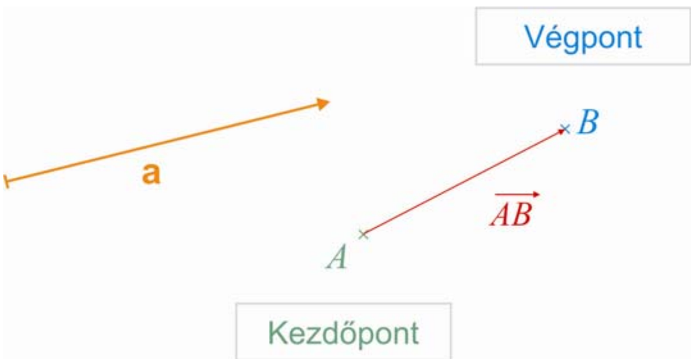
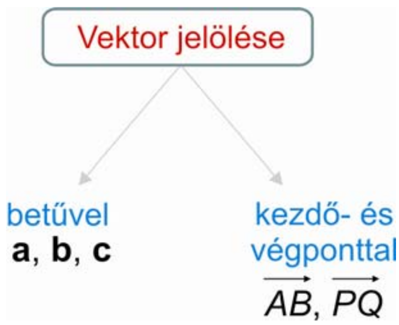
I. Vektor fogalma, tulajdonságai

Módszertani megjegyzés: Az 1. és 2. fejezet az eddig tanultak rendszerezett és kibővített átismétlése.
Bevezetőként kereshetünk olyan példákat, amelyeknél vektorokat használunk!
Különösen fontosak a fizikában használt vektormennyiségek: térkép, sebesség, elmozdulás, gyorsulás, erő. Felmerülhet az eltolás, de itt elsősorban azt hangsúlyozzuk, hogy a vektorok mennyiségeket írnak le, vagyis a vektormennyiségek szerepét! A modulnak célja az is, hogy az „irányított szakasz" korábban tanult idealizált képét megváltoztatva élőbbé varázsolja a vektorokat.

Vektornak nevezzük az irányított szakaszt.

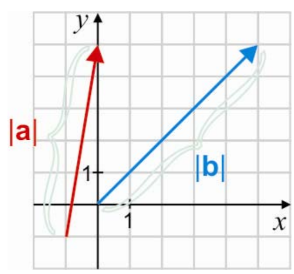




A vektorokat írásban aláhúzással (<u>a</u>), nyomtatásban megvastagítva (**a**) jelöljük. A vektor meghatározása után áttekintjük a vektorok tulajdonságait.

Vektor abszolútértéke

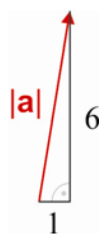
A vektorok kezdőpontjukkal és végpontjukkal kijelölnek egy irányt és egy távolságot. A távolságot a vektor hosszának vagy **abszolútértékének** nevezzük (jele $|\mathbf{a}|$), és mindig valamilyen hosszúságegységhez viszonyítjuk.



Mintapélda₁

Számítsuk ki az ábrán szereplő vektorok abszolútértékét!

Megoldás:



A koordináta-rendszer derékszögű négyzetrácsa és a Pitagorasz-tétel segítségével végezzük a számítást:

$1^2 + 6^2 = 37$, azaz $|\mathbf{a}| = \sqrt{37} \approx 6{,}1$ egység.

Hasonlóan számítva $|\mathbf{b}| = \sqrt{50} \approx 7{,}1$ egység.

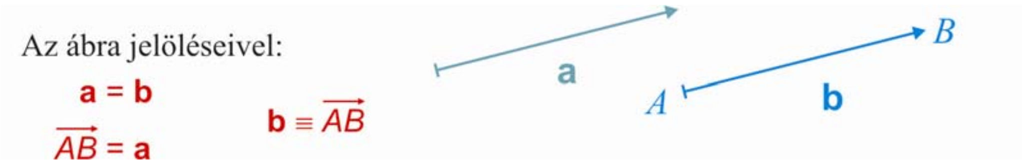
Vektor állása, iránya

Ha két vektor egyenese párhuzamos, akkor **megegyező állásúnak** mondjuk őket. Ezek az **egyállású** vektorok lehetnek **azonos** vagy **ellentett irányúak**, irányításúak.

Vektorok egyenlősége

Két vektor egyenlő, ha hosszuk és irányuk megegyezik.

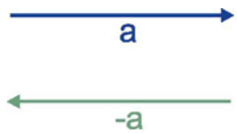
A vektorok *egyenlősége* és *azonossága* különböző fogalmak. Két vektor **azonos**, ha kezdőpontjaik és végpontjaik páronként megegyeznek, jelölés: **a** ≡ **b**. Egy adott vektorral azonos vektor a síkon vagy a térben ugyanott helyezkedik el. Ezzel szemben egy adott vektorral egyenlő vektort a sík vagy tér bármely pontjából felmérhetünk, így egy adott vektorral egyenlő vektorból végtelen sok van.



Egységvektor (**e**): egységnyi hosszúságú vektor.

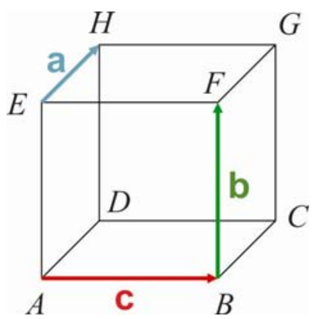
Nullvektor (**0**): 0 hosszúságú vektor. *Definíciója*: olyan vektor, amelynek megegyezik a kezdőpontja és a végpontja. Irányát tetszőlegesnek tekintjük.

