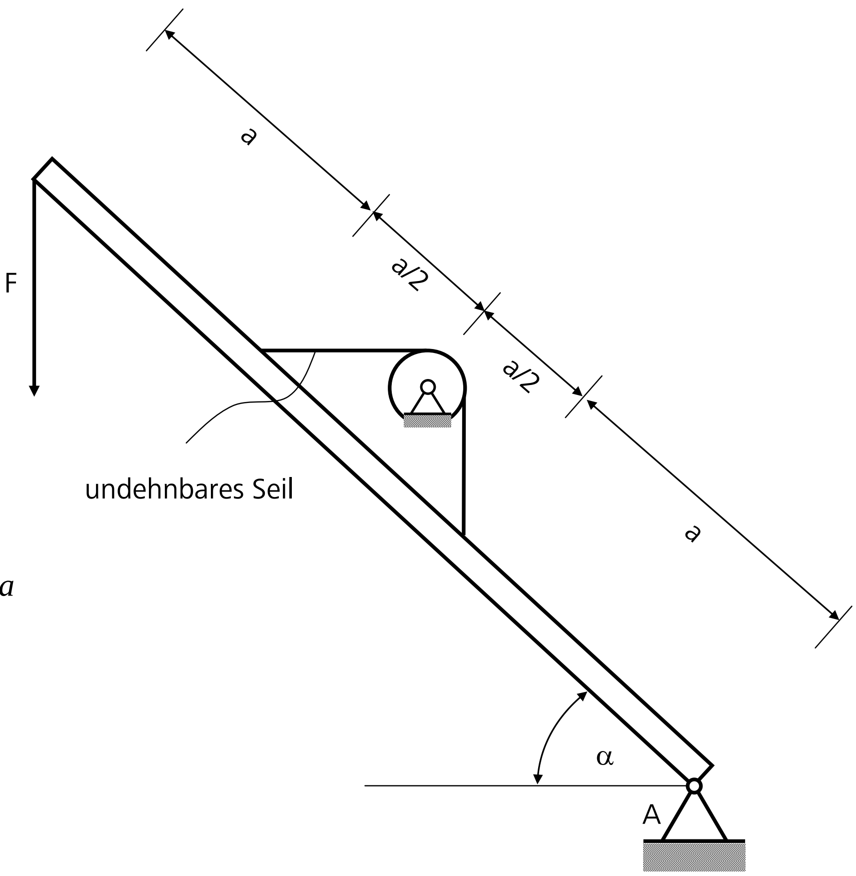
Gegeben: M, l



Aufgabe S36
Für die skizzierten Systeme sind die Schnittgrößenverläufe zu bestimmen



Gegeben: $F_1 = 40$ kN **Lösung: M_{max} = 80 kNm**
$F_2 = 60$ kN
$q_0 = 10$ kN/m



Gegeben: F = 5 kN
a = 1 m

Lösung: $\left|M_{\max}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} Fa$

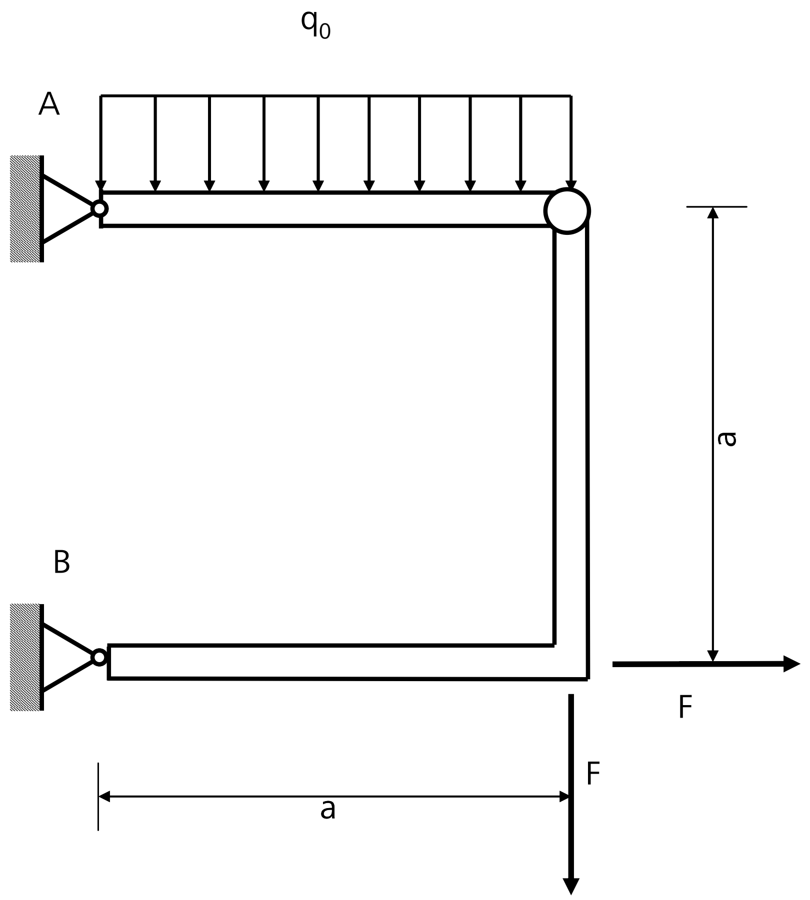
Aufgabe S37

Für den skizzierten Rahmen sind

a) die Lagerreaktionen, die Gelenkkräfte und
b) der Verlauf von Normalkraft, Querkraft und innerem Moment in allen Rahmenteilen zu bestimmen.
c) Zeichnen Sie Normalkraft-, Querkraft- und Momentenverlauf unter Angabe der wesentlichen Ordinaten.

Gegeben: F, a, $q_0 = \frac{2F}{a}$

Lösung: $|M_{max}| = 2Fa$



Aufgabe S38

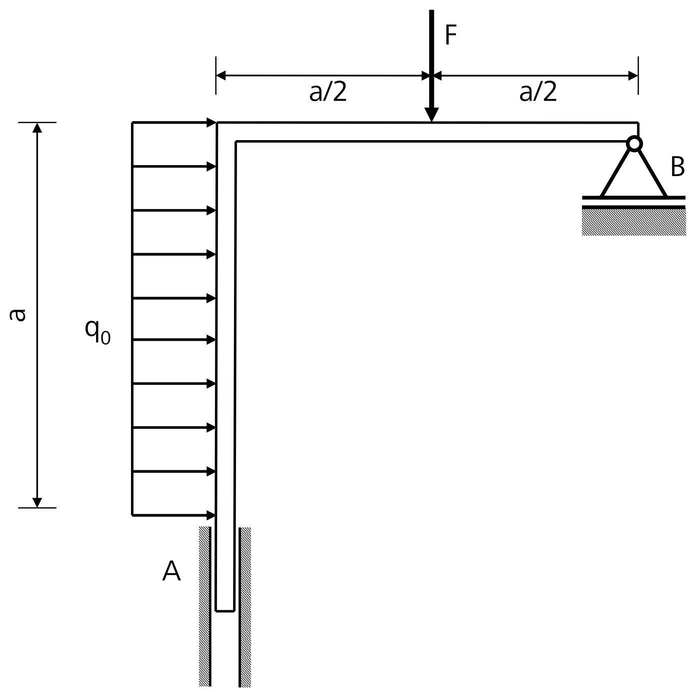
Der skizzierte Rahmen ist bei A zweiwertig und bei B einwertig gelagert. Die Belastung besteht aus einer Streckenlast q_0 und der Kraft F.
Bestimmen Sie die Lagerreaktionen und zeichnen Sie die Normalkraft-, Querkraft-, und Momentenverläufe.

Gegeben: F = 4 kN

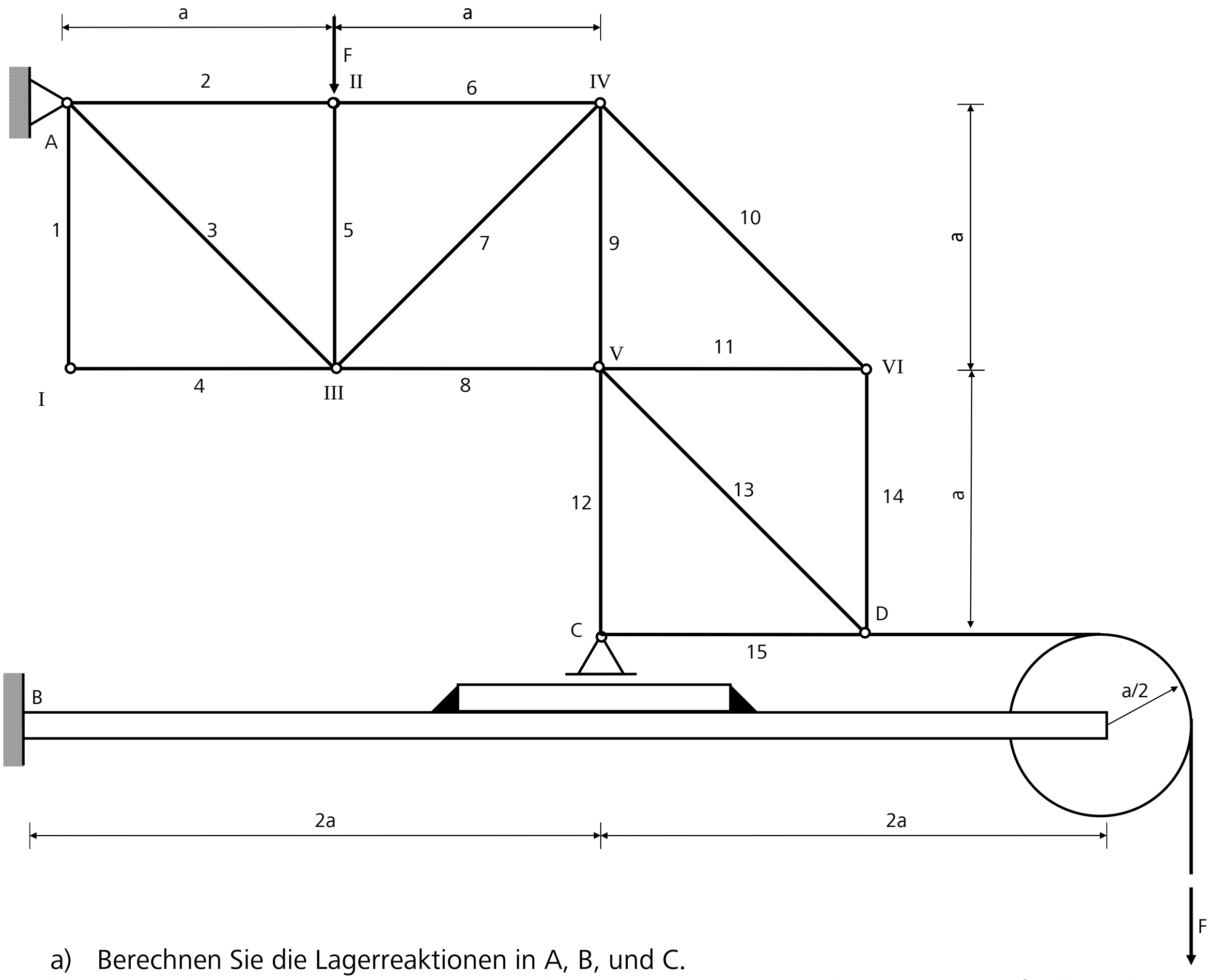
$$q_0 = 10 \frac{kN}{m}$$

a = 0,8 m

Lösung: $|M_{max}|$ = 1,6 kNm



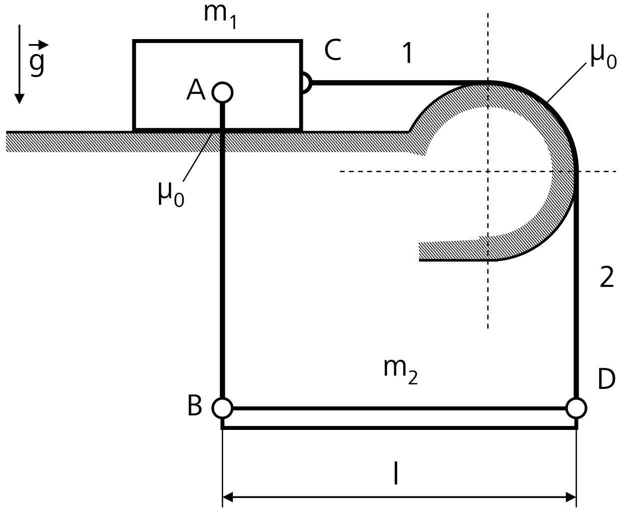
Aufgabe S39
Ein einfaches Fachwerk ist in A gelenkig gelagert und stützt sich in C auf einem in B fest eingespannten Balken ab. Am Ende des Balkens befindet sich eine reibungsfrei drehbar gelagerte Umlenkrolle (Radius a/2), über die ein Seil läuft, das am Knoten D des Fachwerks befestigt ist. Die Belastung des Systems erfolgt durch zwei gleich große Kräfte F, wobei eine am Ende des Seiles zieht, die andere auf den Knoten II drückt.



a) Berechnen Sie die Lagerreaktionen in A, B, und C.
b) Bitte geben Sie die ohne Rechnung erkennbaren Nullstäbe an (Begründung erforderlich)
c) Bestimmen Sie rechnerisch die Kräfte in den Stäben 6, 8, 10 und 14 (Unterscheiden Sie dabei zwischen Zug und Druckstäben)

Aufgabe S40

Ein Klotz der Masse m_1 liegt auf einer rauen Unterlage und ist über die beiden Seile AB und CD mit einem waagerecht hängenden Balken (Masse m_2) verbunden. Zwischen Klotz und Unterlage sowie Seil CD und kreisförmiger Führung herrscht Reibung (Haftreibungskoeffizient μ_0).



