

Министерство образования и науки Российской Федерации
Научно-методический совет по теоретической механике
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Институт механики

СБОРНИК
научно-методических статей
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Выпуск 26

Под редакцией профессора *Ю. Г. Мартыненко*

Издается с 1968 года

Издательство Московского университета
2006

УДК531
ББК 22.21
С 23

Редакционная коллегия:

Ю. Г. Мартыненко (гл. редактор), *В. А. Самсонов* (зам. гл. редактора), *Ю. Д. Селюцкий* (отв. секретарь), *В. В. Александров*,
К. М. Быстров, *В. Г. Веретенников*, *В. В. Дубинин*, *В. Ф. Журавлев*,
А. В. Карапетян, *В. В. Козлов*, *В. А. Космодемьянский*,
В. В. Лапшин, *В. М. Морозов*, *Р. Г. Мухарлямов*, *И. В. Новожилов*,
Ю. С. Саратов, *С. К. Слезкинский*, *К. Е. Якимова*

Рецензенты:

член-корр. РАН *В. В. Белецкий*,
доктор физ.-матем. наук *А. И. Кобрин*

Издание осуществлено при поддержке Института механики МГУ

С23 Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика
Вып. 26./ Под редакцией академика МАН ВШ Ю. Г. Мартыненко. – М.:
Изд-во Московского университета, 2006. – 180 с., ил.

ISBN 5-211 -05301-x

Сборник содержит статьи по общим и методическим вопросам теоретической механики, по применению новых информационных технологий в преподавании, интересные механические задачи и информацию о различных мероприятиях, связанных с теоретической механикой.

Несколько статей посвящены юбилейным датам и тем утратам, которые теоретическая механика понесла в последнее время.

Сборник дает возможность преподавателям, аспирантам и студентам высших учебных заведений России сориентироваться в современных тенденциях развития теоретической механики, а также перенимать опыт новейших методических разработок.

УДК 531
ББК 22.211

ISBN 5-211 -05301-x

© Научно-методический
совет по теоретической механике
Минобразования РФ, 2006

**ТРЕТЬЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ В СЛУЧАЕ ИЗОТРОПНОГО
ОСЦИЛЛЯТОРА**

Специалисты по инерциальной навигации рассматривают в качестве третьей задачи механики установление движения той неинерциальной системы отсчета, в которой поведение некоторой материальной системы под действием заданных сил известно из наблюдений. Такова типичная постановка задачи в инерциальной навигации [1,2].

Один из способов решения такой задачи состоит в том, что предполагаются известными проекции угловой скорости подвижной системы отсчета на её оси, а также и проекции абсолютного ускорения её начала на те же оси. После чего угловая ориентация подвижных осей определяется решением кинематических уравнений Пуассона, а скорость и положение начала подвижной системы определяется интегрированием ускорения после проектирования его на инерциальные оси.

Для решения этой задачи используются три гироскопа и три ньютонометра.

В настоящей заметке полную информацию о движении подвижной системы отсчета удастся получить на основе наблюдения колебаний пространственного изотропного осциллятора.

Будем предполагать вначале, что подвижный объект совершает вращение вокруг неподвижной точки и эта точка совпадает с центром колебаний осциллятора. Тогда уравнения пространственного изотропного осциллятора, находящегося под воздействием только упругих сил, записанные в инерциальной системе отсчета, имеют вид

$$\ddot{x} + x = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \quad (1)$$

где частота собственных колебаний осциллятора определяет единицу измерения времени.

В системе отсчета, связанной с самим объектом, уравнения движения

$$\ddot{y} + y + 2A^T \dot{A}\dot{y} + A^T \ddot{A}y = 0, \quad (2)$$

Научное издание

СБОРНИК НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИХ СТАТЕЙ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Выпуск 26

Под редакцией академика МАН ВШ *Ю. Г. Мартыненко*

Научный редактор *В. А. Самсонов*
Технический редактор *И. В. Топорнина*
Редактор *Ю. Д. Селюцкий*

Компьютерный дизайн и верстка *М. З. Досаев, Т. С. Сумин*

Подписано в печать 21.09.2006. Формат 60х90/16. Бумага офс. № 1.
Уч.-изд. л. 12,6. Тираж 400 экз.

Ордена «Знак Почета» Издательство Московского университета
103009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ООО «Инсайт полиграфик»
119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1.

получаются после перехода от x к y посредством ортогонального преобразования с матрицей A :

$$x = Ay; \quad (3)$$

В наиболее общей форме задача, которая ставится для уравнений (2) состоит в восстановлении матрицы ориентации $A(t)$ по наблюдениям колебаний осциллятора $y(t)$ в связанной системе отсчета.

Уравнения второго порядка (2) относительно искомой матрицы A могут быть записаны в виде системы двух уравнений первого порядка после введения обозначения для матрицы угловой скорости $\Omega = A^T \dot{A}$:

$$\dot{\Omega}y = -\Omega^2 y - 2\Omega\dot{y} - \ddot{y} - y$$

$$\dot{A} = A\Omega$$

Первое из этих уравнений представляет уравнение Риккати относительно матрицы угловой скорости Ω , второе уравнение Пуассона для матрицы A .

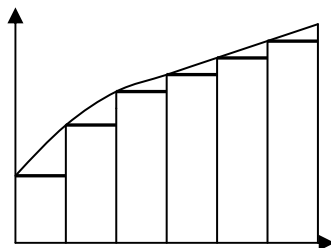


Рис. 1

Будем далее предполагать, что частота собственных колебаний осциллятора много больше модуля угловой скорости подвижного объекта, тогда приближенно решение системы (2) относительно матрицы $A(t)$ можно искать в виде кусочно-постоянной функции, считая $A(t) = const$ для

$2\pi(n-1) < t < 2\pi n$, где n пробегает все целые значения (рис. 1).

Из теории интеграла Римана следует, что последовательность ступенчатых функций равномерно сходится к функции $A(t)$ тогда и только тогда, когда эта функция непрерывная, или содержит только разрывы первого рода. Это означает, что для любой заданной точности вычисления матрицы A всегда можно выбрать период собственных колебаний осциллятора таким, что такая точность будет гарантирована. В частности, если функция $A(t)$ гладкая, то нетрудно выписать оцен-

ИСТОРИЯ МЕХАНИКИ

<i>Рощина Е.Н.</i> К трехсотлетию со дня рождения Леонарда Эйлера	121
<i>Самсонов В.А.</i> Николай Алексеевич Слезкин	126
<i>Буров А.А.</i> Эдвард Джон Раус	128

ИНФОРМАЦИЯ

<i>Довбыш С.А., Локшин Б.Я., Салмина М.А.</i> О Научно-Образовательной Программе Института механики мгу им. М.В. Ломоносова для школьников по механике, мехатронике и робототехнике	134
Сообщение о III Всероссийском совещании-семинаре заведующих кафедрами теоретической механики в Перми	137
Сообщение о международной научно-методической конференции в Тульском государственном университете	139
Совещание-семинар заведующих кафедрами теоретической механики вузов южного федерального округа, ассоциации университетов прикаспийских государств	140
О российской олимпиаде по теоретической механике	143
<i>Феоктистова О.П.</i> Тесты в курсе теоретической механики	147
<i>Салмина М.А.</i> Механика, мехатроника и робототехника	1479
Информационное сообщение о заседаниях НМС по теоретической механике	150

НАШИ УТРАТЫ

<i>Игорь Васильевич Новожилов</i>	151
<i>Голубев Ю.Ф., Платонов А.К.</i> Д.Е. Охоцимский – создатель научной школы по исследованию и разработке мехатронных систем	155
<i>Харин О.Н.</i> Щелкачев – гражданин, ученый, педагог	161
<i>Обносков К.Б., Качанов Ф.П., Цивильский В.Л.</i>	
<i>Семен Михайлович Тарг</i>	169

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ	
Журавлев В.Ф. Третья задача механики в случае изотропного осциллятора	3
Мартыненко Ю.Г. Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела около неподвижной точки	12
Карпетян А.В. Инвариантные множества механических систем с первыми интегралами	21
 МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ	
Сазонов В.В. Комментарии к выводу уравнений Лагранжа второго рода в курсе теоретической механики	27
Панишина А.В., Пожалостин А.А. О некоторых свойствах свободных колебаний консервативной системы и их проявлении в прикладных задачах	36
Синицын В.А. О динамике систем с переменными массами	47
Локтев В.И. Сравнение как метод познания основ теоретической механики	54
 СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ	
Зацепин М.Ф., Капустина О.М. Решение задач статики системы с неустойчивыми связями с помощью "MATHEMATICA"	61
Невенчанная Т.О., Павловский В.Е., Пономарева Е.В. Дистанционная обучающая система по механике: концепция, структура, программная реализация	71
 ИНТЕРЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ И ЗАДАЧИ	
Локишин Б.Я., Окунев Ю.М. О движении неоднородного шара в воздушной среде	79
Лапшин В.В., Пожалостин А.А. Упругий удар тела о поверхность	87
Коровайцев А.В. Об одном способе решения задачи движения материальной точки в среде с квадратичным законом сопротивления	101
Бугрова М.И., Привалов В.А. О винтовом движении тяжелого тела в сопротивляющейся среде	106
Розенблат Г.М. Об одной задаче динамики твердого тела при наличии сил сухого трения	113

ку сверху для периода собственных колебаний, исходя из оценки сверху для нормы производной этой функции.

На каждом таком интервале общее решение системы (2) имеет вид

$$y = u \cos t + v \sin t \quad (4)$$

где u и v - трехмерные векторы произвольных постоянных. Такое решение является, очевидно, точным для уравнений в инерциальной системе отсчета. Приближенное решение (4) имеет прозрачный смысл - за время одного колебания осциллятора форма его колебаний в связанной системе меняется пренебрежимо мало.

Траектория, определяемая соотношениями (4), представляет собой параметрическую запись произвольного эллипса, включая в качестве частных случаев, проходящие через начало координат отрезки прямых и окружности с центром в том же начале. Введём следующие обозначения (рис.2):

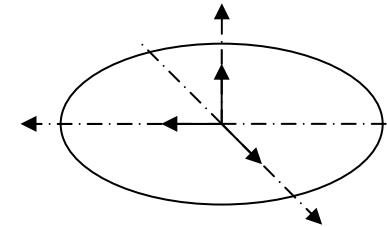


Рис. 2

e_1 – единичный вектор большой полуоси эллипса, r – длина этой полуоси,

e_2 – единичный вектор малой полуоси, k – длина этой полуоси,

e_3 – единичный вектор перпендикуляра к плоскости эллипса ($e_3 = e_1 \times e_2$).

Эти векторы являются столбцами матрицы $A = \|e_1, e_2, e_3\|$. Эта матрица позволяет связать запись эллипса в подвижных осях с его записью в инерциальных осях

$$A(u \cos t + v \sin t) = \begin{pmatrix} r \cos(t + \tau) \\ k \sin(t + \tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \tau \\ k \sin \tau \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -r \sin \tau \\ k \cos \tau \\ 0 \end{pmatrix} \sin t, \quad (5)$$

где угол τ определяет положение точки на эллипсе в момент времени $t = 0$.

Выразим эту матрицу явно через векторы произвольных постоянных u и v . Для этого заметим, что соотношение (5) эквивалентно следующим двум соотношениям

$$Au = \begin{vmatrix} r \cos \tau \\ k \sin \tau \\ 0 \end{vmatrix}; \quad Av = \begin{vmatrix} -r \sin \tau \\ k \cos \tau \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (6)$$

и вычислим векторное произведение векторов (6)

$$Au \times Av = \begin{vmatrix} r \cos \tau \\ k \sin \tau \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -r \sin \tau \\ k \cos \tau \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{vmatrix} \quad (7)$$

Величина $K = rk$, представляющая собой модуль момента количества движения колеблющейся частицы, носит название квадратуры (πk - площадь эллипса).

Поскольку, в силу инвариантности векторного произведения по отношению к группе вращения, имеет место тождество $Au \times Av = A(u \times v)$, то в результате можем записать следующее матричное равенство

$$A \|u, v, u \times v\| = \begin{vmatrix} r \cos \tau & -r \sin \tau & 0 \\ k \sin \tau & k \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & K \end{vmatrix} = B, \quad (8)$$

которое может быть явно разрешено относительно матрицы A

$$A = B \|u, v, u \times v\|^{-1}, (u \times v \neq 0) \quad (9)$$

Если $u \times v = 0$, то эллипс вырождается в отрезок прямой, информация о повороте объекта вокруг этой прямой теряется, что и приводит в этом случае к вырождению матрицы A .

Если выразить r, k и τ через векторы произвольных постоянных u и v , то матрица A , определяющая ориентацию эллипса (4) относительно исходного трехгранника будет выражена только через u и v , т.е. только через данные наблюдений. Поскольку в случае вращения этого трехгранника эллипс (4) остается неподвижным в инерциальной системе отсчета, то матрица A определяет ориентацию подвижного объекта в абсолютном пространстве.

Для нахождения требуемых параметров вычислим скалярные произведения векторов (6) друг на друга и самих на себя

физики, философии, но и по истории, искусству, живописи, филателии и т.д. Он был чуткий, отзывчивый человек, по-отечески заботился о сотрудниках своих кафедр. Личность С.М. Тарга является высочайшим моральным образцом для его коллег. В военной академии им. Ф.Э. Дзержинского и в МГОУ Семёна Михайловича не только глубоко уважали, но и искренне любили, как преподаватели, так и слушатели и студенты.

Во все годы служебной и творческой деятельности С.М. Тарг также много уделял общественно-политической работе. С 1925 г., до вступления в кандидаты ВКП(б) (1938 г.), был членом ВЛКСМ. С марта 1940 г. являлся членом КПСС. В течение многих лет был секретарем первичной партийной организации обще-академических кафедр академии им. Дзержинского и членом бюро этой организации, избирался членом Партийной комиссии академии, руководил семинарами сети партпросвещения, вёл другую пропагандистскую работу.

За активную и добросовестную работу в мирное время С.М. Тарг был награждён орденом Трудового Красного знамени, а за участие в Великой Отечественной войне – 2-я орденами Красной звезды и 6-ю медалями.

С конца 1964 г. С.М. Тарг был членом двух составов экспертной комиссии ВАК по механике.

С этого же времени как заместитель председателя Научно-методического совета по теоретической механике МВ и ССО СССР он часто выступал с докладами, особенно по вопросам методики преподавания механики на городских семинарах и на факультетах повышения квалификации преподавательского состава, как в Москве, так и в других городах Советского Союза.

Написал ряд статей методологического характера: по вопросам построения и содержания программ курса теоретической механики в сборнике «Теоретическая механика во ВТУЗах» («Высшая школа», 1971 г.), «Учебное телевидение должно стать ВУЗом на экране» в сборнике «Опыт применения телевидения в учебном процессе ВУЗов» (Ленинград, 1974 г.) и др. Продолжал перерабатывать и дополнять свой широко известный учебник «Краткий курс теоретической механики» (последнее издание вышло в 2003 г.). Соавтор сборников рекомендуемых терминов и обозначений «Теоретическая механика» издательства «Наука» 1977, 1980 и 1984 гг.

С осени 1972 г. по 1990 г. профессор С.М. Тарг работает во Всесоюзном заочном политехническом институте (ныне это Московский государственный открытый университет – МГОУ) в должности заведующего кафедрой теоретической механики без конкурса на основе специального приказа Министерства Высшего и Среднего образования СССР. И вновь он занимается «рутинной» работой: сплочение коллектива, повышения педагогического мастерства, создание более совершенных методических пособий и т.д. и т.п.. В частности под его руководством и при его участии вышли в свет сборники «Контрольных заданий» с методическими указаниями для студентов-заочников по ряду технических специальностей (Изд-во «Высшая школа», 1976, 1978, 1980, 1982, 1983, 1988, 1989 гг. тиражами по 80 000 – 160 000 экземпляров). По этим материалам работали заочники практически всех ВУЗов страны.

С.М. Тарг являлся прекрасным педагогом, щедро отдавал свои знания слушателям и студентам. При этом он стремился не только дать знания, но и привить им умение логически мыслить. Тактично воспитывал коллективы руководимых им кафедр, добиваясь повышения научного и педагогического мастерства у всех их членов.

С.М. Тарг был интереснейшим собеседником, т.к. обладал глубокими знаниями и широкой эрудицией не только в области механики,

$$\begin{aligned} u \cdot u = Au \cdot Au &= \begin{vmatrix} r \cos \tau \\ k \sin \tau \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r \cos \tau \\ k \sin \tau \\ 0 \end{vmatrix} = r^2 \cos^2 \tau + k^2 \sin^2 \tau; \\ u \cdot v = Au \cdot Av &= \begin{vmatrix} r \cos \tau \\ k \sin \tau \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -r \sin \tau \\ k \cos \tau \\ 0 \end{vmatrix} = (k^2 - r^2) \cos \tau \sin \tau; \\ v \cdot v = Av \cdot Av &= \begin{vmatrix} -r \sin \tau \\ k \cos \tau \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -r \sin \tau \\ k \cos \tau \\ 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin^2 \tau + k^2 \cos^2 \tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношения (10) позволяют найти

$$u^2 + v^2 = r^2 + k^2, \quad u^2 - v^2 = (r^2 - k^2) \cos 2\tau \quad (11)$$

Это дает возможность получить окончательно

$$\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2} [u^2 + v^2 \pm \sqrt{(u^2 - v^2)^2 + 4(u \cdot v)^2}]}; \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} 2\tau = \frac{2u \cdot v}{v^2 - u^2} \quad u^2 - v^2 \neq 0.$$

Заметим, что входящая в (8) и (9) квадратура $K = rk$ также может вычисляться непосредственно через u и v . Из (12) следует

$$rk = \sqrt{u^2 v^2 - (uv)^2} = |u \times v| \quad (13)$$

В случае $u^2 - v^2 = 0$ и одновременно $u \cdot v = 0$ угол τ не определен и траекторией точки, как это видно из (12), является окружность.

Равенства (12) совместно с (9) завершают задачу построения матрицы A , т.е. матрицы ориентации подвижного триэдра относительно неподвижного в случаях, когда траектория осциллятора в инерциальной системе отсчета не является ни отрезком прямой, ни окружностью.

Выражения (9) и (12) носят общий характер, они не зависят от того, каким образом вычисляются по данным измерений векторные константы u и v . Между тем эти выражения существенно упрощаются, если конкретизировать процедуру измерения u и v . Будем считать, что для измерений используется отсчетный генератор, частота которого равна частоте рассматриваемого осциллятора. Этот генератор позволяет определять $y(t)$ в избранные моменты времени. Поэтому, в соответствии с (4) необходимые константы могут быть найдены так

$$u = y(2\pi(n-1)), v = y(\pi/2 + 2\pi(n-1)), n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Далее, посредством обратной связи можно вводить поправку на частоту генератора, пропорциональную скалярному произведению векторов (14): $\dot{\tau} = a(u \cdot v)$. Это даёт возможность в силу (10) получить уравнение

$$\dot{\tau} = a(k^2 - r^2) \sin \tau \cos \tau, \quad (15)$$

из которого следует, что при $a > 0$ генератор настраивается на асимптотически устойчивый режим, в котором $\tau = 0$. В выбранные таким образом моменты измерения произведение $u \cdot v = 0$ и формулы (12) приобретают вид

$$r = |u|, \quad k = |v|, \quad \tau = 0, \quad (16)$$

что позволяет найти матрицу A в виде

$$A = \begin{pmatrix} |u| & 0 & 0 \\ 0 & |v| & 0 \\ 0 & 0 & |u \times v| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|u\|, & v, & u \times v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{u}{|u|}, & \frac{v}{|v|}, & \frac{u \times v}{|u \times v|} \end{pmatrix}^T \quad (17)$$

в последнем переходе в (17) обратная матрица заменена на транспонированную в силу её ортогональности.

Эллиптическая траектория (4) изотропного пространственного осциллятора (2) не является устойчивой по отношению к сколь угодно малым возмущениям. Так, при малых вариациях жесткости: $\ddot{q} + (E + C)q = 0$, где E - единичная матрица, а C - малая по норме симметрическая матрица, траектория в общем случае перестает быть плоской и замкнутой, и описанный выше алгоритм построения матрицы A реализован быть не может.

При этом, если возмущение C мало, то выход траектории из плоскости можно интерпретировать как медленный поворот этой плоскости в инерциальном пространстве, т.е. как «уход» построенного выше гироскопа. Само выполнение изложенного алгоритма при этом затруднений не встречает. По-другому дело обстоит в случае эволюции эллипса в самой плоскости. При малых изменениях жесткости эллипс периодически превращается то в окружность, то в отрезок прямой. Именно в этих случаях измерения становятся невозможными.

В соавторстве с А.А. Космодемьянским, В.К. Гольцманом и др. С.М. Тарг участвовал в создании двухтомного курса Теоретической механики, изданного Военно-Воздушной академией им. Н.Е. Жуковского.

Большая работа была проделана С.М. Таргом по научному редактированию перевода классического курса П. Аппеля «Теоретическая механика» т. I, т. II, Физматгиз, 1960 г. и по переработке и дополнению курса Н.Н. Бухгольца «Основной курс теоретической механики» ч. I, ч. II, изд. «Наука» 1965 г.

Предыдущее издание книги Н.Н. Бухгольца вышло в свет в 1945 году. За эти годы изменились учебные программы курса теоретической механики и требования к учебникам, что вызвало необходимость серьёзно переработать и дополнить весь материал «Основного курса теоретической механики», чтобы сохранить его как учебник. Эта большая кропотливая работа была выполнена С.М. Таргом в результате чего в свет вышел ещё один первоклассный учебник по теоретической механике.

Всего С.М. Таргом опубликовано более 80-ти научных и учебно-методических работ. Кроме того, в период с 1957 по 1969 г. написано около 200-т различных статей (и мелких, и крупных) по вопросам общей механики и гидродинамики для Большой советской энциклопедии (2-е издание), Малой советской энциклопедии, 5-ти томного Физического энциклопедического словаря и для нового 3-го издания Большой советской энциклопедии.

С конца шестидесятых годов Семён Михайлович Тарг всё больше внимания уделял проблемам методологии и методики преподавания теоретической механики в ВУЗах всей страны, и в системе заочного обучения в частности. Так, кроме работы в Военной инженерной академии им. Ф.Э.Дзержинского, он с 1965 г. читал лекции по теоретической механике по учебной программе центрального телевидения. А с 1968 г. он как автор и научный консультант принимал участие в создании большого теле-кинокурса теоретической механики, являясь по совместительству профессором-консультантом кафедры теоретической механики Всесоюзного заочного политехнического института. Этот факт позволяет считать профессора С.М. Тарга, пользуясь современной терминологией, одним из пионеров дистанционной формы обучения студентов ВУЗов. Эти работы благодаря своему высокому качеству снискали большую популярность, как у студентов, так и у преподавателей.

С 1950 по 1955 г. он по совместительству работал профессором кафедры теоретической механики Военно-воздушной академии им. Н.Е. Жуковского.

Цикл работ С.М. Тарга по гидродинамике вязкой жидкости был обобщён и развит в опубликованной в 1951 году монографии «Основные задачи теории ламинарных течений», Гостехтеоретиздат, 1951 г. Эта монография подводила итог многолетних работ её автора по гидродинамике вязкой жидкости.

В 60-е годы С.М. Таргом выполнен ряд работ по специальным темам, имеющим отношение к военной технике; ряд результатов этих исследований опубликован в Трудах Академии им. Ф.Э. Дзержинского. В частности он занимался решением ряда задач связанных с динамикой твёрдого тела, теорией гироскопа, теорией удара и т.п.

После увольнения в запас в звании полковника (1955 г.) он продолжил работать на кафедре теоретической механики Артиллерийской академии в должности профессора, а с июля 1957 г. до осени 1972 г. являлся заведующим этой кафедрой (эту должность ему передал «по наследству» профессор Н.А. Слёзкин).

Значительное место в творчестве С.М. Тарга занимает работа по созданию учебной и учебно-методической литературы по теоретической механике, им издано 18 учебников, задачников и методических пособий самостоятельно и в соавторстве только в стенах Артиллерийской академии им. Ф.Э. Дзержинского. В 1948 г. впервые Артиллерийской академией им. Ф.Э. Дзержинского был издан учебник «Краткий курс теоретической механики», который затем, будучи существенно дополнен и переработан, был в 1958 г. издан Физматгизом и допущен Министерством Высшего и Среднего Специального образования РСФСР в качестве учебника для высших технических учебных заведений. С этого года учебник С.М. Тарга стал одним из основных учебников по теоретической механике. Он выдержал уже 15 изданий в нашей стране (в СССР учебник был переведён также на эстонский язык) и получил широкое распространение за рубежом, будучи переведён на английский, французский, сербский и даже китайский языки (всего на 14 языках).

Большая популярность учебника С.М. Тарга у преподавателей, студентов и слушателей объясняется тем, что весь материал изложен чётко, компактно, в строгой методической последовательности и легко читается. Эти обстоятельства сделали учебник широко распространённым среди студентов (слушателей) заочников.

Если в качестве возмущения появляется малая диссипация: $\ddot{q} + D\dot{q} + q = 0$, то амплитуда колебаний стремится к нулю, и измерения становятся невозможными по этой причине.

Для того чтобы пространственный изотропный осциллятор мог быть практически реализован как гироскоп, необходимо ввести в уравнения (2) управляющие воздействия, сообщающие ему устойчивость по отношению к малым возмущениям. При этом обеспечить устойчивость плоскости колебаний осциллятора, т.е. гарантировать такой гироскоп от «ухода» невозможно в принципе, поэтому мы и не будем такую задачу ставить. С другой стороны, обеспечить орбитальную асимптотическую устойчивость некоторой выделенной эллиптической траектории в плоскости колебаний можно и этого вполне достаточно для реализуемости изложенного выше алгоритма построения матрицы ориентации A .

Такая задача была решена в [3,4], где было показано, что уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu(K - K_0)Jx + \varepsilon(1 - x^2 - \dot{x}^2)\dot{x} \quad (18)$$

в котором

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

обладает асимптотически устойчивым интегральным многообразием

$$2E = x^2 + \dot{x}^2 = r^2 + k^2 = 1, \quad |x \times \dot{x}| = K = K_0 \quad (19)$$

Первое из соотношений (19) означает постоянство энергии колебаний, второе – постоянство квадратуры. Система (18) представляет собой плоский осциллятор, к которому может быть приведен исходный преобразованием с матрицей A (9). Имея в виду (3), уравнение (18) в трехмерном варианте запишется так

$$\ddot{y} + y = \mu(K - K_0)\check{J}y + \varepsilon(1 - y^2 - \dot{y}^2)\dot{y} + 2A^T \dot{A}\dot{y} + A^T \ddot{A}y = 0, \quad (20)$$

$$\text{где } \check{J} = A^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A.$$

При получении этого уравнения было учтено, что квадратура K и полная энергия E являются инвариантами ортогональной группы.

Приложенные к маятнику в соответствии с (20) силы стабилизируют колебания с постоянной амплитудой и постоянной квадратурой и обеспечивают выполнимость изложенных алгоритмов.

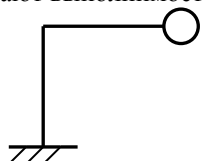


Рис. 3

Реализация подобного гироскопа может быть выполнена, например, с помощью шести Г-образных упругих стержней, обеспечивающих пространственно изотропный, упругий подвес (рис.3).

Стержни имеют квадратное сечение, и на их гранях размещены пьезоэлектрические датчики силы и датчики информации. Подобного типа приборы следует рассматривать в ряду вибрационных гироскопов невысокой точности для широкого применения [5,6].

Реализация может быть также осуществлена с помощью однородного шара в неконтактном подвесе.

Замечание 1. Выше предполагалось, что подвижный объект совершает только вращательные движения вокруг центра осциллятора. Если движение имеет общий характер, то в правых частях системы (2) появляются медленно меняющиеся члены, обусловленные проекциями кажущегося ускорения на оси прибора, в результате чего к гармоническому высокочастотному решению (4) следует добавить медленно меняющуюся составляющую. В этом случае перед реализацией описанного выше алгоритма необходимо при помощи фильтра выделить из сигнала гармоническую часть. При этом медленно меняющаяся часть, перепроектированная при помощи матрицы A на оси инерциального трехгранника, дает информацию об абсолютном ускорении. Таким образом, рассмотренный выше прибор может одновременно играть роль и датчика трехмерной угловой ориентации и трехмерного датчика абсолютного ускорения. Дискретную фильтрацию можно осуществить, если u и v при вычислении A определять так:

$$u = [y(2\pi(n-1)) - y(\pi + 2\pi(n-1))] / 2.$$

Информацию об ускорении можно получить, вычисляя

$$[y(2\pi(n-1)) + y(\pi + 2\pi(n-1))] / 2.$$

Замечание 2. Рассмотренный выше прибор, в отличие от вибрационных гироскопов типа [5,6], не является уравновешенным: колеблющийся осциллятор нагружает основание силами упругих закреплений. Представляется возможным решение этой проблемы чисто конструк-

одновременно и доцентом кафедры теоретической механики. В феврале 1939 года по собственному желанию Семён Михайлович был освобожден от работы в Свердловском университете, поскольку в дальнейшем решил посвятить себя только научно-педагогической деятельности.