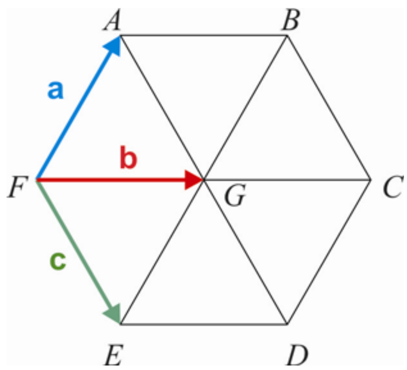
Az **a** vektor **ellentettjének** nevezzük azt a vektort, amelyik vele egyenlő abszolútértékű, egyező állású, de vele ellentétes irányú. Jelölése: – **a** .



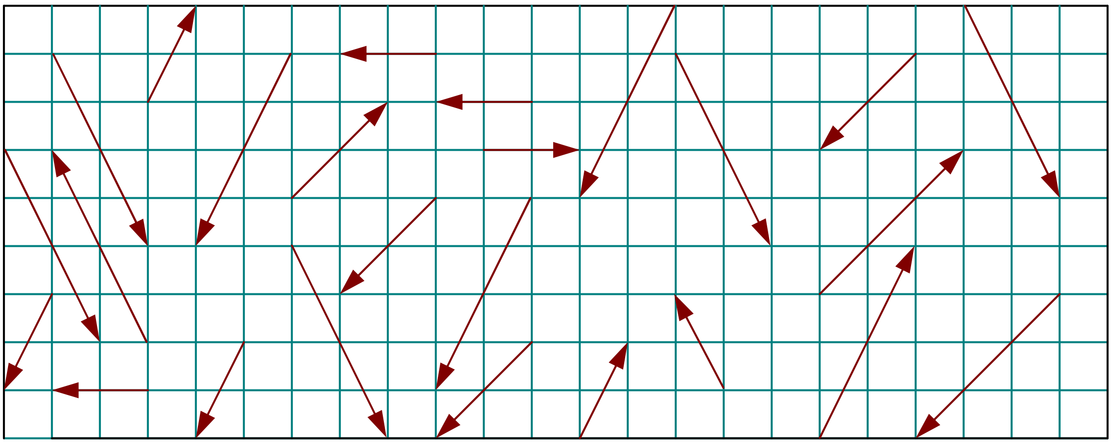
Feladatok

1. Keress egyenlő, ellentett és azonos vektorokat a kockán és a szabályos hatszögön!





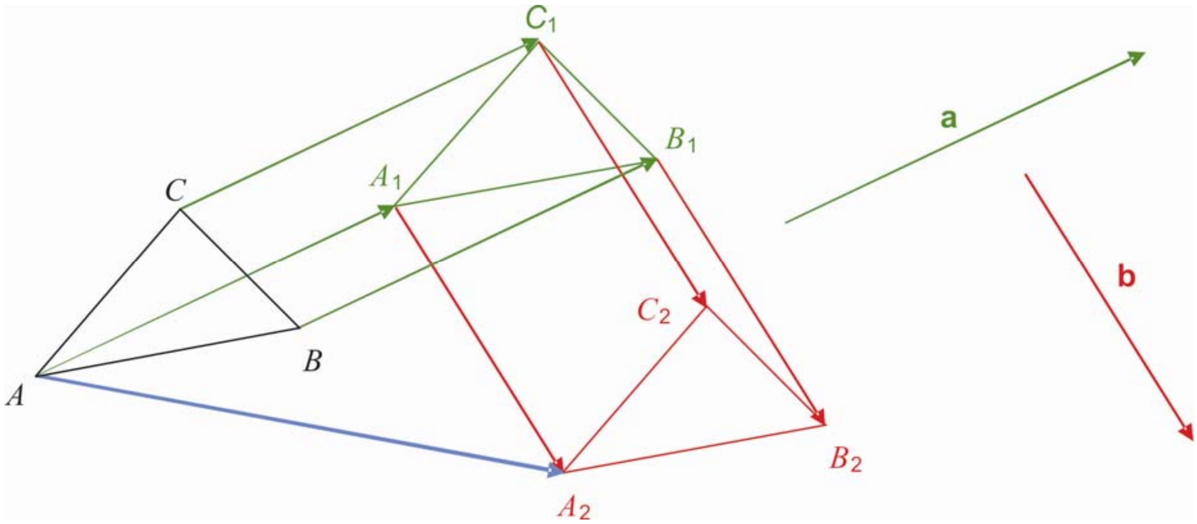
2. Keress egyenlő, egyenlő hosszúságú, illetve ellentett vektorokat az ábrán!

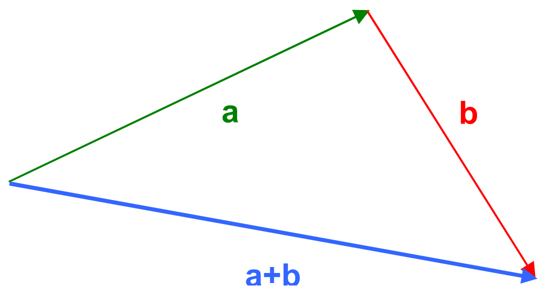


II. Vektorműveletek

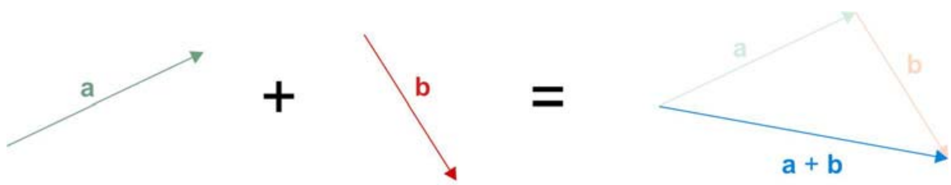
Vektorok összeadása

Toljuk el az *ABC* háromszöget előbb az **a**, majd a **b** vektorral!