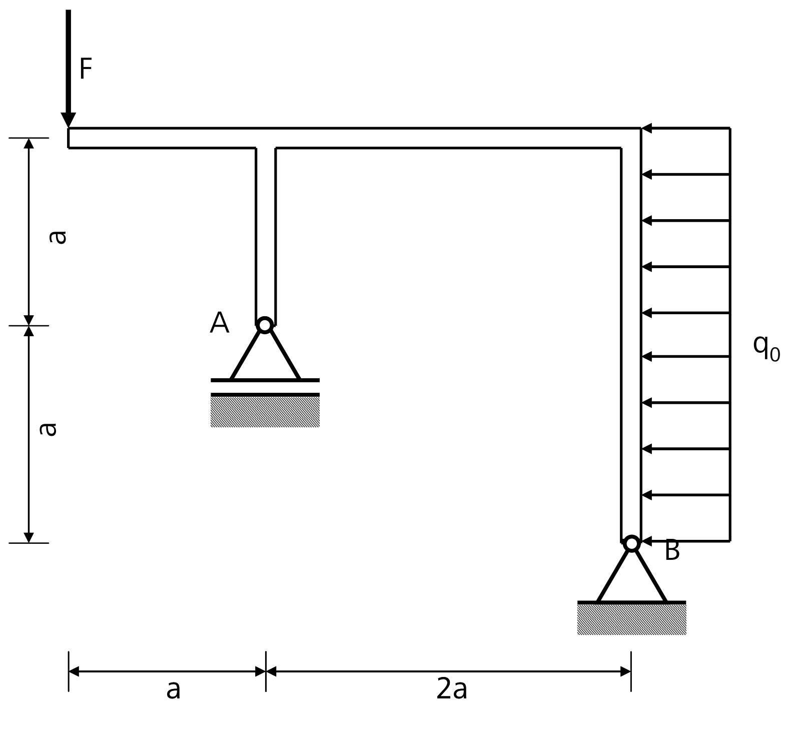
a) In Skizzen stelle man die Freischnitte von Klotz und Balken dar.
b) Berechnen Sie die Seilkäfte S_1 und S_2 im Seil CD.
c) Wie groß darf die Masse m_2 des Balkens höchstens werden, damit das System in Ruhe bleibt? Betrachten Sie dazu die Seilreibung.

Aufgabe S41

Ein in A einwertig und in B zweiwertig gelagerter Rahmen wird wie skizziert durch eine konstante Streckenlast $q_0 = \frac{F}{a}$ sowie am linken Ende des horizontalen Balkens mit der Kraft F belastet.

d) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A und B
e) Berechnen Sie den Verlauf von Normalkraft, Querkraft und innerem Moment längs des Balkens.
f) Zeichnen Sie Normalkraft-, Querkraft- und Momentenverlauf unter Angabe der wesentlichen Ordinaten

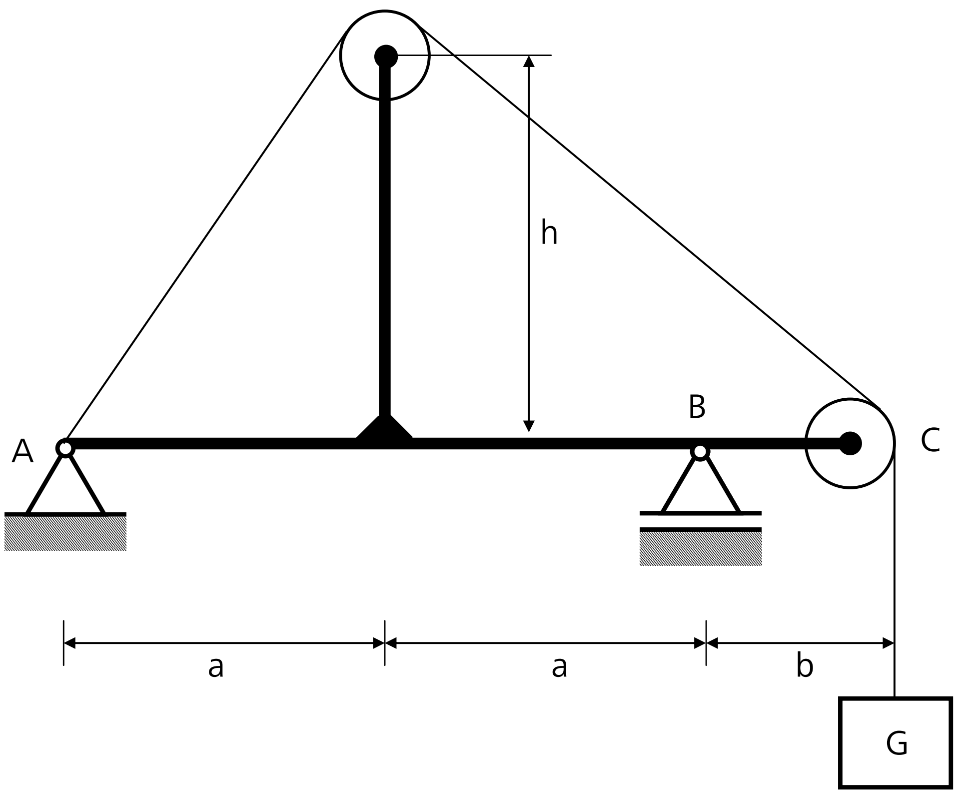
Gegeben: a, q_0, F



Aufgabe S42

Ein Balken ist mit einem senkrechten Pfosten versehen, dessen Ende eine Rolle trägt. Über diese ist ein Seil geführt, das an seinem freien Ende bei C das Gewicht G aufnimmt. Die Rollendurchmesser seien vernachlässigbar klein, alle Gelenke und Seile reibungsfrei gelagert.
Bestimmen Sie den Normalkraftverlauf, Querkraftverlauf und Momentenverlauf in allen Balkenteilen.

Gegeben: $G = 7{,}5$ kN
$a = 3$ m
$b = 1$ m
$h = 4$ m



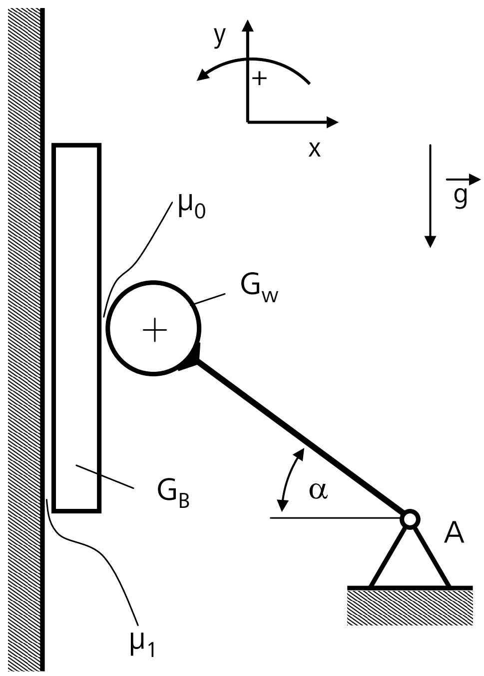
Aufgabe S43

Eine Vorrichtung zum Klemmen von Blechen besteht aus einer Walze (Gewicht G_w), die über eine **masselose** Stange in A drehbar gelagert ist und das Blech gegen eine Wand drückt. Das zu haltende Blech besitze das Gewicht G_B.

a) Wie schwer darf das Blech höchstens sein (G_B), dass es nicht herunter rutscht. Die Haftreibungskoeffizienten zwischen Walze und Blech betragen μ_o und zwischen Wand und Blech μ_1.

b) Welche Bedingung muss für α gelten, damit Selbsthemmung eintritt (d.h. das Blechgewicht G_B darf beliebig groß werden und wird trotzdem gehalten)?

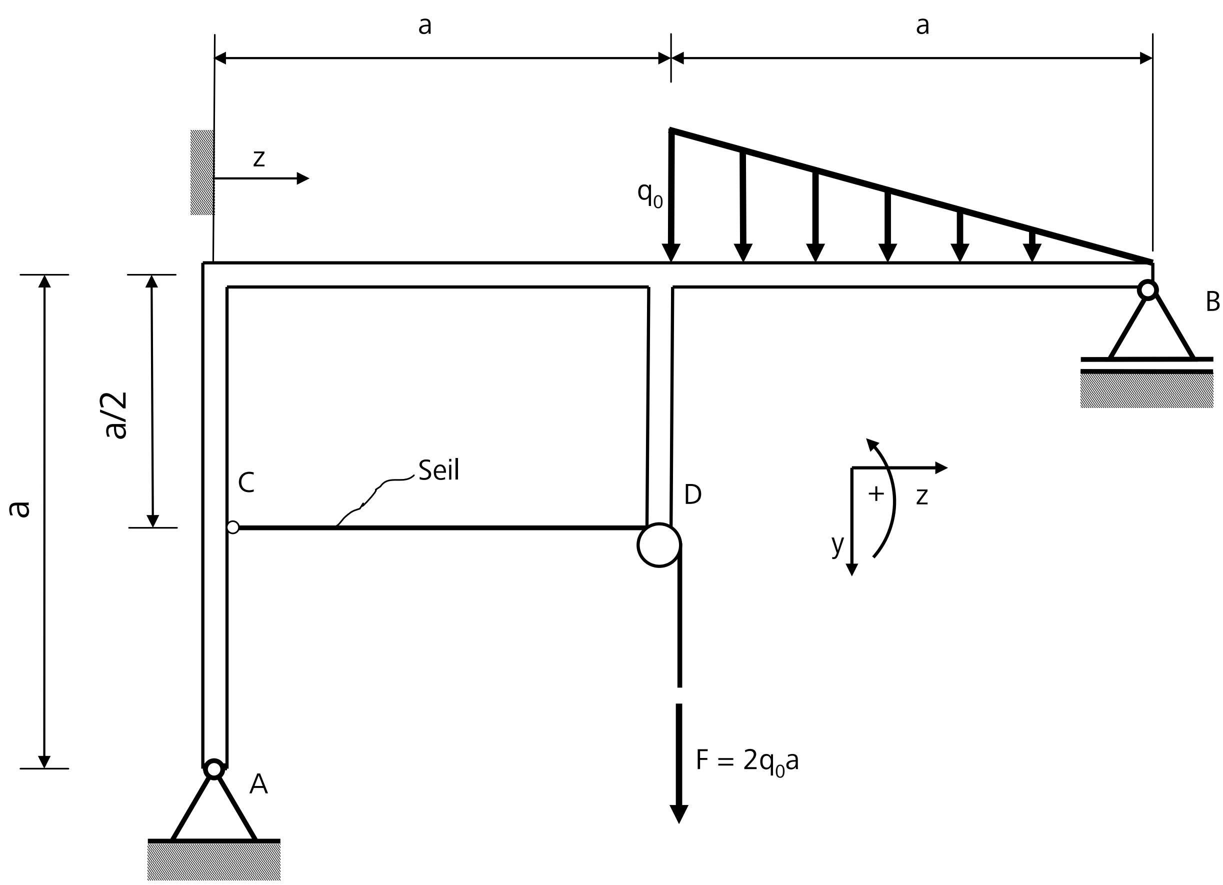
Hinweis: Alle notwendigen Freischnitte sind in getrennten Skizzen darzustellen.



