Bevezetés a játékelméletbe szociológusok számára

Ajánlott irodalom:

Filep László: Játékelmélet (Filum, 2001)

Csontos László (ed): A racionális döntések elmélete (Osiris, 1998)

Rasmusen, Eric: Games and Information (Third Edition, Blackwell, 2001)

Szép Jenő - Forgó Ferenc: Bevezetés a játékelméletbe (Közgazdasági és Jogi Kiadó, 1974)

A játékelmélet elnevezés Neumann János és Oskar Morgenstern *The Theory of Games and Economic Behaviour* (Princeton, 1944) könyve nyomán vált általánossá. Részletes kronológia itt található: http://www.econ.canterbury.ac.nz/hist.html Az elmélet hazai közismertsége Hankiss Elemér: Társadalmi csapdák c. 1977-es esszéjének köszönhető. Aki gyorsan és a matematikai formalizmus lehető mellőzésével szeretne tájékozódni, annak a Stanford Enciklopédiában a játékelmélet címszó ajánlható: http://plato.stanford.edu/entries/game-theory

Két ember A és B bankrablással vádolva külön cellában ül. Bizonyíték nincs ellenük, két lehetőségük van: elismerni a bankrablást vagy tagadni. Mindketten (külön-külön) ugyanazt az ajánlatot kapják:

- ha mindketten elismeritek a bankrablást, mindketten kaptok 5-5 évet,
- ha te elismered a bankrablást és a társad nem, téged szabadon bocsátlak és ő kap 10 évet,
- ha ő elismeri a bankrablást és te nem, őt szabadon bocsátom és te kapsz 10 évet,
- ha mindketten tagadtok, mindketten kaptok 1-1 évet (tiltott fegyverviselésért).

Ez a példa a játékelméletben közismert a ”Fogoly dilemmája” szituáció. Alapvető jellegzetessége, hogy a játék kimenetelét az összes résztvevő lépéseinek interakciója határozza meg, és ezt minden résztvevőnek figyelembe kell vennie, amikor saját döntését meghozza. További tulajdonságok:

- egylépéses, kétszemélyes,
- szimultán (amikor a játékos eldönti, mit lép, nem tudja, hogy mit lép a másik),
- nem-kooperatív (a játékosok semmilyen módon nem hangolják össze a lépéseiket),
- teljes információs (a játék összes szabálya rögzített, és minden játékos számára ismert),
- minden játékos arra törekszik, hogy nyeresége várható értékét maximalizálja, és ugyanezt feltételezi az összes többi játékosról is.

A fent írt játék számítógépes realizációja és még sok más interaktív anyag: http://GameTheory.net

Kétszemélyes játék: a résztvevők: A és B játékosok, tiszta stratégiáik: $\{A_1, ..., A_I\}$ ill. $\{B_1, ..., B_J\}$

Nyereség az A játékos szempontjából: $f_A(A_i, B_j)$ és nyereség a B játékos szempontjából: $f_B(A_i, B_j)$ ahol f_A és f_B valós szám értékű (pozitív f_A nyereséget, negatív f_A veszteséget jelent A számára).

$\mathbf{f_A}$	B_1	B_2	...	B_J
A_1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	...	$x_{1,J}$
A_2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	...	$x_{2,J}$
...	...	...	...	...
A_I	$x_{I,1}$	$x_{I,2}$	...	$x_{I,J}$

Nyereségmátrix az A játékos szempontjából: ha az A játékos stratégiája A_i és a B játékos stratégiája B_j akkor $x_{i,j}$ az A játékos nyeresége.

Zéró-összegű játék: az A szempontjából vett nyereség + a B szempontjából vett nyereség = 0

Kevert stratégia: $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_I)$ I-dim vektor, az A játékos α_i valószínűséggel játszik A_i stratégiát, ahol $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 1$ és $\alpha_i \geq 0$ minden $i = 1, ..I$ (B kevert stratégiáját $\beta = (\beta_1, ..., \beta_J)$ jelöli). Várható nyereség A szempontjából az (α, β) stratégia-pár esetén: $f_A(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \alpha_i \cdot \beta_j \cdot x_{i,j}$

Minimax tétel (von Neumann, 1928): $\min_\beta \max_\alpha f_A(\alpha, \beta) = \max_\alpha \min_\beta f_A(\alpha, \beta) = f_A(\alpha^\circ, \beta^\triangleright)$

ahol az optimális stratégiák elnevezése: biztonsági A stratégia: $\alpha^\circ = \arg\max_\alpha \left(\min_\beta f_A(\alpha, \beta)\right)$ és

fenyegető B stratégia: $\beta^\triangleright = \arg\min_\beta \left(\max_\alpha f_A(\alpha, \beta)\right)$ (az optimumhelyek unicitása nem garantált).

