

Über Tensoren, Matrizen und Pseudovektoren

von Mike Georg Bernhardt*

14. August 2009

Der folgende Text behandelt die Transformationseigenschaften von Tensoren und Matrizen, den Unterschied zwischen Tensoren und Matrizen (Ist jede Matrix ein Tensor?) und die Darstellung von Pseudovektoren (Winkelgeschwindigkeit, Drehimpuls) als antisymmetrische Tensoren zweiter Stufe.

*E-Mail: m.g.bernhardt@web.de

Inhaltsverzeichnis

1	Tensoren	3
1.1	Tensoren und Koordinatentransformationen	3
1.2	Tensoren und lineare Koordinatentransformationen	3
1.3	Tensoren kann man nicht wegtransformieren!	4
1.4	Die Symmetrieeigenschaften von Tensoren sind invariant!	5
2	Matrizen	6
2.1	Matrizen und Koordinatentransformationen	6
2.2	Matrizen und lineare Koordinatentransformationen	7
2.3	Ist jede quadratische Matrix ein Tensor?	8
3	Pseudovektoren	9
3.1	Was sind Pseudovektoren?	9
3.2	Tensordarstellung von Pseudovektoren	10
3.3	Zusammenfassung	15

1 Tensoren

1.1 Tensoren und Koordinatentransformationen

Tensoren sind dadurch definiert, dass sich ihre Komponenten auf bestimmte Weise transformieren. So ist z.B. T dann ein Tensor zweiter Stufe, wenn sich seine beiden kontravarianten (1.1), kovarianten (1.2) bzw. gemischten (1.3) Komponenten so verhalten:

$$T^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} T^{ab}, \quad (1.1)$$

$$T_{a'b'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} T_{ab}, \quad (1.2)$$

$$T^{a'}{}_{b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} T^a{}_b. \quad (1.3)$$

Hierbei ist jeweils über a und b zu summieren.¹

Frage: Machen die Komponenten so etwas von selbst? Antwort: Nein! Wenn man sagt, die Komponenten transformieren sich so wie in Gleichung (1.1)–(1.3), dann meint man damit, bezüglich einer bestimmten Transformation; besser gesagt, bezüglich einer Koordinatentransformation! Ein Tensor ist zunächst ein abstraktes Objekt; erst nach Einführen eines bestimmten Koordinatensystems können seine Komponenten bezüglich dieses Koordinatensystems hingeschrieben werden. Wenn man nun eine Koordinatentransformation ausführt, sodass die Komponenten x^a eines Vektors nach $x^{a'}$ übergehen, ändern sich auch die Komponenten des Tensors, und wenn sich diese Änderung nach Gleichung (1.1)–(1.3) vollzieht: Voilà, dann ist T ein Tensor!

(1.1)–(1.3) gelten für beliebige Koordinatentransformationen, also auch nicht-lineare wie beispielsweise der Übergang zu Polar- oder Kugelkoordinaten. Im Falle von linearen Transformationen, wie z.B. Drehungen im Raum oder Lorentztransformationen, lassen sie sich auch anders – vielleicht einfacher – schreiben:

1.2 Tensoren und lineare Koordinatentransformationen

Eine lineare Koordinatentransformation wird durch eine Matrix A repräsentiert,

$$x^a \mapsto x^{a'} = A^{a'}{}_a x^a. \quad (1.4)$$

¹Hier und im Folgenden wird von der Summenkonvention Gebrauch gemacht; über doppelt auftretende Indizes ist zu summieren. Da ich konsequent zwischen ko- und kontravarianten Indizes unterscheidet, gilt immer: Die Summe ist zu bilden, wenn in einem Produkt der gleiche Index einmal als unterer (ko-) und einmal als oberer (kontravarianter) Index auftritt.

Die Ableitung dieser Gleichung nach x^a lautet

$$\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} = A^{a'}{}_a. \quad (1.5)$$

Koordinatentransformationen sind bijektiv, also umkehrbar: Die Rücktransformation erfolgt durch Anwendung der Inversen von A:

$$x^{a'} \mapsto x^a = (A^{-1})^a{}_{a'} x^{a'}. \quad (1.6)$$

Differentiation liefert

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} = (A^{-1})^a{}_{a'}. \quad (1.7)$$

In (1.1)–(1.3) eingesetzt ergibt das:

$$T^{a'b'} = A^{a'}{}_a A^{b'}{}_b T^{ab}, \quad (1.8)$$

$$T_{a'b'} = (A^{-1})^a{}_{a'} (A^{-1})^b{}_{b'} T_{ab}, \quad (1.9)$$

$$T^{a'}{}_{b'} = A^{a'}{}_a (A^{-1})^b{}_{b'} T^a{}_b. \quad (1.10)$$

Manchmal sieht man Gleichung (1.8)–(1.10), oder eine davon, als „Definition“ eines Tensors. Dies ist aber nur ein Spezialfall für lineare Koordinatentransformationen. Allgemeiner sind (1.1)–(1.3).

