SORTIS IN LUDIS: DE LA PARADOJA DE SAN PETERSBURGO A LA TEORÍA DE LA UTILIDAD

JUAN M. R. PARRONDO

1. Introducción

La teoría de la probabilidad no fue uno de los campos de la matemática más cultivados por Leonhard Euler. De hecho, la probabilidad en el siglo XVIII es una disciplina todavía poco desarrollada y que despierta un interés moderado, principalmente a través de tres asuntos: las loterías y los juegos de azar, el error en las observaciones, y el tratamiento de las incipientes estadísticas y los seguros[1]. Euler investigó sobre todos ellos como se puede comprobar en la excelente recopilación de Richard J. Pulskamp [2].

En uno de estos trabajos [3], publicado después de su muerte, Euler estudió un problema que, a pesar de la simplicidad de su formulación, ha inspirado importantes desarrollos en economía y teoría de la probabilidad. Nos referimos a la llamada *Paradoja de San Petersburgo* [4, 5, 6], denominada así por el trabajo que Daniel Bernoulli presentó en 1738 en la Academia de Ciencias de la ciudad rusa.

El artículo de Euler, el documento E811 en el Euler Archive [7] está escrito en latín, bajo el título *Vera Aestimatio Sortis in Ludis* (*La Correcta Estimación del Riesgo en un Juego*). El objetivo de Euler es evaluar el riesgo en un juego de azar, tomando en consideración no sólo la ganancia monetaria sino el beneficio efectivo de cada premio. A tales consideraciones, que rozan el terreno de la valoración moral, Euler y muchos otros científicos fueron empujados por la paradoja de San Petersburgo, dando lugar a lo que hoy se conoce como *teoría de la utilidad* [8].

[1]Este último problema es el que más tarde, en el siglo XIX, supondría el motor de la estadística matemática y la teoría de la probabilidad [1].

Considerada desde otro punto de vista, la paradoja también motivó la investigación sobre extensiones del teorema central del límite [5]. Discutiremos estas extensiones después de introducir la paradoja en la siguiente sección, para terminar describiendo las contribuciones de Euler y Bernoulli y algunas curiosidades, y problemas, de la moderna teoría de la utilidad.

2. La Paradoja de San Petersburgo

La paradoja consiste en un juego de azar muy simple. Se comienza con un "bote"de dos euros y se lanza una moneda al aire: si sale cruz, yo doblo la cantidad que hay en el bote; si sale cara, usted se lleva el bote disponible en ese momento. Es decir, si la primera tirada es cara, usted gana 2 euros, si la primera tirada es cruz y la segunda cara, gana 4 euros, si la primera cara sale en la tercera tirada gana 8 euros, y si la primera cara sale en la tirada n-ésima gana 2^n euros. Obviamente, lo que a usted más le conviene es que salga cara lo más tarde posible. En cualquier caso, usted gana siempre algo de dinero, por lo que es justo que yo le cobre alguna cantidad o *cuota* para permitirle participar en el juego. La pregunta que se hizo Bernouilli, y que en cierto modo sigue sin resolver, es: ¿cuál es la cuota de entrada que se debería cobrar para que el juego sea justo?

Para cualquier sorteo "normal", la cuota de entrada justa es igual al valor medio de la ganancia. Así ocurre en la ruleta de un casino si no contemplamos la posibilidad de que salga el cero (que es el sesgo necesario para asegurar a la casa una ganancias sistemáticas): la apuesta a rojo, negro, par, impar, se paga doble, porque la probabilidad de ganar es $1/2$; el premio de la apuesta a un único número es 36 veces dicha apuesta, porque la probabilidad de ganar es $1/36$. En ambos casos, la ganancia neta media $pP - a$, siendo a la apuesta, P el premio y p la probabilidad de ganarlo, es nula: la cuota de entrada a en el juego es siempre igual al valor medio del premio pP.

Si aplicamos este criterio al juego de San Petersburgo, nos encontramos con un serio problema. La probabilidad de que la primera cara salga en la tirada n-ésima es $1/2^n$, ya que, para que esto ocurra, debe salir cruz en las $n-1$ primeras tiradas y cara en la siguiente. En este caso, la ganancia es 2^n. El valor medio de la ganancia es entonces:

$$\langle G\rangle = 2\times\frac{1}{2} + 4\times\frac{1}{4} + 8\times\frac{1}{8} + \dots \tag{1}$$

que es claramente infinito. Por tanto, la cuota de entrada debería ser infinita. En otras palabras, si yo le ofrezco entrar en el juego con una cuota de, digamos, un millón de euros, usted debería aceptar, porque la ganancia media en el juego, que es infinita, supera esa y cualquier otra cantidad. Sin embargo, nadie en su sano juicio aceptaría semejante trato. Esta es la paradoja de San Petersburgo: el sentido común nos dice que el valor medio de la ganancia no determina la cuota de entrada aceptable. ¿Cómo determinamos entonces dicha cuota?