Nash-egyensúlyi stratégia-pár: (α^*, β^*) (a továbbiakban: egyensúlyi stratégia-pár)

bármely (α, β) stratégia-pár esetén: $f_A(\alpha^*, \beta^*) \geq f_A(\alpha, \beta^*)$ és $f_B(\alpha^*, \beta^*) \geq f_B(\alpha^*, \beta)$

1. Állítás: minden kétszemélyes zéró-összegű játéknak van egyensúlyi stratégia-párja.

2. Állítás: (felcserélhetőség) minden kétszemélyes zéró-összegű játék esetén teljesül, hogy ha (α_1^*, β_1^*) és (α_2^*, β_2^*) két egyensúlyi stratégia-pár, akkor (α_1^*, β_2^*) egyensúlyi stratégia-pár.

3. Állítás: (ekvivalencia) minden kétszemélyes zéró-összegű játék esetén teljesül, hogy ha (α_1^*, β_1^*) és (α_2^*, β_2^*) két egyensúlyi stratégia-pár, akkor $f_A(\alpha_1^*, \beta_1^*) = f_A(\alpha_2^*, \beta_2^*)$

Kétszemélyes zéró-összegű játék megoldása: az összes egyensúlyi stratégia-pár.

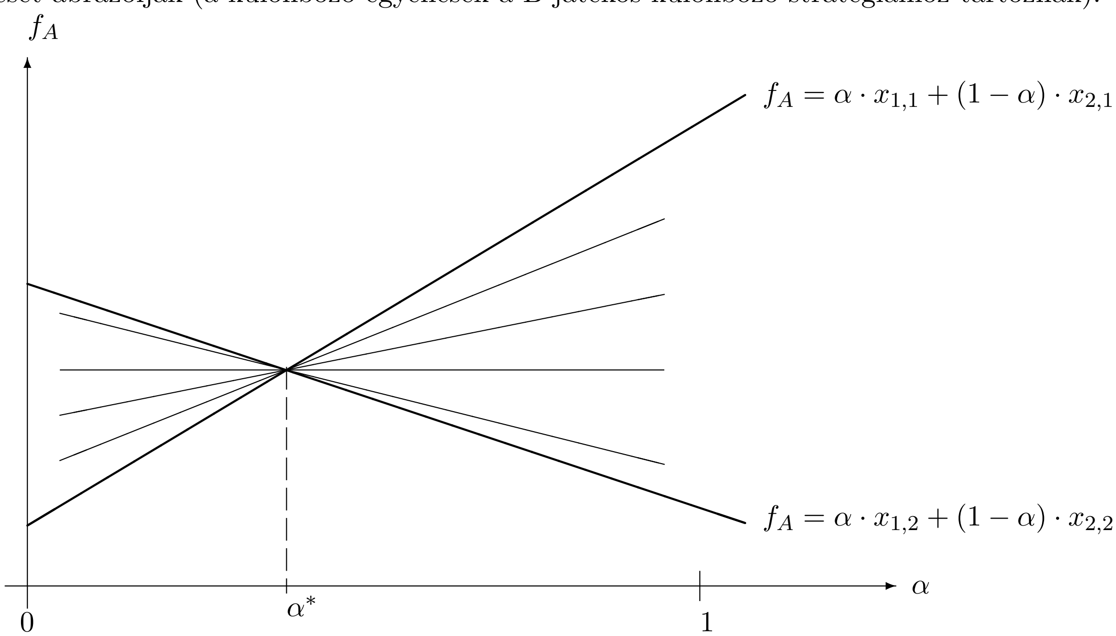
Kétszemélyes, 2x2-es (azaz I=J=2) (nem feltétlenül zéró-összegű) játékot az alábbi két mátrix jellemez:

$\mathbf{f_A}$	B_1	B_2
A_1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$
A_2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$

