Les fantômes de l'Ecole Normale

Vie, mort et destin de René Gateaux

Laurent MAZLIAK[1]

14 août 2007

Résumé

Le présent article traite de la vie et de certains aspects du travail scientifique du mathématicien René Gateaux, tué pendant la Première Guerre Mondiale, à l'âge de 25 ans. Bien qu'il fût mort très jeune, il eut le temps de laisser d'intéressants résultats en analyse fonctionnelle. En particulier, il fut un des premiers à essayer de construire une intégrale sur un espace de dimension infinie. Ses idées furent ensuite considérablement étendues par Paul Lévy. Entre autres, Lévy interpréta l'intégrale de Gateaux dans un cadre probabiliste qui mena plus tard à la construction de la mesure de Wiener. Cet article essaye de replacer ce singulier destin personnel et professionnel dans la France des années qui entourent la Première Guerre Mondiale. Il rappelle aussi le massacre qui décima les étudiants français pendant le conflit.

Abstract

The present paper deals with the life and some aspects of the scientific contribution of the mathematician René Gateaux, killed during World War 1 at the age of 25. Though he died very young, he left interesting results in functional analysis. In particular, he was among the first to try to construct an integral over an infinite dimensional space. His ideas were extensively developed later by Paul Lévy. Among other things, Lévy interpreted Gateaux's integral in a probabilistic framework that later led to the construction of Wiener measure. This article tries to explain this singular personal and professional destiny in pre and postwar France. It also recalls the slaughter inflicted on French students during the conflict.

Keywords and phrases : History of mathematics, functional analysis, integration, Brownian motion

AMS classification :

Primary : 01A70, 01A60, 46-03

Secondary : 60J65

INTRODUCTION

E quando che meno
ti pensi nel seno
ti vien a finire
bisogna morire
Se tu non vi pensi
hai persi li sensi
sei morto e puoi dire
bisogna morire[2]

[1]Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires & Institut de Mathématiques (Histoire des Sciences Mathématiques), Université Paris VI, France. mazliak@ccr.jussieu.fr

[2]Et quand tu y penses le moins, tout arrive à sa fin/ Nous devons mourir. Si tu n'y penses pas, tu as perdu la raison, tu es mort et tu peux dire : nous devons mourir. [34]

Dans ses mémoires [41] écrites à la fin des années 1960, la romancière Camille Marbo, fille du mathématicien Paul Appell et veuve d'Emile Borel, mentionna qu'après la fin de la Première Guerre Mondiale, son mari lui déclara qu'il ne pouvait plus supporter l'atmosphère de l' Ecole Normale en deuil, et décida de demissionner de ce poste. Depuis 1910 (quand il avait pris la succession de Jules Tannery), Emile Borel avait été le vice-directeur de l' Ecole Normale Supérieure pendant une période florissante de l'institution. C'était en particulier vrai pour l'analyse mathématique en raison de la présence de personnalités exceptionnelles comme Henri Poincaré, Emile Picard, Jacques Hadamard, Henri Lebesgue, et naturellement Borel lui-même qui à la fin du 19ème siècle avait introduit ses nouvelles conceptions autour de la mesure des ensembles. Un superficiel, mais impressionnant tableau de l'effet que la Première Guerre Mondiale eut sur les membres de la communauté mathématique française, est fourni par les biographies des mathématiciens précédemment cités (à l'exception naturellement de Poincaré qui mourut en 1912). Picard perdit un fils en 1915, Hadamard deux en 1916 (un en mai, l'autre en juillet !), Borel son fils adoptif en 1915. Les chiffres concernant les pertes subies par les élèves de l'Ecole Normale, et en particulier par ceux qui venaient de finir leurs trois années d'étude Rue d'Ulm sont effrayants. Ils sont réunis dans une petite brochure publiée par l'Ecole Normale à la fin de la guerre [12]. Pour mentionner uniquement les plus spectaculaires, mentionnons que sur les quelques 280 élèves qui formaient les promotions de l'Ecole entre 1911 et 1914, 241 furent directement mobilisés pour le front et 101 moururent pendant la guerre. Si le Président de la République Raymond Poincaré put déclarer que l'*Ecole de1914 a[vait] vengé l'Ecole de 1870*, le prix qu'il avait fallu payer était si énorme qu'on pouvait se demander comment la science française survivrait à une telle hemorragie. La plupart des disparus étaient de brillants jeunes gens, ceux dont on attendait qu'ils prissent la succession des universitaires de la génération précédente dans tous les domaines du savoir. Naturellement, ils étaient si jeunes que presque aucun d'entre eux n'avait eu le temps de faire ses preuves et de commencer à se faire un nom. Frédéric Gauthier, un jeune helleniste qui faisait partie de la promotion 1909 et fut tué en juillet 1916 à Verdun, nous a laissé un mélancolique témoignage de cette période d'abnégation assumée : *Mes études, il est vrai, seront demeurées stériles, mais mes actions dernières, utiles au pays, vaudront toute une vie d'action* ([1]).

Dans cet article, nous nous concentrons sur le cas de René Gateaux qui mourut au tout début de la guerre. Gateaux apparait en effet en même temps comme un bon représentant de la génération perdue des *normaliens* que nous venons de mentionner, mais aussi comme un cas exceptionnel, car son nom, contrairement à celui de pratiquement tous ses compagnons d'infortune, a été retenu en mathématiques, domaine professionnel qu'il venait à peine de pénétrer. Une preuve de ceci peut être vue dans le fait que le nom de Gateaux est encore de nos jours connu des étudiants des premières années d'études mathématiques à travers la *différentielle de Gateaux* qui est la dérivée directionnelle d'une fonction définie sur un espace vectoriel, et généralise ainsi la diffentielle globale de Fréchet. Cette notion de différentielle était en fait uniquement un petit point technique dans les travaux de Gateaux. Mais le fait qu'on ait donné le nom d'un mathématicien inconnu, qui mourut si jeune, avant d'avoir occupé une quelconque position académique ou même d'avoir soutenu une thèse, à une notion générale d'analyse élémentaire apparaît comme une énigme et nous semble mériter un examen. C'est cette contradiction apparente que nous voulons approcher dans ce papier à travers la présentation de la vie, de la mort, des études mathématiques et du destin mathématique de René Gateaux.

Dévoilons immédiatement la clef du paradoxe évoqué. En fait, par delà son destin cruel, Gateaux eut deux chances. La première concerne le sujet auquel il s'était intéressé, l'analyse fonctionnelle dans la mouvance de Volterra et d'Hadamard (souvent appelé également par eux *calcul fonctionnel*). Signalons que nous n'emploierons tout au long de cet article le terme d' "analyse fonctionnelle", qui a pris depuis des significations différentes, qu'en référence à ces théories initiées par Volterra. Au début du 20ème siècle, il s'agissait encore d'un sujet relativement confidentiel, bien qu'ayant attiré l'attention de deux grands mathématiciens. Dans les années qui suivirent la fin de la Première Guerre Mondiale, l'analyse fonctionnelle rencontra des développements inattendus, notamment dans la direction de la théorie des probabilités. Gateaux se trouva ainsi à titre posthume au contact d'un courant puissant qui conduisit à l'émergence de certains aspects capitaux des probabilités modernes. Et c'est une grande chance pour l'historien qu'un matériel d'archives relativement important au sujet des débuts de Gateaux en mathématiques nous soit aujourd'hui accessible. Gateaux fut notamment en correspondance avec Vito Volterra avant, pendant et (pour quelques semaines) après le temps passé à Rome avec le mathématicien italien. Ses lettres existent toujours à l'Accademia dei Lincei et nous offrent un accès précieux aux premiers pas du jeune homme, de même que sont conservées des lettres entre Borel et Volterra au sujet de ses projets et de ses progrès. Un des documents les plus impressionnants que nous ayons trouvé est une lettre envoyée par Gateaux à Volterra depuis le front au milieu de la bataille en cours, datée du 25 août 1914. Il y a par ailleurs d'autres archives accessibles, telles le dossier militaire, certains des brouillons de rapports que Gateaux préparait au sujet de ses recherches, et quelques lettres d'autres personnes qui le mentionnent. Tout ceci permet une reconstitution raisonnable des sept ou huit dernières années de la vie du jeune mathématicien.

Mais c'est surtout à un deuxième hasard que Gateaux doit d'être plus pour nous qu'un *mot d'or sur nos places*[3] qu'évoquent dramatiquement les vers d'Aragon. Juste avant son départ pour l'armée, Gateaux avait laissé une pile de papiers dans la maison de sa mère, parmi lesquels plusieurs articles en cours d'achèvement qui étaient supposés composer des chapitres de sa thèse. Ces papiers furent envoyés après sa mort à l'Ecole Normale par sa mère, recueillis par Hadamard et, en 1919, transmis à Paul Lévy pour qu'il réalise leur publication en honneur de Gateaux. Ce travail sur les papiers de Gateaux fut un moment capital de la carrière de Lévy. Non seulement il en tira son magnifique livre de 1922 *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, mais on peut aussi y trouver une des sources essentielles de ses futures constructions en théorie des probabilités.

L'article est divisé en quatre parties. Dans la première, nous présentons la vie de Gateaux avant son départ pour Rome en 1913. Nous décrivons ensuite ce séjour décisif à Rome avec Volterra. La troisième partie est consacrée à son départ pour le front et à ses derniers jours. Et finalement, dans une partie plus technique, nous examinons le travail mathématique du jeune mathématicien, en montrant comment il fut récupéré et considérablement étendu par Lévy, apparaissant ainsi comme une étape importante sur le chemin de l'intégration en dimension infinie et d'un important chapitre de la théorie moderne des probabilités.

---

[3]

Déjà la pierre pense où votre nom s'inscrit
Déjà vous n'êtes plus qu'un mot d'or sur nos places
Déjà le souvenir de vos amours s'efface
Déjà vous n'êtes plus que pour avoir péri ([2]*)*

Remerciements : Je veux ici exprimer mes profonds remerciements aux nombreuses personnes qui ont aimablement contribué à la préparation de cet article. En premier lieu, j'exprime toute ma chaleureuse gratitude à M.Pierre Gateaux, parent éloigné de René Gateaux, pour son accueil à Vitry et son aide dynamique dans ma recherche d'informations sur le milieu familial d'où provenait le jeune homme. Par ailleurs, j'ai eu l'occasion de visiter plusieurs services d'archives, et d'obtenir d'eux des documents précieux. Avant tout, je veux remercier Giorgio Letta, du département de mathématique de l'université de Pise en Italie, membre de l'Accademia dei Lincei, pour l'efficacité avec laquelle il m'a obtenu des conditions exceptionnelles pour consulter le fonds d'archives Volterra. Naturellement, ces remerciements vont aussi aux différents responsables de ces archives pour leur aide et leur amabilité. Et ceci vaut aussi pour Florence Greffe et tout le personnel des archives de l'Académie des Sciences à Paris, notamment pour m'avoir obtenu l'autorisation de consulter les manucrits de Gateaux déposés à l'Académie. Une autre source intéressante m'a été fournie par Françoise Dauphragne, des archives de l'Ecole Normale Supérieure à Paris, d'où j'ai tiré une photo de la promotion scientifique de 1907, qui semble être l'unique photographie accessible où nous puissions voir René Gateaux. Enfin, merci aussi à mes collègues Olivier Guédon, Bernard Locker, Gilbert Maheut, Stéphane Menozzi et Marc Yor pour d'intéressants contacts que nous avons eus au sujet de cet article et qui ont permis de beauoup l'améliorer.

