Hochschule Karlsruhe, Technik und Wirtschaft

Aufgabensammlung zur Technischen Mechanik Statik für die Studiengänge Mechatronik und Fahrzeugtechnologie

Norbert Skricka und Sabine Weygand
Fakultät für Maschinenbau und Mechatronik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Mit dieser kleinen Aufgabensammlung zur Technischen Mechanik Statik in der Mechatronik und Fahrzeugtechnologie kommen wir dem Wunsch vieler Studenten nach, Klausuraufgaben mit Musterlösung zur Vorbereitung auf die Prüfung bereitzustellen.

Bei der Technischen Mechanik stellt sich für jeden das Problem, daß die verhältnismäßig einfachen theoretischen Zusammenhänge zur Berechnung praktischer Beispiele umgesetzt werden müssen. Die Umsetzung der Theorie erscheint aber zunächst schwieriger als vermutet. Hier hilft nur die Übung einer zielgerichteten Vorgehensweise zur Lösung der Problemstellungen.

Die hier vorgestellten Aufgaben stammen alle aus früheren Klausuren, die ich an an der Hochschule Karlsruhe gestellt habe. Bei der Gliederung der Aufgaben in Teilaufgaben wurde dabei soweit möglich, also ohne zuviel zu verraten, der zielgerichtet Weg zur Lösung des Problems vorgegeben. Die Aufgaben sind sofern leichter zu lösen als die in meinem Skriptum zur Vorlesung.

Die beigefügten Musterlösungen sind knapp, ohne größere Erklärungen, auch längere Ausrechnungen sind nicht vollständig dargestellt. Die Erklärungen kennen Sie ja schon aus der Vorlesung. Verstehen Sie die Musterlösung bitte auch nur als Lösungsvorschlag, auch andere Wege führen zum Ziel.

Damit die Übung der Aufgaben nicht ohne Lerneffekt bleibt und zur Zeitverschwendung wird, bitte ich Sie folgendes zu beachten:

- Legen Sie zunächst die Musterlösung weit weg.

- Versuchen Sie die Aufgabenstellung in ein Themengebiet der Technischen Mechanik I einzuordnen.
- Werden Sie sich klar über die prinzipielle Vorgehensweise zur Lösung der Aufgabe.
  Beispielsweise erkennen Sie, daß die Aufgabe mit dem Kräfte- und dem Momentengleichgewicht zu lösen ist. Dann sind in der Regel folgende Schritte notwendig:
  - Freischneiden der starren Körper
  - Aufstellen der Kräfte- und Momentengleichgewichte
  - Aufstellen von Stoffgesetzen (z.B. Reibgesetz, Haftbedingungen)
  - Auflösen der Gleichungen
  - Interpretation der Ergebnisse
- Wenn Sie bei einem Problem nicht weiterkommen, dann legen Sie es zunächst zur Seite und denken zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal darüber nach. Beißen Sie sich nicht fest, das ist Zeitverschwendung.
- Sollte auch der zweite Versuch scheitern, schauen bis zu diesem Punkt in der Musterlösung nach, aber nicht weiter, sonst verschwenden Sie auch Ihre Zeit.
- Vollkommen sinnlos ist das Auswendiglernen der Lösungen. Sie lachen? Das ist mir schon alles begegnet.

So bleibt uns nur noch, Ihnen viel Spaß und den notwendigen "Biß" zur Lösung der Aufgaben zu wünschen.

Im April 2010

Prof. Dr.-Ing. N. Skricka und Prof. Dr. mont. S. Weygand

Kapitel 2

Aufgabensammlung

2.1 Aufgaben zum Gleichgewicht der starren Körper

Aufgabe 1-1: Kran mit Ausleger und Seilen

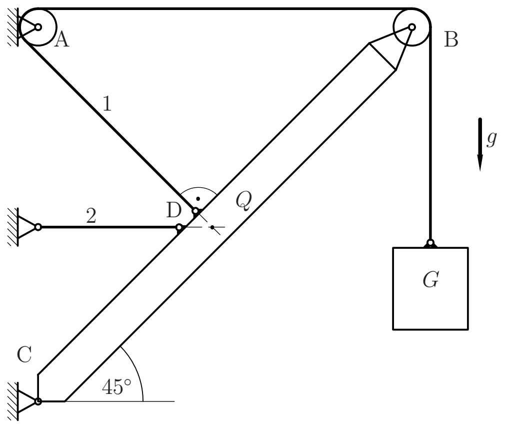


Bild 2.1: Kran mit Ausleger und Seilen

Ein Kran (entwickelt von einem MT-Studenten) besteht aus einem in C drehbar gelagerten homogenen Ausleger mit dem Gewicht Q, an dessen Ende B eine Umlenkrolle befestigt ist. Ein Seil ist in D in der Mitte des Auslegers befestigt und wird über die Umlenkrollen A und B geführt. Am Ende des Seils hängt eine Last mit dem Gewicht G. Zur Stabilisierung des Gleichgewichts ist der Ausleger an einem zweiten horizontalen Seil befestigt. Alle Gelenke seien reibungsfrei.

Gegeben: Q, G, $\alpha = 45°$, g

a) Skizzieren Sie die Freikörperbilder zur Berechnung aller Auflager- und Gelenkkräfte sowie der Seilkräfte für die in Bild 2.1 gezeigte Lage.

b) Bestimmen Sie die Seilkräft S_1 und S_2, die horizontale und vertikale Komponente der Kraft in C sowie die *Beträge* der Auflager- bzw. Gelenkkräfte in A, B.

c) Wie groß darf das Gewicht G höchstens sein, damit das Gleichgewicht erhalten bleibt?

2.2 Aufgaben zu verteilten Kräften und Schwerpunkt

Aufgabe 2-1: Blechzuschnitt

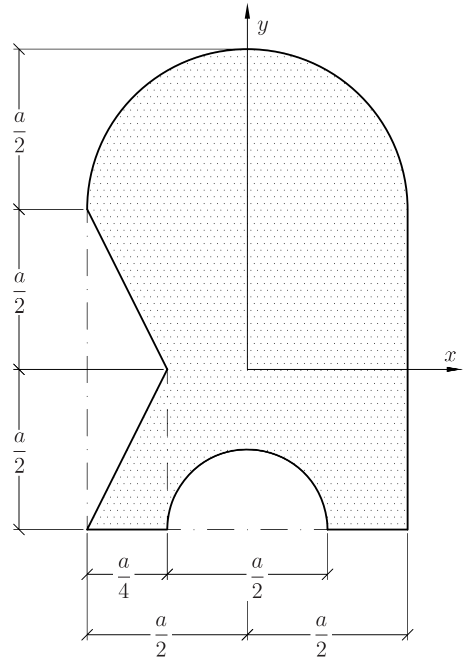


Bild 2.2: Ausschnitt aus dünnem Blech der Dicke t

Aus einem ebenen Blech der Dicke $t \ll a$ wurde die in Bild 4 gezeigte Figur ausgeschnitten. Das Material des Blechs hat das spezifische Gewicht γ.

Gegeben: a, t, γ

a) Bestimmen Sie die Schwerpunktskoordinaten x_S und y_S des Blechabschnitts.

b) Wie groß ist die resultierende Gewichtskraft G des Blechs und bei welchen Koordinaten liegt der Angriffspunkt der resultierenden Gewichtskraft G.

Aufgabe 2-2: Sichelförmiges Blech

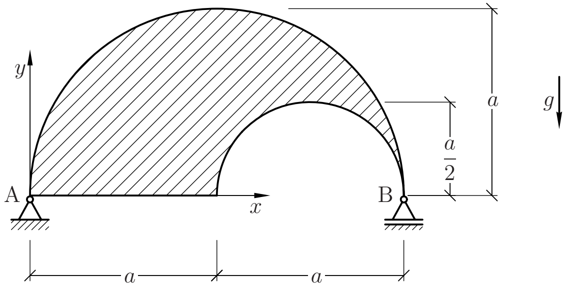


Bild 2.3: Ausschnitt aus dünnem Blech der Dicke t

Aus einem ebenen Blech der Dicke $t \ll a$ wurde die in Bild 4 gezeigte aus Halbkreisen bestehende Figur ausgeschnitten. Das Material des Blechs hat das spezifische Gewicht γ. Das Blech ist in den Punkten A und B gelagert.

Gegeben: a, t, γ, g

a) Bestimmen Sie die Schwerpunktskoordinate x_S und das Gewicht G des Blechschnitts. Welche Maßeinheit hat G?

b) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A und B.

c) An welche Position x müßte das Lager A verschoben werden, damit die Lagerreaktion in B verschwindet?

Aufgabe 2-3: Schwerpunktsberechnung

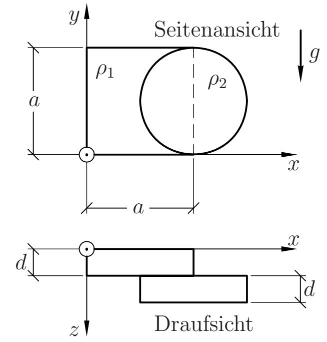


Bild 2.4: System aus Quader und Zylinder unterschiedlicher Dichte

Ein System aus zwei starren Körpern besteht aus einem Quader der Dichte ρ_1 mit quadratischem Querschnitt (Seitenlängen a und Dicke d) und einem Zylinder der Dichte ρ_2 (Durchmesser a und Dicke d). Die Körper sind wie in Bild 2.4 gezeigt angeordnet.

Gegeben: a, d, ρ_1, ρ_2, g

a) Bestimmen Sie die Gewichte $\vec{G}_1$ und $\vec{G}_2$ der Körper.

b) Bestimmen Sie allgemein und für den Sonderfall $\rho_1 = \pi\,\rho_2$ die Schwerpunktkoordinaten x_S, y_S und z_S des Gesamtsystems.