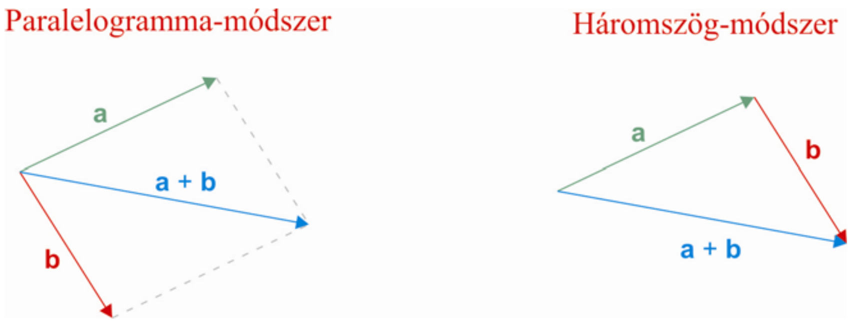
A két eltolás egymásutánját helyettesíthetjük egyetlen eltolással is. Ennek vektorát a két vektor összegének nevezzük.



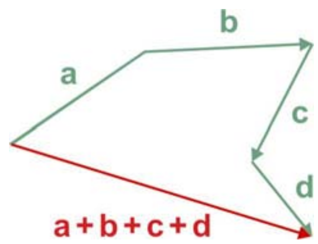
Két vektor összegét kétféle módszer szerint szerkeszthetjük meg:

a) **háromszög-módszer:** az **a** végpontjából mérjük fel a **b** vektort; ekkor az **a** + **b** vektor az **a** kezdőpontjából a **b** végpontjába mutat.

b) **paralelogramma-módszer:** az **a** és **b** vektorokat közös kezdőpontból mérjük fel, kiegészítjük paralelogrammává; ekkor az **a** + **b** vektor a paralelogramma közös kezdőpontból kiinduló átló vektora.



Több vektor összeadásakor használható a **láncszabály**:

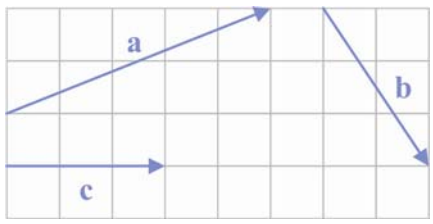


Egy **a** vektor és a nullvektor összege az **a** vektorral egyenlő: $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$.

Módszertani megjegyzés: A következő mintapélda megoldását csoportmunkában javasoljuk, természetesen a tanulók nem nézhetik a tanulók könyvét. Célszerű felidézni a számok összeadásának kommutatív és asszociatív tulajdonságát! A szerkesztések után megbeszéljük a műveleti tulajdonságokat. Ezekre elsősorban a feladatok miatt van szükség, bizonyításuk nem a középszintű érettségi anyaga.

Mintapélda$_2$

Másold át a füzetedbe az **a**, a **b** és a **c** vektort, és szerkeszd meg az alábbi vektorokat:

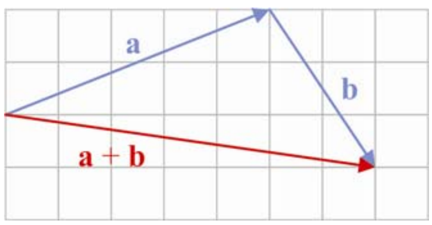


a) **a** + **b**; b) **b** + **a**; c) **a** + **b** + **c**;

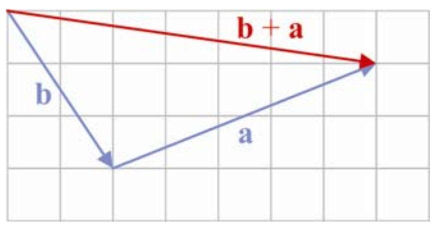
d) **a** + (**b** + **c**); e) (**a** + **b**) + **c** !

Megoldás:

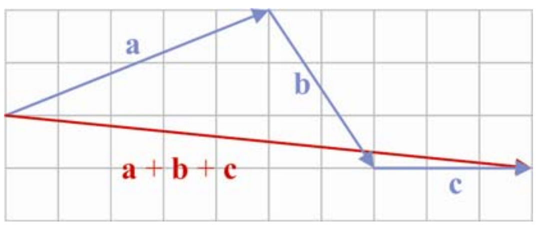
a)



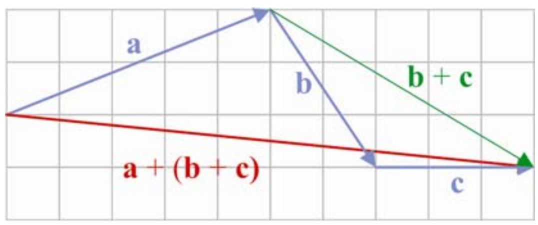
b)



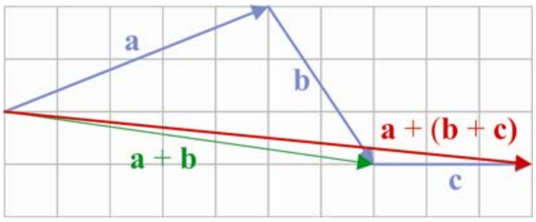
c)



d)



e)

