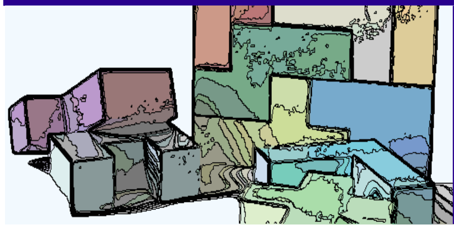
Mag. Gerhard Hainscho

Mathematik im Spiel



Puzzles und Spiele mit mathematischem Flair

ToM
TREFFPUNKT MATHEMATIK

Treffpunkt Mathematik ist eine Initiative der ARGE Mathematik AHS Kärnten in Zusammenarbeit mit dem Landesschulrat für Kärnten, der Pädagogischen Hochschule Kärnten, dem Regionalen Netzwerk Kärnten und IMST.

Klagenfurt, Jänner 2008

Inhalt

Tantrix

Abb. [1]

Tantrix wird mit sechseckigen Steinen gespielt, auf denen je zwei Seitenmittelpunkte durch eine Linie verbunden sind. Jeder Stein enthält daher drei Linien verschiedener Farbe, alle Steine sind verschieden.

Tantrix wurde vom Neuseeländer **Mike McManaway** entwickelt. Das Spiel entstand 1987 als *Mind Game*, 1991 wurde der Name zu Tantrix™ geändert - angeblich ein Kunstwort aus *tangled tracks*, verschlungene Pfade; die derzeit übliche Form mit farbigen Nummern auf der Rückseite existiert seit 2000.

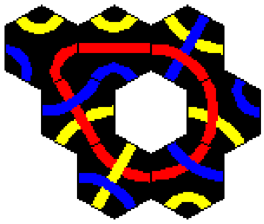
Für das Aneinanderlegen der Steine gelten zwei Regeln:

1. Es dürfen ausschließlich Linien gleicher Farbe aneinander stoßen.

richtig

falsch

2. Löcher sind verboten.



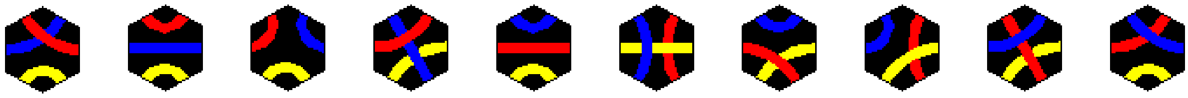
verboten

Mit den Tantrix-Steinen lassen sich diverse Puzzles legen, Tantrix kann aber auch als Solitär-Spiel oder als Spiel für 2 bis 4 Personen gespielt werden - für jede Variante gibt es eigene Regeln. Wir wollen uns vorwiegend mit den so genannten *Entdecker-Puzzles* beschäftigen. Man benötigt dafür die Steine 1 bis n mit $3 \le n \le 30$. Es gibt also ein sehr leichtes Puzzle mit den Steinen 1, 2 und 3, ein immer noch recht einfaches Puzzle mit den Steinen 1, 2, 3 und 4 usw. mit steigendem Schwierigkeitsgrad bis zur Aufgabe mit den Steinen 1 bis 30.

Tantrix gibt es speziell für diese Puzzles in eigenen *Discovery Sets* zu kaufen, diese enthalten die Steine 1 bis 10. Ein vollständiges Tantrix *Game Pack* enthält 56 Steine.

[1] Bildquelle: http://www.iwantoneofthose.com/store/assets/images/product/tanpuzvar/tanpuzvar_alt3.jpg (28.12.2007)

Die Tantrix-Steine 1 bis 10



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gelb	gelb	gelb	rot	rot	blau	rot	blau	gelb	blau

Die Tantrix Entdecker-Puzzles

Ziel der Entdecker-Puzzles ist es, Schleifen verschiedener Größe und Farbe zu bilden. Schleifen können symmetrisch sein oder beliebig verzerrt, doch müssen es immer in sich geschlossene Kurven sein, die *alle* Spielsteine bis zu einer bestimmten Nummer und *alle* Linien der gegebenen Farbe beinhalten.

Vorbereitung

- Lege alle Steine - mindestens 3, höchstens 30 - mit der Nummernseite nach oben vor dich hin, am besten aufsteigend sortiert.

Spiel

- Nimm die Steine 1, 2 und 3: ihre Nummern sind gelb. Dreh sie um und bilde eine gelbe Schleife.
- Nimm den nächsten Stein und bilde mit allen nun vorhandenen Steinen eine neue Schleife in der Farbe der Nummer des neuen Steins. Das alte Muster spielt für die neue Aufgabe keine Rolle mehr.

Fragen

1. Skizziere deine Lösungen und vergleiche sie mit den Lösungen anderer.
   - Gibt es unterschiedliche Lösungen für gleiche Aufgaben?
   - Falls ja: nach welchen Kriterien unterscheiden sie sich?
2. Warum lässt sich mit den Steinen 1, 2 und 3 weder eine rote noch eine blaue Schleife bilden?
3. Warum lässt sich mit den Steinen 1, 2, 3, …, 7 keine gelbe Schleife bilden?
4. Welche Schleifen können - theoretisch und praktisch - mit den Steinen
   a) 1, 7, 8 und 10
   b) 1, 2, 3, …, 7
   c) 1, 2, 3, …, 10
   gebildet werden?
5. Tantrix-Steine sind so konstruiert, dass je zwei Seiten eines Sechsecks durch eine Linie verbunden werden.
   a) Auf wie viele Arten - ohne Berücksichtigung der Farben - ist dies möglich? Werden alle möglichen Formen im Spiel verwendet?
   b) Wie viele verschiedene Tantrix-Steine mit 3 Linienfarben (rot, gelb, blau) bzw. 4 Linienfarben (rot, gelb, blau, grün) gibt es?
6. Sind auch Tantrix Varianten mit quadratischen oder achteckigen Steinen möglich?
   - Falls ja: Wie viele verschiedenen Steinformen gibt es?
   - Falls nein: Warum nicht?

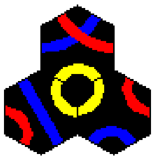
Antworten

1. Skizziere deine Lösungen und vergleiche sie mit den Lösungen anderer.
   - Gibt es unterschiedliche Lösungen für gleiche Aufgaben?
   - Falls ja: nach welchen Kriterien unterscheiden sie sich?

   Bereits für die Aufgabe mit 3 Steinen gibt es 2 Lösungen. Sie unterscheiden sich im Umlaufsinn bzw. durch die Anordnung der Steine. Genauer: Steine gleicher Linienform und Farbe können ausgetauscht werden, ohne die Form der Schleife zu verändern. Manchmal ist dies auch unter Beachtung aller Farbverbindungen möglich.

1
3 2

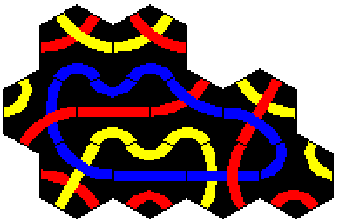
Lösung 1



1
2 3

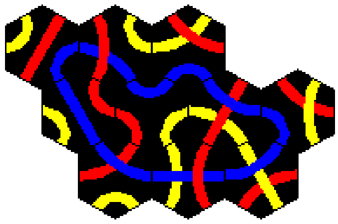
Lösung 2

   Bei einer größeren Anzahl von Steinen gibt es auch verschiedene Lösungen, die sich durch die Form der Schleife unterscheiden. Z.B. für n = 10:



8 7
1 5 10 9
6 2 4 3

Lösung 1



5 1 7
2 3 9 8
10 4 6

Lösung 2

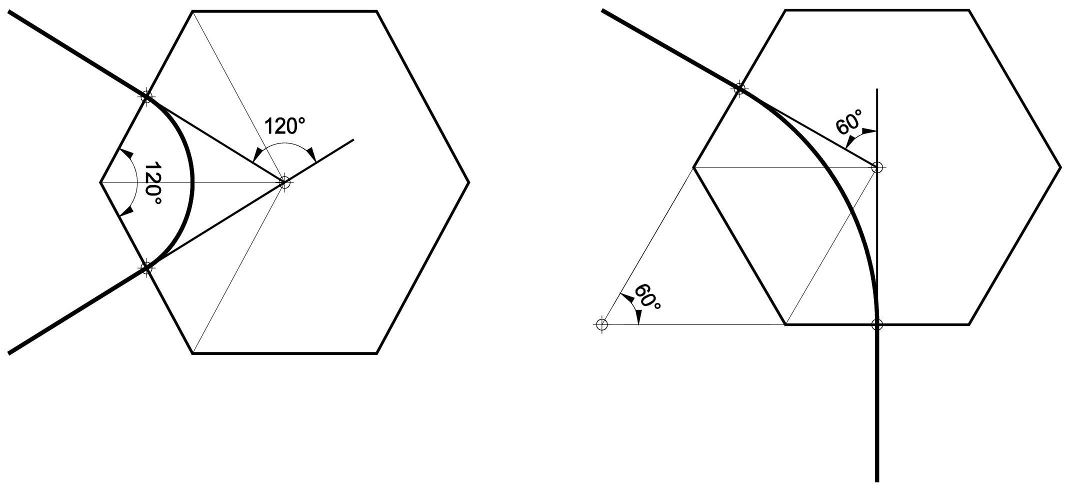
2. Warum lässt sich mit den Steinen 1, 2 und 3 weder eine rote noch eine blaue Schleife bilden?

Vergebliches Probieren ist natürlich erlaubt, zählt aber nicht als Antwort. Auch Aussagen wie „Weil es nicht geht!“, „Weil ich es nicht kann!“ oder „Versuch es doch selbst!“ überzeugen nicht wirklich. Schlüssige Antworten enthalten Argumente, die jederzeit und für jeden einsichtig und nachvollziehbar sind.

Tatsächlich gibt es zumindest zwei Argumente, warum mit den Steinen 1, 2 und 3 weder rote noch blaue Schleifen gebildet werden können.

- Die Winkelsumme ergibt weniger als 360°.

  Stellen wir uns die Linien auf den Spielsteinen als Fahrbahn vor, dann entspricht jeder Kurve eine Drehung um einen bestimmten Winkel. Kleinen Bögen entsprechen $\pm 120°$, großen Bögen entsprechen $\pm 60°$, geraden Strecken entsprechen 0°.



  Jeder Schleife entspricht eine volle Umdrehung, also 360°.

  - Die roten Bögen auf den Steinen 1, 2 und 3 ergeben höchstens $2 \cdot 120° + 60° = 300°$.
  - Die blauen Linien ergeben höchstens $120° + 60° + 0° = 180°$.

- Die Anzahl der Schnittpunkte von roten mit blauen Linien ist ungerade.

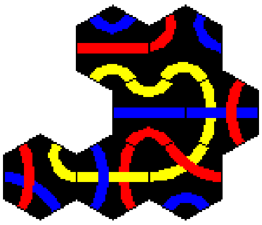
  Da es bei Tantrix keine „Sackgassen“ gibt, muss jede Linie, die in eine Schleife hinein führt, diese an anderer Stelle wieder verlassen. Die Anzahl der Schnittpunkte einer Schleife mit Linien einer anderen Farbe ist daher stets gerade (oder 0).

  Da es auf den Steinen 1, 2 und 3 genau einen Schnittpunkt von roten mit blauen Linien gibt, kann es weder eine rote noch eine blaue Schleife geben.

3. Warum lässt sich mit den Steinen 1, 2, 3, …, 7 keine gelbe Schleife bilden?

Nichts spricht gegen die Möglichkeit einer gelben Schleife. Die Winkelsumme 360° kann erreicht werden: $3 \cdot 120° - 1 \cdot 120° + 2 \cdot 60° + 0° = 360°$ (negative Winkel stellen Kurven „in die andere Richtung" dar), die Anzahl der Schnittpunkte mit roten oder blauen Linien ist gerade (je 2). Alle *notwendigen* Voraussetzungen sind also erfüllt, doch sind diese nicht *hinreichend*.

Die vielen 120°-Bögen erfordern eine entsprechende Anzahl von Zwischenstücken, um die Schleife vollenden zu können - offenbar fehlt aber zumindest 1 solches Zwischenstück.



5 3
2 4
1 6 7

Ist damit *bewiesen*, dass es keine gelbe Schleife geben kann?

Nein, natürlich nicht. Die bisherigen Überlegungen zeigen allerdings den Unterschied zwischen *notwendig* und *hinreichend*. Mit anderen Worten: Wenn-Dann Sätze sind nicht umkehrbar. *Wenn* eine Schleife existiert, *dann* ist die Winkelsumme aller Bogenstücke 360°. *Wenn* die Winkelsumme 360° ergibt, *dann* … genügt das nicht, um Existenzaussagen über Schleifen zu machen.

Wie könnte man *beweisen*, dass keine gelbe Schleife möglich ist?

Entweder findet man weitere Bedingungen für Schleifen (die in diesem Fall verletzt werden) oder man probiert tatsächlich systematisch *alle* Anordnungen durch. Letzteres kann wohl nur mit Computer-Hilfe erfolgen; als Mensch fehlen einem sicher Zeit und Geduld und wahrscheinlich auch bald die Übersicht. Mit Computer-Hilfe löst man Probleme dieser Art gerne mit *Backtracking-Algorithmen:* Nimm der nächsten freien Stein, drehe ihn in die nächste noch nicht getestete Position, lege ihn an die nächste freie Stelle - und löse den Rest. „Löse den Rest" heißt, beginne die Prozedur so lange immer wieder von vorne, bis alle Möglichkeiten getestet wurden. Falls irgendwann eine Lösung gefunden wird, zeige sie an.

Vor einem ganz ähnlichen Problem stehen Modelleisenbahn-Fans, die *alle* Schienen in ihre Anlage einbauen wollen. Allerdings gibt es dabei „trickreiche" Lösungen mit Weichen und Abstellgleisen …

4. Welche Schleifen können - theoretisch und praktisch - mit den Steinen

a) 1, 7, 8 und 10

b) 1, 2, 3, …, 7

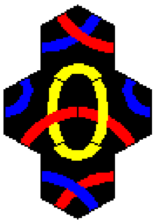
c) 1, 2, 3, …, 10

gebildet werden?

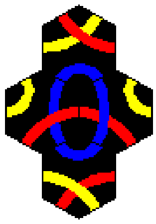
a) rot : $4 \cdot 60° = 240° < 360° \Rightarrow$ keine rote Schleife möglich

gelb : $2 \cdot 120° + 2 \cdot 60° = 360°$ ✓

blau : $2 \cdot 120° + 2 \cdot 60° = 360°$ ✓



1
7 8
10

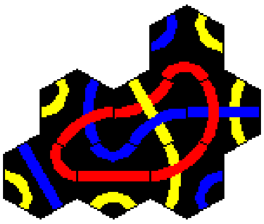


7
1 10
8

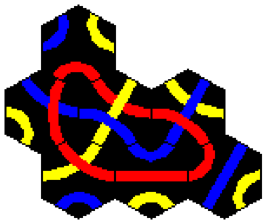
b) rot : $2 \cdot 120° + 3 \cdot 60° - 1 \cdot 60° + 0° = 360°$ ✓

gelb : $3 \cdot 120° - 1 \cdot 120° + 1 \cdot 60° + 0° = 360°$?!