В феврале же 1939г. С.М. Тарг был приглашен своим однокурсником профессором Н.А. Слѣзкиным на должность и.о. профессора кафедры теоретической механики Артиллерийской академии им. Ф.Э.Дзержинского в г. Москве, где работал по 1972 г.

В июле 1940 года С.М. Тарг был зачислен в ряды Советской Армии, и ему было присвоено звание военинженера 2-го ранга. В кадрах Советской Армии находился до августа 1955 года, когда был уволен в запас по сокращению штатов в звании инженер-полковника (присвоено в 1951 г.). Все эти годы работал в Артиллерийской академии в должности старшего преподавателя. В августе 1941г. из числа слушателей Военной Академии и курсов воентехников был сформирован сводный стрелковый полк, начальником штаба которого был назначен С.М. Тарг.

В октябре 1941г. Военная Академия была эвакуирована в Самарканд, а в августе 1944 г. вернулась в Москву. Профессорско-преподавательский состав также вернулся в стены Академии.

В военные годы С.М. Тарг не только отдаёт много сил подготовке квалифицированных военных специалистов, но и плодотворно работает над многими актуальными вопросами теории вязкой жидкости, которые имеют прямое отношение к военной технике.

В послевоенные годы им было опубликовано ряд работ: «Затухание вращательного движения снаряда при проникновении в вязкую среду» (ДАН СССР т. 48, № 4, 1945); «О распространении сферической ударной волны» (Изв. Отд. Техн. Наук АН СССР № 2 1946); «Погружение цилиндра в вязкую среду, заполняющую осесимметричный сосуд» (ДАН СССР, т. № 5, № 4, 1946 г.); «Обобщѣнные уравнения Рейнольдса» (совместно с Н.А. Слѣзкиным, ДАН СССР № 54, № 3 1946 г.) и другие работы по смежным вопросам.

В марте 1948г. на Ученом совете Механико-математического факультета МГУ С.М. Таргом защищена диссертация на степень доктора физико-математических наук на тему: «Приближенные методы решения задач гидродинамики вязкого слоя».

пионервожатым железнодорожного отряда ст. Новки (близь г. Коврова).

В сентябре 1927 года поступил на 1-й курс физико-математического (впоследствии механико-математического) факультета Московского государственного университета, который окончил в 1931 г. по специальности «Аэродинамика».

Творческая деятельность С.М. Тарга началась ещё на студенческой скамье и была посвящена разработке задач аэродинамики, гидродинамики вязкой жидкости и механике твёрдого тела.

По окончании МГУ с 1931 г. С.М. Тарг работал научным сотрудником в Центральном Аэрогидродинамическом институте им. Жуковского и учился в аспирантуре МГУ. В июне 1934 г. защитил диссертацию на степень кандидата физико-математических наук.

С осени 1932 г. начал свою преподавательскую деятельность в качестве ассистента кафедры теоретической механики МГУ. С сентября 1934 года продолжал работу на той же кафедре в качестве доцента и одновременно был назначен заместителем декана Механико-математического факультета МГУ. Всю эту работу вел до ноября 1937 года с перерывом на I семестр (февраль-июнь 1936 г.), когда был командирован в Дальневосточный государственный университет (г. Владивосток) для чтения теоретической механики и некоторых специальных курсов.

Период начала тридцатых годов характеризовался бурным развитием авиации, и перед конструкторами самолётов возникло много новых и сложных проблем механики полёта, аэродинамики, строительной механики самолёта, без решения которых продвижение вперёд и создание новых прогрессивных конструкций было не мыслимо. В эти годы С.М. Тарг посвящает себя решению многих вопросов теории аэродинамики, цель которых не только продвинуть вперёд вопросы теории самолёта, но так же дать ответ на многие практические вопросы конструирования и расчёта самолёта. В 1933-35 годах вышли работы С.М. Тарга: «О влиянии крыла на продольную статическую устойчивость самолёта» (Журнал техника воздушного флота № 9, 1933); «К теории крыла с щитовидным закрылком» (Труды III Всесоюзной конференции по аэродинамике» ч. II, 1935); «Исследование работы вертикального оперения» (Технические заметки ЦАГИ, № 51, 1935).

В ноябре 1937 года С.М. Тарг был назначен заместителем директора Свердловского государственного университета по научной и учебной работе. В этой должности находился до февраля 1939 года, работая

торскими методами посредством совмещения двух противофазных осцилляторов рассмотренного типа.

Выражаю благодарность Ж.М. Карону за стимулирование интереса к рассмотренному вопросу.

Литература

1. *Иштинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация // М: Изд. «Наука». 1976. 671 с.
2. *Климов Д.М.* Инерциальная навигация на море // М: Изд. «Наука». 1984. 116 с.
3. *Журавлёв В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1993. №3. С.6-19.
4. *Журавлёв В.Ф.* Управляемый маятник Фуко, как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. №6. С.27-35.
5. *Leger P.* Quapason – a new low-cost vibrating gyroscope // 3rd Saint-Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems. T.1. – Saint-Petersburg, 1996. – P.143-149.
6. *Charcosset Cl., Bonjour Ch.*, Gyrometre a resonateur mecanique // Demande de brevet europeen. EP 0 773 429 A1. Bulletin 1997/20.

Ю.Г. Мартыненко
 Московский государственный университет
 им. М.В. Ломоносова

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Дан подробный вывод специальной формы невырождающихся уравнений движения симметричного твердого тела в невращающейся системе координат, когда в качестве фазовых переменных использованы проекции на неподвижные оси единичного вектора оси симметрии и вектора кинетического момента твердого тела.

Для исследования движения твердого тела применяется достаточно много различных наборов переменных. Каждый из этих наборов имеет свои преимущества и недостатки. Так, любые локальные координаты типа классических углов Эйлера вырождаются в окрестности особых точек (при угле нутации равным нулю или π), что делает невозможным их использование в задачах, в которых траектория жестко закрепленной в теле оси является всюду плотной на единичной сфере [1]. Элементы матрицы направляющих косинусов являются невырождающимися переменными, однако имеют «большую избыточность» (девять элементов матрицы направляющих косинусов удовлетворяют шести уравнениям связи). К увеличению числа переменных до четырех приводит и аппарат кватернионных параметров Родрига - Гамильтона и параметров Кэйли - Клейна [2], в то время как для численного интегрирования, кроме простой системы уравнений желательнее иметь наименьший порядок системы. Для поиска первых интегралов, исследования некоторых вопросов устойчивости и топологического анализа наиболее удобными являются такие переменные, в которых уравнения полиномиальны (или даже однородны) [3].

При использовании метода возмущений широко используются так называемые оскулирующие (эволюционные, фазовые) переменные [4, 5], которые имеют простой, наглядный механический и геометрический смысл, достаточно просто описывают движение Эйлера - Пуансо и делятся на медленные и быстрые, причем медленные переменные в невозмущенном движении оказываются постоянными.

Переменные Андуайе-Депри [6, 7], связанные с компонентами вектора кинетического момента и называемые также специальными каноническими

К.Б. Обносов¹, Ф.П. Кочанов², В.Л. Цивильский²

¹ Военная Академия РВСН имени Петра Великого
² Московский государственный открытый университет

СЕМЕН МИХАЙЛОВИЧ ТАРГ



Воспитанник Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова С.М. Тарг являлся крупным учёным-механиком и прекрасным педагогом-методистом. Он был учеником видных учёных математиков и механиков, таких как В.В. Голубев, Н.Н. Бухгольц, А.И. Некрасов, Л.С. Лейбензон.

Родился С.М. Тарг в Смоленске 10 октября 1910 г. в трудовой семье.

Отец, Тарг Михаил Ионович до женитьбы работал столяром, затем служил в лесном хозяйстве. В 1915 г. он был мобилизован в армию и находился на фронте до 1917 г. В начале 1917 г. вместе со своей частью был переведен в г. Ковров Владимирской губернии, где в мае 1917г., как представитель солдат, вошел в Ковровский Совет рабочих и солдатских депутатов и был избран секретарем Исполнительного комитета Совета. В органах Ковровского Совета он продолжал работать до 1921 г. В это время разошелся с женой – матерью С.М. Тарга – и переехал сначала в г. Николаев, а затем в г. Мариуполь, где создал другую семью. В Мариуполе до начала Великой Отечественной войны работал в Рыбколхозсоюзе. Погиб вместе со своей семьей (жена и две дочери) в период немецкой оккупации в возрасте около 60-ти лет.

Мать, Тарг Вера Семеновна (до замужества Липкина) с детских лет работала сначала в чулочной мастерской, а затем на кондитерской фабрике. (После замужества была домохозяйкой). С 1921г. (после разрыва с мужем – отцом С.М. Тарга) работала в г. Коврове сначала (настилальщицей) на текстильной фабрике, а затем уборщицей на экскаваторном заводе. С 1934 г., как инвалид 2-й группы, прекратила работу и проживала с Семёном Михайловичем в г. Москве. Умерла в 1960 г. в возрасте 78 лет.

С 1917 г. по 1927 г. Семён Михайлович Тарг жил вместе с матерью в г. Коврове, где в 1925 г. окончил среднюю школу и один год работал

Однако некоторые представители нефтяной науки, ссылаясь на опыт разработки нефтяных месторождений США, предлагали внедрять редкие сетки скважин. В связи с этим В.Н. Щелкачев задался целью провести тщательный анализ практики и теории разработки нефтяных месторождений в США. Эта цель явилась началом многолетних исследований по изучению и обобщению опыта разработки нефтяных месторождений США и других нефтедобывающих стран.

В 1964 г. под руководством В.Н. Щелкачева в МИНХ и ГП им. И.М. Губкина (ныне – Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина) организована специальная лаборатория по изучению зарубежного опыта нефтедобычи. Эта лаборатория существует уже более сорока лет. За это время состояние и ближайшие перспективы разработки нефтяных месторождений США исследованы достаточно тщательно полно и объективно. На эту тему В.Н. Щелкачевым опубликованы многочисленные статьи брошюры и книги. Самыми последними работами, связанными с этой темой, являются книги «Сравнительный анализ нефтедобычи и разработки нефтяных месторождений по странам мира» (1996) и «Отечественная и мировая нефтедобыча. История развития, состояние и прогнозы» (2001).

Владимира Николаевича Щелкачева всегда отличала научная добросовестность и исключительная работоспособность. В 2004 году на девяносто седьмом году жизни им опубликована шестисотстраничная монография «Важнейшие принципы нефтеразработки. 75 лет опыта». В которой подведены основные итоги научной, педагогической, методической и производственной деятельности автора.

Владимир Николаевич прожил долгую и яркую жизнь. Биография этого выдающегося ученого и педагога вместила в себя все основные этапы становления и развития нефтяной индустрии, включая военные годы. В это драматичное время нефтяники и представители отраслевой науки, работая на пределе человеческих сил, не только делали все возможное, чтобы армия и тыл не испытывали недостатка в топливе, но и закладывали основы будущего могущества своей Родины. В этой титанической работе принял достойное участие Владимир Николаевич.

Светлая память о выдающемся Гражданине, Ученом и Воспитателе молодежи навсегда сохранится в памяти всех, кто его знал.

ническими переменными [8], позволяют использовать замечательные аналитические свойства канонических уравнений, что делает их достаточно употребительными в теории возмущений, так как компоненты вектора кинетического момента являются первыми интегралами случая Эйлера – Пуансо движения твердого тела около неподвижной точки.

1. Вывод уравнений движения симметричного твердого тела

1. Рассмотрим динамически симметричное абсолютно твердое тело с одной неподвижной точкой O . Введем неподвижную систему координат $\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в точке O и подвижную систему $x_1x_2x_3$, жестко связанную с твердым телом и осью x_3 , направленную по оси симметрии эллипсоида инерции тела. Положение $x_1x_2x_3$ относительно $\xi_1\xi_2\xi_3$ определим тремя углами Эйлера: ψ - угол прецессии, θ - угол нутации и φ - угол собственного вращения

$$O\xi_1\xi_2\xi_3 \xrightarrow{\psi} O\eta_1\eta_2\eta_3 \xrightarrow{\theta} O\zeta_1\zeta_2\zeta_3 \xrightarrow{\varphi} Ox_1x_2x_3 \quad (1.1)$$

Вектор-столбец, составленный из проекций единичного вектора оси симметрии тела x_3 на неподвижные оси $\xi_1\xi_2\xi_3$, обозначим через $\gamma = (\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3)^T$. Здесь T – знак транспонирования,

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (1.2)$$

Компоненты вектора γ связаны с углом прецессии ψ и углом нутации θ соотношениями

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \psi, \quad \gamma_2 = -\sin \theta \cos \psi, \quad \gamma_3 = \cos \theta$$

Следовательно,

$$\sin \theta = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad \cos \psi = -\frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \quad (1.3)$$

а матрица направляющих косинусов между трехгранниками $\xi_1\xi_2\xi_3$ и $x_1x_2x_3$ имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{-\gamma_2 \cos \varphi - \gamma_1 \gamma_3 \sin \varphi}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} & \frac{\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \gamma_3 \sin \varphi}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} & \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \sin \varphi \\ \frac{\gamma_2 \sin \varphi - \gamma_1 \gamma_3 \cos \varphi}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} & \frac{-\gamma_1 \sin \varphi - \gamma_2 \gamma_3 \cos \varphi}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} & \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \cos \varphi \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Строки матрицы Γ образованы проекциями ортов осей x_1, x_2, x_3 на оси ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Вектора-столбцы, составленные из проекций кинетического момента тела \mathbf{x}_3 на неподвижные оси ξ_1, ξ_2, ξ_3 и подвижные оси x_1, x_2, x_3 , обозначим соответственно через $\mathbf{K}_\xi = (K_1 \ K_2 \ K_3)^T$ и $\mathbf{K}_x = (K_{x1} \ K_{x2} \ K_{x3})^T$, при этом в силу ортогональности матрицы направляющих косинусов

$$\mathbf{K}_x = \mathbf{P} \mathbf{K}_\xi, \quad \mathbf{K}_\xi = \mathbf{P}^T \mathbf{K}_x \quad (1.5)$$

Тензор инерции тела в подвижных осях удобно представить в форме

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} = J_1 \mathbf{E} + (J_3 - J_1) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T \quad (1.6)$$

Здесь J_1, J_3 – моменты инерции тела соответственно относительно экваториальной x_1 и полярной x_3 осей эллипсоида инерции, \mathbf{E} – единичная матрица третьего порядка

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к \mathbf{J} допускает представление аналогичное (1.6)

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} J_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_3^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_1} \mathbf{E} + \left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_1} \right) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T$$

следующие постановления. О развитии внедрения методов увеличения нефтеотдачи. Об обеспечении методов увеличения нефтеотдачи необходимым оборудованием. Об установлении обязательного минимума исследовательских работ, которые должны проводиться на каждом промысле. Об организации опытных промыслов. Об организации в Москве крупного центрального НИИ по нефтедобыче и об организации Научно-технического совета при Наркомате.

Проведение упомянутого совещания создало перелом в управлении разработкой нефтяных месторождений. В.Н. Щелкачев, будучи председателем секции добычи нефти, лично принимал активное участие в деятельности Научно-технического совета с 1946 г. и до прекращения его деятельности в 1957 г.

Особая роль принадлежит профессору В.Н. Щелкачеву в вопросе влияния плотности сетки скважин на нефтеотдачу пласта. Это исключительно важный вопрос. В США был создан специальный Комитет по размещению скважин. Основываясь на недостаточном числе промысловых данных этот комитет, а вслед за ним и ряд отечественных исследователей, считали, что плотность сетки скважин не влияет на конечную нефтеотдачу пласта. Профессор В.Н. Щелкачев доказал, что это не так.

Для того чтобы этот результат был воспринят всеми нефтяниками, пришлось участвовать в многолетней дискуссии. В июле 1967 г. в период подготовки и проведения Минского Всесоюзного совещания, специально посвященного вопросам влияния плотности и размещения скважин на разработку нефтяных месторождений, наступил перелом. Этот перелом объясняется тем, что накопленный опыт разработки выявил дефектность выбора плотностей сетки и размещения скважин, заложенных во многих технологических схемах и проектах разработки, принятых к внедрению.

Следует заметить, что вступив в дискуссию в начале 50-х годов, В.Н. Щелкачев никогда не оказывал предпочтение плотным или редким сеткам скважин. Он считал, что для прогрессивной, рациональной сетки скважин необходимо использовать термин *оптимальная* плотность, так как при различных условиях, для разных месторождений величины оптимальных плотностей сетки скважин могут быть различными. В настоящее время термин *оптимальная сетка скважин* получил широкое признание и распространение. В результате на месторождениях США, Китая и Югославии проведены мероприятия по оптимизации сеток скважин

изменяющейся области влияния скважины после её пуска или остановки.

Позднее, после доработки теории упругого режима многочисленными учениками В.Н. Щелкачева результаты всех исследований сведены в фундаментальную двухтомную монографию «Основы и приложения неустановившейся теории фильтрации» (1995), аналогов которой нет в мировой научной литературе. В этой монографии около тысячи ссылок на работы специалистов по теории фильтрации и в частности на работы многочисленных учеников В.Н. Щелкачева.

После открытия в сентябре 1944 г. Туймазинского нефтяного месторождения В.Н. Щелкачев, ознакомившись с результатами исследований скважин, пришел к выводу, что девонский пласт этого месторождения может разрабатываться только в условиях упруговодонапорного режима. Об этом был сделан доклад наркому нефтяной промышленности. На девонском Туймазинском нефтяном месторождении впервые в нашей стране был внедрен процесс поддержания пластового давления с помощью законтурного заводнения. Поэтому Туймазинское нефтяное месторождение стало первенцем передовой технологии нефтедобычи и школой по передовой разработке для всех нефтяников нашей страны. В 1950 г. за внедрение процесса законтурного заводнения на Туймазинском нефтяном месторождении В.Н. Щелкачеву совместно с группой нефтяников производственников присуждена Государственная премия I степени.

На протяжении всей своей научной деятельности профессор В.Н. Щелкачев участвовал в развитии управления разработкой нефтяных месторождений СССР и России. Летом 1944 г. по указанию Государственного комитета обороны СССР Наркомат нефтяной промышленности организовал специальную группу по интенсификации нефтедобычи и нефтеотдачи. В эту группу из г. Грозного был приглашен В.Н. Щелкачев. На сотрудников этой группы были возложены обязанности: подбор объектов на отечественных нефтяных месторождениях для внедрения на них новейших методов интенсификации нефтедобычи и увеличения нефтеотдачи; оказание помощи производственным организациям при внедрении этих методов; изучение и обобщение соответствующего зарубежного опыта.

Группой было организовано и проведено в феврале 1945 г. Всесоюзное совещание, посвященное методам интенсификации добычи нефти. На этом совещании В.Н. Щелкачевым было сделано три доклада. На основании заслушанных докладов в Наркомнефти были приняты

Так как $\Gamma^T \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\gamma}$, то тензор инерции тела в неподвижных осях имеет вид

$$\mathbf{J}_\xi = \Gamma^T \mathbf{J} \Gamma = J_1 \mathbf{E} + (J_3 - J_1) \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T \quad (1.7)$$

Непосредственным вычислением нетрудно проверить, что обратная матрица к матрице (1.7) определяется выражением

$$\mathbf{J}_\xi^{-1} = \frac{1}{J_1} \mathbf{E} + \left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_1} \right) \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T \quad (1.8)$$

Принимая во внимание (1.8), находим вектор-столбец, составленный из проекций мгновенной угловой скорости на неподвижные оси

$$\boldsymbol{\Omega}_\xi = \mathbf{J}_\xi^{-1} \mathbf{K}_\xi = \frac{1}{J_1} \mathbf{K}_\xi + \left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_1} \right) \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{K}_\xi \quad (1.9)$$

Для матричной записи векторного произведения векторов для вектора

столбца $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ введем кососимметричную матрицу

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & a_z & -a_y \\ -a_z & 0 & a_x \\ a_y & -a_x & 0 \end{bmatrix}, \text{ так чтобы вектор столбец } \mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}] \text{ мог}$$

быть найден как матричное произведение $\mathbf{c} = -\hat{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}\mathbf{a}$. Тогда скорость конца единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в неподвижной системе координат есть $\hat{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\Omega}_\xi$, поэтому учитывая, что $\hat{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\gamma} = 0$ и умножая (1.9) слева на кососимметричную матрицу $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, получаем кинематическое уравнение Пуассона для вектора $\boldsymbol{\gamma}$

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \frac{1}{J_1} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{K}_\xi \quad (1.10)$$

Дифференциальное уравнение для угла собственного вращения тела φ можно получить из кинематического уравнения Эйлера

$$\Omega_{x3} = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.11)$$

Здесь $\Omega_{x_3} = \frac{1}{J_3} \gamma^T \mathbf{K}_\xi$ проекция вектора мгновенной угловой скорости тела на его ось симметрии x_3 . Производную от угла прецессии тела можно найти, продифференцировав две последние формулы (1.3) и исключив из них угол ψ

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\gamma_1 \dot{\gamma}_2 - \gamma_2 \dot{\gamma}_1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в (1.11) и принимая во внимание (1.10), после соответствующих преобразований можно получить¹

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{J_1} \frac{\mathbf{e}_3^T \boldsymbol{\gamma}}{1 - (\mathbf{e}_3^T \boldsymbol{\gamma})^2} \mathbf{e}_3^T \hat{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{K}_\xi + \frac{1}{J_3} \gamma^T \mathbf{K}_\xi \quad (1.13)$$

Из теоремы об изменении момента количества движения тела относительно неподвижной точки O вытекают дифференциальные уравнения для вектора кинетического момента тела

$$\frac{d\mathbf{K}_\xi}{dt} = \mathbf{M}_\xi \quad (1.14)$$

Здесь \mathbf{M}_ξ – вектор момента относительно точки O всех внешних сил, действующих на твердое тело.

Уравнения (1.10), (1.13), (1.14) в скалярной форме имеют вид

¹ Заметим, что выражение для угловой скорости (1.9) может быть найдено непосредственно и из матричного уравнения Пуассона (см. формулу (26) в [9]),

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_{\xi 3} & -\Omega_{\xi 2} \\ -\Omega_{\xi 3} & 0 & \Omega_{\xi 1} \\ \Omega_{\xi 2} & -\Omega_{\xi 1} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma} \frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt}$$

После выполнения умножения в правой части этого уравнения и замены производных $\frac{d\gamma_i}{dt}$, $\frac{d\phi}{dt}$ согласно (1.10), (1.13) и упрощений, учитывающих соотношения (1.2), можно прийти к уравнению (1.9). (Такой способ получения кинематических соотношений оказывается более громоздким, чем изложенный выше).

их взаимодействие. Отсюда следует, что на участке заданной площади можно получить больший дебит каждой скважины при более плотном их расположении, чем при редком, если приблизить контур питания, т.е. линию расположения нагнетательных скважин.

Далее, В.Н. Щелкачевым разработана проблема расстановки скважин в пластах с водонапорным режимом, при этом исследована кинематика фильтрационных потоков, благодаря которой можно было подсчитывать время движения частички жидкости до батарей скважин. В связи с этим исследованы особенности стягивания контуров нефтеносности и обводнения скважин с учетом различия вязкостей вытесняющей и вытесняемой жидкостей.

В 1942—1944 гг. в ГрозНИИ и на промыслах Грознефти под руководством В.Н. Щелкачева проведены многообразные уникальные исследовательские работы в особых условиях. Особенность условий была в том, что в начале упомянутого периода фашистские войска перерезали железную дорогу по линии Грозный – Ростов. Поэтому вывоз из Грозного нефти был затруднен; план по добыче нефти на грозненских промыслах невозможно было выполнять. При резко сниженном уровне добычи нефти, на промыслах открылись широкие возможности для проведения исследования скважин. Без ущерба для суммарного уровня добычи нефти на промысле можно было выборочно останавливать отдельные скважины не только на несколько часов, но и на несколько суток, а затем вновь пускать их в эксплуатацию. Остановки-пуски скважин давали возможность проследить за перераспределением пластового давления, за эффектом взаимодействия скважин, изменениями в их дебитах и забойных давлениях.

В результате проведенных работ удалось установить, что на процесс перераспределения давлений оказывает влияние не только упругость нефти и воды, но и упругость самого пласта. С учетом упругости пласта была разработана гидродинамическая теория упругого режима фильтрации, которая опубликована в докладах АН СССР, а затем в двух фундаментальных монографиях: «Упругий режим пластовых водонапорных систем» (1948) и «Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме» (1959). Вторая из этих монографий переведена на китайский, румынский, венгерский и немецкий язык. Упругий режим подразделен на две разновидности: упруговодонапорный и замкнутоупругий режимы. В условиях упруго режима оказалось необходимым ввести диалектически обогащенное понятие переменного *условного радиуса влияния скважины*, характеризующего размеры непрерывно

ния таких совещаний и, начиная с 1973 года, было проведено четыре Всесоюзных и три Всероссийских совещания.

На протяжении всей своей жизни профессор В.Н. Щелкачев вел напряженную научную работу, связанную с подземной гидродинамикой и проблемами разработки нефтяных месторождений.

Первым наиболее важным достижением В.Н. Щелкачева в этой области является критика ошибочной идеи «отца теории фильтрации» Ч. Сликтера, и поддерживающих эту идею Ф.Ф. Форхгеймера и Л.С. Лейбензона. Эти авторитетные ученые считали, что в условиях жестко водонапорного режима при установившемся притоке жидкости из пласта к скважине, скважина имеет строго определенный радиус влияния. В области пласта за пределами этого радиуса влияния жидкость остается неподвижной. Это означает, что две скважины в одном и том же пласте, которые устойчиво работают в условиях жестко водонапорного режима, не влияют друг на друга, если расстояние между ними превышает величину двойного радиуса влияния.

В 1934-1935 гг. В.Н. Щелкачев, ознакомившись с передовыми идеями грозненских геологов, отбросил представление о «радиусе влияния» скважины, заменив его «радиусом контура питания» или «расстоянием от скважины до контура питания». При этом при решении задач фильтрации В.Н. Щелкачев пласт считал ограниченным, а вместо «метода источников-стоков» использовал «метод отображения источников-стоков». Стоки и источники отображались в контуре питания.

В 1939 г. опубликована монография «Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных систем». Эта монография представляла собой первое строгое изложение гидромеханической теории пластовых водонапорных систем на основе нового правильного представления о таких системах, т.е. это было первое физически правильно обоснованное изложение теории водонапорного режима и интерференции скважин. Кроме того в этой монографии сделан исключительно важный вывод: «количественный эффект взаимодействия скважин зависит не только от их взаимного расстояния, но и от расстояния до контура питания». Чем ближе расположены скважины к контуру питания, тем менее интенсивно они взаимодействуют друг с другом. Этот вывод предвосхитил основы теории законтурного и внутриконтурного заводнения. Линию расположения нагнетательных скважин можно рассматривать как искусственно созданный контур питания, поэтому приближение нагнетательных скважин к эксплуатационным ослабляет

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= \frac{1}{J_1}(\gamma_3 K_2 - \gamma_2 K_3), \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{1}{J_1}(\gamma_1 K_3 - \gamma_3 K_1) \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= \frac{1}{J_1}(\gamma_2 K_1 - \gamma_1 K_2) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{J_1 + (J_3 - J_1)\gamma_3^2}{J_1 J_3 (1 - \gamma_3^2)} (\gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2) + \left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_1} \right) \gamma_3 K_3 \\ \frac{dK_1}{dt} &= M_{\xi_1}, \quad \frac{dK_2}{dt} = M_{\xi_2}, \quad \frac{dK_3}{dt} = M_{\xi_3} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Если проекции M_{ξ_j} главного момента относительно точки O сил, приложенных к телу, не зависят от угла собственного вращения φ , то четвертое уравнение (1.15) отделяется от системы (1.15) и возникает система невырождающихся дифференциальных уравнений для γ_i, K_i . Особенность в четвертом уравнении (1.15) при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1$ связана с упоминавшимся выше вырождением углов Эйлера в окрестности особых точки (при угле нутации равным нулю или π). Указанная особенность исчезает при определении положения тела с помощью угла поворота тела вокруг оси симметрии в неголономном вспомогательном трехграннике $Oy_1y_2y_3$, ось y_3 которого совпадает с осью симметрии тела γ , а положение двух других осей определяется условием $\gamma^T \Omega_y = 0$, где Ω_y – абсолютная угловая скорость трехгранника $Oy_1y_2y_3$ [1].

2. Уравнения Эйлера – Лагранжа.

Уравнения движения симметричного твердого тела (1.15) могут быть получены также с помощью аппарата аналитической механики. Для использования лагранжевого формализма введем вектор избыточных обобщенных координат $\mathbf{q} = (\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \varphi)^T$, который удовлетворяет уравнению связи (1.2), а вектор кинетического момента $\mathbf{K}_\xi = (K_1 \ K_2 \ K_3)^T$ будем рассматривать как вектор соответствующих псевдоскоростей.