1.3 Tensoren kann man nicht wegtransformieren!

Etwas weniger salopp ausgedrückt: Wenn ein Tensor in einem Koordinatensystem von Null verschiedene Komponenten besitzt, dann hat er auch in jedem anderen Koordinatensystem nichtverschwindende Komponenten. Diese Eigenschaft folgt direkt aus dem Transformationsverhalten von Tensoren, (1.1)–(1.3). An diesen Formeln kann man nämlich ablesen: Wenn es ein Koordinatensystem gibt, in dem *alle* $T^{ab} = 0$ sind, dann sind auch alle $T^{a'b'} = 0$, d.h. der Tensor ist auch in allen anderen Koordinatensystemen Null!

Ein Beispiel aus der Elektrodynamik ist die kovariante Darstellung der Maxwellgleichungen mit Hilfe des Feldstärketensors. Dieser setzt sich aus den \vec{E} - und \vec{B} -Feldern zusammen. Ist er Null, liegt weder ein elektrisches- noch ein magnetisches Feld vor, und aufgrund der Tensoreigenschaft (1.1)–(1.3) gilt dies in jedem Koordinatensystem. Ist mindestens eine Komponente von \vec{E} oder \vec{B} von Null verschieden, so hat der Feldstärketensor auch in allen anderen Bezugssystemen nichtverschwindende Komponenten. Durch Wechsel in ein bewegtes Bezugssystem, also eine Lorentztransformation, werden die Komponenten von \vec{E} und \vec{B}

zwar miteinander vermischt, aber man kann nicht alle Komponenten von \vec{E} und \vec{B} durch einen solchen Koordinatenwechsel zum Verschwinden bringen.

Ein weiteres Beispiel ist der Riemann'sche Krümmungstensor in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Falls er nichtverschwindende Komponenten besitzt, bezeichnet man die Raumzeit als gekrümmt; andernfalls ist sie flach. Aufgrund des tensoriellen Transformationsverhaltens ist diese Aussage vom gewählten Koordinatensystem unabhängig.

Ganz allgemein ist diese Eigenschaft von Tensoren auch der Grund dafür, weshalb jedes physikalische Gesetz tensoriell formuliert werden kann – und sollte! Betrachten wir dazu die Gleichung $A = B$, wobei A und B physikalische Größen enthalten, die mathematisch beliebig kompliziert miteinander verknüpft seien. Es gilt dann natürlich auch $C := A - B = 0$. Falls A und B Tensoren sind, so ist auch C ein Tensor, und folglich ist $C = 0$ in jedem beliebigen Koordinatensystem gültig: $C = C' = C'' = \dots = 0$. Mit anderen Worten: Die Gleichung $A = B$ gilt in jedem beliebigen Koordinatensystem, sofern A und B tensorielle Größen sind; sie ist forminvariant – man sagt auch kovariant – bezüglich Koordinatentransformationen: $A = B$, $A' = B'$, $A'' = B''$, etc.

1.4 Die Symmetrieeigenschaften von Tensoren sind invariant!

Tensoren sind entweder symmetrisch, antisymmetrisch oder gar nicht symmetrisch. An der Transformationsformel kann man ablesen, dass diese Symmetrieeigenschaften bei Koordinatentransformationen erhalten bleiben. Dies können wir kurz am Beispiel der kovarianten Komponenten eines Tensors zweiter Stufe nachrechnen:

- symmetrisch: $T^{ab} = T^{ba}$

$$\curvearrowright T^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} T^{ab} = \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} T^{ba} = T^{b'a'} \quad (1.11)$$

- antisymmetrisch: $T^{ab} = -T^{ba}$

$$\curvearrowright T^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} T^{ab} = \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} (-T^{ba}) = -T^{b'a'} \quad (1.12)$$

Durch Symmetrien verringert sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten eines Tensors. In drei Dimensionen hat ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe maximal 6 (in vier Dimensionen 10), ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe maximal 3 (in vier Dimensionen 6) unabhängige Komponenten – und dies gilt in allen Koordinatensystemen!