1. Un provincial à Paris

Nous ne savons pas grand chose de la vie de Gateaux avant son entrée à l'Ecole Normale. Gateaux n'était pas membre d'une famille renommée, et il appartenait de plus à un cercle familial très restreint composé uniquement de ses parents, son jeune frère Georges et lui-même. Aucun des deux frères n'eut de descendant direct, les deux garçons étant morts pendant la guerre. Nous avons rencontré un membre lointain de sa famille, à savoir un arrière-arrière-arrière-arrière petit-fils d'un arrière-arrière-arrière grand-père (!) de René Gateaux, M.Pierre Gateaux, qui habite toujours à Vitry-le-François et qui nous a très aimablement donné accès aux quelques informations qu'il avait en sa possession au sujet de son parent.
René Eugène Gateaux est né le 5 mai 1889 à Vitry-le-François dans le département de la Marne, à quelques 200 km à l'est de Paris. Sous-préfecture du département, Vitry est à cette époque un gros bourg d'une certaine importance industrielle et militaire dont témoigne son histoire mouvementée. En remplacement d'une plus petite ville, Vitry-en-Perthois, qui avait été incendiée en 1544 pendant le siège de Saint-Dizier par Charles-Quint, la cité fortifiée fut bâtie par ordre de François 1er en 1545, cité à laquelle il légua son nom et son blason, la salamandre. Il fit appel à l'architecte italien Girolamo Marini, qui donna à la ville un plan en damier de 612 mètres de côté, avec des rues perpendiculaires, qui peut encore être observé aujourd'hui car le plan original fut conservé pour la reconstruction de la ville détruite à 90 % par les bombardements allemands de mai et juin 1940. Un guide toursitique, le fameux Guide Michelin dans sa première édition, indique une population de 7700 habitants pour Vitry-le-François en 1900 ([43]). Mentionnons au passage qu'un autre mathématicien célèbre était né 222 ans avant Gateaux dans la même ville : Abraham de Moivre, qui fut chassé par les persécutions religieuses qui suivirent la révocation de l'Edit de Nantes, et se réfugia à Londres où il mena la grande carrière que l'on sait. Un historien local, Gilbert Maheut, a écrit plusieurs petits articles au sujet de ses brillants concitoyens. On consultera en particulier [**?**].
Le père de René, Henri Eugène Gerasime était né en 1860. Il était un petit entrepreneur, possédant une entreprise de bourellerie et tonnellerie située dans les faubourgs de Vitry. La mère était Marie

Alexandrine Roblin, née à Vitry le 26 septembre 1864. Comme Pierre Gateaux nous l'a dit, la famille de René du côté de son père provenait de la petite ville de Villers-le-Sec à 20km de Vitry, qui semble être le nid rural de la famille Gateaux. Sur la déclaration de naissance de René, il est indiqué qu'Eugène Gateaux (le père d'Henri) est propriétaire et Jules Roblin (le père de Marie) est forgeron : les grands-parents signèrent en qualité de témoin à la mairie de Vitry. Comme la déclaration de naissance d'Eugène stipule qu'il était lui-même né à Villers-le-Sec en 1821 et que son père était charpentier, il est possible que le grand-père de René soit venu à Vitry pour créer sa petite affaire dans laquelle le père de Marie fut engagé comme forgeron. Comme on l'a déjà mentionné, le couple eut deux enfants : René était l'aîné, le deuxième Georges, né quatre ans plus tard le 27 août 1893. Le père de René mourut jeune, à 44 ans, le 28 juillet 1905. La situation précaire qui a du en résulter pour la famille a peut être d'ailleurs joué dans la motivation du jeune homme pour ses études.

Nous ne savons pas précisément ce qu'a été le parcours scolaire de René Gateaux. Il fut élève à Vitry puis à Reims. La seule information certaine dont nous disposons provient du plus ancien témoignage écrit par lui que nous ayons retrouvé. Le 24 février 1906, Gateaux signe une lettre au ministre de l'Education Nationale afin de demander l'autorisation de présenter le concours d'admission de l'Ecole Normale Supérieure (section des sciences) cette année là, alors qu'il n'a pas atteint l'âge minimal de 18 ans (il allait avoir 17 ans en mai 1906).

De ce document nous déduisons deux informations. La première est que Gateaux était élève de Classe Préparatoire au lycée de Reims, une institution prestigieuse créée par Bonaparte en 1804 pour prendre la succession de la tradition multiséculaire du Collegium bonorum puerorum fondé au 13ème siècle par l'archevêché de Reims. La deuxième information est, sans surprise, que Gateaux était sans doute un brillant élève de classe préparatoire vu la précocité qu'il semblait montrer. Il avait probablement obtenu son baccalauréat en juillet 1904 à l'âge de 15 ans. On peut cependant remarquer qu'il ne rentra pas à l'Ecole Normale lors de cette première tentative en 1906, mais seulement l'année suivante.

C'est donc en octobre 1907 que René franchit les portes de la vénérable institution. Il est difficile aujourd'hui d'avoir une juste perception de ce que devait être l'atmosphère stimulante de ces années. Depuis que vers 1880, l'Ecole Normale avait supplanté l'Ecole Polytechnique, elle était devenue, tout spécialement en mathématiques, le centre principal de la vie intellectuelle française. Jean Guéhenno, né en 1890, a écrit d'admirables pages dans son *Journal d'un homme de 40 ans*[24] (voir en particulier le Chapitre VI, sobrement intitulé "Intellectuel") où il décrit à quoi ressemblait la vie à l'ENS dans les années précédant la Première Guerre Mondiale (il fut admis en 1911 dans la section littéraire), dans les yeux d'un jeune homme d'origine provinciale et pauvre (certainement bien plus pauvre en fait pour Guéhenno que pour Gateaux), ébloui par le contraste entre les lumières de la ville et la vie quotidienne ennuyeuse et dure d'une petite ville industrielle de Bretagne *Je me demandais*, écrit Guéhenno, *ce qu'il fût advenu de moi, si j'étais resté à l'usine, si j'avais refusé de parvenir, de me distinguer, d'entrer dans les cadres de la société. Je serais devenu un bon ouvrier, un "opérateur". [...] J'aurais livré de vraies batailles, avec des hommes vrais, pour des choses vraies, un peu plus de joie et un peu plus de pain. Mon ami me répondait sévèrement que je me mentais à moi-même, que tout cela n'était que faux remords et faux regrets, que je n'avais pas à me repentir d'être désormais mieux armé pour le service des hommes que j'aimais, si je voulais décidément les servir. [...] Tout cependant était moins simple qu'il ne pouvait le concevoir. [...] Sans même m'en rendre compte, jour après jour, je cessais* *d'être ce jeune plébéien rude et volontaire que j'étais à l'usine.* Gateaux dut ressentir ce genre d'impressions lors de son admission à l'Ecole Normale à Paris après ses années provinciales. Nous avons un témoignage, une notice nécrologique écrite en 1919 par deux compagnons de Gateaux dans la promotion scientifique de 1907 de l'ENS ([1], pp.136 to 140), Georges Gonthiez et Maurice Janet. Ils écrivirent

> C'était un de ces bons camarades avec qui l'on aimait converser, dont on sentait dès l'abord la bienveillance et la sincérité parfaite, un de ceux qui savaient écouter et savaient entrer dans la pensée d'autrui. D'autres cherchaient peut-être davantage à affirmer leur personnalité, à mettre en valeur l'originalité de leur esprit et de leur caractère. Sans ces éclats et ces écarts, la personnalité de Gateaux s'est développée d'une manière harmonieuse en suivant la voie qu'elle a cru la meilleure, et elle s'est raffermie sans cesse et sans heurts. Il avait cette fraîcheur d'esprit des natures droites que la vie n'a pas encore froissées ; et, arrivant à l'Ecole, il ouvrait tranquillement son esprit à de nouveaux objets avec l'aisance naturelle et le laisser-aller d'une belle intelligence sûre d'elle-même dans sa modestie. [...] Il nous apparut bientôt comme un des tous premiers mathématiciens de la promotion, réfléchi, sérieux, prompt à découvrir l'essentiel, aimant à se porter vers les questions d'intérêt général et philosophique.

A ce moment se produisit un événement inattendu dans la vie du jeune homme, sans doute important puisque Gonthiez et Janet lui consacrent de nombreuses lignes dans leur texte. Pendant sa deuxième année à l'Ecole Normale, Gateaux se convertit au catholicisme. Il rejoignit l'église *avec ferveur*, écrivent ses deux camarades. En cette année 1908, si proche des événements du début du 20ème siècle où l'Eglise catholique romaine était fréquemment mise en accusation pour son rôle trouble pendant l'Affaire Dreyfus, et après le vote en 1905 des lois de séparation, une telle décision peut surprendre. Notons cependant qu'elle s'inscrit dans un fort courant d'intérêt pour le catholicisme qui baignait dans une atmosphère intellectuelle de remise en cause du positivisme. Un tel courant était très bien représenté à l'Ecole Normale Supérieure [25]. Dans la promotion de Gateaux on trouve par exemple Pierre Poyet qui rentra dans les ordres et devint jésuite. Il est probable que Gateaux ait eu l'occasion de se rapprocher de ces cercles. Cette conversion, sur laquelle nous n'avons trouvé d'autres témoignages que la nécrologie mentionnée, semble avoir eu un impact considérable sur la vie spirituelle de René.

> Cette belle candeur de l'enfant enfantine est bien ce qui frappait le plus dans Gateaux et c'est sans doute ce qui lui permit d'accéder si facilement à la vie religieuse.
>
> Sa conversion si rapide et si nette ne fut peut-être pas prise très sérieux à ses débuts. Lui-même ne cherchait pas la discussion sur ce terrain, et, en sa présence, connaissant ses premiers pas, nous nous n'osions pas nous y aventurer, craignant de le choquer. Nous ne doutions pas que, par un magnifique effort de volonté, il n'aurait pas dans sa vie intérieure cette belle nonchalance avec laquelle il considérait les examens, les concours et tous les honneurs de la vie terrestre.
>
> Il est en effet absolument frappant de mettre en parallèle les méthodes employées par Gateaux dans sa vie religieuse et dans sa vie extérieure. Ses grandes facilités dans le travail intellectuel, une santé assez délicate et l'absence de tout

> amour-propre lui avaient composé des habitudes qui semblaient tenir de la mollesse Il se fatiguait assez vite, et, s'il ne se sentait pas bien en forme pour entreprendre un travail, il le lâchait sans tarder et allait se promener ; il s'imposait rarement une tâche à l'avance et se laissait un peu guider par les circonstances. Mais , lorsqu'il était dispos, il nous émerveillait par sa rapidité à saisir le nœud d'un problème, à grouper autour d'une idée centrale, parfois un peu trop élevée, une leçon d'agrégation. On l'entendait bondir d'exclamations en exclamations au fur et à mesure de ses découvertes.

Plus loin, Gonthiez et Janet rappellent une étonnante phrase que Gateaux aurait écrite sur son journal (qui pourrait bien exister encore mais que nous n'avons pu localiser), phrase qu'un *ecclésiastique l'ayant suivi de près* leur avait communiqué : *J'ai demandé à Dieu la grâce de faire de moi un Saint. . .Il faudra peut-être quitter ma profession et suivre Jésus, me livrer à la prédication. Je ne sais sous quelle forme cela se réalisera. Peut-être aussi Dieu me demandera-t-il de rester dans l'Université. Je le saurai en avanç ant.*
En 1910, Gateaux passa l'Agrégation de mathématiques. Avoir un statut d'enseignant de lycée tout en préparant sa thèse était une étape quasiment obligée pour un jeune normalien désirant poursuivre une carrière académique. La plupart des mathématiciens français du moment Hadamard, Lebesgue, Fréchet . . .avaient dû en passer par là. De plus, Gateaux fut classé 11ème à l'Agrégation, un rang assez moyen qui ne lui laissait aucune chance d'obtenir directement une quelconque bourse pour se consacrer entièrement à la recherche (comme cela avait été par exemple le cas pour Jospeh Pérès, dont nous parlerons dans la partie suivante). Le 8 juillet 1912 un décret ministériel nommait Gateaux professeur de mathématiques au Lycée de Bar-le-Duc, préfecture de la Meuse, à 250 km à l'est de Paris et assez proche de sa ville natale de Vitry-le-François.
Avant de prendre ce poste, Gateaux avait l'ennuyeuse mais inévitable nécessité de remplir ses obligations militaires. Depuis le 23 mars 1905 ([29]), une nouvelle loi remplaçait celle du 16 juillet 1889 pour l'organisation de l'armée. La durée du service militaire y avait été réduite à deux ans mais au prix d'un considérable élagissement du nombre de jeunes gens concernés. Même si le premier article de chacune des deux lois affirmait avec force que *Tout français doit un service militaire à la nation*, celle de 1889 excluait de fait beaucoup de personnes de toute période sous les drapeaux. Il y avait en particulier un système fort compliqué de tirage au sort décrit dans le texte de la loi de 1889 ([30]). La loi était aussi très tolérante pour ceux qui se préparaient à devenir fonctionnaires, tels les futurs enseignants mais aussi les futurs prêtres. On peut imaginer que la présence de cette dernière catégorie était perçue comme un intolérable désordre pour le gouvernement anticlérical arrivé aux commandes après les remous de l'Affaire Dreyfus. Dans la loi de 1889, les enseignants, prêtres etc. était uniquement astreints à un an de service militaire alors que la durée normale était de 3 ans. En 1905, comme prolongement des réformes inspirées par la majorité radicale au parlement, la loi de conscription fut changée pour ce qui apparaît être un compromis équilibré. D'un côté la durée du service militaire fut raccourcie à 2 ans, mais d'un autre côté la conscription devenait en principe véritablement universelle.
Gateaux était particulièrement concerné par l'article 23 de la loi de 1905. Il stipule que *[Les jeunes gens] qui auront été admis après concours à l'école normale supérieure, à l'école forestière, à l'école centrale des arts et manufactures, à l'école nationale des mines, à l'école des ponts-et-chaussées ou à l'école des mines de Saint-Etienne pourront faire, à leur choix, la première de leurs deux années de service dans un corps de troupe aux conditions ordinaires*