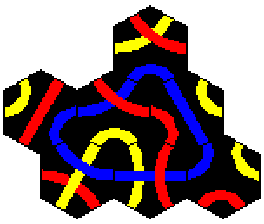
blau : $3 \cdot 120° + 1 \cdot 60° - 1 \cdot 60° + 0° = 360°$ ✓



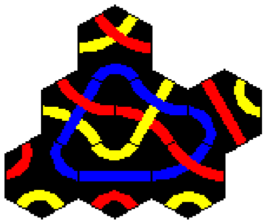
3
1 6 4
2 5 7



3
1 6 4
7 5 2



7
5 1 2
6 4 3



7
4 6 5
3 2 1

c) rot : $2 \cdot 120° + 4 \cdot 60° - 2 \cdot 60° + 2 \cdot 0° = 360°$ ✓

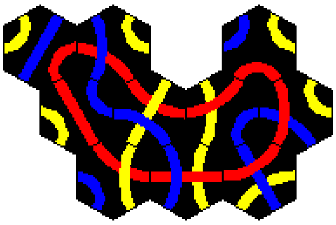
$1 \cdot 120° - 1 \cdot 120° + 6 \cdot 60° + 2 \cdot 0° = 360°$?!

gelb : $3 \cdot 120° - 2 \cdot 120° + 4 \cdot 60° + 0° = 360°$ ✓

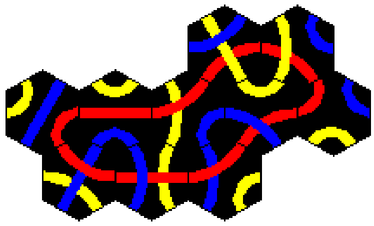
$4 \cdot 120° - 1 \cdot 120° + 2 \cdot 60° - 2 \cdot 60° + 0° = 360°$?!

blau : $3 \cdot 120° - 1 \cdot 120° + 3 \cdot 60° - 1 \cdot 60° + 2 \cdot 0° = 360°$ ✓

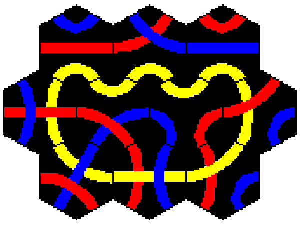
$4 \cdot 120° + 1 \cdot 60° - 3 \cdot 60° + 2 \cdot 0° = 360°$?!



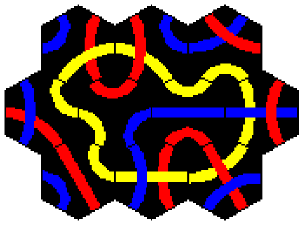
2 10 3
5 6 7 1
8 9 4



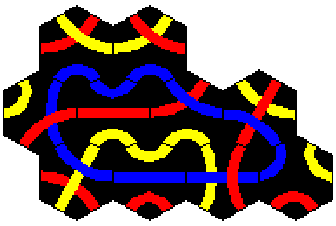
6 8
2 5 7 10 3
4 9 1



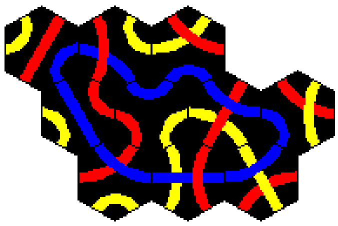
5 10 2
9 1 3 7
4 6 8



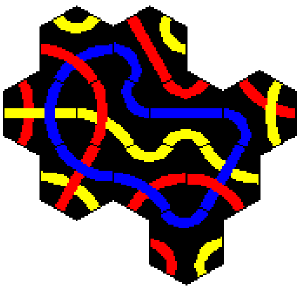
8 7 1
10 3 2 4
5 6 9



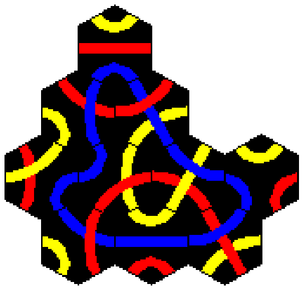
8 7
1 5 10 9
6 2 4 3



5 1 7
2 3 9 8
10 4 6



1 5
6 7 2 8
9 10 4
3



5
10 4
8 7 6 3
1 2 9

Abb. [2]

Sind die oben dargestellten Lösungen *alle* möglichen Lösungen?

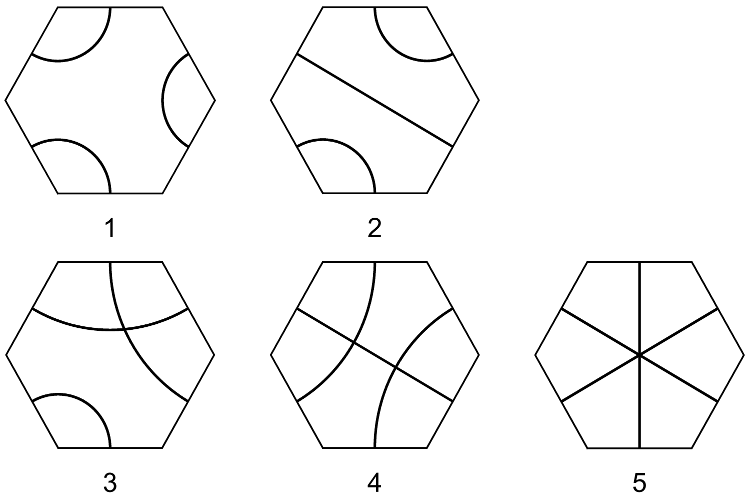
[2] Bildquelle: http://www.paulkidby.com/images/badges/pp3594.jpg (04.01.2008)

5. Tantrix-Steine sind so konstruiert, dass je zwei Seiten eines Sechsecks durch eine Linie verbunden werden.

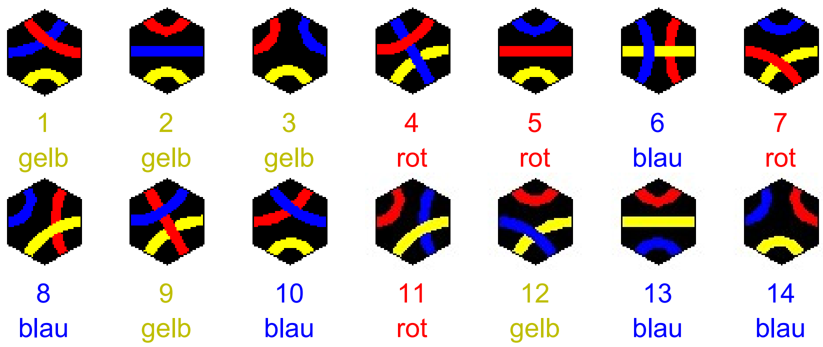
   a) Auf wie viele Arten - ohne Berücksichtigung der Farben - ist dies möglich? Werden alle möglichen Formen im Spiel verwendet?

   b) Wie viele verschiedene Tantrix-Steine mit 3 Linienfarben (rot, gelb, blau) bzw. 4 Linienfarben (rot, gelb, blau, grün) gibt es?

Grundsätzlich gibt es 5 mögliche Formen von Tantrix-Steinen, 4 davon werden für Puzzles und Spiel verwendet:



Wie erwähnt enthält ein vollständiges Tantrix *Game Pack* 56 Steine. Tatsächlich sind dies alle Möglichkeiten für 4 Farben. Davon ausgehend erhält man leicht die Anzahl aller Steine mit 3 Farben: man teilt die 56 Steine in 4 gleich große Haufen - ohne rot, ohne gelb, ohne blau und ohne grün. Jeder Haufen besteht aus allen Steinen mit 3 Farben, es gibt daher 56 / 4 = 14 verschiedene Steine mit 3 Linienfarben.



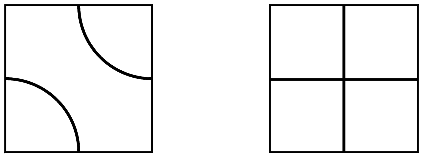
Natürlich kommt man auch mit Methoden der Kombinatorik auf die Lösungen 14 und 56 bzw. durch systematisches Ausprobieren und Nachzählen für jede der 4 verwendeten Formen. Überlegen wir die Situation für 3 Farben. Zunächst kann jeder Stein auf 6 Arten eingefärbt werden: für die erste Linie stehen 3 Farben zur Wahl; für jede dieser Möglichkeiten stehen für die zweite Linie 2 Farben zur Wahl, die dritte Linie ist damit eindeutig festgelegt. Insgesamt sind dies 3·2·1 = 6 Möglichkeiten für jeden Stein. Aufgrund verschiedener Symmetrien bei jeder der 4 verwendeten Formen kann man aber nur bestimmte Bruchteile davon zählen, und zwar für

(1) 6/3 = 2 (aufgrund der Drehsymmetrie sind je 3 Steine gleich, z.B. RGB, GBR und BRG)
(2) 6/2 = 3 (aufgrund der Spiegelsymmetrie sind je 2 Steine gleich)
(3) 6/1 = 6 (alle Steine sind verschieden)
(4) 6/2 = 3 (aufgrund der Spiegelsymmetrie sind je 2 Steine gleich)

Insgesamt erhält man 2 + 3 + 6 + 3 = 14 Möglichkeiten.

6. Sind auch Tantrix Varianten mit quadratischen oder achteckigen Steinen möglich?
   - Falls ja: Wie viele verschiedenen Steinformen gibt es?
   - Falls nein: Warum nicht?

Eine Tantrix Variante mit quadratischen Steinen ist denkbar, es gibt allerdings nur 2 mögliche Formen:



1 2

Ein entsprechendes Spiel - mit eigenen Regeln - ist unter dem Namen *Trax* am Markt.

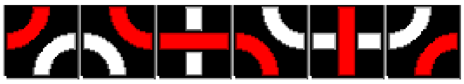
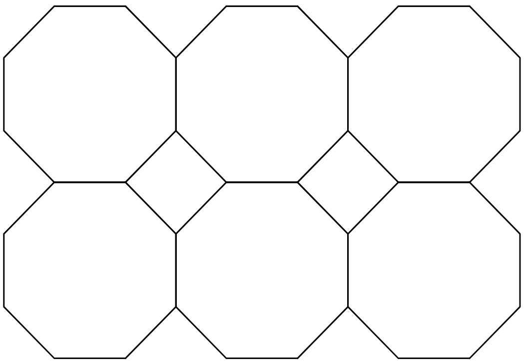


Abb. [3]

Eine Tantrix Variante mit achteckigen Steinen ist nicht möglich, da Achtecke keine *Parkettierung* der Ebene bilden - mit anderen Worten: Achtecke lassen sich nicht ohne Lücken aneinander legen. Allerdings wäre eine Kombination aus Quadraten und Achtecken denkbar.



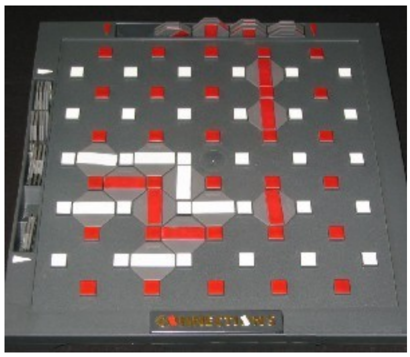


Abb. [4]

Ein Spiel, das diese Konfiguration benutzt - mit anderen Steinen und Regeln - ist unter dem Namen *Connections* am Markt.

Eine Kombination aus Quadraten und Sechsecken war eine Zeit lang als 3D-Puzzle unter dem Namen *The Rock* am Markt.

Abb. [5]

[3] Bildquelle: http://www.traxgame.com/images/border.gif (04.01.2008)
[4] Bildquelle: http://www.spieletest.at/pics/spiel/779/Connections2.jpg (04.01.2008)
[5] Bildquelle: http://www.geocities.com/jaapsch/puzzles/images/tantrixr.jpg (04.01.2008)

Spiele

Spiele wie Tantrix regen die Phantasie an und schulen die Raumvorstellung sowie das Begreifen - im wahrsten Sinn des Wortes - elementarer Grundbegriffe der Geometrie. Für Neugierige sollen in der Folge kurz einige Spielregeln beschrieben werden.

Tantrix Solitär

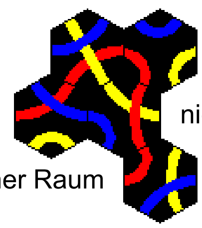
Vorbereitung

- Lege die Steine 1 bis 14 gut gemischt mit der Nummernseite nach oben auf einen Stapel.

Spiel

- Nimm den obersten Stein, drehe ihn um und lege ihn vor dich hin.
- Nimm den nächsten Stein und lege ihn an den ersten an usw. Steine, die in *erzwungene Räume* passen, *müssen* dort angelegt werden, ansonsten kann an beliebiger Stelle angelegt werden. *Erzwungene Räume* sind Leerräume, die von (mindestens) 3 Seiten umschlossen werden.

  Hinweis: Erzwungene Räume, in die 3 Linien gleicher Farbe münden, können niemals gefüllt werden.



nicht füllbarer erzwungener Raum

erzwungener Raum

Ziel

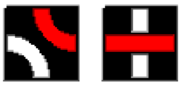
- Bilde eine rote Linie. Am Ende zählt jeder Stein in der längsten rote Linie einen Punkt. Als Spielvariante kann auch versucht werden, rote Schleifen zu bilden. Jeder Stein in der längsten roten Schleife zählt zwei Punkte.

Abb. [6]

[6] Bildquelle: http://www.tantrix.com/gfx/logo.gif (06.01.2008)

Trax - 2 Spieler

Trax wurde 1980 vom Neuseeländer **David Smith** entwickelt. Trax verwendet lauter identische Spielsteine mit bedruckter Vorder- und Rückseite, üblicherweise 64 oder mehr.

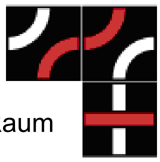
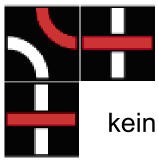


Vorbereitung

- Spieler 1 und 2 entscheiden sich für ihre Farbe.

Spiel

- Spieler 1 legt den ersten Stein, Spieler 2 legt seinen ersten Stein passend an usw. Es dürfen ausschließlich Linien gleicher Farbe aneinander stoßen.
- *Erzwungene Räume* müssen vom Spieler, der an der Reihe ist (und ihn gerade erzeugt hat), sofort gefüllt werden. *Erzwungene Räume* sind Leerräume, die von (mindestens) 2 Seiten umschlossen werden und in die 2 Linien gleicher Farbe münden.

erzwungener Raum   kein erzwungener Raum

Ziel

- Bilde entweder eine durchgehende Linie deiner Farbe, deren Anfangs und Endpunkt - horizontal oder vertikal - mindestens 8 Reihen auseinander liegen, oder eine Schleife beliebiger Größe und Form deiner Farbe. Gewinner ist der Spieler, dem dies als erstes gelingt.