2.3 Aufgaben zu Schnittkräften in Fachwerken

Aufgabe 3-1: Ebenes Fachwerk

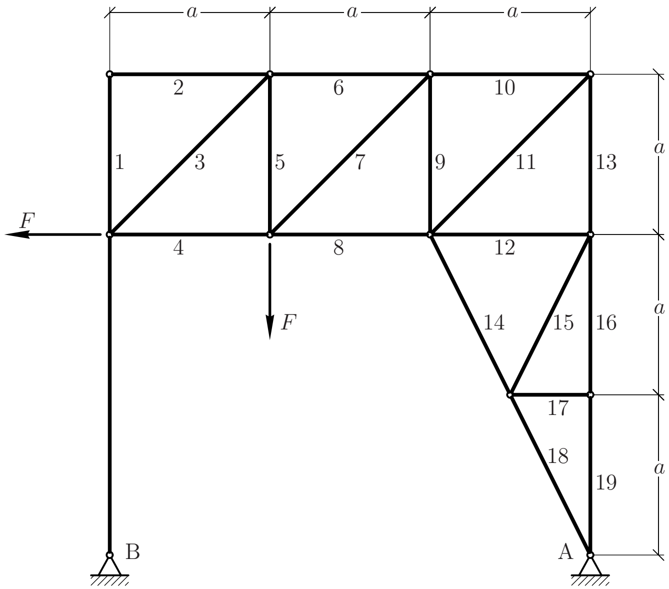


Bild 2.5: Durch zwei Kräfte belastetes ebenes Fachwerk

Ein ebenes Fachwerk ist in A und B gelagert und wird durch zwei gleich große Kräfte F belastet.

Gegeben: a, F

a) Berechnen Sie die Auflagerkraft in B.

b) Geben Sie die offensichtlichen Nullstäbe an.

c) Bestimmen Sie die Stabkräfte S_3 und S_4 sowie S_8, S_9 und S_{10}.

Aufgabe 3-2: Ebenes Fachwerk

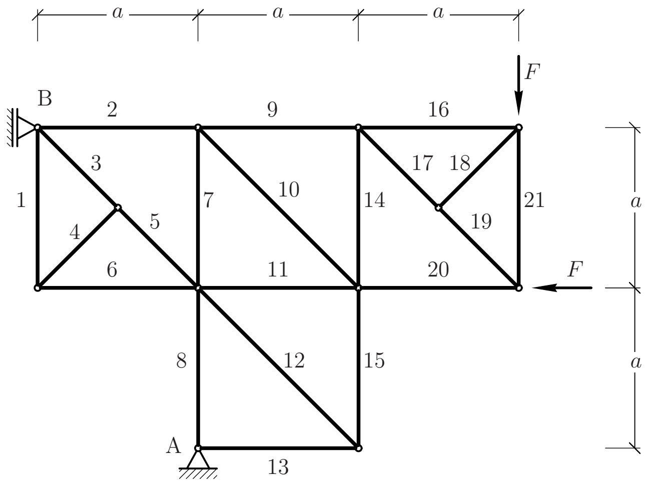


Bild 2.6: Durch zwei Kräfte belastetes ebenes Fachwerk

Ein ebenes Fachwerk aus 21 Stäben ist in A und B gelagert und wird durch zwei Kräfte F belastet, Bild 2.6.

Gegeben: a, F

a) Berechnen Sie die Auflagerkraft in B.

b) Bestimmen Sie die Stabkräfte S_4, S_8, S_{12}, S_{15} und S_{18}.

Aufgabe 3-3: Ebenes Fachwerk

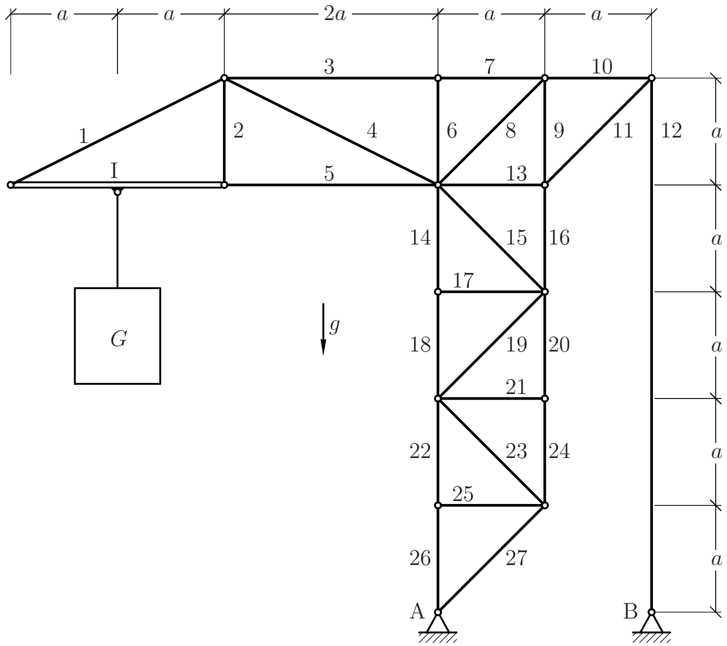


Bild 2.7: Ebenes Fachwerk unter Last

Ein ebenes Fachwerk besteht aus 26 gewichtslosen Stäben und einem gewichtslosen Balken (I). Das Fachwerk ist in A und B gelagert. Belastet wird es durch die Last G, die in der Mitte des Balkens I befestigt ist, Bild 2.7.

Gegeben: a, G, g

a) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in A und B.

b) Geben Sie die offensichtlichen Nullstäbe an.

c) Geben Sie die Stabkraft im Stab 1, die Stabkräfte in den Stäben 4, 5 sowie 7 an.

2.4 Aufgaben zu Schnittlasten am Balken

Aufgabe 4-1: Tragwerk

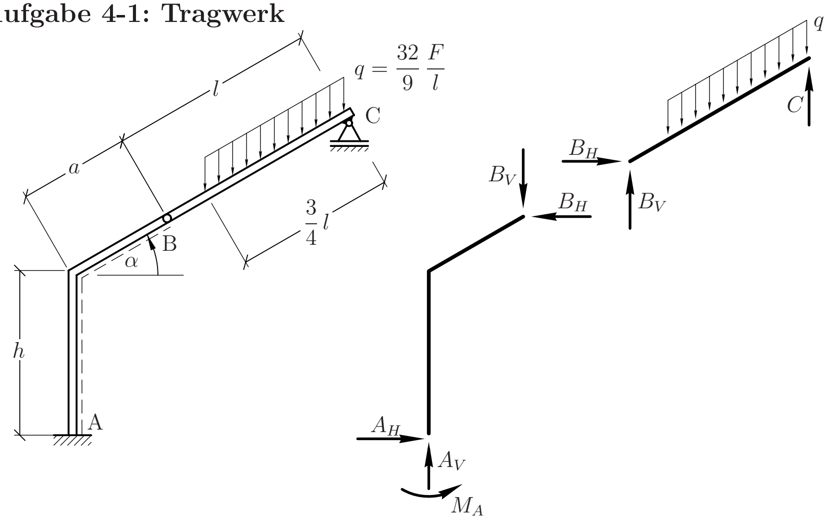


Bild 2.8: Tragwerk unter Streckenlast (links) und zugehörige Freikörperbilder (rechts)

Ein Tragwerk besteht aus einem durch die Streckenlast q belasteten Balken der Länge l, der von einem Loslager in C und einer unter dem Winkel $\alpha = 30°$ abgeknickten Stütze getragen wird, Bild 1 links. Der Balken ist an der Stütze durch ein Gelenk in B befestigt. Die abgeknickte Stütze ist in A fest gelagert.
Das Tragwerk kann wie in Bild 1 rechts gezeigt freigeschnitten werden.

Gegeben: h, a, l, $\alpha = 30°$, $q = \dfrac{32}{9}\dfrac{F}{l}$

a) Zeigen Sie durch eine notwendige Bedingung, daß das Tragwerk statisch bestimmt ist.

b) Bestimmen Sie alle Auflager- und Zwischenreaktionen gemäß den vorgegebenen Freikörperbildern.

c) Geben Sie die Gleichungen für Normalkraft-, Querkraft- und Momentverlauf der *abgeknickten Stütze* an. Beachten Sie dabei die durch die Definitionsfaser gekennzeichnete positive z-Richtung.

d) Skizzieren Sie die Normalkraft-, Querkraft- und Biegemomentverläufe und kennzeichnen Sie ausgezeichnete Werte.

Aufgabe 4-2: Gelenkträger mit Seil

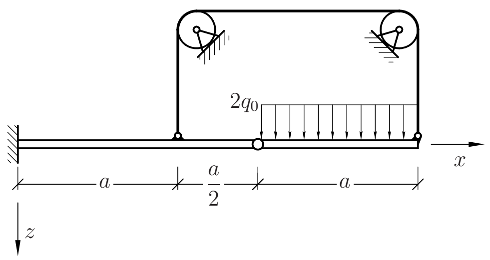


Bild 2.9: Gelenkträger mit Seil

Ein einseitig fest eingespannter Träger besteht aus zwei Balken der Lägen $\frac{3}{2}\,a$ und a, die über ein Gelenk miteinander verbunden sind. Der äußere Balken der Länge a ist durch die konstante Streckenlast $2q_0$ belastet. Das Gleichgewicht wird durch ein an den Balken befestigtes Seil hergestellt, das über reibungsfrei gelagerte Umlenkrollen geführt ist, Bild 2.9.

Gegeben: a, q_0

a) Geben Sie die Auflagerreaktionen, die Seilkraft und die Gelenkkräfte an.

b) Bestimmen Sie analytisch unter Verwendung des Schnittprinzips die Schnittlasten N, Q und M in den beiden Teilträgern.

c) Skizzieren Sie die Verläufe der Schnittlasten Normalkaft, Querkraft und Biegemoment. Geben Sie ausgezeichnete Werte an.