2 Matrizen

2.1 Matrizen und Koordinatentransformationen

Mit einer Matrix können wir ein \vec{x} in ein \vec{y} verwandeln – die Matrix vermittelt eine lineare Abbildung

$$\vec{y} = M \vec{x}. \quad (2.1)$$

Betrachten wir nun die Wirkung der Matrix auf die Basisvektoren $\vec{n}_{(j)}$ des gewählten Koordinatensystems.² Unsere Matrix möge den j -ten Basisvektor auf den Vektor $\vec{m}_{(j)}$ abbilden,

$$\vec{m}_{(j)} = M \vec{n}_{(j)}. \quad (2.2)$$

In Komponentenschreibweise lautet dies

$$m_{(j)}^a = M^a_b n_{(j)}^b. \quad (2.3)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir eine Orthonormalbasis. Das Skalarprodukt aus zwei Basisvektoren ergibt dann das Kronecker-Delta

$$\langle \vec{n}_{(i)}, \vec{n}_{(j)} \rangle = n_b^{(i)} n_{(j)}^b = \delta_j^i. \quad (2.4)$$

Wir überlegen uns, wie $m_{(j)}^a$ noch geschrieben werden kann:

$$m_{(j)}^a = m_{(i)}^a \delta_j^i = m_{(i)}^a \langle \vec{n}_{(i)}, \vec{n}_{(j)} \rangle = m_{(i)}^a n_b^{(i)} n_{(j)}^b. \quad (2.5)$$

Ein Vergleich mit (2.3) liefert

$$M^a_b = m_{(i)}^a n_b^{(i)}. \quad (2.6)$$

Die Matrix wird also eindeutig durch die (orthonormalen) Basisvektoren und deren Bilder bestimmt!³

Die Bedeutung dieser Gleichung wird besonders deutlich, wenn man als Basis die Standardbasis $\{\vec{e}_{(j)}\}$ mit $e_{(j)}^i = \delta_j^i$ wählt. Dann vereinfacht sich (2.6) zu

$$M^a_b = m_{(i)}^a e_b^{(i)} = m_{(i)}^a \delta_b^i = m_{(b)}^a, \quad (2.7)$$

und man kann ablesen: Die Spalten von M sind die Bilder der Basisvektoren!

²Der Index j bezeichnet den j -ten Basisvektor. Er steht in Klammern, damit man ihn nicht mit einem Komponentenindex verwechselt.

³In (2.6) muss über i summiert werden.

Wir wissen bereits, wie sich die ko- und kontravarianten Vektorkomponenten transformieren, nämlich

$$m^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} m^a \quad \text{bzw.} \quad n_{b'} = \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} n_b. \quad (2.8)$$

Das können wir in (2.6) einsetzen, um das Transformationsverhalten der Matrix M zu erhalten:

$$M^{a' b'} = m_{(i)}^{a'} n_{b'}^{(i)} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} m_{(i)}^a \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} n_b^{(i)} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} m_{(i)}^a n_b^{(i)}. \quad (2.9)$$

Somit gilt

$$M^{a' b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} M^a{}_b. \quad (2.10)$$

Ein Vergleich mit (1.3) ergibt: Die Matrix einer linearen Abbildung besitzt das gleiche Transformationsverhalten bezüglich beliebiger Koordinatentransformationen wie ein gemischter Tensor zweiter Stufe.

2.2 Matrizen und lineare Koordinatentransformationen

Es ist interessant, sich das Verhalten einer Matrix M bezüglich linearer Koordinatentransformationen zu überlegen – ohne von den Ergebnissen des vorigen Abschnittes Gebrauch zu machen. Es gelte

$$\vec{y} = M \vec{x}, \quad (2.11)$$

$$\vec{y}' = M' \vec{x}'. \quad (2.12)$$

Betrachten wir wieder eine lineare Koordinatentransformation A . Diese ist eine Abbildung von \vec{x} nach \vec{x}' , bzw. \vec{y} nach \vec{y}' und umgekehrt:

$$\vec{x}' = A \vec{x}, \quad (2.13)$$

$$\vec{y}' = A \vec{y}, \quad (2.14)$$

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{x}', \quad (2.15)$$

$$\vec{y} = A^{-1} \vec{y}'. \quad (2.16)$$

Wenn wir diese Gleichungen in der Reihenfolge (2.12), (2.14), (2.11), (2.15)) ausnutzen, kommt die Beziehung zwischen M und M' , also das Verhalten unserer Matrix bezüglich der Koordinatentransformation A , heraus:

$$M' \vec{x}' = \vec{y}' = A \vec{y} = A M \vec{x} = A M A^{-1} \vec{x}', \quad (2.17)$$

und da \vec{x}' beliebig ist

$$M' = A M A^{-1}. \quad (2.18)$$

In Komponentenschreibweise werden die Gleichungen (2.11)–(2.16) zu

$$y^a = M^a_b x^b \quad (2.11')$$

$$y^{a'} = M^{a'}_{b'} x^{b'} \quad (2.12')$$

$$x^{a'} = A^{a'}_a x^a \quad (2.13')$$

$$y^{a'} = A^{a'}_a y^a \quad (2.14')$$

$$x^a = (A^{-1})^a_{a'} x^{a'} \quad (2.15')$$

$$y^a = (A^{-1})^a_{a'} y^{a'}, \quad (2.16')$$

und aus (2.18) wird damit

$$M^{a'}_{b'} = A^{a'}_a (A^{-1})^b_{b'} M^a_b. \quad (2.18')$$

Dies ist mit (1.10) identisch, dem Verhalten eines gemischten Tensors zweiter Stufe bezüglich linearer Koordinatentransformationen.

2.3 Ist jede quadratische Matrix ein Tensor?

Wir haben in den letzten beiden Abschnitten gesehen, dass sich die Matrix einer linearen Abbildung in ihrem Transformationsverhalten formal nicht von einem Tensor unterscheidet. Eine Matrix kann jedoch mehrdeutig interpretiert werden – als lineare Abbildung, linearer Operator, Bilinearform, Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems, etc. Dass sich nicht jede quadratische Matrix wie ein Tensor transformiert, kann durch ein einfaches Beispiel gezeigt werden: Wir konstruieren zwei Matrizen M und N mit den Komponenten $M^{ab} = r^a v^b$ bzw. $N^{ab} = r^a r^a v^b$, wobei r^a und v^b jeweils die Komponenten von Tensoren erster Stufe darstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns darunter den Orts- und Geschwindigkeitsvektor eines Teilchens denken.

$$M = \begin{pmatrix} x v_x & x v_y & x v_z \\ y v_x & y v_y & y v_z \\ z v_x & z v_y & z v_z \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} x^2 v_x & x^2 v_y & x^2 v_z \\ y^2 v_x & y^2 v_y & y^2 v_z \\ z^2 v_x & z^2 v_y & z^2 v_z \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Wir prüfen nun das Transformationsverhalten von M und N :

$$M^{a'b'} = r^{a'} v^{b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} r^a \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} v^b = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} M^{ab}, \quad (2.20)$$

$$N^{a'b'} = r^{a'} r^{a'} v^{b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} r^a \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} r^a \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} v^b = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^b} N^{ab}. \quad (2.21)$$

M ist ein Tensor, N jedoch nicht. Die Antwort auf die oben gestellte Frage lautet demnach: Nein!

3 Pseudovektoren

3.1 Was sind Pseudovektoren?

Die Frage, ob jede Matrix ein Tensor ist, kann auch eine Stufe tiefer gestellt werden: Ist jedes n -Tupel ein Vektor (in n Dimensionen)? Antwort: Nein! Es gibt eine Reihe von „Vektoren“, die nicht bezüglich jeder beliebigen Koordinatentransformation das selbe Transformationsverhalten haben – eben jenes, welches sie zu Vektoren macht. Bei Spiegelungen verhalten sich nämlich manche „Vektoren“ anders als normale Vektoren; daher nennt man diese auch Pseudo- oder axiale Vektoren. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, der Drehimpuls \vec{L} , das Magnetfeld \vec{B} und jedes Kreuzprodukt zweier Vektoren sind Pseudovektoren. Am Beispiel der Winkelgeschwindigkeit soll dies kurz näher erläutert werden.