Aufgabe S44
Ein starrer Winkelträger ist in A und B statisch bestimmt gelagert. Am Ende eines in C befestigten Seiles, das in D reibungsfrei umgelenkt wird, zieht die Kraft $F = 2q_0a$. An der rechten Hälfte des waagerechten Rahmenteils greift außerdem eine dreiecksförmige Steckenlast q(z) mit dem Maximalwert q_o an. Die Abmessungen der Umlenkrolle sind vernachlässigbar klein.

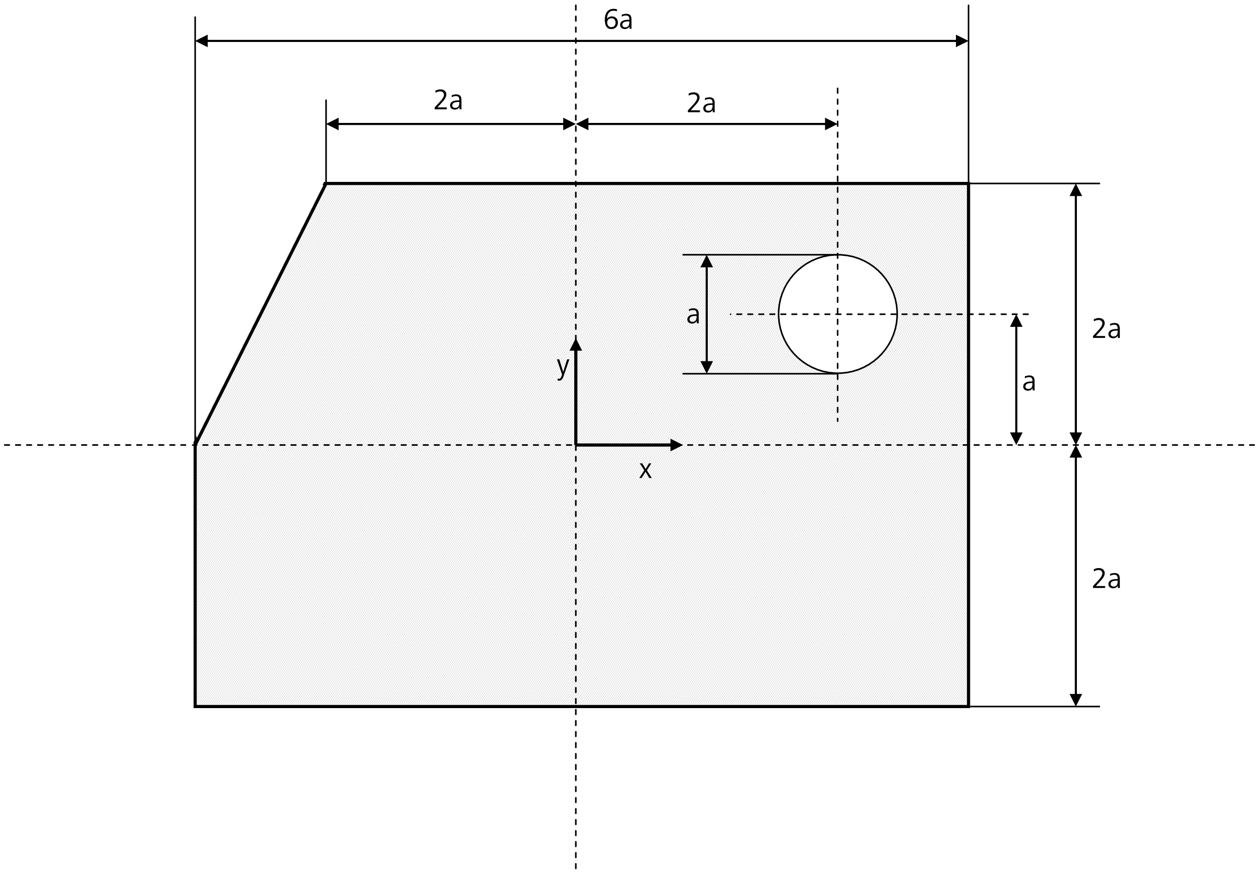
a) Berechnen Sie die Lagerreaktionen in A und B.
b) Ermitteln Sie im waagrechten Teil des Winkelrahmens ($0 < z < 2a$) den Normalkraft-, Querkraft- und Biegemomentenverlauf. Im rechten Rahmenteil ist dazu q(z) (z.B. mittels Geradenansatz) zu bestimmen.
c) Die Schnittgrößenverläufe sind zu skizzieren.

Hinweise: Die notwendigen Freischnitte sind in getrennten Skizzen darzustellen. Verwenden Sie die vorgegebene Koordinate z.



Aufgabe S45
Berechnen Sie die Koordinaten x_s und y_s des Flächenschwerpunktes der schraffierten Fläche im vorgegebenen Koordinatensystem.

Hinweis: Die Schwerpunktskoordinaten und Größen der gewählten Teilflächen sind einzeln anzugeben

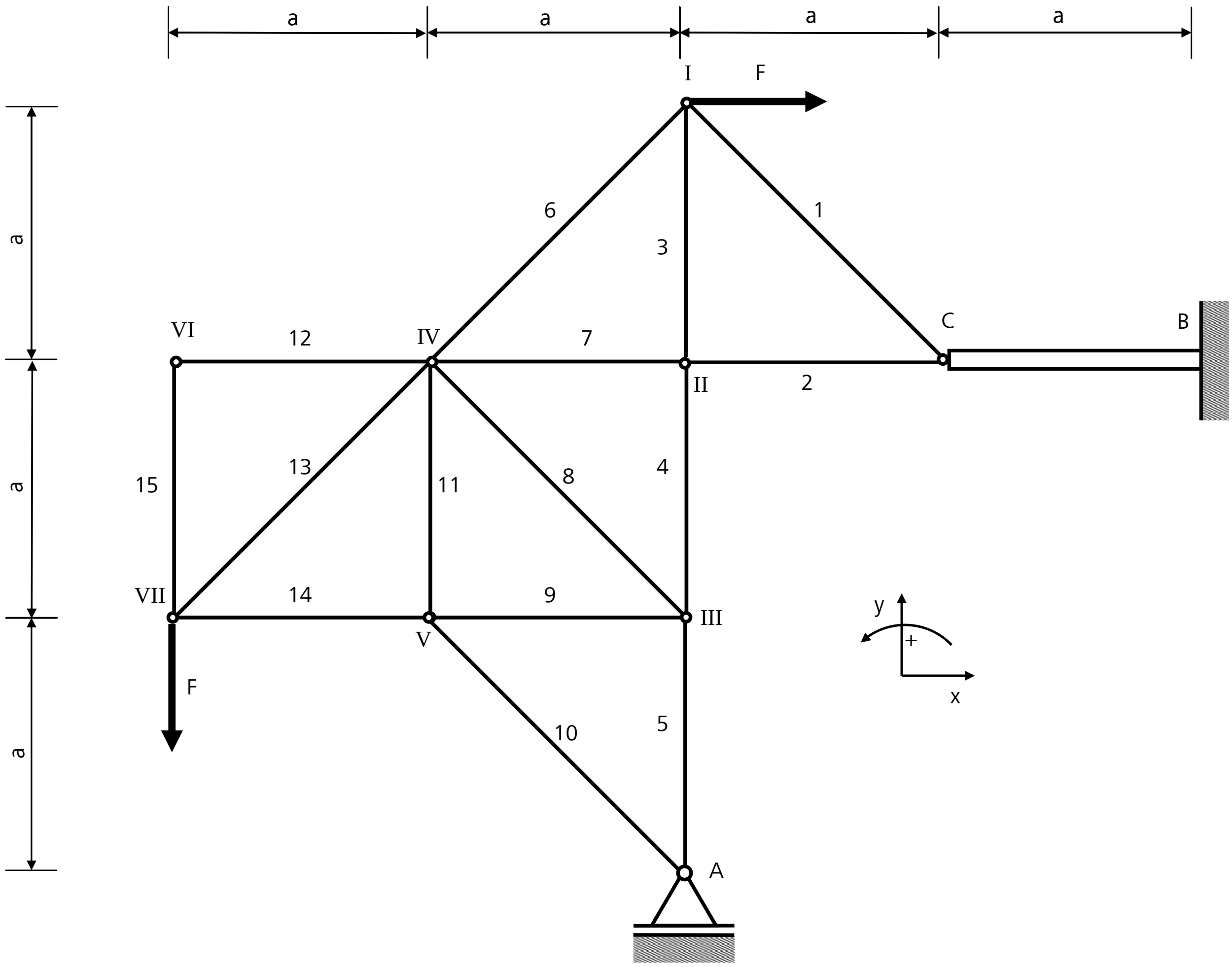


Aufgabe S46

Ein einfaches Fachwerk ist in A einwertig gelagert und in C gelenkig mit einem in B fest eingespannten Balken verbunden. Es wird durch zwei gleich große Kräfte (Betrag F) gemäß Skizze belastet.

a) Berechnen Sie die Lagerreaktionen in A und der festen Einspannung B.
b) Die ohne Rechnung erkennbaren Nullstäbe sind mit Begründung anzugeben.
c) Bestimmen Sie rechnerisch die Kräfte in den Stäben 1, 2, 6 und 7. Geben Sie an, ob es sich jeweils um einen Zug- oder Druckstab handelt.

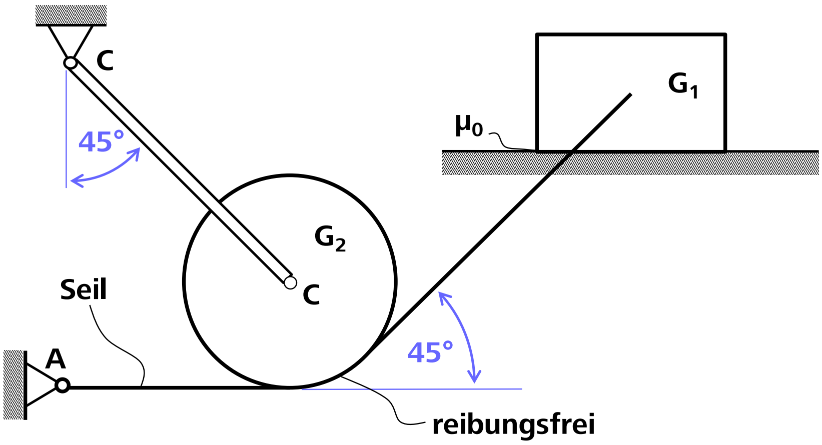
Hinweis: Die notwendigen Freischnitte zur Berechnung der Stabkräfte sind in getrennten Skizzen darzustellen!



Aufgabe S47

Auf einer waagerechten Unterlage liegt ein Klotz (Gewicht G_1), an dem ein in A befestigtes, masseloses Seil zieht. Zwischen Klotz und Unterlage herrscht Reibung (Haftreibungskoeffizient μ_0). Das Seil wird durch eine reibungsfrei aufliegende Walze (Gewicht G_2) gespannt. Die Walze hängt frei drehbar am Ende des masselosen Stabes BC.

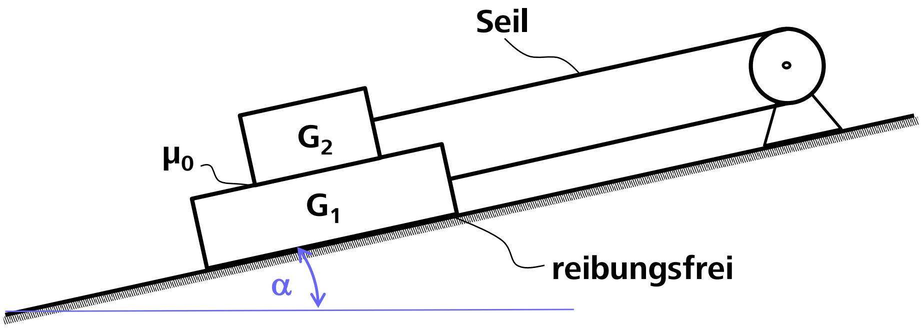
Wie groß darf das Gewicht G_2 der Walze gerade noch werden, so dass der Klotz noch in Ruhe bleibt?