Aufgabe 4-3: Abgewinkelter Ausleger mit Seil unter Gleichlast

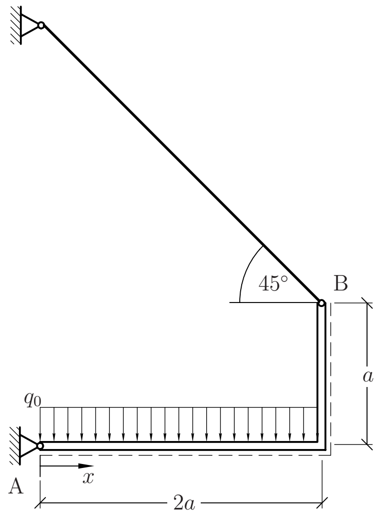


Bild 2.10: Abgewinkelter Ausleger mit Seil unter Gleichlast

Ein rechtwinklig abgeknickter Ausleger der Gesamtlänge $3a$ ist in A drehbar gelagert und wird in B durch ein Seil (Neigung 45°) gehalten. Der horizontale Teil des Auslegers der Länge $2a$ ist durch die konstante Linienlast q_0 belastet, Bild 2.10.

Gegeben: q_0, a, $\alpha = 45°$

a) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in A sowie die Seilkraft.

b) Bestimmen Sie analytisch die Schnittlasten beginnend bei A entlang des Auslegers bis B. Beachten Sie die Definitionsfaser.

c) Skizzieren Sie die Verläufe der Schnittlasten und geben Sie ausgezeichnete Werte an.

2.5 Aufgaben zu Haftung und Reibung

Aufgabe 5-1: Rohrschlüssel

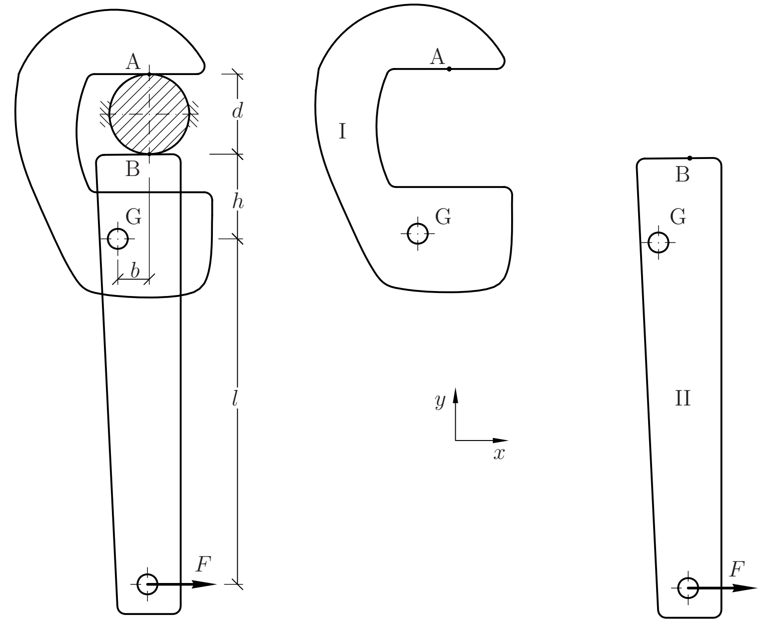


Bild 2.11: Rohrschlüssel mit feststehendem Rohr (links) und zugehörige Freikörperbilder (rechts)

Mit einem Rohrschlüssel, Bild 1, wird mittels der Kraft F ein Moment auf ein feststehendes Rohr ausgeübt. An den beiden Berührpunkten A und B zwischen Schlüssel und Rohr liegt Haftung vor. Das Gelenk G des Schlüssels ist reibungsfrei.

Gegeben: d, h, l, b, F, μ_0

a) Vervollständigen Sie die obigen Freikörperbilder I und II.

b) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für die Körper I und II auf und bestimmen Sie die unbekannten Kräfte in A und B.

c) Wie groß muß der an den beiden Berührpunkten A und B *gleich große* Haftbeiwert μ_0 mindesten sein, damit der Schlüssel nicht auf dem Rohr rutscht.

Aufgabe 5-2: Klemmvorrichtung

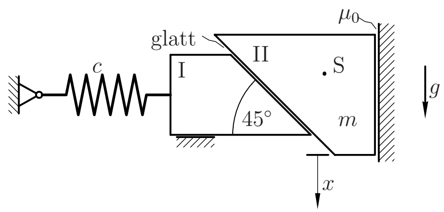


Bild 2.12: Klemmvorrichtung mit Feder

Eine Klemmvorrichtung besteht aus einem reibungsfrei horizontal verschiebbaren Keil (Körper I in Bild 2.12) auf den eine Feder mit der Federsteifigkeit c drückt. Geklemmt wird der in senkrechter Richtung verschiebbar gelagerte Körper II (Masse m). Zwischen Körper II und dessen senkrechten Führung besteht ein Haftbeiwert der Größe μ_0. Die Feder ist in der in Bild 2.12 gezeigten Lage ($x = 0$) entspannt.

Gegeben: $\alpha = 45°$, μ_0, m, c, g

a) Skizzieren Sie die Freikörperbilder der Körper I und II.

b) Um welchen Weg wird die Feder c gespannt, wenn der Körper II um den Weg x nach unten verschoben wird?

c) Bestimmen Sie in welchem Bereich $x_{min} < x < x_{max}$ unter Wirkung der Schwerkraft Gleichgewicht herrscht, so daß sich Körper II weder nach unten noch nach oben bewegt.

Aufgabe 5-3: Feststellbremse

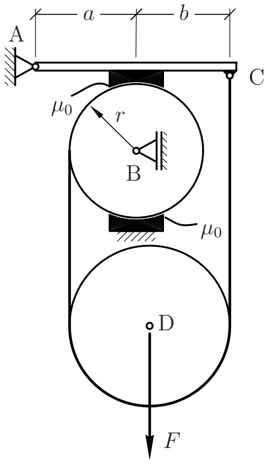


Bild 2.13: Feststellbremse unter Last

Eine Feststellbremse besteht aus einem gewichtslosen, in A drehbar gelagerten Hebel der Länge $a + b$, der über einen Bremsschuh auf eine in B losgelagerte, gewichtslose Bremsrolle (Radius r) drückt. Die Bremsrolle stützt sich vertikal auf einem zweiten Bremsschuh ab. Zwischen der Bremsrolle und den Bremsschuhen liegt Haftung vor (Haftbeiwert jeweils μ_0). Auf die Bremsrolle ist ein undehnbares, gewichtsloses Seil gewickelt, das über eine gewichtslose Umlenkrolle geführt in C am Hebel befestigt ist. Die Umlenkrolle wird zentral in D mit der Kraft F belastet, Bild 2.13.

Gegeben: a, b, r, μ_0, F

a) Schneiden Sie den Hebel und beide Rollen frei.
   Hinweis: Tragen Sie die Haftkräfte im positiven Sinne ein. Sie erleichtern Sich damit die Lösung der Aufgabe b).

b) Bestimmen Sie allgemein wie groß der Haftbeiwert μ_0 mindestens sein muß, damit das System im Gleichgewicht bleibt.
   Geben Sie zusätzlich das Ergebnis für den Sonderfall $a = b$ an.

Aufgabe 5-4: Kisten auf schiefer Ebene

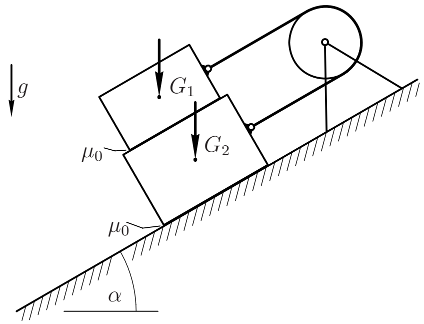


Bild 2.14: Kisten auf schiefer Ebene im Gleichgewicht

Auf einer rauhen schiefen Ebene (Neigungswinkel α) sind zwei Kisten (Gewichte G_1 und G_2) aufeinander gestapelt. Die Kisten sind mit einem Seil, das über eine reibungsfrei gelagerte Umlenkrolle geführt ist, miteinander verbunden, Bild 2.14. Zwischen den Kisten sowie zwischen der unteren Kiste und dem Untergrund beträgt der Haftbeiwert μ_0.

Gesucht sind die Neigungswinkel α für die Gleichgewicht herrscht.

Wichtige Hinweise:
Unter den Annahmen, daß $G_2 > G_1$ und daß bei Versagen des Gleichgewichtes infolge eines zu großen Neigungswinkels α sich die Kiste G_2 nach unten und sich die Kiste G_1 nach oben bewegt, kann das statisch unbestimmte Problem mit der bekannten Vorgehensweise für statisch bestimmte Probleme gelöst werden.
Lösen Sie das Problem nur für diese Annahmen!

Gegeben: μ_0, G_1, G_2, $G_2 > G_1$, g, wichtiger Hinweis

a) Schneiden Sie das System frei. Tragen Sie dabei die Richtungen der Tangentialkräfte zwischen den Kisten und der schiefen Ebene im positiven Sinne entsprechend der oben vorgegebenen Annahmen ein.

b) Bestimmen Sie allgemein unter Beachtung der oben vorgegebenen Annahmen die Neigungswinkel $\alpha > 0$, für die Gleichgewicht herrscht.

c) Betrachten Sie den Sonderfall $G_2 = 2G_1$ und $\mu_0 = 0.2$. Bestimmen sie den maximalen Neigungswinkel α.

2.6 Aufgaben zum Prinzip der virtuellen Verrückungen

Aufgabe 6-1: Balken an Feder

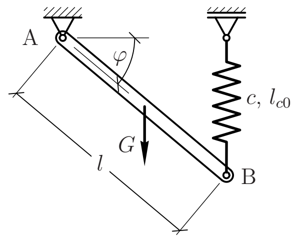


Bild 2.15: Balken an Feder im Gleichgewicht

Ein Balken der Länge l (Gewicht G) ist an einem Ende im Punkt A drehbar gelagert. Am anderen Ende das Balkens in B ist eine lose gelagerte Feder der Steifigkeit c drehbar befestigt. Der Balken wird durch die Feder im Gleichgewicht gehalten, Bild 2.15. Die Feder hat unbelastet die Länge l_{c0}.

Mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen soll der Winkel φ der Gleichgewichtslage bestimmt werden.

Gegeben: l, l_{c0}, G, c

a) Geben Sie Koordinaten der relevanten Kraftangriffspunkte in Abhängigkeit des Winkels φ an.

b) Bestimmen Sie die virtuellen Verrückungen der relevanten Kraftangriffspunkte in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate φ.

c) Geben Sie die Federkraft in Abhängigkeit von der generalisierten Koordinate φ an.

d) Bestimmen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen den Winkel φ der Gleichgewichtslage.

Aufgabe 6-2: Gleichgewicht an einem Flaschenzug mit Feder

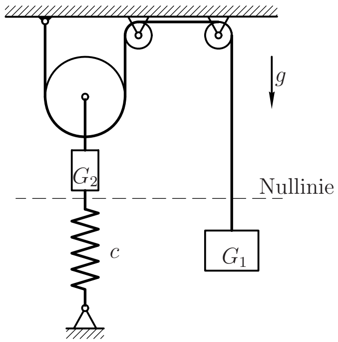


Bild 2.16: Flaschenzug mit Feder im Gleichgewicht

An einem Flaschenzug mit einer Umlenkrolle hängen zwei Gewichte G_1 und G_2. Am Gewicht G_2 ist zusätzlich eine lineare Feder der Steifigkeit c befestigt, Bild 2.16.
Wenn sich die Schwerpunkte der beiden Gewichte auf Höhe der Nullinie befinden, ist die Feder entspannt. Alle Umlenkrollen sind gewichtslos und reibungsfrei.

Mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ist Auslenkung x_1 des Schwerpunktes des Gewichtes G_1 bei Gleichgewicht gesucht.

Als generalisierte Koordinaten verwenden Sie bitte die Auslenkung x_1 des Gewichtes G_1 aus der Nullposition.

Gegeben: G_1, G_2, c, g

a) Wie groß ist die Auslenkung x_2 des Gewichtes G_2 in Abhängigkeit von x_1? Tragen Sie zunächst x_1 und x_2 in Bild 2.16 ein.

b) Bestimmen Sie die virtuelle Verrückungen δx_1 und δx_2.

c) Bestimmen Sie die Federkraft F_c.

d) Ermitteln Sie unter Verwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen die Auslenkung x_1 bei Gleichgewicht.

e) Wie muß das Verhältnis zwischen G_2 und G_1 mindestens sein, damit das System eine Lage ähnlich der im Bild 2.16 gezeigten einnimmt?

2.7 Aufgaben mit vermischten Themen

Aufgabe 7-1: Oberleitungsmast unter Last

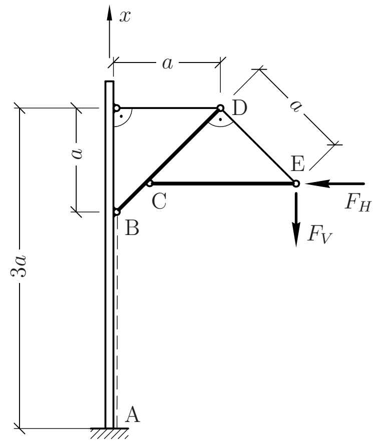


Bild 2.17: Oberleitungsmast unter Last

Ein Mast für die Oberleitung der Karlsruher Straßenbahn besteht aus einem senkrechten Balken der Länge $3a$, an dem ein Tragsystem aus einem schräg nach oben geführten Balken B-D der Länge $\sqrt{2}\,a$, einer horizontalen Pendelstütze C-E der Länge $\sqrt{2}\,a$ und zwei Seilen der Länge a befestigt ist, Bild 2.17. Die Gewichte der Balken, Stäbe und Seile können vernachlässigt werden. Alle Gelenke sind reibungsfrei.
Der Mast wird in einer Kurve der Straßenbahn aufgrund des Gewichtes und der Vorspannung der Oberleitung durch die vertikale Kraft $F_V > 0$ und die horizontale Kraft $F_H > 0$ im Punkt E belastet.

Gesucht sind die maximale Kraft F_H und die Schnittlasten im unteren Teil A-B des Mastes.

Gegeben: a, $F_V > 0$, $F_H > 0$

a) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in A.

b) Geben Sie in Abhängigkeit von der Kraft F_V die maximale horizontale Kraft $F_{H,\max}$ an, für die das System gerade noch nicht versagt.

c) Bestimmen Sie im Bereich A-B des Mastes die Schnittlasten. Beachten Sie die Definitionsfaser.

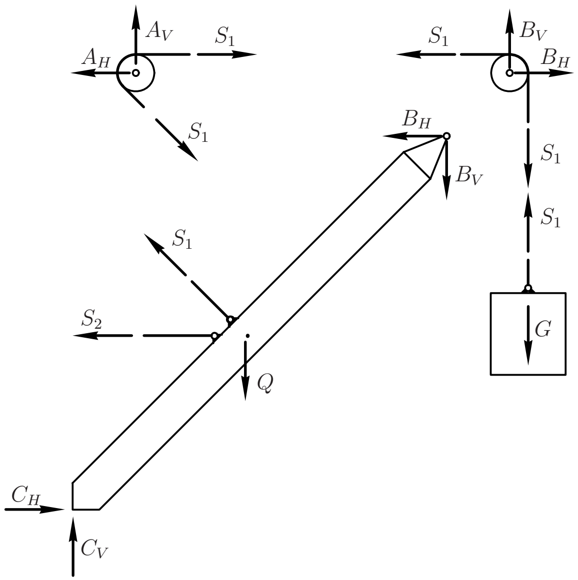
Kapitel 3

Lösungsvorschläge

3.1 Lösungen: Gleichgewicht der starren Körper

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1-1:

a)
Freikörperbild



b)
Gleichgewichte Rolle A:

$$\rightarrow \quad A_H = S_1 + S_1 \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\uparrow \quad A_V = S_1 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Gleichgewicht Rolle B:

$$\rightarrow \quad B_H = S_1$$
$$\uparrow \quad B_V = S_1$$

Gleichgewicht Gewicht Q:

$$\uparrow \quad S_1 = G$$

Gleichgewichte Ausleger:

$$\rightarrow \quad C_H - B\,\frac{1}{\sqrt{2}} - S_1\,\frac{1}{\sqrt{2}} - S_2 = 0$$
$$\uparrow \quad C_V - Q + S_1\,\frac{1}{\sqrt{2}} - B_V = 0$$
$$\sum M^C \quad \frac{S_2}{\sqrt{2}} + S_1 - \frac{Q}{\sqrt{2}} = 0$$

Ausrechnung:

$$S_1 = G$$
$$S_2 = Q - \sqrt{2}\,G$$
$$B_V = G \qquad B_H = G \qquad B = \sqrt{B_H^2 + B_V^2} = G\,\sqrt{2}$$
$$A_V = G\,\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad A_H = G\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad A = G\,\sqrt{2+\sqrt{2}}$$
$$C_H = Q + G \qquad C_V = Q + G\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

c)
Seil 2 muß gespannt und damit die Seilkraft größer Null sein:

$$S_2 = Q - \frac{G}{\sqrt{2}} > 0$$
$$G < Q\,\sqrt{2}$$

3.2 Lösungen: Verteilte Kräfte und Schwerpunkt

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2-1:

a)
Fläche I: Quadrat
Fläche II: Halbkreisausschnitt unten
Fläche III: Dreieckausschnitt
Flache IV: Halbkreis oben

Teil-system	A_i	x_i	$x_i\,A_i$	y_i	$y_i\,A_i$
I	a^2	0	0	0	0
II	$-\frac{1}{2}\,\pi\,\frac{a^2}{16}$	0	0	$-\frac{a}{2}+\frac{4}{3\pi}\,\frac{a}{4}$	$\left(\frac{\pi}{64}-\frac{1}{96}\right)\,a^3$
III	$-\frac{1}{8}\,a^2$	$-\frac{5}{12}\,a$	$\frac{5}{96}\,a^2$	0	0
IV	$\frac{\pi}{8}\,a^2$	0	0	$\frac{a}{2}+\frac{4}{3\pi}\,\frac{a}{2}$	$\left(\frac{\pi}{16}+\frac{1}{12}\right)\,a^3$
	$\sum A_i=\left(\frac{7}{8}+\frac{3\,\pi}{32}\right)\,a^2$		$\sum x_i\,A_i=\frac{5}{96}\,a^3$		$\sum y_i\,A_i=\left(\frac{5\,\pi}{64}+\frac{7}{96}\right)\,a^3$

Es ergibt sich daraus

$$x_s = \frac{\sum x_i\,A_i}{A} = \frac{5}{84+3\pi}\,a$$
$$y_s = \frac{\sum y_i\,A_i}{A} = \frac{7+5\,\pi}{56+6\pi}\,a.$$

b)
Die Gewichtskraft beträgt

$$G=\gamma\,t\,A=\gamma\,\left(\frac{7}{8}+\frac{3\,\pi}{32}\right)\,a^2\,t$$

und greift im Schwerpunkt an.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2-2:

a)
Schwerpunktsberechnung mit Summenformel:

$$A_1=\frac{\pi\,a^2}{2},\quad x_{S1}=a$$

$$A_2=\frac{\pi\,a^2}{8},\quad x_{S1}=\frac{3}{2}\,a$$

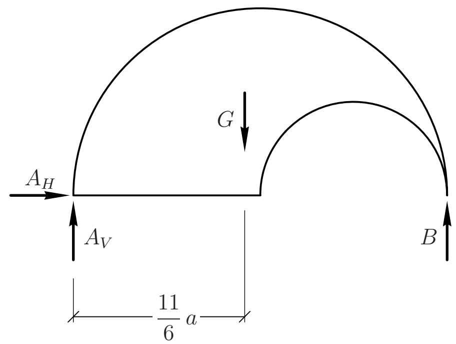
$$A_{ges}=A_1-A_2=\frac{3}{8}\,\pi\,a^2$$

$$x_S=\frac{1}{A_{ges}}\sum A_i,x_{Si}=\frac{8}{3\,\pi\,a^2}\left(\frac{\pi\,a^2}{2}\,a-\frac{\pi\,a^2}{8}\,\frac{3}{2}\,a\right)=\frac{5}{6}\,a$$