El problema fundamental del juego de San Petersburgo es que proporciona premios muy cuantiosos con probabilidad extremadamente pequeña. Por ejemplo, si la primera cara aparece en la tirada décima, la ganancia es de 1024 euros, y esto ocurre con una probabilidad de 1 entre 1024. Las ganancias crecen exponencialmente mientras que las probabilidades decrecen también exponencialmente, siendo siempre el valor medio de cada posible premio igual a un euro.

En la figura 2 podemos ver diez "partidas" del juego de San Petersburgo, cada una de ellas de un millón de turnos[2] y sin cobrar cuota alguna. He dibujado las ganancias en función del número de turnos. La mayoría de las partidas acaban con una ganancia similar, en torno a los 20 millones, salvo una de ellas en las que ha habido uno de esos eventos raros, un poco antes del turno 300.000. En ese turno, salió cruz durante 23 tiradas seguidas y cara en la vigésimo cuarta, con lo que la ganancia del jugador fue de más de 16 millones de euros. La probabilidad de que esto ocurra es de una entre 16 millones. Sin embargo, en un millón de turnos, esto puede ocurrir con una probabilidad superior al 5 %. Por eso, no es sorprendente que, en diez partidas de un millón de turnos cada una, hayamos sido testigos de un evento tan poco probable. En el resto de partidas también hay turnos con grandes ganancias: varios de ellos son saltos de unos 4 millones de euros y hay numerosos saltos de aproximadamente 2 millones y un millón de euros (recordemos que los

[2]A lo largo del artículo, llamaremos *turno* a un juego completo, es decir, a la serie completa de lanzamientos de moneda que acaban con una cara y con el cobro del premio correspondiente

saltos son siempre potencias de dos, pero 2^{20} es 1 048 576, número muy cercano al millón de euros). Cuantos más turnos juguemos, aparecerán saltos cada vez más grandes. Esto es lo que hace que el valor medio de la ganancia sea infinito. Pero si vamos a jugar sólo unas decenas de turnos, parece en principio absurdo que paguemos una cuota elevada debido a eventos prácticamente imposibles.

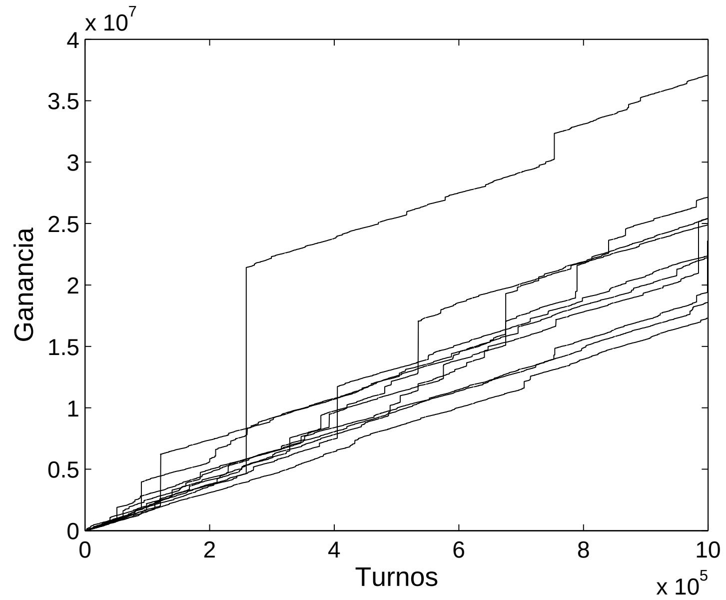

FIGURA 1. Diez partidas del juego de San Petersburgo, cada una de ellas de un millón de turnos.

La paradoja sigue por tanto en pie, pero además pone en evidencia dos cuestiones matemáticas relevantes: la primera, más técnica, acerca del papel de eventos raros que, no obstante, contribuyen de forma significativa al valor medio de una cantidad; la segunda, más filosófica, acerca de la relación entre la realidad y la idealización matemática. Sobre este último asunto, matemáticos como el francés J. Bertrand (1822-1900) comienzan a tomar posturas más bien "platónicas". Algunos autores defendían que el juego es en sí mismo inconsistente, puesto que el organizador del mismo necesitaría un capital infinito para poder hacer frente al pago en uno de los eventos raros. Bertrand escribe (citado en [4]):

> Esta observación es correcta, pero no aclara nada. Si jugamos por céntimos en lugar de francos, por granos de arena en lugar de céntimos, por moléculas de hidrógeno en lugar de granos de arena, el temor de llegar a ser insolvente puede ser disminuido sin límite. Esto no debe afectar la teoría, que no exige que las puestas sean pagadas antes de cada echada de la pieza de moneda. Por más alto que sea el importe debido por A, la pluma puede escribirlo. Hagamos las cuentas sobre papel. La teoría triunfará si las cuentas confirman sus reglas.

Por otro lado, ante la cuestión de la práctica imposibilidad de los eventos raros, Bertrand responde con una sagaz anticipación de las actuales simulaciones por ordenador [4]:

> Si tuviéramos una máquina que pudiera lanzar 100 000 monedas por segundo y registrar los resultados, y si B pagara 1 000 francos por cada juego, este último jugador tendría que pagar 100 000 000 de francos cada segundo; pero, a pesar de esto, después de varios billones de siglos, haría una ganancia enorme. Las condiciones del juego están a su favor y la teoría es justa.