avant leur entrée dans ces écoles ou après en être sortis. [. . .] Les élèves des écoles énumérées [précédemment] reçoivent dans ces écoles une instruction militaire les préparant au grade de sous-lieutenant de réserve. [. . .] Les jeunes gens qui [. . .] n'avaient pas fait un an de service avant leur entrée aux écoles, accomplissent à leur sortie une année de service dans un corps de troupe aux conditions ordinaires et servent ensuite en qualité de sous-lieutenant de réserve [. . .] ou en qualité de sous-lieutenants de l'armée d'active. Les élèves de l'ENS qui n'avaient pas choisi d'aller immédiatement sous les drapeaux pour leur première année devaient signer un engagement volontaire de 5 ans avant d'entrer à l'école (à savoir 3 ans d'école et deux années de service militaire actif).

Le dossier militaire de Gateaux ([15]) indique que Gateaux signa son engagement volontaire à Vitry le 12 octobre 1907 et demanda à être incorporé à la fin de son temps d'étude. Le 10 octobre 1910 Gateaux rejoignait le 94ème régiment d'infanterie où il était un simple soldat de seconde classe. Le 18 février 1911 il devint caporal et finalement fut nommé sous-lieutenant de réserve par le Président de la République le 17 septembre 1911. Gateaux dut alors suivre des cours spéciaux pour officiers, et les commentaires faits par ses supérieurs sur son dossier militaire indiquent que l'entraînement qu'il était supposé avoir suivi pendant son séjour à l'Ecole Normale Supérieure avait été, sans surprise, plus virtuel que réel. Sur les pages spécialement réservées aux commentaires de ses supérieurs, on lit : 1er semestre 1912 : M.Gateaux s'efforce d'acquérir l'aptitude au commandement et à ses fonctions de sous-lieutenant. Il a très bon esprit, est très intelligent, zélé et consciencieux, mais il était bien peu préparé à son grade. Le deuxième semestre 1912 (qui se termina en fait en septembre pour René) semble cependant avoir été plus convaincant. On lit que Gateaux *a beaucoup progrèssé, fort intelligent, très consciencieux et de bons sentiments, soucieux d'arriver à bien faire. Il est devenu un bon Chef de section, capable de rendre de bons services à la mobilisation. A fait un stage à l'Ecole de tir et y a obtenu de très bonnes notes. Est apte à conduire une section de mitrailleuses*. Cette dernière phrase a une étrange résonance quand on sait que Gateaux allait tomber précisément deux ans plus tard en tenant les mitrailleuses de sa section.

Revenons à 1912. Le 4 octobre, Gateaux, libéré de ses obligations militaires, commence ses cours au Lycée de Bar-le-Duc. Malheureusement, les archives du lycée semblent avoir pourri dans la cave de l'établissement. Le peu qu'il en est resté a été récemment transféré aux Archives départementales de la Meuse. Parmi elles, le registre des paies sur lequel on peut suivre l'évolution du salaire de Gateaux depuis sa nomination en octobre 1912 *en remplacement de Georges Reynaud, nommé au collège d'Embrun et payé jusqu'au 30 septembre inclus*. Payé 285 francs en octobre, Gateaux reçoit 237 francs de novembre à décembre en raison d'une retenue sur le salaire des fonctionnaires votée par les députés, puis son salaire monte à 316 francs entre mars et août, et à 379 francs en septembre. Dans les archives de Bar-le-Duc, un très fin dossier concernant le professeur de mathématiques Gateaux est conservé qui, à part une brève fiche signalétique, contient uniquement deux lettres demandant au Ministre de l'Education Nationale l'autorisation de partir étudier pendant un an à Rome.

2. L'ÉTAPE ROMAINE

Gateaux avait en effet commencé la préparation d'une thèse de mathématiques sur des thèmes proches de l'analyse fonctionnelle et son application à la théorie du potentiel dans le style d'Hadamard. Nous n'avons pas trouvé de détails précis expliquant comment Gateaux en était arrivé à choisir ce sujet de recherche, mais il est plausible que ce soit Hadamard lui-même qui lui ait

conseillé ce choix. En 1912, Hadamard venait de faire au Collège de France une série de cours sur les fonctions de ligne et, par ailleurs, d'entrer à l'Académie des Sciences. Paul Lévy avait d'ailleurs défendu une brillante thèse sur des thèmes voisins en 1911. Qui plus est, un jeune normalien de la promotion précédant Gateaux, Joseph Pérès, avait bénéficié en 1912-13 d'une bourse offerte par la fondation David Weill pour une séjour d'un an à Rome avec Volterra. Ce-dernier, invité par Boerl et Hadamard, était venu cette même année 1912 faire un cours sur l'analyse fonctionnelle, publié en 1913 ([50]) et dont la rédaction fut précisément réalisée par Pérès. C'était là de bonnes raisons pour que Gateaux soit attiré par ce domaine nouveau et encore peu exploré.
En ces années là, pour un étudiant qui voulait approfondir ce type de sujet, Hadamard à Paris et Volterra à Rome étaient évidemment les personnes avec qui il fallait être en contact. Sur Hadamard, une des gloires de la science française, nous ne dirons rien : le lecteur pourra se reporter au livre [**?**] pour un aperçu biographique et des rŽfŽrences bibliographiques. Vito Volterra était quant à lui une personnalité si exceptionnelle que nous ne saurions ici décrire son œuvre immense et nous allons nous contenter d'en donner un bref aperçu. A l'occasion du centenaire de sa naissance, en 1960, un volume fut édité par l'Accademia dei Lincei de Rome, dans lequel Giulio Krall essayait de dresser une courte biographie du mathématicien italien ([33]). Krall consacre plusieurs pages à la première découverte frappante de Volterra dans le domaine des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, quand il trouva une faute dans un article de Sonya Kovalevska sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallin. Mais ce sont cependant les questions étudiées plus tard par Volterra, après 1886, qui nous intéressent de plus près. Volterra s'engagea dans des recherches approfondies sur le phénomène de l' *hysterisis*, c'est à dire la "mémoire des matériaux", le fait qu'un état de déformation de certains matériaux dépende de leur déformation à des temps précédents : il est de ce fait nécessaire de prendre en compte la trajectoire entière des états successifs pour une description complète du phénomène. Pour modéliser une telle situation, Volterra fut conduit à considérer des *fonctions de ligne* (funzione di linea), appelées plus tard des *fonctionnelles* par Hadamard et l'école française, c'est-à-dire une fonction d'une fonction réelle représentant l'état du matériau, et à étudier les équations qu'elles doivent satisfaire. Ces équations sont en fait des généralisations infini-dimensionnelles des équations aux dérivées partielles. Comme Krall le mentionne ([33], p.17), *de la mécanique à l'électro-magnétisme, il n'y avait qu'un petit pas*, et le modèle de Volterra se révéla applicable à différentes situations physiques, comme l'électromagnétisme ou la production du son par des barres vibrantes. Volterra lui-même s'impliqua dans ce dernier sujet à l'occasion d'une importante collaboration avec Arthur Gordon Webster de Clark University aux USA[4]. Cette question fut plus tard à l'origine de l'attention d'Hostinský pour les équations de Volterra, et eut une certaine influence sur ses futures investigations autour des processus de Markov -voir [28]). Volterra fut aussi intéressé à des applications de l'analyse fonctionnelle à la biologie, en particulier pour fournir des modèles de rivalités entre les espèces. Le mathématicien italien fut ainsi une personnalité scientifique très riche, à laquelle s'ajouta un autre aspect de sa carrière, sa vocation politique : en 1904, Volterra fut nommé par le roi Sénateur du Royaume, une fonction essentiellement honorifique, mais qui donnait au bénéficiaire un statut officiel et une réelle influence dans la direction des affaires.
Ce mélange d'intérêt pour la science et la politique n'est probablement pas étranger à la proximité d'humeur entre Borel et Volterra. Les deux hommes avaient entamé dès la fin du 19ème siècle des relations amicales, et échangèrent une volumineuse correspondance qui se trouve presque

[4]Voir l'intéressante page internet **http ://physics.clarku.edu/history/history.html#webster**

entièrement conservée à l'Accademia dei Lincei à Rome et à l'Académie des Sciences de Paris. Borel a certainement joué un rôle dans la décision de Gateaux d'aller travaillerà Rome. Il fut en tout cas l'intermédiaire entre le jeune homme et Volterra. Nous avons en effet une première trace dans leur correspondance de ce projet romain. Le 18 avril 1913, Borel écrit à Volterra :

> Un autre jeune homme qui est aussi mon ancien élève, M.Gateaux, actuellement professeur au Lycée de Bar-le-Duc, m'a parlé récmment de ses intentions de demander une bourse d'étude en vue de recherches qui se rattachent à vos travaux. Je lui ai conseillé de demander comme Pérès une bourse David Weill et d'aller à Rome, si vous voulez bien l'accueillir. Je vous communique ci-inclus la lettre dans laquelle il me fait part qu'il a demandé la bourse, et m'indique ses intentions. Il est moins avancé que n'était Pérès, car il a la charge d'un l'enseignement, tandis que Pérès avait une bourse d'étude. Je serais aussi porté à croire qu'il est peut-être moins distingué que Pérès . Mais je le crois néanmoins capable d'utiliser avec fruit la bourse qui lui serait accordée et j'ai l'intention d'appuyer sa demande.

Borel demandait alors à Volterra d'écrire une courte lettre de soutien au projet à M.Liard, le Vice-Recteur de l'Université de Paris, et mentionnait également qu'il avait prêté à Gateaux les deux livres de Volterra sur les fonctions de ligne (plus précisément le livre [49] et les épreuves de [50], ce dernier étant sous presse à l'époque). Volterra écrivit en effet une lettre en faveur de Gateaux (Borel l'en remercie le 28 avril), et finalement, le 30 juin 1913, Borel communique la bonne nouvelle à Volterra : une bourse David Weill est attribuée à Gateaux pour l'année 1913-1914. Dans la lettre suivante, le 3 juillet, Borel regrette qu'il n'ait pas été possible d'attribuer une deuxième bourse à Soula et évoque que ce dernier pourrait être le successeur de Gateaux l'année suivante (c'est à dire 1914-15). Les échanges d'étudiants entre Paris et Rome étaient probablement bien vus en ces années précédant la guerre : en août 1913, Volterra demande à Borel d'accueillir un étudiant italien, Armellini, à l'Ecole Normale. Quelques années plus tard, quand il dut écrire un rapport pour l'attribution posthume du prix Francœur à Gateaux, Hadamard mentionna que le jeune homme était *un de ceux qui, inaugurant une tradition à laquelle nous ne saurions trop applaudir, allèrent à Rome se former aux méthodes et aux théories de M.Volterra*.([27]).
La lettre à Borel (datée de Bar-le-Duc le 12 avril 1913) mentionnée ci-dessus se trouve effectivement dans les archives de Volterra, et nous avons de ce fait la chance de savoir précisément quels étaient les buts mathématiques poursuivis par Gateaux quand il partit pour Rome. Gateaux considérait plusieurs points centraux pour ses futures recherches. Le premier, rangé sous l'appelation *Fonctionnelles analytiques*, concernait l'extension des résultats classiques sur les fonctions analytiques aux fonctionnelles : le développement de Weierstrass, l'équivalence entre analyticité et holomorphie, et la formule de Cauchy.
Dans un premier temps, Volterra avait qualifié d'analytique une fonctionnelle de la forme

