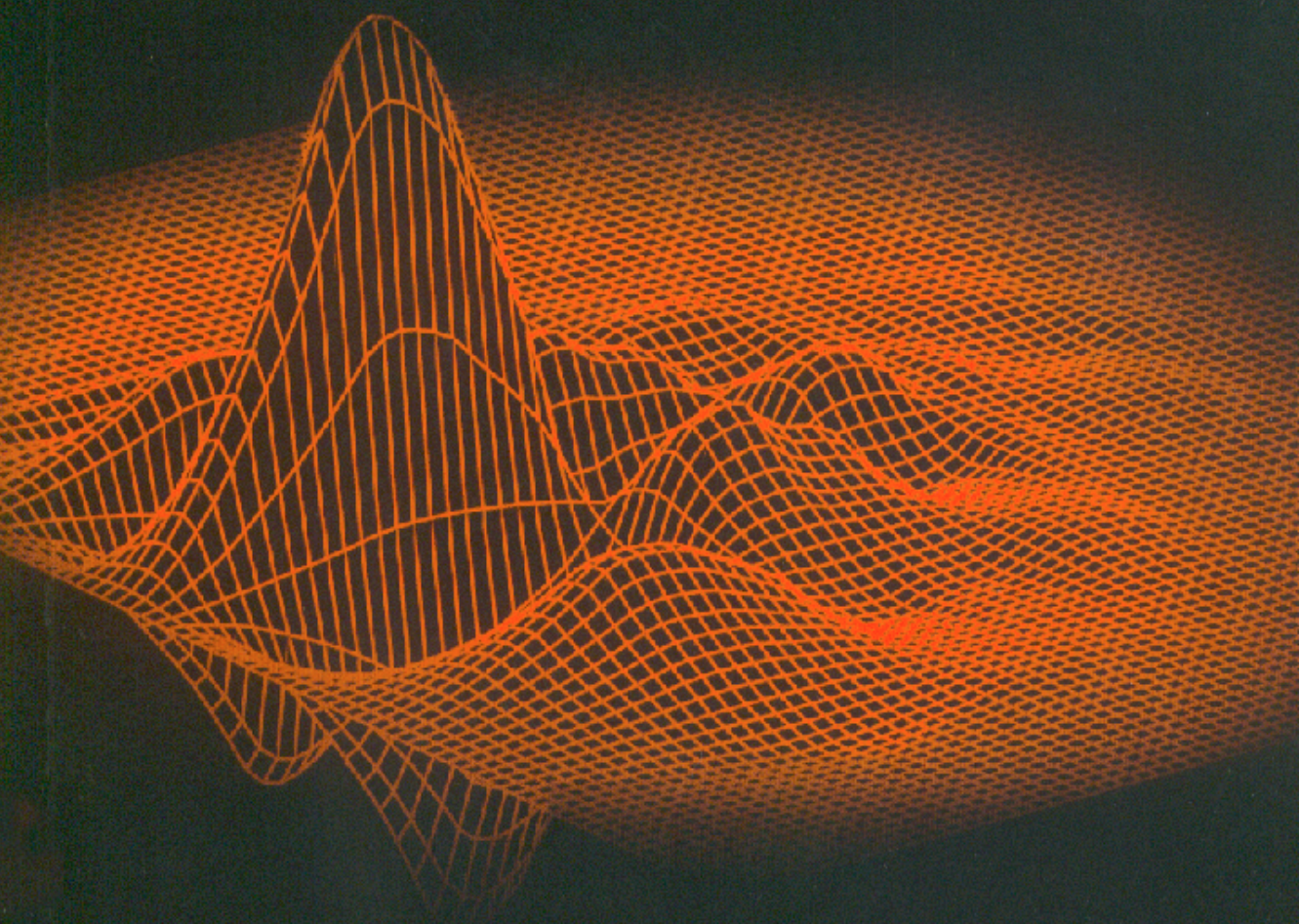


Mariusz Ziółko

MODELOWANIE ZJAWISK FALOWYCH



UCZELNIANE WYDAWNICTWA NAUKOWO-DYDAKTYCZNE

KRAKÓW 2000

KU 0005 pozycja wydawnictw naukowych
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

© Wydawnictwa AGH, Kraków 2000
ISBN 83-88408-55-0

Redaktor Naczelny Uczelnianych Wydawnictw
Naukowo-Dydaktycznych: *prof. dr hab. inż. Andrzej Wichur*

Z-ca Redaktora Naczelnego: *mgr Beata Barszczewska-Wojda*

Recenzent: *prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski*

The book presents the chosen problems connected with the sets of first order partial differential equations of hyperbolic type. Material contained in the book can be divided into the three parts. In the first one, the stability problems are presented. The classical Lyapunov method based on energetic functional is used. There are added the problems connected with robust stability. The second part of book deals with the numerical methods of approximation of the solutions of partial differential equations. There are presented two methods: the method of characteristics and the Galerkin method. The third part of book includes the examples of mathematical models for: electric lines, pipelines and membranes. These models are used to present: the analysis of damping of wave propagation and boundary reflections, the choice of discretization density, the approximation of optimal control, and the identification of plant parameters on the basis of resonance frequencies.

Projekt okładki i strony tytułowej: *Beata Barszczewska-Wojda*

Opracowanie edytorskie: *Danuta Harnik*

Korekta: *Danuta Harnik*

Układ typograficzny i skład komputerowy systemem \TeX :
Jacek Kmiecik, **pre \TeX t**, tel. 0 501 494 601; e-mail: info@pretext.com.pl

Redakcja Uczelnianych Wydawnictw Naukowo-Dydaktycznych
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków
tel. 617-32-28, tel./fax 638-40-38

Przygotowanie wersji elektronicznej w formacie PDF:
Jacek Kmiecik, **pre \TeX t**

Spis treści

Wykaz oznaczeń	5
1. Wstęp	7
2. Modele matematyczne	9
2.1. Równania hiperboliczne	9
2.2. Warunki graniczne	12
3. Stabilność problemów ciągłych	16
3.1. Stabilność systemów hiperbolicznych	16
3.2. Symetryzowalność macierzy	17
3.3. Stabilność problemu mieszanego	20
3.4. Stabilność problemu początkowego	24
3.5. Stabilność systemu opisywanego dwoma równaniami	25
3.6. Odporna symetryzowalność macierzy	29
3.7. Odporna stabilność systemów hiperbolicznych	32
4. Metoda charakterystyk	35
4.1. Aproksymacja równań różniczkowych przez równania różnicowe	35
4.2. Dyskretna aproksymacja problemu Cauchy'ego	38
4.3. Dyskretna aproksymacja problemu mieszanego	45
4.4. Eksperymentalny dobór gęstości dyskretyzacji	52
5. Metoda Galerkina	62
5.1. Aproksymacja równań różniczkowych metodą Galerkina	62
5.2. Aproksymacja problemu mieszanego semidyskretną metodą Galerkina	63
5.3. Wielomiany ortogonalne	66
5.4. Funkcje gięte	68
5.5. Falki	71
5.5.1. Falki jednowymiarowe	72
5.5.2. Funkcje Haara	73
5.5.3. Jednowymiarowe funkcje skalujące	75
5.5.4. Ortonormalne falki Daubechies	75
5.5.5. Falki dwuwymiarowe	77

6. Przykłady modelowania	82
6.1. Elektryczne linie długie	82
6.2. System transportu gazu ziemnego	88
6.2.1. Model falowy uwzględniający prędkość płynącego gazu	88
6.2.2. Model falowy zaniedbujący prędkość płynącego gazu	90
6.2.3. Warunki graniczne dla problemu Cauchy'ego	91
6.2.4. Warunki graniczne dla problemu mieszanego	92
6.2.5. Zastosowanie metody charakterystyk do numerycznego rozwiązania równań opisujących gazociąg	93
6.2.6. Algorytm rozwiązania problemu mieszanego	96
6.2.7. Optymalne sterowanie gazociągiem	98
6.2.8. Numeryczne rozwiązanie problemu optymalizacji	102
6.3. Membrana kołowa	104
Literatura	115
Skorowidz	119

Biblioteka

Główna AGH

Wykaz oznaczeń

- $\|A\|$ – norma spektralna (Hilberta) macierzy A
- $|A|$ – macierz, której elementy są bezwzględnymi wartościami elementów macierzy A
- $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ – rzeczywiste wartości macierzy A rozmieszczone są w m wierszach i n kolumnach
- A^T – macierz transponowana
- $\deg(f(\alpha))$ – stopień wielomianu $f(\alpha)$
- $\det A$ – wyznacznik macierzy A
- $\text{diag}(s_1, \dots, s_p)$ – diagonalna macierz o wymiarach $p \times p$ z elementami na przekątnej s_1, \dots, s_p
- $\dim A = m \times n$ – macierz A posiada m wierszy i n kolumn
- $E(t)$ – energia systemu jako kwadrat normy
- I – macierz jednostkowa
- I_n – I_n macierz jednostkowa o wymiarach $n \times n$
- $\text{Int}(x)$ – część całkowita liczby x
- $\max\{a, b\}$ – jest równe a gdy $a \geq b$ lub b gdy $a < b$
- $\max_g f(g)$ – maksymalna wartość funkcji f
- $\min\{a, b\}$ – jest równe a gdy $a \leq b$ lub b gdy $a > b$
- $0_{m \times n}$ – macierz zerowa posiadająca m wierszy i n kolumn
- \emptyset – zbiór pusty
- $\text{rg}(A)$ – rząd macierzy A
- \mathfrak{R}^n – n -wymiarowy zbiór liczb rzeczywistych
- $\text{sign}(x)$ – wartość 1 gdy $x > 0$, 0 gdy $x = 0$, -1 gdy $x < 0$
- s^-, s^+ – prędkość fali powrotnej i bieżącej
- \mathbf{S}_H – zbiór macierzy asymptotycznie stabilnych w sensie Hurwitza
- \mathbf{S}_S – zbiór macierzy asymptotycznie stabilnych w sensie Schura
- \mathbf{SYM} – zbiór macierzy D -symetryzowalnych
- $\text{span}\{\psi_n : n \in Z\}$ – zbiór rozpięty przez funkcje ψ_n

- $\text{supp } \psi$ – nośnik funkcji ψ
 $\text{tr } A$ – ślad macierzy A , czyli suma elementów na przekątnej
 $\mathbf{U} \subset \text{SYM}$ – zbiór \mathbf{U} jest zawarty w zbiorze SYM
 $V \oplus W$ – suma prosta zbiorów ortogonalnych
 $V \otimes W$ – zbiór wygenerowany przez iloczyn tensorowy baz zbiorów V i W
 w_{ij} – aproksymacja $w(i\Delta x, j\Delta t)$
 $w: \Psi \rightarrow \mathfrak{R}^m$ – m -wymiarowa funkcja wektorowa określona na zbiorze Ψ
 Z – zbiór liczb całkowitych
 $\Delta t, \Delta x$ – gęstość dyskretyzacji zmiennej czasowej i zmiennej przestrzennej
 $\delta\Phi$ – różniczka funkcji
 Δ – wyróżnik wielomianu drugiego stopnia
 $\lambda_i(A)$ – i -ta wartość własna macierzy A
 φ – funkcja skalująca
 ψ – falka
 Ψ – podzbiór w \mathfrak{R}^2 , na którym obliczane jest rozwiązanie równania różniczkowego
 $\|\cdot\|$ – norma
 $\|\cdot\|_P$ – norma w przestrzeni P
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – iloczyn skalarny
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ – iloczyn skalarny w przestrzeni P
 $\{A, B, C, D\}$ – zbiór składający się z elementów A, B, C, D
 $\{z_j\}_{j=1}^n$ – zbiór elementów z_j gdzie $j = 1, \dots, n$
 $\#Z$ – ilość elementów zbioru Z
 $\overline{\bigcup_{n \in Z} V_m}$ – domknięcie sumy zbiorów V_m
 $[0, 1]$ – przedział domknięty $[0, 1] = \{x \in \mathfrak{R}: 0 \leq x \leq 1\}$
 $[0, X] \times [0, T]$ – zbiór zawierający pary liczb (x, t) takie, że $0 \leq x \leq X$ i $0 \leq t \leq T$
 \square – koniec definicji lub twierdzenia

1

Wstęp

Modele matematyczne w postaci równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego inżynierowie dzielą na transportowe i falowe. Do grupy pierwszej należą procesy, w których zmiany ilościowe związane są z przemieszczaniem pewnych substancji. Typowe przykłady to transportery taśmowe, piece tunelowe (np. do wypalania wyrobów ceramicznych), piece przepychowe, piece obrotowe do wypalania klinkieru, wymienniki ciepła, przepływy wody w rzekach, kolumny absorpcyjne i kolumny destylacyjne. Do grupy drugiej zalicza się zjawiska, w których występują propagacje fal i ich odbicia. Przykładami są elektryczne linie długie [72, 73], gazociągi [69, 76], liny wyciągowe, pręty, membrany [70] oraz wiertnie.

Dla procesów opisywanych równaniami cząstkowymi typu hiperbolicznego na ogół nie można znaleźć rozwiązania analitycznego nawet dla najprostszych problemów granicznych. Możliwości techniki obliczeniowej oraz potrzeby wynikające z zastosowań, spowodowały w ostatnich trzydziestu latach duże zainteresowanie metodami numerycznego rozwiązywania równań hiperbolicznych. Dla równań nieliniowych stosowane są głównie metody różnicowe. Dla równań liniowych stosuje się równie często metody Galerkiina.

W rozdziale drugim prezentowane są równania różniczkowe cząstkowe typu hiperbolicznego i podstawowe problemy graniczne: problem początkowy Cauchy'ego i mający większe znaczenie praktyczne problem początkowo-brzegowy, czyli tzw. problem mieszany. W rozdziale trzecim przedstawiona jest obszernie problematyka stabilności rozwiązań zarówno dla problemu Cauchy'ego jak i problemu mieszanego. Zagadnienia te mają duże znaczenie zarówno w technice (np. w automatyce) jak i w dziedzinie numerycznych metod aproksymacji rozwiązań równań różniczkowych. Stabilność problemu mieszanego dla równań hiperbolicznych jest ciekawym przykładem równoczesnego występowania warunków stabilności identycznych jak dla równań różniczkowych zwyczajnych (stabilność typu Hurwitza) oraz warunków stabilności charakterystycznych dla równań różnicowych (stabilność typu Schura). Z warunków tych wynika stabilność numeryczna, gwarantująca poprawność komputerowych obliczeń. W rozdziale trzecim przedstawiona została również problematyka symetryzowalności macierzy i problematyka tzw. odpornej stabilności. Wyniki tych prac są efektem mojej współpracy z profesorem Stanisławem Białasem. W rozdziale czwartym przedstawiona jest metoda charakterystyk jako podstawowa metoda numerycznego rozwiązywania problemów opisywanych układem dwóch równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego. Rozdział piąty poświęcony jest numerycznym metodom rozwiązywania układów równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego za pomocą metod Galerkiina. Metody te przedstawione zostały w trzech wariantach opartych na: wielomianach

ortogonalnych, funkcjach sklepanych i falkach. Przedstawione metody Galerkinia służą do aproksymacji układu równań różniczkowych cząstkowych przez układy równań różniczkowych zwyczajnych, są to zatem metody semidyskretne. W rozdziale szóstym przedstawione są przykłady obiektów opisywanych za pomocą równań cząstkowych typu hiperbolicznego: elektryczne linie długie, gazociągi i membrany. Przedstawiono metody rozwiązania zagadnień wynikających z potrzeb praktyki: badanie tłumienia propagacji fal i ich odbić brzegowych, dobór gęstości dyskretyzacji, wyznaczanie sterowania optymalnego, identyfikacja parametrów w oparciu o częstotliwości drgań własnych.

Książka powstała dzięki dydaktycznemu wysiłkowi moich wspaniałych Nauczycieli, przede wszystkim dzięki profesorom: Henrykowi Góreckiemu, Andrzejowi Plisiovi, Jackowi Szarskiemu i Andrzejowi Turowiczowi. Pragnę w tym miejscu złożyć Im podziękowanie.

Biblioteka

Główna AGH

2

Modele matematyczne

2.1. Równania hiperboliczne

Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu dla dwóch zmiennych niezależnych x i t mają postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + a_{11}(w(x, t), x, t) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x \partial t} + a_{02}(w(x, t), x, t) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \\ + a_{10}(w(x, t), x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + a_{01}(w(x, t), x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \\ + a_{00}(w(x, t), x, t) = f(w(x, t), x, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Zmiennym nadamy następujące fizyczne interpretacje: x niech oznacza jednowymiarową zmienną przestrzenną a t niech będzie czasem. Współczynniki a_{11} , a_{02} , a_{10} , a_{01} , a_{00} , mogą niekiedy zależeć zarówno od obu zmiennych niezależnych x oraz t , jak i od zmiennej zależnej w . Jeżeli współczynniki te są stałe, to wtedy równanie (2.1) jest modelem matematycznym *obiekту stacjonarnego*. Jeżeli współczynniki zależą od zmiennej x lub t albo obu razem, to (2.1) jest modelem *obiekту niestacjonarnego*. Funkcja $f(w, x, t)$ występująca po prawej stronie równania (2.1) stanowi dla matematyków niejednorodność równania różniczkowego. Automatycy funkcję tę nazywają sterowaniem rozłożonym w przestrzeni. Sterowaniem, ponieważ jest to oddziaływanie na system opisywany równaniem (2.1). Oddziaływanie jest zmienne w czasie i ma charakter niezależnego zewnętrznego wymuszenia. Rozłożonym, ponieważ zależy od zmiennej przestrzennej x . W inżynierskich modelach matematycznych najczęściej prawa strona równania (2.1) nie zależy od zmiennej w . Jeżeli nie tylko funkcja $f(x, t)$, ale i współczynniki a_{11} , a_{02} , a_{10} , a_{01} , a_{00} , nie zależą od w , to wtedy *równanie (2.1)* jest *liniowe* i model taki można wykorzystać znacznie efektywniej. W przypadku równań nieliniowych, zastosowanie pewnych metod jest bowiem albo niemożliwe albo znacznie utrudnione. Jeżeli tylko funkcja $f(w, x, t)$ zależy od zmiennej w a współczynniki a_{11} , a_{02} , a_{10} , a_{01} , a_{00} , od niej nie zależą, to ten rodzaj nieliniowości powoduje mniejsze utrudnienia i (2.1) nazywa się *równaniem semi-liniowym* lub *niby-liniowym*. Jeżeli natomiast bodaj jeden ze współczynników a_{11} , a_{02} , a_{10} , a_{01} , a_{00} , zależy od zmiennej w , to wtedy *równanie (2.1)* nazywa się *quasi-liniowym* lub *prawie-liniowym*. *Równanie (2.1)* jest *nieliniowe*, jeżeli jego współczynniki zależą również od pochodnych zmiennej w .

Formę kwadratową

$$F(s_1, s_2) = s_1^2 + a_{11}s_1s_2 + a_{02}s_2^2 \quad (2.2)$$

nazywamy *formą charakterystyczną równania (2.1)*. Mówimy, że jest ona *odrotnie określona* jeżeli $F(s_1, s_2) > 0$ dla dowolnych $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$. Jeżeli natomiast istnieją niezerowe $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $F(s_1, s_2) = 0$, to *formę kwadratową (2.2)* nazywamy *osobliwą*. Jeżeli (2.2), w zależności od zmiennych $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, przyjmuje zarówno wartości ujemne jak i dodatnie, to *forma kwadratowa (2.2)* jest *nieokreślona*. W oparciu o formę charakterystyczną (2.2) wprowadzono następującą klasyfikację równań różniczkowych cząstkowych:

- jeżeli forma kwadratowa (2.2) jest nieosobliwa i nieokreślona przy ustalonym w_0, x_0, t_0 , to mówimy, że *równanie (2.1)* jest *typu hiperbolicznego* w punkcie w_0, x_0, t_0 ,
- jeżeli forma kwadratowa (2.2) przy ustalonym w_0, x_0, t_0 jest osobliwa, to mówimy, że w punkcie w_0, x_0, t_0 *równanie (2.1)* jest *typu parabolicznego*,
- jeżeli forma kwadratowa (2.2) przy ustalonym w_0, x_0, t_0 jest dodatnio określona, to mówimy, że w punkcie w_0, x_0, t_0 *równanie (2.1)* jest *typu eliptycznego*.

Każdy typ równania różniczkowego cząstkowego posiada specyficzny sposób zadawania warunków granicznych, a to z kolei determinuje postać algorytmów obliczeniowych. Chcąc zatem rozwiązać numerycznie równanie różniczkowe cząstkowe, trzeba najpierw określić typ równania, następnie wybrać odpowiedni dla niego sposób zadawania warunków granicznych i dopiero na końcu wybrać metodę numeryczną przydatną dla określonego typu równania i wybranego sposobu zadawania warunków granicznych.

Typ równania (2.1) zależy od współczynników a_{11} oraz a_{02} , a te z kolei mogą zależeć od zmiennych x oraz t a niekiedy dodatkowo od rozwiązania równania różniczkowego w . Typ równania może zatem w niektórych przypadkach ulegać zmianie. Dla takich zagadnień algorytm obliczania rozwiązania równania różniczkowego musi być odpowiednio przygotowany. Problematyka przedstawiona w niniejszej pracy dotyczy wyłącznie równań typu hiperbolicznego. Jeżeli warunek hiperboliczności jest spełniony w każdym punkcie $[w_0, x_0, t_0] \in \mathbb{R}^3$, to mówimy, że *równanie (2.1)* jest *typu hiperbolicznego w całej przestrzeni*.

Równanie różniczkowe cząstkowe (2.1) drugiego rzędu można zapisać w postaci układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. Obie formy można traktować jako równoważne, ale należy pamiętać o istotnych różnicach. W tym drugim przypadku zamiast jednej zmiennej zależnej dwukrotnie różniczkowalnej występują dwie zmienne zależne, ale tylko z różniczkowaniem pierwszego rzędu. Są różne sposoby przekształcenia formy (2.1) w układ dwóch równań pierwszego rzędu, jednak zawsze powinno istnieć wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy rozwiązaniem równania drugiego rzędu i rozwiązaniem układu dwóch równań pierwszego rzędu.

Przykładowo, równanie różniczkowe (2.1) typu hiperbolicznego można sprowadzić do układu dwóch równań pierwszego rzędu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial t} \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_{11} + \sqrt{a_{11}^2 - 4a_{02}}}{2} & 0 \\ a_{10} - \frac{a_{01} \left(a_{11} + \sqrt{a_{11}^2 - 4a_{02}} \right)}{2} & \frac{a_{11} - \sqrt{a_{11}^2 - 4a_{02}}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{00} & -a_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

za pomocą transformacji

$$\begin{aligned} w_1 &= w \\ w_2 &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{a_{11} + \sqrt{a_{11}^2 - 4a_{02}}}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie $a_{11}^2 - 4a_{02} > 0$ ze względu na hiperboliczny typ równania (2.1).

Można również postąpić odwrotnie. Mając układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial t} \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

można po podstawieniach

$$w_1 = \frac{\partial w}{\partial t} \quad w_2 = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.6)$$

zapisać (2.5) w postaci jednego równania różniczkowego drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.7)$$

W niniejszej książce przedstawione są wybrane problemy dla układów m równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu

$$\frac{\partial w}{\partial t} + S \frac{\partial w}{\partial x} = Aw + Wu \quad (2.8)$$

gdzie $S, A \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, $W \in \mathfrak{R}^{m \times k}$ są stałymi macierzami a $u(x, t) \in \mathfrak{R}^k$ jest zadanym wektorem o k -składowych. Pojawiające się odstępstwa od tej zasady, są dygresjami nawiązującymi do pokrewnych modeli matematycznych.

Równanie macierzowe (2.8) jest *równaniem typu hiperbolicznego* jeśli wartości własne macierzy S są rzeczywiste i różne od zera. Można zatem uporządkować je w następujący sposób:

$$-\infty < s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_p \leq 0 \leq s_{p+1} \leq \dots \leq s_m < \infty \quad (2.9)$$

W przypadku wielokrotnych wartości własnych będziemy wymagać, aby macierz S była prostej struktury, tzn. posiadała wyłącznie liniowe dzielniki elementarne. Bez utraty ogólności rozważań będziemy przyjmować, że równanie (2.8) jest zapisane w postaci kanonicznej, to znaczy macierz S ma postać diagonalną

$$S = \begin{bmatrix} S^- & \\ & S^+ \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} S^- &= \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_p) < 0 \\ S^+ &= \text{diag}(s_{p+1}, \dots, s_m) > 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy S są różne, to wtedy równanie (2.8) nazywane jest *równaniem ściśle hiperbolicznym*.

Usytuowanie macierzy S w równaniu (2.8) wskazuje, że jej fizycznym wymiarem jest iloraz odległości i czasu. Z fizycznego punktu widzenia jest to zatem prędkość. Dlatego w równaniach (2.8) modelujących zjawiska przyrodnicze, wartości własne macierzy S są prędkościami propagacji fal (jeżeli równania opisują zjawiska falowe) lub prędkościami transportu (na przykład masy lub energii). Ponieważ wartości własne macierzy S są skończone, cechą charakterystyczną modeli matematycznych (2.8) jest symulacja procesów, w których szybkość zachodzących zjawisk jest skończona. Przykładowo dla modeli matematycznych elektrycznych linii długich lub gazociągów, wartości własne macierzy S są odpowiednio prędkościami propagacji fal elektromagnetycznych lub fal dźwiękowych w gazie. Odpowiednie przykłady są przedstawione w rozdziale 6. W przypadku modelowania typowych zjawisk falowych, macierz S ma dwie wartości własne: dodatnią równą prędkości propagacji fali w przód i ujemną równą prędkości propagacji fali powrotnej.

2.2. Warunki graniczne

Aby uzyskać jednoznaczne rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego (2.8), należy założyć dla poszukiwanego rozwiązania *warunki graniczne*. Na ogół mają one postać *warunków początkowych* i *warunków brzegowych*. Czasami podawane są w postaci *warunków końcowych*. Jeżeli rozwiązania równań różniczkowych są zadane dla chwili początkowej (najczęściej oznaczanej przez $t = 0$), noszą nazwę *warunków początkowych* i można je zapisać w postaci

$$w(x, 0) = w_0(x) \in \mathfrak{R}^m \quad (2.11)$$

gdzie $w_0(x)$ jest funkcją zadaną na zbiorze Γ . Może on być zbiorem liczb rzeczywistych \mathfrak{R} lub podzbiorem dodatnich liczb rzeczywistych \mathfrak{R}^+ albo odcinkiem. W tym ostatnim przypadku można przyjąć, bez utraty ogólności rozważań, że $\Gamma = [0, 1]$. Wtedy problem początkowy (2.8), (2.11) posiada jednoznaczne rozwiązanie w obszarze Ψ usłanym przez charakterystyki

$$\frac{dx}{dt} = s_i \quad (2.12)$$

gdzie $i = 1, \dots, m$. Oznacza to, że przez każdy punkt zbioru Ψ musi przechodzić m charakterystyk, z których każda ma punkt wspólny ze zbiorem Γ . Zbiór $\Psi = \Psi^+ \cup \Psi^-$ jest sumą dwóch zbiorów

$$\Psi^+ = \{(x, t) : 0 \leq t \leq 1/(s_m - s_1), s_m t \leq x \leq 1 + s_1 t\} \quad (2.13)$$

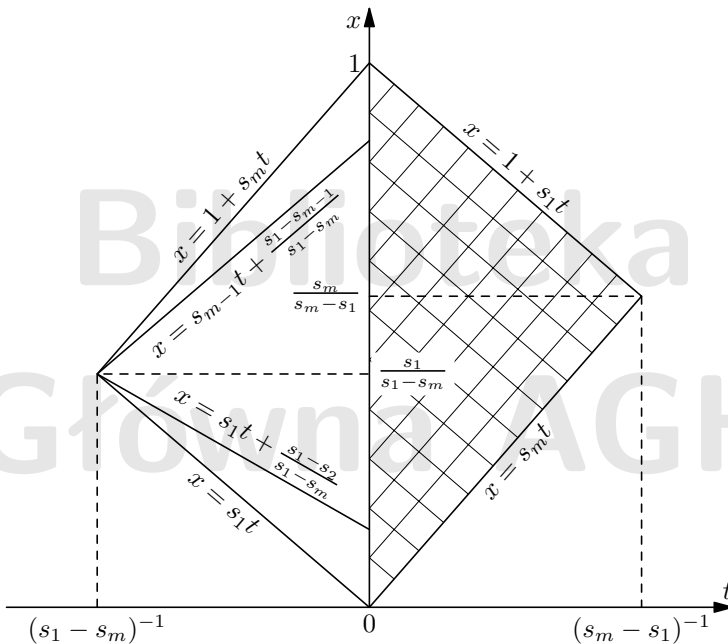
$$\Psi^- = \{(x, t) : 1/(s_1 - s_m) \leq t \leq 0, s_1 t \leq x \leq 1 + s_m t\} \quad (2.14)$$

Są one przedstawione na rysunku 2.1. W chwili początkowej (tzn. dla $t = 0$) rozwiązanie jest zadane dla $x \in [0, 1]$ przez warunek początkowy (2.11). Następnie długość odcinka, dla którego istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu początkowego (2.8),

(2.11), stopniowo maleje dla rosnących t , aż ograniczy się do punktu o współrzędnych $x = s_m/(s_m - s_1)$ oraz $t = 1/(s_m - s_1)$. Podobne własności posiada obszar zdefiniowany wzorem (2.14) dla ujemnych chwil czasu t . Zadanie polegające na znalezieniu funkcji będącej rozwiązaniem

$$w: \Psi \longrightarrow \mathfrak{R}^m \quad (2.15)$$

równania różniczkowego (2.8) z warunkiem początkowym (2.11) jest często nazywane *problemem Cauchy'ego*.



Rys. 2.1. Obszar jednoznacznego rozwiązania problemu Cauchy'ego

Równanie (2.8) posiada jednoznaczne rozwiązanie w obszarze

$$\Psi = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\} \quad (2.16)$$

gdy zadane są nie tylko warunki początkowe (2.11), ale również warunki brzegowe

$$\begin{bmatrix} w^-(1, t) \\ w^+(0, t) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} w^-(0, t) \\ w^+(1, t) \end{bmatrix} + W_b u_b(t) \quad t \geq 0 \quad (2.17)$$

gdzie wektorowa zmienna

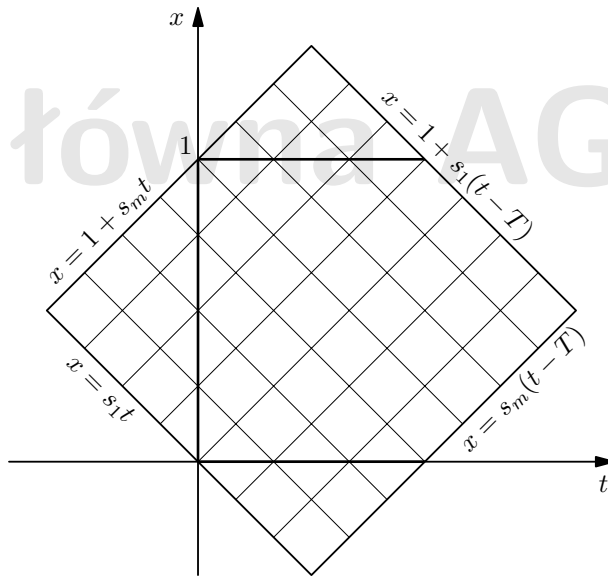
$$w(x, t) = \begin{bmatrix} w^-(x, t) \\ w^+(x, t) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^m \quad (2.18)$$

została podzielona na dwie części: $w^-(x, t) \in \mathbb{R}^p$ oraz $w^+(x, t) \in \mathbb{R}^{n-p}$ zgodnie z podziałem macierzy S według (2.10). Występująca w równaniu (2.17) macierz blokowa B składa się z czterech macierzy

$$B = \begin{bmatrix} B_{01} & B_{11} \\ B_{00} & B_{10} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} B_{00} \in \mathbb{R}^{(m-p) \times p} & B_{10} \in \mathbb{R}^{(m-p) \times (m-p)} \\ B_{01} \in \mathbb{R}^{p \times p} & B_{11} \in \mathbb{R}^{p \times (m-p)} \end{array} \quad (2.19)$$

Macierze B_{00} i B_{11} opisują odbicia brzegowe odpowiednio dla $x = 0$ i $x = 1$. Macierze B_{01} i B_{10} reprezentują sprzężenia zwrotne, od brzegu $x = 0$ do brzegu $x = 1$ i odpowiednio od brzegu $x = 1$ do brzegu $x = 0$. Wektorowa funkcja $u_b(t) \in \mathbb{R}^l$ jest niejednorodnością warunków brzegowych. Automatycy nazywają u_b sterowaniem brzegowym. Oddziałuje ono na wartości brzegowe zmiennej w poprzez macierz blokową

$$W_b = \begin{bmatrix} W_b^- \\ W_b^+ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times l} \quad \begin{array}{ll} W_b^- \in \mathbb{R}^{p \times l} \\ W_b^+ \in \mathbb{R}^{(m-p) \times l} \end{array} \quad (2.20)$$



Rys. 2.2. Obszar jednoznacznego rozwiązania problemu mieszanego

Problem początkowo-brzegowy (2.8), (2.11), (2.17) jest często nazywany *problemem mieszanym*. Na rysunku 2.2 widać, że obszar jego jednoznacznego rozwiązania jest większy niż ten, który został zdefiniowany za pomocą (2.16). Dodatkowe obszary nie mają jednak istotnego znaczenia w zastosowaniach i dlatego zostały pominięte w definicji (2.16).

Aby uzyskać odpowiednią regularność rozwiązania, należy przyjąć dodatkowe założenia w punktach styku warunków początkowych i brzegowych. Aby rozwiąza-

nie było ciągle, tzn. klasy $C^0(\Psi)$, należy założyć, że warunki początkowe spełniają warunki brzegowe, czyli

$$\begin{bmatrix} w_0^-(1) \\ w_0^+(0) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} w_0^-(0) \\ w_0^+(1) \end{bmatrix} + W_b u_b(0) \quad (2.21)$$

Aby rozwiązanie było różniczkowalne w sposób ciągły, tzn. klasy $C^1(\Psi)$, należy dodatkowo założyć [35], że warunki początkowe są różniczkowalne w punktach brzegowych, czyli

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -S^- \frac{dw_0^-}{dx}(1) + A_{11} w_0^-(1) + A_{12} w_0^+(1) \\ -S^+ \frac{dw_0^+}{dx}(0) + A_{21} w_0^-(0) + A_{22} w_0^+(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W^- u(1,0) \\ W^+ u(0,0) \end{bmatrix} = \\ B & \begin{bmatrix} -S^- \frac{dw_0^-}{dx}(0) + A_{11} w_0^-(0) + A_{12} w_0^+(0) \\ -S^+ \frac{dw_0^+}{dx}(1) + A_{21} w_0^-(1) + A_{22} w_0^+(1) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} W^- u(0,0) \\ W^+ u(1,0) \end{bmatrix} + W_b \frac{du_b}{dt}(0) \end{aligned} \quad (2.22)$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} A_{11} \in \mathfrak{R}^{p \times p} & A_{12} \in \mathfrak{R}^{p \times (m-p)} \\ A_{21} \in \mathfrak{R}^{(m-p) \times p} & A_{22} \in \mathfrak{R}^{(m-p) \times (m-p)} \end{array}$$

$$W = \begin{bmatrix} W^- \\ W^+ \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} W^- \in \mathfrak{R}^{p \times k} \\ W^+ \in \mathfrak{R}^{(m-p) \times k} \end{array}$$

Warunki (2.22) otrzymuje się różniczkując (2.17)

$$\begin{bmatrix} \frac{dw^-(1,t)}{dt} \\ \frac{dw^+(0,t)}{dt} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \frac{dw^-(0,t)}{dt} \\ \frac{dw^+(1,t)}{dt} \end{bmatrix} + w_b \frac{du_b(t)}{dt} \quad (2.23)$$

a następnie rugując z (2.23) pochodne względem zmiennej t za pomocą równania (2.8).

3

Stabilność problemów ciągłych

3.1. Stabilność systemów hiperbolicznych

Problemy stabilności systemów dynamicznych należą do ważnych zagadnień w dziedzinie matematycznego modelowania. W szczególności są to fundamentalne problemy zarówno w automatyce, jak i dla numerycznych metod aproksymacji. Publikacje z ostatnich dziesięcioleci (np. [24, 35, 52]) prezentują rozmaite definicje stabilności oraz różnorodne metody jej badania (np. [34, 73, 76]). Przedstawiona poniżej problematyka stabilności systemów hiperbolicznych opiera się na powszechnie stosowanej metodzie funkcji energetycznych Lapunowa.

Definicja 3.1. Liniowy system dynamiczny opisywany jednorodnym równaniem macierzowym

$$\frac{\partial w}{\partial t} + S \frac{\partial w}{\partial x} = Aw \quad (3.1)$$

z jednorodnymi warunkami brzegowymi

$$\begin{bmatrix} w^-(1, t) \\ w^+(0, t) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} w^-(0, t) \\ w^+(1, t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

nazywamy *asymptotycznie stabilnym* jeżeli dla dowolnych warunków początkowych

$$E(t) = \|w(\cdot, t)\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

□

Funkcja Lapunowa w powyższej definicji została przyjęta w postaci kwadratu normy w pewnej przestrzeni funkcyjnej. Tak zdefiniowana funkcja $E(t)$ jest często interpretowana jako energia rozpatrywanego systemu i dlatego metoda nazywana jest metodą funkcji energetycznej. Główna myśl jest bardzo prosta. Jeżeli na system nie ma oddziaływań zewnętrznych (czyli jest on autonomiczny albo, jak czasami się mówi, system jest jednorodny) i jego energia (3.3), czyli kwadrat normy rozwiązania układu równań (3.1) dla dowolnych niezerowych warunków początkowych, jest malejącą do zera funkcją czasu, to system jest asymptotycznie stabilny. Gdyby energia była funkcją czasu rosnącą nieograniczenie, system byłby niestabilny. Rozpatrywana metoda, daje zatem warunki wystarczające stabilności rozpatrywanego systemu. Czasami można otrzymać nie tylko warunki dostateczne, ale i konieczne dla asymptotycznej stabilności. Weryfikacja granicznych wartości funkcji energetycznych jest na

ogół trudnym zagadnieniem, zatem w praktyce obliczeniowej zastępuje się go badaniem monotoniczności. Wiadomo bowiem, że funkcja przyjmująca wartości wyłącznie dodatnie i monotonicznie malejąca, musi dążyć do pewnej skończonej wartości. Poniżej udowodnimy, że tą wartością jest zero.

Monotoniczność funkcji Lapunowa na ogół udowadnia się wykazując, że dla dowolnych warunków początkowych i w każdej chwili czasu $dE/dt < 0$ dla systemów asymptotycznie stabilnych lub $dE/dt < 0$ dla systemów niestabilnych. Metoda ta jest bardzo efektywna a wymagana różniczkowalność funkcji Lapunowa $E(t)$ jest na ogół łatwa do spełnienia. Głównym problemem jest dobranie monotonicznej funkcji $E(t)$. Jeżeli jest ona kwadratem normy, problem sprowadza się do wybrania odpowiedniej przestrzeni. Powinno się przyjąć taką normę, aby można było efektywnie prowadzić obliczenia, a otrzymane warunki wystarczające asymptotycznej stabilności były jak najsłabsze. Idealem jest otrzymanie takich warunków wystarczających stabilności, aby były one również warunkami koniecznymi. W tym celu przyjmuje się czasami pewne dodatkowe założenia ograniczające klasę rozpatrywanych problemów albo szuka się odpowiedniej funkcji Lapunowa. To pierwsze postępowanie ma znacznie większe szanse powodzenia, ale jego wadą jest ograniczenie klasy analizowanych zagadnień.