Estas citas muestran la sutileza de los argumentos que se esgrimían en el siglo XIX para intentar resolver la paradoja. La literatura sobre la paradoja de San Petersburgo es muy amplia y aún hoy en día se discuten posibles soluciones. Estos análisis y soluciones pueden clasificarse en dos grandes grupos: los que abordan el problema puramente matemático de un juego con ganancia media infinita, en el espíritu de Bertrand, y los que tratan de analizar cómo opera el "sentido común" y cómo valoramos el riesgo en un sorteo como el de San Petersburgo, que es la línea iniciada por Bernoulli y Euler y que ha dado lugar en el siglo XX a la teoría de la utilidad. Los trabajos que siguen esta última estrategia acaban casi siempre enfrentándose a cuestiones de índole psicológica. Podemos también decir, como se verá a continuación, que uno y otro enfoque se corresponden con el problema al que se enfrenta el organizador y el jugador del sorteo, respectivamente.

3. La solución del casino: más allá del teorema central del límite

Pongámonos en el papel del organizador de un sorteo de San Petersburgo. Somos dueños de un gran casino que quiere poner en marcha este juego: ¿qué cuota de entrada deberíamos cobrar para hacer frente al pago de los premios? La diferencia entre el casino y el jugador es que el primero juega un gran número de veces y puede confiar en la estadística. Sin embargo, en el caso del juego de San Petersburgo, cuantos más turnos jugamos, más posibilidades hay de observar grandes saltos, como los de la figura 1.

Varios matemáticos han estudiado la distribución de probabilidad de la ganancia del jugador después de un gran número N de turnos. Estas distribuciones están concentradas en torno a una cantidad que obviamente crece con N, pero que no es proporcional al número de turnos N, sino que vale $N \log_2(N)$. Por tanto, si el casino quiere recuperar el dinero que paga a los jugadores, tendrá que recaudar, después de N turnos, una cantidad $N \log_2(N)$. De hecho, tendría que recaudar una cantidad algo mayor. En la figura 2 se muestra la distribución de probabilidad de las ganancias totales a las que he restado $N \log_2(N)$, para $N = 50$, 100 y 200 turnos, calculadas resolviendo numéricamente la relación de recurrencia para dicha probabilidad. Aunque el valor medio de todas estas distribuciones de probabilidad es infinito, porque lo es el valor medio de la ganancia en un solo turno, vemos en la figura que las curvas están concentradas en torno a cero, como cabría esperar en cualquier sorteo justo, aunque la parte de ganancias positivas para el jugador es ligeramente superior a la de ganancias negativas. Podríamos corregir este sesgo aumentando ligeramente la cuota. En cualquier caso, este resultado nos indica que la recaudación total no puede ser proporcional al número de turnos. Por el contrario, el casino debe cobrar en cada turno una cantidad ligeramente superior a $\log_2(N)$, para así poder cubrir las pérdidas, siendo N el número total de turnos que está dispuesto a jugar con todos sus clientes.

El análisis de la distribución de probabilidad de la ganancia G se puede considerar como una extensión del teorema central del límite. Este teorema, pieza clave de la teoría de la probabilidad, nos dice que la suma de N variables aleatorias independientes entre sí y con valor medio y dispersión finitos, es, para N muy grande, aproximadamente una gaussiana con valor medio proporcional a N. La ganancia G en el juego de San Petersburgo es también la suma de N variables aleatorias independientes (los premios de cada turno) pero en este caso son variables con valor medio infinito. Aún así, tiene sentido estudiar G como variable aleatoria y se puede encontrar su distribución de probabilidad, como vemos en la figura 2, que resulta estar concentrada en torno a $N \log_2(N)$. Esta extensión del teorema fundamental del límite no es una mera curiosidad técnica o académica, sino que tiene importantes repercusiones. Una de las más significativas son los llamados *vuelos de Levy*, caminos aleatorios con saltos arbitrariamente grandes y que se aplican en campos muy variados, como los mercados financieros [9] o el comportamiento animal [10].

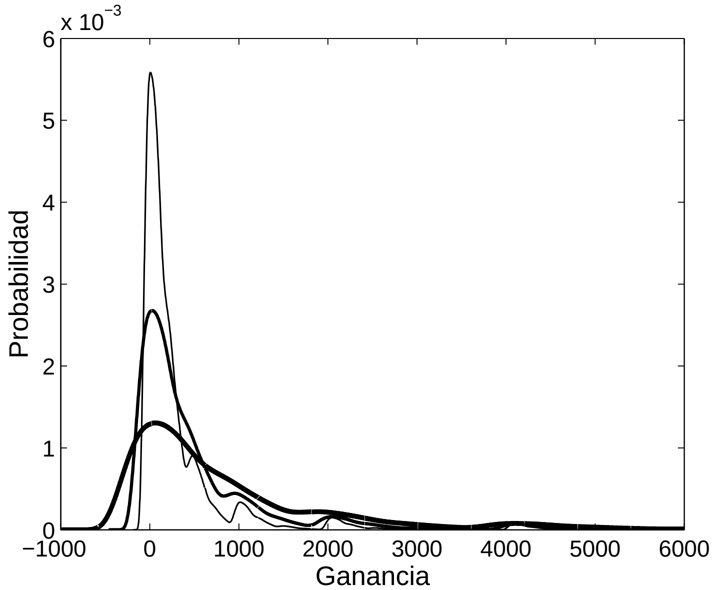

FIGURA 2. Distribución de probabilidad de la ganancia del jugador después de 50 (curva delgada), 100 (curva intermedia) y 200 (curva gruesa) turnos, suponiendo una cuota total $c = N \log_2 N$.