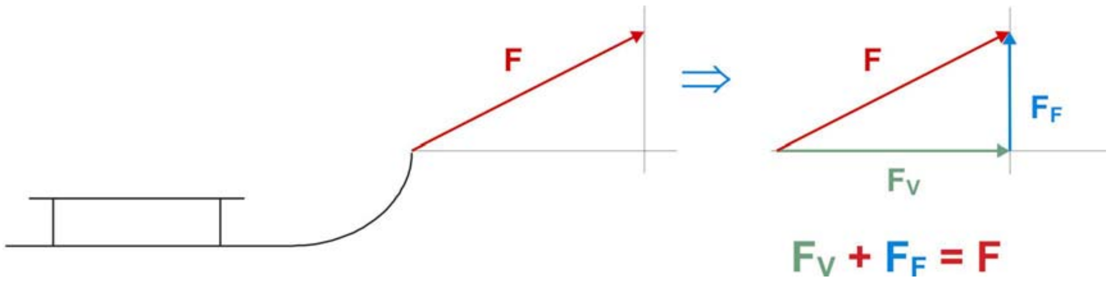


Tapasztalat: a vektorok összeadása

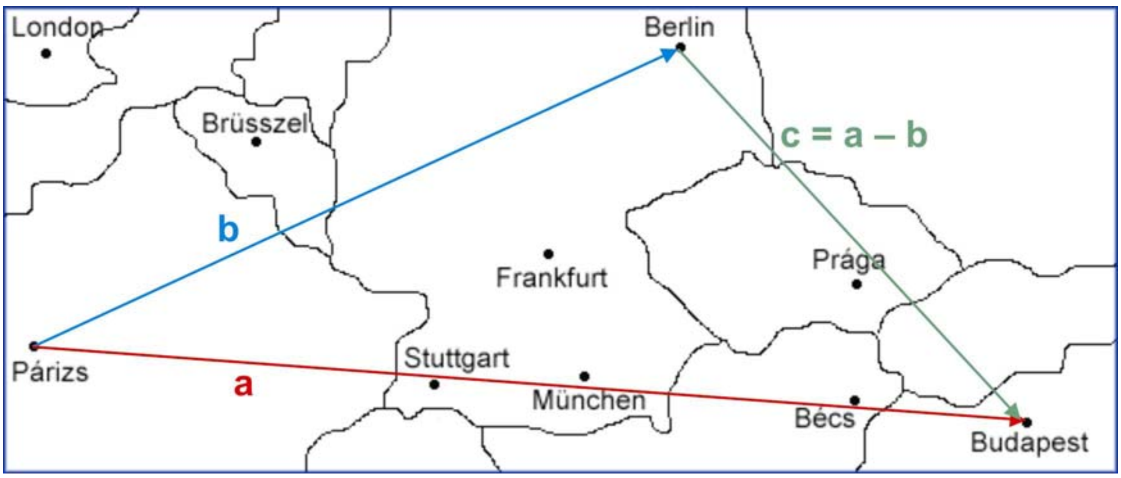
kommutatív: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, és

asszociatív: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ művelet.

A vektorok összeadását használjuk például vektor összetevőkre bontásakor a fizikában. A szánkót húzó személy a kötélen keresztül **F** erőt gyakorol a szánkóra. Ennek az erőnek a vízszintes komponense ($\mathbf{F}_v$) a gyorsításra fordítódik, függőleges komponense ($\mathbf{F}_F$) a test talajra ható nyomóerejét csökkenti. **F** felbontható erre a két komponensre!



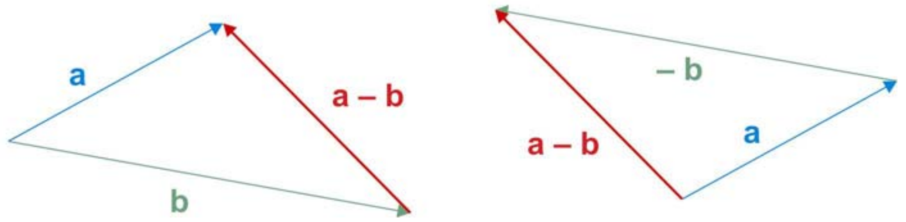
Vektorok kivonása



Laci Párizsból Budapestre repül, Berlin érintésével. Útjának vektorait bejelöltük. Felírhatjuk, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Ha a **c** vektort akarjuk kifejezni **a** és **b** segítségével, vagyis az összeg és az egyik összeadandó segítségével írjuk fel a másik összeadandót, akkor a két vektor különbségét képezzük: **c** = **a** – **b**.

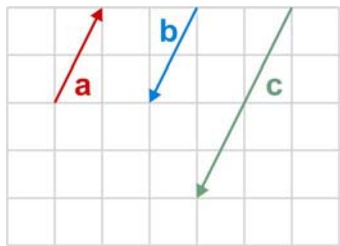
Az **a** – **b** vektort úgy is megszerkeszthetjük, hogy az **a** vektorhoz hozzáadjuk **b** ellentett vektorát (–**b** vektort).

> Az a és b vektorok különbségét úgy képezzük, hogy közös kezdőpontból mérjük fel őket. A végpontjaikat összekötő, a végpontja felé mutató vektor az a – b vektor.



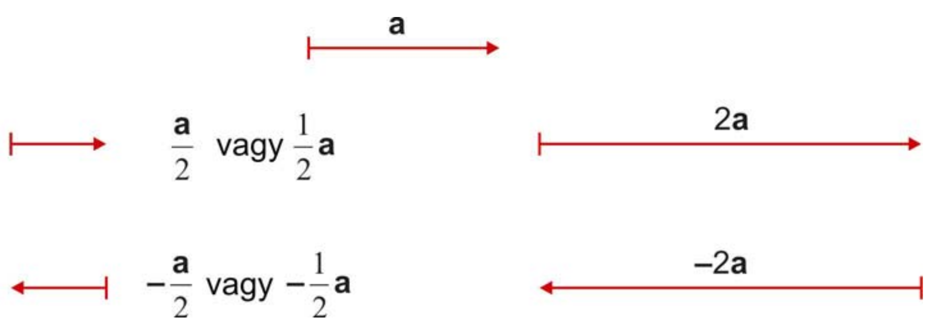
A vektorok kivonására nem teljesül sem a kommutativitás, sem az asszociativitás.