Definicja 3.1 dotyczy problemów początkowo-brzegowych, które w praktyce mają znacznie większe znaczenie niż problemy początkowe. Wnioskom wynikającym z tej definicji poświęcimy zatem więcej uwagi. Na razie zauważymy, że dla problemu Cauchy'ego definicja stabilności musi być nieco inaczej sformułowana. Warunki początkowe są bowiem na ogół zdefiniowane na odcinku i jednoznaczne rozwiązanie istnieje tylko do pewnej skończonej chwili czasowej. Dla problemu początkowego będziemy zatem posługiwać się nieco słabszą definicją.

Definicja 3.2. Liniowy system dynamiczny opisywany jednorodnym równaniem macierzowym (3.1) jest *asymptotycznie stabilny* jeżeli

$$E(t) = \|w(\cdot, t)\|^2 \quad (3.4)$$

jest funkcją malejącą. \square

Poniżej przekonamy się, że dla rozpatrywanej klasy równań różniczkowych (3.1), warunki wystarczające asymptotycznej stabilności, otrzymane za pomocą metody Lapunowa, są równocześnie warunkami koniecznymi, jeżeli macierzowe współczynniki zarówno równania różniczkowego, jak i warunków brzegowych, są macierzami symetryzowalnymi.

3.2. Symetryzowalność macierzy

Rzeczywista macierz kwadratowa A jest symetryczna jeżeli spełnia warunek

$$A = A^T \quad (3.5)$$

gdzie T oznacza transponowanie macierzy. Poniżej przedstawiona jest odpowiedź na pytanie: kiedy macierz niesymetryczna, po pomnożeniu przez diagonalną dodatnio

określoną macierz, stanie się symetryczna? Bardziej ogólne zagadnienie było po raz pierwszy rozpatrywane przez Olę Taussky [58] ponad trzydzieści lat temu. Z pracy tej wybierzemy na wstępie to, co ma związek z odpowiedzią na postawione powyżej pytanie.

Definicja 3.3. Rzeczywista macierz A jest *symetryzowalna* jeśli istnieje nieosobliwa macierz K taka, że

$$KA = A^T K^T \quad (3.6)$$

□

Poniżej podane są własności macierzy A , która spełnia (3.6) dla trzech przypadków:

1. macierz K jest symetryczna,
2. $K = K^T$ jest dodatnio określona,
3. K jest dodatnio określoną macierzą diagonalną.

Lemat 3.1. Każda rzeczywista macierz jest symetryzowalna przez rzeczywistą macierz symetryczną.

Dowód. Posłużymy się metodą zaproponowaną przez Taussky [58]. Wiadomo, że każda macierz A jest podobna do macierzy A^T poprzez rzeczywistą symetryczną macierz K , tzn.

$$A = K^{-1} A^T K \quad (3.7)$$

Równanie (3.6) wynika natychmiast z (3.7) dzięki symetryczności macierzy K . □

Lemat 3.2. [58] Następujące własności są równoważne:

1. macierz A jest symetryzowalna przez dodatnio określoną macierz $K = K^T > 0$,
2. macierz A jest podobna do macierzy symetrycznej,
3. macierz A ma rzeczywiste wartości własne i komplet wektorów własnych. □

Pozostaje jeszcze ustalić, jakie macierz A musi mieć własności, aby była symetryzowalna przez dodatnio określoną i diagonalną macierz K . Problem taki występuje przy badaniu stabilności systemów hiperbolicznych.

Definicja 3.4. Macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ jest *D-symetryzowalna* jeżeli istnieje macierz diagonalna

$$K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (3.8)$$

taka, że $k_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) i spełnione jest (3.6). □

Równanie (3.6) może być zapisane w postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11}k_1 & a_{12}k_1 & \dots & a_{1m}k_1 \\ a_{21}k_2 & a_{22}k_2 & \dots & a_{2m}k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}k_m & a_{m2}k_m & \dots & a_{mm}k_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}k_1 & a_{12}k_1 & \dots & a_{m1}k_m \\ a_{21}k_2 & a_{22}k_2 & \dots & a_{m2}k_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m}k_1 & a_{2m}k_2 & \dots & a_{mm}k_m \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Z (3.9) wynika, że

$$a_{ij}k_i = a_{ji}k_j \quad (i = 1, 2, \dots, m-1; j = 2, \dots, m \ i < j) \quad (3.10)$$

co może być zapisane (Białas [3]) w postaci macierzowej

$$L(A)k = 0 \quad (3.11)$$

gdzie: $k = [k_1, k_2, \dots, k_m]^T \in \mathfrak{R}^m$ oraz

$$L(A) = \begin{bmatrix} a_{12} & -a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & -a_{31} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & -a_{41} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n1} \\ 0 & a_{23} & -a_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{24} & 0 & -a_{42} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} & -a_{n,n-1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{[m(m-1)/2] \times m} \quad (3.12)$$

Niech

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

natomiast $\text{rg}(L)$ niech oznacza rząd macierzy prostokątnej L .

Twierdzenie 3.1. [3] Jeżeli macierz jest D -symetryzowalna to

$$\text{rg}(L(A)) < m \quad (3.14)$$

oraz

$$\text{sign}(a_{ij}) = \text{sign}(a_{ji}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.15)$$

Dowód. Z istnienia niezerowego rozwiązania równania (3.11) wynika warunek (3.14). Równania (3.15) muszą być spełnione, ponieważ $k_i > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. \square

Lemat 3.3. Jeżeli macierz A jest D -symetryzowalna wtedy jej wartości własne są rzeczywiste.

Dowód. Warunek D -symetryzowalności $K^2A = A^TK^2$ prowadzi do symetrycznej macierzy $KAK^{-1} = K^{-1}A^TK$, która jest podobna do macierzy A . \square

Friedrichs [21] zauważył, że równania różniczkowe cząstkowe typu hiperbolicznego, będące modelami matematycznymi zjawisk przyrodniczych, spełniają postulat symetryzowalności. Wydaje się, że ten rodzaj symetrii jest wynikiem podstawowego prawa przyrodniczego: jeżeli pewna wielkość oddziałuje na inną wielkość, to zmiany tej drugiej też oddziałują na pierwszą wielkość. Przykładem takiego oddziaływania jest przemiana energii z jednej postaci w drugą (np. pola elektrycznego w pole magnetyczne). Prąd w cewce elektrycznej oddziałuje na napięcie elektryczne na tej cewce, ale z drugiej strony zmieniając przebiegi napięcia spowodujemy zmiany prądu przez nią płynącego. Obie te wzajemne zależności powiązane są tym samym współczynnikiem, tzn. indukcyjnością cewki. Powyższa reguła powoduje, że jeżeli równanie typu (3.1) modeluje proces przyrodniczy, to na ogół występująca w nim macierz A jest D -symetryzowalna. Odmierna jest sytuacja w przypadku warunków brzegowych. Na ogół nie ma żadnych podstaw, aby zjawiska występujące na jednym brzegu były związane ze zjawiskami występującymi na drugim brzegu. Z tego powodu macierz B występująca w warunkach brzegowych (3.2) opisujących zjawiska przyrodnicze, nie musi być D -symetryzowalna.

3.3. Stabilność problemu mieszanego

Do zbadania stabilności problemu (3.1), (3.2) posłużymy się, podobnie jak Gunzburger [24], funkcją Lapunowa [72]

$$E(t) = \|w(\cdot, t)\|_{L_G^2}^2 = \int_0^1 w^T(x, t) G w(x, t) dx \quad (3.16)$$

gdzie $G = G^T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ jest pewną stałą i dodatnio określoną macierzą. Pierwsza pochodna funkcji energetycznej (3.16), dla funkcji wektorowej $w \in [C^1(\Psi)]^m$, ma postać

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^1 \left(\frac{\partial w^T}{\partial t} G w + w^T G \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx \quad (3.17)$$

Podstawiając

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A w - S \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.18)$$

do (3.17) i posługując się tożsamością

$$\int_0^1 \frac{\partial w^T}{\partial x} S G w dx = w^T S G w \Big|_0^1 - \int_0^1 w^T S G \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad (3.19)$$

otrzymujemy

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^1 w^T (A^T G + GA) w \, dx - w^T SGw \Big|_0^1 + \int_0^1 w^T (SG - GS) \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad (3.20)$$

Aby ustalić znak pochodnej dE/dt , musimy niestety przyjąć dodatkowe założenie. Jeżeli założymy że macierz G jest diagonalna, to wtedy diagonalne macierze $S, G \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ są przemienne i zeruje się składnik biliniowy we wzorze (3.20). Założenie diagonalności macierzy G powoduje, że warunki stabilności otrzymane za pomocą funkcji Lapunowa (3.16), dotyczą systemów, dla których A i B są macierzami D -symetryzowalnymi. Korzystając z przemienności macierzy S i G , otrzymujemy

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_w}{dt} + \frac{dE_b}{dt} \quad (3.21)$$

gdzie

$$\frac{dE_w}{dt} = \int_0^1 w^T (A^T G + GA) w \, dx \quad (3.22)$$

$$\frac{dE_b}{dt} = \begin{bmatrix} w^-(0, t) \\ w^+(1, t) \end{bmatrix}^T (B^T |SG| B - |SG|) \begin{bmatrix} w^-(0, t) \\ w^+(1, t) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

a $|SG|$ jest macierzą diagonalną dodatnio określoną, której elementy są wartościami bezwzględnych z elementów macierzy SG . Pierwsza pochodna (3.21) funkcji energetycznej (3.16) została podzielona na dwie części: (3.22) i (3.23). Część pierwsza zależy od macierzy A natomiast część druga zależy od macierzy B . Macierz A jest współczynnikiem równania różniczkowego (3.1), opisującego dynamikę systemu wewnątrz zbioru Ψ (zdefiniowanego przez (2.16)). Natomiast macierz B jest współczynnikiem w warunkach brzegowych (3.2), które opisują własności zmiennej wektorowej w na brzegu zbioru Ψ . Spostrzeżenia te uzasadniają poniższe definicje.

Definicja 3.5. *Problem początkowo-brzegowy (3.1), (3.2) jest asymptotycznie wewnętrznie stabilny jeżeli istnieje diagonalna dodatnio określona macierz G taka, że nierówność $dE_w/dt < 0$ jest spełniona dla wszystkich $t \geq 0$ i dowolnych niezerowych warunków początkowych (2.11).* \square

Definicja 3.6. *Problem początkowo-brzegowy (3.1), (3.2) jest asymptotycznie brzegowo stabilny jeżeli istnieje diagonalna i dodatnio określona macierz G taka, że $dE_b/dt < 0$ dla wszystkich $t \geq 0$ i dowolnych w nie równych zeru równocześnie dla obu brzegów.* \square

Lemat 3.4. *Jeżeli problem początkowo-brzegowy (3.1), (3.2) jest zarówno asymptotycznie wewnętrznie stabilny jak i asymptotycznie brzegowo stabilny, to wtedy $E(t) = \|w(\cdot, t)\|^2 \rightarrow 0$ gdy $t \rightarrow \infty$.*

Dowód. Założenie $dE_b/dt \leq 0$ zamienia równanie (3.21) w nierówność

$$\frac{dE}{dt} \leq \frac{dE_w}{dt} \quad (3.24)$$

Największą wartość własną macierzy G oznaczmy przez $\lambda_{\max}(G)$. Z (3.22) otrzymujemy

$$\frac{dE_w}{dt} \leq \lambda_{\max}(A^T G + GA) \|w\|_I^2 \leq -\tau \|w\|_G^2 \quad (3.25)$$

gdzie

$$\tau = -\frac{\lambda_{\max}(A^T G + GA)}{\lambda_{\max}(G)} > 0$$

ponieważ

$$\lambda_{\max}(A^T G + GA) < 0 < \lambda_{\max}(G).$$

Łącząc nierówności (3.24) i (3.25) otrzymujemy

$$\frac{dE}{dt} \leq -\tau E(t) \quad (3.26)$$

Prowadzi to do nierówności

$$E(t) \leq E(0)e^{-\tau t} \quad (3.27)$$

dla $t > 0$. □

Definicja 3.7. Macierz kwadratowa jest *asymptotycznie stabilna w sensie Hurwitza* gdy wszystkie jej wartości własne mają ujemne części rzeczywiste. □

Definicja 3.8. Wielomian jest *asymptotycznie stabilny w sensie Hurwitza* gdy wszystkie jego pierwiastki mają ujemne części rzeczywiste. □

Definicja 3.9. Macierz kwadratowa jest *macierzą asymptotycznie stabilną w sensie Schura* gdy wszystkie jej wartości własne mają moduły mniejsze od 1. □

Definicja 3.10. Wielomian jest *asymptotycznie stabilny w sensie Schura* gdy wszystkie jego pierwiastki mają moduły mniejsze od 1. □

Stwierdzenie 3.1. Jeżeli problem mieszany (3.1), (3.2) jest wewnętrznie stabilny w sensie definicji 3.5 a funkcja energetyczna ma postać (3.16), to wtedy A jest macierzą stabilną w sensie Hurwitza.

Dowód. Stabilność problemu mieszanego oznacza, że (3.22) jest ujemne również dla $t = 0$, czyli dla arbitralnie przyjętego warunku początkowego $w_0(x)$, byle nie równego tożsamościowo zeru. Zatem stabilność pociąga za sobą ujemną określoność formy kwadratowej $A^T G + GA$. Może to być spełnione tylko wtedy, gdy wszystkie części rzeczywiste wartości własnych macierzy A są ujemne. □

Stwierdzenie 3.2. Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy $A + A^T$ są ujemne, to wtedy problem mieszany (3.1), (3.2) jest wewnętrznie stabilny.

Dowód. Jeżeli $A + A^T < 0$, to przyjmując G równe macierzy jednostkowej otrzymujemy $dE_w/dt < 0$ dla dowolnych $w \neq 0$. \square

Gdyby w stwierdzeniu 3.2 macierz A była symetryczna, wtedy otrzymalibyśmy nie tylko warunki wystarczające stabilności wewnętrznej (z macierzą G w postaci macierzy jednostkowej), ale również warunki konieczne. Spostrzeżenie to można uogólnić na macierze D -symetryzowalne, czyli na znacznie szerszą klasę macierzy A .

Twierdzenie 3.2. Jeżeli macierz A w równaniu (3.1) jest D -symetryzowalna (przez macierz, którą oznaczymy K^2) to problem początkowo-brzegowy (3.1), (3.2) jest asymptotycznie wewnętrznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A są ujemne.

Dowód. Podstawiając $G = K^2$ i $w = K^{-1}\eta$ otrzymujemy

$$w^T (A^T G + GA) w = 2\eta^T K A K^{-1} \eta \quad (3.28)$$

Ta forma kwadratowa jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie wartości własne macierzy A są ujemne. \square

Twierdzenie 3.3. Jeżeli macierz B w równaniu (3.2) jest D -symetryzowalna to problem początkowo-brzegowy (3.1), (3.2) jest asymptotycznie brzegowo stabilny wtedy i tylko wtedy gdy B jest macierzą stabilną w sensie Schura.

Dowód. Nierówność $dE_b/dt < 0$ jest równoważna

$$w^T (B^T |SG| B - |SG|) w < 0 \quad (3.29)$$

dla każdego $w \in \mathfrak{R}^m$. Podstawiając $|SG| = K^2$ i $w = K^{-1}\eta$ otrzymujemy warunek (3.29) w postaci

$$\frac{\eta^T (K B K^{-1})^2 \eta}{\eta^T \eta} < 1 \quad (3.30)$$

Powyższy iloraz Rayleigha jest mniejszy od 1 dla dowolnego $\eta \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy moduły wszystkich wartości własnych macierzy B są mniejsze niż 1. \square

Zgodnie z definicjami wewnętrznej i brzegowej stabilności, oba te zjawiska są niezależne, ale występują w tym samym systemie. W rezultacie system, który jest wewnętrznie stabilny a brzegowo niestabilny, tzn. $\exists G: dE_w/dt < 0, dE_b/dt > 0$ dla wszystkich niezerowych warunków początkowych, to wtedy nie wiadomo czy jako całość jest, czy nie jest stabilny. W takim przypadku zawsze bowiem można dobrać takie warunki początkowe klasy C^1 , że $\|w(0, 0)\|$ i $\|w(1, 0)\|$ są dowolnie duże a $\|w(x, 0)\|$ jest dostatecznie małe dla wszystkich $x \in (0, 1)$ i otrzymujemy

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_w}{dt} + \frac{dE_b}{dt} > 0$$

dla $t = 0$. Ponieważ przyjmujemy, że $E(t)$ jest dla zmiennej t funkcją ciągłą co najmniej klasy C^1 , istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $dE/dt > 0$ dla $0 \leq t < \varepsilon$. Obserwacja ta sugeruje, że system jest niestabilny, chociaż może być spełniony warunek $E(t) \rightarrow 0$ gdy

$t \rightarrow \infty$ dla dowolnych warunków początkowych. Z drugiej strony ze stabilności zarówno wewnętrznej jak i brzegowej (jeżeli istnieje przy tym wspólna macierz G) wynika, że cały system jest stabilny. Można jednak znaleźć system zarówno wewnętrznie stabilny (tzn. z diagonalną macierzą $G_w > 0$ taką, że $dE_w/dt < 0$ dla dowolnych niezerowych warunków początkowych) jak i brzegowo stabilny (tzn. istnieje diagonalna macierz $G_b > 0$ taka, że $dE_b/dt < 0$ dla wszystkich niezerowych warunków początkowych), dla którego nie istnieje diagonalna macierz $G > 0$ taka, że $dE_w/dt < 0$ i $dE_b/dt < 0$ równocześnie dla wszystkich $t \leq 0$. Problemy te wynikają stąd, że dzięki metodzie Lapunowa otrzymujemy na ogół tylko warunki wystarczające stabilności, a czasami (dla problemów specjalnego rodzaju) otrzymujemy również warunki konieczne stabilności. W przedstawionym powyżej systemie (3.1), (3.2), D -symetryzowalność macierzy A i B oraz rozłożenie pochodnej (3.21) funkcji Lapunowa (3.16) na sumę dwóch składników (3.22) i (3.23), umożliwiło otrzymanie nie tylko warunków wystarczających, ale i również warunków koniecznych w twierdzeniu 3.2 i twierdzeniu 3.3.

3.4. Stabilność problemu początkowego

Z przedstawionych w rozdziale 2 własności wynika, że równanie hiperboliczne (3.1) ma jednoznaczne rozwiązanie w obszarze

$$\Psi^+ = \{(x, t) : 0 \leq t \leq 1/(s_m - s_1), s_m t \leq x \leq 1 + s_1 t\} \quad (3.31)$$

jeżeli zadane są warunki początkowe

$$w(x, 0) = w_0(x) \in \mathfrak{R}^m \quad (3.32)$$

dla $x \in [0, 1]$, przy czym s_1 jest najmniejszą a s_m jest największą wartością własną macierzy S .

Do zbadania stabilności problemu (3.1), (3.32) posłużymy się funkcją Lapunowa

$$E(t) = \|w(\cdot, t)\|_{L_G^2}^2 = \int_{s_m t}^{1+s_1 t} w^T(x, t) G w(x, t) dx \quad (3.33)$$

gdzie $G = G^T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ jest pewną stałą i dodatnio określoną macierzą. Pierwsza pochodna funkcji energetycznej (3.33), przy założeniu różniczkowalności warunków początkowych (3.32), ma postać

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & w^T(1 + s_1 t, t) [s_1 I - S] G w(1 + s_1 t, t) + \\ & w^T(s_m t, t) [S - s_m I] G w(s_m t, t) + \int_{s_m t}^{1+s_1 t} w^T(A^T G + G A) w dx \end{aligned} \quad (3.34)$$

Macierze $[s_1 I - S] G$ i $[S - s_m I] G$ są diagonalne i mają po jednym zerowym elemencie na przekątnej a pozostałe ich elementy są ujemne.

Twierdzenie 3.4. Stabilność problemu początkowego, w sensie definicji 3.2, jest równoważna stabilności wewnętrznej problemu mieszanego.

Dowód. Występujące we wzorze (3.34) formy kwadratowe utworzone na macierzach $[s_1 I - S]G$ i $[S - s_m I]G$ są ujemnie półokreślone. Zatem ujemna określoność formy kwadratowej $A^T G + GA$ jest warunkiem wystarczającym asymptotycznej stabilności zarówno dla problemu początkowego, jak i problemu mieszanego. Jeżeli natomiast problem początkowy jest stabilny, to wtedy $dE/dt < 0$ dla dowolnych niezerowych warunków początkowych. Dotyczy to również tych warunków początkowych, dla których zerują się dwie pierwsze formy kwadratowe we wzorze (3.34). Takie warunki początkowe istnieją i można je wyznaczyć zakładając rozwiązanie na charakterystykach o nachyleniu s_1 i s_m . Na charakterystyce s_1 , może być dowolne $w_1(1 + s_1 t, t)$, ale $w_2(1 + s_1 t, t) = w_3(1 + s_1 t, t) = \dots = w_m(1 + s_1 t, t) = 0$. Natomiast na charakterystyce s_m dowolne może być $w_m(s_m t, t)$, ale $w_1(s_m t, t) = w_2(s_m t, t) = \dots = w_{m-1}(s_m t, t) = 0$. Zatem z faktu, że $dE/dt < 0$ dla dowolnych warunków początkowych problemu Cauchy'ego, wynika — identycznie jak dla problemu mieszanego — ujemna określoność formy kwadratowej $A^T G + GA$. \square

3.5. Stabilność systemu opisywanego dwoma równaniami

Równania różniczkowe cząstkowe (3.1) typu hiperbolicznego są modelami matematycznymi zjawisk propagacji fal. Na ogół otrzymujemy wtedy układ dwóch równań o postaci macierzowej

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \begin{bmatrix} s^- & \\ & s^+ \end{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} = Aw \quad (3.35)$$

Dodatnia wartość s^+ jest prędkością propagacji fali, natomiast ujemna wartość s^- reprezentuje prędkość fali powrotnej. Warunki brzegowe niech mają postać (3.2), przy czym $B \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$.

Posługując się funkcją Lapunowa (3.16) z diagonalną macierzą G , możemy przyjąć

$$E(t) = \int_0^1 w^T(x, t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} w(x, t) dx \quad (3.36)$$

gdzie $g > 0$. Pochodna względem czasu powyższej funkcji energetycznej jest sumą dwóch składników

$$\frac{dE_w}{dt} = \int_0^1 w^T(x, t) \begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{12} + ga_{21} \\ a_{12} + ga_{21} & 2ga_{22} \end{bmatrix} w(x, t) dx \quad (3.37)$$

oraz

$$\frac{dE_b}{dt} = \begin{bmatrix} w^-(0, t) \\ w^+(1, t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -s^- b_{11}^2 + g s^+ b_{21}^2 + s^- & -s^- b_{11} b_{12} + g s^+ b_{21} b_{22} \\ -s^- b_{11} b_{12} + g s^+ b_{21} b_{22} & -s^- b_{12}^2 + g s^+ b_{22}^2 - g s^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^-(0, t) \\ w^+(1, t) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

gdzie a_{ij} są elementami macierzy $A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ natomiast b_{ij} są elementami macierzy $B \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ z i -tego wiersza i j -tej kolumny.

Lemat 3.5. $A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ jest macierzą asymptotycznie stabilną w sensie Hurwitza wtedy i tylko wtedy gdy $\text{tr } A < 0$ i $\det A > 0$.

Dowód. Wartości własne macierzy $A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ mają ujemne części rzeczywiste wtedy i tylko wtedy gdy wielomian charakterystyczny

$$\det[A - \lambda I] = \lambda^2 - \lambda \text{tr } A + \det A \quad (3.39)$$

ma dodatnie współczynniki. □

Twierdzenie 3.5. Jeżeli $A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ jest macierzą stabilną w sensie Hurwitza a jej elementy na przekątnej są ujemne (tzn. $a_{11} < 0$ i $a_{22} < 0$), wtedy problem początkowo-brzegowy (3.35), (3.2) jest asymptotycznie wewnątrznie stabilny a parametr g spełnia nierówności

$$\frac{\left(\sqrt{\det A} - \sqrt{a_{11}a_{22}}\right)^2}{a_{21}^2} < g < \frac{\left(\sqrt{\det A} + \sqrt{a_{11}a_{22}}\right)^2}{a_{21}^2} \quad \text{gdy } a_{21} \neq 0 \quad (3.40)$$

lub

$$g > \frac{a_{12}^2}{4a_{11}a_{22}} \quad \text{gdy } a_{21} = 0 \quad (3.41)$$

Dowód. Macierz

$$\begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{12} + ga_{21} \\ a_{12} + ga_{21} & 2ga_{22} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy elementy na przekątnej są ujemne (tzn. $a_{11} < 0$ i $a_{22} < 0$), a wyznacznik jest dodatni. Mnożąc wyznacznik przez -1 , otrzymujemy

$$g^2 a_{21}^2 - 2g(\det A + a_{11}a_{22}) + a_{12}^2 < 0 \quad (3.43)$$

Dla $a_{21} \neq 0$ powyższa nierówność jest spełniona, gdy g spełnia warunki (3.40). Jeżeli $a_{21} = 0$ powyższa nierówność jest równoważna (3.41). □

Lemat 3.6. $B \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ jest macierzą stabilną w sensie Schura wtedy i tylko wtedy gdy

$$|\text{tr } B| - 1 < \det B < 1 \quad (3.44)$$

Dowód. Transformacja $\lambda = (z+1)/(z-1)$ przekształca wielomian charakterystyczny $\det[B - \lambda I]$ do postaci

$$(1 - \operatorname{tr} B + \det B)z^2 + 2(1 - \det B)z + 1 + \operatorname{tr} B + \det B \quad (3.45)$$

Wielomian (3.45) jest stabilny w sensie Hurwitza wtedy i tylko wtedy, gdy jego wszystkie współczynniki są jednakowego znaku. \square

Twierdzenie 3.6. Jeżeli $B \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ jest macierzą asymptotycznie stabilną w sensie Schura i dodatkowo spełnione są warunki

$$b_{11}^2 < 1 \quad (3.46)$$

$$b_{12}^2 b_{21}^2 < (1 - b_{11}^2)(1 - b_{22}^2) \quad (3.47)$$

$$\det B < 1 - |b_{11} - b_{22}| \quad \text{jeżeli } b_{21} \neq 0 \quad (3.48)$$

to wtedy problem początkowo-brzegowy (3.35), (3.2) jest asymptotycznie brzegowo stabilny a parametr g spełnia nierówność

$$0 \leq \max \left\{ \frac{b_{12}^2}{1 - b_{22}^2}, \frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2b_{21}^2} \right\} < -\frac{s^+ g}{s^-} < \min \left\{ \frac{1 - b_{11}^2}{b_{21}^2}, \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2b_{21}^2} \right\} \quad (3.49)$$

jeżeli $b_{21} \neq 0$, gdzie

$$\alpha = \det^2 B + 1 - b_{11}^2 - b_{22}^2 \quad (3.50)$$

$$\Delta = \alpha^2 - 4b_{12}^2 b_{21}^2 \quad (3.51)$$

lub

$$-\frac{s^+ g}{s^-} > \frac{b_{12}^2}{(1 - b_{11}^2)(1 - b_{22}^2)} \quad (3.52)$$

jeżeli $b_{21} = 0$.

Dowód. Z założeń (3.46) i (3.47) wynika istnienie $g > 0$ takiego, że

$$\frac{b_{12}^2}{1 - b_{22}^2} < -\frac{s^+ g}{s^-} < \frac{1 - b_{11}^2}{b_{21}^2} \quad (3.53)$$

To powoduje, że oba elementy na przekątnej macierzy tworzącej formę kwadratową (3.38) są ujemne. Potrzeba jeszcze wykazać, że wyznacznik z tej macierzy jest dodatni, czyli

$$g^2 b_{21}^2 s^+ s^+ - g \alpha s^+ s^- + b_{12}^2 s^- s^- < 0 \quad (3.54)$$

Nierówność (3.54) jest spełniona jeżeli

$$\Delta = \left[(b_{11} - b_{22})^2 - (1 - \det B)^2 \right] \left[\operatorname{tr}^2 B - (1 + \det B)^2 \right] > 0 \quad (3.55)$$

czyli wyróżnik wielomianu (3.54) jest dodatni. Wyróżnik (3.55) jest iloczynem dwóch elementów, przy czym pierwszy z nich jest ujemny dzięki założeniu (3.48) a drugi jest ujemny dzięki założeniu (3.44). Nierówność (3.54) jest spełniona gdy

$$\frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2b_{21}^2} < -\frac{s^+g}{s^-} < \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2b_{21}^2} \quad (3.56)$$

Z (3.51) wynika, że obie strony (3.56) są ujemne. Na zakończenie tej części dowodu zauważmy, że istnieją takie $g > 0$, że obie nierówności (3.53) i (3.56) są spełnione równocześnie. Dla przypadku $b_{21} = 0$ warunek (3.54) przyjmuje formę

$$g(1 - b_{11}^2)(1 - b_{22}^2)s^+ + b_{12}^2s^- > 0 \quad (3.57)$$

która dzięki założeniu (3.47) jest równoważna (3.52). \square

W twierdzeniu 3.5 założenie stabilności macierzy A w sensie Hurwitza oraz założenie w twierdzeniu 3.6 stabilności macierzy B w sensie Schura, są podstawowymi założeniami. Można postawić hipotezę, że pozostałe założenia wynikają ze specyficznie zdefiniowanej normy (3.33) i przede wszystkim z diagonalnej postaci macierzy G . Aby uniknąć tych niedogodności można albo przyjąć dodatkowe założenia dla macierzy A i B , ograniczające klasę rozpatrywanych problemów, albo inaczej zdefiniować normę. Poniżej posłużymy się tą pierwszą metodą, przyjmując dodatkowe założenia o symetryzowalności macierzy A i B . Założenia te są bardzo efektywne i dzięki nim można uzyskać nie tylko warunki wystarczające asymptotycznej stabilności, ale również i konieczne. Poszukiwanie bardziej dogodnej funkcji Lapunowa, pozostaje zagadnieniem otwartym.

Dla problemu Cauchy'ego funkcjonal Lapunowa może mieć postać

$$E(t) = \|w(\cdot, t)\|_{L_G^2}^2 = \int_{s^+t}^{1+s^-t} w^T(x, t)Gw(x, t)dx \quad (3.58)$$

a jego pierwsza pochodna względem czasu

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= w^T(1 + s^-t, t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (s^- - s^+)g \end{bmatrix} w(1 + s^-t, t) + \\ &+ w^T(s^+t, t) \begin{bmatrix} s^- - s^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w(s^+t, t) + \int_{s^+t}^{1+s^-t} w^T(x, t)(A^TG + GA)w(x, t) dx \end{aligned} \quad (3.59)$$

bo $G = \text{diag}(1, g)$.

Definicja 3.11. *Problem Cauchy'ego (3.35), (3.32) jest asymptotycznie stabilny jeżeli istnieje $g > 0$ takie, że spełniona jest nierówność $dE/dt < 0$ dla wszystkich $0 \leq t < 1/(s^+ - s^-)$ i wszystkich niezerowych warunków początkowych (3.32).* \square

Powyższa definicja odbiega od klasycznych definicji asymptotycznej stabilności. Różnice te wynikają ze specyfiki problemu Cauchy’ego (3.35), (3.32). Jego rozwiązanie istnieje bowiem tylko dla skończonego przedziału czasu $0 \leq t < 1/(s^+ - s^-)$. Oparcie definicji 3.11 na funkcji Lapunowa, prowadzi jednak do wyników podobnych do otrzymanych dla klasycznych zagadnień.

Twierdzenie 3.7. Asymptotyczna stabilność problemu Cauchy’ego (3.35), (3.32) jest równoważna asymptotycznej wewnętrznej stabilności problemu początkowo-brzegowego (3.35), (3.2), (3.32).

Dowód. Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 3.4. \square

3.6. Odporna symetryzowalność macierzy

Istnieją takie macierze D -symetryzowalne, że każda ich kombinacja wypukła jest również macierzą D -symetryzowalną. Warunki konieczne i wystarczające do generacji zbioru D -symetryzowalnych macierzy rozpiętych przez dwie D -symetryzowalne macierze zostały wyznaczone przez Białasa i zamieszczone w pracy [3].

Definicja 3.12. SYM nazywamy zbiorem D -symetryzowalnych macierzy, jeżeli każda macierz $A \in SYM \subset \mathfrak{R}^{m \times m}$ jest macierzą D -symetryzowalną. \square

Zbiór domknięty będący kombinacją wypukłą dwóch macierzy $P = [p_{ij}]$, $Q = [q_{ij}] \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, oznaczymy przez

$$\mathbf{U} = \{ \alpha P + (1 - \alpha)Q : \alpha \in [0, 1] \}. \quad (3.60)$$

Poniżej przedstawione są warunki wystarczające i konieczne dla macierzy P i Q na to, aby zbiór \mathbf{U} był D -symetryzowalny, tzn. $\mathbf{U} \subset SYM$.

Definicja 3.13. Macierze $P, Q \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ mają zgodne znaki gdy:

$$1) \quad \text{sign}(p_{ij}) = \text{sign}(p_{ji}) \quad (3.61)$$

$$2) \quad \text{sign}(q_{ij}) = \text{sign}(q_{ji}) \quad (3.62)$$

$$3) \quad \text{sign}(p_{ij}) = \text{sign}(q_{ji}) \quad (3.63)$$

$$\text{lub} \quad \frac{q_{ij}}{q_{ij} - p_{ij}} = \frac{q_{ji}}{q_{ji} - p_{ji}} \quad (3.64)$$

gdzie: $i, j = 1, 2, \dots, m$ oraz $i \neq j$. \square

Lemat 3.7. (Białas [3]) Warunek

$$\text{sign}(\alpha p_{ij} + (1 - \alpha)q_{ij}) = \text{sign}(\alpha p_{ji} + (1 - \alpha)q_{ji}) \quad (3.65)$$

dla $i \neq j$ oraz $i, j = 1, 2, \dots, m$, jest spełniony dla wszystkich $\alpha \in [0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $P = [p_{ij}]$, $Q = [q_{ij}] \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, mają zgodne znaki.

Dowód. Na wstępie zdefiniujemy dwie proste dla ustalonych $i \neq j$

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= \alpha p_{ij} + (1 - \alpha)q_{ij} \\ z(\alpha) &= \alpha p_{ji} + (1 - \alpha)q_{ji} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Aby udowodnić warunek wystarczający, zauważmy, że z (3.61) i (3.62) wynika

$$\text{sign}(y(0)) = \text{sign}(q_{ij}) = \text{sign}(q_{ji}) = \text{sign}(z(0)) \quad (3.67)$$

$$\text{sign}(y(1)) = \text{sign}(p_{ij}) = \text{sign}(p_{ji}) = \text{sign}(z(1)) \quad (3.68)$$

Ostatecznie dla przypadku (3.63) otrzymujemy ze wzorów (3.67) i (3.68)

$$\begin{aligned} \text{sign}(y(0)) &= \text{sign}(y(1)) \\ \text{sign}(z(0)) &= \text{sign}(z(1)) \end{aligned} \quad (3.69)$$

co oznacza, że (3.65) jest spełnione. Dla drugiego przypadku punktu 3) spełnione jest równanie (3.64) (patrz rysunek 3.1) i zachodzi $\text{sign}(p_{ij}) \neq \text{sign}(q_{ij})$. Zatem

$$\frac{q_{ij}}{q_{ij} - p_{ij}} = \frac{q_{ji}}{q_{ji} - p_{ji}} = \alpha_0 \in (0, 1) \quad (3.70)$$

i z (3.66) otrzymujemy $y(\alpha_0) = z(\alpha_0) = 0$. Ponadto, biorąc pod uwagę (3.61) i (3.62) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{sign}(y(1)) &= \text{sign}(z(1)) \\ \text{sign}(y(0)) &= \text{sign}(z(0)) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Oznacza to, że dla przypadku (3.64) warunek (3.65) jest również spełniony. Aby udowodnić warunek konieczny, musimy pokazać, że równania (3.61), (3.62) oraz (3.63) lub (3.64) wynikają z równania (3.65). Podstawiając $\alpha = 1$ i następnie $\alpha = 0$ do (3.65) otrzymujemy natychmiast warunki (3.61) i (3.62). Jeżeli $\alpha p_{ij} + (1 - \alpha)q_{ij} \neq 0$ dla wszystkich $\alpha \in [0, 1]$ otrzymujemy warunek (3.63). W przypadku przeciwnym istnieje $\alpha_0 \in [0, 1]$ takie, że $\alpha_0 p_{ij} + (1 - \alpha_0)q_{ij} = 0$ i $\alpha_0 p_{ji} + (1 - \alpha_0)q_{ji} = 0$. Z tych dwóch równań otrzymujemy warunek (3.64) po wyeliminowaniu α_0 . \square

Dla macierzy $P = [p_{ij}]$, $Q = [q_{ij}] \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, i ich wypukłej kombinacji zajmijmy się macierzami $L(P)$, $L(Q)$, $L(\alpha P + (1 - \alpha)Q) \in \mathfrak{R}^{[m(m-1)/2] \times m}$, dla $\alpha \in [0, 1]$ i $n > 2$. Macierze te są zdefiniowane wzorem (3.12). Przez

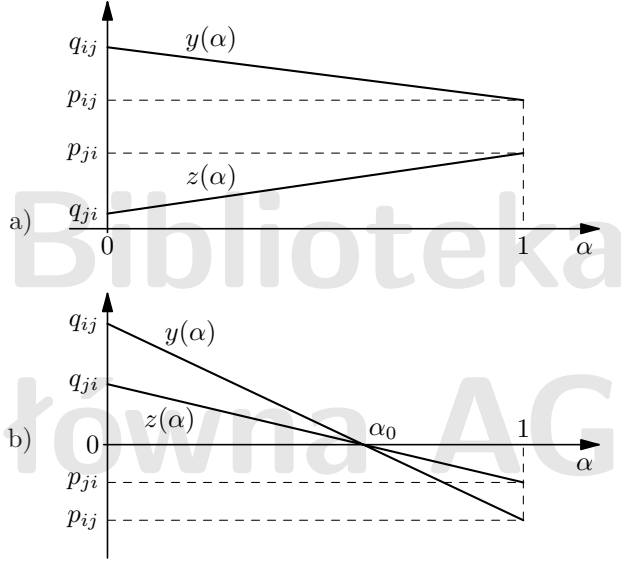
$$L(\alpha) \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{pmatrix}$$

oznaczymy minor macierzy $L(\alpha P + (1 - \alpha)Q)$, utworzony z wierszy i_1, i_2, \dots, i_m i kolumn $1, \dots, m$. Minor ten jest wielomianem zmiennej α

$$L(\alpha) \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{pmatrix} = a_m \alpha^m + a_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = f(\alpha) \quad (3.72)$$

a stopień tego wielomianu spełnia nierówność $\deg(f(\alpha)) \leq m$. Zbiór, który zawiera te wielomiany, oznaczmy przez

$$\mathbf{M}(\alpha) = \left\{ L(\alpha) \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{pmatrix} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq \frac{m(m-1)}{2} \right\} \quad (3.73)$$



Rys. 3.1. Kombinacja wypukła (3.66) z elementów macierzy P i Q ze zgodnymi znakami: a) znaki obu elementów są dodatnie; b) znaki elementów macierzy P i Q są przeciwnie

Lemat 3.8. (Białas [3]) $\text{rg}(L(\alpha P + (1 - \alpha)Q)) < n$ dla wszystkich $\alpha \in [0, 1]$ wtedy i tylko wtedy gdy wielomiany $a_m \alpha^m + a_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots + a_0 \in \mathbf{M}(\alpha)$ spełniają warunki $a_m = a_{m-1} = \dots = a_0 = 0$.

Dowód. Warunki konieczne i wystarczające wynikają z definicji $\mathbf{M}(\alpha)$. □

Twierdzenie 3.8. (Białas [3]) Jeżeli

1. macierze P i Q mają zgodne znaki,
2. każdy wielomian

$$(a_m \alpha^m + a_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0) \in \mathbf{M}(\alpha) \quad (3.74)$$

spełnia założenia

$$a_m = a_{m-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0 \quad (3.75)$$

to wtedy i tylko wtedy

$$\mathbf{U} = \{\alpha P + (1 - \alpha)Q : P = [p_{ij}], Q = [q_{ij}] \in \mathfrak{R}^{m \times m}, \alpha \in [0, 1]\} \quad (3.76)$$

jest zbiorem macierzy D -symetryzowalnych (tzn. $\mathbf{U} \subset SYM$).