Sin embargo, esta solución a la paradoja, propuesta por Feller en 1968 [5], puede que sea una buena indicación de qué debe hacer el casino, pero, al cliente que quiere jugar al sorteo de San Petersburgo le parecerá absurdo que le cobren por turnos en los que él no va a jugar. Incluso con un sólo cliente, una solución en donde la cuota dependa del número total de turnos es bastante peculiar. ¿Qué pasa si el casino y el cliente acuerdan prolongar la partida un millón de turnos más?

En 1985, el matemático sueco Martin-Löf refinó el resultado de Feller, hallando la siguiente aproximación para la ganancia total G en N turnos [11]:

$$\mathrm{Prob}\left(\frac{G - N\log_2 N}{N} > x\right) \approx \frac{1}{x}, \tag{2}$$

que es aceptable para valores de x superiores a 30. Esta fórmula se puede utilizar para encontrar cuotas más precisas que la dada por Feller. Por ejemplo, si el casino se contenta con que la probabilidad de perder dinero sea $1/x = 0{,}001$, tendrá que cobrar una cuota total $xN + N\log_2 N$, y una cuota por turno de $x + \log_2 N = 1000 + \log_2 N$ euros, que es superior a la sugerida por Feller en 1000 euros. Martin-Löf indica de hecho que el término de Feller $\log_2 N$ es comparable con los 1000 euros sólo a partir de números N muy grandes. Por ejemplo, para un millón de turnos, dicho término es ligeramente inferior a 20. Por tanto, la cuota que se deduce de su análisis es prácticamente independiente de N.

Los resultados de Martin-Löf son interesantes, pero no se pueden considerar una solución de la paradoja, puesto que nadie estaría dispuesto a pagar 1000 euros para jugar al juego de San Petersburgo. La razón es que la distribución de las ganancias tras un gran número de turnos es relevante para el casino, pero no para el jugador que sólo va a jugar unas pocas veces. En este caso, es difícil valorar los premios muy improbables y no hay realmente un consenso acerca de cuál es la cuota de entrada que el jugador debería aceptar. En la sección siguiente analizamos la paradoja desde esta perspectiva.

4. El punto de vista del jugador: Bernoulli, Euler y la teoría de la utilidad

El análisis del juego de San Petersburgo es completamente diferente si nos ponemos en la piel de un individuo que sólo va a probar suerte unas pocas veces. En este caso, la paradoja no tiene en realidad relación con el hecho de que la ganancia media sea infinita, sino con cómo valoramos el riesgo. La misma paradoja ocurre en el juego de San Petersburgo si limitamos los pagos, es decir, si acordamos que, tras por ejemplo 100 tiradas sin salir cara, el jugador no gana nada. En este caso, la ganancia media es de 100 euros, pero ¿estaría alguien dispuesto a pagar esa cantidad para entrar en el sorteo? El premio puede ser aún enorme: $2^{100} \simeq 10^{30}$ si la primera cara sale en la tirada número 100, pero la probabilidad de ganar más de los 100 euros que cuesta entrar en el sorteo es bastante pequeña (1/64).

Hay gente que podría considerar atractivo el sorteo con la cuota de 100 euros, a pesar de que lo más probable es que pierda dinero. Al fin y al cabo, muchas personas juegan a la lotería, y en ocasiones cantidades considerables, con la esperanza de ganar un premio muy cuantioso con una probabilidad insignificante. Sin embargo, hay una diferencia importante desde el punto de vista psicológico entre la paradoja y la lotería. En el juego de San Petersburgo, para ganar un premio cuantioso tienen que salir un gran número de cruces seguidas en el lanzamiento de la moneda, un evento muy improbable que puede ocurrir o no ocurrir aunque juguemos miles de veces. En el caso de la lotería, el boleto con el "gordo" tiene que estar en algún sitio y a alguien le tiene que tocar. Es muy distinto creer que ese alguien pueda ser uno mismo a creer que, al lanzar una moneda, las 20 primeras tiradas van a ser cruz, a pesar de que esta diferencia en la percepción de uno y otro sorteo es irracional, porque ambos sucesos son prácticamente igual de probables.