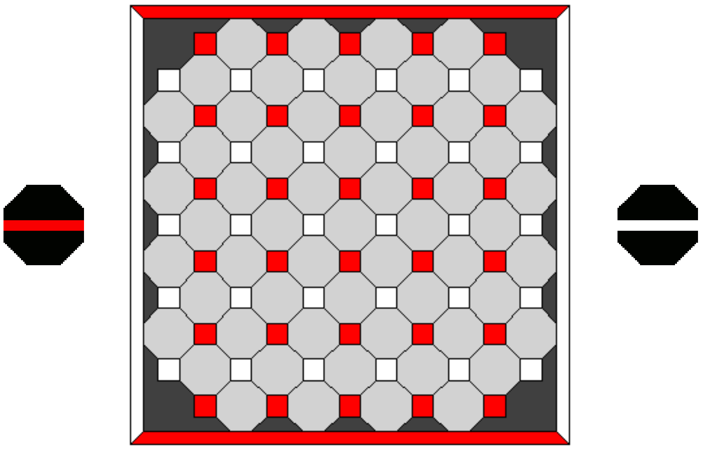
  In der limitierten Variante wird Trax auf einem gedachten 8 x 8 Feld gespielt; Gewinnerlinien müssen also vom linken zum rechten bzw. vom oberen zum unteren Rand führen. In der unlimitierten Variante hat das Spielfeld keine Grenzen.

Abb. [7]

[7] Bildquelle: http://www.traxgame.co.uk/pics/traxlogo.gif (06.01.2008)

Connections - 2 Spieler

Connenctions wurde vom Neuseeländer **Tom McNamara** entwickelt. Das Spielfeld besteht aus einem Raster mit 30 roten und 30 weißen Quadraten, dazwischen ist Platz für Spielsteine in Form von regulären Achtecken.



Vorbereitung

- Spieler 1 und 2 entscheiden sich für ihre Farbe.

Spiel

- Spieler 1 und 2 legen abwechselnd einen Stein ihrer Farbe auf ein beliebiges freies Feld. Jeder Stein muss zwei Quadrate der eigenen Farbe miteinander verbinden.

Ziel

- Bilde entweder eine durchgehende Linie deiner Farbe, die deine zwei Seiten des Spielfelds miteinander verbindet, oder kreise den Gegner ein (ein einzelnes Quadrat seiner Farbe oder einen Bereich, der neben Steinen beliebiger Farbe zumindest ein solches Quadrat enthält). Gewinner ist der Spieler, dem dies als erstes gelingt.

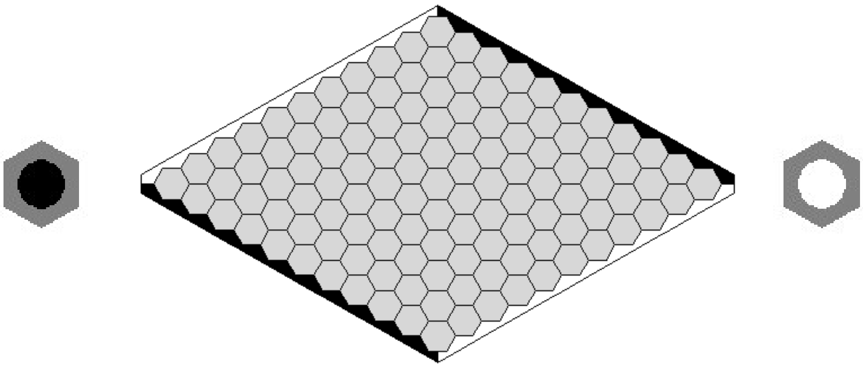
Tom McNamara Abb. [8]

[8] Bildquelle: http://www.spieletest.at/pics/autor/McNamara-Tom.jpg (06.01.2008)

Hex - 2 Spieler

Hex wurde 1942 vom Dänen **Piet Hein** und unabhängig davon 1947 von **John Forbes Nash Jr.** - bekannt aus dem Film *A Beautiful Mind* und als Nobelpreisträger für Wirtschaftswissenschaften 1994 - an der Princeton University erfunden. Hein nannte das Spiel *Polygon*, Nash gab ihm keinen Namen; es wurde zu seiner Zeit üblicherweise einfach *John* oder *Nash* genannt. Der Name *Hex* wurde 1952 von der Firma Parker Brothers Inc. geprägt.

Hex wird auf einem rhombenförmigen n x n Feld mit sechseckigen Feldern gespielt, üblicherweise 11 x 11 oder 7 x 7; Nash hielt angeblich 14 x 14 für besonders interessant.



Vorbereitung

- Spieler 1 und 2 entscheiden sich für ihre Farbe.

Spiel

- Spieler 1 und 2 legen abwechselnd einen Stein ihrer Farbe auf ein beliebiges freies Feld.

Ziel

- Bilde eine durchgehende Linie deiner Farbe, die deine zwei Seiten des Spielfelds miteinander verbindet (die 4 Eckfelder zählen zu beiden Farben). Gewinner ist der Spieler, dem dies als erstes gelingt.

  Hinweis: Die einzige Möglichkeit, den Gegner zu blockieren, besteht darin, seine eigene Gewinnlinie zu vervollständigen. Ein Unentschieden ist daher ausgeschlossen.

  Es ist bekannt, dass auf einem n x n Feld mit geradem n immer Spieler 1, bei ungeradem n immer Spieler 2 gewinnen kann; es ist aber nicht bekannt (außer für ganz kleine Spielfelder), wie die Gewinnstrategien im Detail aussehen.

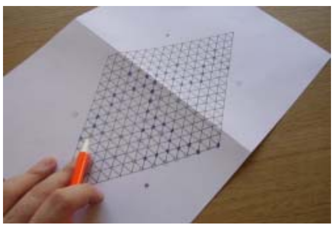
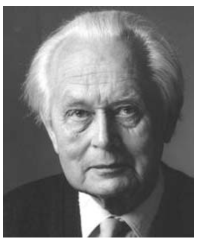


Abb. [9]



Piet Hein (1905 - 1996)
Abb. [10]

John Nash (*1928)
Abb. [11]

Abb. [12]

---

[9] Bildquelle: http://images.boardgamegeek.com/images/pic232715_md.jpg (06.01.2008)
[10] Bildquelle: http://www.kadec.dk/designere/piet_hein.jpg (06.01.2008)
[11] Bildquelle: http://people.bath.ac.uk/ais21/nash.jpg (06.01.2008)
[12] Bildquelle: http://images.boardgamegeek.com/images/pic167362_md.jpg (06.01.2008)

Literatur & Links

Tantrix

- Klaus **Quecke**: Tantrix. Deutsche Spielanleitung.
  Bischoffen 2007 (2. Aufl.) <Spiel-Tantrix.de>
- Tantrix international
  url: http://www.tantrix.com/
- Tantrix deutsch
  url: http://www.spiel-tantrix.de/ *oder* url: http://www.tantrix-deutschland.com/ oder url: http://www.tantrix.at/
- wikipedia: Tantrix
  url: http://de.wikipedia.org/wiki/Tantrix
- Jaap **Scherphuis**: Jaap's Puzzle Page - Tantrix
  url: http://www.geocities.com/jaapsch/puzzles/tantrix.htm
- Michael **Gegenwart**: Mathematische Aspekte von Tantrix
  url: http://www.michaelgegenwart.de/spiele/Tantrix/mathe.html
- Daniel **Torre**: Tantrix Download
  url: http://www.danys-downunder.ch/tantrix/ *oder* url: http://www.dtsoftware.ch/tantrix/

Trax

- Klaus **Quecke**: Trax. Deutsche Spielanleitung.
  Bischoffen 2007 (1. Aufl.) <Spiel-Tantrix.de>
- Trax international
  url: http://www.traxgame.com/
- Trax englisch
  url: http://www.traxgame.co.uk/
- Trax deutsch
  url: http://www.spiel-trax.de/

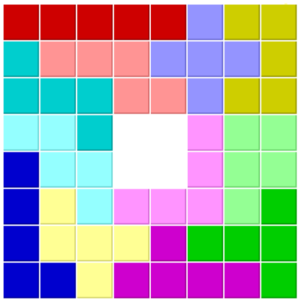
Connections

- Connections Spielanleitung.
  Salzburg o.J. <Stadlbauer>
- spieletest.at: Connections
  url: http://www.spieletest.at/spiel.php?ID=779

Hex

- Martin **Gardner**: Mathematische Rätsel und Probleme.
  Braunschweig, Wiesbaden 1980 (5. Aufl.) <Vieweg>
- Sylvia **Nasar**: Auf den fremden Meeren des Denkens. Das Leben des genialen Mathematikers
  John Nash. München, Zürich 1999 <Piper>
- wikipedia: Hex
  url: http://de.wikipedia.org/wiki/Hex_%28Spiel%29
- ETH Zürich: Hex
  url: http://www.ethbib.ethz.ch/exhibit/mathematik/hex.html
- International Computer Games Association: Hex
  url: http://www.cs.unimaas.nl/ICGA/games/hex/
- lutahnco.net: Hex
  url: http://www.lutanho.net/play/hex.html

Pentomino

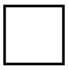


Pentominos bestehen aus 5 Quadraten, die so aneinander gefügt sind, dass sie mindestens eine Seite gemeinsam haben.

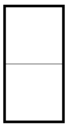
Der Name *Pentomino* wurde erstmals 1954 vom Mathematiker **Solomon Golomb** in einem Artikel der Fachzeitschrift *American Mathematical Monthly* verwendet. Golomb untersuchte Figuren bzw. Gebilde, die aus n kongruenten Quadraten bzw. Würfeln bestehen, die mindestens eine Seite bzw. Fläche gemeinsam haben. Zweidimensionale Figuren aus Quadraten nannte er *Polyominos*, dreidimensionale Gebilde aus Würfeln *Polywürfel* (engl. *Polycubes*).

Wie viele Polyominos aus 1, 2, 3, 4, 5, … Quadraten gibt es, wenn Lösungen, die durch Drehung bzw. Spiegelung aus einander hervorgehen, nur einmal gezählt werden? Es ist keine Formel bekannt, die diese Frage beantwortet - bleibt nur systematisches Probieren …

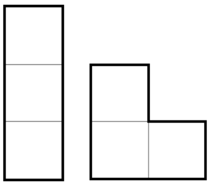
- n = 1 Aus 1 Quadrat lässt sich nur 1 Quadrat bilden, es gibt also 1 Monomino:



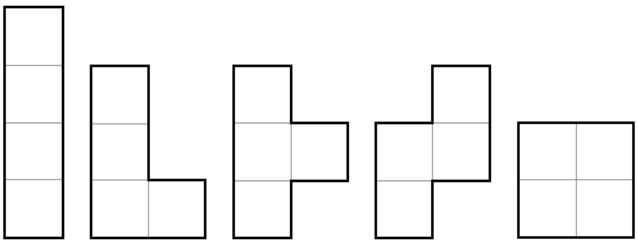
- n = 2 Auch aus 2 Quadraten lässt sich nur 1 Figur bilden - Hoch- oder Querformat spielt ja keine Rolle. Es gibt also 1 Domino, bekannt aus dem gleichnamigen Spiel:



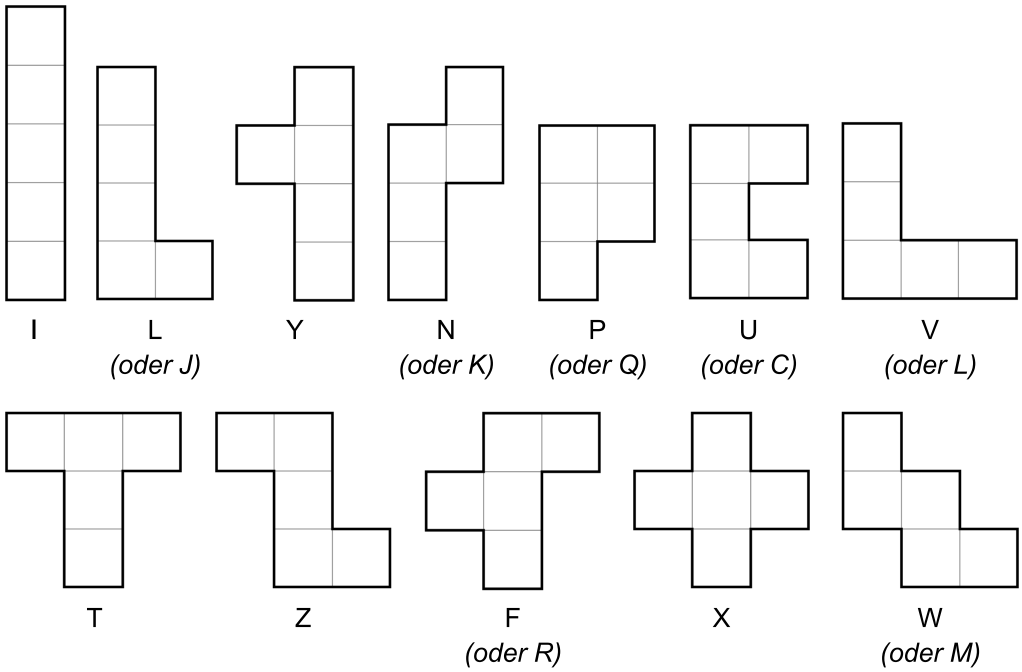
- n = 3 Aus 3 Quadraten lassen sich 2 Triominos bilden - auch Trominos genannt, weil der Name Triomino bereits für ein dominoartiges Spiel mit *dreieckigen* Spielsteinen verwendet wird:



- n = 4 Aus 4 Quadraten lassen sich 5 Tetrominos bilden; diese kommen im Computerspiel Tetris zum Einsatz:

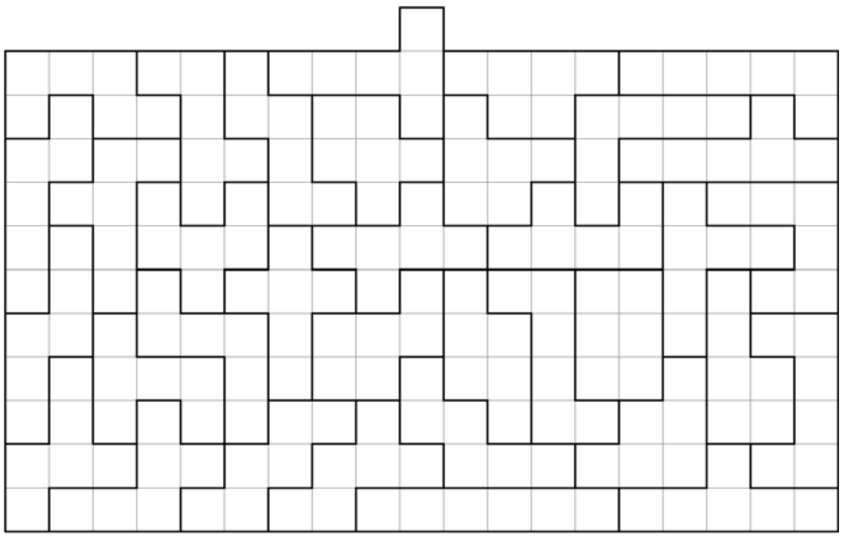


- n = 5 Aus 5 Quadraten lassen sich 12 Pentominos bilden; sie erinnern an Buchstaben unseres Alphabets und werden daher gerne nach diesen benannt (wobei die Zuordnungen nicht eindeutig sind):



Der Name des Erfinders geformt aus seiner Erfindung - eine Idee des Puzzle-Designers Scott Kim Abb. [13]

- n = 6 Aus 6 Quadraten lassen sich 35 Hexominos bilden (11 davon kann man zu einem Würfel falten):



[13] Bildquelle: http://www.scottkim.com/inversions/gallery/images/golomb.gif (12.01.2008)

Fragen

1. Welche der 12 Pentominos kann man zu einer Würfel-Box ohne Deckel falten?

2. Alle Pentominos sind flächengleich. Haben auch alle denselben Umfang?
   - Falls nein: Was ist der kleinste, was der größte Umfang?