$\mathbf{f_B}$	B_1	B_2
A_1	$y_{1,1}$	$y_{1,2}$
A_2	$y_{2,1}$	$y_{2,2}$

Az előző oldal jelölései kissé megváltoznak: az A kevert stratégiáit $\alpha \in [0,1]$ valós szám jellemzi, az A játékos α valószínűséggel A_1 illetve $(1-\alpha)$ valószínűséggel A_2 stratégiát játszik. Hasonlóan jellemzi B kevert stratégiáit a $\beta \in [0,1]$ valós szám. Az A játékos szempontjából vett nyereségfüggvény: $f_A(\alpha,\beta) = \alpha \cdot \beta \cdot x_{1,1} + \alpha \cdot (1-\beta) \cdot x_{1,2} + (1-\alpha) \cdot \beta \cdot x_{2,1} + (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot x_{2,2}$

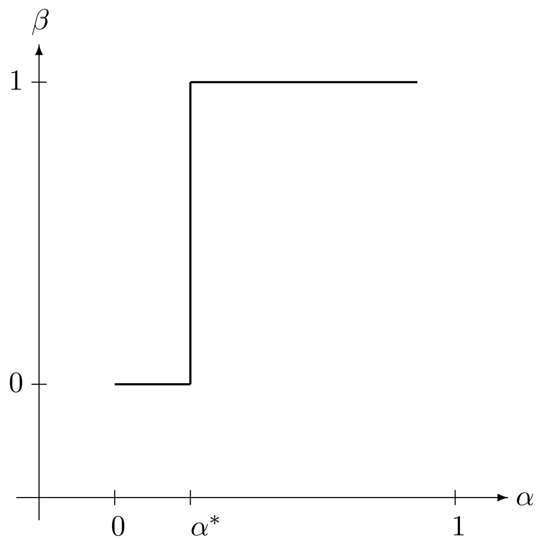
Az alábbi egyenesek az A játékos α stratégiáját és az ehhez tartozó várható nyereségének összefüggését ábrázolják (a különböző egyenesek a B játékos különböző stratégiáihoz tartoznak).



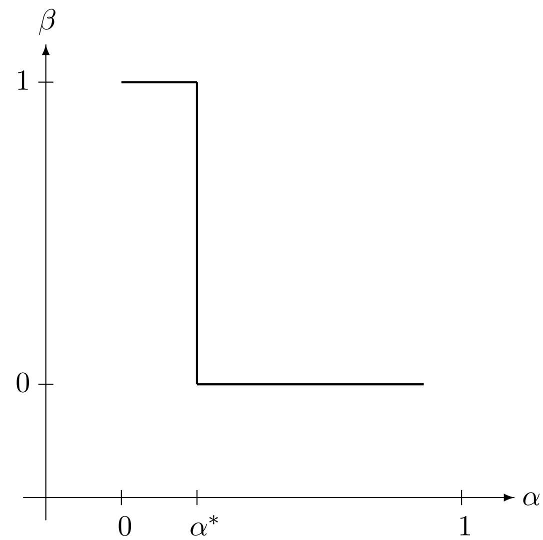
A burkoló $f_A(\alpha,\beta=1) = \alpha \cdot x_{1,1} + (1-\alpha) \cdot x_{2,1}$ és $f_A(\alpha,\beta=0) = \alpha \cdot x_{1,2} + (1-\alpha) \cdot x_{2,2}$ egyenesek B tiszta stratégiáihoz tartoznak, a két burkoló konvex lineáris kombinációi jellemzik B kevert stratégiáit. Az ábra azt mutatja be, hogy az A játékos α^* stratégiájára eléretik $\max_\alpha \min_\beta f_A(\alpha,\beta)$ ahol $\alpha^* = \dfrac{x_{2,2} - x_{1,2}}{x_{2,2} + x_{1,1} - x_{1,2} - x_{2,1}}$ feltéve, hogy $x_{2,2} + x_{1,1} - x_{1,2} - x_{2,1} \neq 0$ és $0 \leq \alpha^* \leq 1$

A nyereségfüggvény $f_A(\alpha, \beta) = \beta \cdot (\alpha \cdot (x_{2,2} + x_{1,1} - x_{1,2} - x_{2,1}) * x_{2,2} - x_{2,1}) + \alpha x_{1,2} - \alpha x_{2,2} + x_{2,2}$ átrendezett alakjában rögzítjük α értékét és meghatározzuk a hozzá tartozó $\arg \min_{\beta} f_A(\alpha, \beta)$ értéket. Ezt a műveletet elvégezzük minden $\alpha \in [0, 1]$ esetén és ábrázoljuk az összetartozó α, β párokat:

$x_{2,2} + x_{1,1} - x_{1,2} - x_{2,1} > 0$ esetén:



$x_{2,2} + x_{1,1} - x_{1,2} - x_{2,1} < 0$ esetén:



Most tárgyaljuk az eddig mellőzött $x_{2,2} + x_{1,1} - x_{1,2} - x_{2,1} = 0$ esetet:

- ha $x_{2,2} - x_{1,2} < 0$ akkor $\alpha \in [0, 1]$ és $\beta = 1$
- ha $x_{2,2} - x_{1,2} = 0$ akkor $\alpha \in [0, 1]$ és $\beta \in [0, 1]$
- ha $x_{2,2} - x_{1,2} > 0$ akkor $\alpha \in [0, 1]$ és $\beta = 0$.