Bei einer Drehbewegung ergibt sich die Bahngeschwindigkeit \vec{v} im Abstand \vec{r} von der Drehachse aus dem Kreuzprodukt von Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Abstandsvektor \vec{r} ,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3.1)$$

In Komponentenschreibweise lautet diese Gleichung

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}. \quad (3.1')$$

Betrachten wir nun eine Spiegelung an der y, z -Ebene. Mathematisch lässt sie sich durch die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

ausdrücken. Diese Koordinatentransformation auf den Orts- und Geschwindigkeitsvektor angewandt liefert

$$\vec{r}' = S \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\vec{v}' = S \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Wenn zwischen den transformierten Vektoren \vec{v}' und \vec{r}' immer noch die Beziehung $\vec{v}' = \vec{\omega}' \times \vec{r}'$ bestehen soll,⁴ folgt für das Transformationsverhalten von $\vec{\omega}$

$$\begin{pmatrix} -v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_y z - \omega'_z y \\ -\omega'_z x - \omega'_x z \\ \omega'_x y + \omega'_y x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -\omega_y z + \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

wobei im letzten Schritt Gleichung (3.1') eingesetzt wurde. Es gilt also

$$\vec{\omega}' = \begin{pmatrix} \omega_x \\ -\omega_y \\ -\omega_z \end{pmatrix} = -S\vec{\omega}. \quad (3.6)$$

Die Winkelgeschwindigkeit transformiert sich bei dieser Spiegelung also anders als \vec{r} und \vec{v} . Letztere sind Vektoren, $\vec{\omega}$ ist es nicht!

Zur Veranschaulichung dieses Beispiels denken wir uns eine in der x, y -Ebene liegende Scheibe, die um die z -Achse rotiert. Die Drehung erfolge von oben betrachtet im Gegenuhrzeigersinn (Rechtsdrehung), sodass $\vec{\omega}$ nach oben, also in positive z -Richtung, zeigt. Betrachten wir die rotierende Scheibe in einem Spiegel, der in der y, z -Ebene liegt – nichts anderes bedeutet die durch S repräsentierte Koordinatentransformation –, so wird aus der Rechtsdrehung eine Linksdrehung; $\vec{\omega}'$ muss also nach unten zeigen. Wäre $\vec{\omega}$ ein Vektor, so bliebe er beim Blick in diesen Spiegel unverändert, sein Spiegelbild zeigte ebenfalls nach oben.

3.2 Tensordarstellung von Pseudovektoren

3.2.1 Winkelgeschwindigkeit

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, dass die Winkelgeschwindigkeit kein Vektor ist, weil sie sich bei Spiegelungen anders transformiert als normale Vektoren. Im Folgenden wird gezeigt, dass ω_x , ω_y und ω_z die Komponenten eines antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe sind, der automatisch das richtige Transformationsverhalten bei allen Koordinatentransformationen, inklusive Spiegelungen, besitzt.

Wir gehen wieder von der Beziehung $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ aus, schreiben aber die Komponentendarstellung in etwas kompakterer Form,

$$v^a = \varepsilon^{abc} \omega_b r_c. \quad (3.1'')$$

⁴Und das muss der Fall sein, denn sonst wäre Gleichung (3.1) als Definition der Winkelgeschwindigkeit völlig unbrauchbar. Die Definition einer physikalischen Größe muss unabhängig vom gewählten Bezugssystem sein.

Hierbei ist ε^{abc} das so genannte Levi-Civita-Symbol mit den Werten

$$\varepsilon^{abc} = \begin{cases} 1 & \text{für } abc = 123, 231, 312, \\ -1 & \text{für } abc = 132, 321, 213, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Durch den Ausdruck $\varepsilon^{abc} \omega_b$ wird eine Matrix Ω^{ac} definiert, deren Elemente wir aus (3.7) ablesen können:

$$\Omega^{ac} = \varepsilon^{abc} \omega_b \quad \Leftrightarrow \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Damit kann die Gleichung $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ in einer Form geschrieben werden, die auf Pseudovektoren verzichtet:

$$v^a = \Omega^{ab} r_b \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \Omega \vec{r}. \quad (3.9)$$

Eine kurze Probe möge uns davon überzeugen, dass Gleichung (3.9) mit (3.1') identisch ist:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Das Transformationsverhalten von Ω ergibt sich, wenn wir verlangen, dass bezüglich eines anderen Koordinatensystems die Beziehung $\vec{v}' = \Omega' \vec{r}'$ erfüllt ist:

$$v^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} v^a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \Omega^{ab} r_b = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \Omega^{ab} \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} r_{b'} \stackrel{!}{=} \Omega^{a'b'} r_{b'}. \quad (3.11)$$

Es gilt also

$$\Omega^{a'b'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} \Omega^{ab}. \quad (3.12)$$

Die Komponenten von Ω transformieren sich bei beliebigen Koordinatentransformationen also wie die eines Tensors zweiter Stufe. Trotzdem wollen wir noch einmal nachrechnen, was bei der oben betrachteten Spiegelung S passiert:

$$\begin{aligned} \Omega' &= S \Omega S^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_z & 0 & -\omega'_x \\ -\omega'_y & \omega'_x & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

und somit gilt

$$\vec{\omega}' = \begin{pmatrix} \omega_x \\ -\omega_y \\ -\omega_z \end{pmatrix} = -S \vec{\omega}, \quad (3.14)$$

was mit dem obigen Ergebnis (3.6) übereinstimmt.