3. Ermittle für jedes Pentomino das kleinste Rechteck, das ihm umschrieben werden kann. Wie groß sind die Umfänge bzw. Flächeninhalte dieser Rechtecke?
   - Vergleiche die Rechtecks-Umfänge mit denen der Pentominos. Welche sind gleich groß?

4. Welche Abmessungen hat das kleinste Rechteck, das alle 12 Pentominos aufnehmen kann?
   - Wie viele (und welche) Quadrate dieses Rechtecks kann man wegnehmen, sodass immer noch alle 12 Pentominos hinein passen?

5. Welchen Umfang kann eine Omino-Figur aus 1, 2, 3, …, 12 Pentominos höchstens haben?

Anzahl der Teile	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
U_{max}												

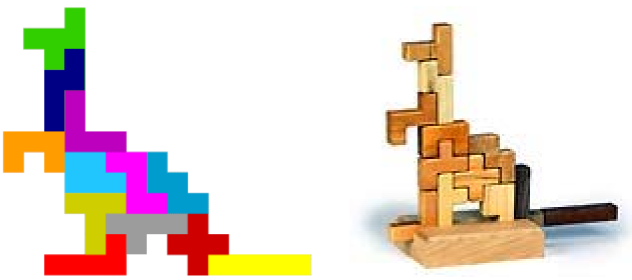
   Wie könnte eine Omino-Figur aus allen 12 Pentominos mit größtmöglichem Umfang aussehen?

6. Was ist die größte von den 12 Pentominos umzäunte Fläche, die du finden kannst?

7. Mit den 12 Pentominos lassen sich verschiedene Rechtecke füllen (ohne Leerräume).
   - Für welche Rechtecke ist das möglich? Versuche entsprechende Lösungen zu finden.
   - Falls es dir nicht gelingt, alle 12 Teile unterzubringen: versuche Rechtecke mit einem Teil der Pentominos zu bauen. Was ist das größte Rechteck, das dir gelingt?

8. Ordne die 12 Pentominos zu einem 5 x 13 Rechteck mit einem Loch in der Mitte, das die Form eines der Pentominos hat.

9. Wähle eines der 12 Pentominos und baue es mit 9 der übrigen 11 in dreifacher Größe nach.



Pentomino - eine Herausforderung für Känguru-Fans Abb. [14]

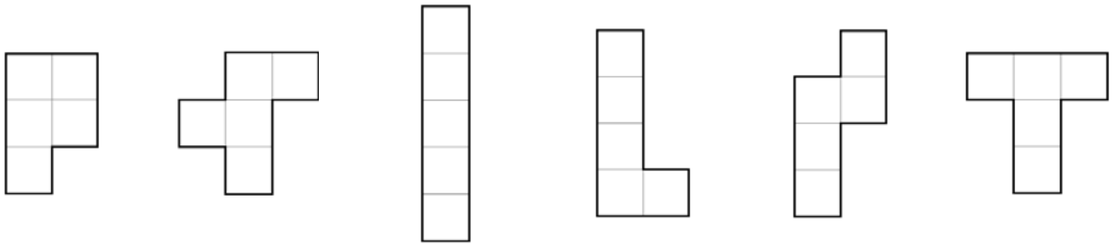
[14] Bildquelle: http://www.passionforpuzzles.com/blog/uploaded_images/pentamino_kangaroo.jpg (07.01.2008)

Antworten

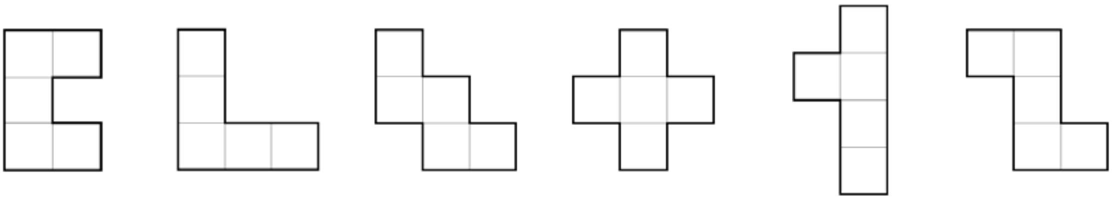
1. Welche der 12 Pentominos kann man zu einer Würfel-Box ohne Deckel falten?

   F, L, N, T, W, X, Y, Z.

2. Alle Pentominos sind flächengleich. Haben auch alle denselben Umfang?
   - Falls nein: Was ist der kleinste, was der größte Umfang?

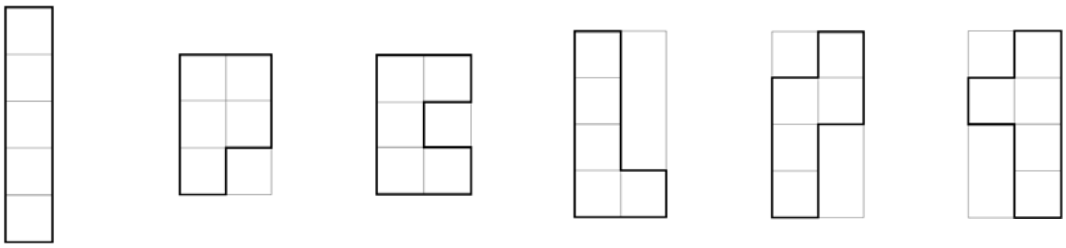


U = 10 U = 12 U = 12 U = 12 U = 12 U = 12

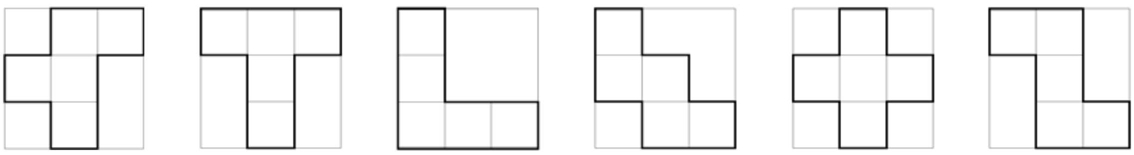


U = 12 U = 12 U = 12 U = 12 U = 12 U = 12

3. Ermittle für jedes Pentomino das kleinste Rechteck, das ihm umschrieben werden kann. Wie groß sind die Umfänge bzw. Flächeninhalte dieser Rechtecke?
   - Vergleiche die Rechtecks-Umfänge mit denen der Pentominos. Welche sind gleich groß?



A = 1·5 = 5	A = 2·3 = 6	A = 2·3 = 6	A = 2·4 = 8	A = 2·4 = 8	A = 2·4 = 8
U = 12	U = 10	U = 10	U = 12	U = 12	U = 12
U = 12	U = 10	U = 12	U = 12	U = 12	U = 12



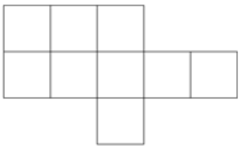
A = 3·3 = 9	A = 3·3 = 9	A = 3·3 = 9	A = 3·3 = 9	A = 3·3 = 9	A = 3·3 = 9
U = 12	U = 12	U = 12	U = 12	U = 12	U = 12
U = 12	U = 12	U = 12	U = 12	U = 12	U = 12

„Einspringende Ecken“ ändern nichts am Umfang, wohl aber „Einbuchtungen“ von Seiten.

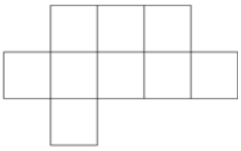
4. Welche Abmessungen hat das kleinste Rechteck, das alle 12 Pentominos aufnehmen kann?
   - Wie viele (und welche) Quadrate dieses Rechtecks kann man höchstens entfernen, sodass immer noch alle 12 Pentominos hinein passen?

   Die Form des Rechtecks ist klar: 5 x 3, denn es kann nicht kürzer sein als 5 (sonst würde das I nicht hinein passen) und nicht schmäler als 3 (sonst würde z.B. das V nicht hinein passen).

   Minimale umschließende Figuren bestehen aus 9 Quadraten, mögliche Lösungen sind



oder

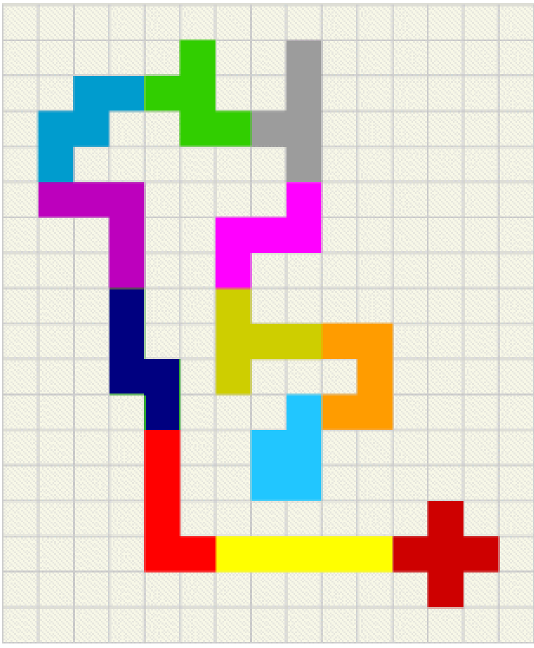


5. Welchen Umfang kann eine Omino-Figur aus 1, 2, 3, …, 12 Pentominos höchstens haben?
   - Wie könnte eine Omino-Figur aus allen 12 Pentominos mit größtmöglichem Umfang aussehen?

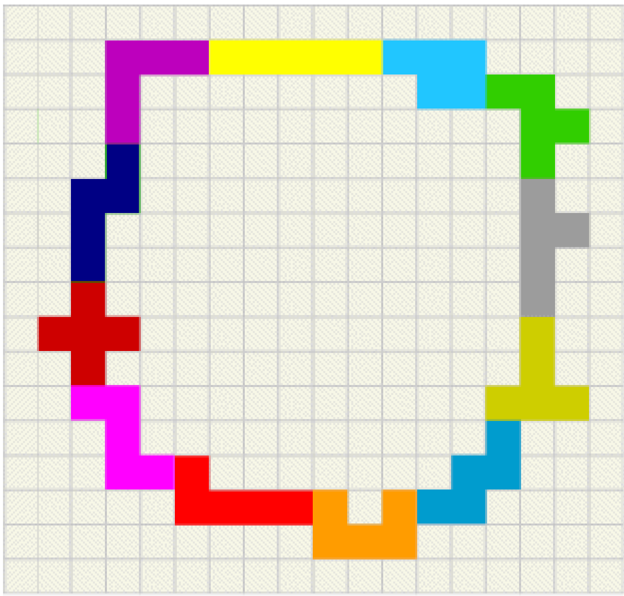
   Man erhält den größtmöglichen Umfang, wenn einander berührende Teile nicht nur mindestens, sondern zugleich auch höchstens (also genau) eine Quadratseite gemeinsam haben.

Anzahl der Teile	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
U_{max}	12	22	32	42	52	62	72	82	92	102	112	120

Beispiel:



6. Was ist die größte von den 12 Pentominos umzäunte Fläche, die du finden kannst?



A = 128

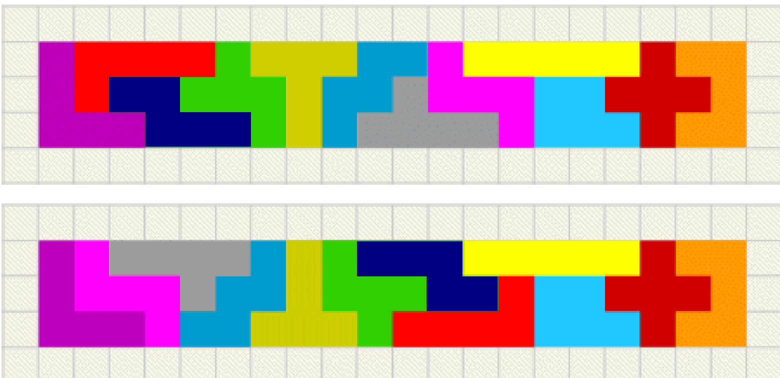
Abb. [15]

Ist 128 die größte überhaupt mögliche umzäunte Fläche?

7. Mit den 12 Pentominos lassen sich verschiedene Rechtecke füllen (ohne Leerräume).
   - Für welche Rechtecke ist das möglich? Versuche entsprechende Lösungen zu finden.
   - Falls es dir nicht gelingt, alle 12 Teile unterzubringen: versuche Rechtecke mit einem Teil der Pentominos zu bauen. Was ist das größte Rechteck, das dir gelingt?

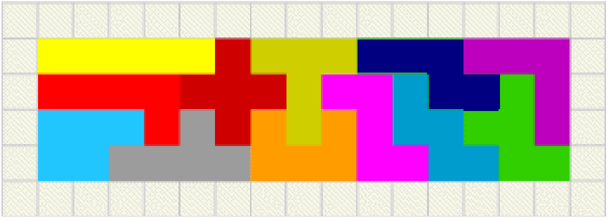
Die 12 Pentominos haben eine Gesamtfläche von $12 \cdot 5 = 60$ - eine Zahl, die viele Teiler hat. Möglich sind Rechtecke mit den Abmessungen 3 x 20, 4 x 15, 5 x 12 und 6 x 10; je schlanker das Rechteck, desto schwieriger ist es, eine Lösung zu finden. Lösungen, die durch Drehung bzw. Spiegelung aus einander hervorgehen, werden nur einmal gezählt.