Hasonlóan $f_B(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta \cdot y_{1,1} + \alpha \cdot (1 - \beta) \cdot y_{1,2} + (1 - \alpha) \cdot \beta \cdot y_{2,1} + (1 - \alpha) \cdot (1 - \beta) \cdot y_{2,2}$ jelöli a B játékos szempontjából vett nyereségfüggvényt, és β^* az a stratégia, amelyre eléretik $\max_{\beta} \min_{\alpha} f_B(\alpha, \beta)$ ahol $\beta^* = \dfrac{y_{2,2} - y_{2,1}}{y_{2,2} + y_{1,1} - y_{1,2} - y_{2,1}}$, ahol ismét külön tárgyalandó, ha $y_{2,2} + y_{1,1} - y_{1,2} - y_{2,1} = 0$

Kétszemélyes 2x2-es játék összes egyensúlyi stratégia-párja meghatározható a fenti eljárásokkal.

<u>4. Állítás</u>: minden kétszemélyes játéknak van egyensúlyi stratégia-párja.

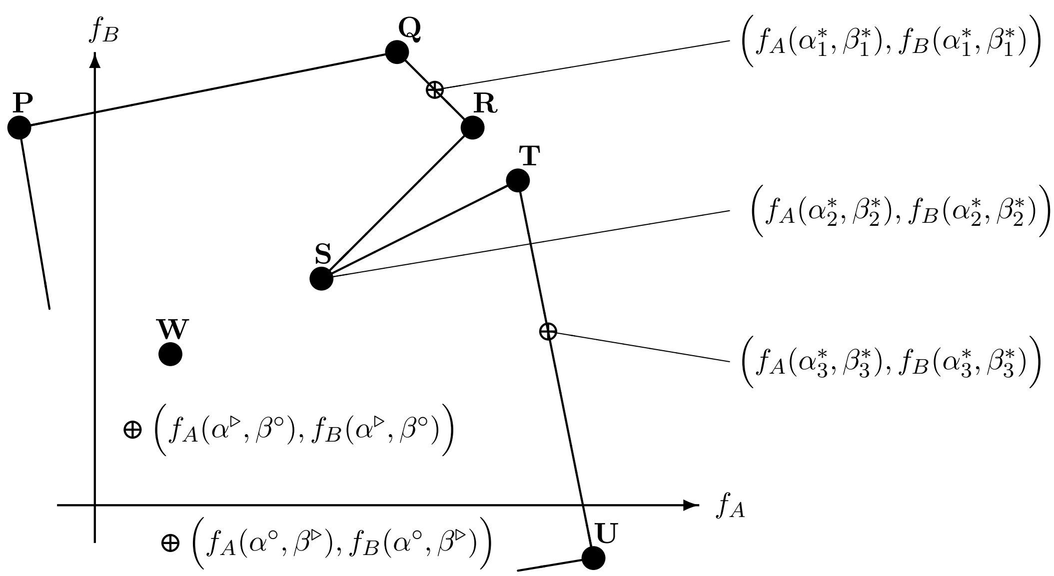
Kétszemélyes játék <u>megoldása</u>: az összes egyensúlyi stratégia-párja akkor, ha teljesül a 2. Állításban írt felcserélhetőség és a 3. Állításban írt ekvivalencia tulajdonság.

<u>Megjegyzés</u>: Zéró-összegű játék esetén mindig van(nak) egyensúlyi stratégia-pár(ok), és ez(ek) a játék megoldása(i). Nem zéró-összegű játék esetén is mindig van(nak) egyensúlyi stratégia-pár(ok), de lehet, hogy nem teljesül a felcserélhetőség és az ekvivalencia.