$$U(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b K_n(x_1, \dots, x_n) f(x_1) \dots f(x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

mais Fréchet avait proposé en 1910 ([13]) une définition plus générale fondée sur un développement de Taylor généralisé

$$U(f) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(f)$$

où U_n est une fonctionnelle homogène d'ordre n (c'est-à-dire que $U_n(\lambda f + \lambda' f')$ est un polynôme homogène en λ et λ', de degré n). Gateaux proposait d'étudier les expressions des $U_n(f)$ de plus près. Ensuite, il se proposait d'obtenir l'équivalence entre l'analyticité de la fonctionnelle U et de la différentiabilité complexe (holomorphie). Et finalement, il avait l'intention d'obtenir une définition à travers une sorte de formule de Cauchy. Pour cette dernière question, Gateaux écrivait qu' *on est alors conduit à définir l'intégrale d'une fonctionnelle continue rélle dans un champ fonctionnel réel.* Ceci peut-être la première apparition de questions sur l'intégration en dimension infinie, domaine dans lequel Gateaux laissera sa marque la plus importante (voir ci-après, la partie 4). Dans cette lettre programmatique, Gateaux suggère la voie qu'il se propose de suivre, inspirée par l'intégrale de Riemann : il ne semble donc pas avoir entrevu immédiatement la nécessité de considérer des valeurs moyennes. Gateaux écrit : *Bornons nous à définir l'intégrale de U dans le champ des fonctions* $0 \leq f \leq 1$. *Divisons l'intervalle (0,1) en* n *intervalles. [...] Considérons la fonction* f *égale dans chaque intervalle partiel aux nombres* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *compris entre 0 et 1.* $U(f)$ *est une fonction des* n *variables* $f_1 \ldots f_n : U_n(f_1, \ldots, f_n)$. *Considérons l'expression*

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 U_n(f_1, \ldots, f_n) df_1 \ldots df_n.$$

Faisons augmenter n *indéfiniment, chaque intervalle tendant vers 0. Supposons que* I_n *tende vers une limite* I *indépendante des modes de division choisis. Nous dirons que* I *est l'intégrale de* U *dans le champ* $0 \leq f \leq 1$. Et Gateaux conclut : *Je me propose de rechercher si la limite* I *existe,* U *étant une fonctionnelle continue, ou s'il est nécessaire d'ajouter une autre hypothèse à celle de la continuité*. Dans un dernier paragraphe, Gateaux mentionne la possible application d'une telle intégration des fonctionnelles, comme un théorème des résidus. . .Il est remarquable que toutes les applications mentionnées sont internes à la théorie des fonctions de ligne. Il n'est nulle part fait mention sur la théorie du potentiel qui apparait en bonne place dans les écrits de Gateaux après le retour de Rome. On peut emettre l'hypothèse que c'est à Rome qu'il a pris conscience des connections - en suivant peut-être les conseils de Volterra. En tout cas, la théorie du potentiel est absente de tous les articles publié par René de son vivant.

Le 28 août 1913, Gateaux écrit pour la première fois directement à Volterra, le prévenant de son arrivée en octobre, et signalant par la même occasion qu'il a déjà obtenu plusieurs résultats pour la thèse d'analyse fonctionnelle qu'il prépare. Gateaux a peut-être joint à la lettre un exemplaire de sa première publication une note aux Comptes-Rendus ([16]), publiée le 4 août 1913 dans laquelle il commence à remplir le programme qu'il s'est proposé de suivre.

Sur le séjour de Gateaux à Rome, nous n'avons pas beaucoup de détails. Un document intéressant, trouvé dans le fonds de l'Académie des Sciences de Paris, est le brouillon d'un rapport que Gateaux a du écrire à la fin de son voyage, probablement pour la fondation David Weill. Il y mentionne qu'il arriva à Rome *dans les derniers jours d'octobre*, au moment précis où se déroulaient des élections parlementaires, ce qui fait que *les cours furent retardés jusqu'à la fin novembre*. Comme Gateaux ne signale avoir suivi que deux cours de Volterra à Rome (un en physique mathématique, l'autre sur des applications du calcul fonctionnel à la mécanique), il est probable que le retard était du aux engagements politiques de Volterra. Mais, comme Gateaux l'écrit, ceci lui permit *d'apprendre le peu d'italien nécessaire pour comprendre parfaitement les cours.* Il ajoute : *SI de longues études sont nécessaires pour connaître à fond la langue italienne, en revanche quelques semaines suffisent à un français pour en apprendre les rudiments.* Il habitait sur le Corso Vittorio-Emanuele, au numéro 72, près de la place de la Torre Argentina, comme il l'indique en en-tête de la lettre qu'il envoya à Volterra le 21 novembre 1913 pour lui demander une entrevue afin de discuter de son programme de recherche. Gateaux semble avoir travaillé très activement à Rome. Une première note aux Rendiconti dell'Accademia dei Lincei est publiée en décembre 1913 ([17]) où il étend les résultats de son précédent papier. De plus, sur la carte envoyée par Borel à Volterra le 1er janvier 1914 avec ses meilleurs vœux pour la nouvelle année (un fait qui prend une coloration étrange quand on pense à ce qui allait bientôt se passer. . .), Borel mentionne combien il était satisfait d'apprendre que Volterra était tout à fait satisfait de Gateaux à Rome. Et effectivement, le jeune homme publie trois notes de plus durant son séjour ([18],[19],[20]), mais commence aussi la rédaction d'articles plus détaillés - trouvés parmi ses papiers après la guerre. Lévy (dans [22], p.70) mentionna que deux versions du papier qu'il éditait ont été trouvées, toutes deux datant de mars 1914.

Le 14 février 1914, Gateaux fit un exposé au séminaire de Volterra : ses notes sont conservées parmi ses papiers. Gateaux y traita principalement de la notion de dérivation fonctionnelle. Il rappela que Volterra introduisit cette notion pour étudier des problèmes incluant des phénomènes héréditaires, mais aussi qu'elle avait été utilisée par d'autres (MM.Hadamard et Paul Lévy) pour étudier certains problèmes de physique mathématique - comme le problème d'équilibre des plaques électriques ajustées - en trouvant une solution à des équations aux dérivées fonctionnelles, ou en d'autres termes en établissant une relation entre cette fonctionnelle et sa dérivée.

Un aspect très touchant du rapport écrit par Gateaux pour la fondation Weill se trouve dans les pages où il décrit les côtés de son voyage qui ne concernent pas les mathématiques. Il y explique qu'il avait eu à cœur de voyager à travers ce nouveau pays qu'il tenait à découvrir, et ses mots sont certainement ceux d'un homme qui voyageait pour la première fois. Avant d'arriver à Rome, explique-t-il, il traversa la Suisse. Il décrit longuement les beautés de la nature ainis que les magnifiques exploits des ingénieurs de la voie du St Gothard. Ensuite, il passa par Milan où il fut *heureux de voir la Cène de Léonard de Vinci [. . .] J'ai éprouvé un plaisir tout particulier à voir un chef-d'œuvre devenu si populaire qu'un très grand nombre de familles, chez nous, en possèdent une gravure*. Il passa par Venise, par Florence, mentionnant qu'il préféra la première car *j'étais, et je suis encore plus sensible aux beautés naturelles qu'aux beautés artistiques. Pour les premières, mon éducation a commencé dès mon enfance ; pour les autres je l'ai commencée fort tard.* Mais, conclut-il, *au contact de la beauté, l'esprit s'éduque et apprend vite à goûter de ce qu'il n'appréciait d'abord que médiocrement*. Il alla aussi en Tunisie et en Algérie. Il évoque avoir été choqué par le manque de respect des Français envers les cités arabes d'Alger et de Constantine - au contraire de celle de Tunis qui avait été préservée. Enfin, après une déscription de sa vie d'étudiant à Rome, Gateaux termine ce document émouvant en mentionnant combien il regrettait que l'Italie et l'italien fussent si mal connus en France, quand, au contraire, la France et le français étaient largement présents dans la société italienne.

Gateaux revint en France au début de l'été, en juin 1914. Il s'attendait probablement à revenir bientôt à Rome car il était presque certain, comme Borel l'écrivit à Volterra le 3 avril 191, d'obtenir la bourse Commercy qu'il avait sollicitée. Et en effet, dans une lettre à Volterra datée du 14 juillet 1914, Gateaux écrivit que Borel l'avait informé que sa bourse était accordée. Dans la même lettre, il signalait avoir écrit une première version d'une note sur les fonctionnelles que Volterra lui avait demandée pour la joindre à la traduction allemande (!) de ses leçons sur les fonctions de ligne ([50]), un détail impressionnant deux semaines avant la conflagration générale en Europe. Pendant ce chaud mois d'été, il rencontra aussi le Principal du Lycée de Bar-le-Duc le 20 juillet, comme celui-ci le fait tristement remarquer dans une carte datée du 7 décembre 1914. Il écrit :

J'ai vu M.Gateaux, pour la dernière fois, le 20 juillet. Nous ne pensions pas à la guerre, ni l'un ni l'autre. Il me parla longuement de son séjour à Rome, et me dit que sa thèse de doctorat était presque terminée. Il a donc laissé des travaux qui mériteraient d'être publiés et il me semble que vous pourriez en entretenir sa mère.
Cette petite carte postale fut le lien décisif entre Hadamard et les papiers laissés par Gateaux. Sans elle, le nom Gateaux serait vraiment devenu uniquement un *mot d'or sur nos places*. Elle a été probablement adressée à Hadamard ou à Borel, mais nous l'avons trouvée par hasard au milieu de l'énorme fonds archivistique de Fréchet à l'Académie des Sciences de Paris. Une autre hypothèse est cependant que Fréchet en ait été le destinataire, ce qui suppose qu'il connaissait le Principal de Bar-le-Duc, ainsi que Gateaux, d'une manière suffisamment intime pour avoir cet échange. Si cette hypothèse était vérifiée, c'est peut-être Fréchet qui a récupéré les papiers du jeune mathématicien et les a transmis à Hadamard. Nous verrons plus loin un point qui pourrait corroborer cette version.

3. La tempête

Gateaux semble avoir été pris par surprise par le début de la guerre. Un sérieux danger de guerre n'avait en fait été évoqué clairement que très tard en juillet 1914, et la plupart des français reçurent l'annonce de la mobilisation le 2 août avec stupeur. Dans ses mémoires, Camille Marbo ([41], pp.158 et seq.) décrit comment, dans les premiers jours de juillet, les examinateurs de l'Ecole Normale, dont Lebesgue et son mari Borel, plaisantaient et bavaradaient. Elle écrit que c'est uniquement après l'ultimatum autrichien à la Serbie et la réponse serbe du 25 juillet que *l'angoisse envahit Paris*, bien que Borel ne voulût pas croire que *les hommes peuvent être si fous*. Le couple quitta Paris pour les vacances la dernière semaine de juillet comme cela avait été programmé de longue date, mais ils durent revenir en hâte le 1er août par suite des événements.
Gateaux fut mobilisé dans la réserve comme lieutenant du 269ème RI, membre de la 70ème division d'infanterie. Un site internet impressionnant (**www.chtimiste.com**) donne la liste de tous les régiments français impliqués dans la Première Guerre Mondiale, et fournit beaucoup d'informations sur ceux-ci. Le régiment de Gateaux prit ses quartiers à Nancy ou à Toul. C'était probablement cette dernière ville dans le cas de Gateaux, car il utilisa un papier à en tête de l' *Hotel & café de l'Europe* de Toul pour sa dernière lettre à Volterra du 25 août. Les premières batailles furent victorieuses pour la France, mais après l'euphorie du tout début d'août la dure réalité de la puissance de feu de l'armée allemande obligea les troupes françaises à se replier jour après jour. A la fin d'août, la tâche dévolue à la 70ème division d'infanterie était en premier lieu de défendre le secteur sud-est de Nancy.
On a quelque peu perdu de vue aujourd'hui combien les premières semaines de la guerre furent invraisemblablement lourdes en victimes du côté français. Août 1914 est le pire mois de toute la guerre en terme de pertes, et certains chiffres donnent le vertige. Le 22 août 1914, par exemple, le jour le plus sanglant de la guerre pour les français, on ne compte pas moins que 27000 morts dans les rangs français ([4]). Ces nombres atrocement élevés sont dus à une alliance entre la vulnérabilité de l'uniforme français (les fameux pantalons *garance* utilisés jusqu'en 1915 ...), la suffisance de généraux qui n'avaient aucune considération pour la vie de leurs hommes, et aussi l'évidente inadaptation de beaucoup d'officiers sur le terrain. Prochasson ([45], pp.672-673) propose deux hypothèses pour expliquer pourquoi les pertes dans les Grandes Ecoles (Polytechnique et l' Ecole Normale Supérieure en particulier) furent si élevées. Comme ils étaient souvent des officiers subordonnés, les jeunes étudiants furent les premiers tués car leur grade les plaçait en

tête de leur section. Mais, de plus, ils étaient quelquefois mus par une sorte de sentiment patriotique exalté qui pourrait les avoir conduit à un héroïsme dépassant leur simple devoir. Prochasson mentionne le fameux exemple de Charles Péguy, et celui, moins célèbre, de l'anthropologue Robert Hertz qui exigea de façon récurrente de ses supérieurs qu'on le mît dans une position plus exposée, et qui fut tué en avril 1915. On peut aussi mentionner à ce sujet le témoignage de Camille Marbo sur son fils adoptif Fernand. Il lui expliqua qu'en tant que socialiste impliqué dans la lutte pour la compréhension entre les peuples et la paix, il voulait *être envoyé en première ligne afin de prouver que [il était] aussi courageux que n'importe qui*. Il ajouta : *Ceux qui survivront auront le droit de parler haut devant les embusqués*([41], p.166).
Comme rappelé ci-dessus, la dernière lettre de Gateaux à Volterra est datée du 25 août. Elle est adressé à *Monsieur Volterra, Sénateur du Royaume*. Cela vaut la peine de citer entièrement ce document étonnant.