Beispiele:

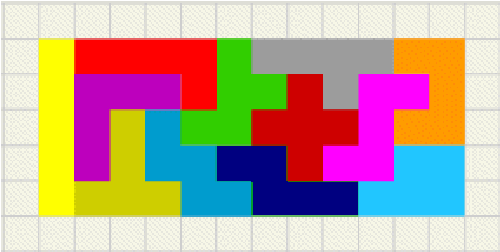


3 x 20: 2 Lösungen

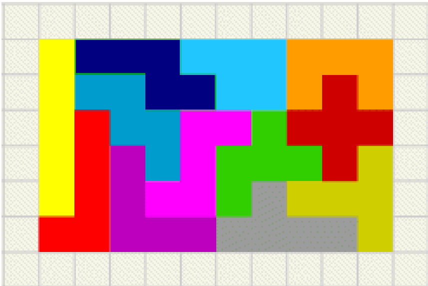
[15] Bildquelle: http://www.paulkidby.com/images/badges/pp3594.jpg (04.01.2008)



4 x 15: 368 Lösungen



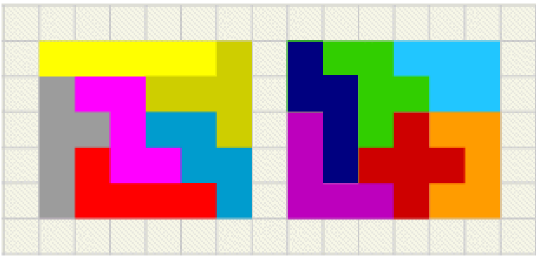
5 x 12: 1010 Lösungen



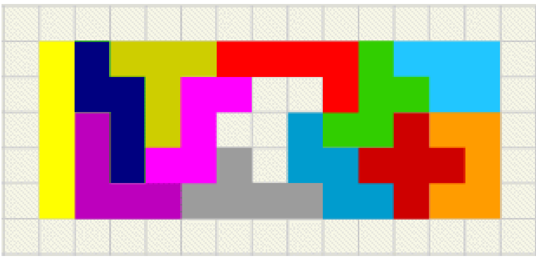
6 x 10: 2339 Lösungen

8. Ordne die 12 Pentominos zu einem 5 x 13 Rechteck mit einem Loch in der Mitte, das die Form eines der Pentominos hat.

   Beispiele:



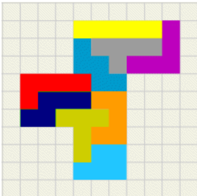
16 Lösungen



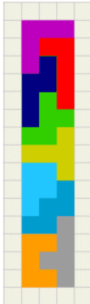
78 Lösungen

9. Wähle eines der 12 Pentominos und baue es mit 9 der übrigen 11 in dreifacher Größe nach.

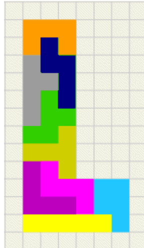
Beispiele:



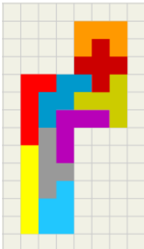
F: 125 Lösungen



I: 19 Lösungen

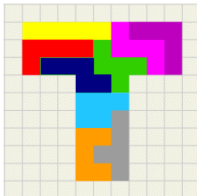


L: 113 Lösungen

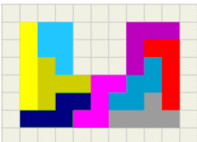


N: 68 Lösungen

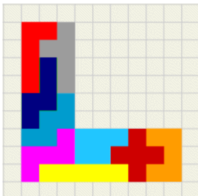
P: 497 Lösungen



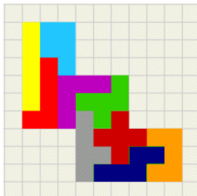
T: 106 Lösungen



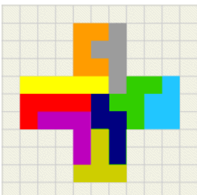
U: 48 Lösungen



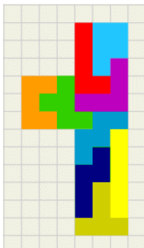
V: 63 Lösungen



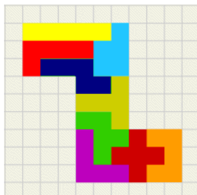
W: 91 Lösungen



X: 15 Lösungen



Y: 86 Lösungen



Z: 131 Lösungen

„Pentominos beschreiben Unendlichkeit. Jedes Pentomino kann aus neun verschiedenen Pentominos zusammengesetzt werden, die dreimal kleiner sind. Jedes dieser kleineren Pentominos kann aus neun noch kleineren gebaut werden. Und so weiter. Unendliche Regression und Fraktale entstehen. … Pentominos sind nicht nur die Teile eines speziellen Puzzle-Spiels, sondern auch ein Alphabet für die Komposition logisch vollständiger Texte, in denen Mehrdeutigkeit, Paradoxa und Unendlichkeit ausgedrückt werden können“ [16]

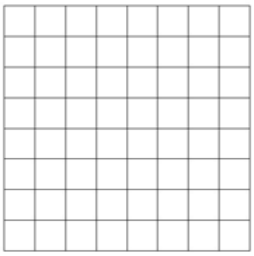
[16] Günter **Albrecht-Bühler**: Die Pentomino-Werkstatt. Ein Kochbuch neuer geometrischer Muster für logische Denker und Rätselfreunde. Frankfurt am Main 1992 <Fischer>. S 10 / S 9.

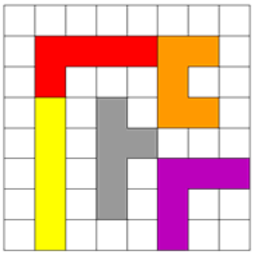
Spiele

Pentomino ist nicht nur ein Puzzle, es kann auch als Spiel für 2 bis 4 Personen gespielt werden. Außerdem bieten noch eine Reihe weiterer Spiele mit Polyomino-Steinen interessante Herausforderungen.

Pentomino - 2 Spieler

Als Spielfeld dient üblicherweise ein schachbrettartiges 8 x 8 Raster.





Vorbereitung

- Lege die 12 Pentominos gut sichtbar neben das Spielfeld.

Spiel

- Spieler 1 und 2 wählen abwechselnd ein Pentomino aus dem Vorrat und legen es auf einen freien Platz des Spielfelds. Jeder Stein bedeckt dabei 5 Quadrate, schräge Lagen sind verboten.
- Wer kein Pentomino mehr legen kann, hat verloren.

Bereits 5 Teile können ein 8 x 8 Feld so blockieren, dass kein weiteres Pentomino mehr Platz hat (siehe oben). Ein Spiel dauert daher mindestens 5 und höchstens 12 Züge.

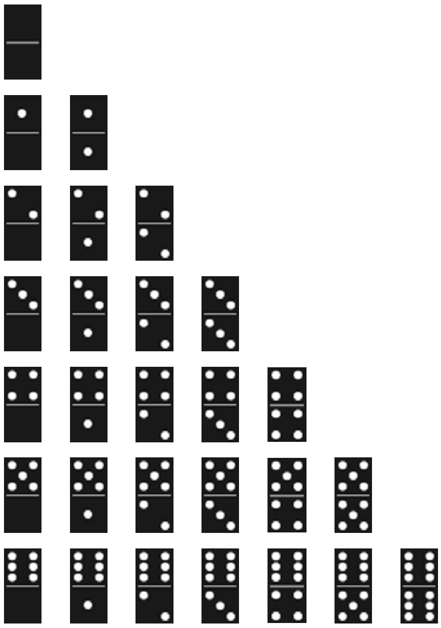
Mit denselben Regeln kann das Spiel auch von 3 oder 4 Spielern gespielt werden. Eventuell kann man vor dem Spiel die Pentominos unter den Spielern aufteilen; als alternatives Spielfeld kann auch ein größeres Raster dienen, z.B. 11 x 11 mit einem Loch in der Mitte.

Solomon W. Golomb Abb. [17]

[17] Bildquelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/64/Solomon_W._Golomb.jpg/180px-Solomon_W._Golomb.jpg (09.01.2008)

Domino

Domino ist ein weit verbreitetes Spiel in vielen Versionen. Seine Regeln, aber auch die Anzahl und Gestaltung der Spielsteine können sich erheblich unterscheiden. In den USA und in Lateinamerika sind Domino-Steine mit bis zu 18 Punkten in Gebrauch, in China enthalten Domino-Steine meist keine Felder mit 0 Punkten. Das bei uns übliche Sechser-Domino enthält die Steine [0 | 0], [1 | 0], [1 | 1], [2 | 0], [2 | 1], [2 | 2], …, [6 | 6]. Abgesehen von der 0 erinnern die Zahlen an die Augen eines Würfels; jede Zahl kommt auf genau 7 Steinen vor - damit lässt sich überlegen, welche Steine noch beim Gegner bzw. im Vorrat sind.



größte Zahl 0: 1 Stein

größte Zahl 1: 2 Steine

größte Zahl 2: 3 Steine

…

größte Zahl 6: 7 Steine

Die Anzahl der Steine eines Spiels kann man durch Abzählen ermitteln oder mit der Methode von Gauß berechnen: Ist n die höchste Punktezahl des Spiels, dann enthält es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Steine. Allgemein kommt jede Punktezahl auf genau (n + 1) Steinen vor, einmal allerdings doppelt. Die Gesamtsumme aller Punkte beträgt daher

$$(n+2)\cdot 0 + (n+2)\cdot 1 + \cdots + (n+2)\cdot n = (n+2)\cdot(0+1+\cdots+n) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Mit anderen Worten: Die Gesamtsumme aller Punkte erhält man durch Multiplikation des höchsten Wertes n mit der Anzahl der Steine.

Die Herkunft des Spiels ist nicht bekannt; vermutlich hat es chinesische Wurzeln und erreichte Europa bereits mit **Marco Polo** (1254 - 1323). Der Name erinnert an Kirchenlatein: *Domino* war ursprünglich die Bezeichnung der Kapuzenkrägen Geistlicher. Eine Legende (ist sie nicht wahr, so ist sie gut erfunden) berichtet von spielenden Mönchen, die ihr Tun vor dem Abt verbergen wollten. Immer wenn dieser an der Zelle lauschte, begannen sie laut ein Gebet zu sprechen, und zwar Psalm 110:

So spricht der Herr zu meinem Herrn: setze dich mir zur Rechten, und ich lege dir meine Feinde als Schemel unter die Füße.

Natürlich sprachen sie kein Deutsch, sondern Latein:

Dixit Dominus Domino meo: Sede a dextris meis, …

Der Abt ging aber bereits nach den ersten Worten weiter und die Mönche brachen ihr „Gebet“ ab. Nachdem diese Täuschung einige Male geglückt war, nannten sie das Spiel Domino.

Domino - 2 Spieler

Vorbereitung

- Jeder Spieler erhält 8 Domino-Steine und stellt sie vor sich auf. Sie sollen für den Gegner nicht einsehbar sein. Die übrigen Steine liegen verdeckt am Tisch und bilden den Vorrat.

Spiel

- Je nach Vereinbarung eröffnet der Spieler, der den höchsten Doppelstein („Pasch“) besitzt, oder Spieler 1 eröffnet mit einem beliebigen Stein seiner Wahl.
- Ein Spieler bleibt an der Reihe, solange er Steine passend an ein freies Ende der Domino-Schlange anlegen kann. Nur gleiche Augenzahlen dürfen einander berühren.
- Kann ein Spieler keinen seiner Steine anlegen, muss er einen neuen Stein bzw. maximal zwei Steine aus dem Vorrat ziehen.

Ziel

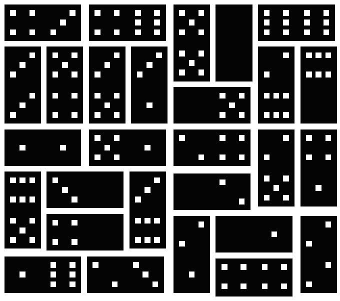
- Gewinner ist der Spieler, der zuerst alle seine Steine unterbringen kann. Er bekommt die Gesamt-Punktezahl der Reststeine seines Gegners gutgeschrieben.

Mit diesen oder ähnlichen Regeln kann das Spiel auch von mehreren Spielern gespielt werden.

Domino-Puzzle

Lege das gegebene Zahlenmuster mit den Steinen eines Sechser-Dominos:

4	3	4	6	5	0	6	6
3	5	3	3	5	0	2	6
3	4	5	1	0	5	6	0
1	1	5	1	2	4	2	4
6	3	0	3	0	2	5	1
5	4	0	6	2	0	1	2
1	6	2	3	1	4	4	2



Entsprechende Aufgaben und Lösungen findet man z.B. auf den Seiten von Angela und Otto Janko (url: http://www.janko.at/Raetsel/Dominos/index.htm).

Domino Day

Ein Domino-Spiel ganz anderer Art ist das Umkippen einer Reihe aufgestellter Dominosteine …

Robin Paul Weijers Abb. [18] Vorbereitung des Domino Day 2006 Abb. [19]

[18] Bildquelle: http://bilder.rtl.de/p2/2006-11/2418718/2415298.jpg (10.01.2008)
[19] Bildquelle: http://www.derwesten.de/static/nachrichten/352/11953066223160/50135442_13418264_widescreen.jpg (10.01.2008)

Tetris

Tetris ist nicht das älteste, aber wahrscheinlich das bekannteste und erfolgreichste Computerspiel, eines der wenigen Spiele übrigens, das bei Frauen und Männern gleichermaßen beliebt ist. Tetris bzw. Тетрис wurde 1985 vom Russen **Alexej Leonidowitsch Paschitnow** [Алексей Леонидович Пажитнов] entwickelt und ist in unzähligen Varianten erhältlich, auch als 3D-Version.

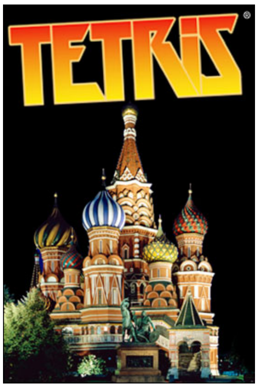
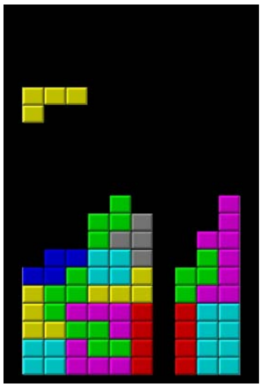


Abb. [20]

Alexej Paschitnow Abb. [21]



Die Aufgabe des Spielers besteht darin, herunterfallende Steine zu drehen und schließlich so zu platzieren, dass möglichst lückenlose Rehen entstehen. Vollständig gefüllte Zeilen verschwinden.

In der Abbildung oben rechts sind alle Steine zu sehen ist, die Tetris verwendet. Wie viele sind es - und stimmt die Zahl mit der Anzahl der Tetrominos überein?

- Tetris verwendet 7 Steine, also scheinbar 2 Tetrominos mehr, als es gibt …

  Die 2 zusätzlichen Steine sind erforderlich, weil Tetris-Spielsteine nur gedreht aber nicht umgedreht bzw. gespiegelt werden können.