Первые четыре уравнения системы (1.15) можно рассматривать как связь между обобщенными скоростями задачи и псевдоскоростями

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{HK} \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{H} - прямоугольная (3×4) матрица, зависящая от обобщенных координат и моментов инерции рассматриваемого тела

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \\ \frac{J_1 + (J_3 - J_1)\gamma_3^2}{J_1 J_3 (1 - \gamma_3^2)} \gamma_1 & \frac{J_1 + (J_3 - J_1)\gamma_3^2}{J_1 J_3 (1 - \gamma_3^2)} \gamma_2 & \left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_1} \right) \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Тем самым формулы (2.1) позволяют выразить четыре обобщенные скорости через три независимые псевдоскорости: K_1, K_2, K_3 , - проекции вектора кинетического момента на неподвижные оси. Выражение для кинетической энергии тела, как функции обобщенных координат и псевдоскоростей находится с помощью формулы (1.8)

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta(\mathbf{q}, \mathbf{K}_\xi) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_\xi^T \mathbf{J}_\xi \boldsymbol{\Omega}_\xi = \frac{1}{2} \mathbf{K}_\xi^T \mathbf{J}_\xi^{-1} \mathbf{K}_\xi = \\ &= \frac{1}{2J_1} \mathbf{K}_\xi^T \mathbf{K}_\xi + \left(\frac{1}{2J_3} - \frac{1}{2J_1} \right) (\gamma^T \mathbf{K}_\xi)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для построения динамических уравнений движения тела воспользуемся матричной формой уравнений Эйлера-Лагранжа [10, 11]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{K}_\xi} \right)^T - \mathbf{H}^T \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{H}^T \mathbf{Q} + \left(\frac{d\mathbf{H}^T}{dt} - \mathbf{H}^T \left(\frac{\partial (\mathbf{HK}_\xi)}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right) \mathbf{p} \quad (2.3)$$

Здесь \mathbf{Q} - вектор обобщенных сил, $\mathbf{p} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T$ - вектор обобщенных импульсов, $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ - кинетическая энергия как функция обобщенных координат и обобщенных скоростей. В рассматриваемом случае вектор $\mathbf{Q} = \mathbf{M}_\xi$ есть вектор момента относительно точки O всех внешних сил, действующих на твердое тело, а выражение для кинетической энергии $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ не зависит от угла φ

ластях нефтяной и газовой промышленности страны. Как выдающийся педагог В.Н. Щелкачев большое внимание уделял методике преподавания. Основные педагогические воззрения, изложенные им в книге «Проблемы педагогики высшей школы» (1996) представляют несомненный интерес широкому кругу преподавателей теоретической механики.

На II Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, проходившем в Москве в 1964 г., В.Н. Щелкачев сделал доклад «Современное состояние преподавания теоретической механики во вузах СССР». В докладе и при его обсуждении отмечалось, что в программах, построении и преподавании курса теоретической механики имелись существенные недостатки, поэтому съезд вынес решение: просить Министерство высшего и среднего специального образования СССР организовать Научно-методический совет по теоретической механике. Совет был создан, его состав был утверждён в декабре 1964 г. В составе президиума совета одним из заместителей Председателя был назначен профессор В.Н. Щелкачев. Кроме того, он возглавил секцию повышения квалификации преподавателей теоретической механики и работал в этом качестве до 1998 года, оставаясь членом совета до конца своих дней.

Работая в секции повышения квалификации преподавателей теоретической механики, В.Н. Щелкачев проявил исключительные организаторские способности. Перед членами секции были поставлены задачи: организовать общегородские межвузовские научно-методические семинары по теоретической механике и выработать коллективную форму повышения квалификации преподавателей.

Уже к 1968 г. научно-методические семинары действовали в 47 городах страны. За 25 лет их работы на заседаниях было обсуждено более 15000 докладов, многие из которых опубликованы.

Также успешно секция справилась и со второй задачей. Для повышение квалификации преподавателей были организованы ФПК в МГУ, МВТУ, Тбилисском университете, Киевском университете, Ленинградском университете, МАТИ, Ленинградском кораблестроительном институте и в Томском университете. За один набор на ФПК могли быть приняты более 250 преподавателей, т.е. за один год - более 500.

Кроме того, для повышения квалификации заведующих кафедрами было внесено предложение, организовывать раз в пять лет специальные совещания - семинары. Секция возглавила организацию проведе-

по 1939 г. заведовал кафедрой теоретической механики грозненского нефтяного института, а затем стал доцентом кафедры теоретической механики Днепропетровского государственного университета. В связи с приближением немецких войск в августе 1941 г. к городу Днепропетровску университет был закрыт, и Владимир Николаевич переехал в г. Грозный, где вновь занял должность заведующего кафедрой теоретической механики. Это было время суровых испытаний, однако именно в это тяжелое время он проявил свои лучшие стороны ученого и экспериментатора.

С 1946 начал работать в Московском нефтяном институте имени И.М. Губкина (ныне – Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина), где вновь организовал кафедру теоретической механики и заведовал ею до 1992 года. С 1992 г. – профессор кафедры теоретической механики. Читал лекции по теоретической механике, проблемам педагогики высшей школы, подземной гидродинамике и разработке нефтяных месторождений не только в нашей стране, но и в Румынии, Венгрии, ГДР, Китае и Сирии.

В 1939 г. по совокупности опубликованных работ В.Н. Щелкачеву присвоена ученая степень кандидата технических наук. 30 июня 1941 г. защитил докторскую диссертацию на тему «Гидродинамическое исследование проблемы размещения нефтяных скважин».

6 марта 1968 г. указом Президиума Верховного Совета Российской Федерации присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации».

В.Н. Щелкачев – автор 310 научных работ, в том числе 36 монографий. Он подготовил 44 кандидата наук и был научным консультантом 14 докторских диссертаций, являлся почетным членом Российской академии естественных наук. Награжден тремя орденами Трудового Красного Знамени, орденом Ленина, орденом «За заслуги перед Отечеством» IV степени (1997 г.), серебряной и золотой медалями имени академика П.Л. Капицы.

С особой любовью и ответственностью Владимир Николаевич занимался педагогической деятельностью. Считая эту работу очень важной, он стремился передать свой опыт молодым преподавателям, являясь первым ректором Университета педагогического мастерства, организованного в РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина. Он был блестящим педагогом, чтение лекций у него было доведено до искусства. Тысячи инженеров, бывших студентов профессора В.Н. Щелкачева, слушали его лекции по теоретической механике и сейчас работают во всех об-

$$2T = J_1 \left(\frac{(\gamma_1 \dot{\gamma}_2 - \gamma_2 \dot{\gamma}_1)^2 + \dot{\gamma}_3^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \right) + J_3 \left(\frac{(\gamma_1 \dot{\gamma}_2 - \gamma_2 \dot{\gamma}_1) \gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} + \dot{\varphi} \right)^2 \quad (2.4)$$

Подстановка (2.2) в (2.3) после упрощений приводит к динамическим уравнениям, которые в векторном виде имеют вид

$$\mathbf{J}_\xi^{-1} \left(\frac{d\mathbf{K}_\xi}{dt} - \mathbf{M}_\xi \right) = 0 \quad (2.5)$$

После умножения уравнений (2.5) на матрицу (1.7) тензора инерции тела в неподвижных осях приходим к уравнениям (1.14).

3. О механических задачах, решенных в переменных γK .

В случае, когда момент внешних сил мал по сравнению с кинетической энергией тела (случай быстрой закрутки тела), в уравнениях (1.15) переменные $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varphi$ – быстрые, а переменные K_1, K_2, K_3 – медленные. (Приведение к безразмерному виду уравнений (1.15) позволяет ввести в правых частях последних трех уравнений безразмерный малый параметр ε). Решение невозмущенной задачи при $K_i = const$ представляется в виде матричной экспоненты [9]

$$\gamma = \text{Exp} \left[-\frac{\hat{K}_\xi}{J_1} t \right] \gamma^0 = \left(\mathbf{E} - \frac{\sin kt}{k} \hat{\mathbf{k}} + \frac{1 - \cos kt}{k^2} \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \right) \gamma^0 \quad (2.6)$$

Здесь $k = \frac{1}{J_1} \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}$, $\mathbf{k} = \frac{1}{J_1} (K_1 \quad K_2 \quad K_3)^T$.

Осреднение правых частей для медленных переменных вдоль решения (2.6) было проведено в задаче о раскрутке гироскопа с неконтактным подвесом вращающимся магнитным полем [12].

Уравнения движения вращающегося волчка в постоянном магнитном поле (задача о Левитроне) в переменных γK были исследованы в работах [13, 14].

Переменные γ_i, K_i были использованы в задачах о волчке Лагранжа на подвижном основании и ядерном магнитном резонансе [1], в задаче о глобальном поведении волчка Томсона на горизонтальной шероховатой поверхности с реальным сухим трением [15].

Литература

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988, 328 с.
2. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985, 288 с.
3. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 384 с.
4. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. М.: ГИТТЛ, 1955, 356 с.
5. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975, 308 с.
6. Дебри А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. Сб. переводов «Механика», 1968, № 2, с. 3-9. Пер. с англ. Depri A. Free rotation of a rigid body studied in the phase plane. Amer.J.Phys., 1967, v.35, No.5, pp.424-428.
7. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977, 328 с.
8. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск, изд-во РХД, 2000, 256 с.
9. Мартыненко Ю.Г. Методика изложения кинематики твердого тела с одной неподвижной точкой. Сборник научно-методических статей по теоретической механике, №24. Изд-во МГУ, 2003, с.3-15.
10. Мартыненко Ю.Г., Зацепин М.Ф. Применение матричных методов для составления уравнений Маджи и Эйлера-Лагранжа неголономных систем. Сборник научно-методических статей по теоретической механике, №25. Изд-во МГУ, 2004, с. 86-101.
11. Мартыненко Ю.Г. О матричной форме уравнений неголономной механики. Сборник научно-методических статей по теоретической механике, №23. Изд-во МГУ, 2000, с.9-21.
12. Мартыненко Ю.Г. Раскрутка гироскопа с неконтактным подвесом ротора. // Изв. АН СССР. МТТ, №5, 1973, с.35-40.
13. Dullin H.R., Easton R.W. Stability of Levitrons. //Z. Angew. Math. Mech., 79: S167-S170, 1999.
14. Dullin H.R. Poisson integrator for symmetric rigid bodies. //Regular and chaotic dynamics, v.9, №3, 2004, с.255-264.
15. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением. // Изв. РАН. МТТ, №6, 2005, с.157-168.

О.Н. Харин

РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина

В.Н. ЩЕЛКАЧЕВ – ГРАЖДАНИН, УЧЕНЫЙ, ПЕДАГОГ



13 апреля 2005 года на девяносто восьмом году жизни, скончался известный ученый и педагог, профессор Владимир Николаевич Щелкачев.

В.Н. Щелкачев родился 3 ноября 1907 г. во Владикавказе. После окончания средней школы в 16 лет поступил в МГУ имени М.В. Ломоносова и в 1928 г. окончил его по специальности «Теоретическая механика», защитив на отлично 18-го мая дипломную работу «Вариационные принципы механики». По представлению профессоров Н.Н. Бухгольца и А.И. Некрасова Владимир Николаевич рекомендован в аспирантуру, однако НАРКОМПРОСОМ не был утвержден и по совету Н.Н. Бухгольца поступил работать в Государственный исследовательский нефтяной институт (ГИНИ), в отдел промышленной заводской механики, которым заведовал профессор Л.С. Лейбензон.

Встреча с профессором Л.С. Лейбензоном во многом определила дальнейшие научные интересы В.Н. Щелкачева и с этого времени начинается его плодотворная научная деятельность. Первый цикл опубликованных работ был посвящен движению вязкой жидкости по трубе, внутри которой расположены трубки меньшего диаметра.

Однако 5 октября 1930 года был арестован по обвинению в участии в церковной контрреволюционной организации. В.Н. Щелкачев обвинения не признал и никогда в существование церковной контрреволюционной организации не верил. Тем не менее, особой тройкой ОГПУ 20 сентября 1931 года был осужден на 3 года исправительно-трудовых лагерей, которые были заменены ссылкой на 3 года в Казахстан. В ссылке в Алма-Ате работал преподавателем математики сначала промышленного техникума, а затем педагогического института.

По окончании ссылки, в связи с запретом на проживание в Москве и 12 наиболее крупных городах страны Владимир Николаевич с 1934

14. Ефимов Г.Б., Охоцимский Д.Е. Об оптимальном разгоне космического аппарата в центральном поле// Космические исследования. 1965. Т. 3. № 6. С.
15. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г. Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. М.: Наука, 1975.
16. Охоцимский Д.Е. Динамика космических полетов. М.: Изд-во МГУ, 1968.
17. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990.
18. Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Боровин Г.К., Карнов И.И., Кугушев Е.И., Павловский В.Е., Ярошевский В.С. Управление интегральным локомоционным роботом. — Известия РАН СССР, Техническая кибернетика, 1974, № 6.
19. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М., Наука, 1984. 310 с.
20. Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Смольянов Ю.П., Гримайло С.И., Камынин С.С., Кугушев Е.И. Исследование многооперационной сборки с помощью экспериментальной робототехнической системы. В сб. Роботизация сборочных процессов. - М.: Наука, 1985.
21. Белоусов И.Р., Богуславский А.А., Емельянов С.Н., Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Сазонов В.В., Соколов С.М. Взаимодействие робота-манипулятора с подвижными объектами. Известия РАН. Механика твердого тела, 2001, N 1, 194-204.
22. Okhotsimsky D.E., Pavlovsky V.E., Plakhov A.G., Touganov A.N. Towards the CLAWAR robots soccer playing - simulation of robotic soccer. Proc. of 4-th Int. Conf. on Climbing and Walking Robots CLAWAR'2001. Karlsruhe, Germany, 24-26 September 2001, pp.451-456.
23. Белоусов И.Р., Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Сазонов В.В. Дистанционное обучение механике и робототехнике через сеть Интернет, "Компьютерные инструменты в образовании", С.-Петербург, N 2, 2003, с. 34-42.

УДК 531.36

А.В. Карпетян
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Обсуждается методика построения и исследования устойчивости инвариантных множеств механических систем с первыми интегралами. Эта методика основана на модифицированной теории Рауса, позволяющей единообразным способом находить и исследовать не только стационарные движения, но и инвариантные множества, а также нестационарные (в частности, периодические) движения, лежащие на этих множествах.

В качестве примера изучаются тривиальные инвариантные множества в задаче о движении волчка Горячева-Чаплыгина, которым соответствуют маятникообразные колебания и вращения волчка.

1. Рассмотрим механическую систему, уравнения движения которой приведены к нормальному виду

$$\dot{x} = X(x) \quad (x \in R^n, \quad X \in C^1 : R^n \rightarrow R^n) \quad (1)$$

Здесь x — фазовые переменные системы, т.е. обобщенные координаты и обобщенные скорости или импульсы, квазикоординаты и квазискорости и т.п.

Предположим, что рассматриваемая система допускает первые интегралы вида

$$I_0(x) = c_0 \quad (I_0 \in C^2 : R^n \rightarrow R) \quad (2)$$

$$I(x) = c \quad (I \in C^2 : R^n \rightarrow R^m, 1 \leq m < n) \quad (3)$$

Согласно теории Рауса [1-4], критические точки одного из интегралов (пусть интеграла (2)) на фиксированных уровнях других интегралов (т.е. (3)) соответствуют стационарным движениям системы (1), причем точки экстремума — устойчивым движениям. Седловые точки могут отвечать как устойчивым, так и неустойчивым стационарным движениям, причем последнее заведомо имеет место, если индекс второй вариации интеграла (2) на линейном многообразии $\delta I = 0$ нечетен [5].

Задача анализа критических точек интеграла (2) на фиксированных уровнях интегралов (3) сводится к анализу критических точек функции

$$W_c(\lambda; x) = I_0(x) + (\lambda, (I(x) - c)),$$

где $\lambda \in R^m$ — неопределенные множители Лагранжа, а (\bullet, \bullet) — скалярное произведение. Критические точки функции W_c определяются из системы $n+m$ уравнений

$$\frac{\partial W_c}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial W_c}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

относительно $n+m$ неизвестных λ и x . В невырожденных случаях система (4) допускает решения вида

$$\lambda = \lambda(c); \quad x = x(c), \quad (5)$$

которым соответствуют семейства стационарных движений $x(t) \equiv x(c)$ системы (1) ($X(x(c)) \equiv 0$), параметризованные постоянными интегралов (3).

Однако довольно часто встречаются ситуации, для которых $k < n$ уравнений подсистемы $\frac{\partial W_c}{\partial x} = 0$ системы (4) являются следствиями других $n-k$ уравнений этой подсистемы. При этом из системы (4) можно определить семейство k -мерных множеств $M(c) \subset R^n$:

$$\lambda = \lambda(c); \quad x \in M(c) = \{x \in R^n : f_c(x) = 0\} \quad (6)$$

где $f_c(x) : R^n \rightarrow R^{n-k}$.

Согласно модифицированной теории Рауса [6] множество $M(c)$ инвариантно относительно фазового потока системы (1), т.е.

$$x(t, c) \in M(c) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0(c) = x(t_0, c) \in M(c)$$

Движения $x(t, c)$ системы (1), лежащие на инвариантном множестве $M(c)$, определяются из уравнений (1), редуцированных на это множество:

$$\dot{x}(t, c) = X(x(t, c)) \Big|_{f_c(x(t, c))=0}$$

Более того, если множество $M(c)$ компактно и доставляет интегралу (2) экстремальное значение на фиксированных уровнях интегралов (3), то $M(c)$ — устойчивое инвариантное множество [6]. Если же множество $M(c)$ доставляет интегралу (2) при условиях (3) седловое значение, то в общем случае вопрос об устойчивости или неустойчивости остается открытым. Однако, если множество $M(c)$ компактно и

Золотой медалью им. М.В. Келдыша РАН, а Международный астрономический союз назвал именем «Охоцимский» малую планету № 8061.

Дмитрий Евгеньевич Охоцимский навсегда вошел в историю науки. Главным его достижением и главным памятником ему являются превосходные научные результаты, созданные им научные направления и научные школы.

Литература

1. Охоцимский Д.Е. К теории движения ракет// Прикладная математика и механика. 1946. Т. 10. № 2. С. 251-272.
2. Охоцимский Д.Е. Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли// Успехи физических наук. 1957. Т. 63. № 1а. С. 5-32.
3. Келдыш М.В., Камынин С.С., Охоцимский Д.Е. Баллистические возможности составных ракет// Келдыш М.В. Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика. М.: Наука, 1988. С. 39-140.
4. Келдыш М.В., Егоров В.А., Камынин С.С., Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Теоретические исследования динамики полета составных крылатых ракет дальнего действия// Келдыш М.В. Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика. М.: Наука, 1988. С. 147-196.
5. Келдыш М.В., Охоцимский Д.Е., Власова З.П., Казакова Р.К. Точечный взрыв в атмосфере// Келдыш М.В. Избранные труды. Механика. М.: Наука, 1985. С. 536-563.
6. Охоцимский Д.Е., Кондрашева И.Л., Власова З.П. Расчет точечного взрыва с учетом противодействия// Труды математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1957. Т. 50. М.: Изд-во АН СССР. 65 с.
7. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью// Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 1. С. 3-20.
8. Охоцимский Д.Е., Сарычев В.А. Система гравитационной стабилизации// Сб. «Искусственные спутники Земли». 1963. Вып. 16. С. 5-9.
9. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Таратынова Г.П. Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты// Успехи физических наук. 1957. Т. 63. № 1а. С. 33-50.
10. Келдыш М.В., Власова З.П., Лидов М.Л., Охоцимский Д.Е., Платонов А.К. Исследование траекторий облета Луны и анализ условий фотографирования и передачи информации// Келдыш М.В. Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика. М.: Наука, 1988. С. 261-309.
11. Лидов М.Л., Охоцимский Д.Е., Тесленко Н.М. Исследование одного класса траекторий ограниченной задачи трех тел// Космические исследования. 1964. Т. 2. № 6. С. .
12. Келдыш М.В., Ершов В.Г., Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Теоретические исследования по динамике полета к Марсу и Венере// Келдыш М.В. Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика. М.: Наука, 1988. С. 243-261.
13. Охоцимский Д.Е. Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения// Космические исследования. 1964. Т. 2. № 6. С.

ретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ. ДЕ стал заведующим кафедрой в 1961 г. Придя на кафедру, он создал новый и актуальный в то время курс лекций «Динамика космического полета» [16, 17]. Его слушали студенты и аспиранты кафедры, а также сотрудники других организаций. Этот курс читается и в наши дни. К работе на кафедре ДЕ привлек ведущих сотрудников своего отдела в ИПМ, а многие выпускники кафедры стали сотрудниками отдела или работали в нем над своими дипломными работами или диссертациями. Благодаря усилиям ДЕ значительную долю в научной и педагогической работе кафедры приобрели работы по созданию новых интеллектуальных робототехнических и мехатронных систем. Чтобы подчеркнуть значимость этого нового направления науки, ДЕ инициировал добавление слова «мехатроника» в название руководимой им кафедры.

Существенной заслугой ДЕ в области воспитания научной молодежи стали Фестивали «Мобильные роботы», которые под его общим руководством начали проводиться в нашей стране с 1998 г. на базе Института механики МГУ при активной поддержке руководства Московского Университета. Этим фестивалям впоследствии было присвоено имя профессора Е.А. Девянина. С подачи ДЕ организаторами фестивалей выступили Институт механики МГУ, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Московский Энергетический институт, МГТУ им. Н.Э. Баумана. ДЕ являлся неизменным председателем Оргкомитета и душой фестивалей с начала их проведения. Он считал эти фестивали новым эффективным средством приобщения студентов и научной молодежи к практическому овладению методами разработки и создания современных мехатронных систем, что необходимо для людей, предполагающих работать в области высоких технологий.

Научные заслуги ДЕ получили высокую оценку в нашей стране и за рубежом. В 1951 г. он получил Премию имени С.А. Чаплыгина АН СССР, в 1957 г. стал лауреатом Ленинской премии, и ему без защиты диссертации была присуждена степень доктора физико-математических наук. В 1960 г. ДЕ был избран в члены-корреспонденты АН СССР, в 1961 г. удостоен звания Героя социалистического труда. В 1970 г. он получил Государственную премию СССР, в 1991 г. избран в действительные члены РАН, в 1995 г. стал заслуженным профессором МГУ, в 2000 г. избран иностранным членом Сербской академии наук и искусств. В 2001 г. он был награжден

одномерно ($k = 1$), а движения, лежащие на нем, периодичны, то оно заведомо неустойчиво [7] в случае нечетного индекса второй вариации интеграла (2) на линейном многообразии $\delta I = 0$.

Более подробно с проблемой существования, ветвления и устойчивости инвариантных множеств механических систем с первыми интегралами можно ознакомиться по работам [8,9].

2. В качестве примера рассмотрим задачу об орбитальной устойчивости маятникообразных движений волчка Горячева-Чаплыгина, ранее исследованной [7] другим способом.

Рассмотрим тяжелое твердое тело с неподвижной точкой, подчиненное условиям Горячева-Чаплыгина. Пусть A, B и C ($A = B = 4C$) — главные моменты инерции тела для неподвижной точки, $x = a, y = z = 0$ — координаты центра масс тела в соответствующих главных осях инерции, P — вес тела.

Выбирая в качестве обобщенных координат углы Эйлера $\theta, \psi,$ и φ , обозначая $\frac{Pa}{C}$ через ω^2 и полагая, без уменьшения общности, $C = 1$, выпишем функцию Лагранжа рассматриваемой механической системы

$$L = \frac{1}{2} [4\dot{\theta}^2 + 4\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2] - \omega^2 \sin \theta \sin \varphi$$

Очевидно, ψ — циклическая координата. Это значит, что рассматриваемая система наряду с интегралом энергии

$$H = \frac{1}{2} [4\dot{\theta}^2 + 4\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2] + \omega^2 \sin \theta \sin \varphi = \omega^2 h$$

$(h \in [-1, +\infty))$

допускает интеграл площадей $\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = k$. На нулевом уровне ($k = 0$)

этого интеграла существует дополнительный интеграл

$$G = (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) - \omega^2 (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi) \cos \theta = \omega^3 g \quad (g \in R)$$

Редуцируя систему на нулевой уровень интеграла площадей, имеем

$$\dot{\psi} = -\dot{\varphi} \cos \theta (1 + 3 \sin^2 \theta)^{-1} \quad (7)$$

Приведенная (по Раусу) система описывается функцией Рауса

$$R = L_{(7)} - \dot{\psi} \cdot \theta = L_{(7)} = 2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \frac{\sin^2 \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta} \right) - \omega^2 \sin \theta \sin \varphi$$

и допускает два интеграла

$$H_0 = H_{(7)} = 2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \frac{\sin^2 \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta} \right) + \omega^2 \sin \theta \sin \varphi = \omega^2 h,$$

$$G_0 = G_{(7)} = 4 \frac{\sin^2 \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta} \dot{\phi} \left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^2} \right] - \omega^2 \left(\dot{\theta} \cos \theta - \dot{\phi} \frac{\sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{1 + 3 \sin^2 \theta} \right) \cos \theta = \omega^3 g$$

Очевидно, функция $W_h(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \theta, \varphi, \lambda) = G_0 + \lambda(H_0 - \omega^2 h)$ принимает стационарные значения (при $\lambda = 0$) на множестве

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \omega^2 \sin \varphi = \omega^2 h \quad (8)$$

(так как все частные производные функции $G_0(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \theta, \varphi)$ по входящим в нее переменным тождественно по $\dot{\phi}, \varphi$ обращаются в нуль при $\dot{\theta} = 0, \theta = \pi/2$). Это означает, что соотношения (8) определяют однопараметрическое семейство одномерных инвариантных множеств приведенной системы. Лежащие на этих множествах движения волчка Горячева-Чаплыгина описываются формулами (см. (7) и (8))

$$\theta \equiv \frac{\pi}{2}; \quad \psi \equiv const, \quad \varphi = \varphi(t) \quad (9)$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяют уравнению (см. (8))

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \cos \varphi = 0.$$

Таким образом, соотношения (9) описывают маятникообразные движения волчка Горячева-Чаплыгина: при $h \in (-1, 1)$ — колебания; при $h > 1$ — вращения; при $h = -1$ — устойчивое равновесие $\varphi = -\pi/2$, а при $h = 1$ — либо неустойчивое равновесие $\varphi = \pi/2$, либо асимптотические движения, для которых $\varphi \rightarrow \pi/2$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, инвариантные множества (8) компактны при любом допустимом значении h .

составной частью Российского комплекса управления полетом космических аппаратов различных типов

В 60-е годы ДЕ занимался исследованием полетов космических аппаратов с малой тягой. Он нашел предельное решение уравнений движения материальной точки в ньютоновском поле тяготения при дополнительном действии постоянного касательного ускорения [13]. Это решение описывает траекторию, уходящую из особой точки в притягивающем центре в бесконечность и называемую универсальной спиралью Охочимского. Идея построения предельного решения была развита затем на задачу об оптимальном разгоне, когда малая тяга переменна по величине и может отклоняться от касательной к траектории [14].

В 60-х и начале 70-х годов ДЕ вместе с сотрудниками интенсивно занимался проблемой входа космических аппаратов в атмосферу Земли и планет [15]. Были разработаны высокоточные эффективные адаптивные алгоритмы управления, реализуемые с помощью БЦВМ.

В начале 70-х годов ДЕ перенес свое основное внимание на робототехнику. Он организовал в своем отделе сектор, сотрудники которого под его внимательным руководством решали робототехнические задачи. Этими задачами ДЕ интенсивно занимался буквально до последних дней жизни. Он и в 84-летнем возрасте сохранял весьма высокие интеллектуальные способности, остро чувствовал новые проблемы, умел увлечь ими своих сотрудников. В робототехнике, как и в механике космического полета, он умел находить такие постановки задач, которые имели простые конкретные формулировки, но допускали широкие обобщения в контексте предлагаемых методов решения [18-23].

ДЕ был весьма успешным организатором науки. Он сумел неформальную структуру своей научной школы подкрепить формальной структурой отдела. Его школа и отдел в ИПМ составляют единый эффективно функционирующий организм. По широте тематики исследований, по квалификации сотрудников (в 90-х годах в отделе работало два академика РАН, один член-корреспондент и почти два десятка докторов наук) и по научной отдаче этот коллектив превосходит иные институты. Отдел разрастался, его структура усложнялась, но все нюансы научной и организационно-административной жизни отдела, прежде всего кадровые вопросы, были под пристальным контролем ДЕ. У заведующего отделом всегда можно было получить содержательную и детальную консультацию по научным и другим вопросам.

Другим примером весьма успешной научно-организационной работы ДЕ может служить заведование им в течение 44 лет кафедрой те-

и его сотрудники посчитали именно эту схему наиболее привлекательной и положили в основу конструкции ракеты Р-7.

В те же годы ДЕ были выполнены исследования по динамике и оптимизации полета составных крылатых ракет [4], созданы устойчивый численный метод расчета на ЭВМ точечного взрыва с учетом противодействия [5, 6] и эффективный метод учета подвижности жидкости в баках ракеты в условиях полета при наличии свободной поверхности [7].

Одно из главных теоретических достижений ДЕ тех лет состоит в развитии метода множителей Лагранжа для решения вырожденных задач вариационного исчисления. С помощью этого метода ДЕ и его сотрудники в 40-х – начале 50-х годов решили ряд важных задач оптимизации полета и конструкции ракет [2, 3, 4], которые впоследствии стали решать с помощью принципа максимума Понтрягина.