> Buissoncourt (Meurthe-et Moselle), le 29 août 1914
>
> Monsieur le Sénateur,
>
> Je vous remercie beaucoup de votre lettre que je viens seulement de recevoir, dans les plaines de Lorraine où nous passons les jours et les nuits, au son du canon.
>
> Je crois que la traduction des Leçons sur les fonctions de lignes se fera, comme vous le dites, longtemps attendre. Et quant à votre Mémoire sur les fonctions permutables, que j'aurais lu avec tant d'intérêt, Dieu sait quand je pourrai l'étudier !
>
> Je tiens à vous dire combien j'ai été heureux d'apprendre que l'Italie, non seulement reste neutre, mais encore se rapproche de la France. Tout les français y ont été très sensibles, et ont vivement apprécié l'attitude de l'Italie. Puisse ce geste pousser nos deux pays à se connaître mieux et à se rapprocher davantage !
>
> Le service postal fonctionne très irrégulièrement. Je compte vous écrire bientôt de nouveau et j'espère qu'une au moins de mes lettres vous parviendra. J'espère qu'elle vous trouvera en bonne santé ainsi que votre famille. Pour mon compte, je supporte parfaitement les fatigues de la campagne. Veuillez me rappeler au bon souvenir des professeurs que j'ai eu l'honneur de connaître à Rome. Veuillez présenter à Madame Volterra mes plus respectueux hommages et agréer l'expression de mes sentiments respectueux.
>
> R.Gateaux, Lieutenant au 269ème RI, 139ème brigade, 70ème division de réserve, par Troyes (Aube)

Le fait que Gateaux fasse allusion à la situation ambiguë de l'Italie est un point intéressant. Le pays se trouvait en effet dans une étrange situation. Comme elle avait accepté de signer dans les années 1880 l'alliance militaire avec l'Allemagne et l'Autriche-Hongrie proposée par Bismarck, l'Italie était officiellement membre de la Triplice. Néanmoins, en 1914, l'opinion publique était très hostile à une quelconque participation à la guerre. Contrairement à ce que Gateaux écrit, elle n'était pas spécialement bien disposée envers la France. La France était un voisin irritant, dont le soutien lors de la lutte pour l'indépendance dans les années 1860 s'était avéré tiède et fort couteux (puisque Nice et la Savoie avait été annexées), si bien que l'Italie s'était senti obligée de rejoindre la Triplice pour contre-balancer la politique française. Naturellement, les sentiments étaient encore moins amènes envers les Autrichiens dont il avait été si dur de se débarasser 40 ans plus tôt ! De ce fait, prétextant avec une certaine hypocrisie que le traité n'obligeait l'Italie

à prendre part au conflit qu'en cas d'agression envers ses alliés (et là, l'Autriche avait ouvert les hostilités en déclarant la guerre à la Serbie), le gouvernement italien opta pour la neutralité. Elle se prolongea jusqu'au 23 mai 1915, jour où l'Italie entra officiellement en guerre au côté de la France et de la Grande-Bretagne. Dans l'intervalle eut lieu une invraisemblable période de marchandage où chacun des deux camps tenta d'attirer l'Italie vers lui. A première vue, le marché semblait clair : l'Italie, si elle devait prendre partie pour un des belligérants, choisirait celui qui serait à même de la récompenser en lui offrant les *terre irredente* qui étaient restées dans le giron autrichien après 1870 : le Trentino, la côte est de l'Adriatique incluant Trieste et Fiume. Il pouvait sembler illusoire d'attendre un tel cadeau de l'Autriche, mais l'Allemagne aurait pu faire (et fit effectivement) une forte pression sur sa faible alliée pour accepter ces concessions. Et d'un autre côté, la France et la Grande-Bretagne pouvaient bien sûr à bon compte promettre le Trentino et la Dalmatie, mais qui pouvait prédire ce qu'elles étaient susceptibles d'exiger en échange ? Il y a des témoignages de soldats du Piémont datant du début 1915 où ils expliquent que jusqu'au dernier instant ils ne surent pas quelle direction, est ou ouest, ils auraient à suivre en cas de déclaration de guerre. Le jeu joué par les hommes d'état italiens San Giuliano, Giolitti, Salandra et Sonnino pendant cette étonnante période est décrit en détail dans [46], comme on lira dans [39] l'autre marchandage qui eut lieu à Versailles après la guerre, où les Italiens dépités ne purent recevoir les terres espérées. Le négociateur italien Orlando quitta la Conférence de la Paix en claquant la porte sur ce que d'Annunzio décrirait avec colère comme la *vittoria mutilata*.
Le sénateur Volterra prit immédiatement fait et cause pour la France et la Grande-Bretagne. Les échanges intensifs qu'il eut avec ses collègues français de Paris Appel, Borel, Painlevé, Picard et d'autres immédiatement après le début de la guerre ne laissent aucun doute à ce sujet. Et même, Volterra, *nolens volens*, exagéra l'état d'esprit positif de l'opinion envers l'Entente. Beaucoup plus crédible est l'opinion de San Giuliano dans une lettre à l'ambassadeur italien à Paris datant du 12 août 1914 :

> Dans l'opinion publique italienne, il y a trois tendances : la plus forte est pour la neutralité ; un courant très faible voudrait que nous soutenions nos alliés actuels ; un autre plus fort serait en faveur d'une attaque contre l'Autriche en dépit du traité avec la Triplice, mais ce courant est refroidi et rendu suspicieux par le fait qu'en dépit de leur supériorité navale, la France et l'Angleterre n'ont toujours pas attaqué la flotte autrichienne. Je ne crois pas qu'il y ait de fortes sympathies pour la France mais la modération de la France avant et depuis le début de la guerre a fait la meilleure impression. D'un autre côté, il n'y a pas d'antipathie envers l'Allemagne mais il y a une grande réprobation envers son comportement. Il existe une très vive aversion contre l'Autriche. Nos renseignements ne nous disent pas que si nous avions marché aux côtés de l'Allemagne et de l'Autriche nous aurions du faire face à une révolution. Le peuple italien aurait certainement rempli son devoir avec patriotisme, bien qu'en rechignant.

Le 3 septembre 1914, Borel écrit à Volterra : *J'ai été très sensible à votre souvenir que m'a transmis M.Appel. L'attitude de l'Italie est une des raisons objectives que nous avons de penser que nous défendons la cause de la civilisation, de la liberté et du droit et ce qui nous donnera la force de lutter jusqu'au bout sans nous laisser abattre par aucune épreuve, car le temps assurera forcément notre succès.* . Volterra répondit le 14 septembre : *Je ne doute pas comme je n'ai jamais douté un seul instant du triomphe de votre noble et grand pays que j'aime de tout mon cœur. La France lutte pour la justice et la liberté et pour la cause de la civilisation contre la violence de* *l'impérialisme le plus brutal et le plus odieux qui voulait asservir l'Europe. [...] A mon avis, le rôle et la mission de l'Italie est de se placer au côté de la France et de ses alliés contre l'Autriche et l'Allemagne en abandonnant la neutralité*. Le 16 octobre 1914, Borel demande à Volterra de lui envoyer des articles des intellectuels italiens commentant dans des journaux italiens le manifeste des intellectuels allemands *au monde civilisé*, de façon à la traduire et à les publier à Paris dans son propre journal la *Revue du Mois* qui continua à paraître jusqu'au départ de Borel pour le front en 1915. Volterra répondit le 24 octobre, indiquant quelques articles potentiellement intéressants, mais demandant aussi des nouvelles de *M.Gateaux, M.Pérès, M.Boutroux, M.Paul Lévy et d'autres jeunes amis français. J'avais reçu une lettre de M.Gateaux du champ de bataille et ensuite je n'en ai reçu pas d'autre c'est pourquoi je suis très inquiet sur son compte ainsi que sur les autres.* Volterra, comme Borel en fait, ignorait alors la mort de Gateaux. Borel répondit à la lettre de Volterra le 4 novembre, l'informant que Pérès et Boutroux avaient été réformés et qu'il ne savait pas où était Gateaux. On note avec intérêt que le ton de cette lettre est moins confiant que celui des lettres précédentes. C'était le moment où les énormes pertes des premières semaines commençaient à filtrer. Borel écrit :

> A l'Ecole Normale, plusieurs jeunes gens de très grand avenir scientifique ont déjà disparu. La responsabilité de ceux qui ont voulu cette guerre est vraiment terrible. L'entrée en scène de la Turquie va peut-être amener une extension qui aura pour conséquence d'abréger la durée et de diminuer la somme totale des maux de la guerre. Mais je comprends fort bien que les hommes d'état qui ont la responsabilité de l'action hésitent à attirer sur leur pays une partie de ces maux aussi longtemps qu'ils peuvent l'éviter. Je crois que tout le monde s'en rend bien compte ici ; la reconnaissance et la sympathie n'en seront que plus grandes pour les nations qui se joindront à nous pour réduire définitivement à néant le rêve de la domination prussienne sur le monde entier.

Revenons à Gateaux. Nous l'avons laissé à la fin du mois d'août en Lorraine. Le plan Schlieffen du Quartier-Général allemand semblait fonctionner à merveille et les Français reculaient sans cesse et risquaient d'être pris en tenaille entre les deux ailes de l'armée allemande (l'une venant du nord à travers la Belgique, l'autre de l'est à travers la Lorraine et la Champagne). C'est alors que se produisit le *miracle* de la Bataille de la Marne (6-13 septembre 1914) qui stoppa subitement l'avance allemande, concluant le plan Schlieffen par un échec (mais le même plan, 26 ans plus tard, se soldera par une éclatante victoire ...). Pendant ces jours, Vitry-le-François, où était restée la mère de Gateaux, avait été occupée par les Allemands dans la nuit du 5 au 6 septembre, mais ils furent contraints de quitter la place et de se retirer vers l'est le 11 septembre. Un récit vivant de ce moment a été écrit après la guerre par un témoin ([44]). Même si Gonthiez and Janet écrivent dans [1] qu'ils peuvent facilement imaginer *toute la douleur qu'il dut ressentir lorsqu'il sut que l'ennemi occupait Vitry-le-François où sa pauvre mère était restée*, il n'est pas certain que Gateaux ait pu apprendre la nouvelle en raison de la confusion générale. Nous renvoyons à [4] ou à différents articles de [11] pour la description de ce moment du conflit. D'après le plan de campagne de la 70ème division d'infanterie, on peut déduire les mouvements du régiment de Gateaux. A partir du 13 septembre , les Français poursuivirent les troupes allemandes qui se retiraient. Le 24 septembre elles étaient au delà de Nancy. A ce moment précis, les états-majors des deux camps prirent conscience de l'impossibilité de tout mouvement décisif sur une ligne de front allant de l'Aisne à la Suisse, ce qui faisait que le seul espoir était de déborder l'ennemi dans la zone encore presque libre de soldats entre l'Aisne et la mer. Le général Joffre décida de retirer un grand nombre de divisions de la partie est du front (celle précisément où Gateaux se trouvait) et de les envoyer *par voie ferrée* vers la Picardie, puis l'Artois et enfin les Flandres pour essayer de contourner les Allemands. La *course à la mer* dura deux mois et fut abominablement sanglante.