Lo que está aquí en cuestión es cómo valoramos el riesgo y la ganancia y, como acabamos de ver, semejante problema va más allá de los límites de la matemática y se adentra en el campo de la psicología y de la valoración moral: 100 euros no valen lo mismo para todas las personas; la cantidad no es una buena medida del valor. Georges Buffon expresa esta idea con cierto humor (citado en [4]):

> El avaro se asemeja al matemático. Ambos aprecian el dinero por su cantidad numérica. El hombre sensato desprecia tanto su masa como su medida numérica. Ve solamente las ventajas que puede sacar del dinero. Razona mejor que el matemático.
>
> La pieza de cinco centavos que el pobre ahorra para sus gastos o la pieza idéntica que sirve para completar el millón de pesos del banquero, tienen el mismo valor para el avaro y el matemático. El avaro la tomará con placer igual y el matemático la contará con la misma unidad de medida.

> Pero el hombre razonable considerará la pieza de cinco centavos del pobre como si fuera un peso y el peso del banquero como una monedita.[3]

A pesar de todo ello, Bernoulli, Euler y, ya en el siglo XX, Morgenstern y Von Neumann se atrevieron a abordar el problema del valor con herramientas matemáticas, tratando de encontrar nuevas cantidades que reflejaran el valor o *utilidad* de un premio en un sorteo, cantidades que no tienen por qué coincidir con su cuantía y que pueden depender del jugador y de su patrimonio.

El argumento original de Bernoulli sigue las mismas líneas que la cita de Buffon: 100 euros, por ejemplo, es una cantidad considerable para alguien que no posee nada, mientras que es insignificante para una persona que tenga un patrimonio de un millón de euros. Bernoulli propuso que el aumento de utilidad cuando una fortuna de x euros aumenta en una cantidad muy pequeña Δx debía ser $\Delta x/x$. El aumento de la utilidad cuando nuestra fortuna pasa de b euros a a euros es entonces

$$\int_b^a \frac{dx}{x} = \ln \frac{a}{b} \tag{3}$$

A partir de esta expresión podemos calcular la utilidad media que esperamos obtener participando en el juego de San Petersburgo. Supongamos que la cuota de entrada es c y llamemos b a nuestro capital inicial. El sorteo nos puede deparar un premio de 2 euros con probabilidad $1/2$. En este caso nuestro nuevo capital sería de $b - c + 2$ euros. Si ganamos 4 euros, lo que puede ocurrir con probabilidad $1/4$, nuestro nuevo capital será de $b-c+4$ euros, y así sucesivamente. El incremento

[3] A lo que el platónico Bertrand responderá defendiendo la cantidad como medida objetiva del valor, independiente de su propietario: "Un hombre que posee un millón y gana otro, cambiará poco o nada en su modo de vivir. ¿Es éste el único fruto de la riqueza para uno que no es avaro? Si el hombre sensato de Buffon no es un egoísta cínico, puede hallar otro uso que el de atesorar esos millones de que le suponemos poseedor. Podríamos duplicar su fortuna, multiplicarla por diez y duplicarla otra vez, sin disminuir el aumento constante en el bien que puede hacer. ¿No existen acaso familias a las que este hombre podría enriquecer, miseria que él podría evitar, o grandes obras que podría crear o hacer crear?" [4].

de utilidad que podemos esperar, en media, del resultado del sorteo es:

$$\langle \Delta U \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \left(\frac{b - c + 2^n}{b} \right) \tag{4}$$

La cuota máxima que estaríamos dispuestos a pagar para entrar en el sorteo es la que hace que este incremento medio de la utilidad sea nulo. Para hallar la cuota justa c, que dependerá del capital inicial b, tenemos entonces que solucionar la ecuación $\langle \Delta U \rangle = 0$, con c como incógnita. En la figura 3 he dibujado la solución o cuota justa c en función del capital inicial b. La solución no se puede expresar en términos sencillos, aunque sí es posible calcularla para un caso particular, $b = c$, es decir, para el caso en que invertimos en el juego todo nuestro capital. ¿Cuándo merece la pena asumir este riesgo? Si hacemos $b = c$, el incremento de utilidad se simplifica bastante:

$$\langle \Delta U \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln 2}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln c}{2^n} = 2 \ln 2 - \ln c \tag{5}$$

que se anula para $c = 4$ euros. Luego, si disponemos de 4 euros, la cuota justa será precisamente de 4 euros como, por otra parte, puede apreciarse en la figura 3.

Si el capital inicial b es menor de 4 euros, entonces la solución de la ecuación $\langle \Delta U \rangle = 0$ resulta ser $c > b$, es decir, una cuota que el jugador no puede pagar. Por eso he truncado la curva de la figura 3 por debajo de los 4 euros. Por otro lado, la cuota justa crece sin límite cuando lo hace el capital inicial.