Vektor szorzása számmal



Az ábrán az **a**, **b** és **c** vektorok között összefüggések állapíthatók meg. Az ellenetett vektor definíciójánál láttuk, hogy **b** = **– a**.
c és **b** vektorok között a számmal való szorzás teremt kapcsolatot: **c** vektor két **b** összeadásával keletkezett, így is írhatjuk: **c** = 2**b.** Az ellentett vektor helyett szorzással a **b** = –1·**a** összefüggést is felírhatjuk. Így tehát **c** = 2·(–1·**a)** = –2·**a**

További példák vektorok szorzására:



Módszertani megjegyzés:
Érdemes megbeszélni a tanulókkal, hogy milyen összefüggés van az **a** vektor és a fenti vektorok szorzótényezője, illetve hossza között?

Az **a** vektor *k*-szorosa (k **R**, vagyis *k* egy valós szám) az a vektor, amelynek hossza $|k|\cdot|\mathbf{a}|$, iránya pedig $k>0$ esetén **a** irányával megegyező, $k<0$ esetén **a** irányával ellentétes. $k=0$ esetén nullvektort kapunk.

Ha 0-val szorzunk egy vektort, nullvektort kapunk. 1-nél nagyobb abszolútértékű számmal megszorozva a vektor hossza növekszik (nyújtás), 0 és 1 közé eső abszolútértékű számmal megszorozva csökken (összenyomás).

A csupán szorzótényezőjükben különböző vektorokat egyneműeknek tekintjük, így azok összevonhatók: $\mathbf{a} + 2\mathbf{a} = 3\mathbf{a}$.

Feladatok

3. Mi az összefüggés $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ között?

Megoldás: Egymás ellentett vektorai: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

4. Adj meg három vektort, és rajzold fel $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \mathbf{c}$ és $\mathbf{a} - (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ vektorokat! Segítségükkel igazold, hogy a vektorok kivonására nem teljesül az asszociativitás (felcserélhetőség)!

5. Vegyél fel egy tetszőleges **a** vektort, és szerkeszd meg a következő vektorokat!

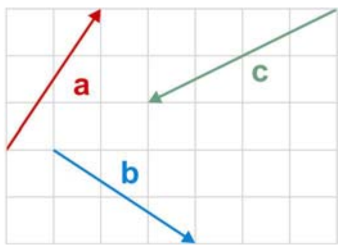
a) $\mathbf{a} + 2\mathbf{a}$; b) $\mathbf{a} - 2\mathbf{a}$; c) $-\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{a}$; d) $-\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{5}{2}\mathbf{a}$;

e) $-\frac{\mathbf{a}}{3} + \mathbf{a}$; f) $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$; g) $-\mathbf{a} + \mathbf{a}$; h) $\frac{1}{2}\left(-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right)$.

6. Adott az ábra szerint az **a**, **b** és **c** vektor. Szerkeszd meg a következő vektorokat!

a) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$; b) $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$; c) $\frac{\mathbf{b} + 2\mathbf{c}}{3}$;

d) $\mathbf{a} - \frac{\mathbf{b} - \mathbf{c}}{2}$; e) $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{b}$; f) $\frac{2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}}{2}$.



7. Add meg a vektorműveletek eredményét (összevonás után):

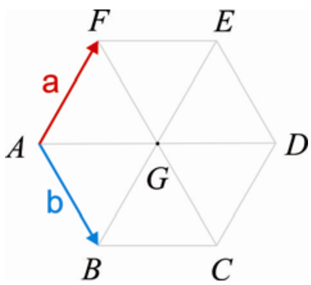
a) $\frac{2\mathbf{a} - \mathbf{b}}{3} - \mathbf{a} + \mathbf{b}$; b) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3 \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{2} - \frac{\mathbf{b}}{2} \right)$;

c) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$; d) $2 \cdot \left(2\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - 2\mathbf{b} \right)$;

e) $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{\mathbf{b}}{6} \right) - \frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{3\mathbf{b}}{4}$.

Megoldás: a) $\frac{4\mathbf{b} - \mathbf{a}}{3}$; b) $\frac{7\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2}$; c) $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{6}\mathbf{b}$; d) $5\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$; e) $\frac{5}{6}\mathbf{a} + \frac{5}{12}\mathbf{b}$.

8. Adott egy szabályos hatszög egy csúcsából kiinduló **a** és **b** vektor. Írd fel ezek segítségével a következő vektorokat:

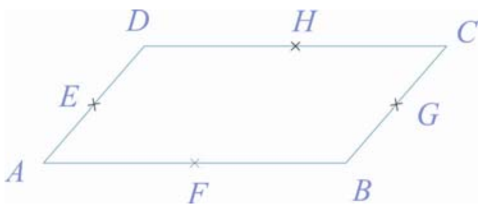


a) $\overrightarrow{AG}$; b) $\overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{BE}$; d) $\overrightarrow{FB}$;

e) $\overrightarrow{CE}$; f) $\overrightarrow{BD}$; g) $\overrightarrow{DF}$.

Megoldás: a) **a** + **b**; b) 2(**a** + **b**); c) 2**a**; d) **b** – **a**; e) **a** – **b**; f) 2**a** + **b**; g) –2**b** – **a**.

9. A paralelogramma oldalvektorainak (**a** és **b**) segítségével írd fel a következő vektorokat, ha



$\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$.

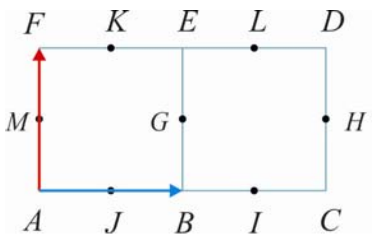
a) $\overrightarrow{AH}$ b) $\overrightarrow{AG}$ c) $\overrightarrow{EB}$ d) $\overrightarrow{BH}$

Melyik vektort adja meg:

e) $-\mathbf{a} - \mathbf{b}$; f) $-\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$; g) $-\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}$?