3.2.2 Drehimpuls

Ein weiteres Beispiel für einen Pseudovektor, dessen Komponenten einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe bilden, ist der Drehimpuls. Er ist definiert als das Kreuzprodukt aus Orts- und Impulsvektor,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (3.15)$$

Seine Komponenten lauten

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y p_z - z p_y \\ z p_x - x p_z \\ x p_y - y p_x \end{pmatrix}. \quad (3.15')$$

Mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols können wir dies wie folgt ausdrücken:

$$L^a = \varepsilon^{abc} r_b p_c. \quad (3.15'')$$

Um daraus eine Matrix zu konstruieren, multiplizieren wir mit ε_{ija} und summieren über den Index a :

$$\varepsilon_{ija} L^a = \varepsilon_{ija} \varepsilon^{abc} r_b p_c. \quad (3.16)$$

Der Ausdruck $\varepsilon_{ija} L^a$ definiert die Matrix L_{ij} ,

$$L_{ij} = \varepsilon_{ija} L^a \quad \Leftrightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y \\ -L_z & 0 & L_x \\ L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Das Produkt der beiden Levi-Civita-Symbole in (3.16) können wir direkt ausrechnen. Dazu machen wir von der allgemeinen Beziehung

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} = \delta_i^a \delta_j^b \delta_k^c + \delta_i^b \delta_j^c \delta_k^a + \delta_i^c \delta_j^a \delta_k^b - \delta_i^a \delta_j^c \delta_k^b - \delta_i^b \delta_j^a \delta_k^c - \delta_i^c \delta_j^b \delta_k^a \quad (3.18)$$

Gebrauch, ersetzen k durch a und führen die Summe über $a = 1, 2, 3$ aus:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ija} \varepsilon^{abc} &= \delta_i^a \delta_j^b \delta_a^c + \delta_i^b \delta_j^c \delta_a^a + \delta_i^c \delta_j^a \delta_a^b - \delta_i^a \delta_j^c \delta_a^b - \delta_i^b \delta_j^a \delta_a^c - \delta_i^c \delta_j^b \delta_a^a \\ &= \delta_i^c \delta_j^b + 3 \delta_i^b \delta_j^c + \delta_i^c \delta_j^b - \delta_i^b \delta_j^c - 3 \delta_i^c \delta_j^b - \delta_i^b \delta_j^c \\ &= \delta_i^b \delta_j^c - \delta_i^c \delta_j^b. \end{aligned} \quad (3.19)$$

In (3.16) eingesetzt ergibt sich

$$L_{ij} = (\delta_i^b \delta_j^c - \delta_i^c \delta_j^b) r_b p_c = r_i p_j - p_i r_j. \quad (3.20)$$

Damit haben wir eine zu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ alternative Schreibweise, welche keine Pseudovektoren enthält:

$$L_{ij} = r_i p_j - p_i r_j \quad \Leftrightarrow \quad L = \vec{r} \vec{p}^T - \vec{p} \vec{r}^T. \quad (3.21)$$

Hierbei sind mit \vec{r} bzw. \vec{p} die Spaltenvektoren und mit \vec{r}^T bzw. \vec{p}^T die (transponierten) Zeilenvektoren gemeint.⁵

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y \\ -L_z & 0 & L_x \\ L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x p_x & x p_y & x p_z \\ y p_x & y p_y & y p_z \\ z p_x & z p_y & z p_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x x & p_x y & p_x z \\ p_y x & p_y y & p_y z \\ p_z x & p_z y & p_z z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x p_y - p_x y & x p_z - p_x z \\ y p_x - p_y x & 0 & y p_z - p_y z \\ z p_x - p_z x & z p_y - p_z y & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dass sich L wie ein Tensor transformiert, kann durch Einsetzen der transformierten Orts- und Impulsvektorkomponenten verifiziert werden:

$$L_{i'j'} = r_{i'} p_{j'} - p_{i'} r_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} r_i p_j - \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} p_i r_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} L_{ij}. \quad (3.23)$$