La 70ème division fut transportée entre le 28 septembre et le 2 octobre de Nancy à Lens, sur une distance d'environ 300 km ! Elle reçut l'ordre de défendre l'est de Lens et Arras. Le 3 octobre, le régiment de Gateaux est à Rouvroy, un petit village à 10 km au sud-est de Lens et Gateaux est tué à une heure du matin, alors qu'il essayait avec ses mitrailleuses d'empêcher les Allemands d'entrer dans le village. Dans la confusion générale du massacre, les corps ne sont pas identifiés avant d'être rassemblés et enterrés à la hâte dans des cimetières improvisés. Le corps de Gateaux est enterré près de la chapelle Sainte Anne à Rouvroy, et une simple croix sans inscription marque la place. D'après le dossier militaire, la mère de René est avertie le 4 octobre que son fils est porté disparu. Le 16 mars 1916, son deuxième fils tombera au Mort-Homme en face de Verdun. Beaucoup plus tard, à la fin d'une vie de souffrances, elle mourra le 24 février 1941 à Vitry-le-François, quelques mois après avoir vu sa ville anéantie par les bombardements allemands...

L'acte officiel de décès de René fut établi le 28 décembre 1915 d'après les témoignages donnés par Henri-Auguste Munier-Pugin, adjudant et Albert Garoche, sergent du 269ème régiment d'infanterie. Mais ce n'est que longtemps après, le 8 décembre 1921, que le corps de Gateaux fut exhumé et formellement identifié, et finalement transporté à la nécropole nationale du cimetière de Neuville-Saint-Vaast où la tombe de Gateaux porte le numéro 76. La mère de Gateaux fut informée le 5 janvier 1922 du fait. Le dernier document qui compose le dossier militaire est une lettre du ministre de la guerre, datée du 22 juin 1923, signalant au maire de Vitry-le-François que le lieutenant René-Eugène Gateaux avait été officiellement déclaré *mort pour la France*.

La chronologie suivant laquelle la mort de Gateaux fut communiquée au monde académique n'est pas totalement claire. Comme on l'a déjà vu, le Principal de Bar-le-Duc écrit le 7 décembre 1914 à quelqu'un qui pourrait être Borel ou Hadamard, mais sa carte est clairement une réponse à une lettre qu'il a reçue lui demandant des informations sur la famille de Gateaux. Répondant que René n'avait que sa mère, il ajoutait que *dans le deuil si cruel qui la frappe, elle serait très sensible à vos condoléances et ce serait une joie douloureuse pour elle de lire votre appréciation de la grande valeur intellectuelle de son cher disparu.*. Pour conclure sa lettre, le Principal de Bar-le-Duc écrit : *La mort de notre jeune collègue a douloureusement ému tous ses collègues du Lycée de Bar qui avaient su apprécier sa brillante intelligence, la franchise de son caractère et le charme de sa modestie. Il a vaillamment fait tout son devoir jusqu'au bout, mais c'est grand' pitié qu'il ne lui ait pas été donné de vivre toute sa vie.*.

C'est le 10 décembre 1914 que Borel avertit Volterra de la mort de Gateaux.

> Le succès sera malheureusement acheté par des pertes irréparables ; parmi les tristes nouvelles que j'ai apprises récemment, une de celles qui m'a fait le plus de peine est la mort de Gateaux. Les conditions dans lesquelles elle nous est annoncée ne laisse malheureusement qu'un bien faible espoir d'une erreur. Je veux néanmoins espérer que sur les dizaines d'élèves de l'Ecole Normale regardés comme perdus, il s'en trouvera au moins un ou deux qui reviendront à la fin de la guerre.

Volterra répond tristement quelques jours plus tard :

> Gateaux était très doué et je suis sûr qu'il avait un grand avenir. Il développait ses idées d'une façon peut-être lente mais toujours sûre. L'année passée, il avait

> beaucoup travaillé et je ne doutais pas que tout les produits pour sa thèse étaient prêts. Combien de jeunes existences ont été les victimes de cette guerre ! C'est horrible à y penser.

Le même jour un télégramme est envoyé par Volterra à Borel au nom du séminaire mathématique de Rome : *Séminaire mathématique Rome exprime sa profonde peine nouvelle reçue son ancien membre Gateaux et toute sa vive sympathie Ecole Normale*.
Dès août 1915, Hadamard commença les démarches nécessaires pour faire attribuer un des prix de l'Académie des Sciences à Gateaux. Dans une lettre datée du 5 août 1915, et adressée peut-être à Picard en tant que Secrétaire Perpétuel, Hadamard mentionne que Gateaux *laisse sur le calcul fonctionnel des recherches fort avancées (sa thèse était en grande partie composée, et représentée par des notes présentées à l'Académie), recherches auxquelles M.Volterra, comme moi-même, attache un grand prix*. A la séance du 18 décembre 1916, le prix Francœur est attribué à Gateaux ([27], pp.791-792). Il est intéressant de lire dans le court rapport d'Hadamard le paragraphe suivant :

> [Gateaux] allait s'engager dans une voie beaucoup plus audacieuse, et qui promettait d'être d'être des plus fécondes, en étendant au domaine fonctionnel la notion d'intégrale. Nul ne peut prévoir le développement et la portée qui auraient pu être réservés à cette nouvelle série de recherches. C'est elle qui a été interrompue par les événements.

Il est plausible qu'Hadamard n'ait pas regardé en détail les papiers que Gateaux avait laissés quand il les récupéra. Lui même fut d'ailleurs bientôt pris dans la tempête, perdant ses deux fils pendant l'été 1916. Néanmoins, il avait observé qu'un des intérêts majeurs de René Gateaux dans sa dernière période d'activité avait été l'intégration des fonctionnelles. Comme nous verrons dans la section suivante, ce fut précisément la raison pour laquelle il parla de Gateaux à Lévy.

4. Le destin mathématique

En 1918, l'Académie des Sciences de Paris, suivant en cela la proposition d'Hadamard, décide d'appeler Lévy pour le *Cours Peccot* de 1919. Le Cours Peccot était (et est encore) une série de cours en mathématique donnés au Collège de France et financée par la fondation Peccot. Il était conçu comme un moyen de promouvoir des recherches mathématiques récentes en offrant un soutien financier et un auditoire à un jeune mathématicien. Borel en avait été le premier bénéficiaire en 1900, suivi par Lebesgue. En théorie, l'âge de l'enseignant choisi devait être inférieur à 30 ans. Néanmoins, les pertes de la guerre en jeunes hommes étaient si importantes que le choix de Lévy âgé de 33 ans était raisonnable. Il est aussi plausible de penser que s'il n'y avait pas eu la guerre, Gateaux aurait été un candidat naturel pour le Cours Peccot. Comme la désignation de Lévy coïncida avec la demande qu'Hadamard lui fit pour qu'il prenne en charge les papiers laissés par Gateaux, il pourrait y avoir un rapport entre les deux événements. Quoi qu'il en soit, le 3 janvier 1919, Lévy écrit à Volterra :

> M'étant occupé récemment de la question de l'extension de la notion d'intégrale multiple à l'espace fonctionnel, j'en ai parlé à M.Hadamard qui m'a signalé l'existence d'une note de R.Gateaux sur ce sujet. Mais il n'a pas pu m'en donner la référence exacte et je ne puis réussir à la trouver. [...] Quoiqu'encore mobilisé, je travaille à préparer un cours que j'espère professer au Collège de France sur les fonctions de lignes et les équations aux dérivées fonctionnelles et à cette occasion,

> je voudrais développer davantage certains chapitres de la théorie. [...] Je crois que la généralisation du problème de Dirichlet doit présenter plus de difficultés. Je n'ai pu jusqu'ici profiter pour le cas général de vos travaux sur les fonctions du premier degré et l'extension de la formule de Green. Ceci tient précisément à ce que je n'ai pas encore mis la notion d'intégrale multiple sous une forme commode pour ce but.

Le 12 janvier, Lévy envoie une nouvelle lettre à Volterra : *M.Hadamard vient de trouver plusieurs mémoires non publiés de Gateaux à l'Ecole Normale. Je ne les ai pas encore vus mais peut-être y trouverais-je ce que j'y recherche.* Volterra répond le 15 janvier aux deux lettres, signalant à Lévy qu'aucune des publications de Gateaux ne concerne l'intégration. Il ajoute néanmoins :

> Nous avons causé avant son départ de Rome des idées générales sur ce sujet mais il n'a rien publié là-dessus. Je pense que dans les notes manuscrites qu'il a laissées, on pourra bien probablement trouver quelques notes sur ce sujet. Je suis heureux qu'elles ne soient pas perdues et qu'elles se trouvent dans vos mains. La question est très intéressante.

L'intégration sur des espaces de dimension infinie a certainement été le sujet le plus important abordé par Gateaux. Ceci est confirmé dans le lyrique commentaire suivant d'Hadamard ([1], p.138) :

> Le fait qu'il ait choisi le calcul fonctionnel révélait un esprit aux vues larges, dédaigneux du petit problème ou de l'application facile de méthodes connues. Mais le fait prouva que Gateaux était capable de considérer une telle étude sous son aspect le plus large et le plus suggestif. Et c'est effectivement ce qu'il fit, avec l'intégration sur le champ fonctionnel, pour ne mentionner que cet exemple, le plus important, qui représente une voie entièrement nouvelles et de très grandes perspectives pour la théorie.

Volterra n'était en fait pas l'unique personne que Lévy contacta dans ces jours du début 1919 au sujet de l'intégration générale. Comme on peut le voir dans les premières lettres de leur correspondance, c'était aussi sur ce sujet qu'il entra en contact avec Fréchet (see [3]) en décembre 1918. Fréchet avait proposé en 1915 une première théorie de l'integration sur des espaces abstraits. En 1933, Kolmogorov ([32]) considérait cette construction de Fréchet comme la première tentative dans cette direction.

Le 6 janvier 1919, Lévy écrivit à Fréchet : *Au sujet des papiers de Gateaux, j'ai précisément appris hier que M.Hadamard les a mis en sécurité à l'Ecole Normale pendant la guerre et vient de les retirer. Rien n'est donc encore publié.* De cette phrase, nous pouvons déduire que c'est Fréchet qui a le premier écrit à Lévy au sujet des papiers de Gateaux, certainement parce qu'il avait une intuition de ce qu'ils pouvaient contenir. Ceci constitue peut-être une preuve que c'est effectivement à travers Fréchet que ces documents transitèrent jusqu'à Hadamard pendant la guerre, et que Fréchet était le destinataire de la lettre du Principal de Bar-le-Duc mentionnée plus haut ? Le 12 février, Lévy commença à décrire à Fréchet le contenu de ce qu'il avait précisément trouvé dans les papiers de Gateaux, à savoir une première théorie des fonctionnelles harmoniques.