Dowód. Najpierw udowodnimy, że każda macierz $A \in \mathbf{U}$ jest D -symetryzowalna jeżeli macierze P i Q spełniają założenia twierdzenia 3.8. Ze zgodności znaków macierzy P i Q oraz lematu 3.7 wnioskujemy, że dla każdej macierzy

$$A = [a_{ij}] = \alpha_0 P + (1 - \alpha_0)Q \in \mathbf{U} \quad (3.77)$$

warunek

$$\text{sign}(a_{ij}) = \text{sign}(a_{ji}) \quad (3.78)$$

jest spełniony dla $i, j = 1, \dots, m$ i $i \neq j$. Z warunku 2) i lematu 3.8 wynika, że

$$\text{rg}(L(\alpha P + (1 - \alpha)Q)) < m \quad (3.79)$$

Z (3.78), (3.79) i twierdzenia 3.1 wnioskujemy, że macierz $A = \alpha_0 P + (1 - \alpha_0)Q$ jest D -symetryzowalna.

Aby udowodnić warunek konieczny, zauważmy, że z D -symetryzowalności macierzy $A = \alpha P + (1 - \alpha)Q \in \mathbf{U}$ i twierdzenia 3.1 wynika, że

$$\text{sign}(\alpha p_{ij} + (1 - \alpha)q_{ij}) = \text{sign}(\alpha p_{ji} + (1 - \alpha)q_{ji}) \quad (3.80)$$

dla $i, j = 1, \dots, m$ i $i \neq j$ oraz

$$\text{rg}(L(\alpha P + (1 - \alpha)Q)) < m \quad (3.81)$$

Z (3.80) i lematu 3.7 wynika, że macierze P i Q mają zgodne znaki. Ponadto (3.81) i lemat 3.8 prowadzi do warunku 2. \square

3.7. Odporna stabilność systemów hiperbolicznych

Wartości własne macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ oznaczmy przez $\lambda_1(A), \dots, \lambda_m(A)$. Niech

$$\mathbf{S}_H = \{A \in \mathfrak{R}^{m \times m} : \text{Re}(\lambda_i(A)) < 0, i = 1, \dots, m\} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{S}_S = \{A \in \mathfrak{R}^{m \times m} : |\lambda_i(A)| < 1, i = 1, \dots, m\} \quad (3.83)$$

będą zbiorami macierzy stabilnych w sensie Hurwitza i macierzy stabilnych w sensie Schura.

Twierdzenie 3.9. (Białas [3]) Jeżeli $P = [p_{ij}]$, $Q = [q_{ij}] \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, oraz

1. P, Q są macierzami stabilnymi w sensie Hurwitza,
2. dla każdej macierzy $A \in \mathbf{S} = \{\alpha P + (1 - \alpha)Q : \alpha \in [0, 1]\}$ wszystkie wartości własne są rzeczywiste, tzn.

$$\lambda_i(A) \in \mathfrak{R} \quad \text{dla } i = 1, \dots, m,$$

to \mathbf{S} jest zbiorem macierzy stabilnych w sensie Hurwitza (tzn. $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}_H$) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lambda_i(PQ^{-1}) \notin (-\infty, 0] \quad \text{dla } i = 1, \dots, m, \quad (3.84)$$

Dowód. Z założenia (3.84) wynika, że

$$\det(PQ^{-1} - \lambda I) \neq 0 \quad \text{dla każdego } \lambda \in (-\infty, 0] \quad (3.85)$$

gdzie $I \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ jest macierzą jednostkową. Podstawiając $\lambda = (\alpha - 1)/\alpha$ otrzymujemy z (3.85)

$$\det(\alpha P + (1 - \alpha)Q) \neq 0 \quad (3.86)$$

dla każdego $\alpha \in (0, 1]$. Biorąc pod uwagę założenia 1) i 2) otrzymujemy $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}_H$ z (3.86) ponieważ wartości własne są ciągłymi funkcjami parametru α . Dla udowodnienia warunku wystarczającego zauważmy, że z $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}_H$ wynika (3.86). Ze stabilności macierzy Q wynika istnienie Q^{-1} , zatem (3.86) może być zapisane w formie (3.85). \square

Na ogół trudno jest sprawdzić założenie 2) twierdzenia 3.9. Znane są tylko warunki wystarczające na to, aby macierz miała rzeczywiste wartości własne. Macierze D -symetryzowalne są jednym z takich przykładów.

Wniosek 3.1. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.9 a macierze P i Q rozpinają zbiór D -symetryzowalnych macierzy (tzn. $\mathbf{S} \subset SYM$), wtedy problem (3.35), (3.2) jest odpornie wewnętrznie stabilny, tzn.

$$\mathbf{S} = \{\alpha P + (1 - \alpha)Q : \alpha \in [0, 1]\} \subset \mathbf{S}_H \cup SYM \quad (3.87)$$

\square

Twierdzenie 3.10. Jeżeli $P = [p_{ij}]$, $Q = [q_{ij}] \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, oraz

1. macierze P, Q są macierzami stabilnymi w sensie Schura
2. dla każdego $B \in \mathbf{S} = \{\alpha P + (1 - \alpha)Q : \alpha \in [0, 1]\}$ spełnione jest $\lambda_i(B) \in \mathfrak{R}$, dla $i = 1, \dots, m$,

to zbiór \mathbf{S} jest zbiorem stabilnym w sensie Schura (tzn. $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}_S$) wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lambda_i((I - P)(I - Q)^{-1}) \notin (-\infty, 0] \quad \text{oraz} \quad \lambda_i((I + P)(I + Q)^{-1}) \notin (-\infty, 0] \quad (3.88)$$

dla $i = 1, \dots, m$.

Dowód. Z założenia (3.88) otrzymujemy

$$\det((I - P)(I - Q)^{-1} - \lambda I) \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \det((I + P)(I + Q)^{-1} - \lambda I) \neq 0 \quad (3.89)$$

dla $\lambda \in (-\infty, 0]$. Warunki te są równoważne

$$\det(I - P - \lambda(I - Q)) \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \det(I + P - \lambda(I + Q)) \neq 0 \quad (3.90)$$

Podstawiając $\lambda = (\alpha - 1)/\alpha$ do (3.90) dla $\alpha \in (0, 1]$ otrzymujemy

$$\det(\alpha P + (1 - \alpha)Q - I) \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \det(\alpha P + (1 - \alpha)Q + I) \neq 0 \quad (3.91)$$

Oznacza to, że -1 i 1 nie są wartościami własnymi macierzy $\alpha P + (1 - \alpha)Q$. Dodatkowo biorąc pod uwagę 1) i 2) ostatecznie otrzymujemy

$$|\lambda_i(\alpha P + (1 - \alpha)Q)| < 1 \quad (3.92)$$

dla $i = 1, 2, \dots, m$ i wszystkich $\alpha \in [0, 1]$, ponieważ wartości własne macierzy $\alpha P + (1 - \alpha)Q$ są ciągłymi funkcjami parametru α . Dla udowodnienia warunku koniecznego zauważmy, że inkluzja $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}_S$ prowadzi do (3.91). Ze stabilności w sensie Schura macierzy Q otrzymujemy $\det(Q - \lambda I) \neq 0$ dla $\lambda \leq -1$ lub $\lambda \geq 1$. Oznacza to, że macierze $(I - Q)^{-1}$ i $(I + Q)^{-1}$ istnieją i można otrzymać (3.89) z (3.91). \square

Wniosek 3.2. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.10 i macierze P oraz Q rozpinają zbiór macierzy D -symetryzowalnych (tzn. $\mathbf{S} \subset SYM$) wtedy problem (3.35), (3.2) jest odpornie brzegowo stabilny, tzn.

$$\mathbf{S} = \{\alpha P + (1 - \alpha)Q : \alpha \in [0, 1]\} \subset \mathbf{S}_S \cup SYM \quad (3.93)$$

\square

4

Metoda charakterystyk

4.1. Aproksymacja równań różniczkowych przez równania różnicowe

Metodę charakterystyk najczęściej stosuje się do numerycznego rozwiązania układu dwu równań

$$\begin{cases} \frac{\partial w^-(x,t)}{\partial t} + s^- \frac{\partial w^-(x,t)}{\partial x} = a_{11}w^-(x,t) + a_{12}w^+(x,t) + u^-(x,t) \\ \frac{\partial w^+(x,t)}{\partial t} + s^+ \frac{\partial w^+(x,t)}{\partial x} = a_{21}w^-(x,t) + a_{22}w^+(x,t) + u^+(x,t) \end{cases} \quad (4.1)$$

gdzie $u^-(x,t)$ i $u^+(x,t)$ są zadanymi funkcjami skalarnymi. Metoda charakterystyk stosowana jest zarówno do numerycznego rozwiązania problemu Cauchy'ego jak i problemu mieszanego. Dla równań typu (4.1) metoda charakterystyk na ogół daje lepsze rezultaty niż każda inna metoda, ponieważ uwzględnia [1] „falową naturę” rozwiązań. Dodatkowo algorytm tej metody jest prosty, można go łatwo zapisać w postaci programu komputerowego, a czas obliczeń jest relatywnie do innych metod najkrótszy. Metoda charakterystyk może być stosowana zarówno do równań niestacjonarnych jak i do równań quasi-liniowych. Istota tej metody polega na odpowiedniej zamianie układu współrzędnych. Dzięki temu otrzymuje się układy równań różniczkowych zwyczajnych, które następnie rozwiązuje się numerycznie jedną z typowych metod różnicowych. Specyficzną cechą metody charakterystyk jest stała zależność pomiędzy gęstością dyskretyzacji czasu Δt i przestrzeni Δx ,

$$\Delta x = (s^+ - s^-)\Delta t \quad (4.2)$$

Metoda charakterystyk opiera się na zamianie układu współrzędnych

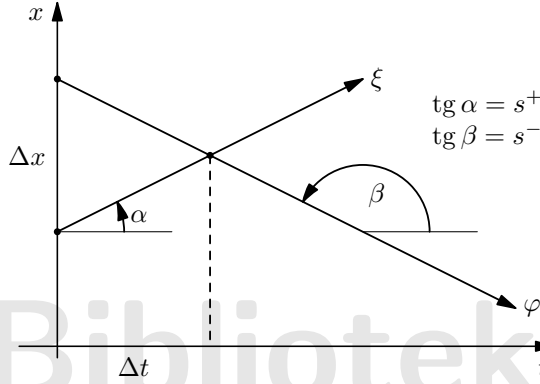
$$\begin{aligned} x &= x(\varphi, \xi) \\ t &= t(\varphi, \xi) \end{aligned} \quad (4.3)$$

przy czym nowe współrzędne φ, ξ zmieniają się wzdłuż krzywych zwanych charakterystykami (patrz rysunek 4.1). Charakterystyki spełniają równania

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= s^- \\ \frac{dx}{dt} &= s^+ \end{aligned} \quad (4.4)$$

Do dalszych rozważań przyjmiemy dwa założenia upraszczające: niech współczynniki równania (4.1) będą stałe a moduły prędkości propagacji fal niech będą jednakowe

$$-s^- = s^+ = s \quad (4.5)$$



Rys. 4.1. Zamiana układu współrzędnych w metodzie charakterystyk

Wprowadzając nowy układ współrzędnych otrzymujemy zależności

$$\frac{\partial w^-(x, t)}{\partial t} - s \frac{\partial w^-(x, t)}{\partial x} = \frac{\left[\frac{\partial w^-(x, t)}{\partial t} \frac{\partial t(\varphi, \xi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial w^-(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x(\varphi, \xi)}{\partial \varphi} \right]}{\frac{\partial t(\varphi, \xi)}{\partial \varphi}} = \frac{\frac{\partial w^-(\varphi, \xi)}{\partial \varphi}}{\frac{\partial t(\varphi, \xi)}{\partial \varphi}} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial w^+(x, t)}{\partial t} + s \frac{\partial w^+(x, t)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial w^+(\varphi, \xi)}{\partial \xi}}{\frac{\partial t(\varphi, \xi)}{\partial \xi}}$$

Podstawiając (4.6) do (4.1) sprowadzamy wyjściowy układ równań do układu równań różniczkowych zwyczajnych

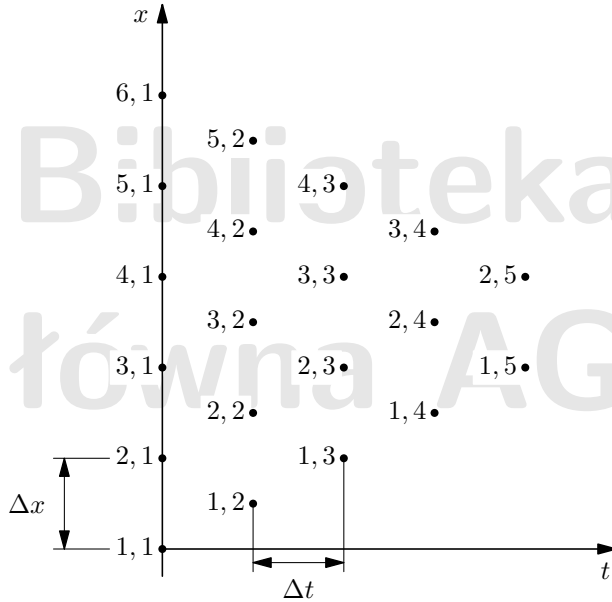
$$\begin{aligned} \frac{dw^-}{dt} &= a_{11}w^- + a_{12}w^+ + u^- \\ \frac{dw^+}{dt} &= a_{21}w^- + a_{22}w^+ + u^+ \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aby z równań (4.7) otrzymać równania różnicowe, można zastosować jedną z typowych metod. Posługując się na przykład metodą Eulera otrzymujemy

$$\begin{aligned} w_{i,j+1}^- - w_{i+1,j}^- &= [a_{11}w_{i+1,j}^- + a_{12}w_{i+1,j}^+ + u_{i+1,j}^-] \Delta t \\ w_{i,j+1}^+ - w_{i,j}^+ &= [a_{21}w_{i,j}^- + a_{22}w_{i,j}^+ + u_{i,j}^+] \Delta t \end{aligned} \quad (4.8)$$

Indeksy u dołu zmiennej w oznaczają numerację dyskretnych wartości czasu i zmiennej przestrzennej zgodnie z regułą przedstawioną na rysunku 4.2. Stosując metodę Cranka-Nicholsona z równań (4.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 w_{i,j+1}^- - w_{i+1,j}^- &= [a_{11}(w_{i+1,j}^- + w_{i,j+1}^-) + a_{12}(w_{i+1,j}^+ + w_{i,j+1}^+) + u_{i+1,j}^- + u_{i,j+1}^-] \frac{\Delta t}{2} \\
 w_{i,j+1}^+ - w_{i,j}^+ &= [a_{21}(w_{i,j}^- + w_{i,j+1}^-) + a_{22}(w_{i,j}^+ + w_{i,j+1}^+) + u_{i,j}^+ + u_{i,j+1}^+] \frac{\Delta t}{2}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$



Rys. 4.2. Numeracja węzłów dyskretyzacji dla problemu Cauchy'ego

Ogólnie w przypadku stosowania metod dwuwarstwowych, równania różnicowe mogą być zapisane w postaci macierzowej

$$w_{j+1,i} = \Gamma w_{j,i} + \Omega w_{j,i+1} + W^- u_{j,i+1} + W^+ u_{j,i} + W^\pm u_{j+1,i}
 \tag{4.10}$$

Współczynniki w powyższym równaniu zależą od metody aproksymacji równania (4.7). Dla metody Eulera otrzymujemy

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta t a_{21} & 1 + \Delta t a_{22} \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 1 + \Delta t a_{11} & \Delta t a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{4.11}$$

$$W^- = \begin{bmatrix} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix} \quad W^\pm = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{4.12}$$

natomiast dla metody Cranka-Nicholsona

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_{12}a_{21}\Delta t^2/4 & a_{12}(1 + a_{22}\Delta t/2)\Delta t/2 \\ a_{21}(1 - a_{11}\Delta t/2)\Delta t/2 & 1 + (a_{22} - a_{11})\Delta t/2 - a_{11}a_{22}\Delta t^2/4 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 + (a_{11} - a_{22})\Delta t/2 - a_{11}a_{22}\Delta t^2/4 & a_{12}(1 - a_{22}\Delta t/2)\Delta t/2 \\ a_{21}(1 + a_{11}\Delta t/2)\Delta t/2 & a_{12}a_{21}\Delta t^2/4 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$W^- = \frac{\Delta t}{2\alpha} \begin{bmatrix} 1 - a_{22}\Delta t/2 & 0 \\ a_{21}\Delta t/2 & 0 \end{bmatrix} \quad W^+ = \frac{\Delta t}{2\alpha} \begin{bmatrix} 0 & a_{12}\Delta t/2 \\ 0 & 1 - a_{11}\Delta t/2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$W^\pm = \frac{\Delta t}{2\alpha} \begin{bmatrix} 1 - a_{22}\Delta t/2 & a_{12}\Delta t/2 \\ a_{21}\Delta t/2 & 1 - a_{11}\Delta t/2 \end{bmatrix}$$

gdzie stała $\alpha = 1 - 0,5\Delta t \operatorname{tr} A + 0,25\Delta t^2 \det A$ musi być różna od zera. Wynika stąd, że dla metody Cranka-Nicholsona trzeba dodatkowo uwzględnić warunek

$$\Delta t \neq \frac{(\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A})}{\det A} \quad (4.15)$$

Dla obu metod macierze Γ i Ω są osobliwe, ponieważ posiadają po jednej zerowej wartości własnej.

4.2. Dyskretna aproksymacja problemu Cauchy'ego

Metodę charakterystyk można stosować do znalezienia dyskretniej aproksymacji rozwiązania równania różniczkowego (4.1) z warunkiem początkowym

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad \text{dla } x \in [0, 1] \quad (4.16)$$

Rozwiązanie jest wtedy obliczane w węzłach

$$\Psi_\Delta = \left\{ (x_j, t_j) \in \Psi^+ : \begin{aligned} t_j &= 0,5(j-1)\Delta x/s; & x_i &= \Delta x[i-1 + 0,5(j-1)]; \\ j &= 1, 2, \dots, 1 + 1/\Delta x; & i &= 1, 2, \dots, 2 - j + 1/\Delta x \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

gdzie Ψ^+ jest zdefiniowane przez (2.13). Gęstość dyskretyzacji czasoprzestrzeni Ψ_Δ jest zdeterminowana przez dyskretyzację po zmiennej przestrzennej Δx . Powinna ona

być tak dobrana, aby $1/\Delta x$ było liczbą całkowitą. Dyskretne wartości dla pierwszej warstwy czasowej

$$w_{1,i} = w_0(x_i) \quad (4.18)$$

obliczane są z warunków początkowych (4.16), przy czym $x_i = (i-1)\Delta x$ natomiast $i = 1, 2, \dots, 1 + 1/\Delta x$. Następnie posługując się wzorem rekurencyjnym (4.10) można obliczyć przybliżoną wartość rozwiązania problemu Cauchy'ego (4.1), (4.16) dla punktu o współrzędnych $t_2 = 2s\Delta x$, $x_1 = \Delta x/2$. Zatem $w_{1,2}$ jest obliczane w oparciu o warunki początkowe $w_{1,1}$ i $w_{2,1}$. Następnie na podstawie wartości $w_{2,1}$ oraz $w_{3,1}$ (patrz rysunek 4.2), obliczane są, za pomocą wzoru rekurencyjnego (4.10), wartości $w_{2,2}$. W ten sposób oblicza się kolejno wartości dla punktów w drugiej warstwie czasowej. Następnie bazując na wartościach obliczonych dla drugiej warstwy czasowej, oblicza się kolejno wartości dla trzeciej warstwy czasowej, tzn. $w_{1,3}$, $w_{2,3}$, $w_{3,3}$ itd. Postępowanie takie prowadzi się tak długo, aż będą znane wartości przybliżonego rozwiązania dla wszystkich punktów zbioru Ψ_Δ .

Każda kolejna warstwa czasowa posiada o jeden węzeł mniej od warstwy poprzedniej. Wynika to z zawężania się obszaru określoności rozwiązania problemu Cauchy'ego. Ostatnia, $j = 1 + 1/\Delta x$ warstwa czasowa, posiada tylko jeden punkt $t_j = 0,5/s$.

Przedstawioną powyżej procedurę obliczeniową wygodnie jest zapisać w postaci macierzowej. Dla j -tej warstwy czasowej, przyjmując wektory zmiennych i wymuszeń w postaci

$$w_j = \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ \vdots \\ w_{I,j} \end{bmatrix} \quad u_j = \begin{bmatrix} u_{1,j}^- \\ u_{1,j}^+ \\ \vdots \\ u_{I,j}^- + u_{I,j}^+ \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} I = 2 - j + 1/\Delta x \\ w_j, u_j \in \mathbb{R}^{2I} \end{array} \quad (4.19)$$

otrzymujemy

$$w_{j+1} = \Phi_C w_j + W^{\leftarrow} u_j + W^{\rightarrow} u_{j+1} \quad (4.20)$$

przy czym macierze prostokątne Φ_C i W^{\leftarrow} oraz W^{\rightarrow} kwadratowa składają się z bloków macierzowych

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} \Gamma & \Omega & & & \\ & \Gamma & \Omega & & \\ \dots & & & & \\ & & & \Gamma & \Omega \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(1-j+1/\Delta x) \times 2(2-j+1/\Delta x)} \quad (4.21)$$

$$W^{\leftarrow} = \begin{bmatrix} W^+ & W^- & & & \\ & W^+ & W^- & & \\ \dots & & & & \\ & & & W^+ & W^- \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(1-j+1/\Delta x) \times 2(2-j+1/\Delta x)} \quad (4.22)$$

$$W^{\rightarrow} = \begin{bmatrix} W^{\pm} & & & \\ & W^{\pm} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ & & & W^{\pm} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2(1-j+1/\Delta x) \times 2(1-j+1/\Delta x)} \quad (4.23)$$

W zależności od stosowanej metody macierze Γ , Ω , W^+ , W^- , W^{\pm} dane są wzorami (4.11), (4.12) dla metody Eulera lub (4.13), (4.14) dla metody Cranka-Nicholsona. Wzór rekurencyjny (4.20) jest dyskretną aproksymacją równania różniczkowego cząstkowego (4.1).

Dla dyskretnego równania dynamiki (4.20) można, analogicznie jak to zostało zrobione w rozdziale 3 dla układów ciągłych, zdefiniować funkcję energetyczną w postaci kwadratu normy

$$E_j = \|w_j\|^2 = w_j^T G_j w_j \quad (4.24)$$

gdzie $G_j = G_j^T > 0$. Indeks u dołu macierzy G_j oznacza, że jej wymiary

$$\dim G_j = 2(J-j) \times 2(J-j) \quad (4.25)$$

zależą od dyskretnego czasu j przy czym $J = 2 + 1/\Delta x$. Macierz G_j można zdefiniować w taki sposób, aby obie normy, dla systemu ciągłego i dyskretnego, były zgodne w następującym sensie

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \|w_j\|_{G_j}^2 = \|w(\cdot, t)\|_{L_G^2}^2 \quad (4.26)$$

Postulat ten jest spełniony gdy

$$G_j = \text{diag}(G, \dots, G) \in \mathfrak{R}^{2(J-j) \times 2(J-j)} \quad (4.27)$$

czyli G_j są macierzami blokowo diagonalnymi a elementy na przekątnej mają postać

$$G = \text{diag}\{1, g\} \quad (4.28)$$

Macierz stanu Φ_C dyskretnego systemu (4.20) zależy od elementów macierzy A oraz przyjętej dyskretyzacji Δt . Żądając zatem stabilności systemu dyskretnego (4.20) otrzymujemy warunki nierównościowe dla tych parametrów.

Definicja 4.1. Liniowy system dyskretny

$$w_{j+1} = \Phi_C w_j \quad (4.29)$$

jest *asymptotycznie stabilny* jeżeli istnieją dodatnio określone macierze (4.27) takie, że $w_{j+1}^T G_{j+1} w_{j+1} - w_j^T G_j w_j < 0$ dla dowolnego $j = 1, 2, \dots, J-2$ takiego, że $\|w_j\| \neq 0$. \square

Rozpatrywany system dynamiczny (4.20) jest dyskretną aproksymacją równania różniczkowego cząstkowego (4.1) i służy do obliczeń numerycznych. Aby rozważyć stabilność numeryczną (4.20) przyjmujemy dodatkową definicję.

Definicja 4.2. System dyskretny (4.29) jest *numerycznie stabilny* jeżeli istnieje stała $\tau > 0$ taka, że system (4.29) jest asymptotycznie stabilny dla wszystkich $\Delta t \in (0, \tau)$. \square

Stwierdzenie 4.1. Jeżeli istnieje ciąg nieosobliwych macierzy $H_j \in \mathfrak{R}^{2(J-j) \times 2(J-j)}$ takich, że

$$\|H_{j+1}\Phi_C H_j^{-1}\| < 1 \quad (4.30)$$

dla wszystkich $1 \leq j \leq J-2$, to wtedy system dyskretny (4.29) jest asymptotycznie stabilny.

Dowód. Z definicji spektralnej normy macierzowej i założenia (4.30) wynika, że

$$\frac{z_j^T (H_j^{-1})^T \Phi_C^T H_{j+1}^T H_{j+1} \Phi_C H_j^{-1} z_j}{z_j^T z_j} < 1 \quad (4.31)$$

dla wszystkich $z_j \neq 0$. Podstawiając

$$z_j = H_j w_j \quad G_{j+1} = H_{j+1}^T H_{j+1} \quad G_j = H_j^T H_j \quad (4.32)$$

do (4.31) otrzymujemy

$$w_j^T \Phi_C^T G_{j+1} \Phi_C w_j < w_j^T G_j w_j \quad (4.33)$$

i ostatecznie biorąc pod uwagę (4.29)

$$\|w_{j+1}\|_{l_{G_{j+1}}^2}^2 < \|w_j\|_{l_{G_j}^2}^2 \quad (4.34)$$

\square

Twierdzenie 4.1. Jeżeli ciągły problem Cauchy'ego (4.1), (4.16) jest asymptotycznie stabilny, wtedy aproksymujący go system dyskretny (4.29), otrzymany z zastosowania metody charakterystyk i metody Eulera, jest numerycznie stabilny.

Dowód. Posłużymy się stwierdzeniem 4.1. W tym celu przyjmiemy $H_{j+1} = G_{j+1}^{1/2}$ oraz $H_j = G_j^{1/2}$ gdzie ułamek $1/2$ oznacza wykładnik potęgi a diagonalne macierze G_j i G_{j+1} są zdefiniowane przez (4.27), (4.28). Norma macierzy $G_{j+1}^{1/2} \Phi_C G_j^{-1/2}$ jest mniejsza od 1 jeżeli wszystkie wartości własne macierzy

$$\Theta_C = G_{j+1}^{1/2} \Phi_C G_j^{-1} \Phi_C^T G_{j+1}^{1/2} \quad (4.35)$$

należą do odcinka $[0, 1)$, przy czym macierz Φ_C jest zdefiniowana przez (4.21) i (4.11). Aby zweryfikować położenie wartości własnych utworzymy wyznacznik

$$\Xi_{2n} = \det(\theta_C - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & \dots \\ b & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & \dots \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a & 0 & 0 & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a &= (1 + a_{11}\Delta t)^2 + a_{12}^2\Delta t^2/g - \lambda \\ b &= (1 + a_{11}\Delta t)a_{21}\Delta t\sqrt{g} + (1 + a_{22}\Delta t)a_{12}\Delta t/\sqrt{g} \\ c &= a_{21}^2\Delta t^2g + (1 + a_{22}\Delta t)^2 - \lambda \\ n &= (1/\Delta x - j + 1) \quad \dim \Theta_C = 2n \times 2n \end{aligned} \quad (4.37)$$

Oznaczając przez Ξ_{2n-k} minor powstały z Ξ_{2n} przez wykreślenie k pierwszych wierszy i kolumn, natomiast przez Θ_{2n} minor powstały z wyznacznika Ξ_{2n} przez skreślenie szóstej i czterech pierwszych kolumn oraz takich samych wierszy, otrzymamy układ równań rekurencyjnych

$$\begin{aligned} \Xi_{2n} &= a \Xi_{2n-1} - ab^2c \Xi_{2n-4} + b^4c \Theta_{2n} \\ \Xi_{2n-1} &= c \Xi_{2n-2} \\ \Xi_{2n-2} &= a \Xi_{2n-3} - b^2c \Theta_{2n} \\ \Xi_{2n-3} &= c \Xi_{2n-4} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Rugując z powyższego układu równań minory stopnia nieparzystego oraz Θ_{2n} otrzymujemy

$$\Xi_{2n} + (b^2 - ac)\Xi_{2n-2} = 0 \quad (4.39)$$

Równanie charakterystyczne dla (4.39) ma postać

$$r^2 + (b^2 - ac) = 0 \quad (4.40)$$

zatem ogólne rozwiązanie równania (4.39)

$$\Xi_{2n} = \alpha r^2 = \alpha(ac - b^2)^n \quad (4.41)$$

Stałą α można obliczyć z wartości wyznacznika $\Xi_2 = ac$ i ostatecznie

$$\Xi_{2n} = ac(ac - b^2)^{n-1} \quad (4.42)$$

Przyrównując do zera wyznacznik (4.42) otrzymujemy natychmiast dwie wartości własne macierzy Θ_C

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (1 + \Delta t a_{11})^2 + a_{12}^2 \Delta t^2 / g \\ \lambda_2 &= (1 + \Delta t a_{22})^2 + a_{21}^2 \Delta t^2 g \end{aligned} \quad (4.43)$$

Są one mniejsze od jedności, gdy odpowiednio

$$\begin{aligned} \Delta t &< \frac{-2a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2/g} \\ \Delta t &< \frac{-2a_{22}}{a_{22}^2 + a_{21}^2 g} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Opierając się na założeniu $a_{11} < 0$ otrzymujemy $\lambda_1 < 1$ dla dostatecznie małych Δt i podobnie z nierówności $a_{22} < 0$ wynika $\lambda_2 < 1$. Pozostałe wartości własne macierzy Θ_C są rozwiązaniami równań

$$\begin{aligned} ac - b^2 = \lambda^2 - \lambda[\Delta t^2(a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2/g + a_{21}^2 g) + 2\Delta t \operatorname{tr} A + 2] + \\ + [\Delta t^2 \det A + \Delta t \operatorname{tr} A + 1]^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Symetryczna macierz Θ_C jest nieujemnie określona, zatem miejsca zerowe powyższego wielomianu muszą być nie tylko rzeczywiste, ale i nieujemne. Aby zbadać, czy należą one do odcinka $[0, 1)$, przesuniemy układ współrzędnych przez podstawienie $\lambda = \varepsilon + 1$. Otrzymamy w ten sposób równanie

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 - \varepsilon[\Delta t^2(a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2/g + a_{21}^2 g) + 2\Delta t \operatorname{tr} A] + \\ + \Delta t^2[\Delta t^2 \det^2 A + 2\Delta t \operatorname{tr} A \det A + 2 \det A + 2a_{11}a_{22} - a_{12}^2/g - a_{21}^2 g] = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Aby oba miejsca zerowe równania (4.46) były ujemne, potrzeba i wystarcza, aby jego współczynniki były dodatnie. Otrzymamy zatem dwa warunki nierównościowe

$$\begin{aligned} \Delta t^2(a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2/g + a_{21}^2 g) \operatorname{tr} A < 0 \\ \Delta t^2 \det^2 A + 2\Delta t \operatorname{tr} A \det A + 2 \det A + 2a_{11}a_{22} - a_{12}^2/g - ga_{21}^2 > 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Spełnienie pierwszej z tych nierówności wynika ze spełnienia nierówności (4.44). Gdyby tak nie było, musiałyby być spełnione równocześnie dwa warunki

$$\begin{aligned} \frac{-2a_{11} - 2a_{22}}{a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2/g + a_{21}^2 g} < \frac{-2a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2/g} \\ \frac{-2a_{11} - 2a_{22}}{a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2/g + a_{21}^2 g} < \frac{-2a_{11}}{a_{22}^2 + a_{21}^2/g} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Po zastosowaniu odpowiedniego przekształcenia, zauważymy, że (4.48) składa się z dwóch sprzecznych nierówności. Pozostaje zatem do zbadania druga nierówność (4.47). Występujący tam wielomian ma dwa miejsca zerowe

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= \frac{-\operatorname{tr} A - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12}/\sqrt{g} + a_{21}\sqrt{g})^2}}{\det A} \\ \Delta t_2 &= \frac{-\operatorname{tr} A + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12}/\sqrt{g} + a_{21}\sqrt{g})^2}}{\det A}\end{aligned}\quad (4.49)$$

Przy założeniu $\operatorname{tr} A < 0$ i $\det A > 0$ otrzymujemy natychmiast $\Delta t_2 > 0$. Trzeba jeszcze sprawdzić, czy $\Delta t_1 > 0$. Parametr ten zależy od g i osiąga wartość maksymalną

$$\Delta t_1 = \frac{-\operatorname{tr} A - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 2(|a_{12}a_{21}| + a_{12}a_{21})}}{\det A}\quad (4.50)$$

dla

$$g = \left| \frac{a_{12}}{a_{21}} \right|\quad (4.51)$$

Jeżeli $a_{12}a_{21} < 0$, wtedy licznik (4.50) jest dodatni, ponieważ $a_{11} < 0$ i $a_{22} < 0$. Jeżeli natomiast $a_{12}a_{21} > 0$ wtedy licznik (4.50) ma wartość

$$-\operatorname{tr} A - \sqrt{\operatorname{tr}^2 A - 4 \det A}\quad (4.52)$$

czyli jest również dodatni dla $\det A > 0$. Do zakończenia dowodu trzeba jeszcze rozważyć przypadki, dla których parametr g nie może być obliczony ze wzoru (4.51). Dla $a_{12} = 0$ otrzymujemy

$$\Delta t_1 = \frac{-\operatorname{tr} A - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}^2 g}}{a_{11}a_{22}}\quad (4.53)$$

a warunek $\Delta t_1 > 0$ jest spełniony dla dowolnych

$$g < \frac{4a_{11}a_{22}}{a_{21}^2}\quad (4.54)$$

Dla przypadku $a_{21} = 0$ otrzymujemy

$$\Delta t_1 = \frac{-\operatorname{tr} A - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}^2/g}}{a_{11}a_{22}}\quad (4.55)$$

a warunek $\Delta t_1 > 0$ jest spełniony gdy

$$g > \frac{a_{12}^2}{4a_{11}a_{22}}\quad (4.56)$$

Jeżeli natomiast $a_{12} = a_{21} = 0$, otrzymujemy

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = -\frac{2}{a_{22}} \quad (4.57)$$

□

Z powyższego twierdzenia wynika wniosek, że warunkiem wystarczającym stabilności dyskretnego systemu dynamicznego (4.29), (4.21) jest stabilność systemu ciągłego (4.1) oraz dostatecznie drobna gęstość dyskretyzacji

$$0 < \Delta t < \max_g \min \left\{ \frac{-2a_{11}}{a_{11}^2 + a_{12}^2/g}, \frac{-2a_{22}}{a_{22}^2 + a_{21}^2g}, \frac{-\operatorname{tr} A - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + g(a_{12}/g + a_{21})^2}}{\det A} \right\} \quad (4.58)$$

gdzie minimum jest wybierane z trzech elementów. Pierwsze dwa są zawsze dodatnie jeżeli ciągły problem Cauchy'ego jest stabilny. Trzeci element można uczynić dodatnim przez podstawienie odpowiedniej wartości za parametr g .