В 1953 г. академиком М.В. Келдышем было создано Отделение прикладной математики МИАН, преобразованное впоследствии в Институт прикладной математики АН СССР. ДЕ стал заведующим отделом в этом институте и руководил им более 52 лет. В середине 80-х годов число сотрудников отдела доходило до 150.

В середине 50-х годов основное содержание работы отдела, в которой ДЕ выступал и как руководитель, и как непосредственный творческий участник, составляли новые задачи, связанные с полетом искусственных спутников Земли и полетами к Луне и планетам. Он предложил пассивный (без расхода рабочего тела и энергии) способ стабилизации спутника в орбитальной системе координат на круговой орбите с помощью гравитационного момента [8]. Были выполнены расчет времени существования низколетящего искусственного спутника Земли с учетом действия на него сопротивления атмосферы [9], исследование траекторий облета Луны [10, 11], анализ возможностей полетов к Марсу и Венере с промежуточным выводом на орбиту спутника Земли [12]. По траектории, предложенной в [10], двигалась советская автоматическая станция *Луна-3*, запущенная 04.10.1959 и впервые осуществившая фотографирование обратной стороны Луны. В рамках отдела был создан и поныне функционирует баллистический центр по управлению полетом спутников и космических аппаратов. Наиболее яркие и удачные работы центра связаны с обеспечением полетов к Луне и планетам (Венере и Марсу). Центр постоянно развивался и модернизировался и к настоящему времени представляет собой высокоавтоматизированную систему. Сейчас Баллистический центр ИПМ является неотъемлемой

Вторая вариация функции G_0 , вычисленная на множестве (8), имеет вид ($x = \dot{\theta}$, $y = \theta - \pi/2$):

$$2\delta^2 G_0 = 2\dot{\varphi}(t)x^2 + 2\omega^2 \cos \varphi(t)xy + \dot{\varphi}(t) \left(\frac{\dot{\varphi}^2(t)}{8} + \frac{\omega^2}{2} \sin \varphi(t) \right) y^2 \quad (10)$$

и представляет собой квадратичную форму по x и y с коэффициентами, зависящими от $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$. Определитель этой квадратичной формы равен $\Delta = \omega^4(h^2 - 1)$ (см. (8)).

Таким образом, при $h \in (-1, 1)$ определитель $\Delta < 0$ и индекс квадратичной формы (10) равен 1, причем множество (8) одномерно и компактно, а движения, лежащие на нем периодичны. При $h > 1$ (при этом $\dot{\varphi}(t) \neq 0 \quad \forall t$) определитель $\Delta > 0$ и функция G_0 принимает на компактном множестве (8) экстремальное значение (при $\dot{\varphi}(t) > 0$ — минимальное, а при $\dot{\varphi}(t) < 0$ — максимальное).

Следовательно, при $h \in (-1, 1)$ инвариантные множества (8) неустойчивы, а при $h > 1$ — устойчивы. Эти выводы полностью согласуются с результатами работы [10], в которой доказана орбитальная неустойчивость колебательных и орбитальная устойчивость вращательных маятникообразных движений (9) волчка Горячева-Чаплыгина.

В заключение отметим, что в задаче Горячева-Чаплыгина наряду с тривиальными множествами (8) существуют и другие существенно более сложные инвариантные множества (см. [11]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04-01-00398) и программы «Университеты России».

Литература

1. *Routh E.J.* A treatise on stability of a given state of motion. London: MacMillan and Co. 1877. 108 p.
2. *Levy-Civita T.* Sur la recherche des solutions particulieres des systemes differentiels et sur les mouvements stationnaires. // Prace mat. Fis. 1906. V.17. P. 1-40.
3. *Salvadori L.* Un'osservazione su di un criterio di stabilita del Routh. // Rend. Accad. Sci. Fis. Math. Napoli (4). 1953. V.20. P.269-272.
4. *Пожарицкий Г.К.* О построении функций Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. // ПММ. 1958. Т.22. Вып.2. С.145-154.

5. Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений. // Теор. и прикл. мех. 1974. Т. 5. С. 67-69.
6. Karapetyan A.V. The Routh theorem and its extensions. // Colloq. Math. Janos Bolyai. 53. Qualit. theory of diff.eq. Amsterdam-New York: North Holland. 1990. P.271-290.
7. Козлов В.В. О степени неустойчивости. // ПММ. 1993. Т. 57. С. 14-19.
8. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС. 1998. 165 с.
9. Карапетян А.В. Инвариантные множества механических систем. В кн.: Нелинейная механика. М.: Физматлит. 2001. С. 62-88.
10. Маркеев А.П. О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева-Чаплыгина. // ПММ. 2004. Т.68. С.282-293.
11. Карапетян А.В. Инвариантные множества в задаче Горячева-Чаплыгина: существование, устойчивость и ветвление. // ПММ. 2006. Т. 70, Вып. 2.

Ю.Ф. Голубев¹, А.К. Платонов²

1 МГУ им. М.В. Ломоносова

2 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Д.Е. ОХОЦИМСКИЙ – СОЗДАТЕЛЬ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ И РАЗРАБОТКЕ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ



18 декабря 2005 г. после продолжительной тяжелой болезни скончался Дмитрий Евгеньевич Охоцимский – академик РАН, выдающийся ученый в области механики космического полета и теории управления механическими и мехатронными системами. 26 февраля 2006 г. ему исполнилось бы 85 лет.

Коллектив ученых, занимавшихся научными проблемами прикладной небесной механики, начал формироваться вокруг Д.Е. Охоцимского в конце 40-х годов. Тогда на механико-математическом факультете МГУ образовалась активная группа энтузиастов полетов в космос. Это были студенты и аспиранты, посещавшие семинар профессора А.А. Космодемьянского по механике тел с переменной массой. Среди них был и молодой Д.Е. Охоцимский. Несколько ранее им, еще студентом (дипломной работой ДЕ руководил академик С.А. Христианович), была впервые решена нестандартная для того времени задача об оптимальном режиме движения ракеты [1]. Впоследствии ДЕ нашел метод решения общего класса вырожденных задач вариационного исчисления [2].

В конце 40-х – начале 50-х годов в МИ АН СССР в отделе механики, возглавляемом М.В. Келдышем, ДЕ сформировал небольшую группу, в основном, из выпускников мехмата МГУ, которая занималась теоретическими исследованиями в области проектирования ракет и оптимизации их траекторий. В частности, ДЕ и С.С. Камынин по заданию С.П. Королёва выполнили анализ [3] баллистических характеристик «пакета» ракет, предложенного М.К. Тихонравовым. В процессе анализа родилась и была обоснована расчетами идея другой схемы с боковыми ракетами меньших размеров и запаса топлива. С.П. Королёв

(1976), Ломоносовской премией МГУ (1998), медалями и почетными званиями.

Светлая память об Игоре Васильевиче Новожилове, талантливом ученом и педагоге, исключительно скромном, обаятельном и добросовестном человеке, истинном патриоте навсегда сохранится в наших сердцах.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

УДК 531.01

В.В. Сазонов

Институт прикладной математики РАН
им. М.В. Келдыша

КОММЕНТАРИИ К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Рассматриваются линейно-алгебраическая и механическая интерпретации уравнений Лагранжа второго рода, предлагаемые для использования в преподавании курса теоретической механики. В рамках линейно-алгебраической интерпретации уравнения Лагранжа трактуются как нормальные уравнения метода наименьших квадратов, возникающие при минимизации принуждения по Гауссу. В рамках механической интерпретации уравнения Лагранжа соотносятся с общими теоремами динамики.

1. Введение

При выводе и анализе уравнений Лагранжа второго рода в учебном курсе теоретической механики обычно подчеркивают формальную сторону дела, оставляя в стороне содержательные интерпретации этих уравнений. Есть даже термин "формализм Лагранжа", причем иногда этот формализм противопоставляют использованию общих теорем динамики. Такой подход обедняет курс. Рассмотрение уравнений Лагранжа с разных точек зрения позволяет еще раз продемонстрировать универсальность некоторых математических конструкций, научить студентов удобным приемам проверки вычислений при решении сложных механических задач.

Ниже рассматриваются две интерпретации уравнений Лагранжа второго рода, которые можно использовать на лекциях и семинарских занятиях. Это – линейно-алгебраическая интерпретация, в рамках которой уравнения Лагранжа трактуются как нормальные уравнения метода наименьших квадратов, возникающие при минимизации принуждения по Гауссу, и механическая интерпретация, в которой уравнения Лагранжа трактуются в терминах общих теорем динамики.

2. Линейно-алгебраическая интерпретация уравнений Лагранжа второго рода

Рассмотрим систему материальных точек с массами m_v и радиусами-векторами \mathbf{r}_v ($v = 1, 2, \dots, N$), относящимися к некоторой инерциальной системе отсчета. Пусть система стеснена идеальными голономными связями и имеет n степеней свободы; q_1, q_2, \dots, q_n – ее обобщенные координаты. Радиусы-векторы точек системы можно параметризовать следующим образом: $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(q, t)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $v = 1, 2, \dots, N$. Формулы параметризации при любом фиксированном t задают в пространстве R^{3N} векторов $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ многообразие S_t . Касательное пространство к S_t в произвольной точке, задаваемой обобщенными координатами q , обозначим $T_q S_t$. Оно образовано векторами

$$\delta r = (\delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{r}_2, \dots, \delta \mathbf{r}_N), \quad \delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где δq_i – произвольные величины. Векторы δr и $\delta \mathbf{r}_v$ называются возможными перемещениями.

В заданном движении системы $q = q(t)$ скорости и ускорения ее точек

$$\dot{\mathbf{r}}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \mathbf{g}_v(q, \dot{q}, t). \quad (2)$$

Если величины q, \dot{q}, t в выражениях для $\dot{\mathbf{r}}_v$ и q, \dot{q}, \ddot{q}, t в выражениях для $\ddot{\mathbf{r}}_v$ считать независимыми, то эти выражения задают множества скоростей и ускорений точек системы, совместимых со связями.

Уравнения движения системы запишем в виде

$$m_v \ddot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{F}_v + \mathbf{R}_v \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (3)$$

где \mathbf{F}_v – главный вектор активных сил, действующих на материальную точку с номером v , \mathbf{R}_v – сила реакции связей, приложенная к v -ой точке. Значения сил реакции должны быть такими, чтобы решение уравнений (3) было совместимо со связями.

Переход от уравнений (3) к уравнениям вида

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t) \quad (4)$$

конкретных задач показывает, что асимптотические оценки остаются справедливыми и при весьма «больших» значениях малых параметров.

Методология, созданная И. В. Новожиловым, позволила эффективно строить приближенные математические модели сложных управляемых механических систем. Его монография «Фракционный анализ» неоднократно издавалась на русском языке, переведена на английский язык и получила широкое признание в научном мире.

И. В. Новожилов был прекрасным педагогом, читал содержательные и яркие спецкурсы «Теория колебаний -I, II» и «Математическое и компьютерное моделирование в механике управляемых систем», ориентированные на «дело», для которого пишутся формулы и уравнения. Он одним из первых применил компьютерные методы в учебном процессе преподавания теоретической механики в технических вузах. Его учебное пособие «Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ» стало настольной книгой многих преподавателей механики в России и за ее рубежами.

И.В. Новожилов являлся главой крупной механической школы, воспитав 4 докторов и 18 кандидатов наук.

И.В. Новожилов был членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, членом Экспертного совета по математике и механике ВАК, председателем комиссии РАН по разработке терминологии в области гироскопии, членом бюро экспертного совета по математике, механике и информатике РФФИ, членом Научно-методического совета по теоретической механике Минобрнауки РФ, членом редколлегий журнала Известия РАН «Механика твердого тела» и сборника научно-методических статей «Теоретическая механика».

И.В. Новожилова отличала не только энциклопедическая широта научных интересов, но и исключительная одаренность в области литературы и искусства. Он был блестящим знатоком живописи, поэзии и истории, прекрасно рисовал, писал стихи и прозу. Его перу принадлежат новаторские иллюстрации научной и научно-популярной литературы, талантливые графические произведения, сборник стихов и рисунков «Без опасений и стыда». Он был участником поэтических сборников «Другая грань», автором замечательной военно-исторической книги «Год рождения 1921», посвященной трудным судьбам людей, прошедших Великую Отечественную войну.

Многогранная и плодотворная научная и общественная деятельность И.В. Новожилова отмечена Государственной премией СССР

гиростабилизаторов. Определил условия корректности классических моделей механики: абсолютно твердого тела, голономных, неголономных связей, скользящих режимов в системах с разрывными правыми частями. Предложил модель качения деформируемого колеса, обобщающую модели Картера, Рокара, Фромма, Келдыша. Построил и обосновал приближенные математические модели динамики самолета, космического аппарата, вагона в магнитном подвесе, модели поперечных колебаний вагонов железнодорожного состава, движения автомобиля, трех-, четырех- и шестимерных динамических стендов, модели локомотивов различных объектов биомеханики, включая всевозможные походки двух-, четырех- и шестиногих аппаратов, разработал модель массообмена системы «человек – искусственная почка», сыгравшую принципиальную роль в создании теории гемодиализа. Предложил методику доопределения систем с разрывными характеристиками и применил ее для исследования систем с сухим трением. Эти обширные исследования механических, транспортных, электромеханических, биомеханических, медицинских задач Игорю Васильевичу удалось объединить под знаком метода фракционного анализа. Фракционный анализ системы выполняется в два этапа.

На первом используются методы теории размерностей для нормализации исходных уравнений и введения в них структуры малых параметров, отвечающей исследуемому классу движения. Класс движения определяется заданием характерных значений всех постоянных и переменных величин, участвующих в описании исходной модели и соответствующих поставленной цели исследования.

На втором этапе применяются асимптотические методы теории регулярных и сингулярных возмущений по введенным на первом этапе малым параметрам. Решение возмущенной задачи строится в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра. Системы дифференциальных уравнений, определяющих решение с точностью до нулевого, первого и т.д. порядков по малому параметру служат приближенными математическими моделями соответствующей точности для исходной математической модели. Набор приближенных моделей для исходной системы определяется перечнем классов движения, для которых строятся эти модели, а также требуемой точностью приближения по малому параметру.

Оценки точности приближенных моделей даются оценками точностей используемых асимптотических разложений. Практика решения

требует дополнительных предположений о характере связей. Ниже этот переход выполняется в случае идеальных связей, т. е. в случае, когда для любого $\delta r \in T_q S_t$ имеет место равенство

$$\sum_v \mathbf{R}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0.$$

Последнее равенство с учетом соотношений (1) представим в виде

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_v \mathbf{R}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0.$$

В силу произвольности δq_i отсюда следует, что

$$\sum_v \mathbf{R}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и далее в силу (3)

$$\sum_v (m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Полученные уравнения можно привести к обычному виду уравнений Лагранжа второго рода. Однако ниже для достижения поставленной цели будут сделаны другие преобразования.

Подставим в (5) выражения для ускорений (2), получим

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_v m_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \right) \ddot{q}_j = \sum_v (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{g}_v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Введем обозначения

$$a_{ij}(q, t) = \sum_v m_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j}, \quad F_i(q, \dot{q}, t) = \sum_v (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{g}_v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i}.$$

Тогда полученные уравнения можно записать так

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(q, t) \ddot{q}_j = F_i(q, \dot{q}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Поскольку матрица $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ не вырождена (следствие существования обобщенных координат q), уравнения (6) приводятся к виду (4).

Векторы

$$e_i = \frac{\partial r}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}_N}{\partial q_i} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

образуют базис в касательном пространстве $T_q S_i$. Введем в R^{3N} скалярное произведение: для $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ положим

$$(x, y) = \sum_v m_v x_v \cdot y_v.$$

Поскольку все $m_v > 0$, это действительно скалярное произведение.

Введем векторы

$$b = \left(\frac{\mathbf{F}_1}{m_1} - \mathbf{g}_1, \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \mathbf{g}_2, \dots, \frac{\mathbf{F}_N}{m_N} - \mathbf{g}_N \right), \quad c = \left(\frac{\mathbf{R}_1}{m_1}, \frac{\mathbf{R}_2}{m_2}, \dots, \frac{\mathbf{R}_N}{m_N} \right).$$

С их помощью уравнения (3) записываются в виде

$$\sum_{i=1}^n \ddot{q}_i e_i = b + c. \quad (3')$$

Условия идеальности связей означают, что $c \perp T_q S_i$, и выражаются соотношениями

$$(e_i, c) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Уравнения (3') означают, что $b + c \in T_q S_i$. Следовательно, c – перпендикуляр, опущенный из конца b на $T_q S_i$, а $b + c$ – ортогональная проекция b на $T_q S_i$. Перпендикуляр реализует кратчайшее расстояние, поэтому

$$\ddot{q} = \arg \min \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i - b \right\|^2 \quad \text{по } a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (7)$$

Уравнения (6) в новых обозначениях записываются в виде

$$\sum_{j=1}^n (e_i, e_j) \ddot{q}_j = (e_i, b) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6')$$

Они определяют вектор \ddot{q} , являющийся решением задачи (7). В других терминах уравнения (6') – нормальные уравнения метода наименьших квадратов [1], возникающие при минимизации квадратичной формы

НАШИ УТРАТЫ

ИГОРЬ ВАСИЛЬЕВИЧ НОВОЖИЛОВ

3 декабря 1931 г. – 15 января 2006 г.



15 января 2006 года на семьдесят пятом году жизни скоропостижно скончался выдающийся ученый в области механики, профессор, доктор физико-математических наук Игорь Васильевич Новожилов.

Игорь Васильевич родился 3 декабря 1931 года в Кирове (Песочня) Калужской области. После окончания с отличием механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в 1954 году он около 10 лет занимался разработкой аэрокосмических систем в научно-исследовательском приборостроительном институте. В 1964 году он был приглашен преподавать на механико-математический факультет МГУ, заведовал лабораторией в Институте механики МГУ, а с 1975 по 1986 год был заведующим кафедрой теоретической механики Московского энергетического института. С 1986 года до последних дней своей жизни профессор И.В.Новожилов преподавал на кафедре прикладной механики и управления механико-математического факультета Московского университета.

Почти все теоретические исследования И.В.Новожилова были тесно связаны с интересами промышленности и практическими приложениями. Его выдающейся работой конца 50-х – начала 60-х годов стало участие в создании системы управления мягкой посадкой космического аппарата на поверхность Луны. Он предложил метод двухэтапного исследования устойчивости многомерных систем, обладающих симметрией.

Крупный вклад внес И.В.Новожилов в развитие общей теории гироскопических и навигационных систем. При помощи строго обоснованных асимптотических методов он установил границы применимости прецессионной теории гироскопов, нашел систематические уходы

**ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ О
ЗАСЕДАНИЯХ НМС ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ**

Заседания НМС по теоретической механике проводятся в предпоследний четверг месяца в НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова в 16³⁰ ч.

На заседаниях заслушиваются научные, методические доклады, сообщения о работе кафедр теоретической механики различных вузов, о проведении олимпиад по теоретической механике. Рассматриваются вопросы, связанные с преподаванием теоретической механики, с выдачей Заключения Совета на присвоение грифа Министерства образования и науки РФ учебникам и учебным пособиям и другие вопросы.

$$Z = \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i - b \right\|^2 = \sum_v m_v \left| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} + \mathbf{g}_v - \frac{\mathbf{F}_v}{m_v} \right|^2 = \sum_v m_v \left| \ddot{\mathbf{r}}_v - \frac{\mathbf{F}_v}{m_v} \right|^2.$$

В последнем выражении этой цепочки равенств ускорения $\ddot{\mathbf{r}}_v$ рассматриваются на линейном многообразии ускорений, совместимых со связями при заданных \mathbf{r}_v , $\dot{\mathbf{r}}_v$ и t . В случае голономных связей это многообразие задается соотношениями (2) при произвольном $\dot{q} = a$. Однако приведенную словесную формулировку можно трактовать более широко, относя ее к связям и другим типам [2]. Излагая этот материал студентам, здесь уместно сформулировать принцип наименьшего принуждения Гаусса в общем виде.

3. Механическая интерпретация уравнений Лагранжа второго рода

Будем исходить из следующего правила: выяснить механический смысл какого-либо объекта (уравнения, утверждения и т.п.) – это установить связь этого объекта с общими теоремами динамики. Руководствуясь этим правилом, покажем, что в типичных ситуациях механический смысл уравнений Лагранжа второго рода индуцируется геометрическим смыслом обобщенных координат. Рассмотрим механическую систему, введенную в предыдущем разделе, и полуфабрикат (5) ее уравнений Лагранжа. Левые части этих уравнений обозначим U_i , а на сами уравнения будем ссылаться, как на уравнения $U_i = 0$.

Пусть для некоторого орта $\mathbf{e} = \mathbf{e}(q, t)$ при всех допустимых q и t выполнены соотношения

$$\mathbf{e} = \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_1} \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

Иными словами, система при изменении только одной обобщенной координаты q_1 смещается вдоль орта \mathbf{e} как твердое тело. В этом случае уравнение $U_1 = 0$ можно преобразовать следующим образом

$$0 = \sum_v (m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}, \quad (8)$$

$$\mathbf{Q} = \sum_v m_v \dot{\mathbf{r}}_v, \quad \mathbf{F} = \sum_v \mathbf{F}_v$$

Здесь \mathbf{Q} – количество движения системы, \mathbf{F} – главный вектор, действующих на нее внешних сил (главный вектор внутренних сил

системы равен нулю, поэтому в последней сумме внутренние силы исчезают). Таким образом, уравнение $U_1 = 0$ выражает теорему об изменении количества движения системы в проекции на направление \mathbf{e} . Связь между указанной выше формой этого уравнения и стандартной формой уравнения Лагранжа второго рода для обобщенной координаты q_1 можно проследить более детально. Запишем уравнение (8) в виде

$$\frac{d(\mathbf{e} \cdot \mathbf{Q})}{dt} - \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}.$$

Оказывается

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{Q} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \quad \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{Q} = \frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} = Q_1,$$

где T – кинетическая энергия системы, Q_1 – обобщенная сила, отвечающая координате q_1 . Вывод последних соотношений основан на тех же преобразованиях, что и вывод уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{Q} &= \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} \cdot \mathbf{e} = \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}_1} = \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\nu}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \\ \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{Q} &= \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} \cdot \dot{\mathbf{e}} = \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_1} = \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\nu}}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_1}, \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} &= \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \mathbf{e} = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_1} = Q_1. \end{aligned}$$

Пусть теперь существуют такие точка A с радиусом-вектором $\mathbf{r}_A(q, t)$ и орт $\mathbf{e}(q, t)$, что при всех допустимых q и t выполнены соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q_1} = \mathbf{e} \times (\mathbf{r}_{\nu} - \mathbf{r}_A) \quad (\nu = 1, 2, \dots, N),$$

т. е. при изменении только одной обобщенной координаты q_1 система поворачивается вокруг оси, проходящей через точку A в направлении орта \mathbf{e} – оси (A, \mathbf{e}) , как твердое тело. Тогда уравнение $U_1 = 0$ можно представить так:

$$0 = \sum_{\nu} (m_{\nu} \ddot{\mathbf{r}}_{\nu} - \mathbf{F}_{\nu}) \cdot [\mathbf{e} \times (\mathbf{r}_{\nu} - \mathbf{r}_A)] = \mathbf{e} \cdot (\dot{\mathbf{K}}_A + \dot{\mathbf{r}}_A \times \mathbf{Q}) - \mathbf{e} \cdot \mathbf{L}_A,$$

Так, например, задачи соревнований этого Фестиваля «РобоКафе» нацелены на создание роботов, способных заменить обслуживающий персонал кафе, ресторана, бара.

Соревнования EUROBOT (www.eurobot.org), организованные в 1998 году как кубок молодежных робототехнических команд Франции, в настоящее время приобрели действительно международный статус: в них представлено более 25 стран мира. Прикладной чемпионат молодых разработчиков EUROBOT – это хорошо отработанная образовательная программа, направленная на поиск, подготовку и поддержку новых высококвалифицированных кадров с практическим опытом командной работы на стыке перспективных областей знаний. Регламент EUROBOT и требования к роботам меняются каждый год, и каждое очередное соревнование рождает новые идеи и свежие решения.

В 2006 году заявки на участие в соревнованиях EUROBOT подали 79 команд, и лишь 50 из них прошли квалификацию, среди которых были три команды из России: **Кронус** (*Объединённый Робототехнический Клуб МГУ им М.В. Ломоносова и МГТУ им. Н.Э. Баумана*), **Аргонавт-Е** (*МГУ им М.В. Ломоносова, СУНЦ МГУ*), **ИнМех-МГУ** (*Институт механики МГУ им М.В. Ломоносова*). Впервые Россия уверенно заявила о себе на соревнованиях роботов такого формата (www.eurobot.ru), и особенно приятно, что все три команды – родом из Фестиваля «Мобильные роботы» имени профессора Е.А. Девянина. Российские команды доказали в Италии высокий уровень подготовки и приобрели бесценный опыт, который совершенно необходим для успешных выступлений в последующих соревнованиях и, конечно, для популяризации и расширения соревнований роботов различных форматов в России.

Отмечая особое место Фестиваля «Мобильные роботы» имени профессора Е.А. Девянина в ряду научно-технических образовательных проектов, а также с целью расширения его аудитории в 2006 году принято решение провести Фестиваль «Мобильные роботы -2006» в рамках *Первого Фестиваля Науки в МГУ*. Основной задачей *Фестиваля Науки в МГУ* станет знакомство участников с последними достижениями мировой научной мысли, новейшими тенденциями в науке и технике. *Первый Фестиваль Науки в МГУ* пройдет с 27 по 31 октября 2006 года наукоемко, популярно и широко представит последние робототехнические разработки и соревнования роботов в России.

бильные роботы», проводимых в МГУ, главной задачей которых является образование студентов в области робототехники. Ежегодно обсуждаются новые идеи и подходы к решению задач робототехники, вопросы динамики, управления и стабилизации мобильных колесных, шагающих, змееподобных роботов, биомехатронных систем. По материалам этих конференций можно достаточно хорошо представить, как развивались исследования и технология образования в области современной робототехники в течение последних 10 лет.

В 2005 году стартовала Научно-Образовательная Программа Института механики МГУ для школьников по механике, мехатронике и робототехнике (www.imes.msu.ru/school). В течение года ребята занимались в Институте механики МГУ и в программу Фестиваля «Мобильные роботы-2005» была уже добавлена школьная сессия. «Уменьшенная копия» Фестиваля была организована для развития интереса и демонстрации уже имеющихся достижений в научно-исследовательской деятельности школьников (без ограничения их возраста). Она включала и торжественное открытие, и соревнования LEGO-роботов, и специальную школьную секцию научной Школы-конференции, в которой принимали участие педагоги и школьники. Участие школьников в Фестивале, их живой интерес и большое количество оригинальных творческих разработок позволяют надеяться, что в скором времени в МГУ и другие ВУЗы России придут мотивированные и очень сильные абитуриенты!

Успешное проведение Фестиваля с 1998 года обеспечивают организации – участники: МГУ им. М.В. Ломоносова, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, МЭИ, МГТУ им. Н.Э. Баумана; МГАПИ. Все годы их работу объединял и направлял бессменный Председатель Оргкомитета Фестиваля, человек огромной творческой энергии и веры в российскую механику и робототехнику – академик РАН Д.Е. Охоцимский.

Фестиваль «Мобильные роботы» имени профессора Е.А. Девянина – первый в истории России чемпионат роботов показал эффективность увлекательной образовательной технологии и дал старт многим другим соревнованиям и фестивалям роботов в нашей стране.

Фестиваль «**Роботы для людей**» (www.robot.ru) – позаимствовав многие идеи Фестиваля «Мобильные роботы» стал открытым молодежным соревнованием, в котором различные коллективы имеют возможность тестировать свои прикладные разработки. Команды молодых разработчиков имеют возможность общаться между собой, узнавать, что происходит в области научных инноваций.

$$\mathbf{K}_A = \sum_v m_v (\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_A) \times \dot{\mathbf{r}}_v, \quad \mathbf{L}_A = \sum_v (\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}_v.$$

Здесь \mathbf{K}_A и \mathbf{L}_A – кинетический момент системы и главный момент действующих на нее внешних сил, вычисленные относительно точки A (главный момент внутренних сил системы относительно любой точки равен нулю, поэтому в последней сумме вклад внутренних сил отсутствует). Полученное соотношение

$$\mathbf{e} \cdot (\dot{\mathbf{K}}_A + \dot{\mathbf{r}}_A \times \mathbf{Q}) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{L}_A \quad (9)$$

выражает теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси (A, \mathbf{e}) . Такая формулировка теоремы корректна, поскольку левая и правая части равенства (9) не зависят от выбора точки A на этой оси. Уравнение (9) можно записать в виде

$$\frac{d(\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}_A)}{dt} - \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{K}_A + \mathbf{e} \cdot (\dot{\mathbf{r}}_A \times \mathbf{Q}) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{L}_A,$$

причем

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}_A = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \quad \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{K}_A - \mathbf{e} \cdot (\dot{\mathbf{r}}_A \times \mathbf{Q}) = \frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{L}_A = Q_1,$$

Последние соотношения доказываются так же, как аналогичные соотношения в предыдущем случае (см. [3]).