Megoldás: a) $\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2}$; b) $\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}}{2}$; c) $\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}}{2}$; d) $\mathbf{a} - \frac{\mathbf{b}}{2}$; e) $\overrightarrow{CA}$; f) $\overrightarrow{HA}$; g) $\overrightarrow{GA}$.

10. Adott egy két négyzetből álló téglalap, és egy csúcsából kiinduló $\mathbf{a} = \overrightarrow{AF}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ vektor. Írd fel az **a** és a **b** segítségével a következő vektorokat (*G* – *M*: felezőpontok):



a) $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AG}$; c) $\overrightarrow{AH}$;

d) $\overrightarrow{JL}$; e) $\overrightarrow{IF}$; f) $\overrightarrow{HK}$; g) $\overrightarrow{CK}$; h) $\overrightarrow{HJ}$.

Megoldás: a) $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$; b) $\frac{\mathbf{a}}{2}+\mathbf{b}$; c) $\frac{\mathbf{a}}{2}+2\mathbf{b}$; d) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; e) $\mathbf{a}-\frac{3}{2}\mathbf{b}$; f) $\frac{\mathbf{a}-3\mathbf{b}}{2}$;

g) $\mathbf{a}-\frac{3}{2}\mathbf{b}$; h) $-\frac{\mathbf{a}}{2}-\frac{3}{2}\mathbf{b}$.

11. Az **a** és a **b** vektorok 3 egység hosszúak, egymással 60°-os szöget zárnak be. Mekkora az **a** + **b** vektor hossza?

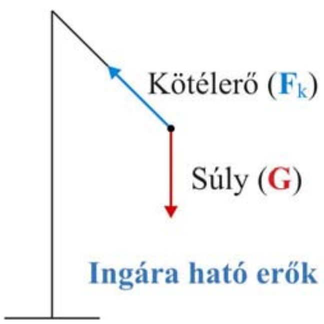
Megoldás: $3\cdot\sqrt{3}$.

12. Az **a** és a **b** vektorok 5 egység hosszúak, egymással 90°-os szöget zárnak be. Mekkora az **a + b** vektor hossza?

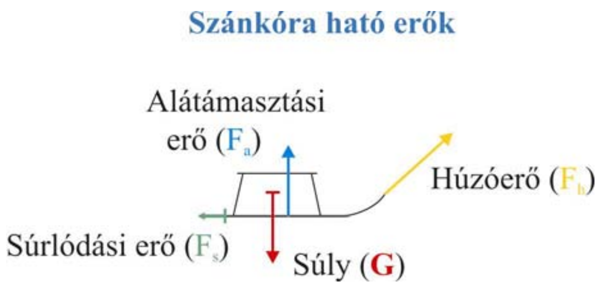
Megoldás: $5\cdot\sqrt{2}$.

13. Egy testre ható erők eredőjét úgy szerkesztjük meg, hogy a súlypontjába mérjük fel a testre ható összes erőt, majd ott összeadjuk az erővektorokat. Szerkeszd meg a testekre ható eredő erőt!

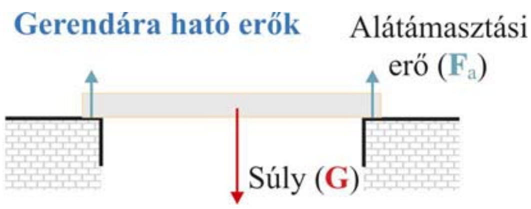
a)



b)



c)

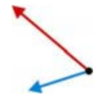


Megoldás:

Az erővektorokat vektoriálisan összegezni kell a testek súlypontjában (az a pont, ahonnan a súly erővektora kiindul).

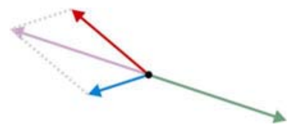
Mintapélda₃

A testek mozgásának vizsgálatakor (dinamikai és kinematikai feladatokban) a következő modellt használjuk: a testet a tömegközéppontjával helyettesítjük, és vizsgáljuk az erre ható erők eredőjét. A tömegpontok nyugalomban vannak, vagyis a rá ható erők eredője zérus (Newton I. törvénye miatt; összegük nullvektor). Szerkeszd meg a következő testre ható hiányzó erőt!



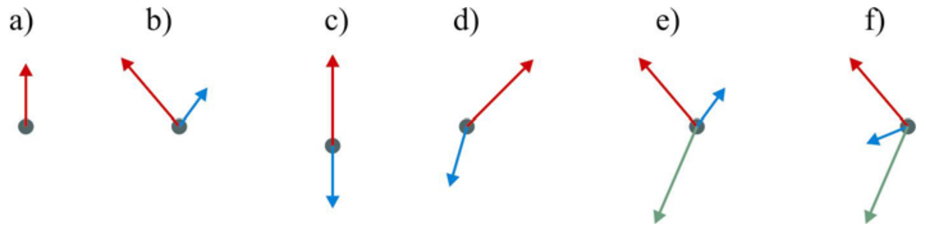
Megoldás:

Megszerkesztjük a piros és a kék erő összegét (lila vektor), és a megoldást ennek az ellentett vektora adja (zöld).