4.3. Dyskretna aproksymacja problemu mieszanego

Niech będzie dane równanie różniczkowe (4.1), warunki początkowe (4.16) i warunki brzegowe

$$\begin{bmatrix} w^-(1, t) \\ w^+(0, t) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} w^-(0, t) \\ w^+(1, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^k(t) \\ u^p(t) \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

dla $t \geq 0$. Dyskretna aproksymacja rozwiązania problemu początkowo-brzegowego (4.1), (4.16), (4.59) obliczana jest w węzłach

$$\Psi_\Delta = \left\{ (x_i, t_j) \in \Psi: \quad x_i = (i-1)\Delta x; \quad t_j = 2(j-1)\Delta t; \quad \Delta x = 2s\Delta t; \right. \\ \left. j = 1, 2, \dots, 1 + sT/\Delta x; \quad i = 1, 2, \dots, 1 + 1/\Delta x \right\} \quad (4.60)$$

gdzie dyskretyzację przestrzenną Δx i czas końcowy T dobiera się tak, aby $1/\Delta x$ i $sT/\Delta x$ były liczbami całkowitymi. Sposób numeracji węzłów siatki aproksymującej obszar rozwiązania przedstawiony jest na rysunku 4.3. Wartości rozwiązania dla pierwszej warstwy czasowej ($j = 1$) znane są z warunku początkowego

$$w_{i,1} = w_0(x_i) \quad (4.61)$$

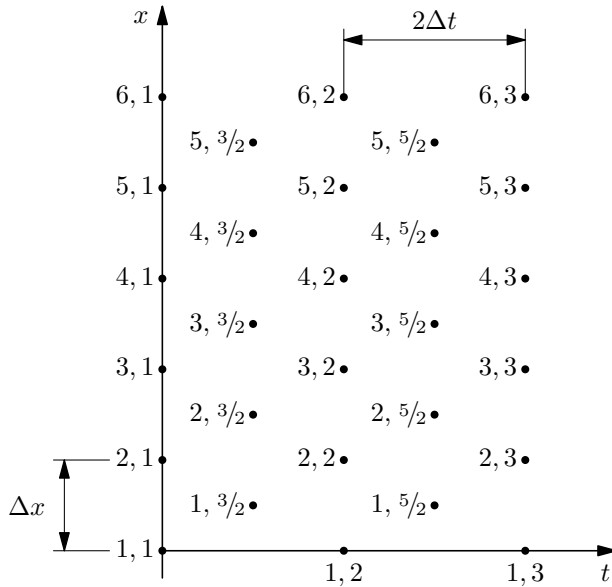
gdzie $i = 1, 2, \dots, 1 + 1/\Delta x$ a $x_i = (i - 1)\Delta x$. Następnie oblicza się wartości rozwiązania dla pośredniej warstwy czasowej, oznaczonej przez $j = 3/2$. Współrzędne przestrzenne dla węzłów tej warstwy wynoszą $1/2 \Delta x, 3/2 \Delta x, 5/2 \Delta x, \dots, 1 - 1/2 \Delta x$. Wartości rozwiązań $w_{i,3/2}$ gdzie $i = 1, 2, \dots, 1 + 1/\Delta x$, nie zależą od warunków brzegowych (4.59) i dlatego są obliczane w taki sam sposób jak dla problemu Cauchy'ego, zatem mogą być zapisane w postaci macierzowej

$$w_{j+1/2} = \Phi_C w_j + W^{\leftarrow} u_j + W^{\rightarrow} u_{j+1/2} \quad (4.62)$$

gdzie macierze $\Phi_C, W^{\leftarrow} \in \mathbb{R}^{2/\Delta x \times 2(1+1/\Delta x)}$ i $W^{\rightarrow} \in \mathbb{R}^{2/\Delta x \times 2/\Delta x}$ są zdefiniowane przez (4.21), (4.22), (4.23) i nie zależą od dyskretnej zmiennej czasowej j . W ten sam sposób obliczane są wartości $w_{i,2}$ dla następnej warstwy czasowej ($j = 2$), ale tylko w węzłach $x_i = i\Delta x$ gdzie $i = 2, \dots, 1/\Delta x$. Dla punktów brzegowych $w_{1,2}$ i $w_{1+1/\Delta x,2}$ korzysta się zarówno z równań różnicowych (4.8) lub (4.9) jak i warunków brzegowych (4.59). Dla punktów brzegowych otrzymujemy zatem równania

$$\begin{cases} w_{1,j}^- - w_{3/2,j-1/2}^- = (a_{11}w_{3/2,j-1/2}^- + a_{12}w_{3/2,j-1/2}^+ + u_{3/2,j-1/2}^-)\Delta t \\ w_{1,j}^+ = b_{21}w_{1,j}^- + b_{22}w_{m,j}^+ + u_j^p \end{cases} \quad (4.63)$$

$$\begin{cases} w_{m,j}^- = b_{12}w_{m,j}^+ + b_{11}w_{1,j}^- + u_j^k \\ w_{m,j}^+ - w_{n,j-1/2}^+ = (a_{21}w_{n,j-1/2}^- + a_{22}w_{n,j-1/2}^+ + u_{n,j-1/2}^+)\Delta t \end{cases} \quad (4.64)$$



Rys. 4.3. Numeracja węzłów dyskretyzacji dla problemu mieszanego

gdzie $m = 1 + 1/\Delta x$, $n = 1/2 + 1/\Delta x$ natomiast $u_j^p = u^p(j\Delta t)$ i $u_j^k = u^k(j\Delta t)$ są dyskretnymi aproksymacjami niejednorodności warunków brzegowych (4.59). Podobnie dla metody Cranka-Nicholsona otrzymujemy

$$\begin{cases} w_{1,j}^- - w_{3/2,j-1/2}^- = [a_{11}(w_{3/2,j-1/2}^- + w_{1,j}^-) + \\ \quad + a_{12}(w_{3/2,j-1/2}^+ + w_{1,j}^+) + u_{3/2,j-1/2}^- + u_{1,j}^-] \frac{\Delta t}{2} \\ w_{1,j}^+ = b_{21}w_{1,j}^- + b_{22}w_{m,j}^+ + u_j^p \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\begin{cases} w_{m,j}^- = b_{12}w_{m,j}^+ + b_{11}w_{1,j}^- + u_j^k \\ w_{m,j}^+ - w_{n,j-1/2}^+ = [a_{21}(w_{n,j-1/2}^- + w_{m,j}^-) + \\ \quad + a_{22}(w_{n,j-1/2}^+ + w_{m,j}^+) + u_{n,j-1/2}^+ + u_{m,j}^+] \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (4.66)$$

Z powyższych wzorów można obliczyć wartości rozwiązań dla punktów brzegowych

$$w_{1,j} = Vw_{3/2,j-1/2} + Cw_{n,j-1/2} + W_0^- u_{3/2,j-1/2}^- + W_{0k}^- u_{1,j}^- + W_0^+ u_{n,j-1/2}^+ + W_{0k}^+ u_{m,j}^+ + U_0^p u_j^p + U_0^k u_j^k \quad (4.67)$$

$$w_{m,j} = Ww_{n,j-1/2} + Dw_{3/2,j-1/2} + W_1^- u_{3/2,j-1/2}^- + W_{1k}^- u_{1,j}^- + W_1^+ u_{n,j-1/2}^+ + W_{1k}^+ u_{m,j}^+ + U_1^p u_j^p + U_1^k u_j^k \quad (4.68)$$

gdzie dla metody Eulera

$$V = \begin{bmatrix} 1 + a_{11}\Delta t & a_{12}\Delta t \\ b_{21}(1 + a_{11}\Delta t) & b_{21}a_{12}\Delta t \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} b_{12}a_{21}\Delta t & b_{12}(1 + a_{22}\Delta t) \\ a_{21}\Delta t & 1 + a_{22}\Delta t \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{22}a_{21}\Delta t & b_{22}(1 + a_{22}\Delta t) \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} b_{11}(1 + a_{11}\Delta t) & b_{11}a_{12}\Delta t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$W_0^- = \begin{bmatrix} \Delta t \\ b_{21}\Delta t \end{bmatrix} \quad W_1^+ = \begin{bmatrix} b_{12}\Delta t \\ \Delta t \end{bmatrix} \quad W_1^- = \begin{bmatrix} b_{11}\Delta t \\ 0 \end{bmatrix} \quad W_0^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{22}\Delta t \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$W_{0k}^- = W_{0k}^+ = W_{1k}^- = W_{1k}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$U_0^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad U_0^k = U_1^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad U_1^k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Natomiast dla metody Cranka-Nicholsona

$$V = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} (1 + a_{11} \frac{\Delta t}{2})(1 - a_{11} b_{12} \frac{\Delta t}{2} - a_{22} \frac{\Delta t}{2}) \\ (1 + a_{11} \frac{\Delta t}{2})(a_{11} b_{11} b_{22} + a_{11} b_{12} b_{21} + a_{22} b_{21}) \frac{\Delta t}{2} \\ (1 - a_{11} b_{12} \frac{\Delta t}{2} - a_{22} \frac{\Delta t}{2}) a_{12} \frac{\Delta t}{2} \\ (a_{11} b_{11} b_{22} + a_{11} b_{12} b_{21} + a_{22} b_{21}) a_{12} \frac{\Delta t^2}{4} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$W = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} (b_{12} - a_{11} b_{12} \frac{\Delta t}{2} + a_{12} b_{11} b_{22} \frac{\Delta t}{2} - a_{12} b_{12} b_{21} \frac{\Delta t}{2}) a_{21} \frac{\Delta t}{2} \\ (1 - a_{11} \frac{\Delta t}{2} - a_{12} b_{21} \frac{\Delta t}{2}) a_{21} \frac{\Delta t}{2} \\ (b_{12} - a_{11} b_{12} \frac{\Delta t}{2} + a_{12} b_{11} b_{22} \frac{\Delta t}{2} - a_{12} b_{12} b_{21} \frac{\Delta t}{2})(1 + a_{22} \frac{\Delta t}{2}) \\ (1 - a_{11} \frac{\Delta t}{2} - a_{12} b_{21} \frac{\Delta t}{2})(1 + a_{22} \frac{\Delta t}{2}) \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} a_{12} a_{21} b_{22} \frac{\Delta t^2}{4} & a_{12} b_{22} (1 + a_{22} \frac{\Delta t}{2}) \frac{\Delta t}{2} \\ a_{21} b_{22} (1 - a_{11} \frac{\Delta t}{2}) \frac{\Delta t}{2} & b_{22} (1 - a_{11} \frac{\Delta t}{2}) (1 + a_{22} \frac{\Delta t}{2}) \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$D = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} b_{11} (1 + a_{11} \frac{\Delta t}{2}) (1 - a_{22} \frac{\Delta t}{2}) & a_{12} b_{11} (1 - a_{22} \frac{\Delta t}{2}) \frac{\Delta t}{2} \\ a_{11} b_{11} (1 + a_{11} \frac{\Delta t}{2}) \frac{\Delta t}{2} & a_{11} a_{12} b_{11} \frac{\Delta t^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$W_0^- = W_{0k}^- = \frac{\Delta t}{2\alpha} \begin{bmatrix} 1 - a_{22} \frac{\Delta t}{2} - a_{11} b_{12} \frac{\Delta t}{2} \\ (a_{22} b_{21} + a_{11} b_{12} b_{21} + a_{11} b_{11} b_{22}) \frac{\Delta t}{2} \end{bmatrix}$$

$$W_1^+ = W_{1k}^+ = \frac{\Delta t}{2\alpha} \begin{bmatrix} (b_{12} - a_{11} b_{12} + a_{12} b_{11} b_{22} + a_{12} b_{12} b_{21}) \frac{\Delta t}{2} \\ 1 - a_{11} \frac{\Delta t}{2} - a_{12} b_{21} \frac{\Delta t}{2} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

$$W_0^+ = W_{0k}^+ = \frac{b_{22} \Delta t}{2\alpha} \begin{bmatrix} a_{12} \frac{\Delta t}{2} \\ 1 - a_{11} \frac{\Delta t}{2} \end{bmatrix}$$

$$W_1^- = W_{1k}^- = \frac{b_{11} \Delta t}{2\alpha} \begin{bmatrix} 1 - a_{22} \frac{\Delta t}{2} \\ a_{11} \frac{\Delta t}{2} \end{bmatrix}$$

$$U_0 = \frac{\Delta t}{2\alpha} \begin{bmatrix} a_{12} (1 - a_{22} \frac{\Delta t}{2} - a_{11} b_{12} \frac{\Delta t}{2}) \frac{\Delta t}{2} \\ 1 - a_{11} \frac{\Delta t}{2} - a_{22} \frac{\Delta t}{2} + a_{11} a_{22} \frac{\Delta t^2}{4} - a_{11} b_{12} \frac{\Delta t}{2} + a_{11}^2 b_{12} \frac{\Delta t^2}{4} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

$$U_1 = \frac{\Delta t}{2\alpha} \begin{bmatrix} 1 - a_{11} \frac{\Delta t}{2} - a_{22} \frac{\Delta t}{2} + a_{11} a_{22} \frac{\Delta t^2}{4} - a_{11} b_{21} \frac{\Delta t}{2} + a_{12}^2 a_{22} b_{21} \frac{\Delta t^2}{4} \\ a_{11} (1 - a_{11} \frac{\Delta t}{2} - a_{12} b_{21} \frac{\Delta t}{2}) \frac{\Delta t}{2} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\alpha = 1 - (a_{11} + a_{22} + a_{11}b_{12} + a_{12}b_{21} - (a_{11}a_{22} + a_{11}^2b_{12} + a_{12}a_{22}b_{21} + a_{11}a_{12}b_{12}b_{21} - a_{11}a_{12}b_{11}b_{22})\frac{\Delta t}{2})\frac{\Delta t}{2} \quad (4.78)$$

muszą być różne od zera. Wynikają stąd dodatkowe ograniczenia na gęstość dyskretyzacji.

Przedstawiony powyżej drugi etap wyznaczania rozwiązań w oparciu o warstwę pośrednią oraz warunki brzegowe, można zapisać macierzowo

$$w_{j+1} = \Phi_B w_{j+1/2} + W_{\leftarrow} u_{j+1/2} + W_{\rightarrow} u_{j+1} + U^0 u_{j+1}^p + U^1 u_{j+1}^k \quad (4.79)$$

gdzie

$$\Phi_B = \begin{bmatrix} V & & & C \\ \Gamma & \Omega & & \\ & \Gamma & \Omega & \\ \dots & & & \dots \\ & & \Gamma & \Omega \\ D & & & W \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2(1+1/\Delta x) \times 2/\Delta x} \quad (4.80)$$

$$W_{\leftarrow} = \begin{bmatrix} W_0^- \\ W^+ & W^- \\ & W^+ & W^- \\ \dots & & & \dots \\ & & & W^+ & W^- \\ & & & & W_1^- \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2(1+1/\Delta x) \times 2/\Delta x} \quad (4.81)$$

$$W_{\rightarrow} = \begin{bmatrix} W_0^+ \\ & W^\pm \\ & & W^\pm \\ \dots & & & \dots \\ & & & W^\pm \\ & & & & W_1^+ \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2(1+1/\Delta x) \times 2(1+1/\Delta x)} \quad (4.82)$$

$$U^0 = \begin{bmatrix} U_0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2(1+1/\Delta x)} \quad U^1 = \begin{bmatrix} U_1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2(1+1/\Delta x)} \quad (4.83)$$

Kwadratowe macierze Γ , Ω , W^+ , W^- , W^\pm są zdefiniowane wzorami (4.11), (4.12) dla metody Eulera i wzorami (4.13), (4.14) dla metody Cranka-Nicholsona. Podobnie macierze V , W , C , D , W_0^- , W_0^+ , W_1^- , W_1^+ , oraz wektory U^0 i U^1 są określone wzorami (4.69)–(4.73) lub (4.74)–(4.77).

Hipoteza 4.1. Jeżeli ciągle problem mieszany (4.1), (4.16), (4.59) jest zarówno wewnętrznie jak i brzegowo asymptotycznie stabilny, to system dyskretny (4.79) jest numerycznie stabilny.

Uzasadnienie. Ze stwierdzenia 4.1 wynika, że wystarczy udowodnić spełnienie nierówności

$$\|G_1^{1/2} \Phi_B G_2^{-1/2}\| < 1 \quad (4.84)$$

gdzie $G_1 \in \mathfrak{R}^{2(1+1/\Delta x) \times 2(1+1/\Delta x)}$ i $G_2 \in \mathfrak{R}^{2/\Delta x \times 2/\Delta x}$. Nierówność (4.84) jest spełniona gdy wartości własne macierzy

$$\Theta_B = G_2^{-1/2} \Phi_B^T G_1 \Phi_B G_2^{-1/2} \quad (4.85)$$

należą do odcinka $[0, 1)$. Aby to sprawdzić utworzymy wyznacznik

$$\Xi_J = \det(\theta_B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} d & e & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & f & h \\ e & k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & p & r & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & u & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r & u & 0 & 0 \\ f & l & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & v & w \\ h & m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & w & z \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2/\Delta x \times 2/\Delta x} \quad (4.86)$$

gdzie

$$\begin{aligned} d &= (1 + a_{11}\Delta t)^2(1 + b_{11}^2 + gb_{21}^2) + ga_{21}^2\Delta t^2 - \lambda \\ e &= a_{21}\Delta t(1 + a_{22}\Delta t)\sqrt{g} + a_{12}\Delta t(1 + a_{11}\Delta t) \left(b_{21}^2\sqrt{g} + \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{b_{11}^2}{\sqrt{g}} \right) \\ f &= a_{21}\Delta t(1 + a_{11}\Delta t)(b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22}g) \\ h &= (1 + a_{11}\Delta t)(1 + a_{22}\Delta t) \left(\frac{b_{11}b_{12}}{\sqrt{g}} + b_{21}b_{22}\sqrt{g} \right) \\ k &= (1 + a_{22}\Delta t)^2 + a_{12}^2\Delta t^2 \left(b_{21}^2 + \frac{1}{g} + \frac{b_{11}^2}{g} \right) - \lambda \\ l &= a_{12}a_{21}\Delta t^2 \left(b_{21}b_{22}\sqrt{g} + \frac{b_{11}b_{12}}{\sqrt{g}} \right) \\ m &= a_{12}\Delta t(1 + a_{22}\Delta t) \left(b_{21}b_{22} + \frac{b_{11}b_{12}}{g} \right) \\ p &= a_{21}^2\Delta t^2g + (1 + a_{11}\Delta t)^2 - \lambda \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned}
 r &= a_{12}\Delta t \frac{1 + a_{11}\Delta t}{\sqrt{g}} + a_{21}\Delta t(1 + a_{22}\Delta t)\sqrt{g} \\
 u &= a_{12}^2 \frac{\Delta t^2}{g} + (1 + a_{22}\Delta t)^2 - \lambda \\
 v &= (1 + a_{11}\Delta t)^2 + a_{21}^2 \Delta t^2 (b_{12}^2 + g + b_{22}^2 g) - \lambda \\
 w &= a_{21}\Delta t \frac{(1 + a_{11}\Delta t)}{\sqrt{g}} + a_{21}\Delta t(1 + a_{22}\Delta t) \left(\frac{b_{12}^2}{\sqrt{g}} + \sqrt{g} + b_{22}^2 \sqrt{g} \right) \\
 z &= (1 + a_{22}\Delta t)^2 \left(1 + b_{22}^2 + \frac{b_{12}^2}{g} \right) + \frac{a_{12}^2 \Delta t^2}{g} - \lambda
 \end{aligned}$$

Wyznacznik (4.86) jest iloczynem dwóch wielomianów

$$\Xi_J = \Xi_i \Xi_B \quad (4.88)$$

gdzie

$$\Xi_i = (pu - r^2)^{-4+2/\Delta x} \quad (4.89)$$

$$\Xi_B = \begin{bmatrix} d & e & f & h \\ e & k & l & m \\ f & l & v & w \\ h & m & w & z \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Stabilność w sensie Schura wielomianu (4.89) wynika, podobnie jak wielomianu (4.45), z założenia twierdzenia 4.1 ponieważ $pu - r^2 = ac - b^2$. Niestety, trudno jest udowodnić, że stabilność w sensie Schura wielomianu (4.90) wynika z założeń twierdzenia 3.5 i twierdzenia 3.6 dla dostatecznie małych wartości Δt . \square

Połączenie obu etapów obliczeń oznacza podstawienie do wzoru (4.79) wartości $w_{j+1/2}$ określonej przez (4.62). Ostatecznie zatem otrzymuje się dla metody charakterystyk zastosowanej do rozwiązywania problemu mieszanego (4.1), (4.16), (4.59) wzory iteracyjne

$$w_{j+1} = \Phi w_j + \Theta_1 u_j + \Theta_2 u_{j+1/2} + \Theta_3 u_{j+1} + U^0 u_{j+1}^p + U^1 u_{j+1}^k \quad (4.91)$$

gdzie

$$\Phi = \Phi_B \Phi_C = \begin{bmatrix} V\Gamma & V\Omega & & & C\Gamma & C\Omega \\ \Gamma\Gamma & \Gamma\Omega + \Omega\Gamma & \Omega\Omega & & & \\ & \Gamma\Gamma & \Gamma\Omega + \Omega\Gamma & \Omega\Omega & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \Gamma\Gamma & \Gamma\Omega + \Omega\Gamma & \Omega\Omega \\ D\Gamma & D\Omega & & & W\Gamma & W\Omega \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

gdzie

$$A = \vec{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \vec{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad S = \vec{S} = \begin{bmatrix} -s \\ s \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

oraz $s > 0$, jest asymptotycznie stabilny zarówno wewnątrz jak i brzegowo. Naszym celem będzie teraz zbadanie stabilności systemu (4.99), (4.100) gdy zamiast warunku początkowego (4.16) zadany jest warunek końcowy

$$w(x, T) = w_T(x) \quad \text{dla } x \in [0, 1] \quad (4.102)$$

Oznacza to, że równanie (4.99) z warunkiem brzegowym (4.100) ma być rozwiązane „wstecz”. Problem końcowo-brzegowy (4.99), (4.100), (4.101) można transformować do postaci kanonicznej. Po łatwych obliczeniach otrzymujemy nowe współczynniki macierzowe dla równania różniczkowego (4.99) i warunków brzegowych (4.100)

$$A = \overleftarrow{A} = \begin{bmatrix} -a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & -a_{11} \end{bmatrix} \quad B = \overleftarrow{B} = \frac{1}{\det \vec{B}} \begin{bmatrix} b_{11} & -b_{21} \\ -b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

$$S = \overleftarrow{S} = \overleftarrow{S} = \begin{bmatrix} -s \\ s \end{bmatrix}$$

Stwierdzenie 4.2. Jeżeli system (4.99), (4.100), (4.101) jest wewnątrz i brzegowo asymptotycznie stabilny, to wtedy odpowiadający mu problem końcowo-brzegowy (4.99), (4.100), (4.102) ze współczynnikami (4.103) jest wewnątrz i brzegowo niestabilny.

Dowód. Wewnętrzna stabilność problemu początkowo-brzegowego (4.99), (4.100), (4.101) oznacza $a_{11} < 0$ i $a_{22} < 0$. Dzięki temu elementy na przekątnej macierzy \overleftarrow{A} są dodatnie, co jest sprzeczne z założeniami lematu 3.5. W ten sposób dochodzimy do wniosku, że końcowo-brzegowy problem opisywany równaniami typu (4.99), (4.100), ale ze współczynnikami (4.103), jest wewnątrz niestabilny. Biorąc pod uwagę, że

$$\det \vec{B} = \frac{1}{\det \overleftarrow{B}} \quad \text{tr } \vec{B} = \frac{\text{tr } \overleftarrow{B}}{\det \overleftarrow{B}} \quad (4.104)$$

wniosujemy ze stabilności typu Schura macierzy \vec{B} , że końcowo-brzegowy problem (4.99), (4.100), (4.103) jest brzegowo też niestabilny. \square

Stwierdzenie 4.2 przedstawia zrozumiąłą zasadę: odwrócenie kierunku zmienności czasu, zamienia system stabilny w system niestabilny. Niestabilność ciągłego problemu końcowo-brzegowego prowadzi do numerycznej niestabilności odpowiadającego systemu dyskretnego. Eksperymenty komputerowe pokazują, że jest to silna niestabilność. W jej wyniku pojawiają się duże błędy, które prowadzą nawet do komputerowego przepełnienia a zatem nie jest możliwe numeryczne rozwiązanie „wstecz” równania różniczkowego (4.99) z warunkami brzegowymi (4.100).

Dla wewnętrznie stabilnego systemu, obie wartości własne $\lambda_i(\vec{A})$ (gdzie $i = 1, 2$) mają ujemne części rzeczywiste. Zmiana kierunku czasu zwiększa części rzeczywiste wartości własnych macierzy \overleftarrow{A}

$$\lambda_i(\overleftarrow{A}) = \lambda_i(\vec{A}) + |\text{tr } \vec{A}| \quad (4.105)$$

czyniąc je dodatnimi. Dla brzegowo stabilnego systemu wartości własne macierzy \vec{B} mają amplitudy mniejsze od 1. Własność ta nie jest zachowana dla odpowiadającego mu problemu końcowo-brzegowego z macierzą \vec{B} zdefiniowaną wzorem (4.103).

Zajmiemy się teraz nieco odmiennym problemem. Załóżmy, że zadany jest warunek brzegowy

$$w(0, t) = w_0(t) \quad \text{dla } 0 \leq t \leq T \quad (4.106)$$

Problem brzegowy (4.99), (4.106) jest podobny do problemu Cauchy'ego (4.99), (4.16). Główna różnica polega na zmianie ról zmiennej czasowej t i zmiennej przestrzennej x . Otrzymamy zatem nowe współczynniki dla formy kanonicznej równania (4.99)

$$A = A_{\uparrow} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad S = S_{\uparrow} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -\frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Macierz A_{\uparrow} ma dwie wartości własne

$$\lambda_1(A_{\uparrow}) = \frac{a_{22} - a_{11} - \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4 \det \vec{A}}}{2s} \quad (4.108)$$

$$\lambda_2(A_{\uparrow}) = \frac{a_{22} - a_{11} + \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4 \det \vec{A}}}{2s}$$

Przy założeniu, że system (4.99), (4.101) jest wewnętrznie stabilny (tzn. $\vec{A} > 0$) otrzymujemy

$$\lambda_1(A_{\uparrow}) < 0 \quad (4.109)$$

$$\lambda_2(A_{\uparrow}) > 0$$

Wnioski wyciągniemy później, a teraz przeanalizujemy następny problem brzegowy. Jeżeli na brzegu $x = 1$ mamy zadany warunek brzegowy

$$w(1, t) = w_1(t) \quad \text{dla } 0 \leq t \leq T \quad (4.110)$$

to otrzymamy nowe współczynniki dla równania różniczkowego cząstkowego (4.99)

$$A = A_{\downarrow} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -a_{22} & -a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad S = S_{\downarrow} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Macierz A_{\downarrow} posiada wartości własne

$$\lambda_1(A_{\downarrow}) = \frac{a_{11} - a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 \det \vec{A}}}{2s} = -\lambda_2(A_{\uparrow})$$

$$\lambda_2(A_{\downarrow}) = \frac{a_{11} - a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 \det \vec{A}}}{2s} = -\lambda_1(A_{\uparrow})$$
(4.112)

i przy założeniu, że system (4.99), (4.101) jest wewnętrznie stabilny, otrzymujemy

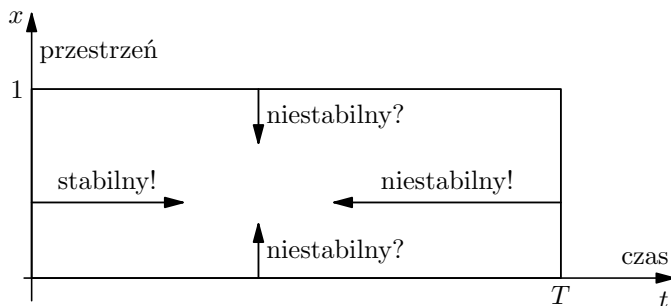
$$\lambda_1(A_{\downarrow}) < 0$$

$$\lambda_2(A_{\downarrow}) > 0$$
(4.113)

Łatwo można sprawdzić, że

$$\det A_{\uparrow} = \det A_{\downarrow} = -\frac{1}{s^2} \det \vec{A} < 0$$
(4.114)

Poza tym, macierze A_{\uparrow} i A_{\downarrow} mają po jednym elemencie dodatnim na przekątnych: $-a_{11}/s > 0$ dla przypadku (4.107) i $-a_{22}/s > 0$ dla przypadku (4.111). Jest to sprzeczne z założeniami lematu 3.5, zatem oba analizowane przypadki problemów brzegowych, tzn. równanie (4.99) z warunkami (4.106) lub (4.110), są wewnętrznie niestabilne. Wartości własne macierzy A_{\uparrow} i A_{\downarrow} są rzeczywiste i mają przeciwne znaki (patrz (4.112)). Ujemne wartości własne sugerują, że niestabilność nie jest tak silna jak w przypadku problemu końcowo-brzegowego (4.99), (4.101), (4.102). I rzeczywiście, eksperymenty komputerowe dają poprawne rezultaty przy numerycznym rozwiązywaniu obu problemów brzegowych (4.99), (4.106) i (4.99), (4.110). Eksperymenty te pokazują, że numeryczna stabilność jest warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym dla poprawnych obliczeń komputerowych. Otrzymane wnioski posłużyły do sporządzenia rysunku 4.4.



Rys. 4.4. Stabilność modelu matematycznego zależy od kierunku obliczeń

Modelowanie realnych procesów fizycznych pokazuje, że metoda charakterystyk może być wykorzystana do obliczeń w obu kierunkach względem zmiennej przestrzennej, ale tylko w jednym kierunku względem zmiennej czasowej.

Możliwość prowadzenia obliczeń w obu kierunkach względem zmiennej przestrzennej pozwala eksperymentalnie dobrać odpowiednią gęstość dyskretyzacji. Aby to zrobić należy najpierw założyć pewną dyskretyzację Δt i znaleźć numeryczne rozwiązanie równania (4.99) z warunkiem końcowym

$$w(0, t) = w_0(t) \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.115)$$

gdzie czas końcowy T jest dostatecznie duży ($T > 4s$). Celem obliczeń jest znalezienie numerycznej aproksymacji

$$w(1, t) \quad \text{dla} \quad 1/s \leq t \leq T - 1/s \quad (4.116)$$

W następnym etapie obliczeń należy przyjąć (4.116) jako warunki brzegowe do rozwiązania równania różniczkowego (4.99) wstecz względem zmiennej przestrzennej x . W ten sposób otrzymana się aproksymację

$$w(0, t) \quad \text{dla} \quad 2/s \leq t \leq T - 2/s \quad (4.117)$$

Porównując, za pomocą wybranej metryki, założone wartości (4.115) z wynikami (4.117) otrzymanymi w wyniku obliczeń w przód i następnie wstecz, otrzymuje się błąd numerycznych obliczeń. Obliczenia te można powtórzyć dla różnych Δt , aby otrzymać informację jak błąd i czas obliczeń zależy od gęstości dyskretyzacji Δt . Przykład zastosowania tej metody jest przedstawiony poniżej.

Przykład 4.1.

Metodę eksperymentalnego doboru gęstości dyskretyzacji prześledźmy na przykładzie modelu przepływu gazu w rurociągu. Na rysunku 4.5 przedstawiony jest prosty system dystrybucji gazu składający się z: kopalni gazu, stacji sprężania, rurociągu (o długości 200 kilometrów i średnicy 0,7 metra) i odbiorcy gazu. Długi gazociąg niech będzie opisywany równaniem hiperbolicznym. Załóżmy, że zarówno masowy przepływ gazu q jak i ciśnienie gazu p nie różnią się zbytnio od ich wartości średnich, dzięki czemu możemy posłużyć się liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/M \\ M & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

gdzie η jest opornością przepływu gazu a $M \approx 0,01$ jest liczbą Macha.

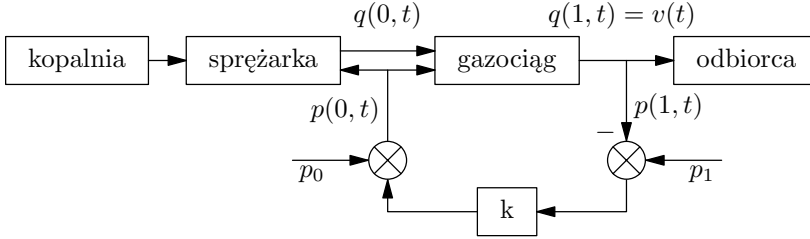
Warunki brzegowe są zadane przez równania

$$p(0, t) - p_0 = k(p_1 - p(1, t)) \quad (4.119)$$

$$q(1, t) = v(t) \quad (4.120)$$

gdzie p_0 jest nominalnym ciśnieniem gazu na wyjściu sprężarki a p_1 jest nominalnym ciśnieniem gazu dostarczanego do odbiorcy. Równanie (4.119) opisuje strategię sterowania. Zgodnie z nią ciśnienie gazu $p(1, t)$ dostarczanego do odbiorcy jest mierzone i porównywane z jego wartością nominalną p_1 . Różnica $p_1 - p(1, t)$ jest mnożona przez

współczynnik sprężenia zwrotnego k i przesyłana do stacji sprężania gazu. Układ sterowania sprężarką utrzymuje ciśnienie gazu na wyjściu sprężarki (tzn. $p(0, t)$) na poziomie wyznaczonym przez (4.119). Dzięki temu kompensuje się odchylenie ciśnienia gazu na końcu rurociągu. Zmienne w czasie zapotrzebowanie na gaz $v(t)$ jest dołączone do modelu matematycznego poprzez warunek brzegowy (4.120).



Rys. 4.5. Układ regulacji systemu dystrybucji gazu ziemnego. Gazociąg opisywany jest równaniem różniczkowym cząstkowym

Dzięki transformacji

$$\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{M} & 1/\sqrt{M} \\ -\sqrt{M} & \sqrt{M} \end{bmatrix} w \quad (4.121)$$

równanie (4.118) przyjmuje postać kanoniczną

$$\frac{\partial w}{\partial t} + S \frac{\partial w}{\partial x} = Aw \quad (4.122)$$

gdzie

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = -\frac{\eta}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Prędkości fali dźwiękowej $s^+ = 1$ i fali powrotnej $s^- = -1$ są unormowane. Warunki brzegowe (4.119), (4.120) przyjmują postać

$$\begin{bmatrix} w^-(1, t) \\ w^+(0, t) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} w^-(0, t) \\ w^+(1, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^k(t) \\ u^p(t) \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

gdzie

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2k \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} u^k(t) &= \sqrt{M}v(t) \\ u^p(t) &= k\sqrt{M}v(t) + \frac{p_0 - kp_1}{\sqrt{M}} \end{aligned} \quad (4.125)$$

Rozważany system jest wewnętrznie stabilny, ale nie asymptotycznie. Elementy na przekątnej macierzy A są ujemne, ale $\det A = 0$. Oznacza to, że energia gazu jest na

ogół rozpraszana w rurociągu, oprócz przypadku gdy nie ma przepływu gazu (czyli $q(x, t) = v(t) = 0$) a ciśnienie gazu jest stałe dla wszystkich $0 \leq x \leq 1$ i $t \geq 0$ i wynosi $p(x, t) = (p_0 + kp_1)/(1 + k)$. W takim przypadku energia systemu jest stała, czyli nie ma jej rozpraszania. Funkcja energetyczna, która umożliwia udowodnienie wewnętrznej stabilności ma postać

$$E(t) = \int_0^1 y^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y \, dt \quad (4.126)$$

Jeżeli $k = 0$ wtedy rozważany system jest brzegowo stabilny, ale nie asymptotycznie. W przeciwnym przypadku ($k \neq 0$), system (4.122), (4.124) jest brzegowo niestabilny. Sprężenie zwrotne wprowadzone przez układ sterowania, prowadzi do brzegowej destabilizacji.

Przedstawiona powyżej metoda charakterystyk umożliwia znalezienie aproksymacji rozwiązania równania (4.122) z niejednorodnymi warunkami brzegowymi (4.124). Równanie dyskretne przyjmuje postać

$$w_{j+1} = \Phi w_j + U^0 u_j^p + U^1 u_j^k \quad (4.127)$$

gdzie

$$\begin{aligned} U^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \\ U^1 &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.128)$$

Przeprowadzono obliczenia komputerowe dla następujących parametrów: $\eta = 20$, $M = 0,01$, $k = 0,5$, $p_0 = 1,1$, $p_1 = 0,9$ i czasu końcowego $T = 25$. Założone zostały następujące warunki początkowe

$$\begin{aligned} q(x, 0) &= 1 \\ p(x, 0) &= 1,1 - \eta M x \end{aligned} \quad (4.129)$$

dla $0 \leq x \leq 1$. Zapotrzebowanie na gaz aproksymowano funkcją

$$v(t) = 1 + 0,1 \sin(0,2t) - 0,01 \sin(t) \quad (4.130)$$

dla $0 \leq t \leq T$. Przy tych założeniach problem początkowo-brzegowy (4.118), (4.119), (4.120) został numerycznie rozwiązany. Dzięki temu dla brzegu $x = 0$ została znaleziona aproksymacja

$$\begin{aligned} q(0, t) \\ p(0, t) \end{aligned} \quad \text{dla } 0 \leq t \leq T \quad (4.131)$$

i zapisana w pamięci komputera. Następnie dane te zostały wykorzystane do znalezienia numerycznego rozwiązania dla brzegu

$$\begin{aligned} q(1, t) \\ p(1, t) \end{aligned} \quad \text{dla } 1 \leq t \leq T - 1 \quad (4.132)$$

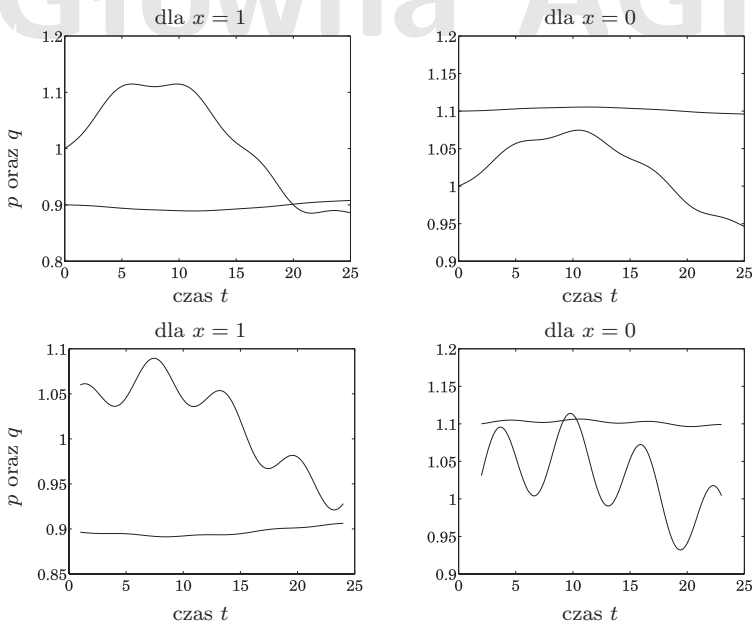
Kolejne obliczenia zostały przeprowadzone w przeciwnym kierunku zmiennej przestrzennej i otrzymana została aproksymacja

$$\begin{aligned} q^*(0, t) \\ p^*(0, t) \end{aligned} \quad \text{dla } 2 \leq t \leq T - 2 \quad (4.133)$$

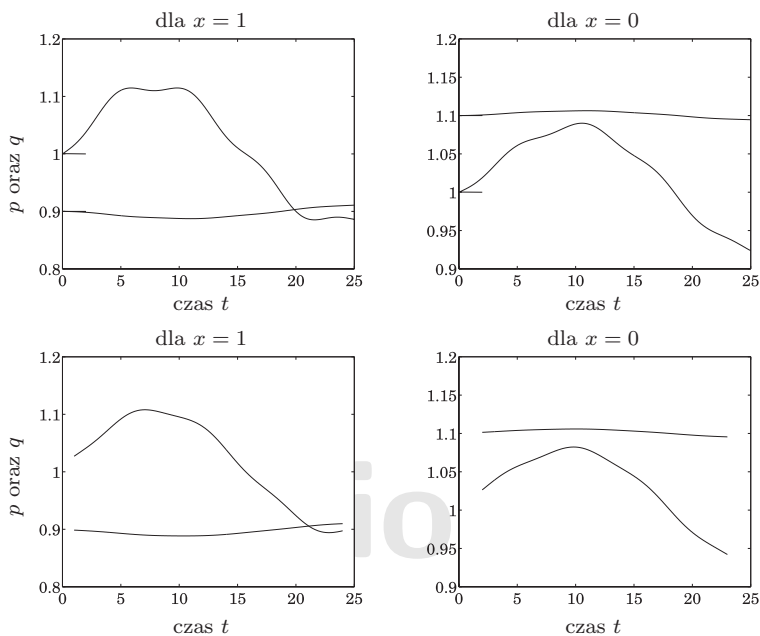
Porównując wyniki (4.131) z wynikami (4.133), otrzymanymi w wyniku dwukrotnego rozwiązywania równania cząstkowego (raz w przód a następnie wstecz), błędy obliczeń numerycznych zostały obliczone dla zmiennych q i p oddzielnie

$$\begin{aligned} \Delta q &= \left[\frac{1}{T-4} \int_2^{T-2} (q(0, t) - q^*(0, t))^2 dt \right]^{0.5} \\ \Delta p &= \left[\frac{1}{T-4} \int_2^{T-2} (p(0, t) - p^*(0, t))^2 dt \right]^{0.5} \end{aligned} \quad (4.134)$$

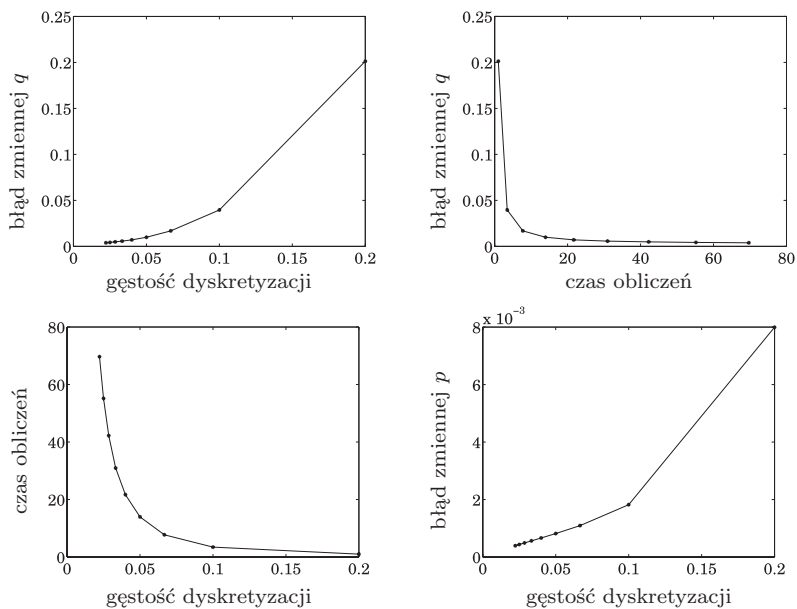
Przedstawione powyżej obliczenia powtarzano dla dziewięciu przypadków: $\Delta x = 1/5, 1/10, \dots, 1/45$, aby zbadać zależność błędu od gęstości dyskretyzacji. Wyniki komputerowych obliczeń przedstawione są na rysunkach 4.6, 4.7 i 4.8.



