O.J.D.: 21475
E.G.M.: 127000

INVESTIGACION y CIENCIA

Fecha: 01/03/2007
Sección: REPORTAJE
Páginas: 88-89

JUEGOS MATEMÁTICOS

Juan M.R. Parrondo

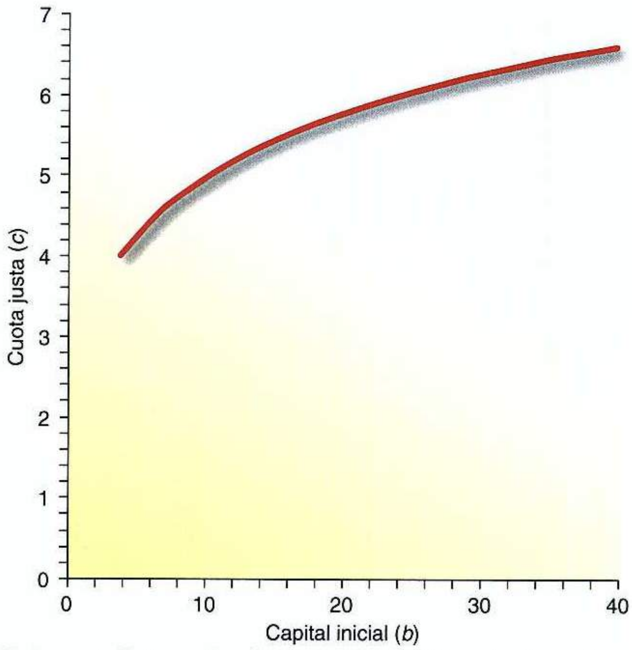
La paradoja de San Petersburgo y la teoría de la utilidad

El mes pasado analizamos la llamada *Paradoja de San Petersburgo*, un juego de azar en el que se lanza una moneda hasta que sale cara y el jugador gana 2^n euros si la primera cara ha salido en la tirada n-ésima. La paradoja surge cuando intentamos responder a la pregunta: ¿cuánto debería pagar un jugador para entrar en el juego? Normalmente, la cuota de entrada en un juego o sorteo debe ser igual a la ganancia media, pero, como vimos el mes pasado, en el juego de San Petersburgo esa ganancia media G_{med} es infinita. En efecto, la probabilidad de que la primera cara salga en la tirada n-ésima es $1/2^n$, de modo que:

$$G_{med} = \frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \frac{8}{8} + \frac{16}{16} + \ldots$$

que es evidentemente infinita. De ello se deduce que uno debería entrar en el juego pagando cualquier cuota de entrada, por muy grande que ésta fuese, puesto que siempre la ganancia media será superior. Pero esta conclusión está en contradicción con el sentido común, ya que nadie en su sano juicio estaría dispuesto a pagar un millón de euros para participar en este sorteo.

Hace un mes analizamos la paradoja desde el punto de vista de un casino que pretende organizar el juego y tiene que decidir la cuota de entrada. Ahora vamos a estudiar la paradoja desde el punto de vista de un jugador que sólo va a jugar unas pocas veces. En este caso, la paradoja no tiene en realidad relación con el hecho de que la ganancia media sea infinita, sino con cómo valoramos el riesgo. La misma paradoja ocurre en el juego de San Petersburgo si limitamos los pagos, es decir, si acordamos que, tras por ejemplo 100 tiradas sin salir cara, el jugador no gana nada. En este caso, la ganancia media es de 100 euros; pero, ¿estaría alguien dispuesto a pagar esa cantidad para entrar en el sorteo? El premio puede ser aún enorme: $2^{100} \approx 10^{30}$ si la primera cara sale en la tirada número 100, aunque la probabilidad de ganar más de los 100 euros que cuesta entrar en el sorteo es bastante pequeña (1/64). Hay gente que podría considerar atractivo el sorteo con la cuota de 100 euros, a pesar de que lo más probable es que pierda dinero. Al fin y al cabo, muchos juegan a la lotería, y en ocasiones cantidades considerables, con la esperanza de ganar un premio muy cuantioso con una probabilidad insignificante. Sin embargo, hay una diferencia importante desde el punto de vista psicológico entre la paradoja y la lotería. En el juego de San Petersburgo, para ganar un premio cuantioso tiene que salir un gran número de cruces seguidas en el lanzamiento de la moneda, un evento muy improbable que puede ocurrir o no ocurrir aunque juguemos miles de veces. En el caso de la lotería, el boleto con el "gordo" *tiene que estar* en algún sitio y a *alguien* le tiene que tocar. Es muy distinto creer que ese alguien puedo ser yo a creer que, al lanzar una moneda, las 20 primeras tiradas van a ser cruz. Aunque esta diferencia en la percepción de uno y otro sorteo es irracional, porque ambos sucesos son casi igual de probables.