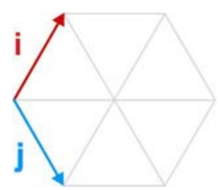


Feladatok

14. Szerkeszd meg a következő, nyugalomban levő testekre ható hiányzó erőt!

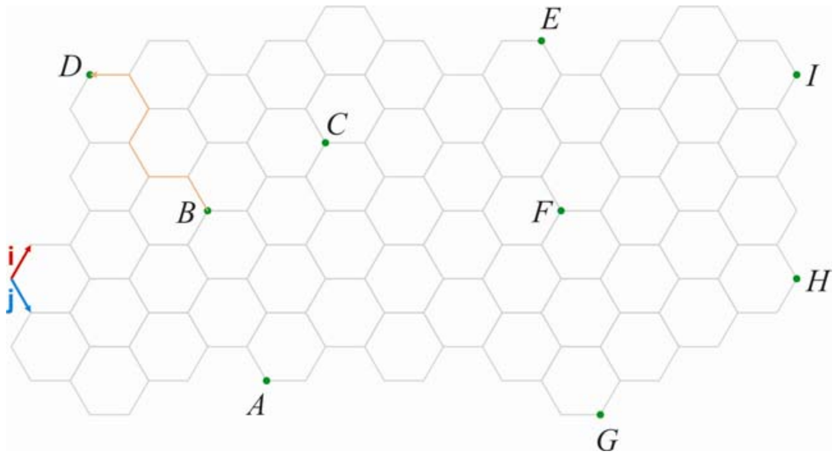


15. A méhecskék koordináta-rendszerében **i** és **j** vektorok segítségével állítsuk elő a következő vektorokat! Segítségképpen határozd meg a hatszög átlóinak és oldalainak vektorait!



Például BD vektor $\overrightarrow{BD} = 3 \cdot (-\mathbf{j}) + 2 \cdot (-(\mathbf{i}+\mathbf{j})) = -5\mathbf{j} - \mathbf{i}$.

a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{CE}$; c) $\overrightarrow{HI}$; d) $\overrightarrow{AG}$; e) $\overrightarrow{FC}$; f) $\overrightarrow{IE}$.



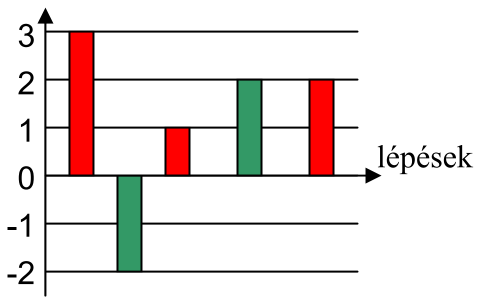
Megoldás:

a) $\overrightarrow{AC} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; b) $\overrightarrow{CE} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; c) $\overrightarrow{HI} = 3(\mathbf{i} - \mathbf{j})$; d) $\overrightarrow{AG} = 8\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$;

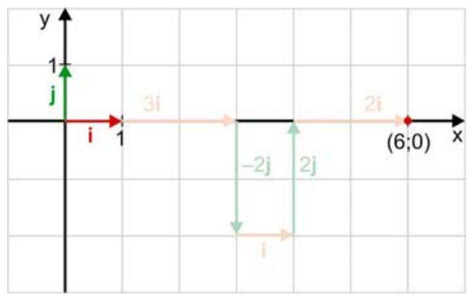
e) $\overrightarrow{FC} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; f) $\overrightarrow{IE} = -6\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.

16. Az oszlopdiagramokon azokat a lépéseket látod, amelyeket egymás után meg kell tenned a koordináta-rendszerben **i** és **j** vektorokkal (piros: **i**, zöld: **j**; **i** az *x* irányú egységvektor, **j** az *y* irányú egységvektor). Indulj ki az origóból, és mérd fel a megfelelő lépéseket! A végén add meg annak a pontnak a koordinátáit, ahová érkeztél!

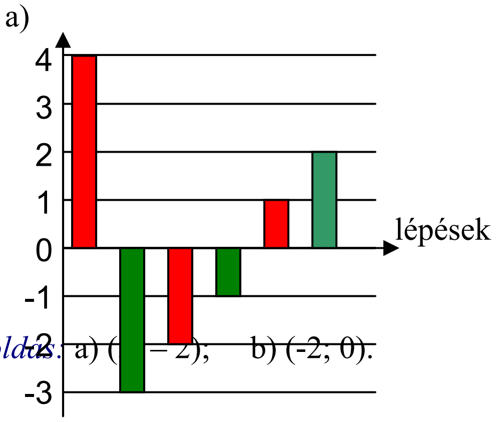
Példa:



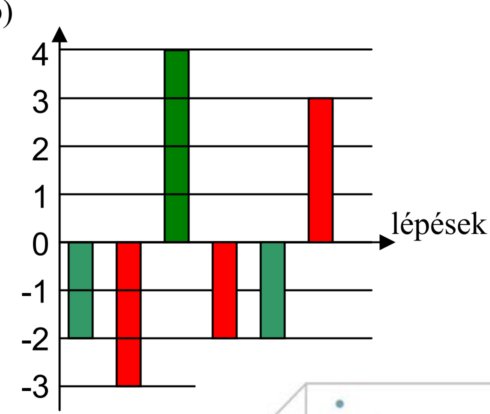
A diagram szerint **i**-vel 3 lépés jobbra (3**i**), **j**-vel 2 lépés le (-2 **j**) stb. A végén megérkezünk a (6; 0) pontba.



a)

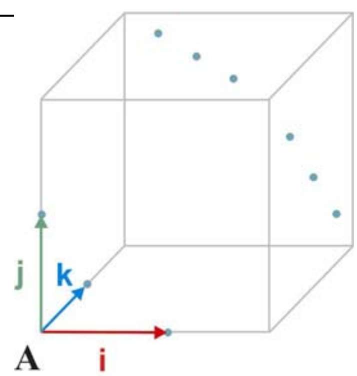


b)



Megoldás: a) ([illegible] – 2); b) (-2; 0).

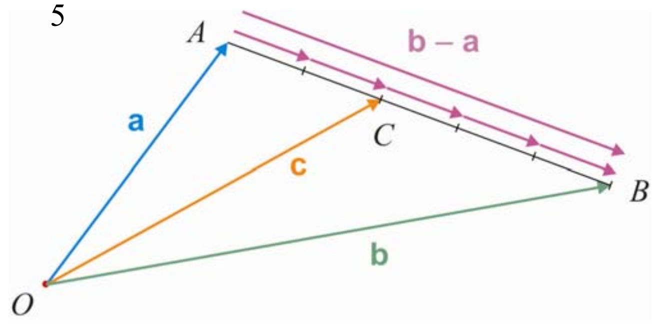
17. Állítsd elő az **i**, **j** és **k** (az *A* csúcsból az élfelező pontokba mutató) vektorokkal az *A* csúcsból a kocka két lapátlójának negyedelő pontjaiba mutató vektorokat!