Rys. 4.6. Numeryczne rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego (górne rysunki) i problemu brzegowego (dolne rysunki). Zauważalne różnice między rozwiązaniami wynikają ze zbyt grubej gęstości dyskretyzacji ($\Delta x = 0,1$)



Rys. 4.7. Numeryczne rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego (górne rysunki) i problemu brzegowego (dolne rysunki). Drobnie różnice między rozwiązaniami wynikają z dostatecznie małej gęstości dyskretyzacji ($\Delta x = 1/30$)



Rys. 4.8. Zależności pomiędzy dokładnością, czasem obliczeń i gęstością dyskretyzacji Δx

W górnej części rysunku 4.6 przedstawione jest numeryczne rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego (4.118), (4.119), (4.120). Wzięte z niego warunki brzegowe (4.131) dla obliczeń „w przód” względem zmiennej przestrzennej przedstawia prawy górny wykres rysunku 4.6. Rozwiązanie (4.132), otrzymane dla $x = 1$, przedstawione jest na lewym dolnym wykresie. Wynik (4.133), rozwiązania równania „wstecz” względem zmiennej przestrzennej, przedstawiony jest na prawym dolnym wykresie rysunku 4.6. Komputerowe obliczenia przeprowadzono dla dyskretyzacji zmiennej przestrzennej $\Delta x = 1/10$. Porównanie wykresu górnego i dolnego z prawej strony rysunku 4.6 prowadzi do konkluzji, że zbyt gruba dyskretyzacja powoduje znaczne błędy. Rysunek 4.7 przedstawia wyniki dla trzykrotnie mniejszej dyskretyzacji ($\Delta x = 1/30$). W przypadku tym dokładność obliczeń jest satysfakcjonująca. Na rysunku 4.8 przedstawiono zależność błędu (4.134) od czasu obliczeń (prawy górny wykres), błędu od gęstości dyskretyzacji (lewy górny i prawy dolny wykres) i czasu obliczeń od gęstości dyskretyzacji (lewy dolny wykres). Z wykresów tych można wywnioskować, że czas obliczeń wzrasta gwałtownie przy zmniejszającej się gęstości dyskretyzacji. Z drugiej strony zależność błędu od gęstości dyskretyzacji jest niewielka dla drobnej dyskretyzacji. Obserwacje te prowadzą do wniosku, że $\Delta x = 1/30$ jest optymalną dyskretyzacją dla rozważanego przypadku. Dyskretyzacja ta jest reprezentowana przez trzecią gwiazdkę od lewej strony na prawym górnym wykresie rysunku 4.8 i jest kompromisem zapewniającym małe błędy przy dość krótkim czasie obliczeń.

Główna AGH

5

Metoda Galerkina

5.1. Aproksymacja równań różniczkowych metodą Galerkina

Galerkin zaproponował specyficzną metodę aproksymacji rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych. Rozwiązanie przybliżał za pomocą skończonego szeregu funkcyjnego, a cechą znaną jego metody był sposób wyznaczania współczynników szeregu aproksymującego. Sposób ten zastosowano później dla szerokiej klasy równań różniczkowych, zarówno zwyczajnych jak i cząstkowych. Okazuje się, że metodę Galerkina można łatwo stosować w przypadku równań liniowych, trochę trudniej dla niestacjonarnych. Czasami stosuje się ją również dla zagadnień nieliniowych, ale występujące trudności zniechęcają do takich poszukiwań. Metoda Galerkina ma obecnie wiele wariantów w zależności od sposobu zdefiniowania bazy, w której aproksymowane jest rozwiązanie równania różniczkowego jak i bazy pomocniczej składającej się z tak zwanych funkcji próbnych. Czasami niezależnie powstałe metody aproksymacji rozwiązań równań różniczkowych można przedstawić jako szczególne wersje metody Galerkina.

Na wstępie przedstawimy ogólne zasady aproksymacji rozwiązań równań różniczkowych za pomocą metody Galerkina. Niech zatem będzie dane równanie różniczkowe zapisane w postaci abstrakcyjnej

$$\frac{dw}{dt} = Dw + Wu \quad (5.1)$$

gdzie D jest operatorem z przestrzeni Y w ośrodkową przestrzeń Hilberta H , $D: Y \subset H \rightarrow H$. Rozwiązanie równania (5.1) jest m -wymiarową funkcją wektorową $w: \Psi \rightarrow \mathfrak{R}^m$. Równanie (5.1) jest niejednorodne dzięki funkcji $u \in U_{ad}$, która niech będzie m_d -wymiarowym wektorem $u: \Psi \rightarrow \mathfrak{R}^{m_d}$. Macierz $W \in \mathfrak{R}^{m \times m_d}$ dopasowuje ilość funkcji wymuszających do ilości równań.

Aby uwzględnić różne odmiany metody Galerkina, wygodnie jest zbiór Ψ przedstawić w postaci iloczynu kartezjańskiego $\Psi = \Psi_1 \times \Psi_2$. Zgodnie z metodą Galerkina, aproksymacja rozwiązania równania różniczkowego (5.1) poszukiwana jest w postaci

$$w_n = \sum_{j=1}^n z_j \varphi_j \quad (5.2)$$

gdzie $\varphi_j: \Psi_1 \rightarrow \mathfrak{R}$ są założonymi funkcjami bazowymi natomiast $z_j: \Psi_2 \rightarrow \mathfrak{R}^m$ są nieznanymi współczynnikami rozwinięcia (5.2). Współczynniki te oblicza się z warunku

Galerkina: residuum

$$r = \frac{dw_n}{dt} - Dw_n - Wu \quad (5.3)$$

powstałe z równania (5.1) dla przybliżonego rozwiązania w_n jest ortogonalne do podprzestrzeni rozpiętej na założonych funkcjach $\{\varphi_j^*\}_{j=1}^n$, czyli

$$\left\langle \frac{dw_n}{dt} - Dw_n - Wu, \varphi_j^* \right\rangle = 0 \quad (5.4)$$

dla $j = 1, 2, \dots, n$. Funkcje $\{\varphi_j^*\}_{j=1}^n$ nazywa się funkcjami próbnymi albo niekiedy funkcjami wagowymi. Rozpatrywana metoda aproksymacji nazywana jest czasami [46] metodą ważonych residuów. Funkcje przyjmuje się arbitralnie a przestrzeń, do której należą, determinuje postać iloczynu (5.4). Jeżeli (5.1) jest wektorowym równaniem różniczkowym cząstkowym, wtedy w zależności od ilości argumentów funkcji φ_j^* , równanie (5.4) jest układem n równań algebraicznych lub n równań różniczkowych zwyczajnych dla n nieznanymi elementami $\{z_j\}_{j=1}^n$. Wynika stąd, że funkcji próbnych musi być tyle samo, ile jest funkcji bazowych. Jeżeli (5.4) jest układem równań różniczkowych zwyczajnych, wtedy warunki początkowe dla (5.4) są obliczane z warunków początkowych dla równania różniczkowego cząstkowego (5.1). Dla problemu aproksymującego na ogół łatwo jest znaleźć sposób uwzględnienia zarówno warunków początkowych jak i jednorodnych warunków brzegowych. Na przykład zerowe warunki brzegowe są automatycznie spełnione przez funkcje bazowe $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ zerujące się na brzegach. Sytuacja jest nieco trudniejsza, gdy warunki brzegowe są niejednorodne. Dla takiego przypadku, należy je „wszczepić” do układu równań (5.4).

W praktyce obliczeniowej duże znaczenie ma dobór zarówno funkcji bazowych jak i funkcji próbnych. Wpływa to w sposób istotny na stopień komplikacji algorytmu, jego efektywność, pracochłonność przygotowania programu komputerowego jak i na czas komputerowych obliczeń. Typ funkcji bazowych $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ jak i funkcji próbnych $\{\varphi_j^*\}_{j=1}^n$ często determinuje nazwę metody obliczeniowej, na przykład dla metody elementów skończonych funkcje te mają „małe” nośniki. Bardzo często

$$\varphi_j = \varphi_j^* \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

czyli funkcje bazowe są takie same jak funkcje próbne. Upraszcza to obliczenia, bo można korzystać z analitycznie wyliczonych iloczynów skalarnych $\langle \varphi_j, \varphi_j^* \rangle$, co jest szczególnie łatwe gdy funkcje bazowe są ortogonalne.

5.2. (

Aproksymacja problemu mieszanego semidyskretną metodą Galerkina) Aproksymacja problemu mieszanego semidyskretną metodą Galerkina

Poszukujemy przybliżonego rozwiązania równania różniczkowego

$$\frac{\partial w}{\partial t} + S \frac{\partial w}{\partial x} = Aw + Wu \quad (5.6)$$

z warunkami początkowymi

$$w(x, 0) = w_0(x) \in \mathfrak{R}^m \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \quad (5.7)$$

i warunkami brzegowymi

$$\begin{bmatrix} w^-(1, t) \\ w^+(0, t) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} w^-(0, t) \\ w^+(1, t) \end{bmatrix} + W_b u_b(t) \quad (5.8)$$

dla $0 \leq t \leq T$. Niech przybliżone rozwiązanie ma postać skończonego szeregu

$$w_n(x, t) = \sum_{j=1}^n z_j(t) \varphi_j(x) = Z(t) \varphi(x) \in \mathfrak{R}^m \quad (5.9)$$

gdzie

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_n(t) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times n} \quad (5.10)$$

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^n \quad (5.11)$$

Wynika stąd, że $\Psi_1 = [0, 1]$, $\Psi_2 = [0, T]$, $z_j \in L^2(\Psi_2, \mathfrak{R}^m)$, $\varphi_j \in \Phi_n \subset L^2(\Psi_1, \mathfrak{R})$. Wektor φ składa się z danych funkcji bazowych φ_j . Prostokątna macierz $Z(t)$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\left\langle \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial t} + S \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial x} - A w_n(x, t) - W u(x, t), \varphi_j^*(x) \right\rangle_{L^2(\Psi_1, [C^1(\Psi_2)]^m)} = 0 \quad (5.12)$$

dla $j = 1, 2, \dots, n$

gdzie $\{\varphi_j^*\}_{j=1}^n$ są danymi funkcjami próbnymi. Równania (5.12) są, zgodnie z istotą metody Galerki, warunkami ortogonalności funkcji próbnych i residuum otrzymanego po podstawieniu przybliżonego rozwiązania (5.9) do równania hiperbolicznego (5.6). Po scałkowaniu przez części, otrzymujemy (5.12) w postaci

$$\begin{aligned} & \frac{dZ(t)}{dt} \int_0^1 \varphi(x) \varphi_j^*(x) dx + S(w_n(1, t) \varphi_j^*(1) - w_n(0, t) \varphi_j^*(0)) - \\ & - SZ(t) \int_0^1 \varphi(x) \frac{d\varphi_j^*(x)}{dx} dx = AZ \int_0^1 \varphi(x) \varphi_j^*(x) dx + W \int_0^1 u(x, t) \varphi_j^*(x) dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

dla $j = 1, 2, \dots, n$. Zakładając, że rozwiązania przybliżone $w_n(x, t)$ spełniają warunki brzegowe (5.8), rugujemy z równania (5.13) $w_n^+(0, t)$ i $w_n^-(1, t)$ otrzymując dla $j = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
 \frac{dZ(t)}{dt}e_j + S \begin{bmatrix} b_{11}w_n^-(0, t) + b_{12}w_n^+(1, t) + W_b^- u_b(t) \\ w_n^+(1, t) \end{bmatrix} \varphi_j^*(1) - \\
 S \begin{bmatrix} w_n^-(0, t) \\ b_{21}w_n^-(0, t) + b_{22}w_n^+(1, t) + W_b^+ u_b(t) \end{bmatrix} \varphi_j^*(0) - SZ(t)f_j = \\
 = AZ(t)e_j + W \int_0^1 u(x, t)\varphi_j^*(x)dx
 \end{aligned} \quad (5.14)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 e_j &= \int_0^1 \varphi(x)\varphi_j^*(x)dx \\
 f_j &= \int_0^1 \varphi(x)\frac{d\varphi_j^*(x)}{dx}dx
 \end{aligned} \quad (5.15)$$

są wektorami o n składowych. Z wektorów e_j oraz f_j można utworzyć kwadratowe macierze

$$\begin{aligned}
 E &= [e_1, e_2, \dots, e_n] \in \mathfrak{R}^{n \times n} \\
 F &= [f_1, f_2, \dots, f_n] \in \mathfrak{R}^{n \times n}
 \end{aligned} \quad (5.16)$$

których kolumny (5.15) są iloczynami skalarnymi funkcji bazowych i funkcji próbnych oraz iloczynami skalarnymi funkcji bazowych i pierwszych pochodnych z funkcji próbnych. Istotnym ułatwieniem jest możliwość analitycznego wyliczenia (np. w oparciu o wzory rekurencyjne) wartości iloczynów skalarnych (5.15). Iloczyny te nazywa się współczynnikami połączeń (ang. connection coefficients).

Wprowadzimy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \int_0^1 u(x, t)\varphi^{*T}(x)dx \in \mathfrak{R}^{k \times n} \\
 U_1(t) &= W_b^- u_b(t)\varphi^{*T}(1) \in \mathfrak{R}^{p \times n} \\
 U_0(t) &= W_b^+ u_b(t)\varphi^{*T}(0) \in \mathfrak{R}^{(m-p) \times n}
 \end{aligned} \quad (5.17)$$

dla reprezentacji rozłożonych wymuszeń i wymuszeń brzegowych za pomocą funkcji próbnych $\varphi^*(x)$.

Układ równań (5.14) można zapisać w postaci macierzowego równania różniczkowego zwyczajnego

$$\frac{dZ(t)}{dt} = A Z(t) + S \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -b_{11}Z^-(t)\xi_{01} - b_{12}Z^+(t)\xi_{11} + Z^-(t)\xi_{00} \\ -b_{21}Z^-(t)\xi_{00} + b_{22}Z^+(t)\xi_{10} - Z^+(t)\xi_{11} \end{array} \right] + \\ \left[\begin{array}{l} -U_1(t) \\ U_0(t) \end{array} \right] + Z(t)F \end{array} \right\} E^{-1} + WU(t)E^{-1} \quad (5.18)$$

gdzie $\xi_{ij} = \varphi(i)\varphi^{*T}(j) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, przy czym obie zmienne i oraz j mogą przyjmować wartości 0 lub 1. Macierz Z została podzielona na dwie macierze blokowe

$$Z(t) = \begin{bmatrix} Z^-(t) \\ Z^+(t) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} Z^-(t) \in \mathfrak{R}^{p \times n} \\ Z^+(t) \in \mathfrak{R}^{(m-p) \times n} \end{array} \quad (5.19)$$

Warunek początkowy dla macierzowego równania różniczkowego zwyczajnego (5.18) wyznacza się ze wzoru

$$Z(0) = \int_0^1 w_0(x)\varphi^{*T}(x)dx E^{-1} \quad (5.20)$$

Równanie różniczkowe zwyczajne (5.18) z warunkami początkowymi (5.20) jest aproksymacją Galerkina dla początkowo-brzegowego problemu (5.6), (5.7), (5.8).

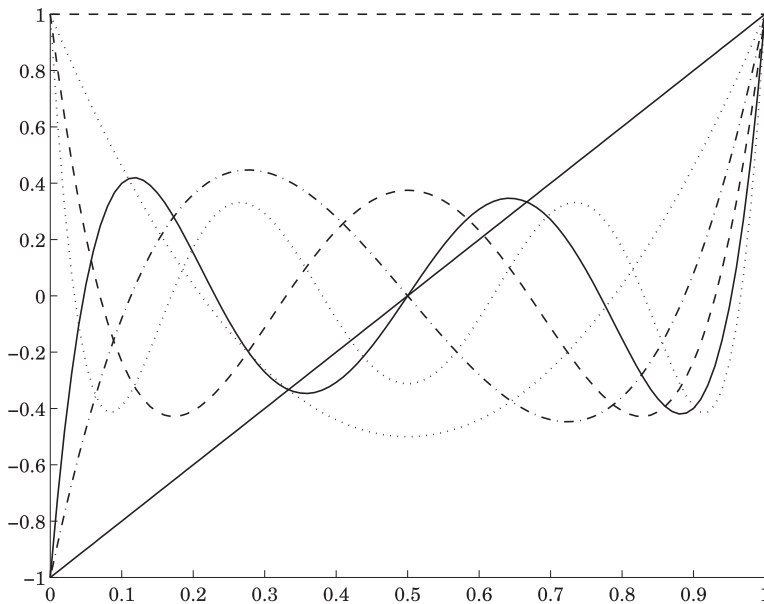
5.3. Wielomiany ortogonalne

Wielomiany ortogonalne mogą być wykorzystane w metodzie Galerkina, zarówno jako funkcje bazowe jak i funkcje próbne. Ich własności przedstawione są w pracy Szegö [57]. Wielomiany ortogonalne na odcinku $[0, 1]$ można generować za pomocą wzoru

$$\varphi_{j+1}(x) = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dx^i} (x^2 - x)^i \quad (5.21)$$

lub za pomocą formuły rekurencyjnej

$$(j-1)\varphi_j(x) = (2j-3)(2x-1)\varphi_{j-1}(x) - (j-2)\varphi_{j-2}(x) \quad (5.22)$$



Rys. 5.1. Wielomiany ortogonalne na odcinku $[0, 1]$

Pierwszych siedem wielomianów ortogonalnych na odcinku $[0, 1]$ przedstawionych jest na rysunku 5.1. Wielomiany te opisywane są wzorami

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) &= 1 \\
 \varphi_2(x) &= 2x - 1 \\
 \varphi_3(x) &= 6x^2 - 6x + 1 \\
 \varphi_4(x) &= 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 \\
 \varphi_5(x) &= 70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1 \\
 \varphi_6(x) &= 252x^5 - 630x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1 \\
 \varphi_7(x) &= 924x^6 - 2772x^5 + 3150x^4 - 1680x^3 + 420x^2 - 42x + 1
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Dla wielomianów (5.21) można łatwo wyznaczyć współczynniki równania (5.18) tzn. zarówno elementy macierzy E jak i macierzy F . Dzięki ortogonalności wielomianów otrzymujemy

$$e_{i,j} = \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ \frac{1}{2i-1} & \text{gdy } i = j \end{cases} \tag{5.24}$$

czyli macierz E jest diagonalna i dlatego łatwo można obliczyć macierz odwrotną

$$E^{-1} = \text{diag}[1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots] \tag{5.25}$$

Równie łatwo można obliczyć elementy drugiej macierzy

$$f_{i,j} = \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx = \begin{cases} 2 & \text{dla } j = i+1, i+3, i+5, \dots \\ 0 & \text{dla pozostałych } j \end{cases} \quad (5.26)$$

Ze wzoru (5.26) wynika, że macierz F ma postać

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & \dots \\ & & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ & & & 0 & 2 & 0 & 2 & \dots \\ & & & & 0 & 2 & 0 & \dots \\ & & & & & 0 & 2 & \dots \\ & & & & & & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Przedstawione tutaj wielomiany są w zasadzie wielomianami Legendre'a. Istotna różnica polega tylko na tym, że wielomiany Legendre'a w klasycznej postaci są ortogonalne na odcinku $[-1, 1]$.

5.4. Funkcje gięte

Funkcje gięte pierwszego stopnia generowane są za pomocą wzoru

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdym } |j-1-x(n-1)| \geq 1 \\ 1-|j-1-x(n-1)| & \text{gdym } |j-1-x(n-1)| < 1, \end{cases} \quad (5.28)$$

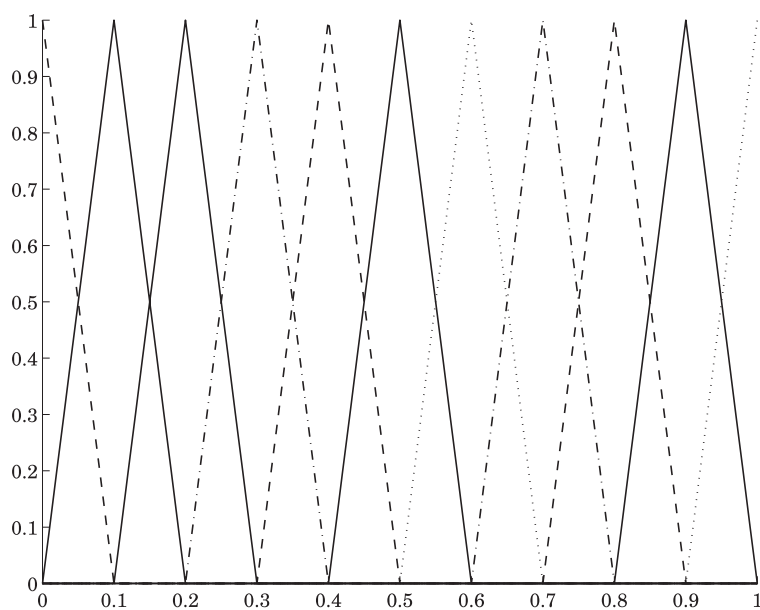
gdzie $n \geq 3$ jest założoną ilością funkcji giętych dla odcinka $[0, 1]$. Funkcje te przedstawione są na rysunku 5.2.

Dla funkcji generowanych wzorem (5.28) można łatwo obliczyć wartości macierzy E i F

$$e_{i,j} = \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 2/3h & \text{gdym } 1 \neq i = j \neq n \\ 1/3h & \text{gdym } i = j = 1 \text{ lub } i = j = n \\ 1/6h & \text{gdym } i = j+1 \text{ lub } i = j-1 \\ 0 & \text{dla } i, j \text{ pozostałych} \end{cases} \quad (5.29)$$

$$f_{i,j} = \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx = \begin{cases} -1/2 & \text{gdym } i = j = 1 \text{ lub } i = j+1 \\ 0 & \text{dla } i, j \text{ pozostałych} \\ 1/2 & \text{gdym } i = j = n \text{ lub } i = j-1 \end{cases} \quad (5.30)$$

gdzie $h = 1/(n-1)$ jest długością nośników funkcji giętych o numerach $j = 2, \dots, n-1$.



Rys. 5.2. Przykład $n = 11$ funkcji giętych pierwszego stopnia

Ze wzorów (5.29) i (5.30) wynika

$$E = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & 2 & & & \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & & & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & & -1 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & -1 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & 1 & & & \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Macierz E jest trójprzekątniowa, ale macierz do niej odwrotna jest macierzą pełną. Obliczenie elementów $e_{i,j}^{-1}$ macierzy E^{-1} nie sprawia jednak kłopotu. Można posłużyć się prostym wzorem [27]

$$e_{i,j}^{-1} = \frac{\mu_i \nu_j}{2\nu_1 + \nu_2} \quad (5.33)$$

gdzie

$$\mu_i = \frac{(\sqrt{3}-2)^{i-1} + (-2-\sqrt{3})^{i-1}}{2} \quad (5.34)$$

$$\nu_j = \frac{(\sqrt{3}-2)^{n-j} + (-2-\sqrt{3})^{n-j}}{2} \quad (5.35)$$

albo zamiast odwracania macierzy posłużyć się metodami rozwiązywania układów równań z trójprzekątnymi macierzami. Przykładowo dla jedenastu funkcji giętych, przedstawionych na rysunku 5.2, otrzymujemy

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 34,6410 & -9,2820 & 2,4871 & -0,6664 & 0,1786 & -0,0478 & 0,0128 & -0,0034 & 0,0009 & -0,0003 & 0,0001 \\ -9,2820 & 18,5641 & -4,9742 & 1,3328 & -0,3571 & 0,0957 & -0,0256 & 0,0069 & -0,0019 & 0,0005 & -0,0003 \\ 2,4871 & -4,9742 & 17,4098 & -4,6649 & 1,2500 & -0,3349 & 0,0897 & -0,0241 & 0,0065 & -0,0019 & 0,0009 \\ -0,6664 & 1,3328 & -4,6649 & 17,3269 & -4,6427 & 1,2440 & -0,333 & 0,8935 & -0,0241 & 0,0069 & -0,0034 \\ 0,1786 & -0,3571 & 1,2500 & -4,6427 & 17,3210 & -4,6411 & 1,2436 & -0,3333 & 0,0897 & -0,0256 & 0,0128 \\ -0,0478 & 0,0957 & -0,3349 & 1,2440 & -4,6411 & 17,3206 & -4,6411 & 1,2440 & -0,3349 & 0,0957 & -0,0478 \\ 0,0128 & -0,0256 & 0,0897 & -0,3333 & 1,2436 & -4,6411 & 17,3210 & -4,6427 & 1,2500 & -0,3571 & 0,1786 \\ -0,0034 & 0,0069 & -0,0241 & 0,0893 & -0,3333 & 1,2440 & -4,6427 & 17,3269 & -4,6649 & 1,3328 & -0,6664 \\ 0,0009 & -0,0019 & 0,0065 & -0,0241 & 0,0897 & -0,3349 & 1,2500 & -4,6649 & 17,4098 & -4,9742 & 2,4871 \\ -0,0003 & 0,0005 & -0,0019 & 0,0069 & -0,0256 & 0,0957 & -0,3571 & 1,3328 & -4,9742 & 18,5641 & -9,2820 \\ -0,0003 & -0,0003 & 0,0009 & -0,0034 & 0,0128 & -0,0478 & 0,1786 & -0,6664 & 2,4871 & -9,2820 & 34,6410 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Elementy na przekątnej macierzy E^{-1} są dominujące, oddalając się od głównej przekątnej moduły wartości elementów szybko maleją. Macierz E^{-1} jest symetryczna zarówno względem głównej przekątnej jak i względem przeciwprzekątnej, czyli

$$e_{i,j}^{-1} = e_{j,i}^{-1} = e_{n+1-i,n+1-j}^{-1} = e_{n+1-j,n+1-i}^{-1} \quad (5.37)$$

Posługując się wzorem (5.33) można zatem wyliczać wartości elementów $e_{i,j}^{-1}$ tylko dla

$$1 \leq i \leq \text{Int}\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (5.38)$$

$$i \leq j \leq n+1-i$$

gdzie $\text{Int}(x)$ oznacza część całkowitą liczby x . Pozostałe elementy macierzy E^{-1} wynikają z zależności (5.37).

Zwarte nośniki funkcji sklepanych (5.28) upraszczają równania (5.18) do postaci

$$\frac{dZ(t)}{dt} = A Z(t) + S \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} z_1^-(t) & 0_{p \times (n-2)} \\ b_{21} z_1^-(t) + b_{22} z_n^+(t) & 0_{(m-p) \times (n-2)} \end{array} \right] + \\ \left[\begin{array}{cc} 0_{p \times (n-1)} & -W_b^- u_b(t) \\ W_b^+ u_b(t) & 0_{(m-p) \times (n-1)} \end{array} \right] + Z(t)F \end{array} \right\} E^{-1} + \quad (5.39)$$

$$+ WU(t)E^{-1}$$

gdzie $0_{p \times (n-2)}$ jest tablicą złożoną z samych zer. Również warunki początkowe

$$Z(0) = (z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)) \quad (5.40)$$

dla macierzowego układu równań różniczkowych zwyczajnych (5.39) można obliczać znacznie prościej posługując się wzorem

$$z_j(0) = w_0 \left(\frac{j-1}{n-1} \right) \in \mathbb{R}^m \quad (5.41)$$

czyli bezpośrednio z warunków początkowych (5.7) zadanych dla równań różniczkowych cząstkowych (5.6).

Funkcje gięte posiadają nośniki „małe” w stosunku do zbioru, na którym obliczane jest rozwiązanie równania różniczkowego. Oczywiście obszar ten jest równy sumie nośników wszystkich funkcji giętych wykorzystanych do aproksymacji rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego. Ze względu na „małe” nośniki funkcji bazowych, przedstawiona metoda Galerkinia nazywana jest metodą elementów skończonych. Jest ona dość często stosowana, a popularność wynika między innymi z efektywności aproksymacji rozwiązań równań różniczkowych za pomocą wielomianów sklepanych. W porównaniu z klasycznymi funkcjami bazowymi, jak na przykład wielomianami ortogonalnymi, wzory obliczeniowe są tutaj mniej skomplikowane. Upraszcza to algorytm i zmniejsza czas obliczeń komputerowych. Często jednak, aby uzyskać tę samą dokładność aproksymacji, ilość funkcji sklepanych musi być większa niż w przypadku stosowania innych funkcji bazowych (na przykład wielomianów). Wzrasta zatem ilość równań różniczkowych zwyczajnych (5.39) aproksymujących równanie różniczkowe cząstkowe (5.6).

5.5. Falki

W klasycznej analizie częstotliwościowej opartej na pracach Fouriera funkcje

$$\varphi_{1,n}(x) = \sin(2\pi nx) \quad \varphi_{2,n}(x) = \cos(2\pi nx) \quad (5.42)$$

tworzą bazę, dzięki której funkcje w $L^2(0, 1)$ można przedstawić w postaci szeregu

$$w(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nx) \quad (5.43)$$

Na uwagę zasługuje fakt, że Fourier posłużył się tylko jedną funkcją $\sin(x)$ i dzięki dwóm operacjom: przesunięciu oraz przeskalowaniu, utworzył bazę generującą przestrzeń $L^2(0, 1)$. Funkcje (5.42) nazwane są w języku potocznym „falami sinusoidalnymi”. Nośniki funkcji (5.42) są „duże”, bo wypełniają całą dziedzinę $[0, 1]$.

Lokalne własności są dobrze reprezentowane przez funkcje, które szybko zanikają do zera, a najlepiej jeśli mają „małe” nośniki. Falki są funkcjami, które dzięki tym samym dwóm operacjom — przesunięciu i przeskalowaniu — umożliwiają generowanie bazy przestrzeni $L^2(0, 1)$. Nazwano je falkami (ang. wavelets, fran. ondelettes) ponieważ są znakozmienne, czyli falują i w sposób istotny różnią się od zera tylko na małym odcinku. Na szczególną uwagę zasługują falki posiadające zwarte nośniki. Sposób ich konstrukcji przedstawiła w roku 1989 Ingrid Daubechies [14].

5.5.1. Falki jednowymiarowe

Rodzina falek tworzona jest w oparciu o falkę podstawową ψ . Zmiana „częstotliwości” realizowana jest przez parametr skalujący $a > 0$, natomiast przesunięcie przez parametr b . Najczęściej rodzinę falek generuje się za pomocą wzoru zaproponowanego przez Grossmanna i Morleta

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (5.44)$$

gdzie mnożenie przez stałą $a^{1/2}$ normalizuje falki.

Strömberg zaproponował bazę opartą na systemie dwójkowym, to znaczy $a = 2^{-m}$ oraz $b = n2^{-m}$, gdzie m oraz n są odpowiednio dobranymi liczbami całkowitymi. Dyskretną zmienną m nazywa się rozdzielczością a zmienną n dyskretnym przesunięciem. Falki mają wtedy postać

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{m/2} \psi(2^m x - n) \quad (5.45)$$

W ten sposób z jednej falki $\psi(x)$ otrzymuje się rodzinę falek $\psi_{m,n}(x)$ posługując się binarnym wydłużeniem 2^m (ang. binary dilation) i diadycznym przesunięciem $2^{-m}n$ (ang. dyadic translation). Elementy tej rodziny są podwójnie indeksowane.

Dla przedstawionej powyżej metody Galerki istnieje potrzeba generowania przez falki (5.45) przestrzeni

$$W_m = \text{span}\{\psi_{m,n} : n \in \mathfrak{S}\} \subset L^2(0, 1) \quad (5.46)$$

gdzie zbiór falek jest ograniczony do tych, których nośniki mają część wspólną z otwartym odcinkiem $(0, 1)$. Wynika stąd definicja zbioru dyskretnych przesunięć $\mathfrak{S} = \{n \in \mathbb{Z} : \text{supp } \psi_{m,n} \cap (0, 1) \neq \emptyset\}$.

5.5.2. Funkcje Haara

Najprostszym przykładem falki, z której można zbudować ortonormalny zbiór (5.45) jest funkcja Haara

$$\psi_H(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x < 0,5 \\ -1 & \text{dla } 0,5 < x \leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases} \quad (5.47)$$

Zaproponowane przez Haara w 1910 roku funkcje tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni $L^2(0,1)$. Wygodnie jest posługiwać się dwoma indeksami porządkującymi te funkcje. Niech pierwszy indeks $r = 1, 2, \dots$ oznacza numer grupy funkcji Haara, a drugi indeks m niech będzie numerem kolejnym funkcji w ramach danej grupy. Numery kolejne funkcji r -tej grupy spełniają nierówności

$$1 \leq m \leq 2^{r-1} \quad (5.48)$$

Dodatkowym elementem bazy jest funkcja stała

$$h_0(x) = 1 \quad \text{dla } x \in [0, 1] \quad (5.49)$$

Dla funkcji tej nie wprowadzamy podwójnego indeksowania. Dla pozostałych funkcji Haara również możliwe jest numerowanie za pomocą jednego indeksu zgodnie z regułą

$$n = 2^{r-1} + m - 1 \quad (5.50)$$

Tabela 5.1

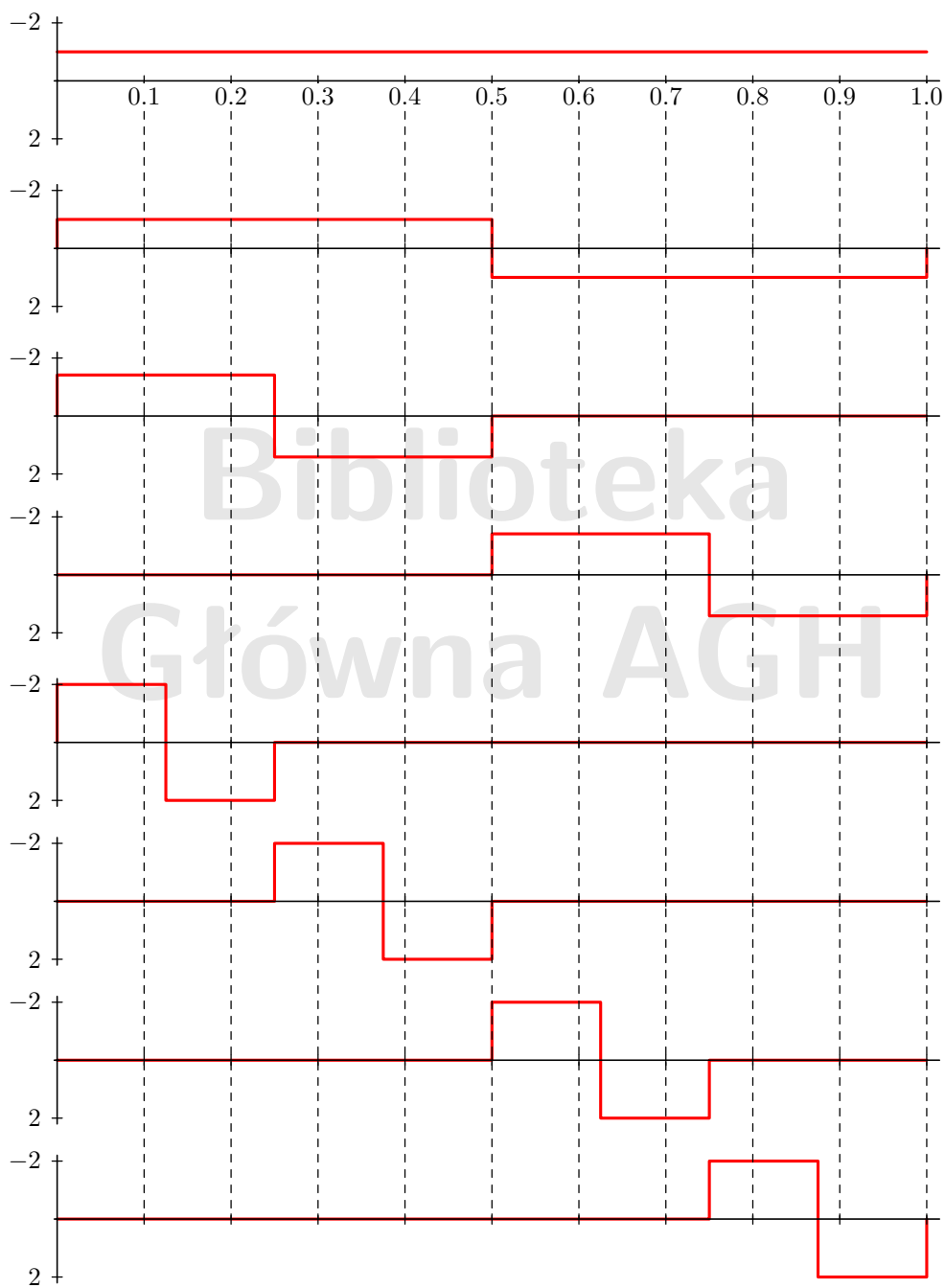
Zależności między indeksami porządkującymi funkcje Haara

r	m	n
1	1	1
2	1, 2	2, 3
3	1, 2, 3, 4	4, 5, 6, 7
4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

Zależności między indeksami przedstawione są w tabeli 5.1. Przy tych oznaczeniach funkcje Haara są zdefiniowane następującym wzorem

$$h_n(x) = h_{r,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^{r-1}} & \text{dla } \frac{m-1}{2^{r-1}} < x < \frac{2m-1}{2^r} \\ -\sqrt{2^{r-1}} & \text{dla } \frac{2m-1}{2^r} < x < \frac{m}{2^{r-1}} \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in [0, 1] \end{cases} \quad (5.51)$$

a ich przykłady przedstawione są na rysunku 5.3.



Rys. 5.3. Osiem pierwszych funkcji Haara

5.5.3. Jednowymiarowe funkcje skalujące

Aby zdefiniować podstawowe pojęcia związane z aproksymacją funkcji za pomocą falek, trzeba wprowadzić funkcje skalujące. Są one ściśle związane ze zdefiniowanymi powyżej falkami. Każda falka podstawowa $\psi(x)$ posiada określoną funkcję skalującą $\varphi(x)$. Niech zbiór V_m zawiera aproksymacje funkcjami skalującymi o rozdzielczości m , czyli niech jego bazą będą

$$\varphi_{m,n}(x) = 2^{m/2} \varphi(2^m x - n) \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad (5.52)$$

przy czym $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : \text{supp } \varphi_{m,n} \cap (0, 1) \neq \emptyset\}$ i jest zależne od m .

Funkcje skalujące tworzone są podobnie jak falki z jednej funkcji, ale ich wartości średnie są różne od zera. Funkcje skalujące $\{\varphi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ generują zbiory

$$V_m = \text{span}\{\varphi_{m,n} : n \in \mathbb{N}\} \quad (5.53)$$

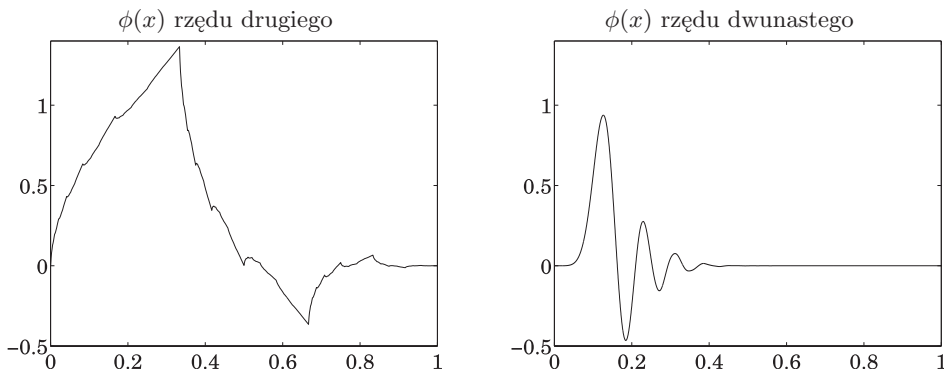
które posiadają własności postulowane przez Mallata i Mayera:

- 1) $\cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \cdots$
- 2) $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} = L^2(0, 1)$
- 3) $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$
- 4) $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$ dla $m \in \mathbb{Z}$

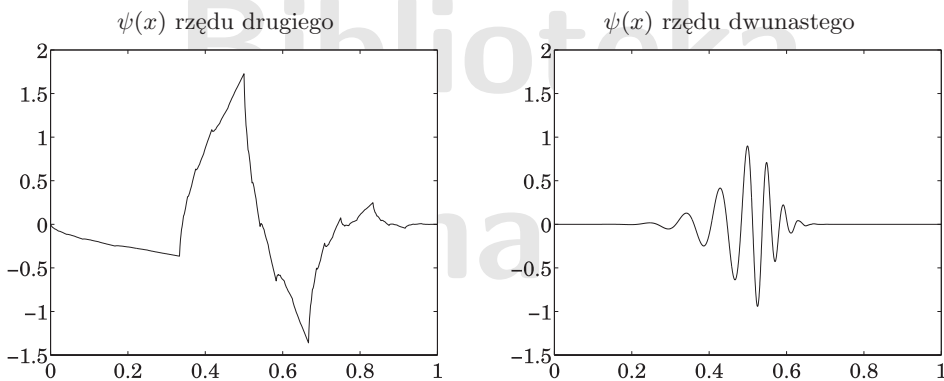
Funkcje φ i ψ tworzą pary w oparciu o które buduje się rodzinę funkcji skalujących $\{\varphi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ i rodzinę falek $\{\psi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{S}}$. Zbiory V_m są generowane przez funkcje skalujące $\{\varphi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Z pierwszego warunku (5.54) wynika, że im wskaźnik m ma wyższą wartość, tym zbiór V_m jest obszerniejszy, czyli aproksymacja może być dokładniejsza. Warunek drugi zapewnia dowolnie dokładną aproksymację w przestrzeni $L^2(0, 1)$. Warunek trzeci oznacza, że jedynym elementem wspólnym dla wszystkich zbiorów V_m jest element zerowy. Warunek czwarty podaje sposób rozszerzania zbioru V_m do zbioru V_{m+1} . Okazuje się, że W_m generowane przez falki $\{\psi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{S}}$, jest ortogonalnym uzupełnieniem zbioru V_m do zbioru V_{m+1} .