Comme nous l'avons déjà mentionné quand nous avons commenté la lettre de Gateaux à Volterra exposant son programme de recherche, l'intérêt de Gateaux pour l'intégration en dimension infinie trouve son origine dans l'extension de la formule de Cauchy. Pour Lévy, la situation était quelque peu différente, en rapport avec ses recherches consacrées à la théorie du potentiel. Cette

théorie, dérivée directement de l'électromagnétisme avait pour objet la détermination du potentiel électrique engendré en un point P par une répartition de charges électriques dans une région de l'espace. Nous allons juste donner ici un rapide exposé de son contenu pour expliquer comment il faisait naturellement apparaître différentes intégrales. Le lecteur intéressé peut se reporter au magnifique ouvrage de Kellogg ([31]) pour obtenir un aperçu plus détaillé de ce sujet et de son histoire.
A la suite des recherches de Coulomb sur l'attraction des charges électriques au milieu du 18ème siècle, il était devenu clair que la structure proposée par Newton pour la gravitation universelle était transposable au cas de l'attraction électrique. L'étude de la représentation de ces champs de forces avait été un important chapitre de la physique mathématique depuis le début du 19ème siècle.
Depuis Green, on avait identifié que toute fonction harmonique U (c'est à dire satisfaisant $\Delta U = 0$) dans une région *régulière* R de l'espace, est un potentiel newtonien décomposable en trois termes

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi}\int\int\int_R \frac{\nabla^2 U}{r} dV + \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{1}{r} dS - \frac{1}{4\pi}\int\int_S U\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r} dS$$

où r est la distance entre P et le point courant Q, ν la normale à S au point Q dirigée vers l'extérieur (S est la frontière de R). Dans cette formule, le premier terme représente une distribution de volume avec densité $-\frac{\nabla^2 U}{4\pi}$, le deuxième une répartition superficielle régulière de densité $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial \nu}$ sur S, et le dernier est ce qu'on appelle un potentiel double-couche de moment $-\frac{U}{4\pi}$.
La présence de ce dernier terme a une explication physique intéressante : quand deux charges électriques sont très proches, elles se comportent comme un aimant infinitésimal et induisent ainsi un champ magnétique représentable par un moment. La présence du potentiel double-couche s'explique ainsi comme le résultat de deux répartitions de charges sur deux surfaces infiniment proches.
De ces considérations provient le problème central de la théorie mathématique classique du potentiel : trouver une fonction harmonique U dans un domaine R dont les valeurs sont données sur la frontière S (problème de Dirichlet) ou dont les dérivées normales à S sont données (problème de Neumann). En 1906, Hadamard ([26]) avait proposé d'utiliser les techniques variationnelles de la théorie des fonctions de ligne de Volterra pour pouvoir étudier des formes plus générales de ce type de problème. Ce point constitue le contenu de la thèse de Lévy soutenue en 1911. On a en effet quelque peu oublié aujourd'hui que Lévy, avant de devenir un des plus grands spécialistes de la théorie des probabilités au 20ème siècle, avait été un très fin connaisseur de l'analyse fonctionnelle (voir en particulier [3], •6, •7 and •8). Il est d'ailleurs remarquable (et le présent article veut le souligner) que les travaux d'analyse fonctionnelle du début du 20ème siècle ont conduit assez naturellement à des problèmes et des formulations probabilistes dans l'esprit de Lévy.
Comme on le voit, l'étude de ce type de questions dans les espaces fonctionnels classiques qui sont de dimension infinie soulève la question de l'intégration dans ces espaces. Un problème central provient de ce qu'en général en dimension infinie, un sous-ensemble a un volume égal à zéro ou l'infini, et ceci empêche une extension directe de l'intégrale de Riemann qui est définie à travers des suites approximantes de fonctions en escalier.
Gateaux semble avoir été le premier à proposer un moyen de contourner cette difficulté en considérant l'intégrale comme une valeur moyenne asymptotique. Dans un papier qu'il écrivit en 1924 à la fin d'une période d'activité intense autour de ces questions ([36]), Lévy prend cette

définition de l'intégrale comme valeur moyenne comme une façon de définir naturellement la probabilité uniforme sur un ensemble infini. Comme exemple élémentaire, il considère l'exemple fourni par l'ensemble des entiers naturels et présente les fondements de ce que nous appelons aujourd'hui la théorie probabiliste des nombres. Si f est une fonction définie sur $I\!N$ (f peut typiquement être l'indicatrice d'un ensemble $A \subset I\!N$), l'espérance de f est définie comme la limite de $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(k)$ quand N tend vers l'infini. En particulier,

$$P(A) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\mathrm{Card}\{n \in I\!N, n \in A\}.$$

Avec cette définition, si on tire au hasard un nombre dans $I\!N$, il y a une chance sur deux qu'il soit pair, ce qui constitue un résultat rassurant pour l'esprit ...

Dans ses recherches, Gateaux s'intéresse principalement au cas de la sphère de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur [0,1]. En fait, Gateaux se limite au sous-ensemble des fonctions continues. Comme Lévy l'explique à Fréchet dans une lettre prolixe datée du 16 février 1919 (Lettre 5 de [3]), il est plus naturel de considérer des fonctions mesurables, ce qui revient à travailler avec l'espace (maintenant) usuel L^2.

Gateaux commence par considérer des fonctionnelles du type $U : x \mapsto f[x(\alpha_1)]$ où x est un point de l'espace fonctionnel (une *ligne*), f une fonction réelle continue et α_1 un point fixé dans [0,1]. Il introduit la n-ième section de la sphère $\int_0^1 x(\alpha)^2 d\alpha = R^2$ comme étant l'ensemble des fonctions x qui prennent des valeurs constantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sur chaque sous-intervalle $[0, \frac{1}{n}], \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1]$ et de ce fait telles que $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = nR^2$. Comme α_1 est fixé, $x(\alpha_1)$ est une des coordonnées quand x est pris dans la n-ième section et est de ce fait le volume ($n-2$ dimensionnel) de l'intersection de la section avec l'ensemble $x(\alpha_1) = z$ (avec $0 \leq z^2 \leq nR^2$ ou de manière équivalente $-\sqrt{n}R \leq z \leq \sqrt{n}R$). La valeur de ce volume est

$$(\sqrt{nR^2 - z^2})^{n-1}.V_{n-1}$$

où V_n est le volume de la sphère unité en dimension n. On voit facilement que V_n satisfait la formule de récurrence $V_n = 2V_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$. Finalement, la moyenne de la fonctionnelle U sur la n-ième section est donnée par

$$\frac{1}{V_n(R\sqrt{n})^n}\int_{-\sqrt{n}R}^{\sqrt{n}R} f(x)V_{n-1}(\sqrt{nR^2 - x^2})^{n-1}dx = \frac{V_{n-1}}{V_n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(R\sqrt{n}\sin\theta)\cos^n\theta d\theta =$$

$$\frac{1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(R\sqrt{n}\sin\theta)\cos^n\theta d\theta.$$

On voit que les valeurs prépondérantes de θ dans l'intégrale de droite sont celles autour de 0, cependant que l'autre est connue pour être équivalente à $\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$. Sous "certaines conditions de régularité" pour f, l'expression précédente est de ce fait approximativement égale à

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}\int_{-\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}^{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}} f(R\sqrt{n}\sin\theta)\cos^n\theta d\theta$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(R\sqrt{n}\sin\frac{\psi}{\sqrt{n}})\cos^n\frac{\psi}{\sqrt{n}}\frac{d\psi}{\sqrt{n}}$$

pour tout $\alpha > 0$ et n grand.
Utilisant un développement de Taylor, l'expression précédente devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(R\sqrt{n}[\frac{\psi}{\sqrt{n}} + O(\frac{\psi^2}{n})])(1 - \frac{\psi^2}{2n} + O(\frac{1}{n^2}))^n d\psi.$$

Faisant tendre n vers l'infini, ceci converge vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(R\psi)\mathrm{e}^{-\frac{\psi^2}{2}} d\psi$, et laissant α tendre vers l'infini, on obtient la limite

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(R\psi)e^{-\frac{\psi^2}{2}} d\psi \tag{1}$$

qui est définie par Gateaux comme l'intégrale de U sur la sphère de l'espace fonctionnel. Gateaux affirme alors que ceci peut être généralisé à des fonctionnelles plus générales. La forme la plus compliquée qu'il considère est

$$U(x) = \int_0^1 d\alpha_1 \ldots \int_0^1 d\alpha_p f[x(\alpha_1), \ldots, x(\alpha_p), \alpha_1, \ldots, \alpha_p]$$

pour laquelle la valeur moyenne est donnée par

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_0^1 d\alpha_1 \ldots \int_0^1 d\alpha_p \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_p f(Rx_1, \ldots, Rx_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)\mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_p^2}{2}}. \tag{2}$$

L'existence rigoureuse de la limite n'est pas justifiée par Gateaux, comme Lévy l'écrit à Fréchet dans la lettre qu'il lui envoie le 12 février 1919. Il est clair que pour Gateaux, comme Lévy d'ailleurs le signale lui même en préambule de [21], l'état dans lequel il avait laissé ses papiers n'était pas définitif. Dans la longue note que Lévy ajoute à la fin du même article ([21], p.67), il décrit plusieurs tentatives faites par Gateaux pour obtenir le passage à la limite dans diverses situations. Il est toutefois clair pour Lévy que la priorité est de compléter les lacunes dans les preuves de Gateaux et d'essayer d'obtenir l'existence de la valeur moyenne pour les fonctions les plus générales possibles.
Gateaux avait suggéré que la propriété importante à considérer était la continuité de la fonctionnelle à intégrer, au sens où elle était bien approximée par la suite de ses projections sur la n-ième section. Lévy écrivit dans la lettre à Fréchet mentionnée au paragraphe précédent qu'avec une telle hypothèse, la définition de l'intégrale comme moyenne n'était effectivement pas difficile à justifier mais qu'elle était beaucoup trop restrictive. Dans sa très longue lettre suivante à Fréchet (datée du 16 février 1919), Lévy explique pourquoi ([3], p.115). En fait, si la fonctionnelle est uniformément approchée par sa projection sur la n-ième section, elle se trouve être un cas particulier de fonction harmonique. Dans la rédaction finale de ces considérations par Lévy (Chapitre VI de [35]), celui-ci sera même encore plus radical dans ses conclusions. Les fonctionnelles de Gateaux sont en fait presque constantes dans l'espace de dimension infinie et de ce fait, il n'est pas étonnant que la valeur moyenne existe ou qu'elles soient harmoniques ([35], section 138). Lévy remplace en fait la continuité spatiale requise par l'hypothèse de Gateaux par une continuité en loi. Ceci est déjà perceptible dans la Lettre 5 à Fréchet ([3], pp.116-117) quand il écrit : *Je vois que si la taille des différentes valeurs de x qui contribuent dans l'intervalle considéré à produire la valeur moyenne est importante, en revanche il est indifférent de savoir en quels points ces valeurs sont prises.* Dans [35], Lévy a finalement conclu que la bonne formulation pour ces problèmes est un cadre probabiliste, et il est assez impressionnant de voir comment dans son livre

(et notamment dans le chapitre VI), il use de la théorie des probabilités pour justifier les passages à la limite en utilisant la loi des grands nombres.

Dans un sens, il est surprenant de ne trouver aucune référence aux probabilités dans les papiers de Gateaux, et notamment quelques observations sur l'apparition remarquable de la loi gaussienne dans l'expression limite (1). Ce résultat, connu habituellement aujourd'hui sous le nom de *lemme de Poincaré*, n'a en fait rien à voir avec ce dernier, comme l'ont déjà mentionné Diaconis et Freedman [10] ainsi que Stroock [48]. A l'exception, passée inaperçue, de Mehler qui obtint ce résultat en 1866 dans un contexte purement analytique (voir [48] pour une référence exacte), ce fut Borel qui le premier démontra en 1906 la convergence vers la mesure gaussienne quand la dimension tend vers l'infini. Dans [5], republié en tant que "Note I' dans son livre [6], Borel s'intéressait à la mécanique statistique, et plus précisément à la théorie cinétique des gaz de Maxwell et Boltzmann. Comme il le mentionnait dans l'introduction, son but était d'arriver à convaincre ceux qui regardaient cette théorie avec suspicion. *Leurs scrupules sont légitimes jusqu'à un certain point : on ne saurait reprocher à un mathématicien son amour de la rigueur ; mais il me semble possible de les combler.* Et c'est en construisant un modèle pour lequel on pouvait déduire la loi de Maxwell-Boltzmann de distribution des vitesses des particules que Borel fut conduit à des considérations sur les sphères en grande dimension. Ces sphères représentent des surfaces d'énergie cinétique totale constante dans l'espace des phases. Dans le complément à la traduction de l'article des Ehrenfest sur la mécanique statistique qu'il réalisa pour l' *Encyclopédie des Sciences Mathématiques* ([7] p.273), Borel mentionne les études sur la géométrie de l'espace de dimension n comme le premier exemple de recherches mathématiques inspirées par la mécanique statistique. Il affirme même non sans audace qu'on peut considérer tout résultat sur les surfaces et les volumes en grande dimension comme relié à la mécanique statistique.