3.2.3 Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit

Im Falle einer Rotation um eine feste Achse kann man den Drehimpuls auch in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit angeben,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (3.24)$$

Auch diese Gleichung kann mittels der oben eingeführten Tensoren der Winkelgeschwindigkeit Ω und des Drehimpulses L ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \varepsilon_{ija} L^a = \varepsilon_{ija} \varepsilon^{abc} r_b p_c = m \varepsilon_{ija} \varepsilon^{abc} r_b v_c \\ &= m \varepsilon_{ija} \varepsilon^{abc} r_b \Omega_{cd} r^d = m (\delta_i^b \delta_j^c - \delta_i^c \delta_j^b) r_b \Omega_{cd} r^d \\ &= m r_i \Omega_{jd} r^d - m r_j \Omega_{id} r^d = -m r_i r^d \Omega_{dj} - m \Omega_{id} r^d r_j, \end{aligned} \quad (3.25)$$

⁵Man beachte den Unterschied zum Skalarprodukt: $\vec{r}^T \vec{p} = \langle \vec{r}, \vec{p} \rangle = r_a p^a$ ist ein Skalar, aber $\vec{r} \vec{p}^T = r_i p_j$ ist eine Matrix!

wobei im letzten Schritt die Antisymmetrie von Ω ausgenutzt wurde. Schließlich erhalten wir

$$L_{ij} = -m r_i r^a \Omega_{aj} - m \Omega_{ia} r^a r_j \quad \Leftrightarrow \quad L = -m \vec{r} \vec{r}^T \Omega - m \Omega \vec{r} \vec{r}^T. \quad (3.26)$$

Ausgeschrieben lautet diese Gleichung:

$$\begin{aligned} L &= -m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \Omega - m \Omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \\ &= -m \begin{pmatrix} 0 & xz\omega_x + yz\omega_y - (x^2 + y^2)\omega_z & -xy\omega_x + (x^2 + z^2)\omega_y - yz\omega_z \\ -xz\omega_x - \dots & 0 & -(y^2 + z^2)\omega_x + xy\omega_y + xz\omega_z \\ xy\omega_x - \dots & (y^2 + z^2)\omega_x - \dots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Eine alternative Herleitung der Gleichung (3.26) ergibt sich durch direktes Einsetzen von (3.9) in die Tensorgleichung (3.21):

$$\begin{aligned} L &= \vec{r} \vec{p}^T - \vec{p} \vec{r}^T = \vec{r} (m \vec{v})^T - (m \vec{v}) \vec{r}^T = \vec{r} (m \Omega \vec{r})^T - (m \Omega \vec{r}) \vec{r}^T \\ &= m \vec{r} \vec{r}^T \Omega^T - m \Omega \vec{r} \vec{r}^T = -m \vec{r} \vec{r}^T \Omega - m \Omega \vec{r} \vec{r}^T. \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.2.4 Drehimpuls und Trägheitstensor

Bei einer Rotation um eine feste Achse kann der Drehimpuls auch mit Hilfe des Trägheitstensors ausgedrückt werden: $\vec{L} = I \vec{\omega}$. Zur Herleitung dieser Gleichung betrachten wir die Komponentendarstellung von Gleichung (3.24),

$$\begin{aligned} L^a &= \varepsilon^{abc} r_b p_c = m \varepsilon^{abc} r_b v_c = m \varepsilon^{abc} r_b \varepsilon_{cde} \omega^d r^e \\ &= m (\delta_d^a \delta_e^b - \delta_e^a \delta_d^b) r_b r^e \omega^d = m (\delta_d^a r_e r^e - r_d r^a) \omega^d \\ &= m (\vec{r}^2 \delta_b^a - r^a r_b) \omega^b \\ &= I_b^a \omega^b, \end{aligned} \quad (3.29)$$

mit dem Trägheitstensor I ,

$$I_b^a = m (\vec{r}^2 \delta_b^a - r^a r_b) \quad \Leftrightarrow \quad I = m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Auch die Gleichung $\vec{L} = I \vec{\omega}$ kann auf eine Form gebracht werden, die keine Pseudovektoren enthält. Dazu überlegen wir uns zunächst, wie die Umkehrung

von $\Omega_{ac} = \varepsilon_{abc} \omega^b$ lautet. An der Definition des Levi-Civita-Symbols – Gleichung (3.7) – und der Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

können wir ablesen:

$$\varepsilon^{1bc} \Omega_{bc} = \varepsilon^{123} \Omega_{23} + \varepsilon^{132} \Omega_{32} = \Omega_{23} - \Omega_{32} = -\omega_x - \omega_x = -2\omega_x, \quad (3.32)$$

$$\varepsilon^{2bc} \Omega_{bc} = \varepsilon^{231} \Omega_{31} + \varepsilon^{213} \Omega_{13} = \Omega_{31} - \Omega_{13} = -\omega_y - \omega_y = -2\omega_y, \quad (3.33)$$

$$\varepsilon^{3bc} \Omega_{bc} = \varepsilon^{312} \Omega_{12} + \varepsilon^{321} \Omega_{21} = \Omega_{12} - \Omega_{21} = -\omega_z - \omega_z = -2\omega_z, \quad (3.34)$$

also gilt

$$\omega^a = -\frac{1}{2} \varepsilon^{abc} \Omega_{bc}. \quad (3.35)$$

Das nutzen wir nun aus,

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \varepsilon_{ija} L^a = \varepsilon_{ija} I_b^a \omega^b = \varepsilon_{ija} I_b^a \left(-\frac{1}{2} \varepsilon^{bcd} \Omega_{cd} \right) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ija} \varepsilon^{bcd} I_b^a \Omega_{cd} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\delta_i^b \delta_j^c \delta_a^d + \delta_i^c \delta_j^d \delta_a^b + \delta_i^d \delta_j^b \delta_a^c - \delta_i^b \delta_j^d \delta_a^c - \delta_i^c \delta_j^b \delta_a^d - \delta_i^d \delta_j^c \delta_a^b \right) I_b^a \Omega_{cd} \\ &= -\frac{1}{2} \left(I_i^a \Omega_{ja} + I_a^i \Omega_{ij} + I_j^a \Omega_{ai} - I_i^a \Omega_{aj} - I_a^i \Omega_{ji} - I_j^a \Omega_{ia} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-I_i^a \Omega_{aj} + I_a^i \Omega_{ij} - \Omega_{ia} I_j^a - I_i^a \Omega_{aj} + I_a^i \Omega_{ij} - \Omega_{ia} I_j^a \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

und erhalten

$$L_{ij} = I_i^a \Omega_{aj} + \Omega_{ia} I_j^a - I_a^i \Omega_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad L = I \Omega + \Omega I - \text{Spur}(I) \Omega. \quad (3.37)$$

3.3 Zusammenfassung

In den vorigen Abschnitten wurde gezeigt, wie die Pseudovektoren der Winkelgeschwindigkeit und des Drehimpulses durch antisymmetrische Tensoren zweiter Stufe ausgedrückt werden können, und an einigen Beispielen vorgerechnet, wie man damit aus physikalischen Pseudovektorgleichungen Tensorgleichungen erhält. Die Ergebnisse sind in den folgenden Tabellen noch einmal zusammengefasst. Der Vorteil, physikalische Größen durch Tensoren darzustellen, liegt darin, dass diese automatisch das richtige Verhalten gegenüber beliebiger Koordinatentransformationen aufweisen. Von Nachteil ist, dass die physikalischen Tensorgleichungen weniger kompakt sind als die entsprechenden Pseudovektorgleichungen. Als abkürzende Schreibweisen haben die Pseudovektoren also durchaus eine Berechtigung; die zugehörigen Tensoren sind allerdings physikalisch tiefgründiger.

Pseudovektorgleichung	Tensorgleichung	
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	$\vec{v} = \Omega \vec{r}$	(3.9)
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$L = \vec{r} \vec{p}^T - \vec{p} \vec{r}^T$	(3.21)
$\vec{L} = m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$	$L = -m \vec{r} \vec{r}^T \Omega - m \Omega \vec{r} \vec{r}^T$	(3.26)
$\vec{L} = I \vec{\omega}$	$L = I \Omega + \Omega I - \text{Spur}(I) \Omega$	(3.37)

Physikalische Größe	Tensor	
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^T = (v_x \quad v_y \quad v_z)$	
Winkelgeschwindigkeit	$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = -\Omega^T$	(3.8)
Ort	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^T = (x \quad y \quad z)$	
Drehimpuls	$L = \begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y \\ -L_z & 0 & L_x \\ L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix} = -L^T$	(3.17)
Impuls	$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad \vec{p}^T = (p_x \quad p_y \quad p_z)$	
Trägheitstensor	$I = m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -x y & -x z \\ -x y & x^2 + z^2 & -y z \\ -x z & -y z & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$	(3.30)