Gewichtskraft:

$$G=A\,t\,\gamma=\frac{3}{8}\,\pi\,a^2\,t\,\gamma,[\,G\,]=\mathrm{N}$$

b)



Gleichgewichte:

$$\sum M^A:\quad G\,\frac{5}{6}\,a-B\,2\,a=0\quad\Rightarrow B=\frac{5}{12}\,G$$
$$\rightarrow:\quad A_H=0$$
$$\uparrow:\quad A_V-G+B=0\quad\Rightarrow A_V=\frac{7}{12}\,G$$

c)
Bei $x=x_S=\frac{5}{6}\,a$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2-3:

a)
Gewichtskräfte:

$$\vec{G}_1 = -a^2\, d\, \rho_1\, g\, \vec{e}_y$$

$$\vec{G}_2 = -\pi \frac{a^2}{4}\, d\, \rho_2\, g\, \vec{e}_y$$

b)
Schwerpunkt aus Summenformel:

$$x_S = \frac{G_1\, x_{S1} + G_2\, x_{S2}}{G_1 + G_2} = \frac{a}{2}\, \frac{\rho_1 + \frac{\pi}{2}\, \rho_2}{\rho_1 + \frac{\pi}{4}\, \rho_2}$$

$$y_S = \frac{a}{2}$$

$$z_S = \frac{G_1\, z_{S1} + G_2\, z_{S2}}{G_1 + G_2} = \frac{d}{2}\, \frac{\rho_1 + \frac{3\pi}{4}\, \rho_2}{\rho_1 + \frac{\pi}{4}\, \rho_2}$$

Sonderfall $\rho_1 = \pi\, \rho_2$:

$$x_S = \frac{3}{5}\, a$$

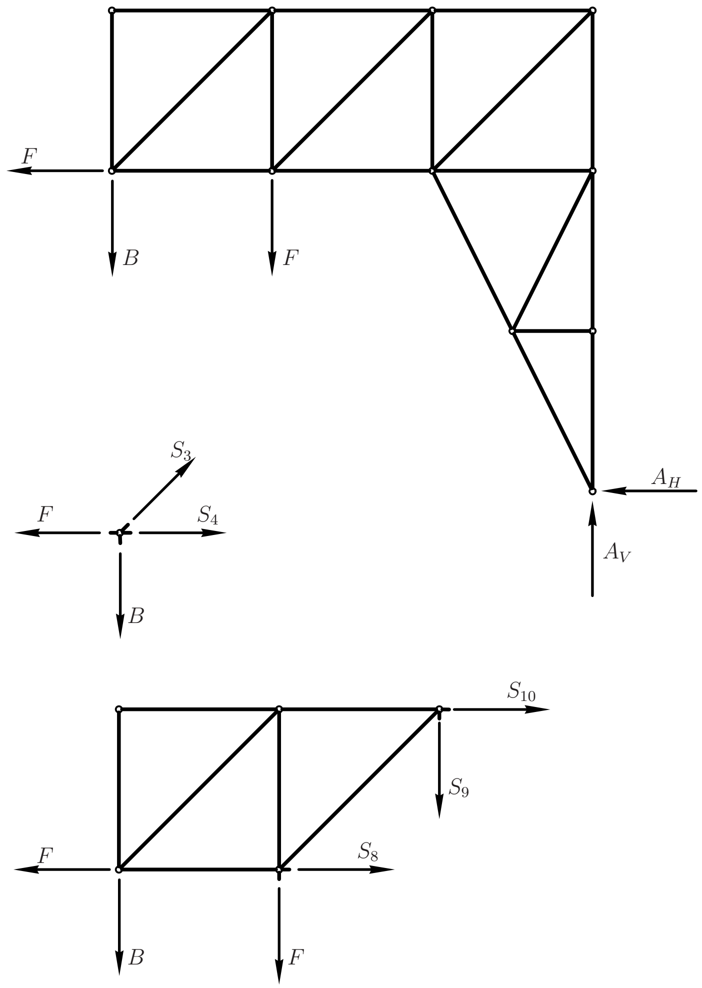
$$y_S = \frac{a}{2}$$

$$z_S = \frac{7}{10}\, d$$

3.3 Lösungen: Schnittkräfte in Fachwerken

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3-1:

a)
Freikörperbilder und Ritterschnitt:



Gleichgewicht:

$$\sum M^A: \quad B\,3a + F\,2a + F\,2a = 0$$

$$\Rightarrow: \quad B = -\frac{4}{3}F$$

b)
Nullstäbe:

$$S_1 = S_2 = S_{17} = S_{15} = S_{12} = 0$$

c)
Gleichgewichte am Knoten 1,3,4:

$$\uparrow: \quad S_3\,\frac{\sqrt{2}}{2} - B = 0 \qquad \Rightarrow \quad S_3 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}\,F$$

$$\rightarrow: \quad S_4 + S_3\,\frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad S_4 = \frac{7}{3}\,F$$

Ritterschnitt

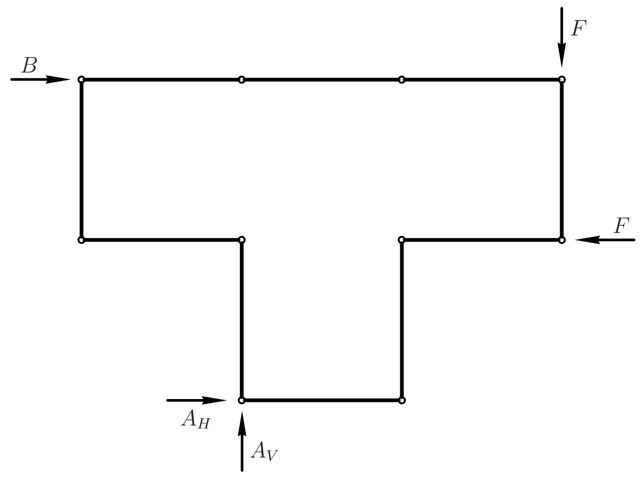
$$\sum M^{8,9}: \quad B\,2a + F\,a - S_{10}\,a = 0 \qquad \Rightarrow \quad S_{10} = -\frac{5}{3}\,F$$

$$\downarrow: \quad B + F + S_9 = 0 \qquad \Rightarrow \quad S_9 = \frac{1}{3}\,F$$

$$\sum M^{9,10}: \quad S_8\,a + F\,a + B\,2a - F_a = 0 \quad \Rightarrow \quad S_8 = \frac{8}{3}\,F$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3-2:

a)
Freikörperbild:



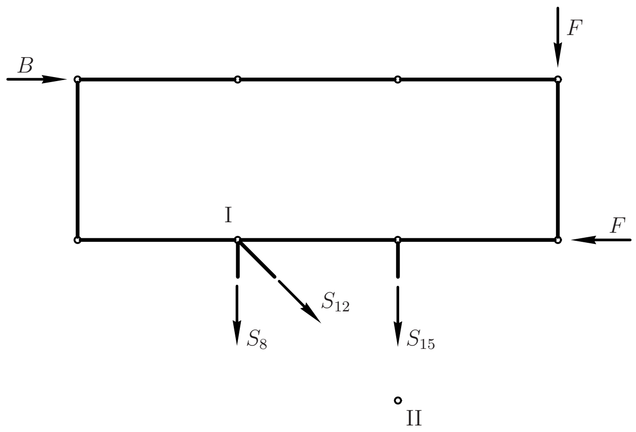
Gleichgewicht Gesamtsystem:

$$\sum M^A: \quad 0 = F\,a - F\,2\,a - B\,2\,a$$

$$B = -\frac{F}{2}$$

b)
$S_4 = S_{18} = 0$ weil Nullstäbe

Ritterschnitt:

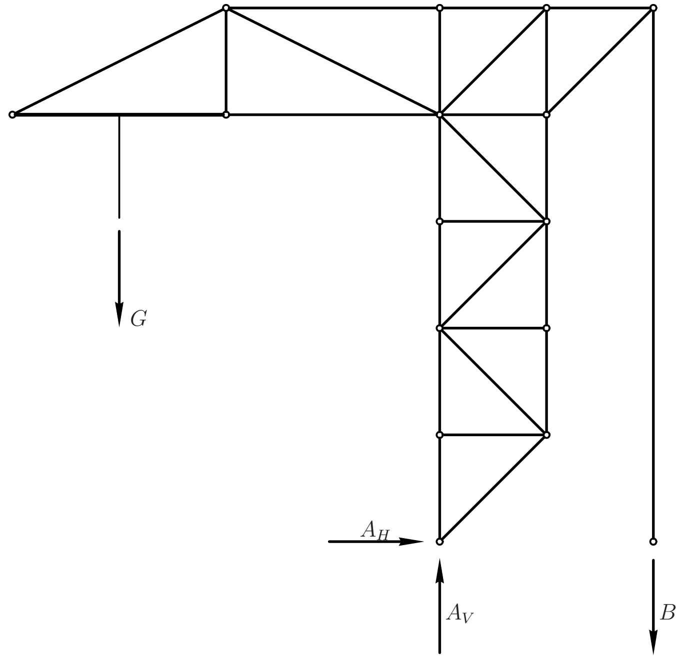


Gleichgewichte:

$$\begin{aligned}
\rightarrow: \quad & 0 = B - F + \frac{S_{12}}{\sqrt{2}} \\
& S_{12} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,F \\
\sum M^{(II)}: \quad & 0 = S_8\,a + F\,a - F\,a - 2\,B\,a \\
& S_8 = -F \\
\sum M^{(I)}: \quad & 0 = S_{15}\,a + F\,2a + B\,a \\
& S_{15} = -\frac{3}{2}F
\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3-3:

a)
Freikörperbild:

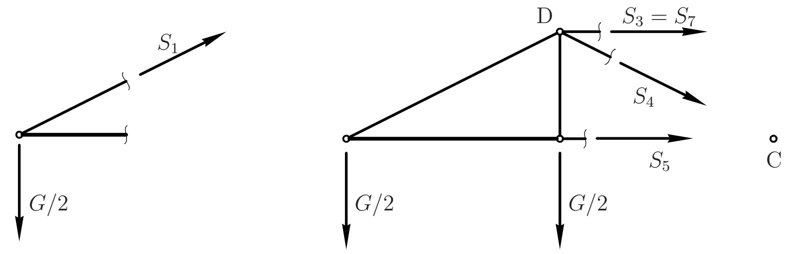


Gleichgewichte:

$$\begin{aligned}
\sum M^{(A)} \quad & 0 = -B\,2a + G\,3a \\
& \Longrightarrow B = \frac{3}{2}G \\
\rightarrow \quad & 0 = A_H \\
\uparrow \quad & 0 = A_V - B - G \\
& \Longrightarrow A_V = \frac{5}{2}G
\end{aligned}$$

b)
Offensichtliche Nullstäbe: 6, 17, 21, 25

c)
Freikörperbilder und Ritterschnitt:



Gleichgewichte linkes Freikörperbild:

$$\downarrow \quad 0 = \frac{G}{2} - S_1 \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{4\,a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Longrightarrow S_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\,G$$

Gleichgewichte rechtes Freikörperbild, Ritterschnitt:

$$S_3 = S_7$$

$$\sum M^{(D)} \quad 0 = S_5\,a + \frac{G}{2}\,2a$$

$$\Longrightarrow S_5 = -G$$

$$\sum M^{(C)} \quad 0 = -S_7\,a + \frac{G}{2}\,2a + \frac{G}{2}\,4a$$

$$\Longrightarrow S_7 = 3G$$

$$\rightarrow \quad 0 = S_7 + S_5 + S_4\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Longrightarrow S_4 = -\sqrt{5}\,G$$

3.4 Lösungen: Schnittlasten am Balken

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4-0:

a)

$$f_{min} = 3s - a - z$$

Mit $s = 2$, $a = 4$ und $z = 2$ folgt $f_{min} = 0$.
Wegen $f = 0$ folgt, daß es sich um ein statisch bestimmtes Tragwerk handelt.

b)
Gleichgewichte Balken:

$$\sum M^B : \quad q\,\frac{3}{4}\,l\,\frac{5}{8}\,l\,\frac{\sqrt{3}}{2} - C\,l\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\rightarrow: \quad B_H = 0$$

$$\uparrow: \quad B_V - q\,\frac{3}{4}l + C = 0$$

$\Longrightarrow$

$$C = q\,\frac{15}{32}\,l = \frac{5}{3}\,F$$

$$B_V = q\,\frac{9}{32}\,l = F$$

Gleichgewichte Stütze:

$$\uparrow: \quad B_V - A_V = 0$$

$$\rightarrow: \quad A_H - B_H = 0$$

$$\sum M^A : \quad -M_A + B_V\,a\,\frac{\sqrt{3}}{2} - B_H\,(h + \frac{a}{2}) = 0$$

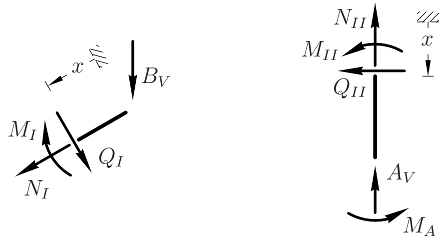
$\Longrightarrow$

$$A_V = F$$

$$A_H = 0 \qquad 1P$$

$$M_A = \frac{\sqrt{3}}{2}\,F\,a$$

c)



Gleichgewichte Stütze, Teil der Länge a:

$\searrow$: $\quad Q_I + B_V \cos 30^\circ = 0$

$\swarrow$: $\quad N_I + B_V \sin 30^\circ = 0$

$\sum M^x$: $\quad M_I + B_V\, x \cos 30^\circ = 0$

$\Longrightarrow$

$$N_I = -B_V \frac{1}{2} = -\frac{F}{2}$$

$$Q_I = -B_V \frac{\sqrt{3}}{2} = -F\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M_I = -B_V\, x\, \frac{\sqrt{3}}{2} = -F\,\frac{\sqrt{3}}{2}\, 1$$

Gleichgewichte Stütze, Teil der Länge h:

$\uparrow$: $\quad N_{II} + A_V = 0$

$\leftarrow$: $\quad Q_{II} = 0$

$\sum M^x$: $\quad M_{II} + M_A = 0$

$\Longrightarrow$

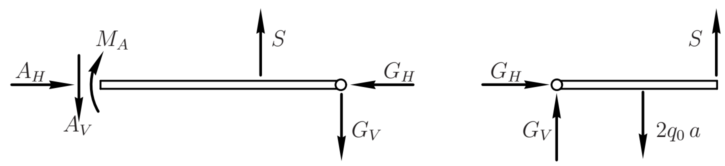
$$N_{II} = -A_V = -F$$

$$Q_{II} = 0$$

$$M_{II} = -M_A = \frac{\sqrt{3}}{2}\, F\, a$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4-1:

a)
Freikörperbilder:



Gleichgewicht rechter Teilträger:

$\rightarrow$: $\quad G_H = 0$

$\sum M^G$: $\quad 0 = \frac{a}{2}\, 2q_0\, a - S$

$\quad S = q_0\, a$

$\uparrow$: $\quad 0 = G_V - 2q_0\, a + S$

$\quad G_V = 2q_0\, a - S$

$\quad G_V = q_0\, a$

Gleichgewicht linker Teilträger:

$\rightarrow$: $\quad 0 = A_H + G_H$

$\quad A_H = 0$

$\sum M^A$: $\quad 0 = M_A - S\, a + G_V\, \frac{3}{2}\, a$

$\quad M_A = q_0\, a^2 - q_0\, a^2\, \frac{3}{2}\, a$

$\quad M_A = -\frac{1}{2}\, q_0\, a^2$

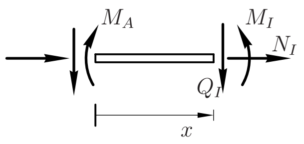
$\uparrow$: $\quad 0 = -A_V + S - G_V$

$\quad A_V = S - G_V$

$\quad A_V = 0$

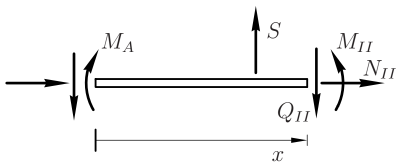
b)
Schnittlasten:

$0 < x < a$:



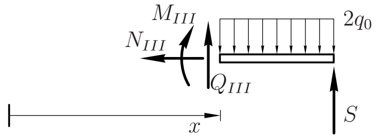
$$
\begin{aligned}
\rightarrow: &\quad N_I = 0 \\
\downarrow &\quad Q_I = 0 \\
\sum M^x: &\quad 0 = M_A - M_I \\
&\quad M_I = M_A = -\frac{1}{2}\, q_0\, a^2
\end{aligned}
$$

$a < x < \frac{3}{2}\, a$:



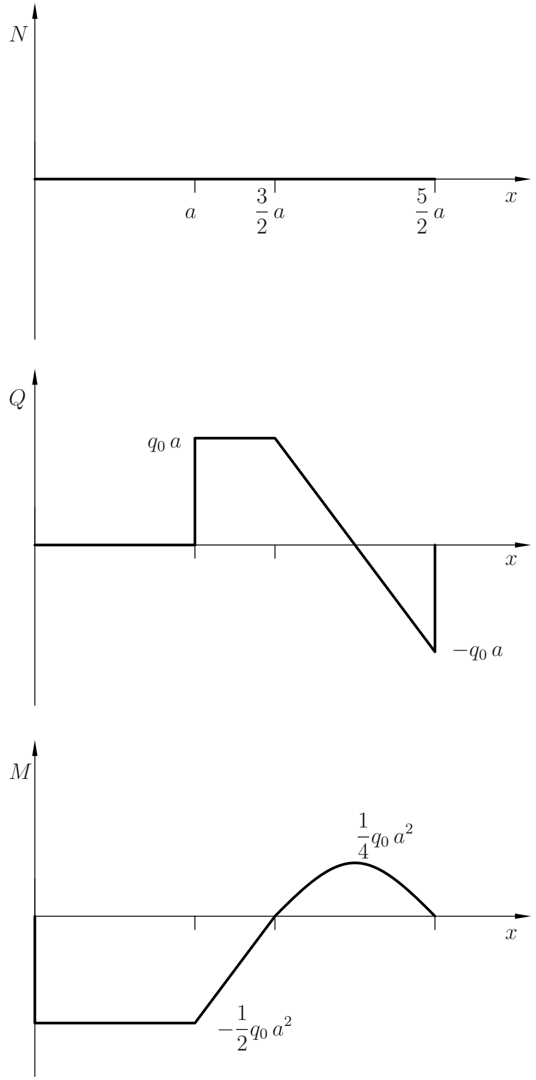
$$
\begin{aligned}
\rightarrow: &\quad N_{II} = 0 \\
\uparrow &\quad Q_{II} = S = q_0\, a \\
\sum M^x: &\quad 0 = -M_{II} + S\,(x - a) + M_A \\
&\quad M_{II} = q_0\, a \left(x - \frac{3}{2}\, a\right)
\end{aligned}
$$

$\frac{3}{2}\, a < x < \frac{5}{2}\, a$:



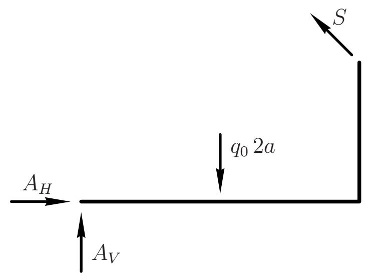
$$
\begin{aligned}
\rightarrow: &\quad N_{III} = 0 \\
\downarrow &\quad 0 = -Q_{III} + 2q_0 \left(\frac{5}{2}\, a - x\right) - S \\
&\quad Q_{III} = 2q_0\,(2\,a - x) \\
\sum M^x: &\quad 0 = M_{III} - S\left(\frac{5}{2}\, a - x\right) + 2q_0\, \frac{\left(\frac{5}{2}\, a - x\right)^2}{2} \\
&\quad M_{III} = q_0\, a \left(\frac{5}{2}\, a - x\right) - q_0 \left(\frac{5}{2}\, a - x\right)^2
\end{aligned}
$$

c)
Zustandslinien:



Lösungsvorschlag zur Aufgabe 4-2:

a)
Freikörperbild:



Auflagerreaktionen und Seilkraft:

$$\sum M^{(A)} \quad 0 = q_0\,2a^2 - \frac{S}{\sqrt{2}}\,a - \frac{S}{\sqrt{2}}\,2a$$

$$\Longrightarrow S = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,q_0\,a$$

$$\rightarrow \quad 0 = A_H - \frac{S}{\sqrt{2}}$$

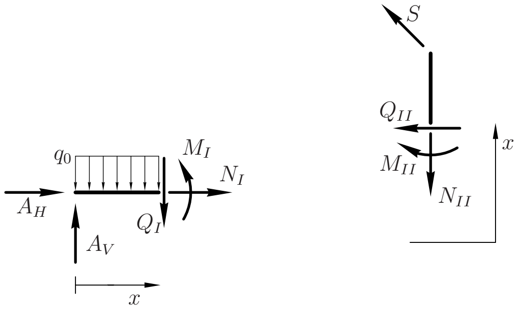
$$\Longrightarrow A_H = \frac{2}{3}\,q_0\,a$$

$$\uparrow \quad 0 = A_V - q_0\,2a + \frac{S}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow A_V = \frac{4}{3}\,q_0\,a$$

b)

Freikörperbilder Bereich I: $0 \leq x \leq 2a$



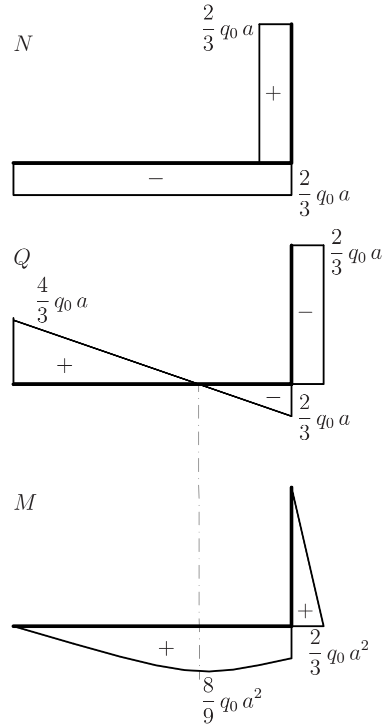
$$\begin{aligned}
&\sum M^{(x)} && 0 = M_I - A_V\, x + q_0\, x\, \frac{x}{2} \\
& && \Longrightarrow M_I = q_0 \left(\frac{4}{3}\, a\, x - \frac{1}{2}\, x^2 \right) \\
&\rightarrow && 0 = N_I + A_H \\
& && \Longrightarrow N_I = -\frac{2}{3}\, q_0\, a \\
&\uparrow && 0 = -Q_I + A_V - q_0\, x \\
& && \Longrightarrow Q_I = q_0 \left(\frac{4}{3}\, a - x \right)
\end{aligned}$$

Bereich II: $2a \leq x \leq 3a$

$$\begin{aligned}
&\sum M^{(x)} && 0 = M_{II} - \frac{S}{\sqrt{2}}\, (3a - x) \\
& && \Longrightarrow M_{II} = \frac{2}{3}\, q_0\, a\, (3a - x) \\
&\uparrow && 0 = -N_{II} + \frac{S}{\sqrt{2}} \\
& && \Longrightarrow N_{II} = \frac{2}{3}\, q_0\, a \\
&\rightarrow && 0 = -Q_{II} - \frac{S}{\sqrt{2}} \\
& && \Longrightarrow Q_{II} = -\frac{2}{3}\, q_0\, a
\end{aligned}$$

c)

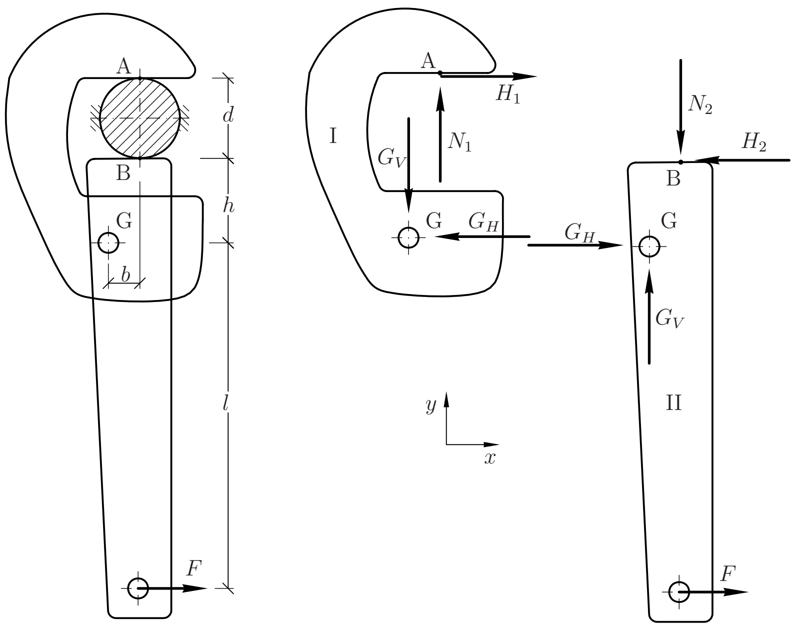
Zustandslinien:



3.5 Lösungen: Haftung und Reibung

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5-1:

a)
Freikörperbild:



b)
Gleichgewicht Körper I:

$$\sum M^{(G)}: \quad b\,N_1 - (d+h)\,H_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow: \quad H_1 - G_H = 0 \qquad (2)$$

$$\uparrow: \quad N_1 - G_V = 0 \qquad (3)$$

Gleichgewicht Körper II:

$$\sum M^{(G)}: \quad l\,F + h\,H_2 - b\,N_2 = 0 \qquad (4)$$

$$\rightarrow: \quad G_H - H_2 + F = 0 \qquad (5)$$

$$\uparrow: \quad G_V - N_2 = 0 \qquad (6)$$

aus (3) und (6): $N_1 = N_2$

aus (2) und (5) : $H_2 = H_1 + F$

aus (1): $N_1 = \frac{d+h}{b}\,H_1$

aus (4): $l\,F + h\,(H_1 + F) - (d+h)\,H = 0$

$\Longrightarrow$

$$H_1 = \frac{h+l}{d}\,F$$

$$H_2 = \left(\frac{h+l}{d} + 1\right)\,F$$

$$N_1 = N_2 = \frac{(h+l)(h+d)}{d\,b}\,F$$

c)

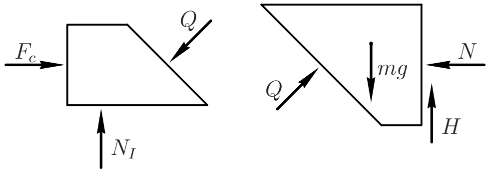
Da $H_2 > H_1$ und $N_1 = N_2$ gilt

$$H_2 \leq \mu_0\,N_2$$

$$\frac{(h+b+d)\,b}{(h+l)(h+d)} \leq \mu_0$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5-2:

a)
Freikörperbilder:



b)
Wegen $\alpha = 45°$ wird die Feder um x gestaucht.

c)
Federkraft:

$$F_c = c\,x$$

Gleichgewicht Körper I:

$$\begin{aligned} \rightarrow:\quad & 0 = F_c - \frac{Q}{\sqrt{2}} \\ & Q = F_c\,\sqrt{2} = \sqrt{2}\,x\,c \end{aligned}$$

Gleichgewicht Körper II:

$$\begin{aligned} \rightarrow:\quad & 0 = N - \frac{Q}{\sqrt{2}} \\ & N = \frac{Q}{\sqrt{2}} \\ \downarrow:\quad & 0 = mg - \frac{Q}{\sqrt{2}} - H \\ & H = mg - \frac{Q}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow:\quad & N = c\,x \\ & H = mg - c\,x \end{aligned}$$