Dans son article fondateur de 1860, Maxwell avait observé la coïncidence entre la loi de probabilités des vitesses des particules et celle *gouvernant la distribution des erreurs parmi des observations quand on utilise la méthode dite des moindres carrés* ([42], Prop.IV et les commentaires qui suivent). Dans [5], Borel ne mentionne pas ce point. Par contre, il le fait dans [6] (p.66) mais sans aucune interprétation de nature probabiliste : pour lui, le fait intéressant dans l'apparition de la distribution gaussienne est uniquement que cette fonction est bien tabulée, et ceci autorise son utilisation pour des calculs.

Lévy semble bien être le premier à avoir interprété les considérations précédentes sous un jour probabiliste. Il voit en particulier la relation (2) comme découlant d'une convergence en loi du vecteur $(x_1, \ldots, x_p)$ où $(x_1, \ldots, x_n)$ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur la sphère $S_n(\sqrt{n})$ vers des variables gaussiennes indépendantes quand n tend vers l'infini ([35], pp.267-268). Dans la Remarque 20, p.282, Lévy observe qu'un raisonnement de type probabiliste utilisant la loi des grands nombres permet alors de redémontrer la formule (2). Il est intéressant de constater que les probabilités n'apparaissent pas dans les notes que Lévy a publiées juste après la guerre sur ses travaux sur les fonctions de ligne. C'est seulement dans son livre [35] qu'il prit conscience de ce cadre naturel, au moment précis où il commença à s'intéresser aux probabilités pour des raisons d'enseignement : nous renvoyons le lecteur intéressé à [3] où cette histoire est discutée en détail. A ce moment, une sorte de jonction extraordinaire semble s'être produite dans l'esprit de Lévy lui permettant d'unifier ses découvertes mathématiques sous une présentation probabiliste. Dès sa lettre à Fréchet du 16 décembre 1919, il est possible de déceler comment la mesure de Wiener pointe quand Lévy considère une série de fonctions orthogonales dans L^2 pour généraliser les sections de Gateaux. Dans son autobiographie ([37]), Lévy, toujours prêt à gémir sur les occasions manquées, avait signalé combien dans le livre [35], *il avait été près de la mesure de Wiener*. Mais ce n'est pas une formulation rhétorique. Il était en effet si proche que Wiener, quand il s'entretint avec Lévy en 1922, a pu immédiatement voir comment les considérations de Lévy pour définir une intégrale sur la sphère infinie-dimensionnelle sont précisément ce qu'il pouvait utiliser pour définir son espace différentiel et pour construire la mesure de Wiener du mouvement brownien. Deux ans plus tôt, il avait eu l'intention d'utiliser les résultats obtenus par Daniell qui, indépendamment de Gateaux, avait aussi défini une intégrale à travers une limite de moyennes([9]). Dans [51] (note de bas de page*, p.67), Wiener mentionna qu'il venait de découvrir l'existence des découvertes antérieures de Gateaux dans [20]. En 1923, au début de son grand article [52] (p.56), Wiener rend hommage à Gateaux et à Lévy pour avoir réalisé les études les plus complètes sur l'intégration en dimension infinie. Il donne aussi crédit à Lévy (pp.56-57) de lui avoir expliqué comment ces résultats pourraient être exploités. Bourbaki, quand il daigna dire quelques mots sur les probabilités dans le chapitre dédié à l'intégration dans les espaces non localement compacts d'une réédition tardive de ses *Eléments d'histoire des mathématiques* ([8]), mentionne ce cheminement qui relie les considérations de Borel sur la théorie cinétique des gaz à la mesure de Wiener avec Gateaux et Lévy comme étapes fondamentales. Nous renvoyons le lecteur à •7 dans [3] pour plus de détails sur les débuts de la théorie mathématique du mouvement brownien. Dans son papier [38], McKean a mentionné comment penser à la mesure de Wiener comme une loi uniforme sur *la sphère de dimension infinie de rayon* $\sqrt{\infty}$ (une conséquence directe des considérations de Lévy dans [35]) a été utilisé par la suite avec profit par des mathématiciens japonais dans les années 1960 pour décrire la géométrie du mouvement brownien. Dans une autre direction, en 1969, Gallardo ([14]) fit la remarque intéressante que le *Lemme de Poincaré* pouvait être relié au fait que si $X^n(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))$ est un mouvement brownien de dimension n issu de 0, si on désigne par T_n le premier temps de passage de X^n sur la sphère centrée à l'origine et de rayon $\sqrt{n}$, alors $T_n \to 1$ en probabilités et $X^n(T_n)$ suit la loi uniforme sur la sphère n-dimensionnelle de rayon $\sqrt{n}$. Yor a par la suite développé ces considérations (see [53]).

CONCLUSION

On a souvent dit qu'après la Première Guerre Mondiale, les Grandes Ecoles en France, et en particulier l'Ecole Normale Supérieure, étaient peuplées des fantômes des élèves des promotions des années 1910 qui avaient disparu pendant le conflit. Naturellement, les victimes de la Grande Guerre étaient essentiellement de très jeune gens qui avaient à peine fini leurs études et dont le nom est maintenant oublié.

De ce fait, l'exemple de René Gateaux, qui mourut à l'âge de 25 ans en octobre 1914 apparaît à la fois comme représentatif de cette génération sacrifiée, mais aussi très exceptionnel, car bien qu'inachevés, ses travaux mathématiques purent être récupérés, étudiés et étendus par Paul Lévy à la prolifique carrière duquel ils servirent de tremplin. Comme nous avons essayé de le montrer, c'est clairement à ce travail d'édition et d'extension de Lévy, remarqué ensuite par Wiener qui s'en inspira, que nous devons de nous souvenir encore aujourd'hui d'un très jeune mathématicien nommé René Gateaux.

RÉFÉRENCES

[1] Ecole Normale Supérieure : Annuaire des Anciens Elèves, 1918

[2] Aragon, Louis : La Guerre et ce qui s'en suivit in *Le Roman Inachevé* (p.60), Gallimard, 1956

[3] Paul Lévy-Maurice Fréchet : 50 ans de correspondance mathématique, éditée par Barbut Marc ,Locker Bernard et Mazliak Laurent , Hermann, 2003

[4] Becker, Jean-Jacques : La Grande Guerre, Que Sais-Je ?, PUF, 2004

[5] Borel, Emile : Sur les principes de la théorie cinétique des gaz, Ann. ENS, 23, 1906

[6] Borel, Emile : Introduction géométrique à quelques théories physiques, Gauthier-Villars, 1914 (on- line at historical.library.cornell.edu/math/)

[7] Borel, Emile : Mécanique statistique, d'après l'article allemand the P.Ehrenfest et T.Ehrenfest., Encyclopédie des Sciences Mathématiques, Tome IV, Vol.1, 188-292, 1915 (réédition J.Gabay, 1991 ; on-line on gallica.bnf.fr)

[8] Bourbaki, Nicolas : Eléments d'histoire des mathématiques, Masson, 1984

[9] Daniell, P.J. : Integrals in an infinite number of dimension, Annals of Math. , 20, 281-288. 1918

[10] Diaconis , Persi and Freedman, David : A dozen of de Finetti-style results in search of a theory, Ann.IHP, 23, 397-423, 1987

[11] Encyclopédie de la Grande Guerre 1914-1918, sous la direction de S.Audoin-Rouzeau et J-J.Becker, Bayard, 2004

[12] Ecole Normale Supérieure : séance de rentrée du 23 mars 1919. Discours de Raymond Poincaré et d'Ernest Lavisse. Paris, Imprimerie Money, 1919

[13] Fréchet, Maurice : Sur les fonctionnelles continues, Ann.ENS, 27, 193-216, 1910

[14] Gallardo, Léonard : Au sujet du contenu probabiliste d'un lemme de Henri Poincaré, Ann.Univ.Clermont, 19, 1969

[15] Gateaux, René : Dossier Militaire, Archives de l'Armée de Terre, Château de Vincennes, cote 5Ye97543.

[16] Gateaux, René : Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques, CRAS Paris, 157, 325-327, 1913

[17] Gateaux, René : Sur la représentation des fonctionnelles continues, Rend.Acc.Linc. , 22-2, 646-648, 1913

[18] Gateaux, René : Sur la représentation des fonctionnelles continues, Rend.Acc.Linc. , 23-1, 310-315, 1914

[19] Gateaux, René : Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation, Rend.Acc.Linc. , 23-1, 405-408, 1914

[20] Gateaux, René : Représentation d'une fonctionnelle continue, satisfaisant à la condition du cycle fermé, Rend.Acc.Linc. , 23-1, 481-486, 1914

[21] Gateaux, René : Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel et sur la théorie du potentiel, Bull.S.M.F, 47, 47-70, 1919

[22] Gateaux, René : Fonctions d'une infinité de variables indépendantes, Bull.S.M.F, 47, 70-96, 1919

[23] Gateaux, René : Sur diverses questions de calcul fonctionnel, Bull.S.M.F, 50, 1-37, 1922

[24] Guéhenno, Jean : Journal d'un homme de 40 ans, Grasset, 1934

[25] Gugelot, Frédéric : La conversion des intellectuels, CNRS , 1998

[26] Hadamard, Jacques : Sur le principe de Dirichlet, Bull.SMF, 34, 135-138, 1906

[27] Hadamard, Jacques : Rapport sur le Prix Francœur, CRAS Paris, 18 décembre 1916, 791-792,

[28] Havlova Veronika, Mazliak Laurent et Šišma Pavel : Le début des relations mathématiques franco-tchécoslovaques vu à travers la correspondance Fréchet-Hostinský, Journal Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique (www.jehps.net), 1,1, 2005

[29] Journal Officiel de la République Française, 23 Mars 1905, Imprimerie Nationale

[30] Journal Officiel de la République Française, 17 juillet 1889, Imprimerie Nationale

[31] Kellogg, Oliver Dimon : Foundations of Potential theory, Dover, 1953 (reprint of the 1st Edition, Springer 1929)

[32] Kolmogorov, Andrei N. : Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, II 3, Julius Springer, Berlin 1933

[33] Krall , Giulio : L'opera scientifica di Vito Volterra in *Vito Volterra, nel primo centenario della nascita 1860-1960*, Acc.Lincei, Roma, 1961

[34] *Homo fugit velut umbra*, Anonymous Italian poem, ca 1600

[35] Lévy, Paul : Leçons d'Analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, 1922

[36] Lévy, Paul : Les lois de probabilités dans les ensembles abstraits, Revue Méta.Morale, 1924

[37] Lévy, Paul : Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien, Blanchard, 1970

[38] McKean, H.P. : Geometry of differential space, Ann.Prob., 1, 2, 197-206, 1973

[39] Mac Millan, Margaret : Peacemakers, J.Murray, 2001

[40] Maheut Gilbert : Itinéraires de mathématiciens, Quadrature, 37, 21-23, 2000

[41] Marbo, Camille : A travers deux siècles, souvenirs et rencontres (1883-1967), Grasset, 1967

[42] HADAMARD

[43] Maxwell, James Clerk : Illustrations of the Dynamical Theory of Gases, Phil.Mag., 19, 19-32, 1860

[44] Guide Michelin pour les chauffeurs et les vélocipédistes, Michelin, 1989 (fac-simile de l'édition de 1900).

[45] Nebout, Antoine : Vitry le François pendant la Grande Guerre, Imprimerie centrale de Vitry, 1922

[46] Prochasson, Christophe : Les intellectuels, *in* Encyclopédie de la Grande Guerre 1914-1918, sous la direction de S.Audoin-Rouzeau et J-J.Becker, Bayard, 2004

[47] Rusconi, Gian Enrico : L'azzardo del 1915, Coll. Intersezioni, Il Mulino, 2005

[48] Stewart, Ian : Galois Theory, Chapman-and-Hall, 1989

[49] Stroock, Daniel W. : Probability theory. An analytic view. Cambridge University Press, 1994

[50] Volterra, Vito : *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1913

[51] Volterra, Vito : *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913

[52] Wiener, Norbert : The mean of a functional of arbitrary elements, Annals of Math. , 22, 66-72. ,1920

[53] Wiener, Norbert : Differential-space, American M. S. Bull. 29, 105 , 1923

[54] Yor, Marc : Some aspects of Brownian motion, Part II. Lecture Notes in mathematics ETH Zürich, Birkhaüser, 1997