Механическая интерпретация уравнений Лагранжа может основываться на теоремах об изменении количества движения и кинетического момента для подсистемы. Пусть подсистема образована материальными точками с номерами $v \in I$, где I – собственное подмножество множества $\{1, 2, \dots, N\}$. Предположим, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_1} = \mathbf{e} \quad \text{при } v \in I, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_1} = 0 \quad \text{при } v \notin I.$$

Тогда уравнение $U_1 = 0$ может быть записано в виде

$$\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{Q}}' = \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}', \quad (10)$$

$$\mathbf{Q}' = \sum_{v \in I} m_v \dot{\mathbf{r}}_v, \quad \mathbf{F}' = \sum_{v \in I} \mathbf{F}_v.$$

Здесь \mathbf{Q}' – количество движения выделенной подсистемы, \mathbf{F}' – главный вектор, действующих на нее внешних (по отношению к подсистеме) сил. Уравнение (10) выражает теорему об изменении количества движения подсистемы в проекции на направление \mathbf{e} .

Пусть теперь для некоторой оси (A, \mathbf{e}) выполнены соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = \mathbf{e} \times (\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_A) \quad \text{при } v \in I, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = 0 \quad \text{при } v \notin I.$$

Тогда уравнение $U_i = 0$ приводится к виду

$$\mathbf{e} \cdot (\dot{\mathbf{K}}'_A + \dot{\mathbf{r}}_A \times \mathbf{Q}') = \mathbf{e} \cdot \mathbf{L}'_A, \quad (11)$$

$$\mathbf{K}'_A = \sum_{v \in I} m_v (\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_A) \times \dot{\mathbf{r}}_v, \quad \mathbf{L}'_A = \sum_{v \in I} (\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}_v.$$

Здесь \mathbf{K}'_A и \mathbf{L}'_A – кинетический момент подсистемы и главный момент действующих на нее внешних сил, вычисленные относительно точки A . Уравнение (11) выражает теорему об изменении кинетического момента выделенной подсистемы относительно оси (A, \mathbf{e}) .

Связь между общими теоремами динамики и уравнениями Лагранжа может быть более сложной. Пусть, например, сдвиг системы как твердого тела на δx вдоль орта $\mathbf{e}(q, t)$ происходит при $\delta q_i = \alpha_i(q, t) \delta x$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е.

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

Тогда уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i U_i = 0. \quad (12)$$

Описанная ситуация возникает, например, при существовании обобщенных координат x, x_2, \dots, x_n , где x – перемещение системы как целого вдоль орта \mathbf{e} . В этом случае $\alpha_i = \partial q_i / \partial x$.

Аналогично пусть поворот системы как твердого тела на угол $\delta \varphi$ вокруг оси (A, \mathbf{e}) происходит при $\delta q_i = \alpha_i(q, t) \delta \varphi$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_A) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

Если последнее соотношение имеет место для любых q и t , то уравнение (12) эквивалентно уравнению (9). Поскольку в качестве обобщенных координат системы, как правило, используются или углы поворота, или линейные смещения входящих в нее твердых тел, ука-

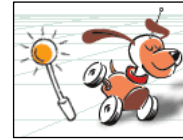
М.А. Салмина

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

МЕХАНИКА, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИКА

(соревнования роботов и новые образовательные технологии)

Робототехника является одним из важнейших направлений научно-технического прогресса, в котором проблемы механики и новых технологий соприкасаются с проблемами искусственного интеллекта. Задачи молодежных соревнований роботов – поощрение творчества молодежи в области новых технологий, расширение научных контактов между различными ВУЗами и популяризация новых направлений в механике, мехатронике и робототехнике.



Всероссийский Научно-Технический Фестиваль молодежи «**Мобильные роботы**» уже 8 лет проходит в Институте механики МГУ. Начиная с 2003 года, этот Фестиваль носит имя **Евгения Андреевича Девянина** (1931- 2002) – профессора Московского университета, одного из инициаторов проведения таких Фестивалей в России (www.robotmobile.ru).

Традиционно программа Фестиваля включает научную школу-конференцию «**Мобильные роботы и мехатронные системы**», соревнования колесных роботов, соревнования по виртуальному футболу и демонстрацию робототехнических разработок.

Основная цель Фестиваля «**Мобильные роботы**» – разработка и апробация новых образовательных технологий в области мехатроники – новой дисциплины, стоящей на стыке механики, электроники, информатики и робототехники. Развиваемый метод обучения состоит в привлечении студентов и аспирантов к активной разработке теории и практическому созданию новых мехатронных систем и средств управления ими. Интеллектуальные соревнования роботов придают этому методу новое качество, вызывают общий интерес и привлекают новых сторонников не только из студенческой среды, но и среди школьников. Фестиваль является ежегодным смотром достижений, полученных молодежными коллективами. В нем участвуют также и зарубежные гости.

Успешно развивается и ширится традиция проведения научных школ-конференций «Мобильные роботы и мехатронные системы». Это является характерной особенностью московских Фестивалей «Мо-

При использовании теста совсем не обязательно решить все его задания. Оценив каждую задачу в зависимости от сложности задач и все задачи в сумме примерно в 100 баллов, следует считать, что зачет получает студент, набравший примерно 30 баллов. Если студент набирает 40 баллов, то оценка будет “хорошо”, 50 и более баллов – оценка “отлично”. Оценка может учитываться при простановке оценки за теоретический экзамен на сформулированных выше условиях.

Данные тесты могут быть использованы при приеме студентов из других ВУЗов, а также спецкомиссиями при приеме по конкурсу на работу по определенным специальностям. В каждом тесте не менее тридцати задач, что дает достаточную свободу выбора студенту, и он может решать то, что ему по силам. При этом, возможно, он может решить в большем количестве какие-либо однотипные задачи и набрать за этот счет большее количество баллов.

Следует отметить, что в тестах даны задания практически по всем темам, которые входят в стандартную программу курса ТМ. Однако, если в каком-либо ВУЗе некоторые темы в курсе не рассматриваются, то естественно вопросы по ним из теста должны быть исключены. В этом случае тест будет содержать не 30 зачетных вопросов, а, возможно, 20-25, и тогда процент зачетных баллов должен исчисляться из суммы баллов за эти 20-25 вопросов, т.е., например, 60-80 баллов. Тогда 30% (зачет) – это 20-24 балла и т.д.

В разработанных тестах содержится более трехсот типовых и оригинальных заданий, которые можно в необходимом количестве (1-3 шт.) использовать вместо задач в экзаменационных билетах по традиционной форме.

В дальнейшем при разработке подобного рода тестов особое внимание следует обратить на разработку так называемых *фасетных заданий*, включающих варианты заданий одинаковой трудности и сходного, но не одинакового содержания. Формирование набора задач и ответов к ним должно вестись в автоматизированном виде индивидуально для каждого тестируемого.

званная механическая интерпретация уравнений Лагранжа, по существу, универсальна.

Описанную связь между общими теоремами динамики и уравнениями Лагранжа второго рода можно использовать для проверки вывода уравнений движения механических систем. Если соотношения, выражающие общие теоремы, записать в обобщенных координатах, то получатся те же уравнения Лагранжа или их линейные комбинации. Использование этой связи при решении учебных задач описано в [3].

Автор благодарен В.В. Дубинину, М.М. Ильину, Ю.В. Баркину и А.А. Панкратову за обсуждения, во многом определившие его взгляды на преподавание курса теоретической механики.

Литература

1. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962.
2. Четаев Н.Г. Теоретическая механика. М.: Наука, 1987.
3. Баркин Ю.В., Сазонов В.В. Общие теоремы динамики и уравнения Лагранжа второго рода. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1991, № 72.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ И ИХ ПРОЯВЛЕНИИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

В предлагаемой работе произведено уточнение методического характера для популярного в литературе по теории колебаний случая вырожденных значений величин частот собственных колебаний механической системы. Рассмотрен пример (неожиданный по своим результатам) применения этой теории в случае колебаний ограниченного объема с жидкостью со свободной поверхностью. Использована интерпретация, предложенная в работе академика К.С. Колесникова.

Введение.

Малые свободные колебания системы с двумя степенями свободы без учета сил сопротивления описываются известными дифференциальными уравнениями [1,2]:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0 \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где q_1 и q_2 – обобщенные координаты, отсчитываемые от положения равновесия системы, a_{ij} – инерционные коэффициенты, c_{ij} – квазиупругие коэффициенты.

Если решение искать в виде $q_i = b_i \sin(\omega t + \alpha)$ ($i = 1, 2$), то после подстановки его в (1) получается линейная однородная система двух алгебраических уравнений относительно амплитуд b_1 и b_2 :

$$\begin{cases} b_1(c_{11} - a_{11}\omega^2) + b_2(c_{12} - a_{12}\omega^2) = 0 \\ b_1(c_{12} - a_{12}\omega^2) + b_2(c_{22} - a_{22}\omega^2) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

которая имеет ненулевое решение, если определитель ее равен нулю:

$$\Delta(\omega^2) = (c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2 \quad (3)$$

Известно, что зависимость величины частотного определителя от квадрата частоты $\Delta(\omega^2)$ имеет вид, представленный на рис. 1.

ТЕСТЫ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Одним из основных направлений реформы высшего и среднего образования является поиск путей получения независимой и объективной оценки реального уровня знаний обучающихся и достижений образовательных учреждений.

В системе высшего образования этим целям служат системы тестирования в вузах, используемых в большинстве случаев для входного и текущего контроля знаний абитуриентов и студентов. Возглавляет работу по разработке тестов для разных дисциплин созданный в 2000 году Центр тестирования при Министерстве образования и науки РФ. Этот Центр ставит целью создание системы тестирования в вузах, обеспечение подготовки в рамках ФПКП (факультета повышения квалификации преподавателей) кадров для разработки тестов и проведения самого тестирования.

В 2000 г. Центр поручил группе преподавателей кафедры ТМ МГТУ им. Н.Э. Баумана создать серию тестов по теоретической механике без уточнения области их применения, но с заданной формой отчетного листа, с выделением на нем области ответов на задания закрытой (45 позиций) и открытой (5 позиций) форм.

Тесты по теоретической механике были составлены на основе общеобразовательных стандартов Министерств образования и науки РФ и программ изучения курса в технических университетах и вузах при 2-х и 3-х семестровом изложении материала (120-180 часов). Каждый тест включает задания трех уровней сложности. Были разработаны 10 итоговых тестов по комплексной теме “Кинематика. Статика” и один рубежный тест по теме “Кинематика точки”. Каждый итоговый тест содержит 30 заданий (25 заданий закрытой формы и 5 – открытой); рубежный тест содержит 50 заданий (45 заданий закрытой формы, 5 – открытой).

На наш взгляд, тесты по ТМ, созданные по предложенной Центром тестирования Министерство образования и науки РФ форме, могут быть использованы для зачета по текущей самостоятельной практической работе студента.

4-х курсов; 2) вне конкурса могут выступать только победители предыдущей олимпиады; 3) каждый вуз может послать на олимпиаду только одну команду, состоящую из 3-х студентов; 4) проводить подведение итогов теоретического конкурса для всех участников и отдельно среди технических и классических университетов. При проверке олимпиадных работ необходимо учитывать оригинальность решений задач, очень внимательно проверять нестандартные решения студентов, даже если эти решения не похожи на типовые; на апелляции работ необходимо очень корректно обсуждать со студентами решения задач, выслушивать их мнение, доказательства.

Также было высказано мнение о том, что Российская олимпиада должна быть одна, а в регионах проводятся только зональные олимпиады. Представители Сибири, Дальнего Востока по результатам региональных олимпиад могут посылать своих победителей на Российскую олимпиаду.

В заключении выражаем благодарность кафедре теоретической механики Казанского государственного университета, зав. кафедрой Коноплеву Ю.Г., Оргкомитету олимпиады за хорошее проведение Российской олимпиады по теоретической механике.

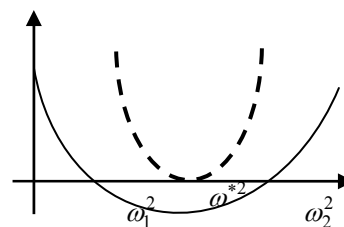


Рис. 1.

Точки пересечения кривой $\Delta(\omega^2)$ с осью абсцисс дают частоты собственных колебаний системы ω_1 и ω_2 . В случае двух различных частот $\omega_1 \neq \omega_2$ каждой из них соответствуют значения $b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \alpha_1$ и $b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \alpha_2$. И обобщенные

координаты q_1, q_2 равны суммам главных колебаний для частот ω_1, ω_2 :

$$q_1 = b_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + b_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$q_2 = \beta_1 b_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \beta_2 b_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

1. Первый частный случай.

Особый интерес представляет рассмотрение случая кратной частоты, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega^*$. На рис. 1 соответствующая кривая показана пунктиром. Так как [1,2]:

$$\Delta(\omega^2) = (c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2$$

то $\omega_1 = \omega_2 = \omega^*$ имеет место, когда

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{22}}{a_{22}} = \frac{c_{12}}{a_{12}} = \omega^{*2} \quad (4)$$

Действительно, перепишем частотное уравнение в виде:

$$\Delta(\omega^2) = a_{11} a_{22} \left(\frac{c_{11}}{a_{11}} - \omega^2 \right) \left(\frac{c_{22}}{a_{22}} - \omega^2 \right) - a_{12} a_{12} \left(\frac{c_{12}}{a_{12}} - \omega^2 \right)^2$$

Поэтому с учетом (4) имеем: $\Delta(\omega^2) = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)(\omega^{*2} - \omega^2)$. Приравняв это выражение нулю, получим соотношение:

$$(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)(\omega^{*2} - \omega^2) = 0 \quad (5)$$

Так как кинетическая энергия системы $T = \frac{1}{2}(a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2)$ является положительно-определенной квадратичной формой, то

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad (6)$$

После сокращения соотношения (5) на этот множитель получим $\omega_1 = \omega_2 = \omega^*$.

Преобразуем теперь уравнения (1):

$$\begin{cases} a_{11}(\ddot{q}_1 + \frac{c_{11}}{a_{11}}q_1) + a_{12}(\ddot{q}_2 + \frac{c_{12}}{a_{12}}q_2) = 0 \\ a_{12}(\ddot{q}_1 + \frac{c_{12}}{a_{12}}q_1) + a_{22}(\ddot{q}_2 + \frac{c_{22}}{a_{22}}q_2) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Введем обозначения:

$$X = \ddot{q}_1 + \omega^{*2}q_1, \quad Y = \ddot{q}_2 + \omega^{*2}q_2 \quad (8)$$

С учетом (8) перепишем уравнения (7) в виде:

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y = 0 \\ a_{12}X + a_{22}Y = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Решим систему уравнений (9) относительно новых переменных X и Y . Это линейная однородная система. Ее определитель, совпадающий с выражением (6), отличен от нуля. Поэтому имеет место только тривиальное решение $X = 0, Y = 0$. Отсюда следует, что система уравнений (1) распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega^{*2}q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \omega^{*2}q_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Выпишем решения уравнений (10):

$$q_1 = C_1 \cos \omega^* t + C_2 \sin \omega^* t, \quad q_2 = C_3 \cos \omega^* t + C_4 \sin \omega^* t$$

Зададим начальные условия: $\begin{cases} q_1(0) = q_{10}, & \dot{q}_1(0) = \dot{q}_{10}, \\ q_2(0) = q_{20}, & \dot{q}_2(0) = \dot{q}_{20}. \end{cases}$

Определив константы интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 , получим:

$$\begin{cases} q_1(t) = q_{10} \cos \omega^* t + \frac{\dot{q}_{10}}{\omega^*} \sin \omega^* t, \\ q_2(t) = q_{20} \cos \omega^* t + \frac{\dot{q}_{20}}{\omega^*} \sin \omega^* t. \end{cases} \quad (11)$$

Решения (11) можно записать в амплитудной форме:

$$q_1(t) = A_1 \sin(\omega^* t + \alpha_1), \quad q_2(t) = A_2 \sin(\omega^* t + \alpha_2).$$

Г.И. Дубровина¹, Ю.Г. Коноплев²

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана
² КГУ, г. Казань

О РОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

С 1-5 ноября 2005 г. в Казанском государственном университете прошла 23-я Российская (ранее Всесоюзная) олимпиада по теоретической механике, в которой приняли участие 89 студентов из 26-ти вузов гг. Москвы, Санкт-Петербурга, Уфы, Минска, Екатеринбургa, Гомеля, Зеленого Дола, Йошкар-Олы, Новосибирска, Оренбурга, Челябинска, г. Долгопрудного, Самары, Тамбова, Перми.

На олимпиаде были проведены теоретический (личный и командный) и компьютерный (командный). На теоретическом конкурсе было предложено 8 задач по всем разделам курса теоретической механики: статике, кинематике и динамике. Победителем теоретического конкурса в личном зачете стал студент МФТИ (г. Долгопрудный), Бродский А.Ю. (4-й курс), в командном зачете – команда МФТИ (г. Долгопрудный).

В компьютерном конкурсе из 23-х команд 1-е место заняла команда НГ АСУ (г. Новосибирск).

Олимпиада была проведена в год празднования тысячелетия г. Казани для участников олимпиады были проведены интересные экскурсии по музею Казанского университета, корпусам университета, по городу, в мужской православный монастырь. Казань по сравнению с прошлым годом стала очень красивой, многие здания были реставрированы, открыта линия метро.

Как всегда, олимпиада стала праздником механики. Проведение олимпиад по теоретической механике способствует развитию творческих способностей студентов. При решении нестандартных задач механики необходимо создать модель расчета, выбрать оптимальный метод решения данной задачи. Для студентов 1,2,3-х курсов участие в олимпиаде – одна из возможностей проверить свои способности, защитить честь факультета, вуза. Как правило, эти студенты в будущем поступают в аспирантуру и защищают диссертации уже по своей специальности, то есть они являются будущим нашей науки.

На семинаре преподавателей – руководителей команд в г. Казани было принято решение: 1) участвовать в олимпиаде могут студенты 1-

в курсе последних решений НМС и научно-методических разработок.

9. Заведующим кафедрами теоретической механики проводить активную работу с руководителями факультетов, вузов и УМО о месте теоретической механики, стоять на позициях сохранения фундаментальной компоненты физико-математического образования, включающий классический курс теоретической механики с учетом востребованности знаний в данной области подготовки специалистов.
10. Поддержать инициативу кафедры теоретической механики Астраханского государственного технического университета, связанную с внедрением в учебный процесс электронного учебника по теоретической механике, сравнительных задач, в проведении ежегодных университетских олимпиад.
11. Отметить высокий уровень организации и проведения совещания-семинара и выразить благодарность руководству и кафедре теоретической и прикладной механики Астраханского государственного технического университета.

Каждая из обобщенных координат q_i изменяется независимо друг от друга с одинаковыми частотами.

Замена (8) в уравнениях (7) дает возможность строго и наглядно продемонстрировать разбиение системы (1) в случае кратного собственного значения на два независимых дифференциальных уравнения. Особое рассмотрение такого случая важно, так как он встречается на практике не так уж и редко, хотя в литературе бытует и иное мнение [3].

Далее рассмотрим примеры 1 и 2 систем с двумя степенями свободы, имеющих кратные собственные значения.

Пример 1. (Равночастотный амортизатор).

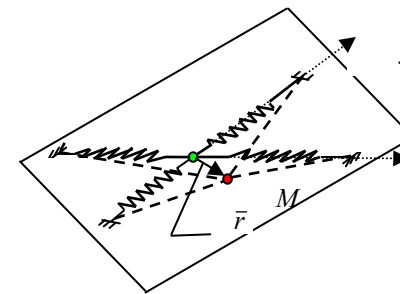


Рис. 2

Рассмотрим колебания материальной точки M массы m на горизонтальной гладкой плоскости Oxy . Материальная точка соединена с четырьмя одинаковыми пружинами, как показано на рис. 2. Жесткость каждой пружины равна k . Пружины не деформированы при положении

материальной точки M в точке O .

Из рисунка видно, что для $i = 1, 2, 3, 4$ $\overline{O_iM} = \overline{O_iO} + \overline{r}$. Выразим силы упругости пружин:

$$\overline{F}_i = -k\overline{\lambda}_i = -k(\overline{O_iM} - \overline{O_iO}) = -k\overline{r} \quad (12)$$

Составим дифференциальные уравнения движения материальной точки M в проекциях на оси декартовой системы координат Oxy :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_i F_{ix} \\ m\ddot{y} = \sum_i F_{iy} \end{cases}, \text{ или с учетом (12): } \begin{cases} m\ddot{x} = -4kx \\ m\ddot{y} = -4ky \end{cases}$$

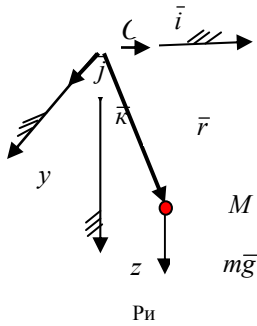
$$\text{Перепишем уравнения в виде: } \begin{cases} \ddot{x} + 4\frac{k}{m}x = 0 \\ \ddot{y} + 4\frac{k}{m}y = 0 \end{cases}$$

найдем частоты собственных колебаний системы, величины которых совпадают:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega^* = 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Пример 2. (Маятник со сферическим подвесом).

Рассмотрим малые пространственные движения математического маятника (рис. 3) массы m и длины l в однородном поле силы



тяжести, ускорение свободного падения которого равно $g = const$. Введем неподвижную декартову систему отсчета $Oxyz$.

Радиус-вектор материальной точки M равен $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где x, y, z - ее декартовы координаты. Так как $|\vec{r}| = l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то

для аппликаты z имеем:

$$z^2 = l^2 - x^2 - y^2 \quad (13)$$

Выпишем кинетическую энергию маятника:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

В этом выражении можно пренебречь v_z^2 как величиной четвертого порядка малости, т.к. $v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{-2x\dot{x} - 2y\dot{y}}{2\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}}$ и $x, y \approx 0$. Поэтому

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2).$$

Выпишем потенциальную энергию маятника:

$$\Pi = mg(l - z) = mg[l - l(1 - \frac{1}{2}(x/l)^2 - \frac{1}{2}(y/l)^2 - \dots)].$$

Оставив члены не выше второго порядка малости, получим:

$$\Pi = \frac{1}{2}mg l [(x/l)^2 + (y/l)^2].$$

С помощью уравнений Лагранжа второго рода составим дифференциальные уравнения движения маятника:

нение его с курсами сопротивления материалов, теории механизмов, деталей машин и других в одну учебную дисциплину. Теоретическая механика является одной из фундаментных естественнонаучных дисциплин физико-математического цикла, на нее опирается подавляющее число общепрофессиональных и специальных инженерных дисциплин, определяющих научно-технический прогресс, и такие решения недопустимы.

По результатам обсуждения докладов, выступлений и дискуссий круглого стола участники совещания-семинара приняли следующие решения и рекомендации:

1. Поддержать в целом решения III Всероссийского совещания-семинара заведующих кафедрами теоретической механики вузов РФ (Пермь, июнь-июль 2004 года).
2. Считать, что одним из главных направлений совершенствования деятельности кафедр теоретической механики является развитие самостоятельности студентов в учебной работе, в том числе в выполнении расчетно-графических работ, привлечение студентов к научно-исследовательской работе.
3. Организовать работу по модернизации курса теоретической механики, основанную на внедрении новых информационных технологий, для интенсификации самостоятельной работы студентов и облегчения освоения ими основных положений механики.
4. Заведующим кафедрами теоретической механики проводить активную работу с УМО специальностей и направлений подготовки по сохранению полноценного курса теоретической механики.
5. Использовать возможности фактического увеличения роли теоретической механики в подготовке специалистов за счет введения специальных курсов, читаемых для студентов старших курсов.
6. Отметить необходимость укрепления материально-технической и лабораторной базы кафедр теоретической механики и обеспечения учебных лабораторий компьютерами с соответствующим программным обеспечением, а также обновление лабораторной базы кабинетов по теоретической механике.
7. Рекомендовать кафедрам теоретической механики разработать перспективные планы развития, ставя одной из главных задач превращение их в выпускающие кафедры.
8. Регулярно обновлять сайт НМС, обеспечивая преподавателям кафедр теоретической механики вузов России возможность быть

**СОВЕЩАНИЕ-СЕМИНАР ЗАВЕДУЮЩИХ КАФЕДРАМИ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ВУЗОВ ЮЖНОГО
ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА, АССОЦИАЦИИ УНИВЕРСИТЕТОВ
ПРИКАСПИЙСКИХ ГОСУДАРСТВ**

С 3 по 7 октября 2005 года в Астрахани состоялось совещание-семинар заведующих кафедрами теоретической механики вузов Южного Федерального округа и Ассоциации университетов Прикаспийских государств. Совещание-семинар было организовано Научно-методическим советом по теоретической механике при Министерстве образования и науки РФ, администрацией Астраханской области, Астраханским государственным техническим университетом, Ассоциацией университетов Прикаспийских государств и проходило на базе кафедры теоретической и прикладной механики Астраханского государственного технического университета.

В совещании-семинаре приняли участие больше 40 человек из 10 вузов. С докладами на совещании выступили 12 человек, среди них председатель НМС по теоретической механике при Минобрнауки РФ д.ф.-м.н., профессор **Ю.Г. Мартыненко**, члены НМС по теоретической механике зав. кафедрой МЭИ (ТУ) д.ф.-м.н., профессор **А.И. Кобрин**, главный научный сотрудник института механики МГУ д.ф.-м.н., профессор **В.А. Самсонов**. С интересом выслушаны сообщения заведующих кафедрами вузов ЮФО д.т.н., профессора **Т.О. Невенчанной** (Астраханский государственный технический университет), д.т.н. **В.Г. Копченкова** (Северо-Кавказский государственный технический университет, г. Ставрополь), профессора **А.К. Гериханова** (Грозненский государственный нефтяной институт), а также доцентов **В.И. Локтева** (Астраханский государственный технический университет), **Е.В. Пономаревой** (Астраханский государственный технический университет), **П.С. Хабарова** (Астраханский государственный университет). Для участников совещания-семинара состоялась демонстрация компьютерных программ по теоретической механике, организован круглый стол и дискуссия по теме «Проблемы преподавания по теоретической механике».

На совещании-семинаре с большой тревогой отмечалось сокращение, а иногда и упразднение курсов теоретической механики, объеди-

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \frac{mgl}{l^2}x = 0 \\ m\ddot{y} + \frac{mgl}{l^2}y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{g}{l}y = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Имеем случай двукратно вырожденного собственного значения:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega^* = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Используя формулы (11), выпишем решения уравнений (14):

$$x = x_0 \cos \omega^* t + \frac{\dot{x}_0}{\omega^*} \sin \omega^* t, \quad y = y_0 \cos \omega^* t + \frac{\dot{y}_0}{\omega^*} \sin \omega^* t. \quad (15)$$

Выберем следующие начальные условия:

$$\text{при } t = 0: \quad x_0 = A, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = A\omega^*.$$

$$\text{Тогда решения примут вид:} \quad \begin{cases} x = A \cos \omega^* t \\ y = A \sin \omega^* t \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что траекторией такого движения точки M маятника будет окружность $x^2 + y^2 = A^2$, расположенная в плоскости Oxy .

Выпишем проекции скорости точки M на оси координат:

$$v_x = \dot{x} = -A\omega^* \sin \omega^* t, \quad v_y = \dot{y} = A\omega^* \cos \omega^* t.$$

Отсюда модуль скорости точки $v = A\omega^* = const$.

Расстояние, которое пройдет точка M по траектории – дуговая координата $s(t)$, будет равна $s = A\omega^* t$. Следовательно, время полного оборота маятника T найдем из равенства $2\pi A = A\omega^* T$: $T = \frac{2\pi}{\omega^*}$.

Проиллюстрируем применение изложенной методики, полученной в рамках теоретической механики (для систем с конечным числом степеней свободы), на примере колебаний свободной поверхности жидкости в жестком цилиндрическом сосуде (системы с бесконечным числом степеней свободы). Этот пример позволяет наглядно установить наличие случая возможного вращения свободной поверхности жидкости вокруг оси симметрии цилиндра.

Пример 3.

Рассмотрим малые колебания идеальной несжимаемой жидкости в жестком цилиндрическом сосуде с плоским дном и со свободной по-

верхностью (рис. 4а). Введем неподвижную систему координат $Oxuz$. Движение жидкости считается малым и потенциальным с потенциалом скорости $\Phi(x, y, z, t)$. Будем рассматривать отдельно два вида поступательного движения цилиндра: движение вдоль оси Ox и движение вдоль оси Oy . Для описания движения жидкости удобно использовать цилиндрические координаты r, φ, z (рис. 4б). При определении потенциала скорости частиц жидкости $\Phi(x, y, z, t)$ решается краевая задача.

Линеаризованная краевая задача для потенциала имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} \Phi_{rr} + r^{-1}\Phi_r + r^{-2}\Phi_{\varphi\varphi} + \Phi_{zz} &= 0 \quad \text{в объеме } \tau, \\ g\Phi_z + \Phi_{tt} &= 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \Phi_r &= 0 \quad \text{при } r = R, \quad \Phi_z = 0 \quad \text{при } z = -H. \end{aligned}$$

Здесь $\Phi_r = \partial\Phi/\partial r$, $\Phi_z = \partial\Phi/\partial z$, $\Phi_{tt} = \partial^2\Phi/\partial t^2$.