5.5.4. Ortonormalne falki Daubechies

Daubechies [14] podała konstrukcję ortonormalnych baz falkowych ze zwartymi nośnikami. Przykłady tych falek są przedstawione na rysunku 5.5 a odpowiadające im funkcje skalujące na rysunku 5.4. Falki Daubechies rzędu pierwszego ($M = 1$) są funkcjami Haara przedstawionymi na rysunku 5.3. Wraz ze wzrostem rzędu wzrasta gładkość falek, są one bowiem elementami przestrzeni C^{M-2} . Nośniki podstawowych funkcji skalujących są odcinkami $[0, 2M - 1]$ a nośniki odpowiadających im falek odcinkami $[1 - M, M]$. Długość obu nośników jest jednakowa, ale tylko dla funkcji Haara nośniki pokrywają się.



Rys. 5.4. Funkcje skalujące Daubechies



Rys. 5.5. Falki Daubechies

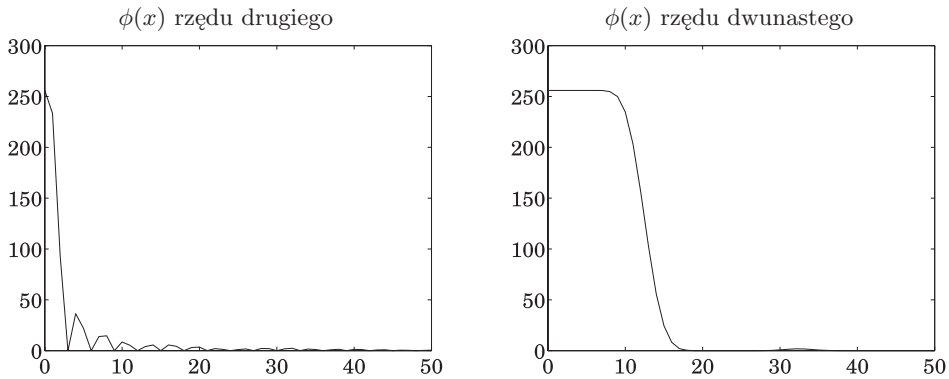
Częstotliwościowe własności funkcji skalujących i falek przedstawione są na rysunkach 5.6 i 5.7. Wynika z nich, że faleki, w przeciwieństwie do funkcji skalujących, nie zawierają składowych stałych. Wraz ze wzrostem rzędu maleją zafalowania widm.

Beylkin [4] zauważył, że dla funkcji skalujących Daubechies współczynniki połączeń zawarte w macierzy F spełniają prostą regułę

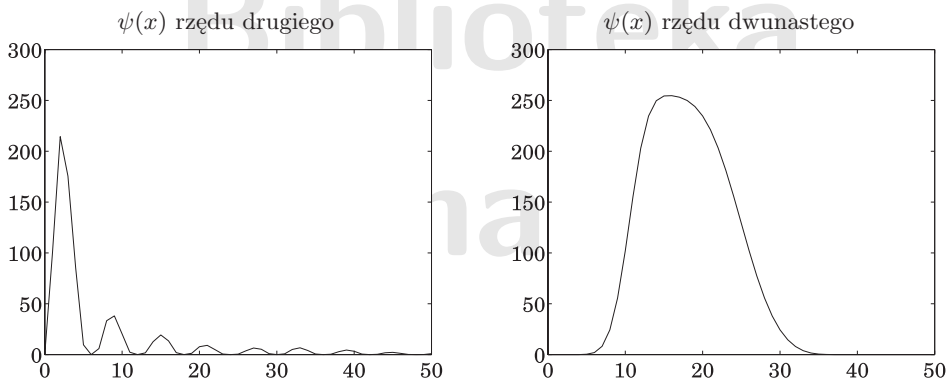
$$f_{m,n}^j = 2^{-2j} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-j}x - m) \frac{d\varphi(2^{-j}x - n)}{dx} dx = 2^{-j} f_{m-n} \quad (5.55)$$

gdzie

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n = 0 \text{ lub } n \geq 2M - 1 \\ \int_0^{\infty} \varphi(x - n) \frac{d\varphi(x)}{dx} dx & \text{gdy } 1 \leq n \leq 2M - 2 \end{cases} \quad (5.56)$$



Rys. 5.6. Widmo amplitudowe funkcji skalujących



Rys. 5.7. Widmo amplitudowe falek

przy czym $f_{-n} = -f_n$. Ponieważ wartości f_n są stabelaryzowane, elementy $f_{m,n}^j$ macierzy F można wyznaczać z algebraicznej zależności (5.55). Trzeba jednak pamiętać, że Beylkin wyprowadził zależność (5.55) dla funkcji skalujących, tworzących bazę w podprzestrzeni zawartej w $L^2(\mathfrak{R})$. Zatem tylko te elementy macierzy F , występujące we wzorze (5.18), można obliczać za pomocą (5.55), dla których nośniki funkcji skalujących zawarte są w odcinku $[0, 1]$.

5.5.5. Falki dwuwymiarowe

Oczywistą metodą generowania podprzestrzeni zawartej w $L^2((0, 1) \times (0, T))$ jest utworzenie iloczynu tensorowego z dwóch jednowymiarowych funkcji skalujących. Otrzymamy w ten sposób elementy

$$\varphi_{m_1, m_2, n_1, n_2}(x, t) = \varphi_{m_1, n_1}(x) \varphi_{m_2, n_2}(t) \quad (5.57)$$

Często stosuje się inną, ciekawszą i prostszą w zastosowaniach metodę zaproponowaną przez Mallata. Przyjmuje się, że funkcje skalujące mają jednakową rozdzielczość dla obu zmiennych

$$\varphi_{m,n_1,n_2}(x,t) = \varphi_{m,n_1}(x)\varphi_{m,n_2}(t) \quad (5.58)$$

gdzie:

$$\varphi_{m,n_1}(x) = 2^{m/2}\varphi(2^m x - n_1), \quad \varphi_{m,n_2}(t) = 2^{m/2}\varphi(2^m t - n_2), \quad (5.59)$$

oraz $m \in \mathbb{Z}$, $n_1 \in \mathbb{N}_x = \{n \in \mathbb{Z} : \text{supp } \varphi_{m,n_1} \cap (0,1) \neq \emptyset\}$ i podobnie $n_2 \in \mathbb{N}_t = \{n \in \mathbb{Z} : \text{supp } \varphi_{m,n_2} \cap (0,T) \neq \emptyset\}$.

Zbiory V_m^2 dwuwymiarowych funkcji skalujących zdefiniujemy następująco:

$$V_m^2 = V_m^x \otimes V_m^t = \text{span}\{\varphi_{m,n_1,n_2} = \varphi_{m,n_1}\varphi_{m,n_2} : \varphi_{m,n_1} \in V_m^x, \varphi_{m,n_2} \in V_m^t\} \quad (5.60)$$

Oznacza to, że dowolną funkcję dwuwymiarową o rozdzielczości m , można przedstawić w postaci iloczynu macierzewego

$$w_m(x,t) = \varphi_m^T(x)C_m\varphi_m(t) \quad (5.61)$$

gdzie

$$C_m = [c_{m,n_1,n_2}] \quad (5.62)$$

jest macierzą zawierającą współczynniki rozwinięcia funkcji dwuargumentowej w szereg funkcji skalujących o m -tej rozdzielczości. Funkcje te zostały zapisane w postaci wektorów

$$\varphi_m(x) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \varphi_{m,1}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{m,n_1}(x) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \varphi_m(t) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \varphi_{m,1}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{m,n_2}(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

przy czym wektory $\varphi_m(x)$ i $\varphi_m(t)$ są utworzone z tych samych funkcji skalujących, ale ich wymiary są na ogół różne. Korzystając z oznaczenia (5.58), szereg (5.61) można zapisać inaczej

$$w_m(x,t) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} c_{m,n_1,n_2}\varphi_{m,n_1}(x)\varphi_{m,n_2}(t) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} c_{m,n_1,n_2}\varphi_{m,n_1,n_2}(x,t) \quad (5.64)$$

Identycznie jak dla funkcji jednoargumentowych, funkcje dwuargumentowe o rozdzielczości $m+1$ mogą być wyrażone przez falki i funkcje skalujące o niższej rozdzielczości

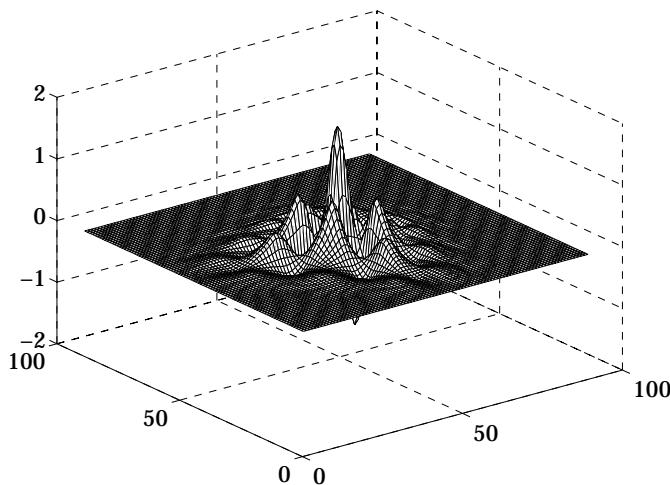
$$w_{m+1}(x,t) = \begin{bmatrix} \varphi_m^T(x) & \psi_m^T(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_m & F_m \\ E_m & G_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_m(t) \\ \psi_m(t) \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

funkcja jest reprezentacją poziomu m -tego, a pozostałe są odpowiednimi uzupełnieniami. Druga funkcja jest utworzona przez faleki $\{\psi_{m,n_1,n_2}^t\}_{n_1,n_2 \in \mathbb{Z}}$, które powstały przez wymnożenie falek (z argumentami w postaci przestrzennej x) i funkcji skalujących (ze zmienną czasową t jako argumentem). Ponieważ funkcje skalujące posiadają wartości średnie różne od zera, w funkcji tej są reprezentowane zjawiska niezmiennie względem czasu. Funkcja trzecia dobrze reprezentuje zjawiska niezmiennie w przestrzeni. Funkcja czwarta utworzona jest z iloczynów dwóch falek, zatem są w niej dobrze reprezentowane zjawiska zachodzące ze stałymi prędkościami. Przykłady dwuargumentowych funkcji przedstawione są na rysunkach 5.8, 5.9 i 5.10. Przedstawione powyżej własności można zapisać, podobnie jak dla funkcji jednoargumentowych w postaci warunków:

- 1) $\dots V_{-1}^2 \subset V_0^2 \subset V_1^2 \dots$
- 2) $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m^2} = L^2((0, 1) \times (0, T))$
- 3) $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m^2 = \{0\}$
- 4) $V_{m+1}^2 = (V_m \oplus W_m) \otimes (V_m \oplus W_m) = V_m^2 \oplus W_m^2$ dla $m \in \mathbb{Z}$

Zbiory V_m^2 są ortogonalnymi uzupełnieniami zbiorów W_m^2 do zbiorów W_{m+1}^2 . Są one sumą prostą trzech zbiorów

$$V_m^2 = (W_m \otimes V_m) \oplus (V_m \otimes W_m) \oplus (W_m \otimes W_m) \tag{5.72}$$



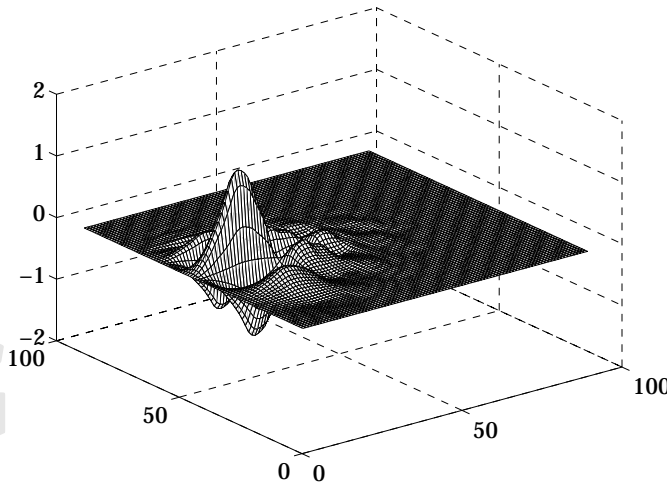
Rys. 5.8. Faleka dwuwymiarowa jako iloczyn dwóch falek jednowymiarowych

Każdy element sumy prostej jest generowany przez ortonormalny zbiór utworzony z iloczynów tensorowych

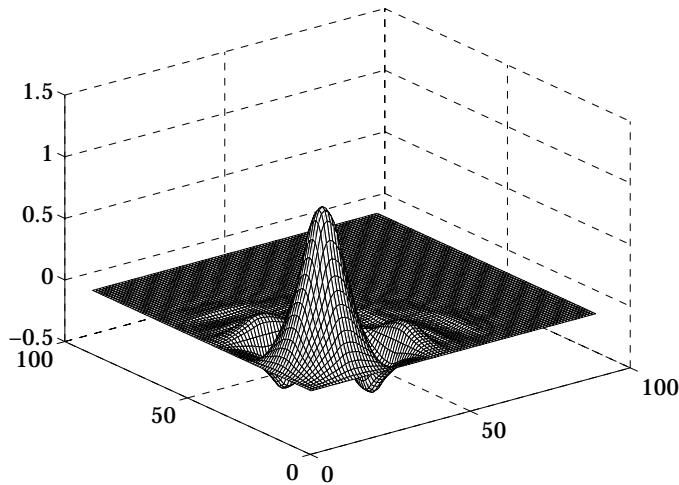
$$W_m \otimes V_m = \overline{\text{span}\{\psi_{m,n_1}\varphi_{m,n_2} : n_1 \in Z_d^x, n_2 \in Z_d^t\}} \quad (5.73)$$

$$V_m \otimes W_m = \overline{\text{span}\{\varphi_{m,n_1}\psi_{m,n_2} : n_1 \in Z_d^x, n_2 \in Z_d^t\}} \quad (5.74)$$

$$W_m \otimes W_m = \overline{\text{span}\{\psi_{m,n_1}\psi_{m,n_2} : n_1 \in Z_d^x, n_2 \in Z_d^t\}} \quad (5.75)$$



Rys. 5.9. Funkcja dwuwymiarowa jako iloczyn falki i funkcji skalującej



Rys. 5.10. Funkcja skalująca jako iloczyn (5.58) dwóch funkcji skalujących

6

Przykłady modelowania

6.1. Elektryczne linie długie

Modelem matematycznym elektrycznej linii długiej, przedstawionej na rysunku 6.1 jest układ dwóch równań różniczkowych cząstkowych. Można go zapisać w postaci macierzowej

$$\frac{\partial y}{\partial t} + S \frac{\partial y}{\partial x} = Ay \quad (6.1)$$

gdzie:

$$S = \vec{S} = \begin{bmatrix} -s & \\ & s \end{bmatrix} \quad s = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6.2)$$

$$A = \vec{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{G}{C} - \frac{R}{L} & \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \\ \frac{G}{C} - \frac{R}{L} & -\frac{G}{C} - \frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

R, L, C, G są rozłożonymi parametrami linii elektrycznej: opornością, indukcyjnością, pojemnością i upływnością. Zmienna y jest powiązana z prądem i oraz napięciem elektrycznym u następującą transformacją

$$y = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \begin{bmatrix} \sqrt{L} & -\sqrt{C} \\ \sqrt{L} & \sqrt{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} \quad (6.4)$$
$$\begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{C} & \sqrt{C} \\ -\sqrt{L} & \sqrt{L} \end{bmatrix}$$

która sprowadza równanie (6.1) do postaci kanonicznej z diagonalną macierzą S . Elementy na przekątnej są prędkościami fal elektromagnetycznych: powracającej i biegnącej wzdłuż linii elektrycznej.

Założmy, że elektryczna linia długa, przedstawiona na rysunku 6.1, jest zasilana (na brzegu $x = 0$) przez rzeczywiste źródło napięciowe $u_{zr}(t)$ posiadające wewnętrzną oporność R_0 . Niech oporność obciążenia na drugim brzegu wynosi R_1 .

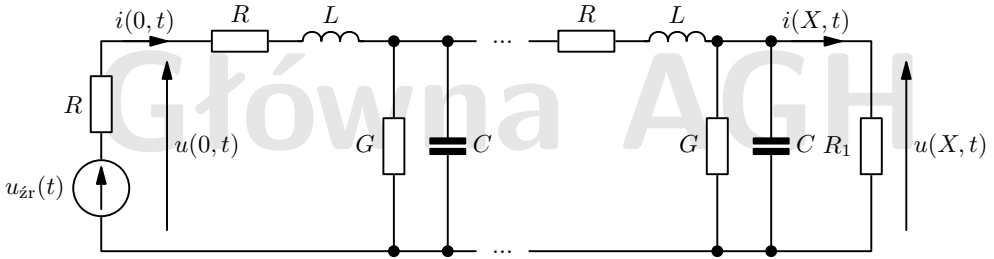
Przy tych założeniach otrzymujemy warunki brzegowe

$$\begin{bmatrix} y^-(X, t) \\ y^+(0, t) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y^-(0, t) \\ y^+(X, t) \end{bmatrix} + W u_{zr}(t) \quad (6.5)$$

gdzie zmienna zależna y została podzielona na dwa składniki y^- i y^+ . Długość linii elektrycznej została oznaczona przez X . Dla rozważanego przykładu otrzymujemy

$$B = \vec{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{L} - R_1\sqrt{C}}{\sqrt{L} + R_1\sqrt{C}} \\ \frac{\sqrt{L} - R_0\sqrt{C}}{\sqrt{L} + R_0\sqrt{C}} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{L} + R_0\sqrt{C}} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$



Rys. 6.1. Elektryczna linia długa zasilana przez rzeczywiste źródło napięciowe

Dodatkowo założmy, że dla chwili początkowej $t = 0$ znane jest rozłożenie prądu i napięcia wzdłuż linii. Można stąd wyznaczyć warunki początkowe

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq X \quad (6.8)$$

Problem początkowo-brzegowy (6.1), (6.5), (6.8) posiada jednoznaczne rozwiązanie w obszarze $\Psi = [0, X] \times [0, T]$, gdzie $[0, T]$ jest przedziałem czasu dla którego znane jest napięcie $u_{zr}(t)$.

Autonomiczny (tzn. gdy $u_{zr}(t) = 0$) system dynamiczny (6.1), (6.5) jest asymptotycznie stabilny jeżeli

$$E(t) = \int_0^x y^T(x, t) G y(x, t) dx \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad t \rightarrow \infty \quad (6.9)$$

gdzie $G = \text{diag}(1, g)$. Współczynnik $g > 0$ można tak dobrać, aby funkcja energetyczna (6.9) była monotonicznie malejącą funkcją czasu t , czyli $dE/dt < 0$. Różniczkując

funkcję (6.9) otrzymujemy

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_w}{dt} + \frac{dE_b}{dt} \quad (6.10)$$

gdzie

$$\frac{dE_w}{dt} = \int_0^X y^T (A^T G + GA) y \, dx \quad (6.11)$$

$$\frac{dE_b}{dt} = \begin{bmatrix} y^-(0, t) \\ y^+(X, t) \end{bmatrix}^T (B^T |SG| B - |SG|) \begin{bmatrix} y^-(0, t) \\ y^+(X, t) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

a $|SG|$ jest dodatnio określoną macierzą diagonalną, której elementy są równe wartościom bezwzględny odpowiadających elementów macierzy SG . Dla rozważanego systemu można udowodnić [73], że formy (6.11) i (6.12) są ujemnie określone wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne $\lambda_i(A)$ macierzy A są ujemne, a moduły wartości własnych macierzy B są mniejsze niż 1. Po prostych obliczeniach otrzymujemy

$$\lambda_1(\vec{A}) = -\frac{R}{L} \quad \text{oraz} \quad \lambda_2(\vec{A}) = -\frac{G}{C} \quad (6.13)$$

$$\lambda_1(\vec{B}) = \sqrt{\frac{(\sqrt{L} - R_0\sqrt{C})(\sqrt{L} - R_1\sqrt{C})}{(\sqrt{L} + R_0\sqrt{C})(\sqrt{L} + R_1\sqrt{C})}} \quad \text{oraz} \quad \lambda_2(\vec{B}) = -\lambda_1(\vec{B}) \quad (6.14)$$

Powyższe wzory potwierdzają przypuszczenie, że rozwiązanie autonomicznego problemu początkowo-brzegowego (6.1), (6.5), (6.8) jest asymptotycznie stabilne. Ze wzorów (6.13) wynika, że rozpraszanie energii wewnątrz linii jest tym większe, im większa jest oporność R i upływność G . Rozpraszanie energii podczas odbić brzegowych określone jest przez (6.14). Jeżeli bodaj na jednym brzegu oporność jest dopasowana do linii, tzn. $R_0 = \sqrt{L/C}$ lub $R_1 = \sqrt{L/C}$, to $\lambda_1(\vec{B}) = \lambda_2(\vec{B}) = 0$, czyli tłumienie na brzegach jest całkowite. Brak tłumienia występuje gdy na obu brzegach pojawia się jeden z dwóch stanów: zwarcie $R_0 = 0$, $R_1 = 0$ albo rozwarcie $R_0 = \infty$, $R_1 = \infty$. Wtedy $|\lambda_1(\vec{B})| = |\lambda_2(\vec{B})| = 1$.

Założmy teraz, że dla pewnej chwili czasu $t = T > 0$ znane jest rozłożenie prądu i napięcia wzdłuż linii, czyli dany jest warunek końcowy

$$y(x, T) = y_T(x) \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq X \quad (6.15)$$

i należy równanie (6.1) rozwiązać „wstecz” z warunkiem brzegowym (6.5) po to, aby znaleźć rozłożenie prądu i napięcia dla chwili czasu $t = 0$. Dla tak sformułowanego problemu końcowo-brzegowego (6.1), (6.5), (6.15) otrzymujemy nowe współczynniki macierzowe

$$A = \overleftarrow{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{R}{L} + \frac{G}{C} & \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \\ \frac{R}{L} - \frac{G}{C} & \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad S = \overleftarrow{S} = \overrightarrow{S} \quad (6.16)$$

$$B = \overleftarrow{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{L} + R_e \sqrt{C}}{\sqrt{L} - R_e \sqrt{C}} \\ \frac{\sqrt{L} + R_b \sqrt{C}}{\sqrt{L} - R_b \sqrt{C}} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

które mają wartości własne

$$\lambda_1(\overleftarrow{A}) = \frac{R}{L} \quad \lambda_2(\overleftarrow{A}) = \frac{G}{C} \quad (6.18)$$

$$\lambda_1(\overleftarrow{B}) = \sqrt{\frac{(\sqrt{L} + R_b \sqrt{C})(\sqrt{L} + R_e \sqrt{C})}{(\sqrt{L} - R_b \sqrt{C})(\sqrt{L} - R_e \sqrt{C})}} \quad \lambda_2(\overleftarrow{B}) = -\lambda_1(\overleftarrow{B}) \quad (6.19)$$

Ze wzorów (6.18), (6.19) widać, że odwrócenie kierunku zmiennej czasowej, zamienia stabilny problem początkowo-brzegowy w niestabilny problem końcowo-brzegowy.

Rozpatrzmy teraz nieco inne zagadnienie. Niech będą znane przebiegi napięcia i prądu na brzegu $x = 0$, czyli niech będą znane warunki brzegowe

$$y(0, t) = y_0(t) \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq T \quad \text{gdzie} \quad T > 2X\sqrt{LC} \quad (6.20)$$

Zadanie polega na znalezieniu przebiegów napięcia i prądu dla brzegu $x = X$. Problem brzegowy (6.1), (6.20) posiada w postaci kanonicznej następujące współczynniki:

$$S = S_{\uparrow} = \begin{bmatrix} -\sqrt{LC} & \\ & \sqrt{LC} \end{bmatrix} \quad A = A_{\uparrow} = \frac{\sqrt{LC}}{2} \begin{bmatrix} \frac{G}{C} + \frac{R}{L} & \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \\ \frac{G}{C} - \frac{R}{L} & -\frac{G}{C} - \frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Macierz A_{\uparrow} ma dwie wartości własne

$$\lambda_1(A_{\uparrow}) = -\sqrt{GR} \quad \lambda_2(A_{\uparrow}) = \sqrt{GR} \quad (6.22)$$

i tylko pierwsza z nich spełnia warunek stabilności. Załóżmy teraz, że znamy warunek brzegowy dla $x = X$, czyli

$$y(X, t) = y_X(t) \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{gdzie} \quad T > 2X\sqrt{LC} \quad (6.23)$$

Należy znaleźć rozwiązanie dla brzegu $x = 0$. Dla tego przypadku otrzymujemy identyczne współczynniki macierzowe

$$S_{\uparrow} = S_{\downarrow} \quad A_{\uparrow} = A_{\downarrow} \quad (6.24)$$

Wynika stąd, że oba problemy brzegowe są niestabilne.

Metoda charakterystyk jest bardzo efektywną metodą znalezienia numerycznego rozwiązania równania (6.1). Dla problemu początkowo-brzegowego (6.1)÷(6.6) otrzymuje się równania różnicowe, które mogą być zapisane w postaci macierzowej

$$y_j = \vec{\Phi} y_j + \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} u_{zr, j} \quad (6.25)$$

gdzie

$$y_j = \begin{bmatrix} y_{1,j} \\ \vdots \\ y_{I,j} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2I}, \quad y_{i,j} = ((i-1)\Delta x, (j-1)\Delta t) \in \mathfrak{R}^2,$$

$$u_{zr,j} = u_{zr}((j-1)\Delta t), \quad \Delta x = \frac{2\Delta t}{\sqrt{LC}}$$

$I = 1 + 1/\Delta x$ przy czym Δx jest gęstością dyskretyzacji przestrzeni a Δt jest gęstością dyskretyzacji czasu. Macierz $\vec{\Phi} \in \mathfrak{R}^{2I \times 2I}$ składa się z elementów macierzy A oraz B i zależy od gęstości dyskretyzacji Δt . Dla problemu brzegowego (6.1), (6.20) otrzymujemy podobny system dyskretny

$$y_{i+1} = \Phi_{\uparrow} y_i \quad (6.26)$$

gdzie

$$y_i = \begin{bmatrix} y_{i,1} \\ \vdots \\ y_{i,J} \end{bmatrix} \quad J = 1 + T/\Delta t \quad \Phi_{\uparrow} \in \mathfrak{R}^{2(I-i) \times 2(I+1-i)}.$$

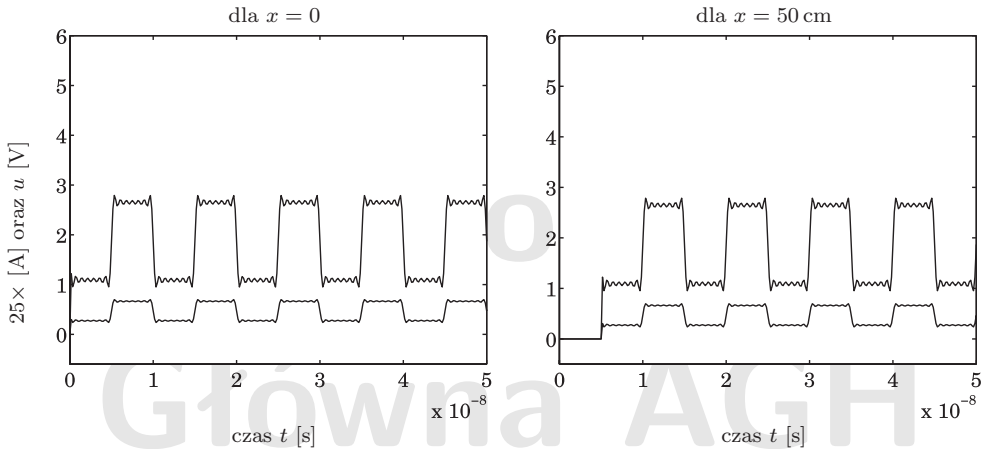
Niestabilność ciągłego problemu końcowo-brzegowego, wynikająca z (6.18) i (6.19), prowadzi do numerycznej niestabilności odpowiedniego systemu dyskretnego. Uniemożliwia to numeryczne rozwiązanie „wstecz” równania różniczkowego cząstkowego (6.1). Natomiast oba analizowane problemy brzegowe (6.1), (6.20) oraz (6.1), (6.23) są co prawda niestabilne, jednak obliczenia komputerowe dają poprawne wyniki dla obu problemów brzegowych.

Jako przykład elektrycznej linii długiej przyjmijmy miedzianą ścieżkę z pewnego układu elektronicznego. Załóżmy następujące parametry: $R = 10^{-3}$ [Ω/cm], $L = 10^{-8}$ [H/cm], $C = 10^{-12}$ [F/cm], $G = 10^{-6}$ [S/cm]. Niech rzeczywiste źródło napięciowe generuje falę prostokątną o częstotliwości $f = 100$ [MHz], którą aproksymujemy za pomocą skończonego szeregu

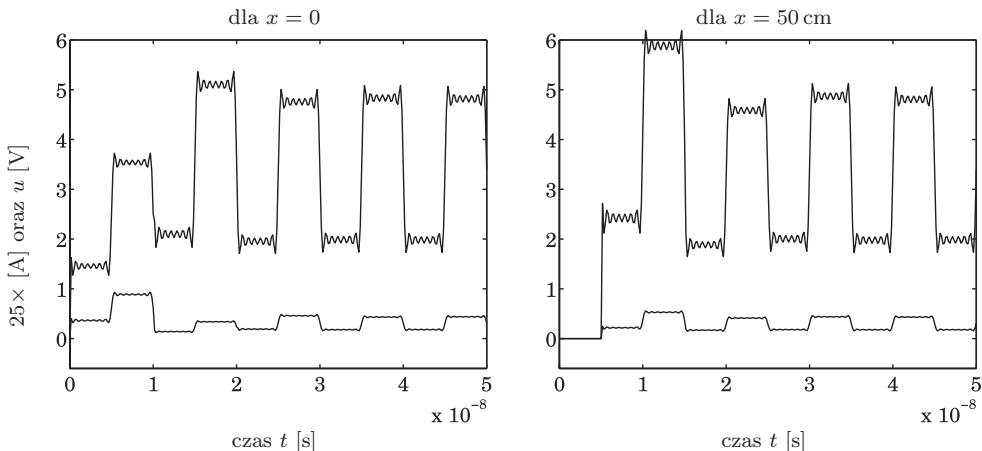
$$u_{zr}(t) = 3 - \frac{5}{\pi} \sum_{i=1}^7 \frac{\sin(2\pi(2i-1)10^8 t)}{2i-1} \quad (6.27)$$

Długość pierwszej harmonicznej fali prostokątnej wynosi zatem $\lambda = s/f = 100$ [cm]. Na rysunku 6.2 przedstawione są wyniki modelowania gdy nie ma odbić brzegowych, ponieważ do obliczeń przyjęto $R_0 = R_1 = \sqrt{L/C} = 100$ [Ω]. Oscylacje są wynikiem skończonej reprezentacji fali prostokątnej przez funkcje trygonometryczne. Dla drugiego przypadku, przedstawionego na rysunku 6.3, przyjęto długość ścieżki też równą połowie długości podstawowej fali harmonicznej, ale wewnętrzną oporność źródła przyjęto $R_0 = 50$ [Ω] a oporność obciążenia $R_1 = 500$ [Ω]. Żadna z tych rezystancji nie jest równa oporności dopasowania $\sqrt{L/C} = 100$ [Ω]. Powoduje to od-

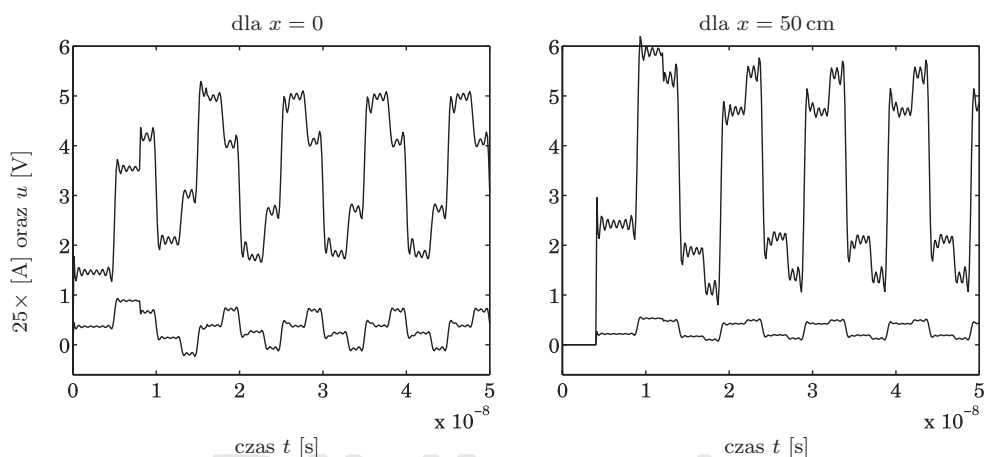
bicia falowe od obu brzegów i odkształca regularny kształt drgań. Na rysunku 6.4 przedstawiono przebiegi prądów i napięć dla ścieżki o długości 40 [cm] i opornościach brzegowych identycznych jak dla poprzedniego przypadku. Odbicia od brzegów, połączone z niewspółmierną długością fal harmonicznym z długością ścieżki, powodują największe odkształcenia. Obliczenia numeryczne były prowadzone z dyskretyzacją względem zmiennej przestrzennej $\Delta x = X/30$ [cm] i dyskretyzacją dla zmiennej czasowej $\Delta t = 0,5\Delta x\sqrt{LC}$ [s].



Rys. 6.2. Wyniki komputerowego modelowania przepływu prądu w ścieżce z opornościami na brzegach całkowicie tłumiącymi odbicia



Rys. 6.3. Wyniki komputerowego modelowania przepływu prądu w ścieżce o długości współmiernej z długościami harmonicznymi fali prostokątnej. Oporności na brzegach powodują odbicia brzegowe



Rys. 6.4. Wyniki komputerowego modelowania przepływu prądu w ścieżce o długości niewspółmiernej z długościami harmonicznych fali prostokątnej. Oporności na brzegach powodują odbicia brzegowe

6.2. System transportu gazu ziemnego

W skład systemu dystrybucji gazu ziemnego wchodzi: kopalnie gazu, tłocznie, rurociągi przesyłowe, zbiorniki gazu, rozdzielnie, stacje redukcyjne i odbiorcy gazu. Najbardziej skomplikowanym obiektem dla matematycznego modelowania są rurociągi przesyłowe. Poprawny model matematyczny powinien uwzględnić zarówno ich rozłożone parametry jak i dynamikę płynącego gazu. Przekroje rurociągów przesyłowych są na tyle małe w stosunku do ich długości, że modele matematyczne przyjmuje się w postaci równań opisujących jednowymiarowy przepływ gazu. Najczęściej jest to układ dwóch równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu.

Zagadnienia dynamiki gazu były rozpatrywane już przez Eulera ponad dwieście lat temu. Od tej pory ukazało się wiele prac, w których wyprowadzono równania, formułowano warunki graniczne i dyskutowano rozwiązania postawionych problemów. Wychodząc z praw fizyki otrzymuje się model matematyczny przepływu gazu w postaci równania różniczkowego cząstkowego typu hiperbolicznego. Równanie to jest dość skomplikowane i dlatego inżynierowie często posługują się modelami uproszczonymi w formie równań różniczkowych cząstkowych typu parabolicznego a czasami nawet równaniami różniczkowymi zwyczajnymi.

6.2.1. Model falowy uwzględniający prędkość płynącego gazu

W oparciu o podstawowe prawa hydrodynamiki — prawo zachowania masy, równanie stanu gazu i prawo zachowania pędu — można wyprowadzić układ dwóch równań, który uwzględnia bezwładność, lepkość i ściśliwość gazu. Dla izotermicznego i turbu-

lentnego przepływu gazu przez długi rurociąg otrzymuje się [29]

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + M \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho M \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{p} \right) = -\frac{\lambda LM}{2D} \frac{q^2}{p} \end{cases} \quad (6.28)$$

W równaniu tym występują wielkości łatwo mierzalne. Stan gazociągu charakteryzuje ciśnienie gazu p i przepływ masowy q . Wielkości te są funkcjami dwóch zmiennych: odległości x i czasu t . Stałe występujące w równaniu mają następującą fizyczną interpretację:

- M — liczba Macha (tzn. średnia prędkość przepływu do prędkości dźwięku),
- D — średnica gazociągu,
- L — długość gazociągu,
- ρ — współczynnik korekcyjny uwzględniający przyleganie cząsteczek gazu do rurociągu (wartości współczynnika przyjmuje się w granicach od 1,035 do 1,037),
- λ — współczynnik uwzględniający naprężenie styczne.

Wielkości x , t , p , q są unormowane, czyli $0 \leq x \leq 1$, przy czym $x = 0$ oznacza początek, a $x = 1$ koniec gazociągu. Czas t jest krotnością czasu przepływu fali dźwiękowej przez cały gazociąg, a ciśnienie p oraz przepływ q są bezwymiarowymi krotnościami średnich wartości ciśnienia i przepływu.

Równanie (6.28) można zapisać w nieco innej postaci

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + M \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \left(\frac{1}{M} - \rho M \frac{q^2}{p^2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + 2\rho M \frac{q}{p} \frac{\partial q}{\partial x} = -\eta \frac{q^2}{p} \end{cases} \quad (6.29)$$

gdzie $\eta = 0,5\lambda LM/D$. Równanie (6.29) jest liniowe względem pochodnych, a nieliniowe względem funkcji p i q . Takie równania nazywa się quasi-liniowymi lub prawieli-niowymi. Aby określić typ równania (6.29) należy znaleźć wartości własne macierzy

$$S = \begin{bmatrix} 0 & M \\ \frac{1}{M} - \rho M \frac{q^2}{p^2} & 2\frac{\rho M q}{p} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

czyli rozwiązać równanie charakterystyczne

$$s^2 - 2\rho M \frac{q}{p} s - 1 + \rho M^2 \frac{q^2}{p^2} = 0 \quad (6.31)$$

Macierz (6.30) ma dwie wartości własne

$$\begin{aligned} s^- &= \rho M \frac{q}{p} - \sqrt{\rho M^2 \frac{q^2}{p^2} (\rho - 1) + 1} \\ s^+ &= \rho M \frac{q}{p} + \sqrt{\rho M^2 \frac{q^2}{p^2} (\rho - 1) + 1} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Ponieważ $\rho \approx 1$, $M \ll 1$, $q \approx 1$, $p \approx 1$, to $s^- \approx -1$, $s^+ \approx 1$. Dodatnia wartość własna reprezentuje prędkość propagacji fali dźwiękowej w rurociągu a wartość ujemna prędkość fali powracającej. Ponieważ wartości własne macierzy (6.30) są różne od zera i rzeczywiste, to równanie różniczkowe (6.29) jest równaniem typu hiperbolicznego.