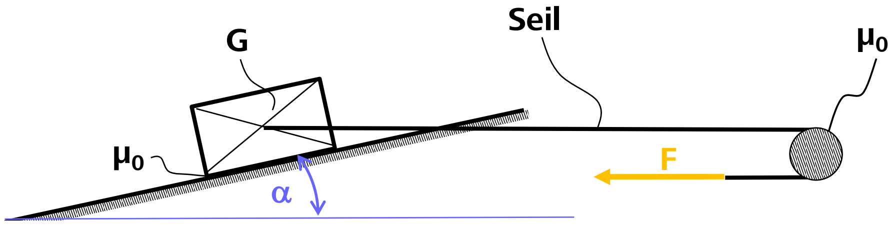
Aufgabe S48

Zwei Klötze mit den Gewichten G_1 und G_2 liegen auf einer schiefen Ebene. Sie sind durch ein Seil, das über eine reibungsfreie Umlenkrolle läuft, miteinander verbunden. Während zwischen den Klötzen Reibung auftritt (Haftreibungskoeffizient μ_0), soll die schiefe Ebene vollkommen glatt sein.

Wie groß darf das Gewicht G_1 gerade noch werden, so dass das System in Ruhe bleibt und der Klotz 1 nicht nach unten rutscht?

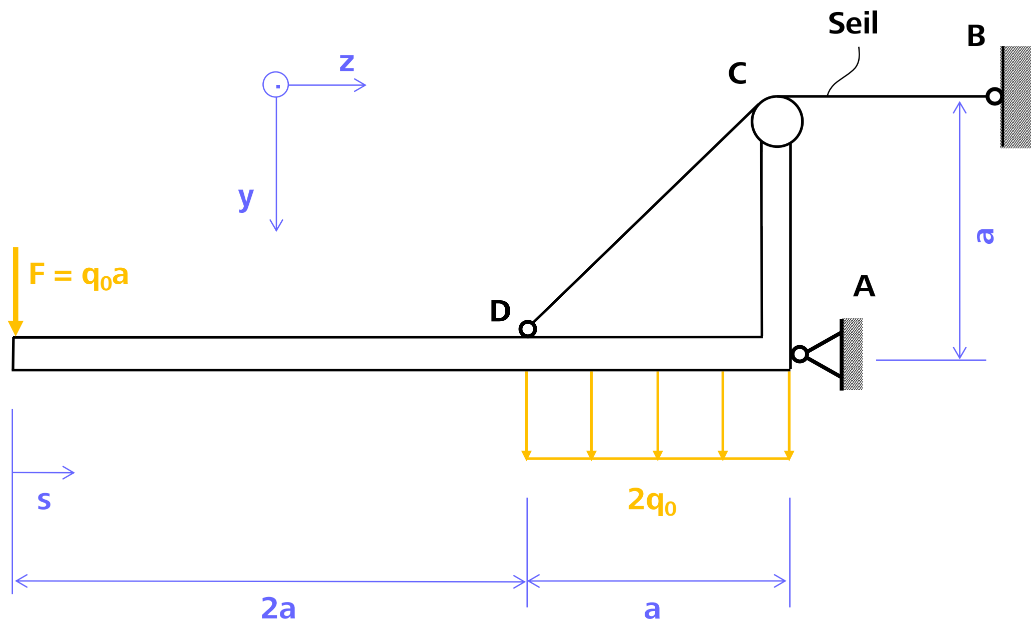


Aufgabe S49
Ein Klotz mit dem Gewicht G liegt auf einer schiefen Ebene. An dem Klotz ist ein Seil befestigt, das um einen feststehenden Zapfen gelegt ist und an dessen Ende die Kraft F zieht. Zwischen Klotz und schiefer Ebene sowie Zapfen und Seil herrscht Reibung (Haftreibungskoeffizient μ_0). Wie groß darf die Kraft gerade noch werden, so dass der Klotz in der gezeichneten Lage verharrt und nicht nach oben rutscht?



Aufgabe S50
Ein starrer Winkelträger ist in A zweiwertig gelagert und wird durch ein Seil gehalten, das am Träger in D angreift, reibungsfrei über die Rolle in C läuft und in B befestigt ist. Der Rollenradius und die Trägerdicke sind gegenüber den Längenabmessungen des Winkelträgers vernachlässigbar klein. Die Belastung des Trägers erfolgt über die konstante Streckenlast $2q_0$ und die Einzelkraft $F = q_0a$

a) Berechnen Sie die Lagerreaktionen in A und B
b) Ermitteln Sie den Normalkraft-, Querkraft- und Momentenverlauf im gesamten Winkelträger. Verwenden Sie dabei die vorgegebene Laufkoordinate s.
c) Skizzieren Sie qualitativ den Biegemomentenverlauf. Geben Sie die Werte an den Bereichsgrenzen an.



Anhang B

Formelsammlung zur Vorlesung Statik

1 Zentrale Kräftesysteme in der Ebene

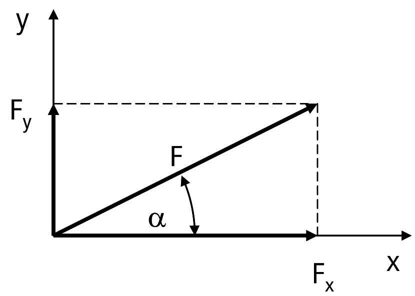
1.1 Darstellung von Kräften

Eine Kraft ist bestimmt durch ihren Betrag, Richtung und Angriffspunkt.

Analytische Darstellung | **Zeichnerische Darstellung**

Vektordarstellung: $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$

Skalare Komponenten : $\begin{aligned} F_x &= F\cos(\alpha) \\ F_y &= F\sin(\alpha) \end{aligned}$



Betrag: $F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^2}$

Einheit: 1 Newton = 1 N = $1\,kg \cdot \dfrac{m}{s^2}$

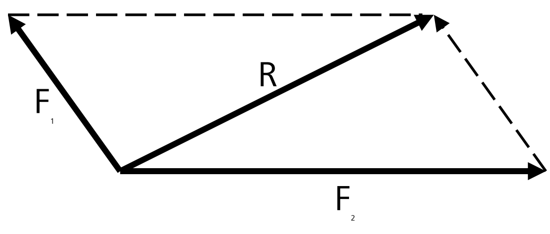
1.2. Resultierende Kraft

Rechnerische Lösung

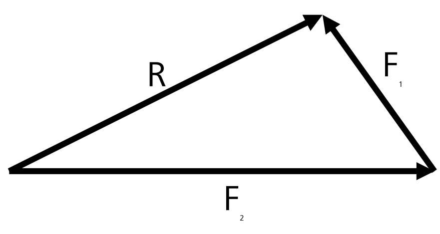
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{pmatrix} + \ldots \begin{pmatrix} F_{nx} \\ F_{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots F_{nx} \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots F_{ny} \end{pmatrix}$$

Zeichnerische Lösung (Parallelogramm-Axiom für Vektorsumme)

Lageplan (Längenmaßstab m_L



Kräfteplan (Längenmaßstab m_F)



1.3 Gleichgewichtsaxion

Kräfte sind im Gleichgewicht oder bilden ein Gleichgewichtssystem, wenn der Körper unter dem Einfluss dieser Kräfte in Ruhe bleibt oder seine Geschwindigkeit nicht ändert, d.h. wenn die Resultierende verschwindet.

Analytische Lösung

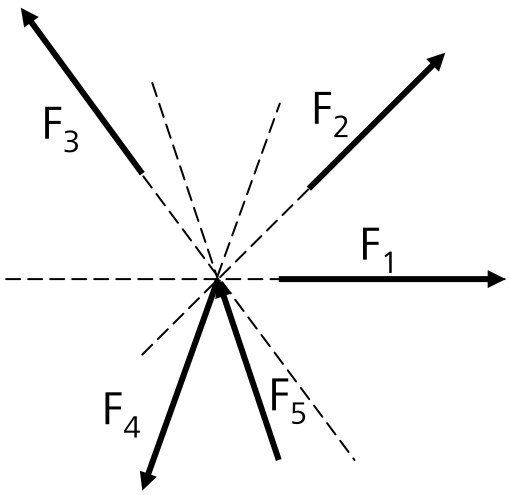
$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$ bzw. im ortsfesten x-y-Koordinatensystem für die Koordinaten (Komponenten)

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$$

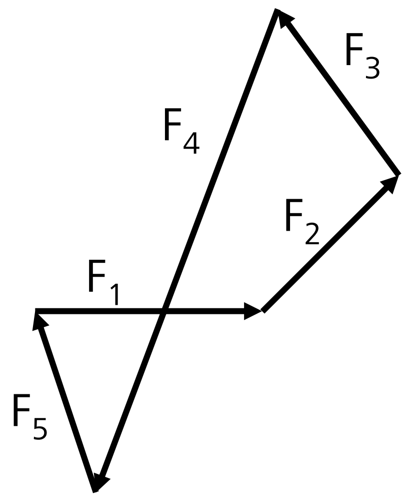
Zeichnerische Lösung

Lageplan (Längenmaßstab m_L



Die Wirkungslinien aller Kräfte schneiden sich in einem Punkt, sie bilden ein zentrales Kräftesystem

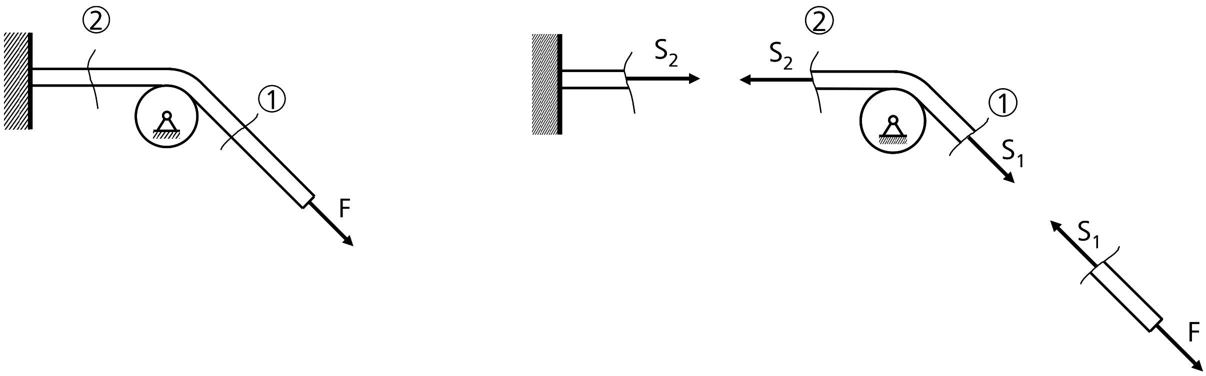
Kräfteplan (Längenmaßstab m_F)



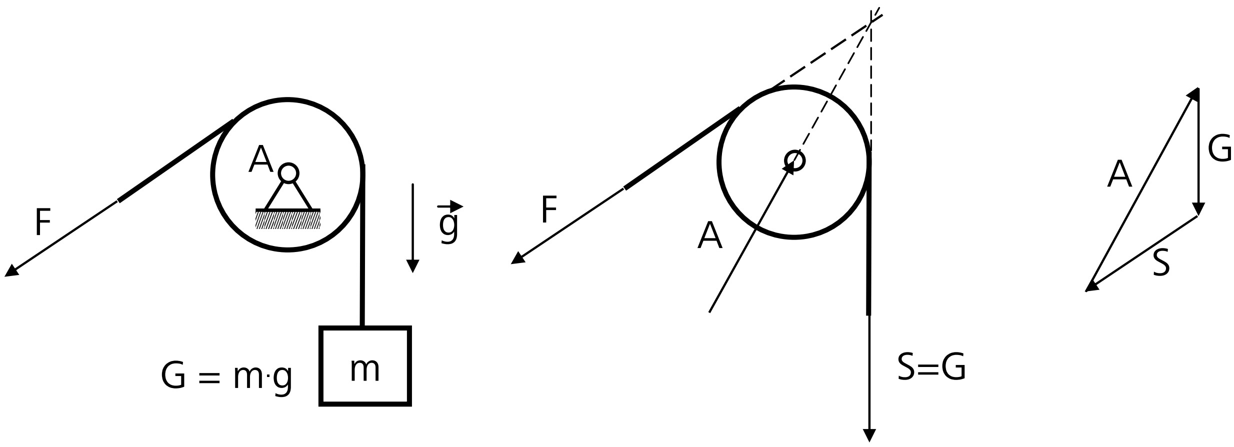
Das geschlossene Krafteck (gleicher Umfahrungssinn aller Kräfte) ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines zentralen Kräftesystems.