El análisis de la paradoja que realiza Euler en su *Sortis in Ludis* [3] es equivalente al de Bernoulli, aunque difiere en su formulación. Euler argumenta que la cuota viene dada por el incremento medio del *statum* del jugador, similar a la utilidad bernoulliana. Lo que luego propone Euler es que, en un juego con dos premios equiprobables, el *statum* medio de un jugador después del juego se debe calcular utilizando la media geométrica en lugar de la media aritmética. Comenta finalmente la equivalencia de su formulación con la basada en logaritmos y una consecuencia bastante razonable de su propuesta: el incremento medio de *statum* cuando los premios son pequeños comparados con el capital inicial A es prácticamente igual a la ganancia media. En efecto,

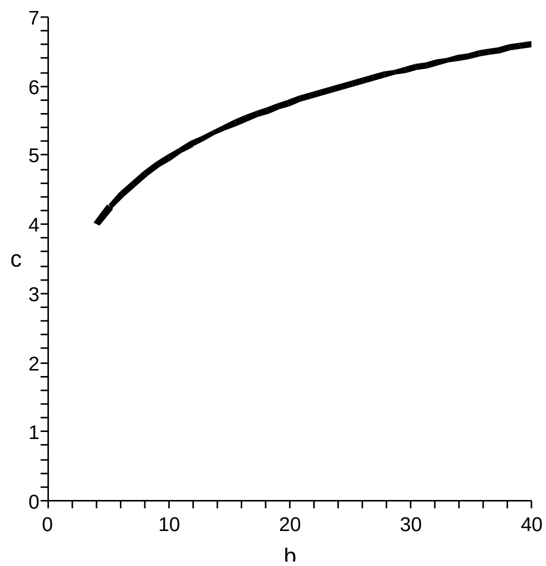

FIGURA 3. Cuota de entrada justa c en la teoría de Bernoulli en función del capital inicial b del jugador.

desarrollando en potencias la media geométrica:

$$\Delta s = \sqrt{(A+a)(A+b)} - A \simeq \frac{a+b}{2} \tag{6}$$

Por tanto, el criterio de Euler se reduce al criterio de la ganancia media sólo para capitales iniciales muy grandes.

Bell y Cover, de la Universidad de Stanford, analizaron hace unos años la paradoja de San Petersburgo ofreciendo una solución diferente y muy ingeniosa, que no hace referencia a ninguna valoración subjetiva del premio [12]. Consideraron una ligera y lógica modificación del juego original: podemos participar en el mismo pagando cualquier cantidad de entrada x, pero el premio recibido será proporcional a dicho pago. Si el pago x es igual a la cuota c, entonces recibimos todo el premio, pero si es la mitad recibimos la mitad del premio. En general, si el premio es P, recibiremos una cantidad xP/c. La segunda suposición, bastante más restrictiva, es que el jugador reinvierte todas sus ganancias en cada turno, de modo que, si su capital total inmediatamente antes del turno

t es $X(t)$ y el premio en dicho turno es P_t, entonces:

$$X(t+1) = \frac{X(t)P_t}{c} \tag{7}$$

La evolución del capital es equivalente a la de una inversión continuada en Bolsa con retornos aleatorios $P_t/c - 1$. Se puede resolver tomando el logaritmo de la ecuación anterior y promediando:

$$\langle \ln X(t+1) \rangle = \langle \ln X(t) \rangle + \langle \ln P_t \rangle - \ln c \tag{8}$$

El logaritmo del capital aumenta en media si la media del logaritmo del premio es mayor que el logaritmo de la cuota. De forma similar a lo que ocurría en la solución de Bernoulli, la cantidad importante es el valor medio del logaritmo del premio y no su valor medio (que es infinito). Con un cálculo similar al realizado en el análisis de Bernoulli, se obtiene

$$\langle \ln P_t \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln 2}{2^n} = 2 \ln 2 \tag{9}$$

Por lo tanto, para que el logaritmo del capital no crezca ni disminuya en media (y no lo haga por tanto el capital), la cuota tiene que ser precisamente 4 euros, como en el caso mínimo de Bernoulli.

5. Loterías y decisiones: la moderna teoría de la utilidad

Las ideas de Bernoulli fueron retomadas por Von Neumann y Morgenstern, quienes introdujeron en 1944 la teoría axiomática de la utilidad [13]. Su propósito era generalizar la elección del logaritmo como utilidad y deducir su forma funcional a partir de ciertas propiedades básicas o axiomas.

La forma más sencilla de analizar nuestra actitud frente al riesgo es utilizando sorteos o loterías, como los de la figura 4. Los axiomas de Von Neumann y Morgenstern intentan formalizar nuestras preferencias ante estas parejas de loterías. Son en principio bastante generales y razonables, y no implican una determinada elección en todas las personas, sino que sólo suponen una cierta coherencia lógica o racionalidad en las elecciones que realizamos. Sin embargo, en muchas ocasiones los seres humanos nos alejamos de estos comportamientos racionales.

Observe de nuevo la figura 4. La urna de la izquierda contiene 100 papeletas, todas y cada una de ellas con un premio de un millón de euros. La de la derecha contiene también 100 papeletas: 89 con un premio de un millón de euros, una papeleta sin ningún premio y 10 papeletas con un premio de 5 millones de euros. Usted tiene que elegir una de las dos urnas y sacar una papeleta de la urna elegida. El premio que contenga la papeleta será suyo ¿Cuál de las dos urnas elegiría? ¿Prefiere el millón de euros de la urna de la izquierda (1.A) o se atreve con la de la derecha (1.B), en la que puede ganar hasta 5 millones a costa de la posibilidad, poco probable, de irse a casa con las manos vacías?