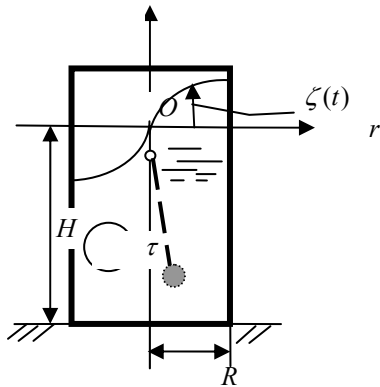


Рис. 4а.

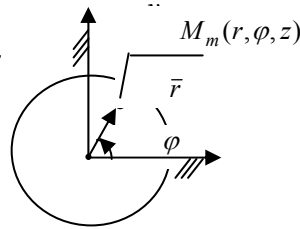


Рис. 4б.

Следует иметь в виду, что эта краевая задача справедлива для обоих оговоренных выше случаев движения цилиндра. Воспользовавшись результатами К.С.Колесникова [4], выпишем решение краевой задачи:

$$\Phi = 2R \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\zeta_n \frac{r}{R})}{(\zeta_n^2 - 1)J_1(\zeta_n)} \cdot \frac{ch(\zeta_n \frac{H+z}{R})}{ch(\zeta_n \frac{H}{R})} \cdot \lambda_n(t).$$

Здесь $\zeta_n = k_n R$ ($n = 1, 2$) – собственные значения краевой задачи, которые вычисляются из решения трансцендентного уравнения: $J_{1\zeta}(\zeta)|_{\zeta=KR} = 0$. J_1 – Бесселева функция первого рода первого порядка.

СООБЩЕНИЕ О МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ В ТУЛЬСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

С 16 по 18 февраля 2005 г. в Тульском государственном университете состоялась международная научно-методическая конференция «Современные технологии в преподавании курса теоретической механики», посвященная 75-летию университета и 75-летию кафедры «Теоретическая механика». Конференция проходила при поддержке Федерального агентства по образованию и Научно-методического Совета по теоретической механике.

В работе конференции приняли участие гости – представители НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Московского энергетического института, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Московского авиационного института, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Московского автомобильно-дорожного института, Московского государственного открытого университета, Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана, Астраханского ГТУ, Брянского ГТУ, Липецкого ГТУ, Тамбовского ГТУ, Одесской государственной академии строительства и архитектуры, издательства Ассоциации строительных вузов (АСВ).

Доклады и выступления участников конференции были посвящены истории ТулГУ и кафедры теоретической механики университета, тенденциям преподавания теоретической механики в вузах страны в современных условиях, применению новых информационных технологий при изучении курса теоретической механики, в том числе в системе дистанционного обучения; некоторым интересным задачам механики.

В рамках конференции была проведена региональная студенческая олимпиада по теоретической механике.

Опубликованы сборник трудов конференции и сборник научных статей (Известия ТулГУ, Серия актуальные вопросы механики).

школы. Участники совещания посетили кафедры теоретической механики вузов г. Перми.

В докладах и выступлениях участников Совещания-семинара с тревогой отмечали идущие в высшей школе процессы, представляющие серьезную угрозу для фундаментальной компоненты отечественного образования. Это, прежде всего, сокращение (а иногда и упразднение) курсов теоретической механики, практика объединения курсов теоретической механики, сопротивления материалов, теории механизмов, деталей машин и др. в одну учебную дисциплину. Участники совещания подчеркивали, что «Теоретическая механика» является одной из фундаментальных ключевых естественнонаучных дисциплин физико-математического цикла, на материал которой опирается подавляющее число общепрофессиональных и специальных инженерных курсов, определяющих научно-технический прогресс. В настоящее время роль теоретической механики еще более возросла в связи с интенсивным развитием новых областей знания лежащих на стыке классической механики, электроники, теории управления и информатики, биологии как, например, мехатроники, биомеханики и других наукоемких направлений «высоких технологий».

λ_n - нормальная координата n -го тона колебаний свободной поверхности жидкости.

Приведем два первых табличных значения ζ_n : $\zeta_1 = 1,8412$, $\zeta_2 = 5,4315$. Очевидно, что полученные выражения для функции Φ и значения ζ_n для обоих случаев движения цилиндрического сосуда не меняются. На основании [4] можно утверждать, что колебания жидкости в сосуде для какого-то номера n можно заменить колебаниями математического маятника с параметрами l_n (длина) и m_n (масса):

$$l_n = \frac{R}{\zeta_n \operatorname{th}(\zeta_n \frac{h}{R})}, \quad m_n = \pi R^3 \rho \left[\frac{2\zeta_n}{\zeta_n^2 (\zeta_n^2 - 1)} \right] \cdot \operatorname{th}(\zeta_n \frac{h}{R}).$$

Номер n – номер тона главного (нормального) колебания жидкости в сосуде. Ось подвеса маятника находится на оси z на некотором расстоянии L_n от невозмущенного положения свободной поверхности жидкости ($z = 0$) (рис.4а). В дальнейшем воспользуемся лишь первым тоном колебаний жидкости ($n = 1$) (выражение для L_1 не приводится). В работе [4] получена формула соответствия колебаний маятника и отклонений свободной поверхности жидкости от невозмущенного положения $z = 0$. Таким образом, движение частиц жидкости при поступательном движении сосуда можно представить в виде движения математического маятника (по 1-му тону) со сферическим подвесом с параметрами l_1 , m_1 . Действительно, в декартовой системе координат O_1xyz , начало которой расположено в точке подвеса маятника под номером $n = 1$ будем иметь уравнения (14)-(15) из примера 2. Тогда собственному значению ζ_1 соответствуют два типа одинаковых колебаний в перпендикулярных плоскостях. При соответствующих начальных условиях решение дифференциальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x = x_{10} \cos \omega_1 t \\ y = \frac{\dot{y}_{10}}{\omega_1} \sin \omega_1 t \end{cases}, \quad \text{где} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}}.$$

Следовательно, маятник будет вращаться, описывая в пространстве окружность радиуса x_{10} , и с периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Таким образом, показано, что при соответствующем задании начальных условий движения сосуда с жидкостью ее свободная поверхность, отклоненная от

положения равновесия, будет вращаться относительно его оси симметрии.

Вывод. Исследование свободных колебаний систем с распределенными параметрами, в частности жидкости, приводит к краевой задаче в частных производных. При использовании метода разделения переменных решение задачи сводится к интегрированию бесконечной системы обыкновенных однородных дифференциальных уравнений. Эта задача, в свою очередь, может быть сведена к проблеме собственных значений некоторой симметричной матрицы. Собственные значения и собственные векторы представляют собой частоты и формы главных колебаний системы. Т.е. получаем бесконечный ряд некоторых механических систем с сосредоточенными параметрами, для которых в случае системы с двумя степенями свободы выше представлена методика решения. Эта методика в линейной постановке демонстрирует эффект наличия вращения свободной поверхности жидкости вокруг оси симметрии цилиндрического сосуда. Этот эффект ранее в нелинейной постановке (значительно более сложной) был получен в работе Э.Е. Либина [5].

2. Второй частный случай.

Рассмотрим случай нулевого корня частотного уравнения (3), когда $\omega_1 = 0$. Для этого от обобщенных координат q_1 и q_2 перейдем к нормальным координатам ξ и η , сделав замену переменных:

$$q_1 = \xi + \eta, \quad q_2 = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta \quad (16)$$

Здесь β_1, β_2 - коэффициенты распределения амплитуд [1]. С учетом (16) кинетическая и потенциальная энергии системы примут следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} a_{11}^* \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} a_{22}^* \dot{\eta}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c_{11}^* \xi^2 + \frac{1}{2} c_{22}^* \eta^2.$$

$$\text{Очевидно, что } \omega_i^2 = \frac{c_{ii}^*}{a_{ii}^*} \quad (i = 1, 2).$$

Пусть $\omega_1 = 0$. Тогда уравнения движения системы следующие:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = 0 \\ \ddot{\eta} + \omega_2^2 \eta = 0 \end{cases}$$

Выпишем решения этих дифференциальных уравнений:

$$\xi = c_1 t + c_2, \quad \eta = A_2 \cos(\omega_2 t + \gamma).$$

СООБЩЕНИЕ О III ВСЕРОССИЙСКОМ СОВЕЩАНИИ-СЕМИНАРЕ ЗАВЕДУЮЩИХ КАФЕДРАМИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В ПЕРМИ

С 28 июня по 1 июля 2004 года в г. Пермь на базе Пермского государственного университета и кафедры теоретической механики ПГТУ было проведено III Всероссийское совещание-семинар заведующих кафедрами теоретической механики. Целью совещания был обмен опытом и выработка рекомендаций и предложений по организации, научному и методическому обеспечению учебного процесса на кафедрах теоретической механики вузов Российской Федерации. В работе совещания-семинара приняло участие 108 человек из 33 городов из 63 вузов нашей страны.

С докладами на Совещании-семинаре выступило 108 человек, среди них вице-президент РАН В.В.Козлов, ректор ПГУ В.В. Маланин, академик РАН, председатель Пермского научного центра УрО РАН В.П. Матвиенко, члены Президиума НМС по теоретической механике профессора Ю.Г.Мартыненко, В.В.Александров, В.В. Андронов, А.В. Карапетян, А.И. Кобрин, В.М. Морозов, В.А.Самсонов, В.В.Слезкинский. Участники Совещания с большим вниманием прослушали записанное в 1993 году интервью с основателем Научно- методического Совета по теоретической механике академиком А.Ю. Ишлинским, в котором в краткой, но исключительно емкой форме изложены основные принципы отношения научного работника и преподавателя к проблемам современной высшей школы. Доклады, включенные в Программу совещания, представляли следующие направления:

1. Научные доклады, позволившие участникам ознакомиться с последними достижениями механики, проанализировать тенденции развития теоретической механики в настоящее время.
2. Доклады, посвященные применению новых информационных технологий в преподавании.
3. Доклады, отражающие проблемы методического обеспечения учебного процесса.

Была проведена дискуссия круглого стола по проблемам преподавания теоретической механики в свете современных проблем высшей

соров, системы технического зрения, небесная механика, астероидная опасность, возобновляемые источники энергии и т.д.).

Школьникам предоставляется возможность начать научно-исследовательскую работу под руководством преподавателей Московского Университета, Института прикладной математики РАН, МЭИ (ГУ). Лучшие работы школьников рекомендуются к опубликованию в ведущих научных журналах и представлению на Колмогоровских чтениях, ежегодно проводимых в СУНЦ МГУ (школе им. А.Н.Колмогорова), научных семинарах, проходящих в Институте механики МГУ, на механико-математическом факультете МГУ, в Институте прикладной математики РАН.

В рамках занятий и тематических кружков школьники знакомятся с установками лабораторий общей механики и робототехники и мехатроники Института механики МГУ, получают возможность участвовать в проектировании колесного робота для участия в соревнованиях Фестиваля «Мобильные роботы».

В 2005 году в программе Фестиваля «Мобильные роботы» была проведена школьная сессия, в программе которой были конференция с докладами школьников и презентацией их конструкций и соревнования школьных роботов по нескольким видам (прохождение трассы, борьба сумо и т.п.) и упражнениям.

Информация обо всех мероприятиях Программы представлена на сайте Института механики МГУ www.imec.msu.ru (рубрика «Средняя школа»), на сайте СУНЦ (рубрика «Объявления»).

Школьная сессия Фестиваля освещалась на сайте www.robot.ru и сайте школы дистанционной поддержки образования.

Информация о Программе имеется и на сайте МЦНМО. Информация об отдельных мероприятиях рассылается непосредственно в школы, в МЦНМО, в Центр работы с одаренными детьми ЗАО, в департамент образования ЗАО и т.д.

Институт механики МГУ приглашает все заинтересованные организации принять участие в работе Научно-Образовательной Программы для школьников по механике, мехатронике и робототехнике!

Вернемся к исходным координатам:

$$q_1 = c_1 t + c_2 + A_2 \cos(\omega_2 t + \gamma),$$

$$q_2 = \beta_1 (c_1 t + c_2) + \beta_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \gamma).$$

Проиллюстрируем случай нулевого собственного значения на примере.

Пример 4.

Рассмотрим два одинаковых груза на гладкой горизонтальной поверхности. Массы грузов одинаковы и равны m . Грузы соединены пружиной жесткости k (рис. 5). Выберем обобщенные координаты: $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$.

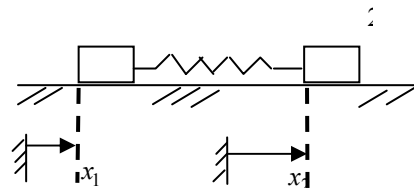


Рис. 5.

В положении равновесия, когда пружина не деформирована, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Кинетическая и потенциальная энергии системы:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2.$$

Дифференциальные уравнения движения системы составим с помощью уравнений Лагранжа второго рода:
$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k(x_2 - x_1)(-1) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Уравнение частот (3) примет вид:

$$(k - \omega^2 m)(k - \omega^2 m) - (-k)^2 = 0.$$

Или после преобразований: $\omega^2 (\omega^2 m^2 - 2km) = 0$.

Следовательно, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{2k/m} \approx 1.14 \sqrt{k/m}$.

Формы главных колебаний β_1 и β_2 , представляющие собой отношения обобщенных координат или амплитуд колебаний в каждом из главных колебаний, вычислим по формулам [2]:

$$\beta_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_1^2}{c_{12} - a_{12}\omega_1^2} = -\frac{k}{-k} = 1, \quad \beta_2 = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_2^2}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2} = -\frac{k - 2k}{-k} = -1.$$

Частоте $\omega_1 = 0$ соответствует движение системы как твердого тела.

Таким образом, введение линейного преобразования (16), приводящего к нормальным координатам, позволяет наглядно получить решение в общем случае, когда имеются различные типы связей между парциальными системами (упругая или инерциальная связи).

Литература

1. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 437с.
2. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. М.: Высшая школа, 1961. 207с.
3. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470с.
4. Колесников К.С. Жидкостная ракета как объект регулирования. М.: Машиностроение, 1969. 278 с.
5. Либин Э.Е. О свободных нелинейных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде. // Труды 1-го семинара "Динамика управления и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью". Томск, 1972. С. 65-72.

- Школьные и тематические конференции, презентации авторских разработок
- Конструирование робототехнических систем и аппаратов
- Соревнования мобильных роботов и показательные выступления

Все мероприятия Программы для школьников и преподавателей проводятся на бесплатной основе.

Предлагаемые Программой курсы лекций рассчитаны на учащихся 9-11 классов, читаются на доступном для школьников уровне, но охватывают широкий круг вопросов – от классических результатов в механике и робототехнике, а также в смежных областях до новейших научных исследований.

Школьники, принявшие участие в мероприятиях Программы, получают соответствующие удостоверения от Института механики МГУ (о прохождении спецкурса, об участии в конференции молодых ученых, в соревнованиях мобильных роботов, по виртуальному футболу и т.д.).

Преподаватели – участники Программы могут получить удостоверения государственного образца от МИОО о повышении квалификации на базе Института механики МГУ.

К выполнению Программы привлекаются преподаватели и научные сотрудники МГУ, Института прикладной математики им М.В. Келдыша РАН, МЭИ (ТУ).

Методическую и организационную поддержку Программы обеспечивают Московский Центр непрерывного математического образования (МЦНМО), Московский институт открытого образования (МИОО), Центр информационных технологий и учебного оборудования (ЦИТУО) и другие организации.

Идейную поддержку Программы оказывают Научно-методический Совет Минобрнауки по теоретической механике и Национальный Комитет РФ по теоретической и прикладной механике.

Одной из главных задач Научно-Образовательной Программы для школьников является помощь школьникам в выборе будущей специальности. Посещение лекций и работа с научным руководителем позволяют узнать, чем занимается современная наука *механика*. Заметим, что тематика Научно-Образовательной Программы включает не только механику, но и смежные области науки и техники (например, такие, как управление механическими системами через Интернет, нейронные сети, использование современной микроэлектроники и микропроцес-

УДК 531.36

С.А. Довбыш, Б.Я. Локшин, М.А. Салмина
Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

О НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ ИНСТИТУТА МЕХАНИКИ МГУ им. М.В. ЛОМОНОСОВА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ ПО МЕХАНИКЕ, МЕХАТРОНИКЕ И РОБОТОТЕХНИКЕ



В 2004 году Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова начал реализацию Научно-Образовательной Программы для школьников и учителей, желающих узнать о последних достижениях механики, мехатроники и робототехники. Школьникам было предложено начать самостоятельную научно-исследовательскую работу, попробовать свои силы в решении и исследовании конкретных задач и конструировании робототехнических и мехатронных систем.

Цели Программы:

- ▶ Выявление и поддержка творческой молодежи, мотивированной на профессиональную деятельность и получение высококачественного высшего образования в современных и перспективных областях знаний механико-математического профиля.
- ▶ Развитие и внедрение новых образовательных технологий в школьный учебный процесс.
- ▶ Повышение квалификации учителей, ознакомление их с современными достижениями науки.

Содержание Программы:

- Встречи с интересными учеными-механиками
- Спецкурсы и спецсеминары под руководством научных сотрудников института
 - Задачи по механике, мехатронике и робототехнике
 - Конкурсы на постановку и исполнение эксперимента

УДК 531.3

В.А. Синуцын
Московский авиационный институт
(государственный технический университет)

О ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ

В статье дается краткая характеристика моделей, называемых «точка переменной массы»; приводится теорема об изменении количества относительного движения точки переменной массы; составляется уравнение движения центра масс системы материальных точек переменной массы; обсуждается постановка одной из «кембриджских задач» о движении цепи и предлагается более реалистическая схема задачи.

1. Модели, называемые «точка переменной массы».

Известно, что движению геометрической точки можно поставить в соответствие поступательно перемещающиеся оси. Точкой переменной массы, называют объект, масса которого может изменяться за счет «приходящих» и (или) «уходящих» частиц (изменяющие массы). Частицы импульсно (ударно) взаимодействуют с точкой переменной массы непосредственно в момент «ухода» или «прихода» в её состав. Масса является дважды дифференцируемой функцией времени. Кроме этих общих свойств в частных задачах возникает необходимость различать также материальные точки (в составе точки переменной массы), их движение, учитывать связи, налагаемые на точку переменной массы и на «изменяющие массы», и т.д. Важность этих «деталей» в научных исследованиях вызывает также потребность в едином методическом подходе к понятию «точка переменной массы» и систематизации её моделей.

Простейшей моделью является *материальная* точка переменной массы, включающая неизменный точечный материальный объект, к которому прилагаются все внешние силы (активные и реакции) и «непрерывные удары» изменяющих масс [1]. Динамические величины: количество движения, момент количества движения, кинетическая энергия материальной точки переменной массы в каждый момент времени равны соответствующим динамическим величинам материальной точки постоянной массы (той же величины).

«Точка переменной массы» [1] (без определения «материальная» и не являющаяся, вообще говоря, точечным объектом, но без внутренних движений изменяющих массы) при тех же условиях на силы представляет поступательное движение твердого тела переменной массы. Например, движение центра масс этого объекта в общем случае отличается

ся от движения осей, связанных с телом, вследствие изменения состава изменяющихся масс. (Изучение кинематического изменения инерционных характеристик может проводиться в учебном курсе в разделе «Геометрия и кинематика масс», см., например, [2]).

Более общими (в статье эти модели не рассматриваем) являются следующие модели: модель точки переменной массы с *внутренними движениями* [3] и модель, учитывающая влияние связей и сил, приложенных не только к точке переменной массы, но и к изменяющимся массам [2]. Модель точки переменной массы может быть полезна при изучении движения частиц с релятивистским изменением инерционных свойств [3] и т.д.

2. Теорема об изменении количества относительного движения материальной точки переменной массы.

Причиной изменения количества (абсолютного) движения $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$ материальной точки постоянной массы m , имеющей скорость \mathbf{v} , и причиной изменения её скорости считается приложенная к материальной точке сила \mathbf{F} :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}, \quad m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}. \quad (1)$$

Здесь и далее точкой обозначены производные по времени.

Для материальной точки переменной массы также полагается $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$ и получается

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} + \dot{m}\mathbf{u}, \quad m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \dot{m}(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad (2)$$

где \mathbf{u} - абсолютная скорость отделяющихся частиц (для краткости ограничимся случаем только отделения точечной элементарной массы в каждый текущий момент времени).

Сравнение равенств (2) с соответствующими равенствами (1) показывает, что для определения понятия «реактивная сила» есть выбор в зависимости от того, причиной какого из двух выше названных следствий считать эту силу (выход из этого терминологического затруднения состоит в соглашении, которое необходимо принять и в учебной литературе). В обоих смыслах реактивная сила является следствием движения и характеризуется абсолютной или относительной скоростью (и скоростью изменения массы): чаще реактивной силой называют второе слагаемое в правой части второго равенства в (2).

Описание относительного движения (в неинерциальной системе отсчета) отличается от описания абсолютного движения включением в

run the Derby alphabetically next». Его борьба против нововведений, которой он занимался последние годы своей жизни, не увенчалось успехом.

В апреле 1907 года силы Рауса стали быстро иссякать и он потерял способность к сосредоточению. Он скончался 7 июня 1907 года в возрасте 76 лет в Кэмбридже, графство Кэмбриджшир, Англия и был похоронен в Черри Хилтон (Cherry Hilton), деревушке неподалёку от Кэмбриджа.

Некоторые рукописи Рауса сохранились в библиотеке Петерхауса. В столовой колледжа находится его портрет. Имеется также портрет Рауса и его учеников.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00454-а) и государственной программы «Научные школы», (грант НШ-6667.2006.1).

Литература

1. *J.J. O'Connor, E.F. Robertson.* Edward John Routh. www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Routh.html October 2003
2. *Fuller A.T.* Edward John Routh. Routh Centenary issue // Intern. Journal of Control. 1977. Vol.26. No.2. P.169-173.
3. *H.C.E.Routh.* A short history of the family of Routh. 1953. Electronic version edited by Chris Humphrey. Nov.2002.
4. Routh, Edward John Encyclopedia Britannica.Vol.23. L.:Encyclopedia Britannica Corp.Ltd.1926.P.780.
5. *MacFarlane A.G.J., Fuller A.T.* Routh Centenary issue – Editorial: Routh Centenary Issue // Intern. Journal of Control. 1977. Vol.26. No.2. P.167-168.

личил свой объём до двух солидных томов. Делаясь всё более энциклопедичным, он становился, по мнению Фуллера, всё менее читабельным. Тем не менее, именно благодаря тому широкому кругу читателей, которого достигла эта книга, исследования Рауса по устойчивости стали известны специалистам всего мира. В Германии эта книга привлекла внимание Клейна и Зоммерфельда, авторов известного фундаментального трактата по механике вращающихся волчков и гироскопов. Клейн организовал перевод книги Рауса на немецкий язык и его издание, а Зоммерфельд охарактеризовал эту книгу как «коллекцию задач, уникальную по своему многообразию и богатству».

Работы Рауса по механике были особенно важны. В 1877 году ему был присуждён Приз Адамса за работу по устойчивости движения. То обстоятельство, что эта работа была написана им на Рождественских каникулах, даёт повод некоторым исследователям строить догадки о том, что бы было, если бы Раус посвящал больше времени исследованиям, а меньше – обучению. Как бы то ни было, но после получения Раусом приза Адамса по устойчивости движения Томсон и Тэт, исходя из его результатов, существенно переработали для второго издания текст той части своего трактата по натуральной философии, которая касалась уравнений движения.

Всеобщее признание. В 1854 году Раус был избран членом Кембриджского Философского Общества, в 1856 году он стал одним из основателей Лондонского Математического Общества. Он был также избран членом Королевского Астрономического Общества в 1866 году и Королевского Общества в 1872 году. Многие университеты, включая университеты Глазго (1878) и Дублина (1892) присвоили ему почётные учёные степени. В 1883 году он был избран почетным членом братства Петерхаус.

В 1888 году, когда Раус прекратил свою работу в качестве наставника, приблизительно восемьдесят его учеников заказали вкладчину его портрет у известного художника, сэра Хьюберта фон Эркомера. Этот портрет был преподнесен жене учёного.

Последние годы жизни. Всю свою жизнь Раус оставался не только верным поклонником состязательной техники экзаменовки студентов, но и её основным практиком. Тем болезненнее оказалось для него решение властей Кэмбриджа отказаться от существовавшей годами практики Трайпос и «упорядочения» экзаменуемых студентов сообразно их заслугам. Когда стали приходить списки студентов, составленные в алфавитном порядке, Раус, как говорят, заметил [2]: «They will want to

число сил переносной силы инерции $\Phi^{(e)}$ и силы инерции Кориолиса $\Phi^{(c)}$. Поэтому теорему об изменении количества относительного движения материальной точки переменной массы получаем в виде следующего равенства:

$$\dot{\mathbf{q}}^{(r)} = \mathbf{F} + m\dot{\mathbf{u}}^{(r)} + \Phi^{(e)} + \Phi^{(c)}, \quad (3)$$

где индексом r отмечена принадлежность характеристики к неинерциальной системе отсчета.

Пример. Пусть $\mathbf{q}^{(r)} = m(\mathbf{v} - \mathbf{u})$, т.е. неинерциальная система движется поступательно со скоростью \mathbf{u} и ускорением $\dot{\mathbf{u}}$. Тогда

$$\mathbf{u}^{(r)} = 0, \quad \Phi^{(e)} = -m\dot{\mathbf{u}}, \quad \Phi^{(c)} = 0. \quad (4)$$

При подстановке выражений (4) теорема (3) принимает вид

$$\dot{\mathbf{q}}^{(r)} = \mathbf{F} - m\dot{\mathbf{u}}. \quad (5)$$

Равенство (5) согласовано с уравнением Мещерского:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + m(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}). \quad (6)$$

Абсолютное ускорение материальной точки переменной массы согласно (6) не зависит от ускорения отделившихся частиц и ускорения изменения массы. Напомним, что при выводе не требовалось постоянство скорости \mathbf{u} .

Примечание. В примере подвижная система отсчета выбрана не случайно, а так, что количество движения имеет вид, принятый автором «гиперреактивной механики» В.Ю. Тертычный-Даури. Если вслед за ним упустить из виду, что это выражение количества относительного движения (в неинерциальной системе отсчета), то пропадает последнее слагаемое в (5) и вместо уравнения Мещерского получается ошибочное равенство, содержащее слагаемое $m\dot{\mathbf{u}}$ - некую «дополнительную реактивную силу, возникающую в результате эффекта нестационарности». Отсюда следует несостоятельность «гиперреактивной механики».

3. Уравнение движения центра масс системы материальных точек переменной массы

Получим уравнение движения центра масс системы неизменного числа материальных точек переменной массы (радиус - вектор и скорость центра масс каждой материальной точки переменной массы является также её радиусом - вектором и скоростью соответственно).

Количество движения системы точек переменной массы равно количеству движения системы постоянного состава точек постоянной массы, совпадающей в данный момент времени с системой переменного состава: $\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k$.

Применим теорему об изменении количества движения системы точек переменной массы в форме (см. [4])

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}_o^{(e)} + \mathbf{R}_o^{(e)} + \mathbf{u}_1 \dot{M}_1 - \mathbf{u}_2 \dot{M}_2, \quad (7)$$

где M_1 и M_2 - суммарные массы всех входящих и уходящих частиц, а \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 - абсолютные скорости их центров масс непосредственно перед присоединением и после отделения соответственно; $\mathbf{F}_o^{(e)}$ и $\mathbf{R}_o^{(e)}$ - главные векторы внешних активных сил и реакций внешних связей соответственно. Воспользуемся определением средней скорости переменной части системы (\mathbf{u}) (см. [4]): $\mathbf{u}\dot{M} = \mathbf{u}_1 \dot{M}_1 - \mathbf{u}_2 \dot{M}_2$, M - масса системы переменного состава ($\dot{M} \neq 0$). Теперь равенство (7) принимает вид

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}_o^{(e)} + \mathbf{R}_o^{(e)} + \mathbf{u}\dot{M}. \quad (8)$$

Несмотря на то, что количество движения системы точек переменной массы численно совпадает с количеством движения системы материальных точек постоянной массы, подстановка выражения $M\mathbf{v}_c$ (\mathbf{v}_c - скорость центра масс C) в (7) или (8) на место \mathbf{Q} может привести к ошибке.

Например, для одной точки переменной массы $\mathbf{Q} = M\mathbf{v} = M(\mathbf{v}_c - \mathbf{v}_c^{(r)})$, где $\mathbf{v}_c^{(r)}$ - относительная скорость центра масс в осях точки переменной массы.

При выводе уравнения движения центра масс системы материальных точек переменной массы будем исходить из определения центра масс

$$M\mathbf{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k, \quad (9)$$

где \mathbf{r}_c ; m_k и \mathbf{r}_k - радиус - вектор центра масс системы; массы и радиусы - векторы материальных точек переменной массы.

Для главного вектора количества движения системы с помощью (9) находим:

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_c + \dot{M}\mathbf{r}_c - \sum_{k=1}^n \dot{m}_k \mathbf{r}_k, \quad (10)$$

редка забывая начать с того места, где он остановился прошлый раз, и очень редко делая ошибки на доске. Для наиболее способных студентов он готовил дополнительные материалы в виде рукописных копий современных мемуаров. Предполагалось, что эти материалы будут полностью скопированы студентами.