1.4 Wechselwirkungsgesetz

Schnittkräfte treten stets paarweise auf. Sie sind betragsmäßig gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet.



1.5 Seilkräfte (reibungsfreie Umlenkrolle)



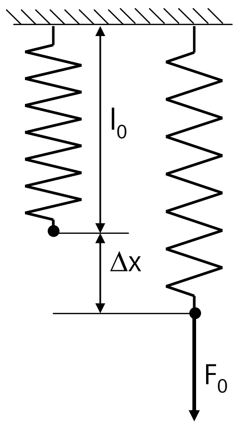
Seilumlenkrollen (reibungsfrei) lenken Seilkräfte nur um, ihr Betrag ändert sich dabei nicht.

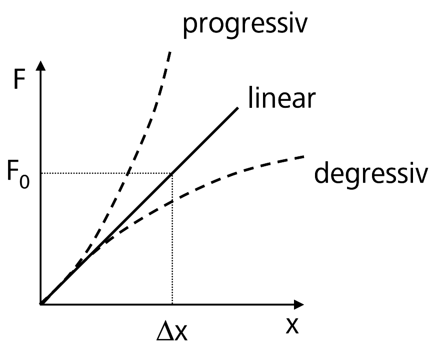
1.6 Federkräfte

Federgesetz: $F = c \cdot \Delta x$

Federkonstante: $c \text{ in } \frac{N}{mm}$

(Federsteifigkeit)





1.7 Räumliche zentrale Kräftegruppen

Komponentendarstellung einer Kraft im Raum

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y + F_z \cdot \vec{e}_z$$

mit den Komponenten

$$F_x = F \cos \alpha_x$$

$$F_y = F \cos \alpha_y$$

$$F_z = F \cos \alpha_z$$

Satz von Pythagoras im Raum (Richtungskosinus und Betrag der Kraft)

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1$$

$$F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^2 + F_z^{\ 2}}$$

Resultierende:

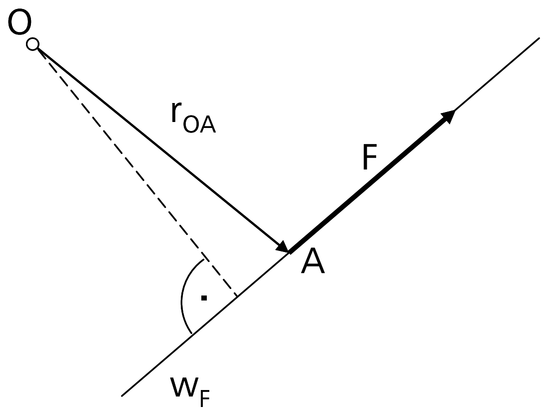
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ R_y &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ R_z &= \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \end{aligned}$$

2 Ebene Kräftegruppen am starren Körper

2.1 Moment einer Kraft bzgl. eines Drehpunktes O

Moment = Kraft · Hebelarm

$M_O = \left|\vec{M}_O\right| = F \cdot a$



mit:

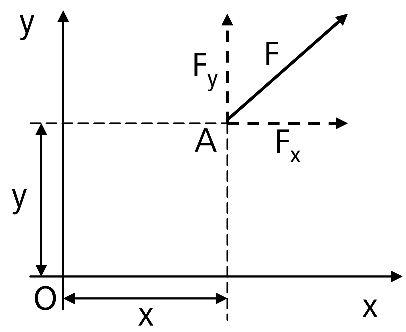
a: senkrechter Abstand vom Punkt O zur Wirkungslinie w_F durch den Bezugspunkt A

Richtung: Senkrecht auf der durch den Ortsvektor $\vec{r}_{OA}$ und dem Kraftvektor aufgespannten Ebene.

Richtungssinn: (Mathematisch) positiv: Linksdrehend
(Mathematisch) negativ: Rechtsdrehend

Moment in rechtwinkligen Koordinaten

$M_O = x\,F_y - y\,F_x$



Mathematische Formulierung:

$$\vec{r}_{OA} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \;,\; \vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\vec{e}_z$$

(Achtung: Die Koordinaten x,y und die Komponenten der Kraft F_X, F_Y sind vorzeichenbehaftete Größen!)

2.2 Moment einer Kräftegruppe

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$$

2.3 Gleichgewicht

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi} = \vec{0}$$

Für die Koordinaten (Komponenten) gilt:

$\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_A = 0$ (A: Momentenbezugspunkt)

oder

$\sum F_x = 0$, $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$ ($\overline{AB}$ nicht $\perp$ auf x-Achse)

oder

$\sum F_y = 0$, $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$ ($\overline{AB}$ nicht $\perp$ auf y-Achse)

oder

$\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$, $\sum M_C = 0$ (A,B und C nicht auf einer Geraden)

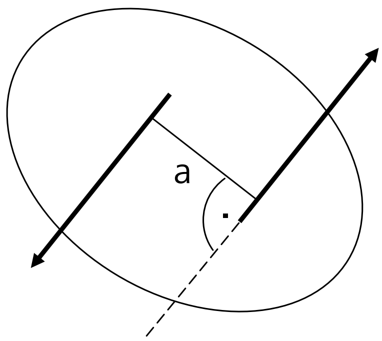
2.4 Ebene Kräftesysteme

2.4.1 Moment eines Kräftepaares (freies Moment)

$M_O = \left|\vec{M}_O\right| = F \cdot a$

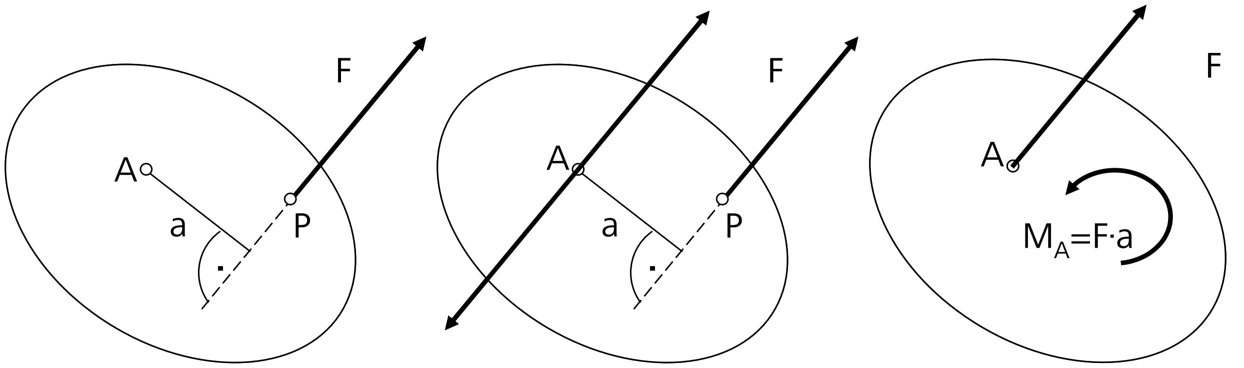
M > 0: linksdrehend (mathematisch positiv)

M < 0: rechtsdrehend (mathematisch negativ)



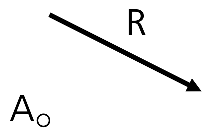
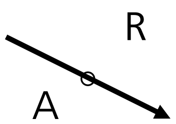
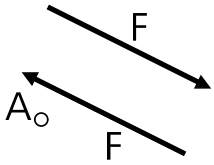
2.4.2 Versetzungsmoment

Durch Hinzufügen einer Gleichgewichtsgruppe erhält man:



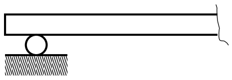
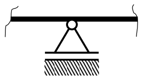
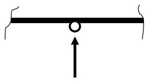
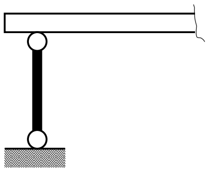
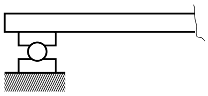
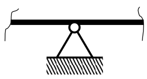
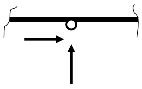
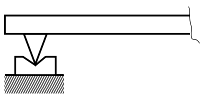
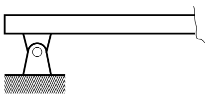
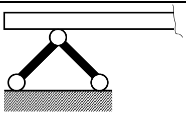
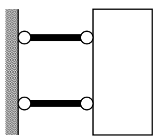
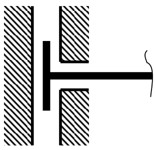
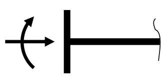
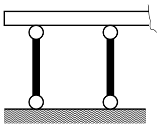
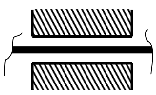
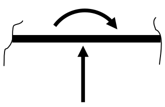
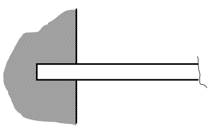
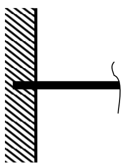
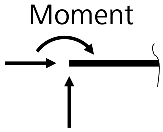
Die Kraft F in P ist gleichwertig der Kraft in A und dem Versetzungsmoment $M_A = F \cdot a$

2.4.3 Reduktion auf vier Fälle

	Resultierende nicht durch A	$R \neq 0 \quad , \; M_A \neq 0$
	Resultierende durch A	$R \neq 0 \quad , \; M_A = 0$
	Kräftepaar	$R = 0 \quad , \; M_A \neq 0$
	Gleichgewicht	$R = 0 \quad , \; M_A = 0$

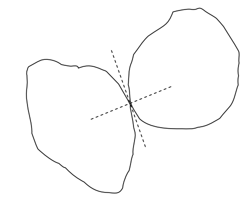
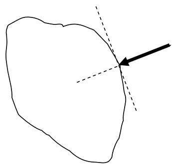
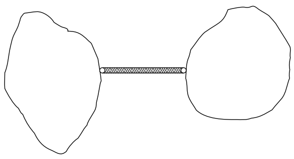
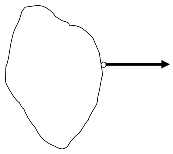
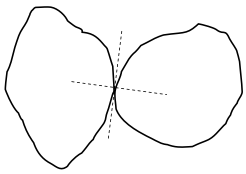
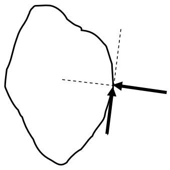
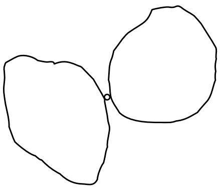
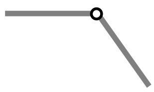
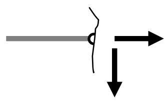
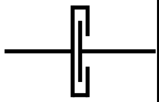
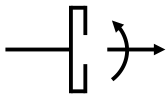
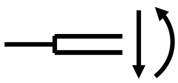
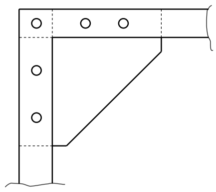
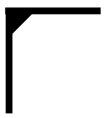
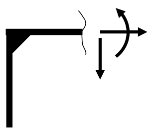
3 Einfache Lagerbedingungen am starren Körper

Auflagerarten (Tafel 1)

<table>
<tr><th>Lager</th><th>Bezeichnung</th><th>Symbol</th><th>Mögliche Reaktionen</th><th>Wertigkeit</th><th>Mögliche Bewegungen</th><th>Freiheitsgrade</th></tr>
<tr><td></td><td>Rollenlager</td><td rowspan="2">„Loslager“
</td><td rowspan="2">Querkraft
</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Verschiebung (längs), Drehung</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td></td><td>Pendelstütze</td></tr>
<tr><td></td><td>Kipplager</td><td rowspan="4">„Festlager“
</td><td rowspan="4">Quer-, Längskraft
</td><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">Drehung</td><td rowspan="4">1</td></tr>
<tr><td></td><td>Schneidenlager</td></tr>
<tr><td></td><td>Gelenklager</td></tr>
<tr><td></td><td>Doppelstütze</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">Parallelstützen</td><td></td><td>Längskraft, Moment
</td><td rowspan="2">2</td><td>Verschiebung (quer)</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Querkraft, Moment
</td><td>Verschiebung (längs)</td></tr>
<tr><td></td><td>Einspannung</td><td></td><td>Längskraft, Querkraft, Moment
</td><td>3</td><td>keine</td><td>0</td></tr>
</table>