Offenbar lassen sich auch Architekten, Designer und Künstler von Tetris inspirieren:

Tetris Apartments in Ljubljana (Ofis Architekti) Abb. [22]

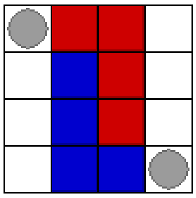
Regalwand aus Tetris-Blöcken (Brave Space Design) Abb. [23]

Street Art in Melbourne (Wooster Collective) Abb. [24]

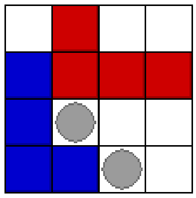
[20] Bildquelle: http://cache.kotaku.com/gaming/tetris_score_v1.jpg (10.01.2008)
[21] Bildquelle: http://crooner.podomatic.com/2006-04-24T05_10_46-07_00.jpg (18.01.2008)
[22] Bildquelle: http://freshome.com/wp-content/uploads/2007/10/tetris-apartments.jpg (10.01.2008)
[23] Bildquelle: http://purecontemporary.blogs.com/photos/uncategorized/bs_tetris_1_1.jpg (10.01.2008)
[24] Bildquelle: http://www.woostercollective.com/images/2006/07/cratetetris0.jpg (10.01.2008)

L - 2 Spieler

L wurde vom Briten **Edward de Bono** (geboren 1933 auf Malta) entwickelt und erstmals 1968 in seinem Buch *The Five-Day Course in Thinking*, deutscher Titel: *In 15 Tagen Denken lernen* vorgestellt. Das Spiel wird auf einem 4 x 4 Raster mit zwei L-Tetrominos und zwei neutralen Monominos gespielt.



Ausgangsposition



rot gewinnt

Vorbereitung

- Spieler 1 und 2 entscheiden sich für ihre Farbe und bringen ihre Spielsteine sowie die zwei neutralen Steine in Startposition (siehe Abbildung oben links).

Spiel

- Spieler 1 bringt seinen L-Stein in eine neue Lage - mindestens 1 bisher leeres Feld muss dabei bedeckt werden; der Stein darf dabei sowohl gedreht als auch umgedreht werden. Im Anschluss daran kann er einen der neutralen Steine auf ein neues Feld setzen oder auf diesen zweiten Teil seines Spielzugs verzichten. Es folgt Spieler 2 usw.

Ziel

- Wer zuerst seinen L-Stein nicht mehr bewegen kann, hat verloren.

Edward de Bono Abb. [25]

[25] Bildquelle: http://home.um.edu.mt/create/images/edebono2.gif (18.01.2008)

Literatur & Links

Pentomino

- Günter **Albrecht-Bühler**: Die Pentomino-Werkstatt. Ein Kochbuch neuer geometrischer Muster für logische Denker und Rätselfreunde. Frankfurt am Main 1992 <Fischer>.
- Blue **Balliett**: Das Pentomino-Orakel.
Frankfurt am Main 2005 <Fischer>.
- Blue **Balliett**: Das Schattenhaus.
Frankfurt am Main 2006 <Fischer>.
- Arthur C. **Clarke**: Makenzie kehrt zur Erde heim.
München 1979 <Heyne>.
- Martin **Gardner**: Mathematische Hexereien. Denksportaufgaben, Kunststücke, Rätsel, Spiele, mathematische Zauberei. Berlin, Frankfurt am Main, Wien 1979 <Ullstein>.
- Hugo **Kastner**: Die Fundgrube für Denksport und Rätsel in der Sekundarstufe I und II.
Berlin 2004 <Cornelsen>.
- Maria **Koth**, Notburga **Grosser**: Das Pentomino-Buch. Denkspielspaß für Kinder von 9 bis 99.
Köln 2004 <Aulis Verlag Deubner>.
- Gilbert **Obermair**: Papierspielereien. Über 250 spannende und entspannende Knobeleien.
München 1978 <Heyne>.
- wikipedia: Pentomino
url: http://de.wikipedia.org/wiki/Pentomino
- Jürgen **Köller**: mathematische-basteleien.de - Pentomino
url: http://www.mathematische-basteleien.de/pentomino.htm
- Franz **Embacher**: Pentomino online Puzzle
url: http://www.mathe-online.at/materialien/Franz.Embacher/files/Pentominos/
- eix.de: Pentomino online Puzzle
url: http://www.eix.de/
- gamecraft.de: Pentomino online Puzzle
url: http://www.gamecraft.de/pentomino/
- David J. **Eck**: Pentomino Solver
url: http://godel.hws.edu/java/pent1.html
- mathematik.ch: Pentomino Solver
url: http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/pento/
- Gerard **Putter**: Pentomino Solver
url: http://www.xs4all.nl/~gp/PolyominoSolver/Polyomino.html
- Eithan **Samara**: Pentomino Solver 3D
url: http://www.panda.co.il/eithan/pento/Pentominoes3D.html
- ETH Zürich: Polyominos
url: http://www.ethbib.ethz.ch/exhibit/mathematik/polyomino.html

Pentomino-Belletristik

Domino

- Bernward **Thole**, Tom **Werneck**: Spiel + Spaß mit Domino.
  München 1986 <Humboldt>.
- wikipedia: Domino
  url: http://de.wikipedia.org/wiki/Domino_(Spiel) *sowie* url: http://de.wikipedia.org/wiki/Domino_Day
- Fédération Internationale de Domino: Domino
  url: http://www.dominospiel.de/index.php
- Angela und Otto **Janko**: Domino-Puzzles
  url: http://www.janko.at/Raetsel/Dominos/index.htm
- Jörg **Schröder**: Domino-Puzzles
  url: http://www.computer-schroeder.de/domipuzz.htm

Tetris

- wikipedia: Tetris
  url: http://de.wikipedia.org/wiki/Tetris
- Kristen **Arnesen**: Tetris Download
  url: http://www.kristen-arnesen.com/downloads/TETRIS.zip

L

- wikipedia: L-Spiel
  url: http://de.wikipedia.org/wiki/L-Spiel

Der Autor in angemessener Kleidung: 3 x 20 Pentomino

Lösung 1/2

Lösung 2/2

Quarto

Abb. [26]

Quarto kombiniert die Idee von *4 gewinnt* mit der Suche nach Mustern. Zwar enthält das Original 3D-Spielfiguren aus Holz, doch können diese durch einfache Spielkarten ersetzt werden, ohne die Spielidee zu beeinträchtigen. Quarto wurde erstmals 1991 in Frankreich veröffentlicht; das Spiel beruht auf einer Idee des Schweizers **Blaise Müller**.

Quarto wird auf einem 4 x 4 Raster mit 16 verschiedenen Steinen gespielt. Jeder Stein hat 4 Merkmale - Farbe, Form, Größe und Füllung - in zwei Ausprägungen. Gewinner ist der Spieler, der zuerst eine Reihe aus 4 Steinen mit gleicher Merkmalsausprägung zustande bringt.

Quarto - 2 Spieler

Vorbereitung

- Lege alle Spielfiguren gut sichtbar neben das Spielfeld.

Spiel

- Spieler 1 wählt einen Stein und gibt ihn Spieler 2, dieser setzt den Stein auf ein freies Feld. Spieler 2 wählt den nächsten Stein, gibt ihn Spieler 1 usw.

Ziel

- Gewinner ist der Spieler, der zuerst eine Reihe aus 4 Steinen mit gleicher Merkmalsausprägung zustande bringt:
  - 4 x rot oder 4 x blau (bzw. 4 x hell oder 4 x dunkel oder ähnliches)
  - 4 x Kreis oder 4 x Quadrat
  - 4 x groß oder 4 x klein
  - 4 x voll oder 4 x Loch
- Erkennt ein Spieler nicht, dass er bereits gewonnen hat und gibt seinem Gegner einen weitern Stein, so gewinnt dieser, indem er auf die bestehende Vierer-Reihe hinweist.
- Erkennt auch der Gegner die bestehende Vierer-Reihe nicht, so verliert diese ihren Wert und das Spiel wird fortgesetzt.

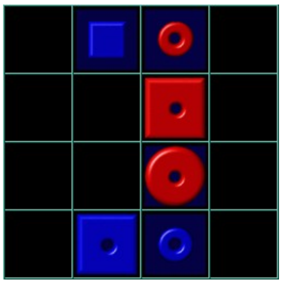
Blaise Müller Abb. [27]

[26] Bildquelle: http://www.spieletest.at/pics/spiel/765/quarto2.jpg (17.01.2008)
[27] Bildquelle: http://www.spieletest.at/pics/autor/Muller-Blaise.jpg (19.01.2008)

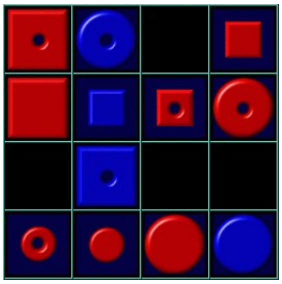
Fragen

1. Wie viele verschiedene Spielsteine mit 4 Merkmalen in 2 Ausprägungen gibt es? Werden alle möglichen Varianten im Spiel verwendet?

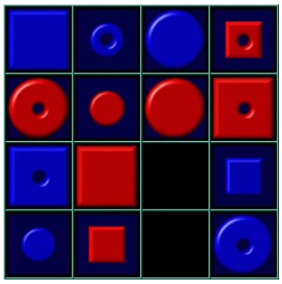
2. Betrachte die folgenden Spielsituationen. Wer hat gewonnen?



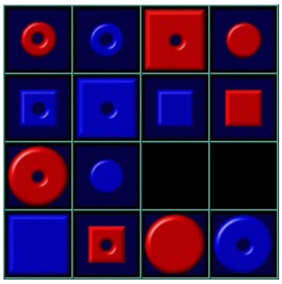
A



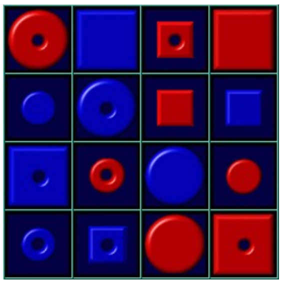
B



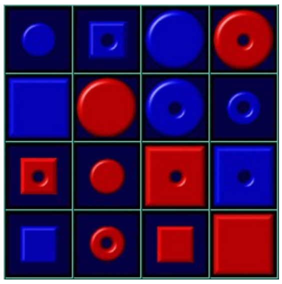
C



D



E



F

3. Angenommen, die 16 Felder des Rasters sind durchnummeriert und das Spielfeld wird gedreht bzw. gespiegelt. Wie ändert sich die Nummerierung?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Ausgangsposition

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

Rechtsdrehung 90°

Rechtsdrehung 180°

Rechtsdrehung 270°

Spiegelung —

Spiegelung |

Spiegelung /

Spiegelung \

4. Auf wie viele Arten können die 16 Spielsteine auf den 16 Feldern platziert werden, wenn Stellungen, die durch Drehung bzw. Spiegelung aus einander hervorgehen, nur einmal gezählt werden?

Antworten

1. Wie viele verschiedene Spielsteine mit 4 Merkmalen in 2 Ausprägungen gibt es? Werden alle möglichen Varianten im Spiel verwendet?

   Merkmal 1 kann auf 2 Arten gewählt werden, für jede dieser Möglichkeiten kann auch Merkmal 2 auf 2 Arten gewählt werden usw. Insgesamt gibt es daher $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ Möglichkeiten, die alle im Spiel verwendet werden.

2. Betrachte die folgenden Spielsituationen. Wer hat gewonnen?

   A: 4 x Loch (Spalte 3)
   B: 4 x Kreis (Zeile 4)
   C: 4 x rot (Zeile 2)
   D: 4 x Quadrat (Zeile 2) und 4 x voll (Diagonale)
   E: 4 x groß (Diagonale)
   F: unentschieden

3. Angenommen, die 16 Felder des Rasters sind durchnummeriert und das Spielfeld wird gedreht bzw. gespiegelt. Wie ändert sich die Nummerierung?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Ausgangsposition

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

Rechtsdrehung 90°

16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

Rechtsdrehung 180°

4	8	12	16
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

Rechtsdrehung 270°

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Spiegelung —

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
16	15	14	13

Spiegelung |

16	12	8	4
15	11	7	3
14	10	6	2
13	9	5	1

Spiegelung /

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

Spiegelung \

4. Auf wie viele Arten können die 16 Spielsteine auf den 16 Feldern platziert werden, wenn Stellungen, die durch Drehung bzw. Spiegelung aus einander hervorgehen, nur einmal gezählt werden?

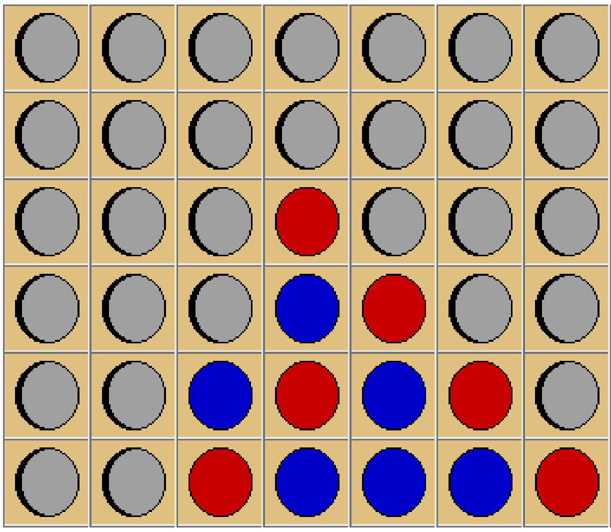
   Feld 1 kann auf 16 Arten gewählt werden, für jede dieser Möglichkeiten kann Feld 2 auf 15 Arten gewählt werden usw. Insgesamt gibt es daher zunächst $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 16!$ Möglichkeiten, die Felder zu besetzen. Da aber aufgrund von Drehung bzw. Spiegelung je 8 Besetzungen nur einmal gezählt werden, reduziert sich die Anzahl auf $16!/8$ - immer noch eine unglaublich große Zahl: es gibt $16!/8 = 2\,615\,348\,736\,000$ Platzierungsmöglichkeiten.

   Weitere Drehungen oder Spiegelungen bereits gedrehter oder gespiegelter Quadrate spielen übrigens keine Rolle: man bleibt stets innerhalb derselben *Symmetriegruppe*.

Spiele

Vier gewinnt - 2 Spieler

Vier gewinnt wurde 1974 von MB-Spiele - benannt nach dem Firmengründer Milton Bradley (1836 - 1911) - veröffentlicht. Üblicherweise ist das Spielfeld ein aufrecht stehendes 6 x 7 Raster.



Vorbereitung

- Spieler 1 und 2 entscheiden sich für ihre Farbe.

Spiel

- Spieler 1 und 2 werfen abwechselnd einen Stein ihrer Farbe von oben in eine Spalte, die noch nicht vollständig gefüllt ist.

Ziel

- Gewinner ist der Spieler, der zuerst eine durchgehende Reihe (Zeile, Spalte oder Diagonale) mit mindestens 4 Steinen der eigenen Farbe zustande bringt.