1. La cuota justa en función del capital inicial según Bernoulli.

Uno de los análisis más conocidos de la paradoja es el que Daniel Bernoulli publicó en la revista de la Academia de Ciencias de San Petersburgo en 1738. De hecho, la paradoja recibe su nombre precisamente por ese artículo. La fama del mismo no se debe a que ofreciera una solución del todo satisfactoria, sino porque en su trabajo Bernoulli sentó las bases de la *teoría de la utilidad*. La teoría trata de cuantificar el beneficio real o *utilidad* que supone para un individuo una determinada cantidad de dinero. El argumento fundamental de Bernoulli era razonable: 100 euros, por ejemplo, es una cantidad considerable para alguien que no posee nada, mientras que es insignificante para una persona que tenga un patrimonio de un millón de euros. Bernoulli propuso que el aumento de utilidad cuando una fortuna de x euros aumenta en una cantidad muy pequeña Δx debía ser $\Delta x/x$. Con este supuesto y un poco de matemáticas, se puede demostrar que el aumento de la utilidad cuando nuestra fortuna pasa de b euros a a euros es

$$\Delta U = \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

A partir de esta fórmula podemos calcular la utilidad media que uno obtiene si participa en el juego de San Petersburgo. Supongamos que la cuota de entrada es c y llamemos b a su capital inicial. El sorteo le puede deparar un premio de 2 euros con probabilidad 1/2. En este caso su nuevo capital sería de $b - c + 2$ euros.

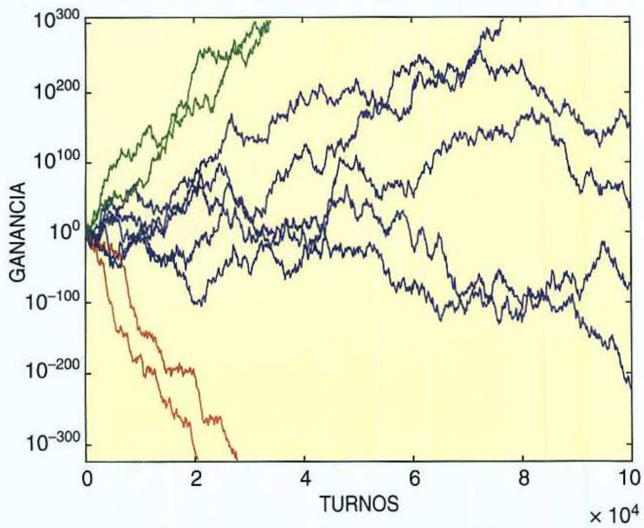
O.J.D.: 21475
E.G.M.: 127000
INVESTIGACION y CIENCIA
Fecha: 01/03/2007
Sección: REPORTAJE
Páginas: 88-89

Si gana 4 euros, lo que puede ocurrir con probabilidad 1/4, su nuevo capital será de $b - c + 4$ euros, y así sucesivamente. El incremento de utilidad que puede esperar, en media, del resultado del sorteo es:

$$\Delta U_{med} = \frac{\ln(b-c+2)}{2} + \frac{\ln(b-c+4)}{4} + \frac{\ln(b-c+8)}{8} + \ldots - \ln(b)$$

La cuota máxima que estaríamos dispuestos a pagar para entrar en el sorteo es la que hace que este incremento medio de la utilidad sea cero. Para hallar la cuota justa c, que será distinta según el capital inicial b, tenemos que solucionar la ecuación $\Delta U_{med} = 0$ con c como incógnita. En la figura 1 he dibujado la solución o cuota justa c en función del capital inicial b. La solución no se puede expresar en términos sencillos, aunque podemos calcularla para un caso particular, $b = c$, es decir, para el caso en que invertimos en el juego todo nuestro capital. ¿Cuándo merece la pena asumir este riesgo? Si hacemos $c = b$, nuestra ecuación $\Delta U_{med} = 0$ se simplifica y puede resolverse con algunos conocimientos de matemáticas. La solución es $c = 4$ euros. Si el capital inicial b es menor de cuatro euros, entonces la ecuación carece de solución, lo que indica que en este caso no merece la pena entrar en el juego por muy pequeña que sea la cuota. Por eso la curva de la figura 1 se interrumpe debajo de los 4 euros. Por otro lado, la cuota justa crece sin límite cuando lo hace el capital inicial. La solución no es del todo satisfactoria porque se basa en un supuesto acerca de cómo valoramos el dinero y porque la cuota depende del capital inicial. De todos modos, recordemos que tampoco era satisfactoria la solución del mes pasado, pues en ella la cuota depende del número total de turnos que se van a jugar.