4 Systeme starrer Scheiben

4.1 Innere Bindungen (Zwischenreaktionen) (Tafel 2)

<table>
<tr><th>Art</th><th>Bezeichnung</th><th>Symbol</th><th>Mögliche Reaktionen</th><th>Wertigkeit</th><th>Mögliche Bewegungen</th><th>Freiheitsgrade</th></tr>
<tr><td></td><td>Ideale Berührung (glatt)</td><td rowspan="2"></td><td></td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Verschiebung (tangential), Drehung</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td></td><td>Seil</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Reale Berührung (rau)</td><td></td><td></td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">Drehung</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td></td><td>Gelenk</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Parallel-führung</td><td></td><td></td><td rowspan="2">2</td><td>Verschiebung (quer)</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Schiebe-hülse</td><td></td><td></td><td>Verschiebung (längs)</td></tr>
<tr><td></td><td>Biegesteife Ecke</td><td></td><td></td><td>3</td><td>keine</td><td>0</td></tr>
</table>

4.2 Statische Bestimmtheit

a) Notwendige Bedingung:

Ein starrer Körper ist statisch bestimmt gelagert, wenn

$$\mathbf{f = 3n - (b+z) = 0}$$

Es bedeuten: f: Anzahl der Freiheitsgrade des gelagerten Systems

n: Anzahl der starren Scheiben

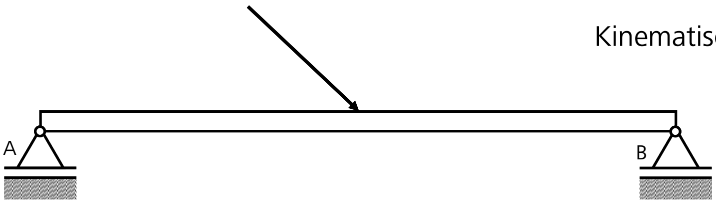
b: Anzahl der Auflagerreaktionen (Bindungen)

z: Anzahl der Zwischenreaktionen

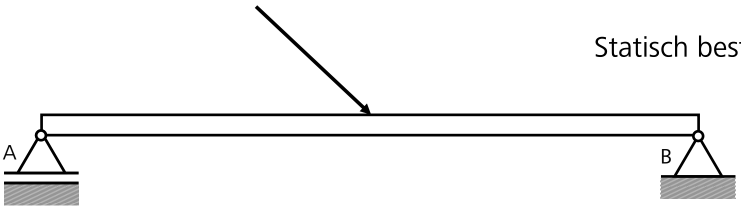
b) Hinreichende Bedingung:

Die Auflagerreaktionen lassen sich eindeutig aus den Gleichgewichtsbedingungen (lineares Gleichungssystem) berechnen, wenn die Koeffizientendeterminante des Systems det (A) = 0 ist, d.h. die Körper/Systeme dürfen nicht wacklig oder verschieblich gelagert sein.

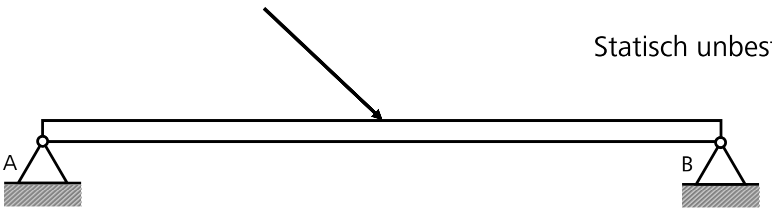
Begriffe:



Kinematische Lagerung (b + z < 3n)



Statisch bestimmte Lagerung (b + z = 3n)



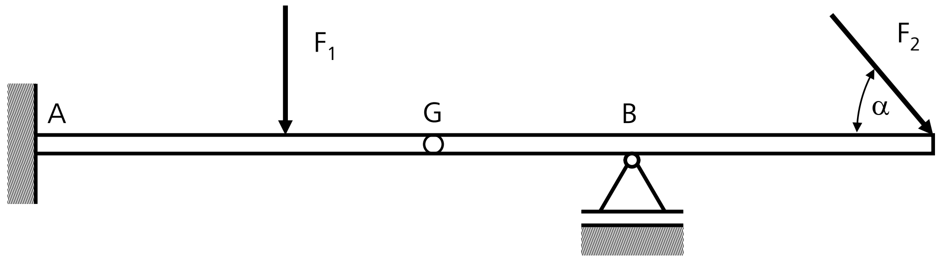
Statisch unbestimmte Lagerung (b + z > 3n)

4.3 Analytische Behandlung

Freischnitt im Gelenk führt auf zwei einteilige Systeme und Gelenkkräfte G_x und G_y als neue Unbekannte.

Vorgehensweise:

1.) Statische Bestimmtheit des Systems überprüfen



Notwendige Bedingung: $f = 3 * 2 - (3+1+2) = 0$

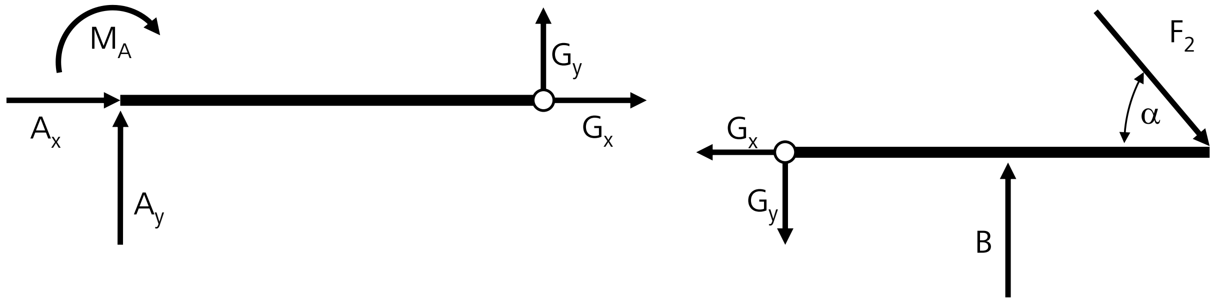
Hinreichende Bedingung: $\det(A) \neq 0$

Anschaulich:

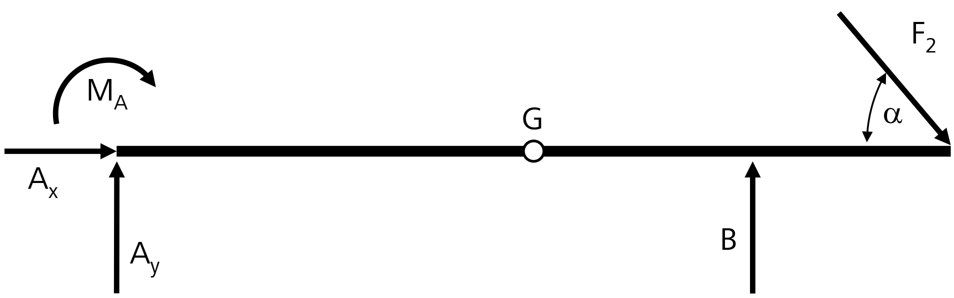
Notwendige Bedingung: Die Anzahl aller Freiheitsgrade ist gleich der Anzahl aller Auflager- und Zwischenreaktionen.

Hinreichende Bedingung: Das System ist weder wackelig noch verschieblich gelagert.

2.) An den Auflagern und Gelenken freischneiden und Kräftegleichgewicht an den Teilsystemen aufstellen



3.) Zur Kontrolle: Kräftegleichgewicht am Gesamtsystem aufstellen (nur Auflager freigeschnitten)



5 Schwerpunkt

5.1 Massenmittelpunkt (Schwerpunkt)

Ortsvektor des Massenmittelpunktes:

$$\vec{r}_S = \frac{\int \vec{r}\,dm}{m}$$

Kartesische Koordinaten des Massenmittelpunktes:

$$x_S = \frac{\int\limits_{(m)} x \cdot dm}{m} \qquad y_S = \frac{\int\limits_{(m)} y \cdot dm}{m} \qquad z_S = \frac{\int\limits_{(m)} z \cdot dm}{m}$$

Sind die Teilschwerpunkte der Teilkörper bekannt, lassen sich die Koordinaten x_S, y_S, z_S des Gesamtschwerpunktes des Körpers aus folgenden Gleichungen errechnen:

$$x_S = \frac{\sum x_{si} m_i}{\sum m_i} \qquad y_S = \frac{\sum y_{si} m_i}{\sum m_i} \qquad z_S = \frac{\sum z_{si} m_i}{\sum m_i}$$

mit:

x_{si}, y_{si}, z_{si}: Schwerpunktskoordinaten der Teilkörper der Masse m_i

m_i : Massen der Teilkörper

5.2 Volumenmittelpunkt (Schwerpunkt homogener Körper mit konstanter Dichte)

Besitzt der Körper eine konstante Dichte ρ, so lässt sich der Schwerpunkt aus den Schwerpunkten der Teilkörper wie folgt bestimmen:

$$x_S = \frac{\sum x_{si} V_i}{\sum V_i} \qquad y_S = \frac{\sum y_{si} V_i}{\sum V_i} \qquad z_S = \frac{\sum z_{si} V_i}{\sum V_i}$$

Mit:

x_{si}, y_{si}, z_{si}: Schwerpunktskoordinaten der Teilkörper des Volumens V_i

V_i: Volumen der Teilkörper

5.3 Flächenschwerpunkt ebener Flächen

Ortsvektor des Flächenschwerpunktes:

$$\vec{r}_S = \frac{\int \vec{r}\, dA}{A}$$

Kartesische Koordinaten des Flächenschwerpunktes:

$$x_S = \frac{\int_{(A)} x \cdot dA}{A} \qquad y_S = \frac{\int_{(A)} y \cdot dA}{A}$$

Sind die Teilschwerpunkte der Flächen bekannt, lassen sich die Koordinaten x_S und y_S des Gesamtschwerpunktes der Fläche aus folgenden Gleichungen errechnen:

$$x_S = \frac{\sum x_{si} A_i}{\sum A_i} \qquad y_S = \frac{\sum y_{si} A_i}{\sum A_i}$$

mit:

x_{si}, y_{si}: Schwerpunktkoordinaten der Teilflächen der Größe A_i

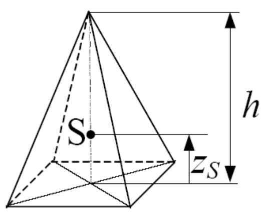
A_i : Größe der Teilflächen

5.4 Anmerkungen

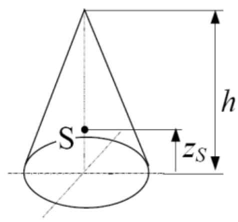
- Symmetrielinie enthält stets den Schwerpunkt, d.h. ist Schwerelinie.
- Ausschnitte, Löcher, etc. werden durch negative Flächen/Volumen berücksichtigt.

5.5 Schwerpunkte einfacher Körper und Flächen

5.5.1 Pyramide und Kegel

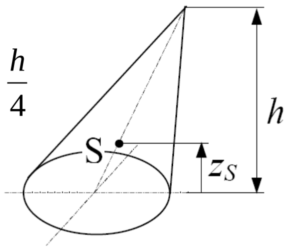


$$z_S = \frac{h}{4}$$



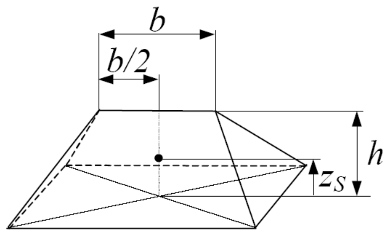
5.5.2 Schiefer Kegel

$$z_S = \frac{h}{4}$$

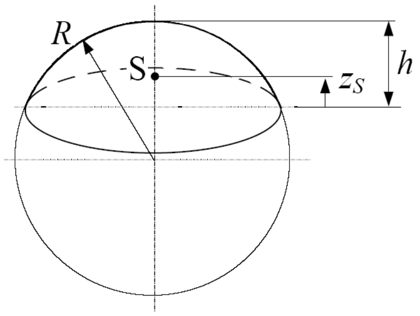


Der Schwerpunkt liegt auf der Verbindungslinie zwischen Flächenschwerpunkt der Grundfläche und Kegelspitze

5.5.3 Keil



5.5.4 Kugelabschnitt

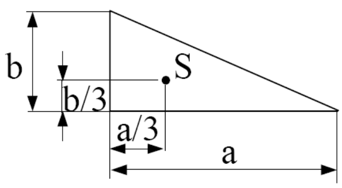


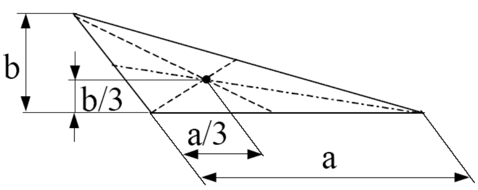
$$z_S = \frac{4R-h}{3R-h}\frac{h}{4}$$

Halbkugel:

$$z_S = \frac{3}{8}h$$

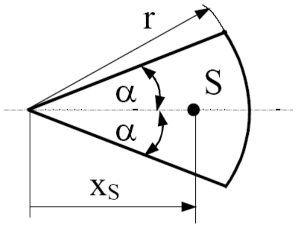
5.5.5 Dreieck





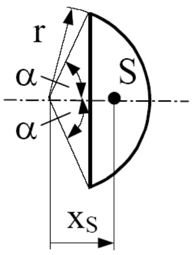
Fläche: $A = \frac{ab}{2}$ Der Schwerpunkt liegt auf dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

5.5.6 Kreissektor



$$x_S = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$
$$A = r^2 \alpha$$

5.5.7 Kreisabschnitt



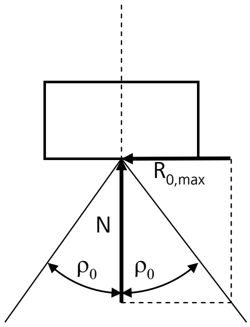
$$x_S = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$
$$A = r^2 (\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

6. Haftung und Reibung

6.1. Haftreibung (Coulombsche Haftreibung)

$|R_0| \leq \mu_0 N$

Nur bei Erfüllung dieser Nebenbedingung sind die Körper relativ zueinander in Ruhe.