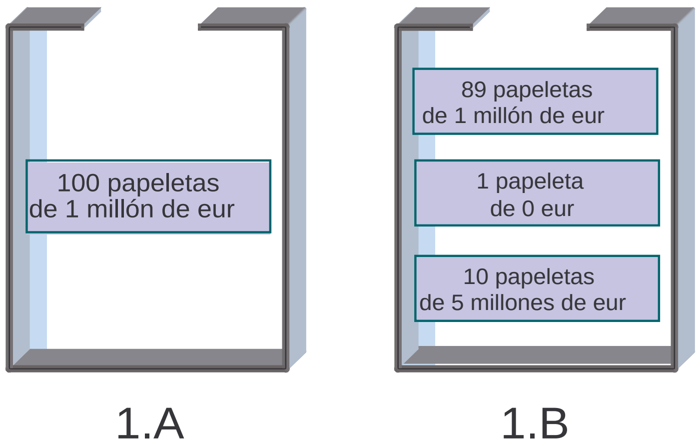

FIGURA 4. ¿Cuál de las dos urnas prefiere?

Observe ahora la figura 5. Tiene que elegir de nuevo entre dos urnas con 100 papeletas cada una. La de la izquierda, 2.A, tiene 89 papeletas sin premio y 11 papeletas con un millón de euros. La de la derecha, 2.B, tiene 90 papeletas sin premio y 10 papeletas con 5 millones de euros. ¿Cuál es en este caso su elección?

Prácticamente todo el mundo elige en el segundo caso la urna 2.B. En el primero, es 1.A la urna elegida mayoritariamente, aunque hay una minoría apreciable que decide asumir el pequeño riesgo de la papeleta

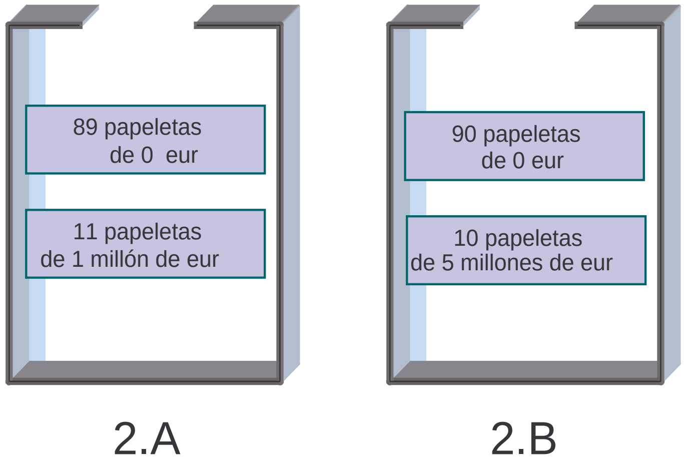

FIGURA 5. ¿Cuál de las dos urnas prefiere?

sin premio y elige 1.B. Si usted ha elegido 1.A y 2.B, entonces ha hecho lo que hace la mayoría de la gente y ha contravenido uno de los axiomas básicos de la teoría de la utilidad: el *axioma de independencia*.

Este axioma dice que si prefiero una lotería A a una B y realizo sobre ambas una modificación idéntica, entonces la preferencia no debe cambiar, es decir, seguiré prefiriendo A sobre B. ¿Qué entendemos por una modificación idéntica? En el caso de las urnas, significa añadir o quitar papeletas iguales de las dos urnas. En otras palabras, el axioma de indiferencia, en una formulación simplificada y adaptada a las urnas de nuestro ejemplo, dice: si añadimos o retiramos de cada una de las dos urnas papeletas con el mismo premio, entonces el orden de preferencia no debe cambiar. ¿Les parece razonable? No debería ser así si han elegido 1.A y 2.B, porque esa elección está en franca contradicción con el axioma.

En efecto, tomen las dos urnas de la figura 4, retiren de las dos 89 papeletas con un millón de euros y reemplácenlas por 89 papeletas con 0 euros. El resultado son las dos urnas de la figura 5. Por lo tanto, si el axioma fuera cierto, usted debería haber mantenido la preferencia después del cambio de papeletas y haber elegido en las dos figuras las urnas de la izquierda o las de la derecha, pero nunca la 1.A y la 2.B.

Esta contradicción entre la elección de la mayoría de la gente y el axioma de indiferencia se llama *paradoja de Allais* [14, 15], y fue formulada en los años 50 por el economista francés y premio Nobel de Economía de 1988, Maurice Allais. No se trata en realidad de una paradoja, sino de una forma de probar que el axioma —y, por tanto, la teoría de la utilidad completa— no reproduce adecuadamente nuestra valoración del riesgo.

Veamos en qué momento la preferencia entre las dos urnas ha cambiado. Cuando retiramos las 89 papeletas con premio de un millón, nos quedamos con 11 papeletas de un millón en la urna de la izquierda y una de cero euros y 10 de 5 millones en la de la derecha. La mayor parte de la gente que elige 1.A mantendría su decisión tras este cambio. A continuación, añadimos, una a una, 89 papeletas sin premio. Tendremos primero 11 papeletas con un millón y una papeleta con cero euros en la izquierda y 10 papeletas con 5 millones y 2 con cero euros en la derecha. ¿Cambiaría entonces su preferencia hacia la urna de la derecha? ¿y después de añadir diez papeletas sin premio, es decir, cuando hay 10 sin premio y 11 con un millón en la derecha y 11 sin premio y 10 con 5 millones en la derecha? ¿Podría decir en qué momento preciso cambia su decisión?