После полудня он предпринимал двух- или трёхчасовую прогулку с такой регулярностью, что, согласно Форсайту (Forsyth), «по её этапам можно было почти что предсказывать время». В вечерние часы Раус занимался постановкой задач для своих студентов и проверкой их работ.

Лекции Рауса оживлялись особенностями преподнесения материала. Так все плавающие тела Раус называл кораблями (ships). Он мог сказать: «Рассмотрим сферический корабль». В качестве иллюстрации педагогических талантов Рауса вспоминают следующую забавную историю [2]:

Случай, происшедший со студентом, изучавшим гидродинамику, представляется типичным для тех испытаний, которым подвергалось терпение учителя. Основная трудность обеспокоенного новичка состояла в том, что он никак не мог понять, как хоть что-нибудь может плавать. Это непонимание в столь полной мере было устранено ясным объяснением доктора Рауса, что студент ушел очень озадаченный тем, как хоть что-нибудь может утонуть!

Научные исследования. Несмотря на столь интенсивную педагогическую деятельность, Раус находил время для написания книг и научных статей. Современному научному миру Раус известен не столько как превосходный преподаватель, но как выдающийся учёный. Он внёс огромный вклад в математику и механику не очень большим количеством превосходных научных работ. Областями исследований, которые интересовали его больше всего, были геометрия, динамика, астрономия, волны, колебания и гармонический анализ.

Ещё молодым человеком он сотрудничал с лордом Бругхэмом (Brougham) в написании в 1855 году книги «Principia сэра Исаака Ньютона с аналитической точки зрения» (см. список публикаций). Об этом имеется комментарий Форсайта: «Вряд ли было бы опрометчивым предположить, что математика принадлежала Раусу, а точка зрения – лорду Бругхэму». Этот комментарий был не вполне справедлив по отношению к лорду Бругхэму, который написал первую половину книги на несколько лет раньше. Учебник Рауса по динамике твёрдого тела, впервые опубликованный в 1860 году, в последующих изданиях уве-

наставником Кембриджа, в этом году он подготовил 19 из 32 Спорщиков, причём семеро из них попали в первую десятку. Конечно, после того, как у него сложилась такая репутация, лучшие студенты искали его наставничества. Поэтому поддержание такой высокой репутации стало делом несколько более легким. Но основными факторами его успеха, оставались, несомненно, его исключительный педагогический талант и его понимание того, как студенты должны распределять свои силы и как они могли наилучшим образом использовать свои знания. В течение 22 лет, начиная с 1862 года, Раус ежегодно готовил Старшего Спорщика. За время своей карьеры с 1855 по 1888 год он работал приблизительно с 700 учениками, из которых приблизительно 480 стали Спорщиками приблизительно из 900 Спорщиков за эти 30 лет. За это время он подготовил 27 Старших Спорщиков, тогда как лишь 17 Старших Спорщиков были подготовлены его учителем, Уильямом Хопкинсом. Многие ученики Рауса впоследствии стали выдающимися учёными. Среди них, например, Дж.Дж.Томсон, лорде Релей, Лармор. Таким образом, Раус оказался во главе научной школы, во многом определившей «лицо» современной науки.

Семья. В 1857 году в Королевской Гринвичской Обсерватории освободилось место первого ассистента. Королевский Астроном Джордж Эйри (Airy) пригласил Рауса посетить Обсерваторию с тем, чтобы предложить ему этот пост лично. Раус и впрямь отправился в Обсерваторию, но решил, что для него, скорее всего, будет предпочтительнее остаться в Кембридже, а не занимать этот пост. Во время этой поездки он встретил Хильду Эйри, самую старшую дочь Королевского Астронома. Завязалась дружба, которая окончилась их браком 31 августа 1864 года.

У них было пятеро сыновей и одна дочь. Эдвард Эйри Раус служил лейтенантом в королевской артиллерии, Джордж Ричард Рандолф Раус стал инспектором школ, Артур Лайонел Раус служил лейтенантом в королевской артиллерии, Гарольд Виктор Раус стал профессором латыни в Торонто, Руперт Джон Раус состоял на государственной службе в Индии.

Педагогика. Огромный объём занятий требовал соответствующих методических приготовлений и максимальной мобилизации внутренних ресурсов. Его ученики были разделены приблизительно на дюжину классов, в каждом из них было не более десяти человек. Занятия начинались с семи или восьми часов утра и продолжались до двух часов дня. Раус беседовал с каждым классом в отведенное время, лишь из-

Подстановкой выражения (10) в равенство (8) получаем дифференциальное уравнение движения центра масс системы материальных точек переменной массы:

$$M\dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{F}_o^{(e)} + \mathbf{R}_o^{(e)} + \dot{M}(\mathbf{u} - 2\mathbf{v}_c) + \sum_{k=1}^n \dot{m}_k \dot{\mathbf{r}}_k + \sum_{k=1}^n \ddot{m}_k \mathbf{r}_k - \ddot{M} \mathbf{r}_c \quad (11)$$

Из уравнения (11) видно, что в описании движения центра масс системы, состоящей из материальных точек переменной массы, участвуют скорости и ускорения изменения масс.

Пусть, в специальном случае, законы изменения масс таковы, что для них тождественно удовлетворяется равенство:

$$\sum_{k=1}^n \dot{m}_k \dot{\mathbf{r}}_k - \dot{M} \mathbf{v}_c + \sum_{k=1}^n \ddot{m}_k \mathbf{r}_k - \ddot{M} \mathbf{r}_c = 0 \quad (12)$$

При условии (12) из (11) следует, что движение центра масс системы материальных точек переменной массы имеет форму уравнения Мещерского

$$M\dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{F}_o^{(e)} + \mathbf{R}_o^{(e)} + \dot{M}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_c) \quad (13)$$

для некоторой гипотетической материальной точки переменной массы, к которой приложены все внешние силы (за исключением сил взаимодействия с изменяющимися массами) и «реактивная сила» $\dot{M}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_c)$.

Ни одна из скоростей, ни их разности в приведенных выше равенствах в общем случае не принимаются заведомо постоянными.

4. Задача о движении цепи, свободный конец которой свешивается с края стола.

В научной и учебной литературе широко используется (см., например, [4]; [5, задача 45.33]) известная задача А. Кэли [1] (или «кембриджская задача») о движении вертикального участка тяжелой однородной цепи, «...свободно (без трения) соскальзывающей со стола», у края которого (на горизонтальной части) она сложена в «комок». Движение происходит в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения g . Требуется составить уравнение вертикального движения свободного конца цепи.

Сразу же отметим, что условие *свободного движения* присоединяющихся частиц в этой задаче не выполнено, если, как обычно принято, считать, что к вертикальному участку цепи присоединяется элемент цепи, которому по условию может быть сообщена лишь горизонтальная скорость. Поэтому ответ $x = gt^2/6$ (x - длина прямолинейного участка свешивающейся со стола части цепи) для движения цепи при на-

чальных условиях $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ не является реалистическим [6]. Отметим также, что этим начальным условиям с точки зрения механики соответствует равновесное состояние ($x \equiv 0$), так как нет причин к началу движения.²

Уточним постановку задачи следующим образом. Пусть край стола имеет форму идеальной дуги окружности радиуса r (удерживающей находящиеся на ней элементы цепи, см. рис.), опирающейся на центральный угол $\pi/2$. Требуется составить дифференциальное уравнение вертикального движения конца цепи.

Ответ. Для координаты, равной длине прямолинейного вертикального участка цепи ($x \geq 0$), получаем дифференциальное уравнение:

$$\left(x + \frac{\pi r}{2}\right)\ddot{x} + \dot{x}^2 - gx = gr \quad (14)$$

Указание. Рассматривать вертикальный участок цепи как точку переменной массы. Рекомендация. Для участка цепи расположенного на дуге окружности, опирающейся на центральный угол $\pi/2$, применить уравнение моментов принципа Даламбера относительно центра O (см. рис.), учитывая, что горизонтальная реакция равна реактивной силе.

Уравнение (14) показывает, что для начальных условий $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ при любых сколь угодно малых, но неравных нулю, значениях радиуса, в начальный момент времени $t_0 = 0$ начальное ускорение

$$\ddot{x}_0 = 2g/\pi.$$

Если в (14) положить $r = 0$, то получится уравнение, составленное Кэли. Однако такие приёмы, как известно, являются источником ошибок, поскольку переход к предельным значениям параметров должен осуществляться уже в решении. Получение закона движения конца цепи на основе уравнения (14) не составляет принципиальных трудностей, так как заменой переменных оно приводится к известной форме уравнения Бернулли и имеет решение в эллиптических функциях.³

² Вопрос о том, какое ускорение приобретает «исчезающе малая» масса под действием «исчезающе малой» силы, должен обсуждаться на основе корректного предельного перехода. (Прим. Ред.)

³ Использованный прием регуляризации задачи делает очевидным, что начальное ускорение конца цепи зависит от его начального положения на верхней четверти скругления и может быть, в частности, нулевым.

ледж, что в Лондоне, выиграв там стипендию в 1847 году. Там он учился под руководством де Моргана, влияние которого оказалось решающим при выборе Эдвардом Джоном карьеры математика.

Получив степень бакалавра искусств в Лондоне в 1849 году, Раус поступил в Петерхаус 1 июня 1850 году, в то же самое время, что и Дж.К.Максвелл. Однако Максвелл перешёл в Тринити Колледж. Некоторые исследователи считают, что он чувствовал, что Раус слишком силен, чтобы с ним состязаться. Раус получил свою магистерскую степень в Лондоне в 1853 году, будучи представленным тогда к золотым медалям по математике и по натуральной философии. В Лондоне Раус стал учиться у Тодхантера (Todhunter) и Хопкинса (Hopkins).

В январе 1854 года Раус получает диплом бакалавра искусств в Кембридже. На математических состязаниях Трайпос (Tripos) он был признан Старшим Спорщиком (Senior Wrangler). При этом он оказался первым среди Спорщиков Первого класса, оставив Максвелла вторым. По решению экспертов престижный Приз Смита был разделен поровну между ними. Это был первый случай, когда приз был поделен между двумя претендентами. В 1855 году Рауса избирают в «братчики» (fellow) Петерхауса и назначают лектором Колледжа по математике. В следующем году он был назначен ассистентом-наставником (assistant tutor) в Петерхаусе.

Наставник и наставничество. После окончания учёбы Раус начал свою работу в качестве частного преподавателя или наставника по математике в Петерхаусе, своём Кэмбриджском колледже. Он взял себе учеников У.Дж.Стила (W.J.Steele) во время болезни последнего, настаивая на том, чтобы вознаграждение выплачивалось самому Стилу. После его кончины ученики остались с Раусом. Так началась его блестящая карьера наставника по математике.

Институт частных преподавателей возник в Кэмбридже как результат того, как Университет и Колледжам оказались не в состоянии предложить студентом хоть какое обучение помимо лекционных курсов, которые иногда оказывались совсем неадекватными. Согласно Форсайту, «посещаемость курсов лекций любого университетского профессора, за исключением Стокса, было почти редким исключением» (цит. по [3]).

Раус стал самым известным из наставников Кембриджа, занимавшихся подготовкой к Трайпос по Математике. Его первый ученик был Третьим Спорщиком в 1856 году, а два года спустя и Первый, и Второй Спорщики были его учениками. К 1862 году он был признан лучшим

А.А. Буров
ВЦ РАН им. А.А. Дородницына

ЭДВАРД ДЖОН РАУС

К 175-летию со дня рождения



Выдающийся учёный и педагог Эдвард Джон Раус (Edward John Routh), родился 20 января 1831 года в Квебеке в семье военного. Его отец, сэр Рэндольф Ишем Раус (Randolph Isham Routh), родился в 1787 году в Пуле (Poole), графство Дорсет (Dorset), что в Англии. Получив образование в Итоне, сэр Рэндольф прослужил тридцать семь лет в британской армии, приняв участие в сражении при Ватерлоо. В 1826 году он стал комиссар-генералом, в то время, когда родился Эдвард, он служил в Канаде. Мать Эдварда, Мари Луиз Ташеро (Marie Louise Taschereau), сестра Архиепископа Квебекского, была второй женой сэра Рэндольфа [1,2].

Род Раусов [3]. Согласно семейной родословной, род Раусов по мужской линии прослеживается непрерывно с 1030 года. Фамилия Раус означает «многие»: в Северной Англии, за Хамбертом, сохранилась фраза «in time of Routh and drought», что означает «во времена многочисленности и скудости».

Род Раусов и впрямь был крайне многочислен, что можно видеть по их генеалогическому дереву. По мнению автора [3], многие Раусы оказались за его пределами. Заметим также, что имелись и другие способы написания их фамилии - de Ruda, Rudel, Routh, Rowth, Rowthe, Rooth, Roth, Ruth, Roughte, de Rue или Rothe. Имеется также семейное предание, согласно которому род Раусов восходил к колену Вениаминову – по линии норманнов, а также к колену Данову, чьё распространение по Европе со времен рассеяния может быть прослежено через Крым, Дунай, Дон, Днепр, Днестр, Данию, и далее, через Викингов и О' Доннелов (O'Donnells), до Ирландии.

Переезд в Англию. В 1842 году Эдвард вместе с семьей прибыл в Англию, где его отец стал служить в Лондоне, в качестве комиссар-генерала. Эдвард сначала учился в школе при Университетском колледже (University College), затем поступил в сам Университетский кол-

Очевидно, что центр масс вертикального участка цепи движется по закону $x_c = x/2$. С центром масс также можно связать оси точки переменной массы, но тогда надо рассматривать модель точки переменной массы с внутренними движениями.

Автор благодарен В.А. Самсонову за полезное обсуждение работы. Статья подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки по научной программе «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 04.01.126).

Литература

1. *Мецкерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. Изд. 2-е. – М.: Госиздат, 1952. 280 с.
2. *Веретенников В.Г., Синицын В.А.* Теоретическая механика. Дополнения к общим разделам. // М.: Изд. МАИ, 1996. 337 с.
3. *Новоселов В.С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1969. 240 с.
4. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики. Изд. 2-е. – М.: Изд. Московского университета, 2000. 719 с.
5. *Мецкерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. Изд. 36-е. – М.: Наука, 1986. 448 с.
6. *Веретенников В.Г., Синицын В.А.* Принцип предикативности и «кембриджская задача» о движении цепи // ДАН, 2005, т. 402, № 1, с. 46-48.

СРАВНЕНИЕ КАК МЕТОД ПОЗНАНИЯ ОСНОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Человеку свойственно, даже зная истину, часто пренебрегать ею. Вот одна из них: «Мир познается в сравнении». Но много ли сделано для того, чтобы помочь начинающим познать основы теоретической механики «в сравнении»?

Обратимся к истории и приведем одно из доказательств Архимеда, целиком построенного на сравнении [1, с. 24].

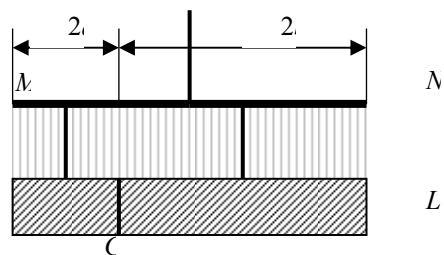


Рис.

Пример 1. Пусть коромысло MN длиной $2a + 2b$ (рис. 1) подвешено за середину в точке O . К этому коромыслу с помощью вертикальных веревочек прикреплена однородная балка KL такой же длины. Вся система будет находиться в равновесии. Оно не нарушится, если балку разрезать по вертикальной линии C на два отрезка: KC длиной $2a$ и CL длиной $2b$. Теперь обрежем все вертикальные веревки, кроме двух: в точках A и B , находящихся в серединах отрезков KC и CL . Равновесие при этом не нарушится. Таким образом, величина $KC = 2a$ на плече $AO = b$ будет уравновешена величиной $CL = 2b$ на плече $OB = a$. Иначе, при равновесии грузы, приложенные в точках A и B , будут обратно пропорциональны плечам («золотое» правило механики или закон Архимеда).

Такого рода сравнительных рассуждений и сравнительного анализа в истории естественных наук и теоретической механики много – парадокс Аристотелева колеса (Герон), открытие закона инерции (Галилей),

ку – С.М. Таргу. Работая в академии, Николай Алексеевич разработал и издал несколько учебных пособий по теоретической механике, отредактировал первое издание ставшего впоследствии знаменитого учебника С.М. Тарга. Выполнил ряд работ по оценке затухания собственного вращения артиллерийского снаряда.

С 1958 по 1962 г. Н.А. Слезкин был деканом механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Он активно участвовал в возрождении в МГУ Научно-исследовательского института механики, который быстро превратился в один из крупнейших отечественных и мировых центров механики.

Николай Алексеевич Слезкин уделял особое внимание методологии механики. Он участвовал в еще довоенной дискуссии о силах инерции и был многолетним руководителем методологического семинара Отделения механики мехмата.

Н.А. Слезкин был председателем Экспертного Совета ВАК СССР по математике и механике. Его научная, педагогическая и организационная деятельность отмечена высокими государственными наградами: Орден Трудового Красного Знамени, три ордена «Знак Почета», шесть медалей. В 1966 г. Н.А. Слезкину было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки и техники РСФСР».

В.А. Самсонов
Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

НИКОЛАЙ АЛЕКСЕЕВИЧ СЛЕЗКИН

1905 – 1991

К столетию со дня рождения



Н.А. Слезкин родился 22-го ноября 1905 г. в семье сельского учителя. Его детство прошло в трудные годы первой мировой, революций и гражданской войны: сиротство, детдом и ранняя трудовая жизнь.

Н.А. Слезкин поступил в Московский Университет на физико-математический факультет (1926), а по окончании его - в аспирантуру организованного в 1930 г. Института Механики МГУ. В этой аспирантской группе учились А.А. Космодемьянский, С.М. Тарг, И.Ф. Ливурдов, П.В. Мясников,

Г.И. Двухшерстов, Л.А. Бойко (впоследствии преподаватели и заведующие кафедрами теоретической механики).

Основная специальность Н.А. Слезкина – гидромеханика. Однако воспитанникам Московского Университета свойственна широта кругозора, интересов и знаний, позволяющая им эффективно работать в различных областях. Например, теоретическая механика, которую он преподавал с 1931 года, сначала в Московском авиационном институте, а затем и в МГУ, заняла в его жизни заметное место. Приведем цитату из воспоминаний Николая Алексеевича:

«В университете я начал вести практические занятия по механике в 1933 году сразу в трех группах; в группе по теории упругости особо выделялись А.Ю. Ишлинский и Ю.Н. Работнов, я их тоже выделял тем, что на контрольных работах я им задавал отдельные особо трудные задачи; и с этими задачами они справлялись блестяще и лучше, чем я сам тогда мог решить. В группе по аэродинамике выделялся Л.П. Смирнов.»

В 1938 году Н.А. Слезкин был назначен начальником кафедры теоретической механики Военной Артиллерийской академии и находился в этой должности до 1957 года, когда «передал» ее своему однокашнику

эквивалентность физического и математического маятников (Гюйгенс). В конце концов, все современные вариационные принципы механики построены на сравнении признаков, отличающих истинное движение от других возможных движений в данный момент времени (дифференциальные принципы) или за конечный интервал времени (интегральные принципы).

Принято считать, что сравнение – одна из философских категорий – важнейшая предпосылка обобщения, играющая большую роль в умозаключениях по аналогии. И это на самом деле так, если исходить из философского определения сравнения – это сопоставление объектов с целью выявления черт сходства или черт различия между ними или того и другого вместе. Однако, понимать сравнение только как философскую категорию неправильно. В обучении, педагогике, в познании основ естественных наук сравнение играет не менее важную роль, чем интуиция, восприятие, представление.

Наше мышление начинается после осознания факта появления некоей проблемной ситуации. Это осознание ведет к появлению вопросов, задач, требующих своего разрешения, на которые нет заранее подготовленных ответов и решений.

Многообразие задач обуславливает многообразие самих видов мышления. В структуре мышления лежит целый комплекс логических операций: сравнение, анализ, синтез, абстрагирование, обобщение, формирование и определение понятий. Сравнение при этом в процессе познания и обучения всегда выступает в качестве исходной формы, лежащей в основе всякого знания.

Первая, довольно крупная, классификация множества задач вообще приводит к задачам двух типов. Первый тип – задачи на нахождение (любого неизвестного, в математике и механике обычно числа, реже формулы), второй – задачи на сравнение (по терминологии Д. Пойа, задачи на доказательство или опровержение некоторого утверждения [2]).

В математике существует большое число познавательных сравнительных задач. Это задачи «минимакса», сравнение бесконечно малых величин, сравнение числовых рядов, сравнение вероятностей, сравнение множеств. Не менее поучительны и важны сравнительные задачи для познания основ теоретической механики. Вот одна из таких задач [3, с. 18-19, 86].

Пример 2. Второй закон Ньютона гласит, что одинаковые силы сообщают телам равных масс одинаковые ускорения. Почему же в таком случае левая тележка набирает скорость медленнее, чем тележка справа, хотя массы t тележек и подвешенного слева груза одинаковы (рис. 2)?

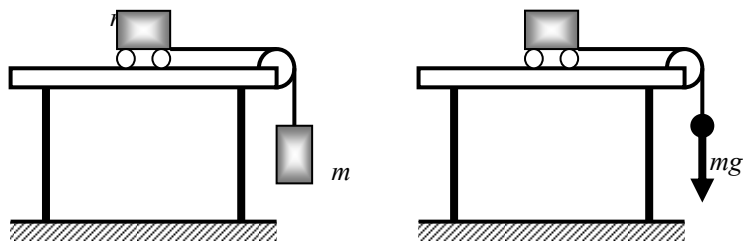


Рис. 2

Решение. В обоих случаях сила, приводящая в движение, равна mg . Но в первом случае вес груза mg приводит в движение не только тележку, но и сам груз, во втором сила mg сообщает ускорение только тележке.

Решение сравнительных задач всегда вызывает у студентов живой интерес, дискуссии. В сборнике [4] предложено 300 задач по всем основным разделам теоретической механики. Все они начинаются словом «Сравните...» (силы, время, ускорения, другие механические величины) и могут быть решены без формул, путем строгого логического рассуждения. При этом необходимо глубокое понимание сути происходящих явлений, знание основных положений (аксиом, законов, терминологии, теорем, принципов) теоретической механики. В затруднительных случаях большинство сравнительных задач можно решить традиционно, аналитически, как задачу на вычисление и, получив бесспорно правильный ответ, задуматься и найти решение логическое.

В сборнике приводятся ответы и авторские логические решения всех помещенных в нем задач. При этом логические решения не претендуют на оригинальность, бесспорность, в подобных решениях разные авторы могут предложить свои подходы, рассуждения, логику.

вием внешнего момента. Эйлер использует метод интегриации, который является методом разложения в ряды по степеням некоторого малого параметра, пропорционального разности между экваториальным и полярным моментами инерции Земли. Полученные им формулы для координат полюса Земли на небесной сфере дают оценку угловой скорости прецессии.

Литература

1. *Сретенский Л.Н.* Динамика твердого тела в работах Эйлера. - В кн. Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР. Под ред. М.А. Лаврентьева, А.П. Юшкевича и А.Т. Григоряна. М., АН СССР, 1958, с.210-230.
Далее идут ссылки на тома «Memoires de l'Academie de Berlin»-«Записки Берлинской академии наук».
2. *Euler L.* Recherches sur la precession des equinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre. (1749, t. V, 289-325)
3. *Euler L.* Decouverte d'un nouveau principe de Mecanique. (1750, t. VI, 185-217)
4. *Euler L.* Recherches sur la connaissance mecanique des corps. (1758, t. XIV, 131-153)
5. *Euler L.* Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. (Ibid., 154-193)
6. *Euler L.* Remarques generales sur le mouvement diurne des planetes (Ibid., 194-218)
7. *Euler L.* Recherches sur le mouvement de rotation des corps celestes. (1759, t. XV, 265-309)
8. *Euler L.* Du mouvement d'un corps solides quelconque, lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile. (1760, t. XVI, 176-227)

весьма важный способ изучения движения твердого тела с помощью системы координат, связанной с телом и вместе с ним перемещающейся.

Такая идея оказала неоценимые услуги теоретической механике, астрономии и позднее дифференциальной геометрии.

Эйлер рассматривает аналитическое решение задачи о движении твердого тела, закрепленного в одной точке, при отсутствии действия внешних моментов. Это первый из случаев, отмеченный Эйлером, интегрирования уравнений движения твердого тела. Система (2), в правой части уравнений которой стоят нули, после преобразования интегрируется. В результате этого величины p, q, r находятся в зависимости от времени посредством эллиптической квадратуры. Далее по этим величинам находится расположение твердого тела в пространстве. Эйлер нашел такой интеграл, который облегчил этот поиск:

$$Ap \cos l + Bq \cos m + Cr \cos n = D,$$

где D - произвольная постоянная, а l, m, n - введенные Эйлером угловые переменные. В настоящее время вышеуказанный интеграл вытекает из теоремы об изменении суммарного момента количества движения точек тела. Но во времена Эйлера такая теорема не была известна.

Добавляя к этому интегралу еще несколько соотношений, после вычислений, Эйлер находит систему косинусов, которая определяет положение тела в пространстве, но не полностью. Чтобы система определяла положение тела полностью, к ней добавляется еще некоторое соотношение.

Работы Эйлера о движении твердого тела возникли в связи с решением задачи небесной механики о выявлении причин предварения равноденствий. Первое решение этой задачи принадлежит Ньютону. Основываясь на принципе возможных перемещений, Эйлер изложил строгое решение задачи Даламбера в двух мемуарах [2] и [7]. В первом из них Земля считается однородным сфероидом или сфероидом, обладающим однородным сферическим ядром другой плотности. Эйлер находит момент сил ньютоновского притяжения, действующих на частицы Земли со стороны достаточно удаленного светила. А также находит общие формулы для координат полюса Земли на небесной сфере. Благодаря этим формулам, Эйлер составил таблицы среднего наклона эклиптики и величины годовой прецессии для 1745-1784гг.

В мемуаре [7] Эйлер, исследуя явления прецессии, рассматривал общие уравнения движения твердого тела, находящегося под воздейст-

Пример 3. Сравните модули сил, с которыми лодочник L в лодке и матрос M на берегу тянут трос каждый на себя и причаливают лодку к берегу.

Решение. На основании третьего закона динамики (силы действия и противодействия равны по модулю) силы, с которыми тянут трос лодочник L и матрос M , по модулю равны.

Если бы всегда и с такой легкостью все студенты, изучающие механику, давали правильный ответ! Как Пуанкаре больше 100 лет назад, так и сейчас не только меня «поражает, сколь многие молодые люди, получившие среднее образование, далеки от того, чтобы применять к реальному миру те механические законы, которые им были преподаны. И это не только потому, что они к этому неспособны, но и потому, что они об этом даже не думают» [5, с. 365].

Решение сравнительных задач непременно побуждает студентов думать.

Пример 4. Сравните время падения на Землю тел малой m и большой M массы, отпущенных без начальной скорости с одинаковой высоты без учета сопротивления воздуха.

Вот какие варианты решений этой задачи доводилось обсуждать автору со студентами.

Решение 4.1. Тело массой M тяжелее, значит, оно движется быстрее и упадет раньше.

Решение 4.2. Ускорение, по второму закону динамики, обратно пропорционально массе, значит, тело малой массы m движется быстрее и упадет раньше.

Решение 4.3. Предположим, одно из тел падает быстрее. Тогда можно уменьшить или увеличить массу этого тела настолько, что его ускорение станет больше g , а это невозможно. Значит, тела разных масс упадут на Землю одновременно.

Последний вариант ответа правильный, а логика студента близка к гениальным рассуждениям Галилея [1, с. 86].

Сравнительные задачи могут и включаются автором в тесты для промежуточного и итогового контроля знаний студентов как тестовые задания открытого или закрытого типа. На первый взгляд, любая сравнительная задача имеет всего три варианта ответов:

1. Первое < второго	2. Первое = второму	3. Первое > второго.
---------------------	---------------------	----------------------

Это так, пока сравниваются только два однородных параметра (две силы, два промежутка времени или другие механические величины). Ограниченное число вариантов ответов снижает ценность сравнительных задач как тестовых заданий. Но сравнительные задачи можно сформулировать по отношению к трем, четырем и большему числу сравниваемых параметров. Если n – число сравниваемых параметров, то число возможных вариантов ответов можно найти по формуле:

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} V_i \cdot C_n^i,$$

где C_n^i – число сочетаний из n по i (индекс суммирования), причем предполагается, что $V_0 = 1$ по определению. При возрастании n число возможных вариантов ответов V_n резко возрастает:

Число сравниваемых величин n	Число вариантов ответов V_n
1	1
2	3
3	13
4	75
5	541.

При $n = 10$ число вариантов ответов $V_{10} = 102247563$.

В сравнительных задачах для тестовых заданий вполне достаточно трех, максимум – четырех сравниваемых параметров. Вот несколько примеров таких задач, здесь же приводятся авторские логические решения.

Пример 5. Сравните вес однородной балки P и ее давления на левую стенку N_A , пол N_B и правую стенку N_C , если угол $\alpha \square > 45^\circ$ (рис. 3). В ответе расположите вес и давления в порядке возрастания и свяжите их знаками отношений $<$ или $=$.