Megoldás: például $\dfrac{\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{2}$.

18. *O*-ból az *A* pontba az **a** helyvektor, *B* pontba a **b** helyvektor mutat. Előállítjuk az *O*-ból az *AB* szakaszt 2 : 3 arányban osztó *C* pontba mutató **c** helyvektort:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + 2 \cdot \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{5} = \frac{5\mathbf{a} + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})}{5} = \frac{3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}}{5}$$



Hasonló módon állítsd elő (írd fel) az **a** és **b** vektorok segítségével az *AB*-t a megadott arányban osztó pontokba mutató helyvektorokat (készíts ábrákat is):

a) 1 : 1 (felezőpont); b) 1 : 2 (*A*-hoz közelebbi harmadoló pont);

c) 2 : 1; d) 3 : 2; e) 1 : 3;

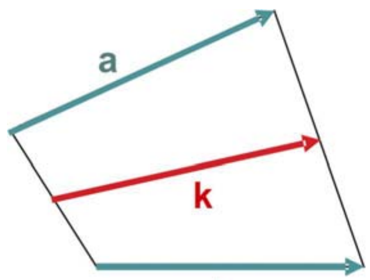
f) 4 : 5; g) 2 : 7; h) 3 : 4.

Megoldás:

a) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; b) $\frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$; c) $\frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3}$; d) $\frac{2\mathbf{a}+3\mathbf{b}}{5}$; e) $\frac{3\mathbf{a}+\mathbf{b}}{4}$; f) $\frac{5\mathbf{a}+4\mathbf{b}}{9}$;

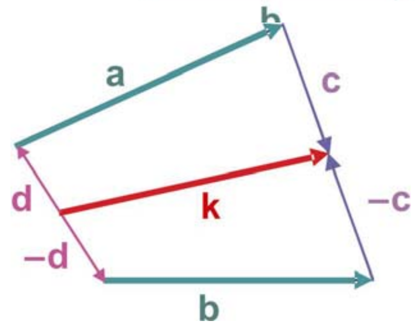
g) $\frac{7\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{9}$; h) $\frac{4\mathbf{a}+3\mathbf{b}}{7}$.

19. Igazold, hogy tetszőleges négyszög középvonalának vektorára felírható a $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$ összefüggés.



Megoldás:

Segédvektorokat veszünk fel, és segítségükkel kifejezzük **k**-t: **k** = **d** + **a** + **c**, valamint **k** = – **d** + **b** – **c** . Ezeket összeadva **c** és **d** kiesik, és marad 2**k** = **a** + **b**, ahonnan következik az álltás.



Módszertani megjegyzés: Diagnosztikához javasolt feladattípusok:
négyzetrácsos lapon adott **a** és **b** vektorral vektorműveletek ábrázolása;
szabályos oktaéderben vagy szabályos síkidomban (nyolcszögben) egyenlő és ellentett vektorok keresése, két adott vektorral oldalvektorok felíratása;

vektoralgebrai számítások (összevonások) után egyenlő vektorok keresése (pl. 6 kifejezésből melyik adja ugyanazt a végeredményt).

Amennyiben marad idő, a modult zárhatjuk Activity játékkal, amelyben a tanult fogalmak valamelyikét körülírják, lerajzolják vagy elmutogatják a tanulók, és a csoporttársaiknek adott idő alatt kell a feladványt kitalálni. A tanár előkészíti a fogalmakat, valamint a „körülír”, „elmutogat”, „rajzol” felíratokat tartalmazó papírcédulákat, amelyből egyet-egyet húz, akit a csapat kijelöl. Egy másik csapatban válssznak egy diákot, aki méri az időt.

Kislexikon

Vektor: irányított szakasz, vagy az azzal jellemezhető mennyiség.

Vektor abszolútértéke (|**a**|): a vektor hossza.

Két vektor egyenlő, ha hosszuk és irányuk megegyezik.

Egységvektor (e): egységnyi hosszúságú vektor.

Nullvektor (0): 0 hosszúságú vektor. Definíciója: olyan vektor, amelynek megegyezik a kezdőpontja és a végpontja. Iránya tetszőleges.

Vektor ellentettje: az a vektor, amelyik az adott vektorral egyenlő abszolútértékű, egyező állású, de vele ellentétes irányú.

Két vektor összegét kétféle módszer szerint szerkeszthetjük meg:

a) **háromszög-módszer:** az **a** végpontjából mérjük fel a **b** vektort; ekkor **a** + **b** az **a** kezdőpontjából a **b** végpontjába mutat;

b) **paralelogramma-módszer:** az **a** és a **b** vektorokat közös kezdőpontból mérjük fel, kiegészítjük paralelogrammává. **a** + **b** a paralelogramma közös kezdőpontból kiinduló átló vektora.

A vektorok összeadása kommutatív és asszociatív művelet.

a és b vektorok különbségét úgy képezzük, hogy közös kezdőpontból mérjük fel őket. A végpontjaikat összekötő, **a** végpontja felé mutató vektor az **a** – **b** vektor.

A vektorok kivonása nem kommutatív és nem asszociatív művelet.

v vektor *k*-szorosa (*k*   **R**, vagyis *k* egy valós szám) az a vektor, amelynek hossza |*k*|·|**v**|, iránya pedig $k > 0$ esetén **v** irányával megegyező, $k < 0$ esetén **v** irányával ellentétes. $k = 0$ esetén nullvektort kapunk.