N: Normalkraft, steht senkrecht zur Kontaktfläche. Sie ist für Haftung und Reibung notwendigerweise eine Druckkraft.

R_0: Haftreibekraft, ist eine Reaktionskraft. Größe und Richtung lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen.

$R_{0,max}$: Maximal übertragbare Reibkraft für den Fall des Haftens

μ_0: Haftreibungskoeffizient (Funktion der Oberflächenbeschaffenheit)

ρ_0: Winkel des Haftreibungskegels. Dies entspricht dem Winkel der schiefen Ebene, auf der ein Körper (Reibungskoeffizient zwischen Ebene und Körper μ_0) gerade noch haftet.

$\mu_0 = \tan \rho_0$

$$\frac{|R_{0,\max}|}{N} = \tan \rho_0 = \mu_0$$

An der Haftgrenze ist die Resultierende aus Haftreibkraft und Normalkraft um den Grenzwinkel der Haftung ρ_0 gegen die Normalenrichtung geneigt. Der Körper bleibt in Ruhe, solange die Wirkungslinie der Resultierenden im Reibungskegel (Haftkegel) verläuft.

6.2 Gleitreibung (Coulombsche Gleitreibung)

$R = \mu N$

Voraussetzung: Die Körper sind relativ zueinander in Bewegung.

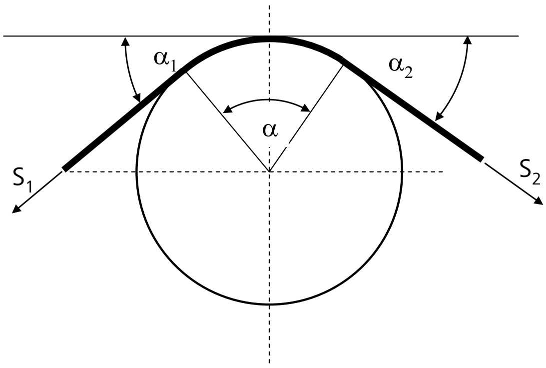
R: eingeprägte Kraft entgegen der Relativbewegung

μ: Reibungskoeffizient (Reibbeiwert) ist Funktion der Werkstoffpaarung, Oberflächenbeschaffenheit, Relativgeschwindigkeit etc.)

6.3 Seilreibung (Haftreibung)

Das Seil und Rolle sind relativ zueinander in Ruhe, wenn folgende Beziehung erfüllt ist.

$e^{-\mu_0\alpha} \le \frac{S_1}{S_2} \le e^{\mu_0\alpha}$ Euler-Eytelweinsche Gleichung



Umschlingungswinkel $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

Sonderfall $\mu_0 = 0$: $S_1 = S_2$

6.4 Seilreibung (Gleitreibung)

$S_1 = S_2 e^{\mu\,\alpha}$ bei relativer Bewegung des Seiles in Richtung von S_1

$S_2 = S_1 e^{\mu\,\alpha}$ bei relativer Bewegung des Seiles in Richtung von S_2

7 Schnittgrößen an ebenen Tragwerken

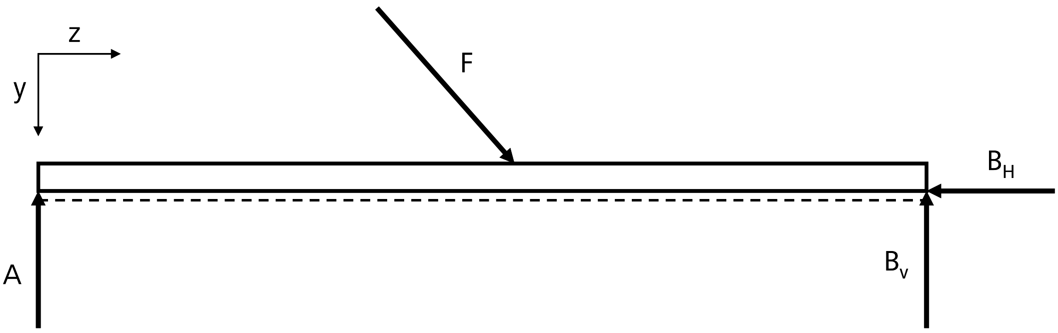
7.1 Vorgehensweise

Zunächst werden am Gesamtsystem alle Auflagerreaktionen bestimmt. Damit sind dann alle äußeren Kräfte bekannt. Danach werden die Bereiche des Balkens identifiziert und markiert. Ein Bereich beginnt/endet jeweils bei äußeren Ereignissen (äußere Kraft, äußeres Moment, Linienlast beginnt/endet, Lager, Knick im Balken usw.). Für jeden Bereich wird eine Unterseite des Balkens definiert und mit einer gestrichelten Linie markiert. Für jeden Bereich ist grundsätzlich ein Koordinatensystem zu definieren und einzuzeichnen, bei geraden Balken lässt sich jedoch oft ein gemeinsames Koordinatensystem für mehrere Bereiche verwenden. Der Balken wird nun in jedem Bereich je einmal in zwei Teile geschnitten und für jeden Bereich die Schnittgrößen bestimmt. Es ist dabei gleichgültig, welches Schnittufer (positiv oder negativ) für die Bestimmung der Schnittgrößen verwendet wird. Es bietet sich die Verwendung desjenigen Schnittufers an, das weniger Kräfte beinhaltet, um die Berechnung einfach zu halten.

7.2 Koordinatensystem am ebenen, geraden Balken

Zur Festlegung des Koordinatensystems wird zunächst die Unterseite des Balkens mit einer gestrichelten Linie markiert.

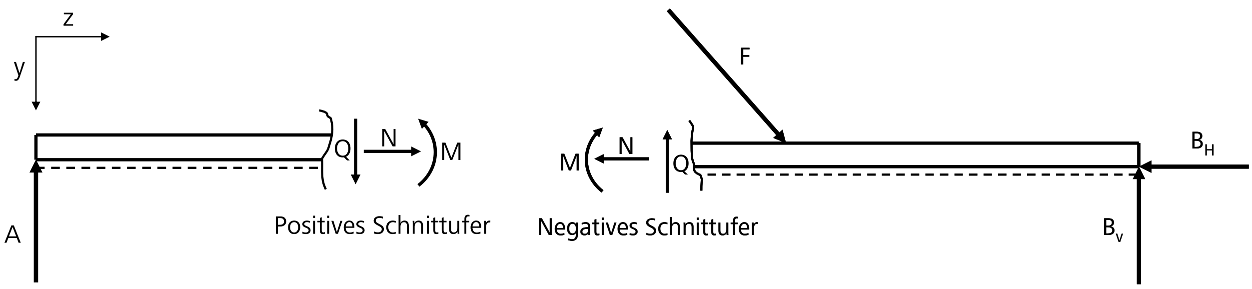
Das Koordinatensystem wird folgendermaßen orientiert: Die z-Achse zeigt in Richtung der Balkenachse, die y-Achse in Richtung der Balkenunterseite.



7.3 Schnittgrößen am ebenen, geraden Balken

Zur Bestimmung der Schnittgrößen wird das System in zwei Teile zerschnitten und einer der beiden Teile entfernt. Die Wirkung des jeweils entfernten Teils wird durch die Schnittkraftgruppe ersetzt. Die Schnittkraftgruppe besteht aus der Normalkraft N, Querkraft Q und Schnittmoment M.

Die Richtung der Schnittgrößen ergibt sich aus dem gewählten Koordinatensystem und dem Schnittufer. Am positiven Schnittufer laufen positive Schnittgrößen in positive Richtungen. Anschaulich zeigen die Kraftpfeile am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtungen, das Schnittmomentenpfeil läuft von der Unterseite (gestrichtelte Linie!) nach oben.

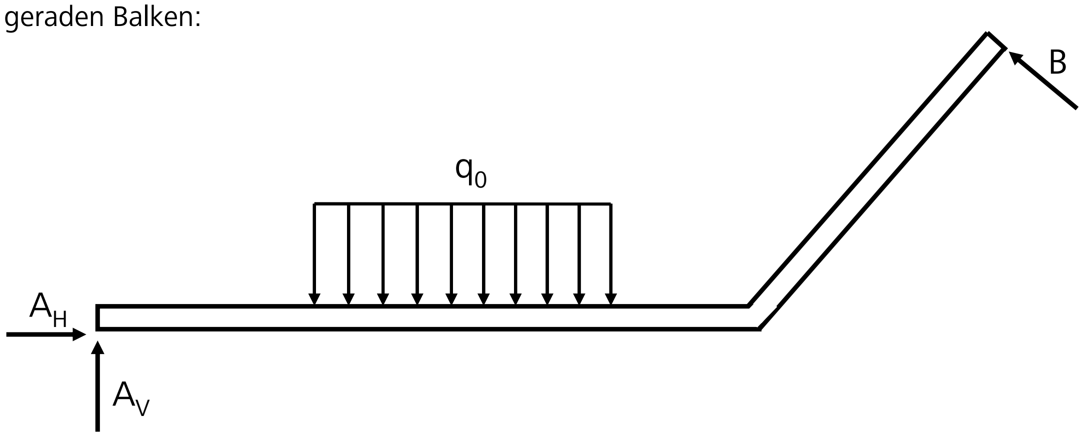


Unter Verwendung der 3 Gleichgewichtsbedingungen lassen sich nun die 3 Schnittkräfte an der Stelle z bestimmen (Schnittgrößenverlauf in Abhängigkeit von der Koordinate z). Die Wahl des Schnittufers für die Bestimmung der Schnittkraftverläufe ist dabei beliebig, das nicht verwendete Schnittufer kann zur Kontrolle des Ergebnisses verwendet werden.