W równaniach (6.32) widać sztuczność współczynnika poprawkowego ρ . Został on wprowadzony, aby zwiększyć dokładność modelu matematycznego przez uwzględnienie rozkładu prędkości cząsteczek gazu w przekroju poprzecznym gazociągu. Cząsteczki gazu leżące najbliżej rurociągu „przyklejają się” do niego, mają zatem zerową prędkość wzdłuż osi gazociągu. Przyjmując $\rho = 1$ oraz pamiętając, że

$$M = \frac{\nu_{\text{sr}}}{\nu_{\text{dż}}} \qquad \frac{q}{p} = \frac{\nu_{\text{tx}}}{\nu_{\text{sr}}} \qquad (6.33)$$

otrzymujemy

$$s^- = \frac{\nu_{\text{tx}} - \nu_{\text{dż}}}{\nu_{\text{dż}}} \qquad s^+ = \frac{\nu_{\text{tx}} + \nu_{\text{dż}}}{\nu_{\text{dż}}} \qquad (6.34)$$

gdzie:

ν_{sr} — średnia prędkość przepływu gazu,

$\nu_{\text{dż}}$ — prędkość propagacji fali dźwiękowej w gazie,

ν_{tx} — chwilowa prędkość przepływu gazu w pewnym punkcie gazociągu.

Wynika stąd, że s^- jest chwilową i zarazem lokalną względną prędkością fali dźwiękowej, która porusza się przeciwnie do kierunku płynącego gazu. Natomiast s^+ jest względną prędkością fali dźwiękowej poruszającej się zgodnie z kierunkiem płynącego gazu.

6.2.2. Model falowy zaniedbujący prędkość płynącego gazu

Równanie (6.28) jest mało przydatne w praktyce, kłopoty sprawia występująca w nim nieliniowość. Okazuje się jednak, że uproszczenie tego równania ma dobre uzasadnienie. Prędkość przepływu gazu ziemnego przez rurociąg jest na tyle mała, że liczba Macha M jest o dwa rzędy mniejsza od jedności. Analizując współczynniki w równaniu (6.28) zauważamy, że ρM jest znacznie mniejsze od pozostałych współczynników. Wydaje się zatem uzasadnione, aby w równaniu (6.28) pominąć człon $\rho M \partial(q^2/p)/\partial x$. Po wprowadzeniu tego uproszczenia otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + M \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial x} = -\eta \frac{q^2}{p} \end{cases} \qquad (6.35)$$

W równaniu (6.35) współczynniki przy pochodnych są stałe. Równania o tej własności nazywamy niby-liniowymi lub semi-liniowymi. Postępując podobnie jak dla równania (6.29) tworzymy macierz

$$S = \begin{bmatrix} 0 & M \\ 1/M & 0 \end{bmatrix} \qquad (6.36)$$

i obliczamy jej wartości własne

$$s^- = -1 \quad s^+ = 1 \quad (6.37)$$

Porównując wzory (6.34) i (6.37) zauważamy, że wprowadzone uproszczenie oznacza pominięcie wpływu ruchu ośrodka na prędkości fali dźwiękowej. Równanie (6.35) jest również równaniem typu hiperbolicznego. Jest na tyle proste, że dość łatwo może być wykorzystane jako model matematyczny gazociągu. Przyjęte założenie upraszczające jest w praktyce dobrze uzasadnione, wynika to z przeprowadzonych porównań numerycznych rozwiązań równań (6.28) i (6.35).

6.2.3. Warunki graniczne dla problemu Cauchy'ego

Jeżeli na pewnej krzywej K , która w żadnym punkcie nie jest styczna do charakterystyk, podane są wartości ciśnienia p i przepływu q , to wtedy istnieje jednoznaczne rozwiązanie równań falowych (6.28) i (6.35) w obszarze usłanym przez charakterystyki przecinające krzywą K . Tak sformułowane zagadnienie graniczne jest uogólnionym problemem Cauchy'ego.

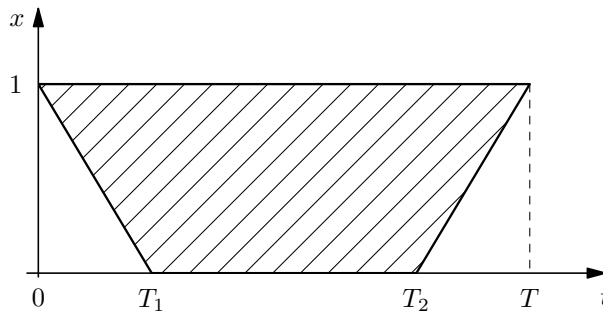
Przykład 6.1.

Zarejestrowano przebiegi ciśnienia $p(1, t)$ i przepływu $q(1, t)$ na końcu gazociągu dla czasu $t \in [0, T]$ przy czym $T \gg 1$. Znając równania falowe (6.28) lub (6.35) dla modelowanego gazociągu, należy podać w jakim przedziale czasu $[T_1, T_2]$ można obliczyć zmiany ciśnienia i przepływu na początku gazociągu.

Dla równania (6.35) charakterystykami są proste

$$x = -t + c_1 \quad x = t + c_2 \quad (6.38)$$

gdzie: c_1 i c_2 są stałymi. Obszar jednoznacznego rozwiązania jest zakreskowany na rysunku 6.5. Mamy zatem $T_1 = 1$ i $T_2 = T - 1$.



Rys. 6.5. Obszar jednoznacznego rozwiązania uogólnionego problemu Cauchy'ego

Dla równania (6.28) charakterystykami są krzywe będące rozwiązaniem nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= s^-(p(x, t), q(x, t)) \\ \frac{dx}{dt} &= s^+(p(x, t), q(x, t))\end{aligned}\tag{6.39}$$

Dla określenia T_1 i T_2 trzeba znać równania skrajnych charakterystyk ograniczających obszar rozwiązania. To z kolei wymaga znajomości rozwiązań p i q wzdłuż szukanych charakterystyk. Zatem T_1 i T_2 będzie zależało od podanych warunków granicznych. Ponieważ $s^- \approx -1$ a $s^+ \approx 1$, to można się spodziewać, że $T_1 \approx 1$ a $T_2 \approx T - 1$. Uwzględniając wzór (6.34) otrzymujemy dodatkowo $T_1 > 1$ i $T_2 > T - 1$. T_1 jest czasem po upływie którego fala dźwiękowa startująca z końca gazociągu w chwili $t = 0$, dotrze do jego początku. Natomiast czas T_2 jest chwilą, w której musi wystartować fala dźwiękowa z początku gazociągu, aby dotrzeć do jego końca w chwili T .

6.2.4. Warunki graniczne dla problemu mieszanego

Niech będą zadane warunki początkowe

$$\begin{aligned}p(x, 0) &= p_0(x) \\ q(x, 0) &= q_0(x)\end{aligned}\tag{6.40}$$

dla $0 \leq x \leq 1$, czyli niech będzie zadany rozkład ciśnienia gazu i jego przepływu dla chwili początkowej. Oprócz tego niech będą zadane warunki brzegowe

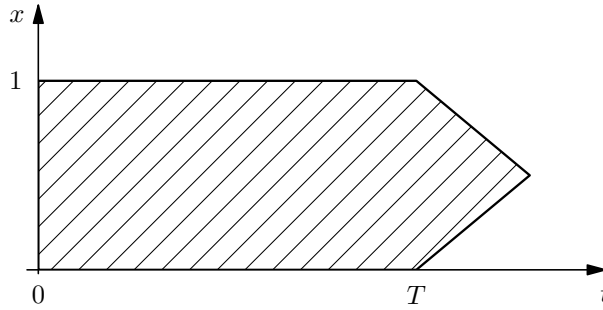
$$\begin{aligned}ap(0, t) + bq(0, t) &= u(t) \\ cp(1, t) + dq(1, t) &= z(t)\end{aligned}\tag{6.41}$$

dla $0 \leq t \leq T$, czyli niech będzie zadana odpowiednia kombinacja liniowa ciśnienia gazu i przepływu, zarówno dla początku jak i końca gazociągu. Zagadnienie rozwiązania równania różniczkowego (6.28) lub (6.35) przy zadanych warunkach początkowych (6.40) i granicznych (6.41), nazywa się problemem początkowo-brzegowym lub problemem mieszanym. Obszar jednoznacznego rozwiązania dla tak sformułowanego zagadnienia jest zakresowany na rysunku 6.6. Zbiór ten jest usłany przez charakterystyki przecinające brzeg zadanymi na nim warunkami granicznymi.

Przykład 6.2.

Dany jest stan początkowy gazociągu, tzn. zadane są warunki (6.40). Dzięki prognozie zapotrzebowania na gaz, znany jest pobór gazu $q(1, t)$ dla czasu $t \in [0, T]$. Znane jest również ciśnienie gazu $p(0, t)$ wytwarzane przez sprężarkę w tym samym czasie. Dla jakiego czasu można obliczyć wydatek sprężarki $q(0, t)$ i ciśnienie $p(1, t)$ na końcu gazociągu?

Odpowiadając na powyższe pytanie stwierdzamy, że $q(0, t)$ i $p(1, t)$ można obliczyć dla $t \in [0, T]$.



Rys. 6.6. Obszar jednoznacznego rozwiązania problemu mieszanego

6.2.5. Zastosowanie metody charakterystyk do numerycznego rozwiązania równań opisujących gazociągi

Zarówno równanie (6.28) jak i (6.35) są typu hiperbolicznego, zatem metody ich numerycznego rozwiązania są podobne. Posłużymy się metodą charakterystyk do rozwiązania równania (6.28) a następnie otrzymane rezultaty adoptujemy do rozwiązania jego wersji uproszczonej (6.35).

Zarówno równanie (6.28) jak i (6.35) można zapisać w postaci macierzowej

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + S \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

gdzie

$$S = \begin{bmatrix} 0 & M \\ -\frac{s^- s^+}{M} & s^- + s^+ \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\eta \frac{q}{p} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Wartości własne macierzy S dane są odpowiednio wzorem (6.32) lub (6.37). Równanie (6.42) można sprowadzić do postaci kanonicznej podstawiając $[p \ q]^T = Nw$, gdzie nieosobliwa macierz

$$N = \begin{bmatrix} M & M \\ s^- & s^+ \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

jest tak dobrana, aby $N^{-1}SN = \text{diag}(s^-, s^+)$. Równanie (6.42) można zapisać w postaci

$$N^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^- & \\ & s^+ \end{bmatrix} N^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = N^{-1} A \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

gdzie

$$N^{-1} = \frac{1}{M(s^+ - s^-)} \begin{bmatrix} s^+ & -M \\ -s^- & M \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Jest to układ dwóch równań

$$\begin{cases} s^+ \left(\frac{\partial p}{\partial t} + s^- \frac{\partial p}{\partial x} \right) - M \left(\frac{\partial q}{\partial t} + s^- \frac{\partial q}{\partial x} \right) = M\eta \frac{q^2}{p} \\ -s^- \left(\frac{\partial p}{\partial t} + s^+ \frac{\partial p}{\partial x} \right) + M \left(\frac{\partial q}{\partial t} + s^+ \frac{\partial q}{\partial x} \right) = -M\eta \frac{q^2}{p} \end{cases} \quad (6.47)$$

Przybliżone rozwiązanie tego równania można bardzo efektywnie znaleźć za pomocą metody charakterystyk, która jest klasyczną metodą różnicową. Charakterystykami są rozwiązania równań

$$\frac{dx}{dt} = s^- \qquad \frac{dx}{dt} = s^+ \quad (6.48)$$

Ponieważ mamy tylko dwa typy charakterystyk, można dokonać zamiany układu współrzędnych. Niech nowe zmienne φ i ξ zmieniają się wzdłuż charakterystyk. Otrzymamy zatem

$$x = x(\varphi, \xi) \qquad t = t(\varphi, \xi) \quad (6.49)$$

Warunkiem wystarczającym lokalnej wzajemnej jednoznaczności ciągłego przekształcenia (6.49) jest niezerowanie się jacobianu

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial t}{\partial \varphi} & \frac{\partial t}{\partial \xi} \end{vmatrix} \quad (6.50)$$

Dla równania (6.35) jacobian (6.50) ma wartość stałą

$$J = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad (6.51)$$

w całym obszarze $\Psi = [0, 1] \times [0, T]$. Dla równania (6.28) charakterystyki nie są liniami prostymi, zatem wartości jacobianu (6.50) nie są stałe. Ponieważ prędkość przepływu gazu jest dużo mniejsza od prędkości fali dźwiękowej, można wysnuć wniosek, że i w tym wypadku jacobian będzie zawsze różny od zera a jego wartość będzie zbliżona do (6.51).

Korzystając ze wzorów (6.48) i (6.49) można napisać

$$s^- = \frac{dx/d\varphi}{dt/d\varphi} \qquad s^+ = \frac{dx/d\xi}{dt/d\xi} \quad (6.52)$$

W oparciu o (6.52) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + s^- \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} &= \frac{1}{\partial t / \partial \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\partial t / \partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + s^+ \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} &= \frac{1}{\partial t / \partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\partial t / \partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.53)$$

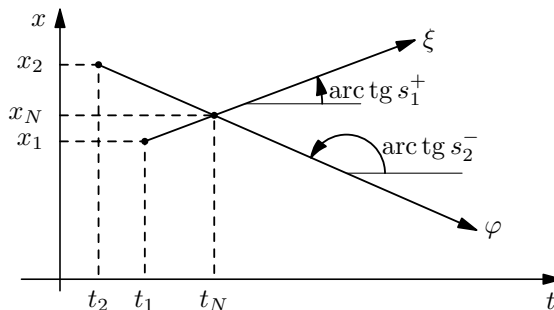
Równania (6.47) i (6.48) mają zatem postać

$$\begin{cases} s^+ \frac{\partial p}{\partial \varphi} - M \frac{\partial q}{\partial \varphi} = M \eta \frac{q^2}{p} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \\ -s^- \frac{\partial p}{\partial \xi} + M \frac{\partial q}{\partial \xi} = -M \eta \frac{q^2}{p} \frac{\partial t}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = s^- \frac{\partial t}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} = s^+ \frac{\partial t}{\partial \xi} \end{cases} \quad (6.54)$$

Do obliczeń numerycznych, równania (6.54) należy aproksymować równaniami różnicowymi. Przykładowo, posługując się metodą Eulera otrzymujemy

$$\begin{cases} s_2^+ (p_N - p_2) - M(q_N - q_2) = M \eta \frac{q_2^2}{p_2} (t_N - t_2) \\ -s_1^- (p_N - p_1) + M(q_N - q_1) = -M \eta \frac{q_1^2}{p_1} (t_N - t_1) \\ x_N - x_2 = s_2^- (t_N - t_2) \\ x_N - x_1 = s_1^+ (t_N - t_1) \end{cases} \quad (6.55)$$

Węzły siatki oznaczone zostały symbolami 1, 2, N a ich rozmieszczenie przedstawione jest na rysunku 6.7.

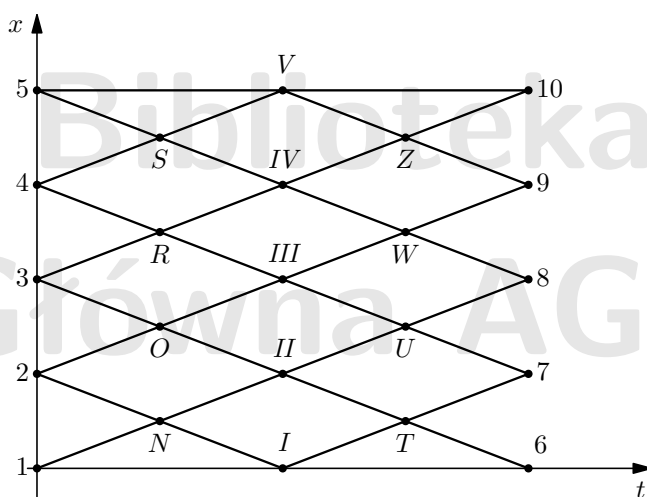


Rys. 6.7. Oznaczenia zmiennych dla wzoru (6.55)

6.2.6. Algorytm rozwiązania problemu mieszanego

Schemat siatki dyskretyzującej obszar rozwiązania problemu mieszanego przedstawiony jest na rysunku 6.8. Prześledźmy na nim algorytm wyznaczania przybliżonego rozwiązania równania (6.42) z zadanymi warunkami początkowymi (6.40) i warunkami brzegowymi (6.41) przyjmując $a = d = 1$ oraz $b = c = 0$.

Niech w równo oddalonych od siebie punktach $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (rysunek 6.8) zadane będą z warunku początkowego wartości funkcji p i q . Na prostej $x = 0$, wyznaczonej przez punkty 1, I , 6, niech będą zadane wartości funkcji p (z pierwszego warunku brzegowego (6.41)). Natomiast wzdłuż prostej $x = 1$, na której leżą punkty 5, V , 10, niech będą dane wartości funkcji q (z drugiego warunku brzegowego).



Rys. 6.8. Schemat dyskretyzacji dla problemu mieszanego

Znając parametry punktów 1 i 2 można posłużyć się równaniami (6.55) i obliczyć dla punktu N współrzędne i wartości funkcji p oraz q . Podobnie w oparciu o punkty 2 i 3 można wyliczyć parametry punktu O . Postępując w ten sposób obliczamy współrzędne i wartości funkcji p , q kolejno dla punktów $\{N, O, R, S\}$. Następnie znając parametry punktów N , O można wyliczyć parametry punktu II i podobnie znając wartości dla punktów $\{O, R, S\}$, można wyliczyć parametry punktów III i IV . Dla punktu I znamy jedną współrzędną, a mianowicie $x = 0$. W oparciu o parametry punktu N oraz równania (6.55), można wyliczyć dla punktu I współrzędną t . Pozwala to z warunku brzegowego wyznaczyć p , a następnie za pomocą (6.55) wyliczyć wartość q . Podobnie dla punktu V znamy współrzędną $x = 1$, a trzeba wyliczyć współrzędną t , aby z warunku brzegowego otrzymać q i następnie obliczyć wartość funkcji p w oparciu o równania (6.55) i parametry punktu S . Postępując w ten sposób obliczymy parametry punktów $\{I, II, III, IV, V\}$ i znajdziemy się w sytuacji analogicznej do wyjściowej. Będziemy następnie kolejno obliczać

parametry punktów $\{T, U, W, Z\}$ a później punktów $\{6, 7, 8, 9, 10\}$. Postępowanie takie umożliwia numeryczne rozwiązanie problemu mieszanego w odpowiednio ustalonym obszarze.

Parametry punktu N wyznacza się z równań (6.55), gdzie występują jako niewiadome. Na wstępie dla punktu 1 trzeba obliczyć współczynniki kierunkowe charakterystyk s_1^- oraz s_1^+ a dla punktu 2 należy obliczyć s_2^- oraz s_2^+ posługując się wzorami (6.32). Następnie z dwóch ostatnich równań (6.55) można wyliczyć

$$t_N = \frac{x_1 - x_2 + t_2 s_2^- - t_1 s_1^+}{s_2^- - s_1^+} \quad (6.56)$$

Z trzeciego równania (6.55) mamy

$$x_N = x_2 + s_2^-(t_N - t_2) \quad (6.57)$$

Z dwóch pierwszych równań (6.55) otrzymujemy

$$p_N = \frac{-s_1^- p_1 + s_2^+ p_2 + M \left\{ q_1 - q_2 - \eta \left[\frac{(t_N - t_1) q_1^2}{p_1} - \frac{(t_N - t_2) q_2^2}{p_2} \right] \right\}}{s_2^+ - s_1^-} \quad (6.58)$$

W końcu z pierwszego równania (6.55) znajdujemy

$$q_N = q_2 + s_2^+ \frac{p_N - p_2}{M} - \eta \frac{(t_N - t_1) q_2^2}{p_2} \quad (6.59)$$

Nieco inaczej znajduje się parametry punktów leżących na brzegu (np. dla punktów $\{I, 6, V, 10\}$ z rysunku 6.8). Przykładowo dla punktu I z trzeciego równania (6.55) otrzymujemy

$$t_I = t_N - \frac{x_N}{s_N^-} \quad (6.60)$$

Znając t_I można z warunku brzegowego wyznaczyć p_I . Potrzebną jeszcze wartość q_I można wyliczyć z pierwszego równania (6.55)

$$q_I = q_N + s_N^+ \frac{p_I - p_N}{M} - \eta \frac{(t_I - t_N) q_N^2}{p_N} \quad (6.61)$$

Podobnie dla punktu V najpierw wyliczymy

$$t_V = t_S - \frac{1 - x_S}{s_S^+} \quad (6.62)$$

Następnie znając t_V określimy q_V z warunku brzegowego (6.41), a w końcu z drugiego równania (6.55)

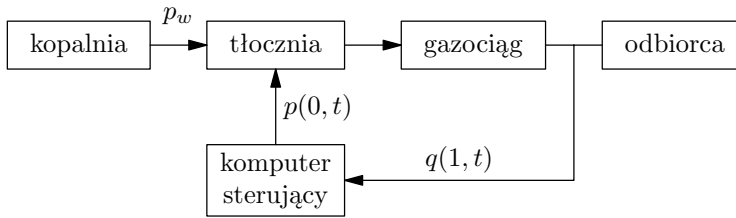
$$p_V = p_S + \frac{M \left[q_V - q_S - \eta \frac{(t_V - t_S) q_S^2}{p_S} \right]}{s_S} \quad (6.63)$$

Przedstawiony powyżej algorytm rozwiązania problemu mieszanego dotyczy równania (6.29). Punkty, dla których obliczamy parametry, tworzą węzły siatki pokrywającej obszar rozwiązania $\Psi = [0, 1] \times [0, T]$. Siatka ta dla równania (6.29) jest nierównomierna a jej kształt zależy od warunków granicznych. Natomiast dla równania (6.35) charakterystyki są liniami prostymi, zatem siatka jest regularna i jednakowa dla dowolnych warunków granicznych. Upraszcza to algorytm numerycznego rozwiązania równania różniczkowego.

6.2.7. Optymalne sterowanie gazociągiem

Na rysunku 6.9 przedstawiony jest prosty system dystrybucji gazu ziemnego. Kopalnia dostarcza gaz pod stałym ciśnieniem do znajdującej się w pobliżu tłoczni. Po zwiększeniu ciśnienia, gaz jest wtłaczany do gazociągu. Na jego końcu znajduje się odbiorca. System ten jest wyposażony w odpowiednie układy kontrolno-pomiarowe i jest sterowany za pomocą komputera. Głównym jego zadaniem jest wyliczenie przebiegu optymalnego ciśnienia gazu na wyjściu z tłoczni. Podstawowymi danymi są informacje o poborze gazu przez odbiorcę. Wyznaczone przez komputer sterowanie optymalne powinno minimalizować koszt tłoczenia i zapewnić utrzymanie ciśnienia gazu na końcu rurociągu na odpowiednio wysokim poziomie a ciśnienia na początku rurociągu na poziomie niższym od wartości granicznej. Komputer realizuje następujące zadania:

1. Co kilka minut wprowadzane są do pamięci informacje o wielkości poboru gazu przez odbiorcę.
2. W oparciu o zapamiętane przebiegi poborów gazu (np. z dwóch ostatnich tygodni), dokonuje się prognozy zapotrzebowania na gaz (np. na całą następną dobę).
3. Przebieg optymalnego ciśnienia wyjściowego ze sprężarki wyznacza się w oparciu o:
 - a) model matematyczny gazociągu (6.35),
 - b) prognozę zapotrzebowania na gaz $z(t)$,
 - c) rozkład ciśnienia $p_0(x)$ i przepływu gazu $q_0(x)$ wzdłuż rurociągu dla chwili czasu od której komputer rozpocznie sterowanie systemem,
 - d) funkcjonal kosztów sterowania,
 - e) ograniczenie od góry na ciśnienie p_g gazu dla początku rurociągu i od dołu na ciśnienie p_d dla końca gazociągu.



Rys. 6.9. Przykład systemu z dynamiczną optymalizacją dystrybucji gazu ziemnego

Wyznaczenie optymalnego sterowania sprowadza się do numerycznego rozwiązania następującego problemu optymalizacji. Obiekt sterowania opisywany jest za pomocą układu równań

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + M \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial x} + = -\eta \frac{q^2}{p} \end{cases} \quad (6.64)$$

z zadanymi warunkami początkowymi

$$\begin{aligned} q(x, 0) &= q_0(x) \\ p(x, 0) &= p_0(x) \end{aligned} \quad \text{dla } x \in [0, 1] \quad (6.65)$$

i warunkiem brzegowym

$$q(1, t) = z(t) \quad \text{dla } t \in [0, T] \quad (6.66)$$

Należy znaleźć sterowanie $p(0, t)$, które spełnia ograniczenia

$$\begin{aligned} p(0, t) &\leq p_g \\ p(1, t) &\geq p_d \end{aligned} \quad (6.67)$$

i minimalizuje funkcjonal

$$K = \int_0^T q(0, t) \left(\frac{p^\alpha(0, t)}{p_w^\alpha} - \beta \right) dt \quad (6.68)$$

gdzie:

p_w — ciśnienie gazu dostarczanego do tłoczni,

β — współczynnik,

α — wykładnik potęgi zależny od rodzaju sprężarki.

Aby znaleźć numeryczne rozwiązanie, sformułowany powyżej problem optymalizacji z nierównościami ograniczeniami (6.67), zamienimy na aproksymujący go problem bez ograniczeń. W tym celu dokonamy modyfikacji wskaźnika (6.68) jakości sterowania przez wprowadzenie zewnętrznych funkcji kar za przekroczenie ograniczeń. Nowy wskaźnik jakości przyjmuje postać

$$Q = K + \int_0^T [\varepsilon(p(0, t) - p_g) \max(0, p(0, t) - p_g) + \kappa(p_d - p(1, t)) \max(0, p_d - p(1, t))] dt \quad (6.69)$$

gdzie ε i κ są stałymi i dodatnimi współczynnikami kary.

Problem znalezienia sterowania $p(0, t)$, które minimalizuje funkcjonal (6.69) z uwzględnieniem równań (6.64), (6.65) i (6.66), można numerycznie rozwiązać posługując się metodą uogólnionych mnożników Lagrange'a. Dla rozważanego problemu, funkcjonal Lagrange'a ma postać

$$\Phi = Q + \int_0^T \int_0^1 \left[f \left(\frac{\partial p}{\partial t} + M \frac{\partial q}{\partial x} \right) + g \left(\frac{\partial p}{\partial x} + M \frac{\partial q}{\partial t} + \eta \frac{q^2}{p} \right) \right] dx dt \quad (6.70)$$

gdzie f i g są mnożnikami Lagrange'a. Są to funkcje zarówno zmiennej przestrzennej x jak i czasu t . Warunkiem koniecznym optymalnego sterowania jest zerowanie się pierwszej różniczki funkcjonału Φ . Różniczka ta ma postać

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & \int_0^T \left[\left(\frac{p^\alpha(0, t)}{p_w^\alpha} - \beta \right) \delta q(0, t) + \frac{\alpha}{p_w^\alpha} p^{\alpha-1}(0, t) \delta p(0, t) + \right. \\ & \left. 2\varepsilon \max(0, p(0, t) - p_g) \delta p(0, t) - 2\eta \max(0, p_d - p(1, t)) \delta p(1, t) \right] dt + \\ & \int_0^T \int_0^1 \left[f \left(\frac{\partial \delta p}{\partial t} + M \frac{\partial \delta q}{\partial x} \right) + g \left(\frac{\partial \delta p}{\partial x} + M \frac{\partial \delta q}{\partial t} + 2\eta M \frac{q}{p} \delta q - \eta M \frac{q^2}{p^2} \delta p \right) \right] dx dt \end{aligned} \quad (6.71)$$

Całkując przez części otrzymujemy tożsamości

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \left(f \frac{\partial \delta p}{\partial t} + M g \frac{\partial \delta q}{\partial t} \right) dx dt \equiv \\ & \equiv \int_0^1 (f(x, T) \delta p(x, T) - f(x, 0) \delta p(x, 0) + M g(x, T) \delta q(x, T) - \\ & \quad M g(x, 0) \delta q(x, 0)) dx - \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \delta p + M \frac{\partial g}{\partial t} \delta q \right) dx dt \end{aligned} \quad (6.72a)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 \left(Mf \frac{\partial \delta q}{\partial x} + g \frac{\partial \delta p}{\partial x} \right) dx dt \equiv \\
& \equiv \int_0^1 (Mf(1,t)\delta q(1,t) - Mf(0,t)\delta q(0,t) + g(1,t)\delta p(1,t) - \\
& \quad g(0,t)\delta p(0,t)) dt - \int_0^T \int_0^1 \left(M \frac{\partial f}{\partial x} \delta q + \frac{\partial g}{\partial x} \delta p \right) dx dt
\end{aligned} \tag{6.72b}$$

Posługując się tożsamościami (6.72a) i (6.72b) otrzymujemy ze wzoru (6.71)

$$\begin{aligned}
\delta \Phi = & \int_0^T \int_0^1 \left[\left(2\eta \frac{q}{p} g - \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) M \delta q - \left(\eta M \frac{q^2}{p^2} g + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \delta p \right] dx dt + \\
& \int_0^T \left\{ \left(\frac{p^\alpha(0,t)}{p_w^\alpha} - \beta - Mf(0,t) \right) \delta q(0,t) + \right. \\
& \left[\alpha q(0,t) \frac{p^{\alpha-1}(0,t)}{p_w^\alpha} + 2\varepsilon \max(0, p(0,t) - p_g) - g(0,t) \right] \delta p(0,t) + \\
& \left. Mf(1,t)\delta q(1,t) + [g(1,t) - 2\kappa \max(0, p_d - p(1,t))] \delta p(1,t) \right\} dt + \\
& \int_0^1 \left(f(x,T)\delta p(x,T) - f(x,0)\delta p(x,0) + Mg(x,T)\delta q(x,T) - Mg(x,0)\delta q(x,0) \right) dx
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Aby różniczka $\delta \Phi$ była zawsze równa zero, musi zachodzić

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} = -\eta M \frac{q^2}{p^2} g \\ \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 2\eta \frac{q}{p} g \end{cases} \tag{6.74}$$

$$f(0,t) = \left(\frac{p^\alpha(0,t)}{p_w^\alpha} - \beta \right) M^{-1} \tag{6.75}$$

$$g(1,t) = 2\kappa \max(0, p_d - p(1,t))$$

$$f(x,T) = 0 \quad g(x,T) = 0 \tag{6.76}$$

$$\alpha q(0,t) \frac{p^{\alpha-1}(0,t)}{p_w^\alpha} + 2\varepsilon \max(0, p(0,t) - p_g) - g(0,t) = 0 \tag{6.77}$$

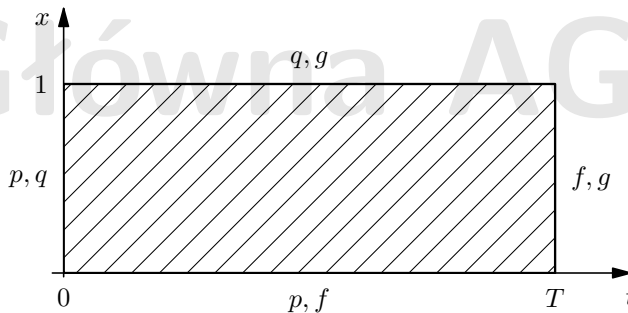
Sterowanie optymalne spełnia warunki graniczne (6.65), (6.66) zatem

$$\begin{cases} \delta q(x, 0) = 0 \\ \delta p(x, 0) = 0 \\ \delta q(1, t) = 0 \end{cases} \quad (6.78)$$

Zespół równań (6.74), (6.75), (6.76), (6.77) razem z (6.64), (6.65), (6.66) tworzy układ, którego rozwiązanie jest sterowaniem minimalizującym funkcjonal (6.70). Sterowanie to można znaleźć numerycznie. Równanie (6.74) nazywa się równaniem sprzężonym do równania stanu (6.64). Równania (6.75) są warunkami brzegowymi a (6.76) są warunkami końcowymi dla równania sprzężonego. Rozmieszczenie warunków granicznych przedstawione jest na rysunku 6.10. Z warunku (6.77) można wyznaczyć gradient

$$d(t) = \alpha q(0, t) \frac{p^{\alpha-1}(0, t)}{p_w^\alpha} + 2\varepsilon \max(0, p(0, t) - p_g) - g(0, t) \quad (6.79)$$

czyli kierunek poprawy sterowania dla procedur iteracyjnych.



Rys. 6.10. Rozmieszczenie warunków granicznych przy rozwiązywaniu problemu optymalizacji

6.2.8. Numeryczne rozwiązanie problemu optymalizacji

Uwzględniając warunki graniczne (6.65), (6.66) można rozwiązać równanie stanu (6.64) dla dowolnego sterowania $p(0, t)$. Z kolei znając ciśnienia i przepływy gazu oraz warunki graniczne (6.75), (6.76) można rozwiązać „wstecz” równanie (6.74). Postępowanie takie prowadzi się dla sterowania $p(0, t)$, które jest arbitralnie przyjęte w pierwszej iteracji, lub bliskie optymalnemu w następnych iteracjach. Po rozwiązaniu równania sprzężonego można obliczyć gradient (6.79), a następnie wyznaczyć lepsze rozwiązanie posługując się wzorem

$$p_{i+1}(0, t) = p_i(0, t) - \tau d_i(t) \quad (6.80)$$

gdzie:

$d_i(t)$ — kierunek poprawy sterowania w i -tej iteracji obliczony zgodnie ze wzorem (6.79),

τ — stała dobrana tak, aby uzyskać najlepsze sterowanie przy poszukiwaniu w kierunku (6.79).

Równanie sprzężone (6.74) jest równaniem typu hiperbolicznego a jego charakterystyki są takie same jak charakterystyki równania stanu (6.64). Przedstawione powyżej uwagi, na temat problemów granicznych i obszaru jednoznacznego rozwiązania, są prawdziwe również dla równania sprzężonego. Jest ono liniowe a jego niestacjonarność wynika z nieliniowości równania stanu.

Posługując się oznaczeniami przedstawionymi na rysunku 6.8, zagadnienie dyskretnej aproksymacji polega na obliczeniu wartości funkcji f i g dla punktów węzłowych, gdy dane są wartości funkcji w punktach $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ i wartości funkcji f w punktach $\{I, 1\}$ oraz funkcji g w punktach $\{V, 5\}$. Postępując identycznie jak dla równania stanu, można dla równania sprzężonego (6.74) napisać równania różnicowe

$$\begin{aligned} f_6 - f_T + g_T - g_6 &= 0,5\eta \left(2 + M \frac{q_{6T}}{p_{6T}} \right) (t_T - t_6)(g_6 + g_T) \frac{q_{6T}}{p_{6T}} \\ f_T - f_7 + g_T - g_7 &= 0,5\eta \left(2 - M \frac{q_{7T}}{p_{7T}} \right) (t_T - t_7)(g_7 + g_T) \frac{q_{7T}}{p_{7T}} \end{aligned} \quad (6.81)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} q_{6T} &= \frac{q_6 + q_T}{2} & p_{6T} &= \frac{p_6 + p_T}{2} \\ q_{7T} &= \frac{q_7 + q_T}{2} & p_{7T} &= \frac{p_7 + p_T}{2} \end{aligned}$$

Algorytm rozwiązania równania sprzężonego (6.74) z równoczesnym wyliczaniem gradientu sterowania ma zatem postać:

1. Zgodnie z warunkami końcowymi (6.76) przyjąć zerowe wartości funkcji f i g w punktach $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ (oznaczenia zgodne z rysunkiem 6.8).
2. W oparciu o przyjętą gęstość dyskretyzacji obliczyć $\Delta t = t_N - t_1 = -0,5/(n-1)$ gdzie n jest ilością punktów aproksymacji gazociągu.
3. Dla punktu 6 obliczyć i zapamiętać gradient

$$d_6 = \alpha q_6 \frac{p_6^{\alpha-1}}{p_w^\alpha} + 2\varepsilon \max(0, p_6 - p_g) \quad (6.82)$$

4. Obliczyć wartości g oraz f w punkcie T , ze wzorów otrzymanych z równania różnicowego (6.81)

$$g_T = \frac{f_7 - f_6 + g_6 + g_7 + 0,5\eta [g_6\nu_{6T}(2 + M\nu_{6T}) + g_7\nu_{7T}(2 - M\nu_{7T})] \Delta t}{2 - 0,5\eta [\nu_{6T}(2 + M\nu_{6T}) + \nu_{7T}(2 - M\nu_{7T})] \Delta t} \quad (6.83)$$

$$f_T = f_7 + g_7 - g_T + 0,5\eta\nu_{7T}(2 - M\nu_{7T})(g_7 + g_T)\Delta t$$

gdzie:

$$\nu_{6T} = \frac{q_6 + q_T}{p_6 + p_T} \quad \text{i} \quad \nu_{7T} = \frac{q_7 + q_T}{p_7 + p_T}.$$

Podobne obliczenia przeprowadzić dla punktów $\{U, W, Z\}$.

5. Wyliczyć f_I z warunku brzegowego (6.75), a wartość g_I z równania analogicznego do drugiego równania (6.81), czyli

$$f_I = \left(\frac{p_I^\alpha}{p_w^\alpha} - \beta \right) M^{-1}$$

$$g_I = \frac{f_T - f_I + g_T \left[1 + 0,5\eta \frac{q_I + q_T}{p_I + p_T} \left(2 - M \frac{q_I + q_T}{p_I + p_T} \right) \Delta t \right]}{1 - 0,5\eta \frac{q_I + q_T}{p_I + p_T} \left(2 - M \frac{q_I + q_T}{p_I + p_T} \right) \Delta t} \quad (6.84)$$

6. Obliczyć kolejno parametry punktów $\{II, III, IV\}$ ze wzorów analogicznych do (6.83).
7. Obliczyć wartość g_V z warunku brzegowego (6.75) oraz f_V z pierwszego równania (6.81), czyli

$$g_V = 2\eta \max(0, p_d - p_V)$$

$$f_V = f_Z + g_V - g_Z - 0,5\eta \frac{q_Z + q_V}{p_Z + p_V} \left(2 + M \frac{q_Z + q_V}{p_Z + p_V} \right) (g_Z + g_V) \Delta t \quad (6.85)$$

8. Obliczyć i zapamiętać gradient sterowania

$$d_I = \alpha q_I \frac{p_I^{\alpha-1}}{p_w^\alpha} + 2\varepsilon \max(0, p_I - p_g) \quad (6.86)$$

9. W podobny sposób prowadzić obliczenia od punktu 4 tak długo, aż zostanie obliczony gradient we wszystkich punktach leżących na odcinku $[0, T]$.

Trzeba znać wartości ciśnień i przepływów w węzłach siatki aproksymującej, aby rozwiązać równanie sprzężone. Zatem należy uprzednio rozwiązać „w przód” równania stanu, zapamiętując przy tym wartości ciśnień i przepływów w węzłach siatki aproksymującej zbiór $\Psi = [0, 1] \times [0, T]$.

Równanie stanu (6.64) można rozwiązać „w przód”, ponieważ spełnia warunki stabilności. Macierz dyssypacji równania sprzężonego (6.74) ma wartości własne $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2\eta q/p$, co oznacza stabilność przy rozwiązywaniu „wstecz” równania sprzężonego.

6.3. Membrana kołowa

Podany przez Eulera model matematyczny drgań membrany kołowej ma postać hiperbolicznego równania różniczkowego cząstkowego

$$\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (6.87)$$

gdzie osiowe odkształcenie membrany w jest funkcją czasu t i współrzędnych biegunowych: odległości od środka membrany r i kąta φ . Współczynnik s jest prędkością propagacji fal sprężystych. Na ogół zakłada się, że membrana jest sztywno zamocowana na obwodzie, co prowadzi do zerowych warunków brzegowych. Rozwiązanie równania różniczkowego (6.87) przedstawia niegasnące drgania membrany jako wynik niezerowych warunków początkowych. Ustalone i symetryczne drgania membrany można modelować jeżeli odpowiednio dobierze się warunki początkowe. Równanie (6.87) jest modelem matematycznym niegasnących drgań, ponieważ nie ma w nim członu reprezentującego rozpraszanie energii.