El axioma de independencia no es sólo en apariencia razonable, sino que también es compatible con una serie de criterios de decisión matemáticos muy generales. Por ejemplo, como mencionamos al comienzo, un criterio matemático de decisión es comparar los valores medios de la ganancia en cada una de las dos loterías. Éste es de hecho el criterio adecuado si uno va a jugar un gran número de veces al mismo sorteo. En la paradoja de Allais, el valor medio de la ganancia en la urna 1.A es de un millón de euros; en la 1.B es 1.39 millones de euros; en la 2.A es 0.11 millones, y en la 2.B el valor medio de la ganancia es 0.5 millones. Por lo tanto, el criterio del valor medio prescribe que 1.B es mejor que 1.A y que 2.B es mejor que 2.A.

Como decíamos antes, se puede demostrar que el criterio del valor medio verifica el axioma de independencia. De hecho, cualquier criterio basado en un valor medio lo verifica y es incompatible con la elección habitual en la paradoja: el par 1.A, 2.B. Que esta elección es incompatible con cualquier criterio de valor medio es fácil de demostrar. Supongamos que $U(p)$ es la utilidad asociada a un premio p. Para que la elección sea el par 1.A, 2.B, tiene que verificarse:

$$\begin{aligned} \frac{100 \times U(1)}{100} &> \frac{1 \times U(0) + 89 \times U(1) + 10 \times U(5)}{100} \\ \frac{89 \times U(0) + 11 \times U(1)}{100} &< \frac{90 \times U(0) + 10 \times U(5)}{100} \end{aligned}$$

Pero estas dos desigualdades son incompatibles: si en la primera sumamos en ambos miembros $89\,U(0)/100$ y restamos $89\,U(1)/100$, obtenemos la segunda invertida. El lector habrá observado que esta resta y suma en ambos miembros de la desigualdad no es más que la reproducción en lenguaje matemático de la operación de añadir o retirar bolas de las urnas.

Tanto los axiomas de Von Neumann y Morgenstern como la propuesta de Bernoulli son incompatibles con las preferencias habituales en la paradoja de Allais. Sin embargo, el propio Allais se considera un seguidor de Bernoulli, y llamaba a Von Neumann y Morgenstern, “neo-Bernoullianos”, que se habrían desviado de la idea original del científico suizo [15]. Para Allais, esa idea original consistía en asignar un valor psicológico a cada premio, que puede depender no solo de su cuantía sino también de su probabilidad (y que por supuesto puede variar de un individuo a otro, dependiendo de su patrimonio, personalidad, etc.). Una de las características de este valor psicológico, según el propio Allais, es la “preferencia por la seguridad en las cercanías de la certeza”, es decir, la seguridad (premio seguro) nos atrae poderosamente y rechazamos cualquier desviación por pequeña que sea. Allais y otros estudiosos de la teoría de la utilidad, tratan aún de encontrar criterios matemáticos de elección que reproduzcan las elecciones que hace los seres humanos [8].

Referencias

[1] I. Hacking, *La Domesticación del Azar* (Gedisa, 1992)
[2] R.J. Pluskamp: `http://cerebro.xu.edu/math/Sources/Euler/index.html`.
[3] L. Euler, *Vera Aestimatio Sortis in Ludis.* Publicado originalmente en *Opera Postuma* **1**, 1862, pp. 315-318.

[4] Mauricio Kraïtchik, *Mathematical Recreations* (Dover, 1953).

[5] W. Feller *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Wiley, 1968).

[6] J. Dutka, *On the St. Petersburg paradox*, Journal Archive for History of Exact Sciences **39**, 13 (1988).

[7] Euler archive: `http://www.math.dartmouth.edu/~euler`.

[8] C. Starmer, *Developments in Non-Expected Utility Theory: The Hunt for a Descriptive Theory of Choice under Risk*, Journal of Economic Literature **38**, 332 (2000).

[9] R.N. Mantegna y H.E. Stanley, *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, 2000).

[10] G.M. Viswanathan, V. Afanasyev, S.V. Buldyrev, E.J. Murphy, P.A. Prince y H.E. Stanley, *Lévy flight search patterns of wandering albatrosses*, Nature **381**, 413 (1996).

[11] A. Martin-Löf, *A Limit Theorem Which Clarifies the 'Petersburg Paradox'*, Journal of Applied Probability **22**, 634 (1985).

[12] R.M. Bell y T.M. Cover, *Competitive Optimality of Logarithmic Investment*, Mathematics of Operations Research **5**, 161 (1980).

[13] J. von Neumann y O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior* (Wiley, 1944).

[14] M. Allais, *Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école Américaine*, Econometrica **21**, 503 (1953).

[15] M. Allais, *An Outline of my Main Contributions to Economic Science*, Nobel Lecture (1988). `www.nobelprize.org`.