Haftung für

$$|H| \leq \mu_0\,N$$

$$|mg - c\,x| \leq \mu_0\,c\,x$$

Fall 1: $mg > c\,x$

$$mg - c\,x \leq \mu_0\,c\,x$$

$$x \geq \frac{mg}{(\mu_0 + 1)\,c}$$

Fall 2: $mg < c\,x$

$$mg - c\,x \geq \mu_0\,c\,x$$

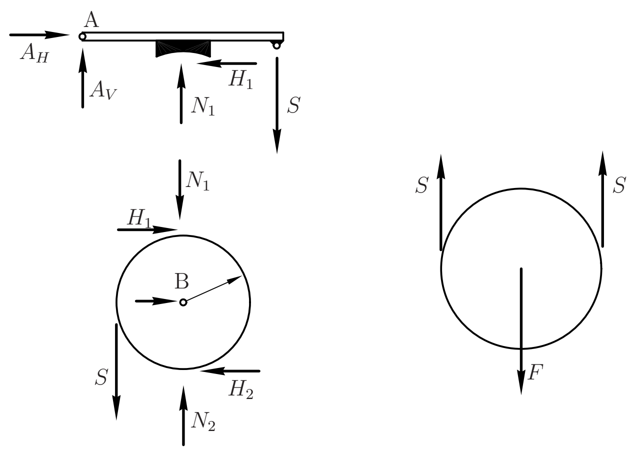
$$x \leq \frac{mg}{(1 - \mu_0)\,c}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{mg}{(1 + \mu_0)\,c} \leq x \leq \frac{mg}{(1 - \mu_0)\,c}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5-2:

a)
Freikörperbild:



b)
Gleichgewicht Hebel:

$$\sum M^{(A)} \quad 0 = S\,(a+b) - N_1\,a$$

$$\Longrightarrow N_1 = S\,\frac{a+b}{a}$$

Gleichgewicht Bremswalze:

$$\sum M^{(B)} \quad 0 = S\,r - (H_1 + H_2)\,r$$

$$\Longrightarrow (H_1 + H_2) = S$$

$$\uparrow \quad 0 = N_2 - N_1 - S$$

$$\Longrightarrow N_2 = N_1 + S$$

Gleichgewicht Umlenkrolle:

$$\uparrow \quad 0 = 2\,S - F$$

$$\Longrightarrow S = \frac{F}{2}$$

Zwischenergebnisse:

$$(H_1 + H_2) = \frac{F}{2}$$

$$N_2 = N_1 + S = S\left(\frac{a+b}{a} + 1\right) = S\,\frac{2a+b}{a}$$

$$(N_1 + N_2) = S\,\frac{3a+2b}{a} = \frac{F}{2}\,\frac{3a+2b}{a}$$

Haften für

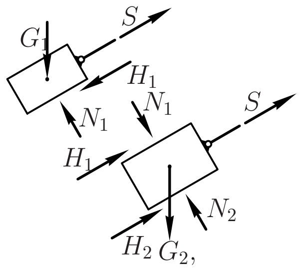
$$\begin{aligned}(|H_1| + |H_2|) \quad &\leq \quad \mu_0\,(N_1 + N_2)\\ \frac{F}{2} \quad &\leq \quad \mu_0\,\frac{F}{2}\,\frac{3a+2b}{a}\\ \mu_0 \quad &\geq \quad \frac{a}{3a+2b}\end{aligned}$$

Sonderfall $a = b$:

$$\mu_0 \;\geq\; \frac{1}{5}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5-3:

a)
Freikörperbild:



b)
Gleichgewichte obere Kiste

$$\nearrow \quad 0 = S - H_1 - G_1 \sin\alpha \quad (1)$$

$$\nwarrow \quad 0 = N_1 - G_1 \cos\alpha \quad (2)$$

Gleichgewichte untere Kiste

$$\nearrow \quad 0 = S + H_1 + H_2 - G_2 \sin\alpha \quad (3)$$

$$\nwarrow \quad 0 = N_2 - N_1 - G_2 \cos\alpha \quad (4)$$

(3)-(1)

$$2\,H_1 + H_2 = (G_2 - G_1)\,\sin\alpha$$

(2)$\Longrightarrow$

$$N_1 = G_1\,\cos\alpha$$

(4)mit(2)$\Longrightarrow$

$$N_2 = (G_1 + G_2)\,\cos\alpha$$

Haftbedingung

$$\begin{aligned} 2\,H_1 + H_2 &\leq \mu_0\,2\,N_1 + \mu_0\,N_2 \\ (G_2 - G_1)\,\sin\alpha &\leq \mu_0\,(2\,G_1 + G_1 + G_2)\,\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\tan\alpha \leq \mu_0\,\frac{3\,G_1 + G_2}{G_2 - G_1}$$

c)

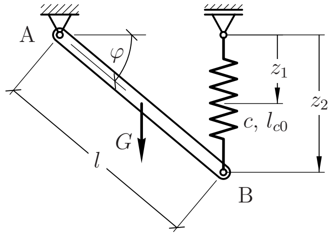
$$\tan\alpha \leq 0.2\,\frac{5\,G_1}{G_1} = 1$$

$$\alpha \leq 45^\circ$$

3.6 Lösungen: Prinzip der virtuellen Verrückungen

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 6-1:

a)
Relevante Koordinaten:



$$z_1 = \frac{l}{2}\sin\varphi$$
$$z_2 = l\,\sin\varphi$$

b)
Virtuelle Verrückungen:

$$\delta z_1 = \frac{l}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi$$
$$\delta z_2 = l\,\cos\varphi\,\delta\varphi 2P$$

c)
Federkraft:

$$F_c = c\,(z_2 - l_{c0}) = c\,(l\,\sin\varphi - l_{c0})$$

d)
Virtuelle Arbeit:

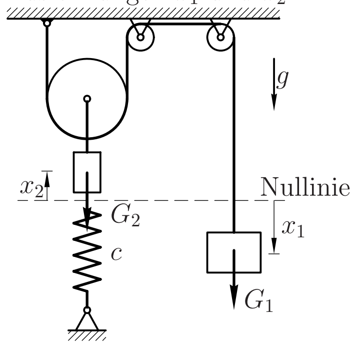
$$\begin{aligned}\delta W &= G\,\delta z_1 - F_c\,\delta z_2 = 0\\ &= (G\frac{l}{2}\cos\varphi - c\,(l\,\sin\varphi - l_{c0})\,l\,\cos\varphi)\,\delta\varphi\\ 0 &= G\frac{l}{2}\cos\varphi - c\,(l\,\sin\varphi - l_{c0})\,l\,\cos\varphi\end{aligned}$$

Ausrechnung:

$$\sin\varphi = \frac{G + 2\,c\,l_{c0}}{2\,c\,l}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 6-2:

a) Auslenkungen x_1 und x_2:



Verhältnis der Auslenkungen:

$$x_2 = \frac{1}{2}\,x_1$$

b)
Virtuelle Verrückungen:

$$\begin{aligned}\delta x_1 &= \delta x_1\\ \delta x_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial x_1}\delta x_1 = \frac{1}{2}\,\delta x_1\end{aligned}$$

c)
Federkraft:

$$F_c = x_2\,c = \frac{1}{2}\,x_1\,c$$

d) Virtuelle Arbeit:

$$\begin{aligned}\delta W = 0 &= -G_2\,\delta x_2 - F_c\,\delta x_2 + G_1\,\delta x_1\\ &= -G_2\,\tfrac{1}{2}\delta x_1 - \tfrac{1}{2}\,x_1\,c\,\tfrac{1}{1}\delta x_1 + G_1\,\delta x_1\\ &= -\tfrac{1}{2}\,G_2 - \tfrac{1}{4}\,x_1\,c + G_1\end{aligned}$$

Auflösen nach x_1 liefert die Gleichgewichtslage:

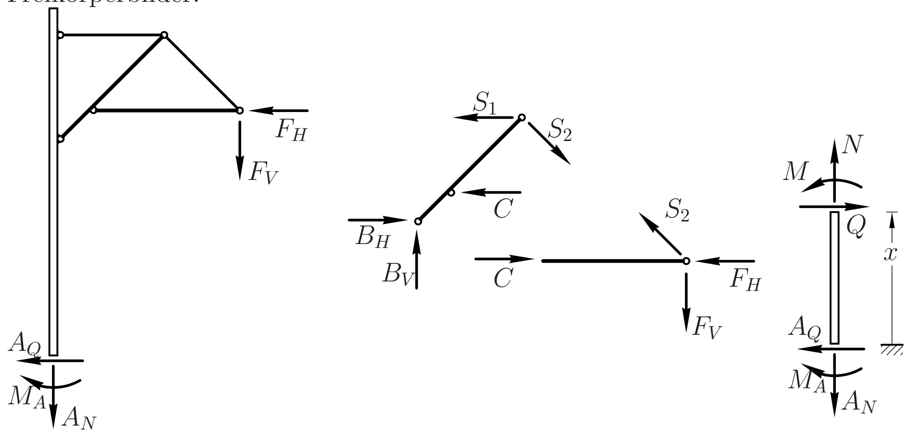
$$x_1 = \frac{2\,(2G_1 - G_2)}{c}$$

e)
Für $x_1 > 0$ muß $G_2 < 2\,G_1$ sein.

3.7 Lösungen: Vermischte Themen

Lösungsvorschlag zur Aufgabe 7-1:

a)
Freikörperbilder:



Gleichgewichte:

$$\begin{aligned}\leftarrow\quad 0 &= A_Q + F_H \implies A_Q = -F_H\\ \uparrow\quad 0 &= A_N + F_V \implies A_N = -F_V\\ \textstyle\sum M^{(A)}\quad M_A &= \left[\left(2 + \tfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) F_H - \left(1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) F_V\right] a\end{aligned}$$

b)
Freikörperbild (siehe oben Mitte)

Gleichgewichte horizontaler Stab:

$$\begin{aligned}\uparrow\quad 0 &= -F_V + S_2\,\tfrac{\sqrt{2}}{2} \implies S_2 = \sqrt{2}\,F_V\\ \rightarrow\quad 0 &= C - S_2\,\tfrac{\sqrt{2}}{2} - F_H \implies C = S_2\,\tfrac{\sqrt{2}}{2} + F_H = F_H + F_V\end{aligned}$$

Gleichgewicht schräger Stab:

$$\textstyle\sum M^{(B)}\quad 0 = S_1\,a - S_2\,\sqrt{2}\,a + C\,\tfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\,a \implies S_1 = S_2\,\sqrt{2} - C\,\tfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

Einsetzen:

$$S_1 = F_V\,\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} - F_H\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

Damit das obere Seil gespannt bleibt

$$S_1 \geq 0$$

Ausrechnung

$$F_H \leq \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\, F_V = 5.83\, F_V$$

Alternativ kann das Tragwerk am oberen Seil und am Lager B freigeschnitten werden. Aus der Summe der Momente um B ergibt sich die Seilkraft S_1. Dann fehlt aber eine Aussage zur Seilkraft S_2.

c)

$$\begin{array}{rrcl} \leftarrow & Q & = & A_Q = -F_H \\ \uparrow & N & = & A_N = -F_V \\ \sum M^{(x)} & M & = & M_A + A_Q\, x = \left[\left(2 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) F_H - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) F_V\right] a - F_V\, x \end{array}$$