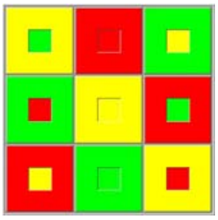
Vier gewinnt lässt sich auch als 3D-Version umsetzen.

Abb. [28]

[28] Bildquelle: http://siebenschoen-berlin.com/imgs/raummuehle-1.jpg (20.01.2008)

Euler'sche Quadrate

Die Felder eines n x n Rasters sind mit n Farben so einzufärben, dass jede Zeile und jede Spalte jede Farbe genau einmal enthält. Diese Regel gilt sowohl für das Innere als auch für den Rand der Felder. Außerdem darf jede Kombination von Innen- und Außenfarbe nur einmal vorkommen.



Aα	Bγ	Cβ
Bβ	Cα	Aγ
Cγ	Aβ	Bα

Derart gefärbte Quadrate sind nach **Leonhard Euler** (1707 - 1783) benannt. Sie heißen auch griechisch-lateinische Quadrate, weil Euler anstelle von Innen- und Außenfarbe griechische und lateinische Buchstaben verwendete.

Die Legende (ist sie nicht wahr, so ist sie gut erfunden) berichtet von einer Anfrage, die Zarin Katharina die Große an Euler richtete. Für einen Ball sollte jedes der sechs anwesenden Regimenter jeweils sechs Offiziere abstellen, wobei außerdem jeder der sechs üblichen Dienstgrade vertreten sein musste. Diese 36 Offiziere sollten in einem Quadrat Aufstellung nehmen, und zwar so, dass in jeder Zeile und Spalte sowohl jedes Regiment als auch jeder Dienstgrad vorkommt.

Euler fand Lösungen für Quadrate der Seitenlänge n = 3, 4, 5, 7, 8, 9 sowie für beliebige ungerade n und durch 4 teilbare n, aber nicht für n = 6. Er vermutete, dass es in diesem Fall und allgemein für n mod 4 = 2 keine Lösung gibt. 1901 wurde seine Vermutung für n = 6 von **Gaston Tarry** (1843 - 1913) durch systematisches Probieren bestätigt, 1959 konnten allerdings **Raj Chandra Bose** (1901 - 1987) und sein Student **Sharadchankar Shankar Shrikhande** (*1917) gemeinsam mit **Ernest Tilden Parker** zeigen, dass die Vermutung für n > 6 falsch ist. Es gibt Lösungen für alle natürlichen Zahlen außer 2 und 6.

Leonhard Euler Abb. [29]

[29] Bildquelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f1/Leonhard_Euler_by_Handmann_.png (20.01.2008)

Sudoku

Die Felder eines 9 x 9 Rasters enthalten einige vorgegebene Zahlen. Die übrigen Felder sind so zu füllen, dass jede Zeile, jede Spalte und jeder 3 x 3 Block die Zahlen 1 bis 9 genau einmal enthält. *Gute* Sudokus sind eindeutig lösbar.

	6	5						8
7			8	6		4		
				2				9
	4				1			2
			2		7			
3			5				7	
4				5				
		1		7	9			3
9						2	6	

Aufgabe

2	**6**	**5**	1	9	4	7	3	**8**
7	3	9	**8**	**6**	5	**4**	2	1
8	1	4	7	**2**	3	6	5	**9**
6	**4**	7	9	3	**1**	5	8	**2**
1	5	8	**2**	4	**7**	3	9	6
3	9	2	**5**	8	6	1	**7**	4
4	8	6	3	**5**	2	9	1	7
5	2	**1**	6	**7**	**9**	8	4	**3**
9	7	3	4	1	8	**2**	**6**	5

Lösung

Der Name *Sudoku* - 数独 - ist japanisch und bedeutet in etwa „allein stehende Zahl“. Die Rätsel selbst wurden in der heute üblichen Form erstmals 1979 von **Howard Garns** in der Zeitschrift *Dell Pencil Puzzles & Word Games* in den USA unter der Bezeichnung *Number Place* publiziert, begannen ihren weltweiten Siegeszug aber erst nach der Veröffentlichung in der japanischen Zeitschrift *Nikoli* unter dem Namen *Sūji wa dokushin ni kagiru* - „alle Zahlen müssen einmal vorkommen“ - und ihrer Wiederentdeckung durch den Neuseeländer **Wayne Gould**. Er entwickelte eine Software für die Erstellung von Sudokus und verkaufte die Ergebnisse an die Londoner *Times*.

Mittlerweile gibt es viele Sudoku-Varianten mit anderen Feldgrößen, anderen Symbolen (Buchstaben, Bilder, Farben), anderen Blockformen - eventuell durch Farben gekennzeichnet - oder auch Sudokus mit Überlappungen einzelner Blöcke. Die gemeinsame Wurzel aller Sudokus bilden aber die Euler'schen Quadrate, wobei man auf die Trennung von Innen- und Außenfarbe zugunsten der Blockregel verzichtet.

Nach **Frazer Jarvis**, **Bertram Felgenhauer** und **Ed Russell** ist die Anzahl möglicher 9 x 9 Sudokus

$$9! \cdot 72^2 \cdot 2^7 \cdot 27704267971 = 6670903752021072936960$$

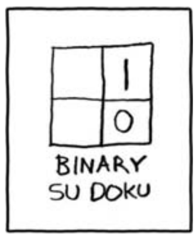
5472730538 davon sind unter Berücksichtigung von Symmetrien echt verschieden.

Sudokus lassen sich auch als 3D-Version und in vielen anderen Varianten umsetzen …

Sudoku-Würfel Abb. [30]

Bierdeckel Abb. [31]

Toilettenpapier Abb. [32]



„Das kann ich auch“ Abb. [33]

[30] Bildquelle: http://www.myselect.de/catalog/images/d709_sodoku.jpg (21.01.2008)
[31] Bildquelle: http://www.brettspiel-blog.de/archiv/upload/2007/08/sudoku-auf-einem-bierdeckel.jpg (21.01.2008)
[32] Bildquelle: http://www.glaubdes.net/gdn-images/sudokutoilettenpapier.jpg (21.01.2008)
[33] Bildquelle: http://thomas-matterne.de/uploads/sudoku.jpg (21.01.2008)

Literatur & Links

Quarto

- Quarto! Spielanleitung.
  Boulogne sur Mer 1991 <Gigamic>
- wikipedia: Quarto!
  url: http://de.wikipedia.org/wiki/Quarto!
- lutahnco.net: Quarto
  url: http://www.lutanho.net/play/quarto.html

Vier gewinnt

- wikipedia: Vier gewinnt
  url: http://de.wikipedia.org/wiki/Vier_gewinnt
- lutahnco.net: Vier gewinnt
  url: http://www.lutanho.net/play/connect4.html
- mustrum.de: Vier gewinnt Download
  url: http://www.mustrum.de/mustrum.html

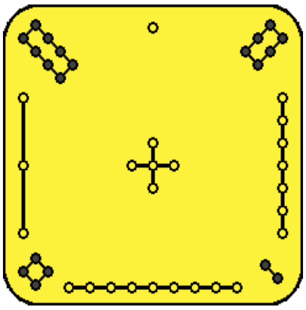
Euler'sche Quadrate

- Matroids Matheplanet: Euler'sche Quadrate
  url: http://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=214
- Spektrum der Wissenschaft: Euler'sche Quadrate
  url: http://www.spektrumverlag.de/blatt/d_sdwv_euler

Sudoku

- wikipedia: Sudoku
  url: http://de.wikipedia.org/wiki/Sudoku
- Frazer **Jarvis**: Sudoku enumeration problems
  url: http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/
- Angus **Johnson**: Simple Sudoku Download
  url: http://az-web.softonic.de/file.phtml?&id_file=42808&action=view&view=downloads
- Helmut **Schattenkirchner**: Sudoku Print Machine Download
  url: http://www.freeware-archiv.de/SuPriMaSudokuPrintMachine-Spiele.htm
- Martin **Schreiber**: Sudoku Generator Download
  url: http://www.shareware.de/software/Programm_SuDoKu_Generator_22117.html

Magische Quadrate



Magische Quadrate sind n x n Raster, die nach einem speziellen Schema mit Zahlen gefüllt werden: Addiert man die Zahlen einer beliebigen Zeile, Spalte oder Diagonale, so erhält man stets dieselbe Summe.

Das älteste bekannte magische Quadrat (siehe Abb. links) ist nach dem chinesischen Kaiser **Lo-Shu** benannt und stammt aus der Zeit um 2800 v. Chr. Hier werden ungerade Zahlen durch weiße und gerade Zahlen durch schwarze Punkte dargestellt, die man als Yang und Yin interpretieren kann, d.h. als Symbole für Himmel und Erde oder Mann und Frau.

Eine andere bekannte Darstellung eines magischen Quadrats ist auf dem Kupferstich *Melencolia I* von **Albrecht Dürer** (1471 - 1528) zu finden. In den mittleren Feldern der untersten Zeile ist das Entstehungsjahr 1514 angegeben.

Melencolia I Abb. [34]

Sagrada Familia Abb. [35]

Das Lo-Shu hat *ungerade Ordnung* (n = 3), Dürers Quadrat hat *gerade Ordnung* (n = 4). Beide beachten die Gepflogenheit, magische Quadrate mit den Zahlen 1, 2, 3, …, n^2 zu füllen. **Antonio Gaudí y Cornet** (1852 - 1926) dagegen brachte an der Fassade der Kathedrale *Sagrada Familia* in Barcelona ein magisches Quadrat an, das die Zahlen 10 und 14 doppelt und dafür 12 und 16 gar nicht enthält; es liefert dadurch die *magische Konstante* 33, die Lebenszeit Jesu.

- Warum werden üblicherweise nicht beliebige Zahlen, sondern 1, 2, 3, …, n^2, also die natürlichen Zahlen in aufsteigender Reihenfolge verwendet? Kann man überhaupt beliebige Zahlen verwenden?

Die Antwort hängt mit der magischen Konstanten zusammen; diese lässt sich aus den verwendeten Zahlen bestimmen, ohne ihre Anordnung zu kennen. Betrachten wir z.B. das Lo-Shu, das die Zahlen 1, 2, 3, …, 9 enthält: Jede der 3 Zeilen (oder Spalten) ergibt dieselbe Summe - also 1/3 der Gesamtsumme aller Zahlen. Die magische Konstante kann daher nur (1 + 2 + 3 + … + 9) / 3 = 15 sein. Allgemein lässt sich die Konstante für 1, 2, 3, …, n^2 mit der Methode von Gauß berechnen:

$$\frac{1+2+3+\ldots+n^2}{n} = \frac{n^2 \cdot (n^2+1)}{2n} = \frac{n \cdot (n^2+1)}{2}$$

Die Formel verrät nicht, ob es überhaupt möglich ist ein Quadrat zu bilden bzw. wie das geht, aber die magische Konstante ist jedenfalls ganzzahlig; bei beliebigen Zahlen muss das nicht zutreffen.

---

[34] Bildquelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3a/Melencolia_I.jpg (23.01.2008)
[35] Bildquelle: http://www.markfarrar.co.uk/graphics/gaudi2.jpg (23.01.2008)

- Wie viele verschiedene magische Quadrate der Ordnung n gibt es, wenn Quadrate, die durch Drehung bzw. Spiegelung aus einander hervorgehen, nur einmal gezählt werden?

Die Antwort ist nur für wenige Werte von n bekannt:

n	Anzahl
1	1
2	0
3	1
4	880
5	275305224
…	?

- Wie konstruiert man magische Quadrate? Gibt es ein Verfahren, das immer funktioniert?

Es ist kein Verfahren bekannt, das für magische Quadrate beliebiger Ordnung funktioniert. Sehr wohl aber kennt man verschiedene Verfahren für bestimmte Typen magischer Quadrate, und zwar für

- n *ungerade*
- n teilbar durch 4 (n mod 4 = 0, *doppelt gerade*)
- n teilbar durch 2, aber nicht durch 4 (n mod 4 = 2, *einfach gerade*)

Nur das 3 x 3 Quadrat lässt sich mit Hilfe einfacher logischer Überlegungen füllen.

Das 3 x 3 Quadrat

8	1	6
3	5	7
4	9	2

1 + 5 + 9
1 + 6 + 8
2 + 4 + 9
2 + 5 + 8
2 + 6 + 7
3 + 4 + 8
3 + 5 + 7
4 + 5 + 6

Die magische Konstante des 3 x 3 Quadrats ist $3 \cdot 10/2 = 15$.

Es gibt 8 Möglichkeiten, aus 3 der Zahlen 1 bis 9 die Summe 15 zu bilden. Zählen wir für jede der Zahlen von 1 bis 9, wie oft sie in diesen Summen vorkommt:

1, 3, 7, 9 : je 2 mal
2, 4, 6, 8 : je 3 mal
5 : 4 mal

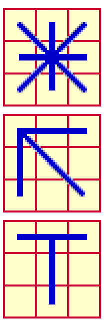


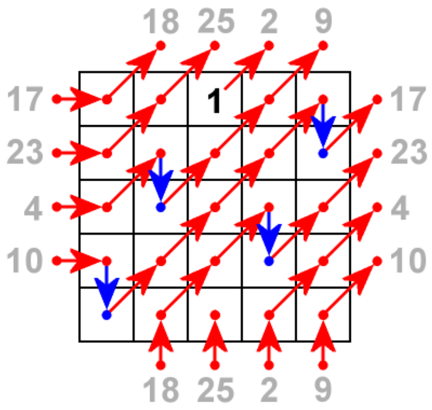
Abb. [36]

Andererseits gilt: Das zentrale Feld ist Summand in 4 Summen, jedes Eckfeld in 3 Summen und jedes Seitenmittenfeld in 2 Summen. Das zentrale Feld kann daher nur mit 5 belegt werden; die Eckfelder müssen mit 2, 4, 6, 8 belegt werden, wobei der erste Wert beliebig ist, während sich der gegenüber liegende aus der Konstanten 15 ergibt. Dasselbe gilt für die zweite Diagonale, die Seitenmittenfelder ergeben sich schließlich ebenfalls aus der magischen Konstanten. Abgesehen von Drehung bzw. Spiegelung gibt es somit nur 1 magisches 3 x 3 Quadrat.

[36] Bildqerquelle: http://www.hp-gramatke.de/magic_sq/ (23.01.2008)

Ungerade magische Quadrate

Es gibt mehrere bekannte Methoden, die für alle ungeraden magischen Quadrate funktionieren. Wir wollen hier das Verfahren von **Simon de La Loubère** (1642 - 1729) beschreiben.



65		18	25	2	9	
65	17	24	**1**	8	15	17
65	23	5	7	14	16	23
65	4	6	13	20	22	4
65	10	12	19	21	3	10
65	11	18	25	2	9	
65	65	65	65	65	65	

- Beginne im Mittelfeld der obersten Zeile und setze stets diagonal nach rechts oben fort.
- Wird der Rand des Quadrats überschritten, setze auf der gegenüberliegenden Seite fort.
- Wird ein bereits belegtes Feld erreicht, setze ein Feld tiefer fort.