Posługując się klasyczną metodą rozdzielania zmiennych, otrzymuje się relację dla prędkości propagacji fal w membranie

$$s = \frac{\omega_i R}{p_i} \quad (6.88)$$

gdzie:

- ω_i — pulsacje rezonansowe membrany,
- R — promień membrany kołowej,
- p_i — pierwiastki funkcji Bessela.

Znając prędkość fal można obliczyć siłę naciągu membrany

$$F = qds^2 \quad (6.89)$$

gdzie:

- q [kg/m³] — masa właściwa materiału, z którego membrana została wykonana,
- d [m] — grubość membrany.

Te dobrze znane zależności umożliwiając obliczenie F trudno mierzalnej siły naciągu membrany. Na ogół udaje się zmierzyć kilka pulsacji rezonansowych. Dla każdej z nich można obliczyć za pomocą (6.88) estymatę prędkości propagacji fal. Różnice między tymi estymatami występują na ogół już na drugim miejscu znaczącym. To usprawiedliwia weryfikację przydatności nieco innego modelu matematycznego, który uwzględnia zjawisko rozpraszania energii.

Zakładając symetrię osiową sił odkształcających membranę i wprowadzając do równania (6.87) człon uwzględniający rozpraszanie energii, otrzymujemy niejednorodne równanie różniczkowe cząstkowe typu hiperbolicznego

$$\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - a \frac{\partial w}{\partial r} = u \quad (6.90)$$

gdzie:

- w [m] — osiowe odkształcenie membrany,
- s [m/s] — prędkość fal biegnących wzdłuż promienia membrany,
- a [m/s²] — dodatni współczynnik rozpraszania energii,
- u [m⁻¹] — reprezentuje wymuszenia drgań membrany i jest funkcją dwóch zmiennych: czasu t [s] i promienia membrany r [m].

Aby uzyskać jednoznaczne rozwiązanie równania (6.90) założymy warunki początkowe

$$w(r, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (6.91)$$

i warunki brzegowe

$$w(R, t) = 0 \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{r=0} = 0 \quad (6.92)$$

Pierwszy warunek brzegowy (6.92) oznacza, że membrana jest sztywno zamocowana na obwodzie a drugi warunek brzegowy wynika z osiowej symetrii odkształceń.

Posługując się klasyczną metodą zapiszemy rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego (6.90), (6.91), (6.92) w postaci nieskończonego szeregu

$$w(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} R_i(r) T_i(t) \quad (6.93)$$

Funkcja wymuszająca drgania membrany o pulsacji ω może również być przedstawiona jako nieskończony szereg z rozdzielonymi zmiennymi

$$u(r, t) = \sin(\omega t) \sum_{i=1}^{\infty} c_i R_i(r) \quad (6.94)$$

gdzie c_i są stałymi współczynnikami.

Obliczając pochodne cząstkowe funkcji (6.93) i podstawiając je do (6.90) otrzymujemy

$$\frac{1}{s^2} \frac{T_i''}{T_i} + a \frac{T_i'}{T_i} - \frac{c_i}{T_i} \sin(\omega t) = \frac{R_i''}{R_i} + \frac{1}{r} \frac{R_i'}{R_i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots \quad (6.95)$$

gdzie górne indeksy oznaczają różniczkowanie ze względu na czas po lewej stronie równania (6.95) i różniczkowanie ze względu na zmienną przestrzenną po prawej stronie. Równanie (6.95) jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenia po jego obu stronach nie zależą od zmiennych t i r . Tę stałą wartość oznaczymy przez $-k_i^2$, a otrzymany układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych zapiszemy w postaci

$$R_i'' + \frac{1}{r} R_i' + k_i^2 R_i = 0 \quad (6.96)$$

$$\frac{1}{s^2} T_i'' + a T_i' + k_i^2 T_i = c_i \sin(\omega t) \quad (6.97)$$

Warunki początkowe

$$R_i(R) = 0 \quad R_i'(R) = 0 \quad (6.98)$$

dla równania różniczkowego (6.96) otrzymujemy z warunków brzegowych (6.92). W ten sposób wprowadzamy ograniczenia na funkcje bazowe R_i , dzięki czemu stają się one jednoznaczne. Dla równania różniczkowego (6.97) warunki początkowe

$$T_i(0) = 0 \quad T_i'(0) = 0 \quad (6.99)$$

otrzymujemy z warunków początkowych (6.91).

Rozwiązaniem równania różniczkowego (6.96) jest funkcja Bessela pierwszego rodzaju i zerowego rzędu. Funkcja ta może być zdefiniowana za pomocą wzoru

$$R_i(r) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{k_i^{2j}}{j! j!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2j} \quad (6.100)$$

lub w formie równoważnej

$$R_i(r) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (k_i r)^{2j} \quad (6.101)$$

przy czym

$$b_0 = 1 \quad b_{j+1} = -\frac{b_j}{4j^2} \quad (6.102)$$

Z (6.100) widać, że drugi z warunków (6.98) jest zawsze spełniony a z (6.101) wynika, że pierwszy z warunków (6.98) jest równoważny

$$k_i = \frac{p_i}{R} \quad (6.103)$$

gdzie p_i są pierwiastkami funkcji Bessela (6.101).

Rozwiązanie równania różniczkowego (6.97) z warunkami początkowymi (6.99) ma postać

$$T_i(t) = A_i e^{-\gamma t} \sin(\omega_i t + \alpha_i) + B_i \sin(\omega t + \beta_i) \quad (6.104)$$

Pulsacja zanikających drgań wynosi

$$\omega_i = s \sqrt{k_i^2 - \frac{a^2 s^2}{4}} \quad (6.105)$$

Wprowadzając dodatkową stałą

$$d_i = \sqrt{\left(k_i^2 - \frac{\omega^2}{s^2}\right)^2 + a^2 \omega^2} \quad (6.106)$$

otrzymujemy amplitudę drgań wymuszonych

$$B_i = \frac{c_i}{d_i} \quad (6.107)$$

Przesunięcie fazowe tych drgań wynosi

$$\beta_i = - \arcsin \frac{a\omega}{d_i} \quad (6.108)$$

Początkowa amplituda drgań zanikających wynosi

$$A_i = \frac{\omega}{\omega_i} B_i \quad (6.109)$$

Przesunięcie fazy dla tych drgań dane jest wzorem

$$\alpha_i = \arcsin \frac{a\omega_i}{d_i} \quad (6.110)$$

a współczynnik tłumienia drgań

$$\gamma = \frac{as^2}{2} \quad (6.111)$$

Największa amplituda drgań ustalonych występuje dla pulsacji rezonansowych

$$\rho_i = s \sqrt{k_i^2 - \frac{a^2 s^2}{2}} \quad (6.112)$$

i wynosi

$$B_i = \frac{c_i}{a\omega_i} \quad (6.113)$$

gdzie ω_i jest zdefiniowane przez (6.105). Aby mogły wystąpić i -te drgania rezonansowe, współczynnik rozpraszania energii musi być wystarczająco mały, tzn.

$$a < \frac{\sqrt{2}k_i}{s} \quad (6.114)$$

Wzór, który wiąże pulsacje rezonansowe z parametrami membrany otrzymuje się z (6.103) i (6.112)

$$\rho_i^2 = s^2 \left[\left(\frac{p_i}{R} \right)^2 - \frac{a^2 s^2}{2} \right] \quad (6.115)$$

Oznacza to, że pulsacje rezonansowe są funkcjami trzech parametrów: prędkości fal s , współczynnika rozproszenia energii a i promienia membrany R . Zakładając, że zmierzono N pulsacji rezonansowych, z (6.115) otrzymujemy układ N równań z trzema niewiadomymi: s , a i R . Jakobian dla tego układu równań ma postać

$$J = \frac{4as^7}{R^3} \begin{vmatrix} p_1^2/R^2 - a^2 s^2 & 1 & p_1^2 \\ p_2^2/R^2 - a^2 s^2 & 1 & p_2^2 \\ \dots\dots\dots \\ p_N^2/R^2 - a^2 s^2 & 1 & p_N^2 \end{vmatrix} \quad (6.116)$$

Tylko dwie kolumny wyznacznika (6.116) są liniowo niezależne, zatem tylko dwa parametry można wyliczyć w oparciu o zmierzone pulsacje rezonansowe. Ponieważ promień membrany jest łatwy do zmierzenia, ze wzorów (6.115) wyznaczmy prędkość fal s i współczynnik rozpraszania energii a .

Z dwóch dowolnych równań (6.115) otrzymujemy

$$s_{ij} = R \sqrt{\frac{\rho_i^2 - \rho_j^2}{p_i^2 - p_j^2}} \quad \text{dla } 1 \leq i, j \leq N, \quad i \neq j \quad (6.117)$$

gdzie s_{ij} jest jedną z estymat prędkości fal. Dla N pulsacji rezonansowych, wartość średnia wynosi

$$s = \frac{2(N-2)!}{N!} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N s_{ij} \quad (6.118)$$

Posługując się wzorem (6.89) można następnie wyznaczyć siłę naciągu membrany.

Ze wzorów (6.115) otrzymujemy wzór na estymaty współczynników rozpraszania energii

$$a_i = \frac{\sqrt{2}}{s} \sqrt{\frac{p_i^2}{R^2} - \frac{\rho_i^2}{s^2}} \quad (6.119)$$

z których ostatecznie obliczamy wartość średnią

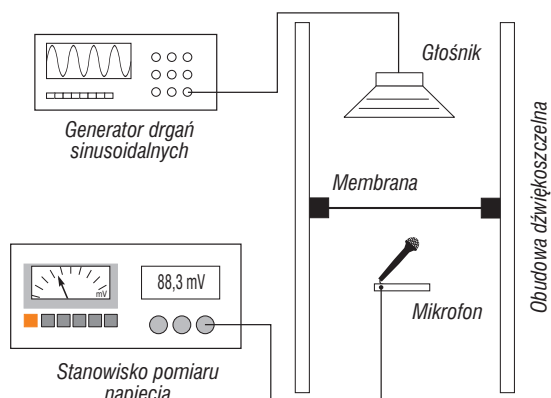
$$a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \quad (6.120)$$

Jeżeli znane są amplitudy drgań rezonansowych B_i środka membrany, można obliczyć amplitudy

$$c_i = B_i a s \sqrt{\frac{p_i^2}{R^2} - \frac{a^2 s^2}{4}} \quad (6.121)$$

wymuszające drgania membrany.

Na rysunku 6.11 przedstawiony jest schemat stanowiska do pomiaru częstotliwości rezonansowych membran kołowych. Równomiernie napięta membrana znajduje się pomiędzy głośnikiem a mikrofonem. Głośnik jest zasilany z generatora drgań sinusoidalnych. Membrana tłumi dźwięki przemieszczające się od głośnika do mikrofonu. Tłumienie to jest wyraźnie najmniejsze dla częstotliwości rezonansowych membrany a wtedy jej drgania są zdecydowanie największe. Pomiar częstotliwości rezonansowych polega na znalezieniu takich drgań generatora, dla których sygnały otrzymane z mikrofonu mają lokalnie największe moce. Im częstotliwość rezonansowa jest większa tym trudniej jest ją wyznaczyć, ponieważ ekstrema mocy sygnału otrzymanego z mikrofonu są coraz mniej wyraźne. Na ogół łatwo udaje się wyznaczyć pierwszych pięć częstotliwości rezonansowych. W tabeli 6.1 przedstawione są wyniki pomiarów przeprowadzonych dla trzech membran, jedna z nich była



Rys. 6.11. Stanowisko do pomiaru częstotliwości rezonansowych membran

wykonana z tantalu a dwie ze stali niklowo-chromowej. Pierwsze dwie membrany miały średnice 55,6 [mm] a trzecia membrana miała średnicę 80 [mm]. Amplitudy drgań trzeciej membrany były największe i dlatego można było je zmierzyć. Pomiar wykonano za pomocą śruby mikrometrycznej, która dotykając najpierw nieruchomej a następnie drgającej membrany zamykała obwód z prądem elektrycznym. Przy drgającej membranie ustawiano śrubę mikrometryczną w takim położeniu, aby prąd elektryczny przepływał tylko przy maksymalnych wychyleniach membrany. Różnica położenia śruby mikrometrycznej wyznaczała amplitudę drgań rezonansowych membrany.

Tabela 6.1
Wyniki pomiarów

Nr membrany	1	2	3
Materiał	tantal	stal	stal
Promień [mm]	27,8	27,8	40
Grubość [mm]	0,025	0,127	0,127

Pierwiastki funkcji Bessela	Częstotliwości rezonansowe [Hz]			Amplituda [mm]
2,40483	434	1043	695	1,25
5,52008	1050	2594	1940	0,54
8,65373	1658	4115	3130	0,34
11,79153	2264	5630	4285	0,25
14,93092	2870	7141	5428	0,19

Zmierzone pulsacje rezonansowe (równe częstotliwościom rezonansowym pomnożonym przez 2π) podstawiono do wzoru (6.88), otrzymując estymaty prędkości propagacji fal zgodnie z modelem Eulera (6.87). W tabeli 6.2 przedstawiono pięć estymat, ich wartości średnie i wariancje dla każdej z trzech membran. Dane eksperymental-

ne podstawiono również do (6.117), otrzymując estymaty prędkości propagacji fal. Wyprowadzono je z modelu (6.90) uwzględniającego rozpraszanie energii. Wyniki obliczeń, wartości średnie estymat i wariancje są przedstawione w tabeli 6.3. Są tam również, obliczone w oparciu o wzór (6.119), wartości sił obwodowych napinające membrany. Do obliczeń przyjęta została masa właściwa tantalu $q = 16,6 \text{ [g/cm}^3\text{]}$ a dla stali niklowo-chromowej $q = 8,045 \text{ [g/cm}^3\text{]}$.

Tabela 6.2

Prędkości fal [m/s] obliczone w oparciu o model Eulera

Nr częstotliwości rezonansowej	Nr membrany		
	1	2	3
1	31,52	75,76	72,63
2	33,23	82,08	88,33
3	33,47	83,06	90,90
4	33,54	83,40	91,33
5	33,58	83,54	91,37
Średnia	33,07	81,57	91,37
Wariancja	0,78	2,95	7,23

Tabela 6.3

Prędkości fal [m/s] i siły obwodowe [N/m] obliczone z modelu uwzględniającego rozpraszanie energii

Nr estymaty	Nr membrany					
	1		2		3	
	prędkość	siła	prędkość	siła	prędkość	siła
1	33,61	469	83,49	7120	91,62	8580
2	33,62	469	83,64	7150	92,27	8700
3	33,62	469	83,72	7160	92,06	8660
4	33,63	469	83,74	7160	91,81	8610
5	33,63	469	83,72	7160	92,63	8770
6	33,62	469	83,77	7170	92,16	8680
7	33,63	469	83,77	7170	91,84	8620
8	33,62	469	83,79	7170	91,83	8620
9	33,63	469	83,78	7170	91,60	8570
10	33,64	470	83,77	7170	91,43	8540
Średnia	33,63	469	83,72	7160	91,93	8640
Wariancja	0,01	0,00	0,09	15	0,34	62

W tabeli 6.4 przedstawione są wartości współczynników rozpraszania energii obliczone w oparciu o wzór (6.120). Obliczenia przeprowadzono dla pięciu częstotliwości rezonansowych. Podstawiając średnie wartości prędkości propagacji fal s i średnie wartości współczynników a rozpraszania energii do wzoru (6.111), obliczone zostały

współczynniki tłumienia dla trzech membran

$$\gamma_1 = 718[\text{s}^{-1}] \quad \gamma_2 = 2215[\text{s}^{-1}] \quad \gamma_3 = 2362[\text{s}^{-1}] \quad (6.122)$$

Tabela 6.4

Wartości współczynników a_i rozpraszania energii [s/m^2]

Nr częstotliwości rezonansowej	Nr membrany		
	1	2	3
1	1,27	0,622	0,567
2	1,29	0,660	0,588
3	1,27	0,659	0,495
4	1,29	0,626	0,514
5	1,24	0,594	0,631
Średnia	1,27	0,632	0,559
Wariancja	0,02	0,018	0,035

Tabela 6.5

Amplitudy c_i [m^{-1}] wymuszające drgania membrany

Nr częstotliwości rezonansowej	Amplituda
1	0,349
2	0,376
3	0,375
4	0,377
5	0,364

Ponieważ dla trzeciej membrany zmierzono również amplitudy drgań (patrz tabela 6.1), można było obliczyć za pomocą wzoru (6.121) amplitudy wymuszające drgania membrany. Wyniki tych obliczeń zostały przedstawione w tabeli 6.5.

Do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego, często używana jest metoda różnicowa zwana „skokiem żaby” (ang. leap frog). Za jej pomocą można również znaleźć aproksymację rozwiązania równania (6.90). Przy odpowiednim rozmieszczeniu węzłów siatki dyskretyzującej obszar jednoznacznie rozwiązania równania (6.90), można uwzględnić „falowy charakter” zachodzących zjawisk. Drugą korzystną właściwością omawianej metody jest prostota algorytmu obliczeniowego. Dzięki tym zaletom metoda zwana „skokiem żaby” jest często wykorzystywana do numerycznego rozwiązywania równań hiperbolicznych.

Dzieląc promień membrany na N równych odcinków, definiujemy rozłożenie węzłów w dyskretnej czasoprzestrzeni

$$\Psi_{\Delta} = \left\{ (r_i, t_j) : \begin{aligned} r_i &= R - (i-1)h; & t_j &= (j-2)h/c; & h &= \frac{2R}{2N-1}; \\ j &= 1, 2, \dots, \frac{Tc}{h}; & i &= 1, 2, \dots, N+1 \end{aligned} \right\} \quad (6.123)$$

gdzie T oznacza czas końcowy modelowania. Węzły Ψ_Δ są tak rozmieszczone, że ograniczoną wartość ma współczynnik $1/r$ w równaniu (6.90), tzn. $r_{N+1} \neq 0$. Dzięki temu współczynniki w równaniach różnicowych są również ograniczone. Pochodne w równaniu (6.90) są aproksymowane przez ilorazy różnicowe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &\approx \frac{c}{2h} (w_{j+1}^i - w_{j-1}^i) & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &\approx \frac{c^2}{h^2} (w_{j+1}^i - 2w_j^i + w_{j-1}^i) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &\approx \frac{1}{2h} (w_j^{i-1} - w_j^{i+1}) & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &\approx \frac{1}{h^2} (w_j^{i-1} - 2w_j^i + w_j^{i+1}) \end{aligned} \quad (6.124)$$

Dla węzłów wewnętrznych zbioru (6.123), przybliżone wartości rozwiązania równania różniczkowego (6.90) obliczane są za pomocą wzorów

$$w_{j+1}^i = \beta_1 w_{j-1}^i + \beta_2 w_j^{i+1} + \beta_3 w_j^{i-1} + \beta_4 u \left(R - (i-1)h, \frac{kh}{c} \right) \quad (6.125)$$

gdzie wartości współczynników wylicza się ze wzorów

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \left(\frac{ac}{2h} + \frac{1}{h^2} \right)^{-1} & \beta_1 &= \left(\frac{ac}{2h} - \frac{1}{h^2} \right) \beta_4 \\ \beta_2 &= \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h[R - (i-1)h]} \right) \beta_4 & \beta_3 &= \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h[R - (i-1)h]} \right) \beta_4 \end{aligned} \quad (6.126)$$

Dla węzłów brzegowych ze wzoru (6.92) otrzymujemy

$$w_j^1 = 0 \quad w_j^{N+1} = w_j^N \quad \text{gdzie } j = 3, 4, \dots \quad (6.127)$$

Metoda „skoku żaby” jest trójwarstwowym schematem obliczeniowym. Dlatego, na początku obliczeń trzeba wstawić

$$w_1^i = w_2^i = 0 \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, N+1 \quad (6.128)$$

aby uwzględnić warunki początkowe (6.91).

Gęstość dyskretyzacji

$$\Delta r = \frac{2R}{2N-1} \quad \Delta t = \frac{2R}{c(2N-1)} \quad (6.129)$$

wynika z (6.123). Ilość wszystkich węzłów wynosi

$$I = (2N^2 + N - 1) \frac{Tc}{2R} \quad (6.130)$$

Oznacza to, że czas obliczeń znacznie wzrasta dla dużych N . Aby otrzymać poprawne wyniki komputerowego modelowania drgań membrany z częstotliwością f [Hz], wystarczy przyjąć

$$N \approx 40 \frac{Rf}{c} \quad (6.131)$$

W tabeli 6.2 przedstawione są wyniki obliczeń z wykorzystaniem klasycznego modelu matematycznego bez dyssypacji. Estymaty prędkości propagacji fal zostały otrzymane dla każdej częstotliwości oddzielnie. Różnice między nimi są dość znaczne, szczególnie dla niskich częstotliwości. Odchyłki wynoszą od kilku procent dla pierwszej i drugiej membrany aż do 16% dla membrany trzeciej. W odróżnieniu od tego estymaty prędkości propagacji fal obliczone w oparciu o model uwzględniający rozpraszanie energii (tabela 6.3) mają małe odchyłki (mniejsze niż 1%). Wartości średnie prędkości fal obliczone w oparciu o model z dyssypacją są większe niż wartości średnie obliczone w oparciu o model bez dyssypacji. Różnice dochodzą nawet do kilku procent.

Współczynniki rozpraszania energii są dodatkowymi parametrami w modelu matematycznym, umożliwiając lepsze dopasowanie modelu do danych eksperymentalnych. Możliwość taka istnieje zawsze, nawet gdy nie ma dla niej fizycznego uzasadnienia. Musimy jednak pamiętać, że równanie (6.119) może być wykorzystywane tylko wtedy, gdy $k_i \geq \omega_i/c$.

Współczynniki rozpraszania energii dla membrany tantalowej są dwa razy większe od współczynników dla membran stalowych. Różnice pomiędzy estymatami współczynników dyssypacji dla membrany tantalowej są niewielkie. Dla membran stalowych odchyłki są większe, przy czym największa różnica pomiędzy wartością średnią i estymatą wystąpiła dla piątej częstotliwości trzeciej membrany. Odchyłka ta wynosi 13%.

Amplitudy sinusoidalnych napięć elektrycznych na głośniku mają stałe wartości dla wszystkich częstotliwości. Z tego powodu amplitudy drgań wymuszonych, prezentowane w tabeli 6.5, mało różnią się między sobą.

Posługiwanie się modelem matematycznym membrany uwzględniającym rozpraszanie energii ma jeszcze jedną dodatkową zaletę. W przypadku obliczeń numerycznych otrzymuje się równania różnicowe, które mają lepsze własności ze względu na stabilność.

Literatura

- [1] Ames W. F.: *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*. Academic Press, 1965
- [2] Biała S.: *A Necessary and Sufficient Condition for the Stability of Convex Combinations of Stable Polynomials or Matrices*. Bull. Pol. Acad. Scien., tom 33, str. 473–480, 1985
- [3] Biała S., Ziółko M.: *Robust D-Symmetrizable Matrices* (w recenzji)
- [4] Beylkin G., *On the Representation of Operators in Bases of Compactly Supported Wavelets*. SIAM J. Numer. Anal., tom 6, nr 6, str. 1716–1740, 1992
- [5] De Boor C.: *A Practical Guide to Splines*. Berlin, Springer-Verlag 1978
- [6] De Boor C., Hölling K., Riemenschneider S.: *Box Splines*. Springer-Verlag, 1993
- [7] Bojanov B. D., Hakopian H. A., Sahakian A. A.: *Spline Functions and Multivariate Interpolations*. Kluwer Academic Publishers, 1993
- [8] Brezzi F., Fortin M.: *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1991
- [9] Chen M. Q., C. Hwang C. and Y. Shin Y.: *The Computation of Wavelet-Galerkin Approximation on a Bounded Interval*. Inter. J. Numer. Meth. Eng., tom 39, str. 2921–2944, 1996
- [10] Chiavassa G., Liandrat J.: *On the Effective Construction of Compactly Supported Wavelets Satisfying Homogeneous Boundary Conditions on the Interval*. Appl. Comput. Harmon. Anal., tom 4, nr 1, str. 62–72, 1997
- [11] Chui C. K.: *An Introduction to Wavelets*. Academic Press Inc. 1992
- [12] Cohen N., Lewkowicz I.: *A necessary and sufficient criterion for the stability of a convex set of matrices*. IEEE Trans. Automat. Contr., tom AC–38, str. 611–615, 1993
- [13] Courant R.: *Methods of Mathematical Physics*. Tom II. *Partial Differential Equations*. Interscience Publishers, 1962
- [14] Daubechies I.: *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992
- [15] Dierckx P.: *Curve and Surface Fitting with Splines*. Oxford Science Publications, 1993
- [16] Doyle J. F.: *Wave Propagation in Structures, an FFT-Based Spectral Analysis Methodology*. Berlin, Springer-Verlag 1989
- [17] Edenhofer J., Schmitz G.: *An Implicit Method of Characteristics for the Solution of Hyperbolic Initial-Boundary-Value Problems and Its Convergence*. Computing, nr 26, str. 257–264, 1981
- [18] Egorov Y. V., Shubin M. A.: *Partial Differential Equations*. Berlin, Springer-Verlag 1992
- [19] Evans L. C.: *Partial Differential Equations*. AMS, 1998
- [20] Fiedler M., Johnson C. R., Markham T. L., Neumann M.: *A Trace Inequality for M-Matrices and the Symmetrizable of a Real Matrix by a Positive Diagonal Matrix*. Linear Algebra and Its Applications, nr 71, str. 81–94, 1985

- [21] Friedrichs K. O.: *Symmetric Hyperbolic Linear Differential Equations*. Comm. Pure Appl. Mat., tom VII, str. 345–392, 1954
- [22] Godlewski E., Raviart P. A.: *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer, 1996
- [23] Gomes S. M., Cortina E.: *Convergence Estimates for the Wavelet Galerkin Method*. SIAM J. Numer. Anal., tom 33, nr 1, str. 149–161, 1996
- [24] Gunzburger M. D.: *On the Stability of Galerkin Methods for Initial-Boundary Value Problem for Hyperbolic Systems*. Math. Comp., nr 31, str. 661–675, 1977
- [25] Hörmander L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*. Springer-Verlag, 1990
- [26] Hulsen M. A.: *The Discontinuous Galerkin Method with Explicit Runge-Kutta Time Integration for Hyperbolic and Parabolic Systems with Source Terms*. Faculteit der Werktuigbouwkunde en Maritieme Techniek, 1991
- [27] Il'in W. P., Kuznecow Ju. I.: *Trechdiagonal'nyje Matricy i Ich Prilozenija*. Nauka, 1985
- [28] Ioffe L., Pinter S. S.: *Applying Asynchronous Parallel Characteristic Methods for Solving Systems of Hyperbolic PDEs*. J. Sci. Comput., nr 8, str. 195–218, 1993
- [29] Jacyno Z.: *Matematyczne modele procesów jednostkowych przepływu i ciśnienia w przypadku rurociągu o parametrach rozłożonych*. Archiwum Automatyki i Telekomunikacji, tom 13, nr 3, str. 467–491, 1968
- [30] Jameson A., Kreindler E., Lancaster P.: *Symmetric, Positive Semidefinite, and Positive Definite Real Solution of $AX = XA^T$ and $AX = YB$* . Linear Algebra and Its Applications, nr 160, str. 189–215, 1992
- [31] Johnson C.: *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, 1995
- [32] Johnson C. R., Dias da Silva J. A.: *Symmetric Matrices Associated with a Nonnegative Matrix*. Circuits Systems Signal Process, nr 9, str. 171–180, 1990
- [33] Keel L. H., Bhattacharyya S. P.: *Robust Stability of Interval Matrices*. International Journal of Control, tom 62, nr 6, str. 1491–1506, 1995
- [34] Khalil H. K.: *On the Existence of Positive Diagonal P Such That $PA + A^T P < 0$* . IEEE Trans. Automat. Contr., tom AC-27, str. 181–184, 1982
- [35] Lakshmikantham V., Leela S.: *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*. Pergamon Press, 1981
- [36] Lamb G. L. Jr.: *Introductory Applications of Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons Inc., 1995
- [37] Logan J. D.: *Nonlinear Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons Inc., 1994
- [38] Marcinkowska H.: *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*. Warszawa, PWN 1972
- [39] Michajłow W. P.: *Differencjalnyje Urownienia w Czastnych Proizwodnych*. Nauka, 1976
- [40] Michelsen M. L., Villadsen J.: *A Convenient Computational Procedure of Collocation Constants*. Chem. Eng. J., tom 4, str. 64–68, 1972
- [41] Michlin S. G., Smolicki C. L.: *Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*. Warszawa, PWN 1972
- [42] Parker K. H., Jones C. J. H.: *Forward and Backward Running Waves in the Arteries: Analysis Using the Method of Characteristics*. Trans. ASME J. Biomech. Eng., nr 112, str. 322–326, 1990

- [43] Pelczar A., Szarski J.: *Wstęp do teorii równań różniczkowych*. Warszawa, PWN 1987
- [44] Qian R. X., DeMarco C. L.: *An Approach to Robust Stability of Matrix Polytopes through Compositive Homogeneous Polynomials*. IEEE Trans. Automat. Contr., tom AC-37, str. 848–852, 1992
- [45] Quarteroni A., Valli A.: *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1994
- [46] Reddy J.N.: *An Introduction to Finite Element Method*. McGraw-Hill International Editions, 1993
- [47] Restrepo J. M., Leaf G.K.: *Wavelet-Galerkin Discretization of Hyperbolic Equations*. J. Comput. Phys., tom 122, nr 1, str. 118–128, 1995
- [48] Restrepo J. M., Leaf G.K.: *Inner Product Computations Using Periodized Daubechies Wavelets*. Inter. J. Numer. Meth. Eng., tom 40, str. 3557–3578, 1997
- [49] Rohn J.: *Stability of Interval Matrices: the Real Eigenvalue Case*. IEEE Trans. Automat. Contr., tom AC-37, str. 1604–1605, 1992
- [50] Rohn J.: *An Algorithm for Checking Stability of Symmetric Interval Matrices*. IEEE Trans. Automat. Contr., tom AC-41, str. 133–1136, 1996
- [51] Russell D. L.: *Quadratic Performance Criteria in Boundary Control of Linear Symmetric Hyperbolic Systems*. SIAM J. Control, tom 11, str. 475–509, 1973
- [52] Shub M.: *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1987
- [53] Silvester P. P., Ferrari R. L.: *Finite Elements for Electrical Engineers*. Cambridge University Press, 1996
- [54] Simpson D. L.: *A Numerical Method of Characteristics for Solving Hyperbolic Partial Differential Equations*. Michigan University Press, 1967
- [55] Smith G. D.: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Oxford University Press, 1985
- [56] Smoller J.: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Berlin, Springer-Verlag 1983
- [57] Szegő G.: *Orthogonal Polynomials*. AMS, 1939
- [58] Taussky O.: *Positive-Definite Matrices and Their Role in the Study of the Characteristic Roots of General Matrices*. Advan. Math., tom 2, str. 175–186, 1968
- [59] Taylor M. E.: *Partial Differential Equations*. Springer, 1996
- [60] Thomas J. W.: *Numerical Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1995
- [61] Thomée V.: *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Springer-Verlag, 1997
- [62] Troutman J. L.: *Boundary Value Problems of Applied Mathematics*. PWS Publishing Company, 1994
- [63] Wang G.: *Application of Wavelets on the Interval to Numerical Analysis of Integral Equations in Electromagnetic Scattering Problems*. Inter. J. Numer. Meth. Eng., tom 40, str. 1–13, 1997
- [64] Wang K., Michel A. N., Liu D.: *Necessary and Sufficient Conditions for the Hurwitz and Schur Stability of Interval Matrices*. IEEE Trans. Automat. Contr., tom AC-39, str. 1251–1255, 1994
- [65] Wojtaszczyk P.: *A Mathematical Introduction to Wavelets*. Cambridge University Press, 1997
- [66] Woroszył S.: *Podstawowe metody rozwiązywania równań cząstkowych falowych*. Warszawa, PWN 1984

- [67] Zhou P. B.: *Numerical Analysis of Electromagnetic Fields*. Springer-Verlag, 1993
- [68] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.: *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company Europe, 1991
- [69] Ziółko M.: *Symulacja cyfrowa magistrali gazu ziemnego*. Zeszyt Naukowy AGH nr 527, Automatyka z. 12, str. 109–117, Kraków 1975
- [70] Ziółko M.: *Determination of Circular Membrane Parameters from Its Resonance Frequencies*. Archives of Acoustics, tom 13, nr. 1–2, str. 191–202, 1988
- [71] Ziółko M.: *Stability of Initial-Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems*. Notes on Numerical Fluid Mechanics, tom 24, str. 698–707, 1989
- [72] Ziółko M.: *Komputerowe modelowanie liniowych systemów hiperbolicznych*. Zeszyt Naukowy AGH nr 1322, Automatyka z. 52, Kraków 1989
- [73] Ziółko M.: *Application of Lyapunov Functionals to Studying Stability of Linear Hyperbolic Systems*. IEEE Trans. Automat. Contr., tom 35, nr. 10, str. 1173–1176, 1990
- [74] Ziółko M.: *Stability of Wave Propagation and Boundary Reflections*. Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena. SIAM, str. 275–282. Philadelphia 1991
- [75] Ziółko M.: *Stabilność problemu mieszanego dla równania hiperbolicznego*. Red. Mitkowski W.: Prace z Automatyki. Wydawnictwa AGH, str. 173–179, Kraków 1997
- [76] Ziółko M.: *Stability of Method of Characteristics*. Applied Numerical Mathematics, nr 31, str. 463–486, 1999
- [77] Ziółko M., Białas S.: *Robust Stability of Symmetrizable Hyperbolic Systems* (w recenzji)

Skorowidz

- baza 62, 72–73, 75–77
- charakterystyki 12, 25, 35, 92, 94, 98, 103
częstotliwość rezonansowa 109
- energia 20, 57–58, 84, 105, 109, 111, 114
- fala
— dźwiękowa 12, 57, 89
— elektromagnetyczna 12, 82
- falki 72–73, 75, 78–79
- forma
— charakterystyczna 10
— kanoniczna 54
— kwadratowa 9, 23, 25, 27
— — dodatnio określona 10
— — nieokreślona 10
— — osobliwa 10
— — ujemnie określona 22, 25, 84
— — ujemnie półokreślona 25
- funkcje
— bazowe 62–63, 65–66, 71
— Bessela 107
— dwuargumentowe 78–80
— dwuwymiarowe 78
— energetyczna 16, 24–25, 40, 58
— gięte 68, 71
— jednoargumentowe 80
— jednowymiarowe 77
— kar 100
— Lapunowa 16–17, 20–21, 24–25, 28–29
— próbne 62–66
— skalujące 75–80
— wagowe 63
- funkcjonał Lagrange’a 100
- gęstość dyskretyzacji 35, 38, 45, 49, 56, 59–61, 86, 113
- gradient 102–104
- iloczyn
— kartezyjski 62
— macierzowy 78
— skalarny 65
— tensorowy 77, 81
- iloraz
— Rayleigha 23
— różnicowy 113
- jednoznaczne rozwiązanie 12–14, 91, 103, 106
- kierunek poprawy sterowania 103
- liczba Macha 90
- linia długa 82
- macierz
— D -symetryzowalna 18–21, 23–24, 29, 32–33
— diagonalna 11, 18, 21, 24–25, 40–41, 67, 84
— dodatnio określona 18, 20–21, 24
— jednostkowa 23, 33
— nieosobliwa 18
— niesymetryczna 17
— nieujemnie określona 43
— odwrotna 67, 70
— stabilna
— — w sensie Hurwitza 22, 26, 28, 32–33
— — w sensie Schura 22–23, 26–28, 32–34, 53
— symetryczna 17–19, 23, 43, 70
— symetryzowalna 18, 28
— ujemnie określona 26
- metoda

- charakterystyk 35, 38, 41, 55, 58, 85, 93, 94
- Cranka-Nicholsona 37–38, 40, 47, 49
- elementów skończonych 63, 71
- Eulera 36–37, 41, 47, 49
- Galerkina 62, 71–72
- Lapunowa 24
- różnicowa 35
- ważonych residuów 63
- mnożniki Lagrange’a 100
- monotoniczność 17

- niejednorodność
 - równania różniczkowego 9
 - warunków brzegowych 14, 58, 63
- norma 16–17, 28, 40–41
- nośniki funkcji 63, 68, 71–72, 75

- obiekt
 - niestacjonarny 9
 - stacjonarny 9
- odbicia brzegowe 14, 84, 86–88

- postać kanoniczna 53, 57, 93
- prędkość
 - fal 12, 25, 36, 57, 82, 90–91, 105, 109, 111, 114
 - transportu 12
- problem
 - brzegowy 54–55, 85–86
 - Cauchy’ego 13, 17, 25, 28–29, 35, 39, 41, 45–46, 54, 91
 - ciągły 50
 - końcowo-brzegowy 53–55, 84–86
 - mieszany 22, 25, 35, 46, 52, 92, 96
 - początkowo-brzegowy 14, 17, 21, 23, 26–27, 29, 45, 53, 58, 61, 66, 83–85, 92, 106
 - początkowy 12, 17, 25
- residuum 63–64
- równanie
 - charakterystyczne 42, 89
 - cząstkowe 9
 - — drugiego rzędu 9–10
 - — pierwszego rzędu 10–11
 - dyskretne 40
 - liniowe 9, 56, 62, 103
 - niby-liniowe 9, 90
 - nieliniowe 9
 - prawie-liniowe 9, 89
 - quasi-liniowe 9, 35, 89
 - rekurencyjne 42
 - różnicowe 36–37, 46, 85, 103
 - semi-liniowe 9, 90
 - sprzężone 103–104
 - stanu 103–104
 - ściśle hiperboliczne 12
 - typu
 - — eliptycznego 10
 - — hiperbolicznego 10–11, 20, 25, 90, 91, 103, 105
 - — — w całej przestrzeni, 10
 - — parabolicznego 10
 - rząd macierzy 19
- sprzężenie zwrotne 14, 58
- stabilność
 - asymptotyczna 16–17
 - brzegowa 21, 23–24, 27, 34, 50, 53, 58
 - numeryczna 40–41, 55
 - problemu
 - — Cauchy’ego 28
 - — mieszanego 25
 - — początkowego 25
 - systemu
 - — ciągłego 45
 - — dynamicznego 16
 - — dyskretnego 40–41, 45
 - — hiperbolicznego 16, 18
 - wewnętrzna 21–24, 26, 29, 50, 53–55, 57
- sterowanie
 - brzegowe 14
 - optymalne 98–100, 102
 - rozłożone 9
- system
 - autonomiczny 16, 52
 - ciągły 40
 - dynamiczny 16, 40, 83
 - dyskretny 40–41, 53, 86
 - jednorodny 16
 - niestabilny 16–17, 23
 - stabilny 16–17, 23, 52–53

- wartości własne 11–12, 19, 22–24, 26, 32–34, 38, 41–43, 50, 54–55, 84–85, 89–91, 104
- warunki

- brzegowe 12–15, 17, 21, 25, 45–47, 49, 53–57, 61, 64, 83–85, 92, 96, 99, 102, 104–107
 - graniczne 10, 12, 88, 92, 102
 - konieczne 16–17, 24, 29–32, 34, 55, 100
 - końcowe 12, 53, 56, 84, 102
 - początkowe 12–16, 21, 23–25, 28, 38–39, 45, 53, 58, 64, 66, 71, 83, 92, 96, 99, 106–107, 113
 - wystarczające 16–17, 24–25, 29–31, 33, 45, 55
- wielomian
- charakterystyczny 26–27
 - stabilny
 - — w sensie Hurwitza 22, 27
 - — w sensie Schura 22, 51
- współczynniki połączeń 65, 76
- wzór rekurencyjny 39–40, 65

Biblioteka

Główna AGH