Tom Cover, de la Universidad de Stanford, uno de los mayores expertos mundiales en teoría de la información y muy aficionado a las apuestas, analizó hace unos años la paradoja de San Petersburgo y ofreció una solución diferente e ingeniosa, que no hace referencia a ninguna valoración subjetiva del premio. Consideró una ligera y lógica modificación del juego original: podemos participar en el mismo pagando cualquier cantidad de entrada x, pero el premio recibido será proporcional a dicho pago.



2. Ganancia en el juego de San Petersburgo modificado por Cover con cuotas de 4 euros (*azul*), 3,9 euros (*verde*) y 4,1 euros (*rojo*).

Si el pago x es igual a la cuota c, entonces recibimos todo el premio; si es la mitad, recibimos la mitad del premio. En general, si el premio es P, recibiremos una cantidad xP/c. La segunda suposición, bastante más restrictiva, de Cover es que el jugador reinvierte todas sus ganancias en cada turno, de modo que, si su capital total inmediatamente antes del turno t es $X(t)$ y el premio en dicho turno es P_t, entonces:

$$X(t+1) = \frac{X(t)}{c}\, P_t$$

La evolución del capital recuerda la de una inversión continuada en Bolsa, como la que analizamos en los *Juegos matemáticos* de septiembre de 2005. Se puede resolver tomando el logaritmo de la ecuación anterior:

$$\ln X(t+1) = \ln X(t) + \ln P_t - \ln c$$

y promediando:

$$\langle \ln X(t+1)\rangle - \langle \ln X(t)\rangle = \langle \ln P_t\rangle - \ln c$$

Como vemos, el logaritmo del capital aumenta en media si la media del logaritmo del premio es mayor que el logaritmo de la cuota. De forma similar a lo que ocurría en la solución de Bernoulli, la cantidad importante es el valor medio del logaritmo del premio y no el valor medio del premio (que es infinito). Con un cálculo similar al realizado en el análisis de Bernoulli, se obtiene $\langle \ln P_t\rangle = 2\ln 2$. Por lo tanto, para que el logaritmo del capital no crezca ni disminuya en media (y no lo haga, por tanto, el capital), la cuota tiene que ser precisamente 4.

En la figura 1 podemos ver la evolución del capital en el juego de Cover para 100.000 turnos con distintos valores de la cuota. El capital tiene tantas fluctuaciones, que lo he dibujado en una escala logarítmica. He realizado cinco simulaciones del juego para una cuota igual a 4 euros, que pueden verse en azul en la figura, dos para cuota 3,9, en verde, y dos para cuota 4,1 en rojo. Para la cuota de 4 euros las fluctuaciones son enormes, positivas y negativas. Sin embargo, una ligera desviación de esa "cuota justa" hace que el capital crezca siempre a infinito (*curvas verdes*) o decrezca a cero (*curvas rojas*). La idea de Cover no es una solución de la paradoja, si bien constituye un método ingenioso para que el logaritmo aparezca sin utilizar valoraciones de los premios, que es en definitiva lo que hace la solución de Bernoulli.

Hay algunos aspectos de la Paradoja de San Petersburgo que aún no hemos cubierto, como la solución de Euler, basada en medias geométricas de la ganancia (equivalente a la de Bernoulli). Sobre la paradoja han discutido grandes matemáticos, aportando observaciones cuando menos curiosas. A raíz del artículo del mes pasado, Fernando Pérez Dehesa me ha enviado unas notas, extraídas del libro de Mauricio Kraitchik *Matemáticas Recreativas*, en las que se pueden leer comentarios muy interesantes de conocidos matemáticos del siglo XVIII y XIX. También quiero agradecer a otro lector, Carlos Macía, la sugerencia de discutir la paradoja en la sección. Como han podido comprobar, ha dado lugar a dos artículos y quizá nos depare más sorpresas en el futuro. ¡Anímense a sugerirme otros temas para la sección!

parr@seneca.fis.ucm.es