$\mathbf{f_A}$	B_1	B_2	...	B_J
A_1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	...	$x_{1,J}$
A_2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	...	$x_{2,J}$
...	...	...	...	...
A_I	$x_{I,1}$	$x_{I,2}$	...	$x_{I,J}$

$\mathbf{f_B}$	B_1	B_2	...	B_J
A_1	$y_{1,1}$	$y_{1,2}$	...	$y_{1,J}$
A_2	$y_{2,1}$	$y_{2,2}$	...	$y_{2,J}$
...	...	...	...	...
A_I	$y_{I,1}$	$y_{I,2}$	...	$y_{I,J}$

Kétszemélyes játék esetén $I \cdot J$ darab tiszta stratégia-pár van. A játék kimenetelét a két-dimenziós (f_A, f_B) nyeremény-vektor jellemzi. A következő ábra egy példán mutatja a tiszta stratégiák elhelyezkedését a játék lehetséges (f_A, f_B) kimeneteleivel koordinátázott síkban:



Legyen R és S két stratégia-pár. R <u>dominálja</u> az S stratégiát, ha mindkét játékos számára R nyeresége nagyobb, mint S nyeresége (az ábra egy ilyen helyzetet szemléltet). Egy halmaz <u>konvex burka</u> az őt tartalmazó konvex halmazok közös része (az ábrán a konvex burok határpontjai P,Q,R,T,U). Kooperatív játék esetén a két játékos számára elérhető bármely nyereség, amit tartalmaz a tiszta stratégia-párokhoz tartozó kimenetelek konvex burka. <u>Pareto-optimális</u> a tiszta stratégia-párok konvex burkának nem-dominált része ill. az ezekhez tartozó stratégia-párok halmaza. <u>Kooperatív játék Neumann-Morgenstern megállapodásos kimenetele</u> a Pareto-optimális kimenetelek halmazának az a része, melyre teljesül, hogy $f_A \geq f_A(\alpha^{\circ}, \beta^{\triangleright})$ és $f_B \geq f_B(\alpha^{\triangleright}, \beta^{\circ})$

Fejezetek a játékelmélet társadalomtudományi alkalmazásaiból:

- a racionális döntések elmélete (rational choice theory, RCT)
- stratégiák a ”fogoly dilemmája” játék iterált változatában
- szekvenciális játékok
- az oligopol probléma
- tőzsde, aukció, versenytárgyalási stratégiák
- a fogyasztói viselkedés modellezése, termékfejlesztés, árképzés
- térbeli folyamatok, területfejlesztés
- evolúciósan stabil stratégiák (ESS, Maynard Smith)
- érdekegyeztetés, társadalmi alkufolyamatok
- a kollektív racionalitás elméletei, Arrow tétele, szavazási rendszerek, koalíciók
- médiakutatás, műsorstruktúra tervezés (complementary/counter scheduling)

Gyakorló feladatok:

1. Az alábbi játék zéró-összegű. Van-e tiszta stratégiákból álló Nash-egyensúlypontja?

$\mathbf{f_A}$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	8	9	7
A_2	15	12	5	14
A_3	12	11	10	15
A_4	17	2	8	9

2. Igaz-e, hogy az alábbi játék során a B játékos sohasem választja a B_1 stratégiát?

$\mathbf{f_A}$	B_1	B_2	B_3
A_1	6	1	9
A_2	7	10	0

$\mathbf{f_B}$	B_1	B_2	B_3
A_1	4	3	7
A_2	3	8	2

Minta ZH

1. **(10 pont)**

Az alábbi játék zéró-összegű. Igaz-e, hogy a B játékos sohasem választja a B_3 stratégiát?

$\mathbf{f_A}$	B_1	B_2	B_3
A_1	0	200	160
A_2	200	100	140

2. **(10 pont)**

Az alábbi játék zéró-összegű. B játékos ajánlata az, hogy ő sohasem játszik B_3 -at, ha A sohasem játszik A_3-at. B játékos azt állítja, hogy ajánlatának elfogadása az A játékos számára nem hátrányos. Igaz-e B állítása?

$\mathbf{f_A}$	B_1	B_2	B_3
A_1	300	0	-20
A_2	0	100	60
A_3	120	80	75

3. **(30 pont)**

Ebben a játékban van egy feltétel:

B játékosnak olyan stratégiát kell játszania, ami garantálja, hogy A játékos nyereségének várható értéke ≤ 28, bármilyen stratégiát is játszik A.

Igaz-e, hogy ha B a feltételnek megfelelő stratégiát játszik, akkor nyereségének várható értéke negatív?

$\mathbf{f_A}$	B_1	B_2
A_1	30	10
A_2	0	100

$\mathbf{f_B}$	B_1	B_2
A_1	10	110
A_2	50	-50