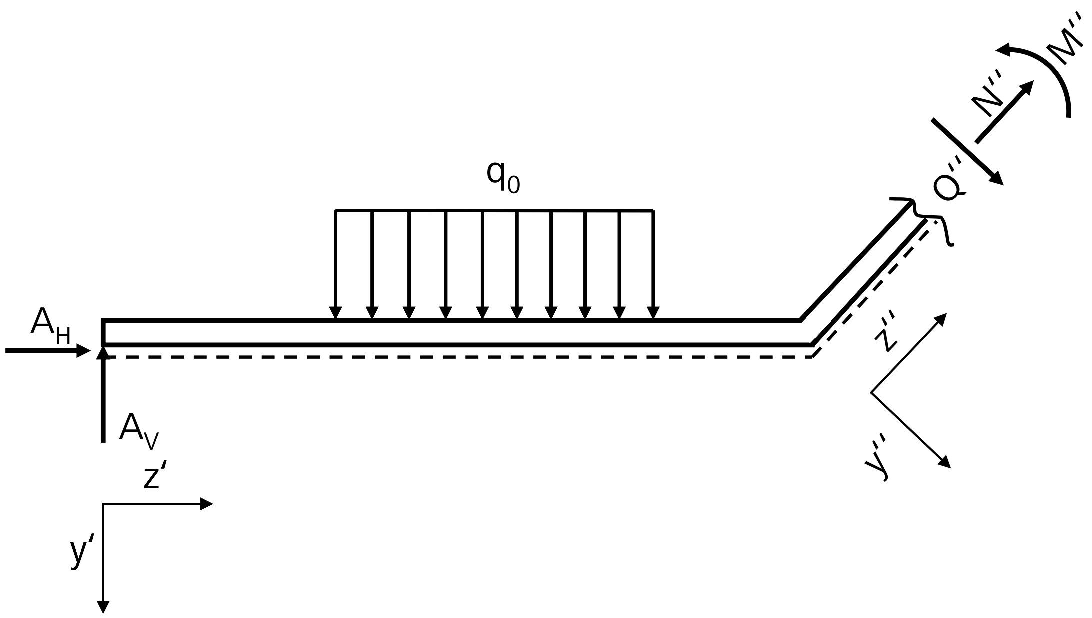
Die Schnittgrößen müssen für jeden Bereich des Balkens getrennt bestimmt werden. Ein Bereich beginnt/endet jeweils bei äußeren Ereignissen (äußere Kräfte, Momente (Auch von Auflagern) Linienlast beginnt/endet)

7.4 Schnittgrößen an ebenen Rahmen

Die Bestimmung der Schnittgrößen an Rahmen erfolgt analog der Bestimmung am ebenen, geraden Balken:



Der gesamte Rahmen wird wieder in zwei Teile zerschnitten, und die Schnittgrößen gemäß der o.g. Vorzeichenfestlegung angetragen. Es ist jedoch zu beachten, dass für jeden Rahmenteil ein neues Koordinatensystem zu verwenden ist. Die Koordinaten für jeden Rahmenteil werden mit Strichen gekennzeichnet (z’, z’’, z’’’ usw.).



Damit können die Schnittgrößenverläufe wieder über die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden.

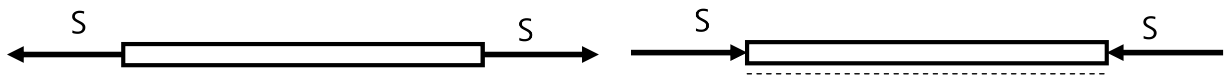
7.5 Zusammenfassung des Ablaufs zur Bestimmung der Schnittgrößen

- Auflagerreaktionen bestimmen
- Bereiche identifizieren und markieren
- Unterseite des Balkens definieren und markieren
- Koordinatensysteme definieren und einzeichnen
- Bereichsweise jeweils einen Schnitt durchführen und Schnittkraftgruppe einzeichnen (N, Q, M)
- Über Gleichgewichtsbedingungen die Schnittkraftverläufe bereichsweise berechnen

8 Ebene Fachwerke

8.1 Schnittkräfte

Fachwerke sind Tragwerke, die sich aus Stäben und Knoten zusammensetzen. Die Stäbe des Fachwerkes sind in den Knotenpunkten durch reibungsfreie Gelenke verbunden. Als Stäbe werden Elemente bezeichnet, die ausschließlich Kräfte in Normalrichtung aufnehmen können. Momente und Querkräfte können mit Stäben hingegen nicht aufgenommen werden. Es wird zwischen Zug- und Druckstäben unterschieden. Im Fachwerk werden Druckstäbe üblicherweise durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet.



Zugstab

(zieht am Knoten)

Druckstab

(drückt auf den Knoten)

8.2 Bildungsgesetze für Fachwerke

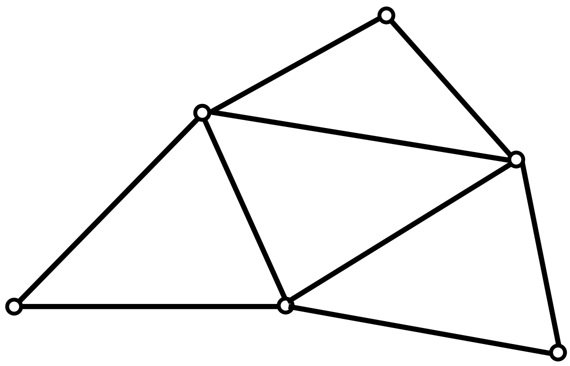
1. Bildungsgesetz

Grundfigur:

Stab mit zwei Knoten

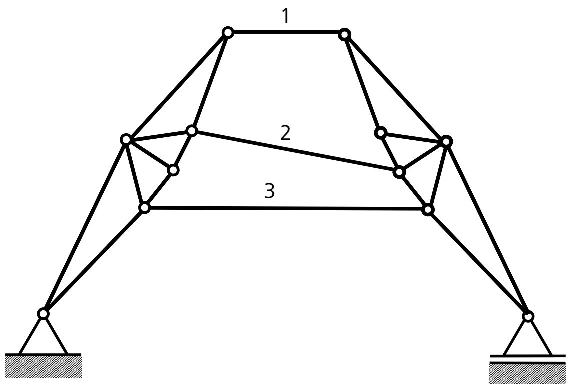
Weiterer Fachwerksaufbau:

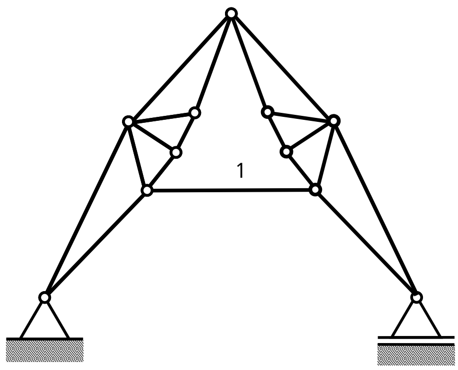
Anschluss je eines weiteren Knotens mittels zweier nicht paralleler Stäbe (Stabzweischlag)



2. Bildungsgesetz

Zwei nach dem 1. Bildungsgesetz aufgebaute Fachwerke werden durch 3 Stäbe verbunden, die nicht alle parallel und nicht zentral sein dürfen. An die Stelle von 2 Stäben kann auch ein beiden Dreiecksfachwerken gemeinsamer Knoten treten.





8.2 Statische Bestimmtheit

Einfache Fachwerke sind innerlich statisch bestimmt und starr, entsprechen in ihrem statischen Verhalten dem eines starren Einzelkörpers.

Die notwendige Bedingung für die innerliche statische Bestimmtheit eines statisch bestimmt gelagerten Fachwerkes ist

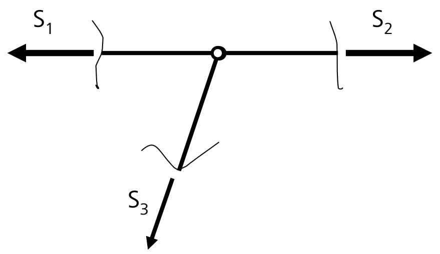
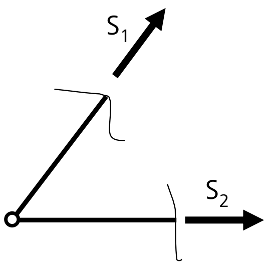
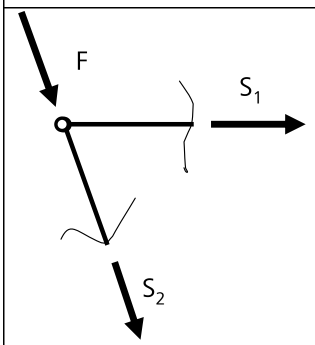
$$s+3 = 2k$$

mit: s: Anzahl der Stäbe

k: Anzahl der Knoten

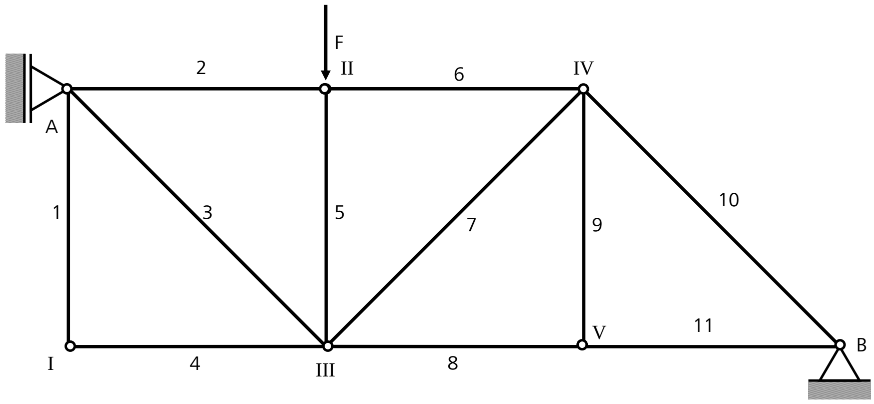
8.3 Nullstabregeln

Zur Bestimmung des Kräftegleichgewichts an einem Knoten stehen in der Ebene zwei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung (zentrale Kräftegruppe). Die Nullstabregeln sind aus den möglichen Gleichgewichtszuständen am Knotenpunkt abgeleitet. Regel 1 ist daraus abgeleitet, dass für zwei von null verschiedene, nichtparallele Kräfte in der Ebene kein Gleichgewicht möglich ist.

Skizze	**Begründung**	**Nr. der Regel**
	Unbelasteter 3-stäbiger Knoten Zwei Stäbe haben die gleiche Richtung, dann ist der dritte Stab ein Nullstab. $S_§ = 0$	1
	Unbelasteter 2-stäbiger Knoten Beide Stäbe sind Nullstäbe. $S_1 = S_2 = 0$	2
	Belasteter 2-stäbiger Knoten Kraft zeigt in Richtung des einen Stabes (hier S_2). Anderer Stab ist dann Nullstab. $S_1 = 0$	3

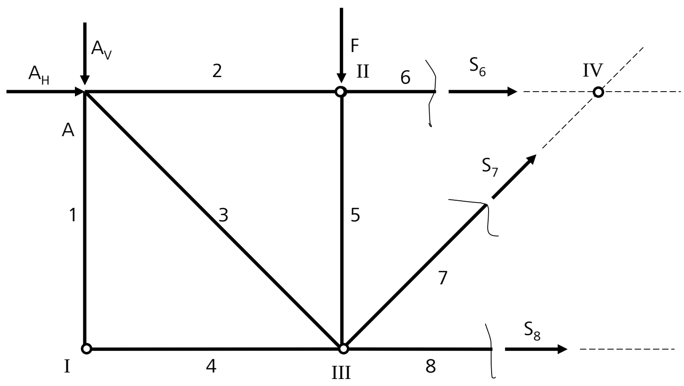
8.4 Rittersches Schnittverfahren

Zur Bestimmung einzelner Stabkräfte bietet sich das Rittersche Schnittverfahren an. Ein Beispiel für ein solches Fachwerk ist in folgendem Bild dargestellt. Zunächst werden alle Auflagerreaktionen (Im Beispiel Reaktionen in A und B) bestimmt, so dass am Fachwerk nun alle äußeren Kräfte bekannt sind.



Das Fachwerk wird nun derart in **zwei Teile** zerschnitten, dass **maximal drei Stäbe mit unbekannter Stabkraft** geschnitten werden. Diese Stäbe dürfen dabei **nicht alle zentral** sein. Auch Nullstäbe zählen dabei zu den bekannten Stabkräften.

In diesem Beispiel werden die Stäbe 6, 7 und 8 geschnitten. Diese Stabkräfte sind alle unbekannt, die drei Stäbe sind nicht zentral.



Das Rittersche Schnittverfahren wendet jeweils eine Momentenbedingung an, um eine Stabkraft zu berechnen. Dabei werden die beiden in dem jeweiligen Rechenschritt **nicht** berechneten Stabkräfte zum Schnitt gebracht und das Momentengleichgewicht um diesen Schnittpunkt gebildet. In dieser Momentengleichung ist die gesuchte Stabkraft als einzige Unbekannte enthalten. Dieser Momentenbezugspunkt wird auch als Ritterpunkt bezeichnet.

Im Beispiel wird z.B. die Kraft S_8 gesucht. Zur Berechnung werden die beiden anderen unbekannten Schnittkräfte (S_6, S_7) zum Schnitt gebracht (hier Punkt IV) und um diesen Punkt das Momentengleichgewicht aufgestellt.

Wird die Kraft S_7 gesucht existiert hierzu kein Ritterpunkt (S_6 und S_8 sind parallel und haben damit keinen Schnittpunkt). Hier muss (wie sonst auch üblich) mit den 3 Gleichgewichtsbedingungen gearbeitet werden.