Auch das oben beschriebene Lo-Shu ist nach diesem Schema aufgebaut.

Doppelt gerade magische Quadrate

Doppelt gerade magische Quadrate lassen sich mit einem einfachen Abzählverfahren konstruieren, wie es **Caspar Schott** (1608 - 1666) in seiner *Technica Curiosa* 1664 beschrieben hat.

34				
34	1	15	14	4
34	12	6	7	9
34	8	10	11	5
34	13	3	2	16
34	34	34	34	34

260								
260	1	63	62	4	5	59	58	8
260	56	10	11	53	52	14	15	49
260	48	18	19	45	44	22	23	41
260	25	39	38	28	29	35	34	32
260	33	31	30	36	37	27	26	40
260	24	42	43	21	20	46	47	17
260	16	50	51	13	12	54	55	9
260	57	7	6	60	61	3	2	64
260	260	260	260	260	260	260	260	260

- Färbe schachbrettartige Vierblöcke ausgehend von der Mitte mit schmalen Blöcken am Rand.
- Beginne in einer Ecke zu zählen, trage aber nur Zahlen in die Felder gleicher Farbe ein. Bist du am Ende angelangt, zähle noch einmal in die umgekehrte Richtung für die Felder der anderen Farbe.

Auch das oben beschriebene Dürer-Quadrat ist nach diesem Schema aufgebaut.

Einfach gerade magische Quadrate

Für *einfach gerade* magische Quadrate wollen wir hier das Verfahren von **Ralph Strachey** (1868-1923) beschreiben.

- Teile das Quadrat in 4 gleich große Felder. Diese bilden *ungerade* Teilquadrate.

A	**C**
D	**B**

- Fülle die 4 Teilquadrate in der Reihenfolge A, B, C, D nach dem Verfahren von La Loubère.
- Vertausche zeilenweise die markierten Felder.

57						
84	8	1	6	26	19	24
84	3	5	7	21	23	25
84	4	9	2	22	27	20
138	35	28	33	17	10	15
138	30	32	34	12	14	16
138	31	36	29	13	18	11
165	111	111	111	111	111	111

111						
111	35	1	6	26	19	24
111	3	32	7	21	23	25
111	31	9	2	22	27	20
111	8	28	33	17	10	15
111	30	5	34	12	14	16
111	4	36	29	13	18	11
111	111	111	111	111	111	111

255										
380	17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
380	23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
380	4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
380	10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
380	11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
630	92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
630	98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
630	79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
630	85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
630	86	93	100	77	84	36	43	50	27	34
755	505	505	505	505	505	505	505	505	505	505

505										
505	92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
505	98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
505	4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
505	85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
505	86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
505	17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
505	23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
505	79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
505	10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
505	11	18	100	77	84	36	43	50	27	59
505	505	505	505	505	505	505	505	505	505	505

693														
1036	30	39	48	1	10	19	28	128	137	146	99	108	117	126
1036	38	47	7	9	18	27	29	136	145	105	107	116	125	127
1036	46	6	8	17	26	35	37	144	104	106	115	124	133	135
1036	5	14	16	25	34	36	45	103	112	114	123	132	134	143
1036	13	15	24	33	42	44	4	111	113	122	131	140	142	102
1036	21	23	32	41	43	3	12	119	121	130	139	141	101	110
1036	22	31	40	49	2	11	20	120	129	138	147	100	109	118
1722	177	186	195	148	157	166	175	79	88	97	50	59	68	77
1722	185	194	154	156	165	174	176	87	96	56	58	67	76	78
1722	193	153	155	164	173	182	184	95	55	57	66	75	84	86
1722	152	161	163	172	181	183	192	54	63	65	74	83	85	94
1722	160	162	171	180	189	191	151	62	64	73	82	91	93	53
1722	168	170	179	188	190	150	159	70	72	81	90	92	52	61
1722	169	178	187	196	149	158	167	71	80	89	98	51	60	69
2065	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379

1379														
1379	177	186	195	1	10	19	28	128	137	146	99	108	68	77
1379	185	194	154	9	18	27	29	136	145	105	107	116	76	78
1379	193	153	155	17	26	35	37	144	104	106	115	124	84	86
1379	5	161	163	172	34	36	45	103	112	114	123	132	85	94
1379	160	162	171	33	42	44	4	111	113	122	131	140	93	53
1379	168	170	179	41	43	3	12	119	121	130	139	141	52	61
1379	169	178	187	49	2	11	20	120	129	138	147	100	60	69
1379	30	39	48	148	157	166	175	79	88	97	50	59	117	126
1379	38	47	7	156	165	174	176	87	96	56	58	67	125	127
1379	46	6	8	164	173	182	184	95	55	57	66	75	133	135
1379	152	14	16	25	181	183	192	54	63	65	74	83	134	143
1379	13	15	24	180	189	191	151	62	64	73	82	91	142	102
1379	21	23	32	188	190	150	159	70	72	81	90	92	101	110
1379	22	31	40	196	149	158	167	71	80	89	98	51	109	118
1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379	1379

Fragen

1. Ergänze die folgenden 4 x 4 Raster zu magischen Quadraten mit den Eintragungen 1 bis 16.

	3	16	
14	15		
		9	12
			8

2		15	
		4	
	5		
11	10	6	

	6		13
	8	10	
	9	7	4

	7		
	13	4	16
	12	5	

	5		
8	10	3	
2			11

	9		
16	11	2	
	8		
10			

	12	9	
	3	2	
	13	16	

4	5	16	
14	11	2	

2. Ergänze die folgenden 5 x 5 Raster zu magischen Quadraten mit den Eintragungen 1 bis 25.

15			17	
	11	7	3	20
		13	10	4
2	18			6
8				

				12
9			3	20
2	18	10		
15	24	1	17	
				4

23		17		
6	18		12	24
		13		
2	14		8	20
15				

14				19
2	20	22	18	
	21	7	10	11
			1	
8				

21	12			
7	25			
5	8	24	11	
18	4	6	22	

11	17		9	3
2				6
24				20
18	21		5	14

3. Warum bleibt ein magisches Quadrat magisch, wenn jede Zahl im Quadrat um 1, 2, 3, …, c vergrößert bzw. verkleinert oder mit 1, 2, 3, …, c multipliziert wird? Wie ändert sich dabei die magische Konstante?

Antworten

1. Ergänze die folgenden 4 x 4 Raster zu magischen Quadraten mit den Eintragungen 1 bis 16.

2	**3**	**16**	13
14	**15**	4	1
7	6	**9**	**12**
11	10	5	**8**

2	3	**15**	14
13	16	**4**	1
8	**5**	9	12
11	**10**	**6**	7

3	**6**	12	**13**
15	**8**	**10**	1
14	**9**	**7**	**4**
2	11	5	16

10	**7**	14	3
1	**13**	**4**	**16**
8	**12**	**5**	9
15	2	11	6

15	12	1	6
9	**5**	16	4
8	**10**	**3**	13
2	7	14	**11**

7	**9**	4	14
16	**11**	**2**	5
1	**8**	13	12
10	6	15	3

5	**12**	**9**	8
14	**3**	**2**	15
4	**13**	**16**	1
11	6	7	10

15	10	3	6
4	**5**	**16**	9
14	**11**	**2**	7
1	8	13	12

2. Ergänze die folgenden 5 x 5 Raster zu magischen Quadraten mit den Eintragungen 1 bis 25.

15	9	1	**17**	23
24	**11**	**7**	**3**	**20**
16	22	**13**	**10**	**4**
2	**18**	25	14	**6**
8	5	19	21	12

23	5	19	6	**12**
9	11	22	**3**	**20**
2	**18**	**10**	14	21
15	**24**	**1**	**17**	8
16	7	13	25	**4**

23	10	**17**	4	11
6	**18**	5	**12**	**24**
19	1	**13**	25	7
2	**14**	21	**8**	**20**
15	22	9	16	3

14	5	15	12	**19**
2	**20**	**22**	**18**	3
16	**21**	**7**	**10**	**11**
25	13	17	**1**	9
8	6	4	24	23

14	16	2	10	23
21	**12**	20	3	9
7	**25**	13	19	1
5	**8**	**24**	**11**	17
18	**4**	**6**	**22**	15

11	**17**	25	**9**	**3**
2	15	19	23	**6**
10	4	13	16	22
24	8	1	12	**20**
18	**21**	7	**5**	**14**

3. Warum bleibt ein magisches Quadrat magisch, wenn jede Zahl im Quadrat um 1, 2, 3, …, c vergrößert bzw. verkleinert oder mit 1, 2, 3, …, c multipliziert wird? Wie ändert sich dabei die magische Konstante?

Bezeichnen wir die Zahlen einer Reihe (Zeile, Spalte oder Diagonale) mit x_1, x_2, …, x_n. Die Konstante K ändert sich dann zu

a) $(x_1 + c) + (x_2 + c) + \ldots + (x_n + c) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + n \cdot c = K + n \cdot c$

b) $c \cdot x_1 + c \cdot x_2 + \ldots + c \cdot x_n = c \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = c \cdot K$

Diese Änderung erfolgt in jeder Reihe gleich, daher bleibt das Quadrat magisch.

Herausforderungen

Es gibt also Konstruktionsverfahren für magische Quadrate - wo bleibt die Herausforderung? Diese besteht vor allem in der Konstruktion magischer Quadrate mit zusätzlichen magischen Eigenschaften. Einige sollen hier angedeutet werden.

Pandiagonale magische Quadrate

Magische Quadrate heißen *pandiagonal*, wenn auch die Summen aller *gebrochenen* Diagonalen stets die magische Konstante ergeben.

65					
65	19	3	12	21	10
65	11	25	9	18	2
65	8	17	1	15	24
65	5	14	23	7	16
65	22	6	20	4	13
65	65	65	65	65	65

65					
65	19	3	12	21	10
65	11	25	9	18	2
65	8	17	1	15	24
65	5	14	23	7	16
65	22	6	20	4	13
65	65	65	65	65	65

Magische Rahmenquadrate

Ein *umrahmtes* magisches Quadrat bleibt magisch, wenn man seinen Rand entfernt.

175							
175	22	41	34	27	17	5	29
175	1	35	6	42	11	31	49
175	38	10	24	4	47	40	12
175	37	18	48	25	2	32	13
175	36	43	3	46	26	7	14
175	20	19	44	8	39	15	30
175	21	9	16	23	33	45	28
175	175	175	175	175	175	175	175

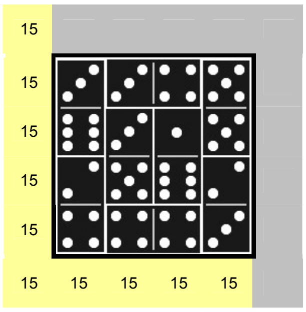
Rösselsprung-Quadrate

Wie kann ein Springer auf einem Schachbrett gezogen werden, dass die von ihm besuchten Felder in fortlaufender Nummerierung zumindest ein *fast* magisches Quadrat ergeben? *Fast* magisch bedeutet, dass zwar alle Zeilen- und Spaltensummen gleich sind, aber nicht unbedingt die Summen der Diagonalen.

348								
260	63	22	15	40	1	42	59	18
260	14	39	64	21	60	17	2	43
260	37	62	23	16	41	4	19	58
260	24	13	38	61	20	57	44	3
260	11	36	25	52	29	46	5	56
260	26	51	12	33	8	55	30	45
260	35	10	49	28	53	32	47	6
260	50	27	34	9	48	7	54	31
168	260	260	260	260	260	260	260	260

Magische Domino-Quadrate

Finde eine Auswahl von Domino-Steinen, mit denen ein magisches Quadrat gelegt werden kann.



Magische Primzahl-Quadrate

Gibt es magische Quadrate, deren Felder ausschließlich Primzahlen enthalten?

177			
177	17	113	47
177	89	59	29
177	71	5	101
177	177	177	177

120				
120	3	61	19	37
120	43	31	5	41
120	7	11	73	29
120	67	17	23	13
120	120	120	120	120

Magische Würfel

Magische Würfel sind dreidimensionale Verallgemeinerungen magischer Quadrate. Addiert man die Zahlen einer beliebigen Säule oder Raumdiagonale, so erhält man stets dieselbe Summe. Die Flächendiagonalen der einzelnen Würfelschichten spielen keine Rolle.

18	23	1
22	3	17
2	16	24

oben

20	7	15
9	14	19
13	21	8

Mitte

4	12	26
11	25	6
27	5	10

unten

Zauberquadrate

Das folgende Quadrat ist sicher nicht *magisch* im üblichen Sinn, besitzt aber eine Eigenschaft, die wie ein Zaubertrick wirkt: Wähle eine beliebige Zahl und streiche alle anderen Zahlen in derselben Zeile und Spalte. Wähle als nächste Zahl eine beliebige noch nicht gestrichene usw. Addiere am Ende alle nicht gestrichenen Zahlen - egal, welche Zahlen gewählt wurden, die Summe ist stets 34. Warum?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Die Lösung ist verblüffend einfach: Man kann das Zauberquadrat als Additionstafel betrachten (siehe die Werte in den grauen Feldern).

34	1	2	3	4	
10	1	2	3	4	0
26	5	6	7	8	4
42	9	10	11	12	8
58	13	14	15	16	12
34	28	32	36	40	

Jede Wahl einer Zahl entspricht der Wahl von 2 Summanden, jede Streichung eliminiert diese beiden. Letztlich ergibt sich die Summe aller Zahlen in den grauen Feldern. Mit dieser Methode lassen sich Zauberquadrate beliebiger Größe erstellen - mit und ohne erkennbare Regelmäßigkeiten im sichtbaren Feld.

Literatur & Links

Magische Quadrate & Herausforderungen

- Martin **Gardner**: Mathematische Rätsel und Probleme.
  Braunschweig, Wiesbaden 1980 (5. Aufl.) <Vieweg>
- Maria **Koth**: Spielereien mit Zahlen und Ziffern. Denkspielspaß für Kinder von 9 bis 99.
  Köln 2005 <Aulis Verlag Deubner>.
- wikipedia: Magisches Quadrat
  url: http://de.wikipedia.org/wiki/Magisches_Quadrat
- Holger **Danielsson**: Magische Quadrate
  url: http://www.magic-squares.de/
- Hans-Peter **Gramatke**: Magische Quadrate
  url: http://www.hp-gramatke.de/magic_sq/
- Jan **Theofel**, Martin **Trautman**: Magische Quadrate und Würfel
  url: http://www.theofel.de/magic/
- Spektrum der Wissenschaft: Perfekte magische Würfel
  url: http://www.wissenschaft-online.de/spektrum/index.php?action=rubrik_detail&artikel_id=7060
- Kreudenstein Verlag: Magische Quadrate Download
  url: http://www.kreudenstein-online.de/Programme/ungerade_magische_quadrate.htm

Der Autor in angemessener Kleidung: Magische Quadrate

3 x 3

4 x 4

Personenregister

Spieleregister