Решение. Балка находится в равновесии под действием двух вертикальных сил: веса \vec{P} (вниз) и реакции \vec{N}_B пола (вверх) и двух горизонтальных реакций: \vec{N}_A (вправо) и \vec{N}_C (влево). Значит, модули этих сил попарно равны $P = N_B$, $N_A = N_C$. Они образуют две пары сил, моменты которых при равновесии должны быть равны. Но при $\alpha \square > 45^\circ$ у пары (\vec{P}, \vec{N}_B) плечо меньше, правильный ответ: $N_A = N_C < P = N_B$.

некоторых преобразований этих уравнений, Эйлер получил выражения для моментов сил. Так он находит систему уравнений движения твердого тела. Но найденные им формулы были далеки от вида (2). Эйлер не считал их окончательными ввиду их сложности и привел их к простому виду с помощью неожиданных соображений. Уравнения были получены при рассмотрении движения отдельных точек твердого тела по отношению к неподвижной системе координат. Рассматривая тело в момент времени t , Эйлер берет в качестве неподвижной (сопутствующей) системы координат три взаимно ортогональные главные оси инерции твердого тела в его положении в момент времени t и относящиеся к точке опоры. Следовательно, часть слагаемых обнуляются, и Эйлер получает уравнения в более простом, известном нам виде.

Эйлером была основана первая теория прецессии Земли.

Теория моментов инерции была разобрана Эйлером в обширной статье [5]. Эйлер дал первое глубокое исследование моментов инерции тела относительно всевозможных плоскостей и прямых в пространстве. Он привел изучение моментов инерции тела, взятых относительно любых прямых, к исследованию моментов инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести тела. Также Эйлер доказал существование в каждой точке трех взаимно ортогональных прямых, названных им главными осями инерции, которые обладают экстремальными значениями моментов инерции. Эйлер вывел ряд свойств динамики твердого тела, в частности, теорему, названную в XX веке, теоремой Гюйгенса-Штейнера.

Эйлер не раз отмечал, что удивительным явлением механики является такое свойство твердого тела, при котором оно равномерно вращается без участия сил вокруг любой из главных осей.

Эйлер определял координаты произвольной точки твердого тела через пять угловых координат, и расстояние точки от начала неподвижных осей координат. Дифференцируя дважды по времени полученные таким способом уравнения, он находит проекции ускорения произвольной точки на неподвижные оси. Затем он выполняет подсчет ускорений по осям нового трехгранника, жестко связанного с движущимся твердым телом. Установив выражения этих ускорений, Эйлер определяет моменты ускорений. После их интегрирования по всему объему, выводит некоторые уравнения движения. Упрощая эти уравнения, Эйлер полностью решает задачу о составлении окончательных уравнений движения (2) твердого тела с одной неподвижной точкой. Благодаря такому решению, Эйлер ввел в теоретическую механику

После нахождения этих формул, Эйлер указал, что при всяком вращении твердого тела вокруг неподвижной точки существует такая прямая, проходящая через эту точку, скорости всех точек которой равны нулю в данный момент времени. Это ось мгновенного вращения твердого тела, которая характеризуется угловыми коэффициентами p, q, r и угловой скоростью $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ обращения тела вокруг нее.

В первых работах Эйлера по динамике твердого тела еще не было идеи рассматривать движение твердого тела с использованием осей, связанных с телом, поэтому считается, что формулы (1) относятся к неподвижным осям. В этих условиях Эйлер записал уравнения для компонент скорости точек твердого тела через координаты этих точек и через угловые скорости тела, относительно осей координат. Для дальнейшего построения динамики твердого тела, Эйлер, дифференцируя получившиеся формулы, получал выражения для компонент ускорения точки твердого тела и для моментов этих ускорений.

Эйлер изложил два способа определения положения твердого тела в пространстве. В первом способе используются углы Эйлера, которые определяют положение трехгранника, связанного с телом по отношению к некоторым неподвижным геометрическим объектам.

Второй метод определения положения твердого тела в пространстве состоит в том, что задаются углы, которые оси неподвижного трехгранника образуют с некоторой неподвижной прямой пространства. Таким способом Эйлер вывел две системы уравнений, одна из которых известна как система Пуассона и выводится с помощью теории относительного движения.

Важнейшим результатом Эйлера был вывод знаменитых динамических уравнений, носящих его имя, вращательного движения твердого тела вокруг центра масс:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= L \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp &= M \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= N \end{aligned} \quad (2)$$

Они были установлены не сразу. Сначала была получена система уравнений для моментов ускорений точек движущегося тела. После

Пример 6. Сравните модули ускорений точек, движущихся по окружности одинакового радиуса, в указанный момент времени T (рис. 4). Законы движения точек заданы графиками 1, 2, 3. В ответе расположите ускорения в порядке возрастания и свяжите их знаками отношений $<$ или $=$.

Решение. В заданный момент времени T при всех заданных графиках движения дуговые координаты S меняются линейно от времени, скорости по модулю постоянны, значит, касательные ускорения во всех трех случаях равны нулю. При одинаковых радиусах кривизны нормальное ускорение больше там, где больше скорость точки. Так как скорость численно равна производной от дуговой координаты S по времени t , скорость больше там, где больше угол между касательной к графику с осью t , правильный ответ: $a_1 < a_3 < a_2$.

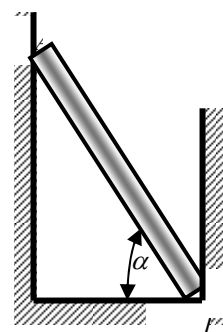


Рис. 3

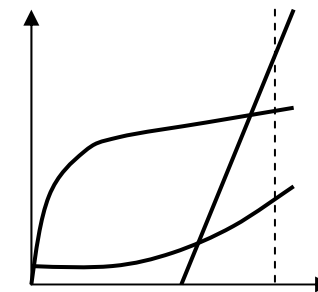


Рис. 4

Такого типа сравнительные задачи теоретической механики вошли в предложенный автором проект «Создание тестов по теоретической механике», отмеченный поощрительной премией в конкурсе Минобразования России 2001 года «Педагогический тест – объективный измерительный инструмент». Сравнительные задачи логично встраиваются в Интернет-учебник по теоретической механике [6]. Все это способствует реализации одного из решений Всероссийского совещания-семинара заведующих кафедрами теоретической механики [7, с. 254] о «модернизации курса теоретической механики, основанной на внедрении новых информационных технологий, для интенсификации само-

стоятельной работы студентов и облегчения освоения ими основных положений механики».

Литература

1. *Веселовский И.Н.* Очерки по истории теоретической механики//М.: Высшая школа, 1974. – 288 с.
2. *Пойа Д.* Математическое открытие. // М.: Наука, 1976.
3. *Ланге В.Н.* Физические парадоксы, софизмы и занимательные задачи//М.: Просвещение, 1967. – 168 с.
4. *Локтев В.И.* Сравнительные задачи и вопросы теоретической механики//Астрахань: АГТУ, 1999. – 194 с.
5. *Пуанкаре А.* О науке. // М.: Наука, 1983. – 560 с.
6. *Павловский В.Е., Невенчанная Т.О., Курганская Г.С., Пономарева Е.В.* Концепция, структура, программная реализация Интернет-учебника по теоретической механике. // М.: ИПМ им. Келдыша, 2003. – 28 с.
7. *Мартыненко Ю.Г., Феоктистова О.П.* Второе Всероссийское совещание-семинар заведующих кафедрами теоретической механики. // Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. – М.: Изд-во МГУ, 2000, вып. 23. – с. 251-254.

ИСТОРИЯ МЕХАНИКИ

УДК 531.36

Е.Н. Рощина
МГУ им. М.В. Ломоносова

К ТРЕХСОТЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Величайшим творением Л. Эйлера был трактат «О движении жестких и твердых тел» (1765 г.), в котором был заложен фундамент динамики твердого тела.

Пятьдесят лет назад научная общественность всего мира отмечала 250-летие со дня рождения Леонарда Эйлера. Международная конференция проходила в Санкт-Петербурге. Среди докладчиков от нашей страны выступал профессор МГУ Леонид Николаевич Сретенский, который был большим знатоком работ Эйлера. Его доклад был опубликован в юбилейном сборнике статей [1], посвященном круглой дате, под названием «Динамика твердого тела в работах Эйлера».

В своей статье Леонид Николаевич кратко изложил содержание эйлеровской теории движения твердого тела. Этими вопросами Эйлер начинал заниматься в начале своей научной деятельности. Однако основные достижения, главным результатом которых были уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки, были получены им гораздо позже, в берлинский период жизни ученого. Теория была представлена Эйлером в ряде статей, опубликованных им с 1749 по 1760 гг. в Берлинской Академии наук.

Сначала приводятся формулы, определяющие компоненты скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, которые лежат в основе кинематики твердого тела.

$$V_x = qz - ry \quad V_y = rx - pz \quad V_z = py - qx \quad (1)$$

Здесь p, q, r - компоненты вектора угловой скорости.

Они были установлены Эйлером в 1750 г. в мемуаре [2]. Он находил эти формулы оригинальным способом, который основан на первоначальном определении твердого тела, как неизменного образования своих частиц. В этом методе Эйлер также использовал понятие интегрального инварианта, которым должны обладать искомые уравнения.

не обнуляется на интервале $[0, z_1]$. Далее движение происходит с проскальзыванием, в соответствии с уравнениями

$$\left. \begin{aligned} a_{cx} &= \ddot{\varphi}r - \dot{v}_p - \dot{\varphi}^2 a \sin \varphi + \ddot{\varphi} a \cos \varphi = \frac{kN}{m+M} \operatorname{sgn} v_p, \\ a_{cy} &= -\dot{\varphi}^2 a \cos \varphi - \ddot{\varphi} a \sin \varphi = -g + \frac{N}{m+M}, \\ \rho^2 \ddot{\varphi} &= \frac{N}{m+M} [a \sin \varphi - k(r + a \cos \varphi) \operatorname{sgn} v_p], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $k = F(z_1)/N(z_1)$. Асимптотическое исследование уравнений (10), (11) при $\lambda \rightarrow \infty$ (выкладки здесь опущены) показывает, что $z_1 = \cos \varphi_1 \rightarrow \frac{1-k^2}{1+k^2}$, т. е. мы получаем формулу (4). Кроме того, $\dot{v}_p \rightarrow h_0 z_1$, где h_0 – некая положительная константа. Таким образом, скольжение точки контакта P определяется знаком z_1 . Приведенные рассуждения и доказывают справедливость утверждения 2 из п. 2.

В заключение автор пользуется случаем, чтобы выразить благодарность профессору В.А. Самсонову за полезные обсуждения, замечания и дополнения, способствующие улучшению настоящей статьи при ее редактировании.

Литература

1. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехтеориздат, 1954. 316 с.
2. Болотов Е. А. О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением // Математический сборник. Т. 25. М.: Университетская типография, 1906. 147 с.
3. Пожарицкий Г. К. Исчезающие скольжения механических систем с сухим трением // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 558–563.
4. Пятницкий Е. С., Трухан Н. М., Ханукаев Ю. Н., Яковенко Г. Н. Сборник задач по аналитической механике. М.: Физматлит, 2002. 396 с.
5. Самсонов В. А. Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы. М.; Ижевск: РХД, 2001. 80 с.

СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 531.1

М.Ф. Зацепин¹, О.М. Канустина²

¹ Московский энергетический институт МЭИ (ТУ),

² Московский государственный университет прикладной биотехнологии МГУПБ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ СИСТЕМЫ С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА “MATHEMATICA”

Излагается методика определения в системах с неударивающими связями некоторых активных сил, под действием которых система находится в равновесии при «натянутых» связях, и последующего вычисления реакций связей. Рассмотрен пример решения задачи с помощью пакета “MATHEMATICA 5”. Даются необходимые пояснения и иллюстрации. Приведены фрагменты программы.

На протяжении последних десяти лет студенты МЭИ (ТУ) выполняют расчётно-графическую работу “Статика системы с неударивающими связями”, в которой рассматривается находящаяся в равновесии плоская механическая конструкция, состоящая из трёх весомых абсолютно твёрдых тел. Среди связей, наложенных на конструкцию, имеются две гибкие нерастяжимые нити. Проекция f одной из активных сил на заданную линию действия и момент m одной из пар сил, действующих на конструкцию, должны быть выбраны так, чтобы обе нити оказались натянутыми. При выбранных таким образом силах следует определить девять неизвестных реакций связей. В результате выполнения этого задания у студентов развиваются навыки составления и решения уравнений равновесия, а также формируется представление о конструкции с неударивающими связями как об управляемой системе, в которой приведение неударивающих связей в состояние натяжения возможно за счет специального выбора активных сил.

Для решения задачи система освобождается от внешних и внутренних связей. При этом связи заменяются соответствующими силами – реакциями. Предполагается, что неударивающие связи находятся в натяжении. Затем, согласно [1], составляется система девяти линейных уравнений равновесия с одиннадцатью неизвестными. Реакции связей

находятся как общее решение этой системы, зависящее от двух свободных неизвестных f, m . Строится и решается система двух линейных неравенств относительно f, m , определяющая условия физической реализуемости заданного положения равновесия с помощью поддерживающих связей. Для решения системы уравнений равновесия и системы неравенств могут быть использованы любые методы, как аналитические, так и численные [2]. Компьютерные системы символьной математики: MATHEMATICA, MATHCAD, MAPLE, MATLAB позволяют всё решение задачи от ввода уравнений равновесия до оформления выполнить на компьютере. Ниже приведён пример использования в указанных целях “MATHEMATICA 5”. Студент получает программный шаблон, которую используется им для решения собственной задачи.

Уравнения равновесия составляются с помощью какого-либо способа, например, приведённого в [3]. Представим эту систему уравнений в матричном виде

$$AX = f A_f + m A_m + B, \quad (1)$$

где X – вектор-столбец проекций неизвестных реакций на фиксированные направления; A – невырожденная матрица коэффициентов при компонентах вектора X ; f – подлежащая выбору проекция активной силы на заданную в условии её линию действия; m – подлежащая выбору проекция момента активной пары сил на ось, перпендикулярную плоскости конструкции; A_f, A_m – векторы-столбцы коэффициентов при параметрах f, m ; B – вектор-столбец свободных членов.

Для осуществления равновесия необходимо, чтобы проекции сил натяжения нитей на направления вдоль нитей от тел, к которым они прикреплены, были бы неотрицательными, так как со стороны нитей на тела, могут действовать только растягивающие усилия.

Пусть указанные проекции сил натяжения – i -е и j -е элементы столбца X . Обозначим их через x_i и x_j соответственно. Тогда условия физической реализуемости положения равновесия конструкции примут вид

$$\begin{cases} x_i \geq 0, \\ x_j \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

причём знак равенства здесь соответствует ненапрянутым нитям.

Три уравнения динамики для плоского движения обруча:

$$a_{cx} = \ddot{\varphi}r - \dot{v}_p - \dot{\varphi}^2 a \sin \varphi + \ddot{\varphi} a \cos \varphi = \frac{|F|}{m+M} \operatorname{sgn} v_p, \quad (6)$$

$$a_{cy} = -\dot{\varphi}^2 a \cos \varphi - \ddot{\varphi} a \sin \varphi = -g, \quad (7)$$

$$\rho^2 \ddot{\varphi} = -(r + a \cos \varphi) \frac{|F|}{m+M} \operatorname{sgn} v_p, \quad (8)$$

где ρ^2 — радиус инерции обруча относительно центра масс C , для которого нетрудно получить формулу: $\rho^2 = r^2 \frac{2\lambda + 1}{(\lambda + 1)^2}$.

Несложное интегрирование уравнения (7) приводит к формуле (3). Из (3) следует, что, так как $z_* = \cos \varphi_* < 0$, то и $\dot{\varphi}(z) > 0$ при $z \leq z_*$. Тогда из уравнения (8), с учетом полученного неравенства, имеем $\operatorname{sgn} v_p < 0$, т. е. проскальзывание точки P происходит в сторону положительного направления оси x , т. е. в сторону движения обруча. Несложные выкладки (которые здесь не приводятся) показывают, что уравнение (6) при этих условиях также является непротиворечивым. Таким образом, справедливость утверждения 1 установлена.

4.2. Пусть $k < \infty$, проскальзывание отсутствует. Тогда нормальная реакция дается формулой (5). Составляя уравнение движения для центра масс вдоль оси x , аналогично получим выражение для силы сцепления F :

$$F(z) = (m+M)g \frac{\lambda^2 \sqrt{1-z^2}}{(\lambda+1)(1+\lambda+\lambda z)} \left(z + \frac{1}{2\lambda} \right), \quad (9)$$

где $z = \cos \varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Ясно, что процесс чистого качения будет происходить до тех пор, пока выполнены соотношения:

$$|F| \leq kN, \quad N > 0.$$

Несложный анализ уравнения

$$\frac{F(z)}{N(z)} = k, \quad (10)$$

где F и N даются формулами (9) и (5), показывает, что первый корень z_1 уравнения (10) удовлетворяет неравенству $z_1 > z_*$, т. е. реакция $N(z)$

Таким образом, справедливость п. 1 утверждения 1 установлена. Пусть теперь $\lambda > 13$. Согласно рис. 4, до значения z_* , являющегося наибольшим корнем уравнения $N(z) = 0$ (или эквивалентного ему уравнения (2)), будет происходить чистое качение. Чтобы выяснить дальнейший характер движения, рассмотрим две возможные ситуации.

Ситуация 1. Происходит сход со связи, т. е. обруч «подпрыгивает» и $a_{0y}(z^*) \geq 0$ (ускорение точки O имеет составляющую, направленную вверх). В этом случае естественно принять, что $N(z) = F(z) = 0$ при $z \leq z_*$, т. е. обруч движется под действием силы тяжести, и тогда имеем:

$$\ddot{\phi} \equiv 0, \quad \dot{\phi} = \dot{\phi}(\phi_*) = \text{const.}$$

Выписывая уравнение для движения центра масс по оси y в этих предположениях, получим:

$$a_{0y} = a\dot{\phi}^2 \cos \phi - g.$$

Для момента отделения от связи, используя (1), получим:

$$a_{0y}(\phi_*) = g \frac{-\lambda^2 z_*^2 - \lambda z_* - 2\lambda - 1 - \lambda^2}{(1 + \lambda)(1 + \lambda + \lambda z_*)} < 0.$$

Таким образом, мы получаем противоречие, т. е. парадокс. Следовательно, ситуация 1 должна быть отброшена.

Ситуация 2. Схода со связи не происходит, т. е. $a_{0y}(z) = 0$ при $z \leq z_*$. Тогда движение обруча будет представлять собой качение с проскальзыванием (качение без проскальзывания быть не может, так как, согласно рис. 4, для его реализации необходимы **отрицательные** значения нормальной реакции N). Причем это движение будет происходить при **нулевой** нормальной реакции N и ненулевой касательной силе F (если бы реакция N была бы ненулевой, то, в силу бесконечности коэффициента трения, реализовалась бы такая сила трения F , которая удержала бы точку контакта p от проскальзывания!) Запишем уравнения движения в этих предположениях. Пусть v_p — скорость точки контакта P (см. рис. 2), положительное направление которой будем отсчитывать в сторону **против** оси x . Тогда для силы сцепления (трения) F естественно принять выражение

$$F = F_x = -|F| \text{sgn } v_p.$$

Найдём ограничения на параметры f и m , налагаемые условиями (2). Для этого, умножив слева обе части системы (1) на обратную матрицу A^{-1} , представим решение этой системы в виде линейной функции \dot{y} от f и m :

$$X = f A_f^* + m A_m^* + B^*, \quad (3)$$

где $A_f^* = A^{-1} A_f$, $A_m^* = A^{-1} A_m$, $B^* = A^{-1} B$.

Из векторного равенства (3) получим следующие выражения проекций:

$$\begin{aligned} x_i &= f a_{fi}^* + m a_{mi}^* + b_i^*, \\ x_j &= f a_{fj}^* + m a_{mj}^* + b_j^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $a_{fi}^*, a_{fj}^*, a_{mi}^*, a_{mj}^*, b_i^*, b_j^*$ — i -е и j -е элементы столбцов A_f^*, A_m^*, B^* соответственно.

С учётом выражений (4) запишем условия (2) для натянутых нитей в виде системы двух линейных неравенств относительно f и m :

$$\begin{cases} x_i = f a_{fi}^* + m a_{mi}^* + b_i^* > 0, \\ x_j = f a_{fj}^* + m a_{mj}^* + b_j^* > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Замечание. В реальных механических конструкциях условия натяжения нитей (5) должны быть дополнены ограничениями сверху на величины проекций x_i и x_j (чтобы не допустить обрыва нитей). В настоящем задании эти условия не рассматриваются.

Множество \mathcal{D} решения системы неравенств (5) может быть представлено на плоскости. Для решения задачи следует выбрать одну из точек P , принадлежащую \mathcal{D} , и вычислить по (3) соответствующие значения реакций связей.

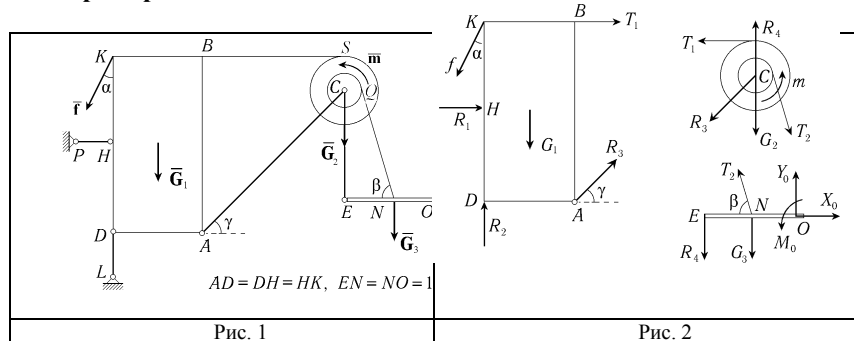
Проверка проводится, как в [3], подстановкой решения в проверочное уравнение и последующего вычисления относительной «невязки» δ между его левой и правой частью:

$$\delta = \left| \frac{\Delta}{\max_{1 \leq k \leq 9} |x_k|} \right| \cdot 100\%.$$

Здесь Δ – абсолютная “невязка” проверочного уравнения, равная разности его левой и правой части; $\max_{1 \leq k \leq 9} |x_k|$ – модуль максимальной по абсолютной величине компоненты X . Точность решения считается приемлемой, если $\delta < 1\%$.

При использовании МАТЕМАТИКА 5 студент составляет уравнения равновесия конструкции в скалярной форме, проверочное уравнение. С помощью программы, построенной в форме методических указаний, он приводит решение системы уравнений равновесия к виду (3), составляет и решает систему неравенств (5), вычисляет реакции связей и “невязку” δ , получает графическое представление множества \mathcal{D} и точки P . Во время защиты работы учащийся должен продемонстрировать понимание метода получения решения.

Пример выполнения задания



В конструкции на рис. 1 заданы: вес прямоугольной пластинки – G_1 , вес блока – G_2 , вес балки – G_3 . Все элементы конструкции, кроме двух гибких нерастяжимых нитей BS, NQ , считаются абсолютно жёсткими. Стержни PH, DL, AC, CE – невесомы. Трение в шарнирах, точках контакта нитей и блока отсутствует.

Пусть: $G_1 = 8,7 \text{ кН}$, $G_2 = 4,3 \text{ кН}$, $G_3 = 15,7 \text{ кН}$, $\alpha = 0,532$, $\beta = 1,053$, $\gamma = 0,79$, $DA = KB = a$, $AB = DK = 2a$, $DA = KB = a$, $AB = DK = 2a$, $EN = NO = 1 \text{ м}$, $r = 0,36 \text{ м}$, $R = 2r$, r, R – малый и большой радиус блока соответственно.

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{1+2\lambda}{(1+\lambda+\lambda z)^2} < 0.$$

Кроме того, $\theta(z) \in [0, 2]$ при $z \in [-1, 1]$. Далее имеем:

$$I(z) = I(\theta) = \frac{-3\theta^2 - \theta^3\lambda + 4\theta}{2(1+\theta\lambda)}, \quad \frac{dI}{d\theta} = \frac{-3\theta + 2 - 3\theta^2\lambda - \theta^3\lambda^2}{(1+\theta\lambda)^2}.$$

Нули производной $dI/d\theta$ совпадают с нулями числителя, преобразуя который, имеем:

$$-3\theta + 2 - 3\theta^2\lambda - \theta^3\lambda^2 = \frac{1}{\lambda} [-(1+\theta\lambda)^3 + 2\lambda + 1].$$

Отсюда получаем единственный нуль:

$$\theta_* = \frac{1}{\lambda} (\sqrt[3]{2\lambda + 1} - 1).$$

Нетрудно установить, что этот нуль доставляет функции $I(\theta)$ максимум, который равен:

$$I_* = I(\theta_*) = \frac{2(2\mu + 1)}{(\mu^2 + \mu + 1)^2}, \quad \text{где } \mu = \sqrt[3]{2\lambda + 1}.$$

Из формулы (5) получим минимум функции $N(z)$:

$$N_* = (m + M)g \frac{\mu^2(-\mu + 3)}{\mu^3 + 1}.$$

Отсюда видим, что $N_* = \min_{\varphi} N(\varphi)$ будет отрицательным при $\mu > 3$,

т. е. при $\lambda > 13$. Если же $\mu < 3$, т. е. $\lambda < 13$, то обнуление нормальной реакции N не происходит, и будет реализовано чистое качение без проскальзывания. Графики функции $N(z)$ при $\lambda < 13$ и $\lambda > 13$ представлены, соответственно, на рис. 3 и 4.

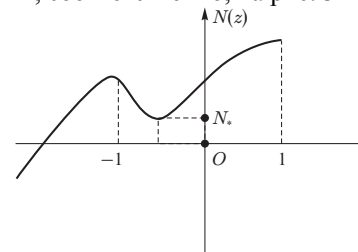


Рис. 3. ($\lambda < 13$)

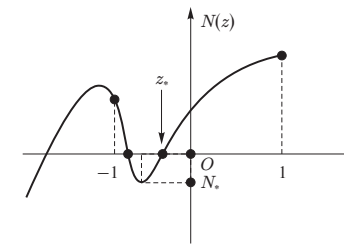


Рис. 4. ($\lambda > 13$)

\vec{v}_p — скорость точки контакта P , которая предполагается на первом этапе движения равной нулю: $v_p = 0$.

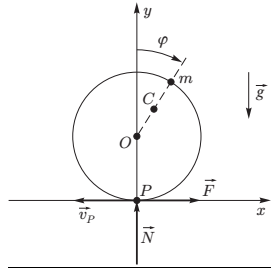


Рис. 2

Кинетическая и потенциальная энергии системы:

$$T = \dot{\varphi}^2 r^2 [M + m(1 + \cos \varphi)],$$

$$\Pi = mgr \cos \varphi,$$

где r — радиус обруча. В случае отсутствия проскальзывания ($v_p = 0$) полная механическая энергия сохраняется, поэтому имеем

$$T + \Pi = T(0) + \Pi(0) = mgr.$$

Используя безразмерный параметр $\lambda = m/M$, отсюда получим соотношения (1). Обозначаем $a = OC = \frac{mr}{m+M} = \frac{\lambda r}{1+\lambda}$. Запишем уравнение для движения центра масс вдоль оси y :

$$-(m+M)a(\ddot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) = -(m+M)g + N.$$

Отсюда, используя соотношения (1), получим:

$$N(z) = (m+M)g \left[1 - \frac{\lambda^2}{1+\lambda} I(z) \right], \quad (5)$$

$$\text{где } z = \cos \varphi, \quad I(z) = \frac{(1-z) \left[z + \frac{1}{2}(1+z) + \lambda(1+z)^2 \right]}{[1+\lambda(1+z)]^2}.$$

Нетрудно видеть, что нули функции $N(z)$ из (5) совпадают с корнями уравнения (2). Чтобы выяснить условия существования нулей функции $N(z)$ на интервале $z \in [-1, 1]$, исследуем функцию $N(z)$ на минимум, что эквивалентно исследованию функции $I(z)$ на максимум при $z \in [-1, 1]$.

Вводим новую переменную θ по формуле:

$$\theta = \frac{1-z}{1+\lambda(1+z)} \Rightarrow z = \frac{1-\theta(1+\lambda)}{1+\theta\lambda}.$$

Ясно, что θ — монотонная функция от z :

Требуется выбрать значения f и m , при которых нити BS, NQ находятся в натяжении, и определить соответствующую этим значениям реакцию жёсткой заделки в точке O , усилия в стержнях PH, DL, AC, CE , силы натяжения нитей BS, NQ .

Освободим систему от внешних и внутренних связей, заменив их реакциями связей, как показано на рис. 2, и запишем систему уравнений равновесия всей конструкции в виде уравнений равновесия прямоугольной пластины, блока, балки:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} = R_1 + R_3 \cos \gamma + T_1 - f \sin \alpha = 0, & \quad \sum_{k=1}^n F_{kx} = -R_3 \cos \gamma - T_1 + T_2 \cos \beta = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = R_2 + R_3 \sin \gamma - f \cos \alpha - G_1 = 0, & \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = -R_3 \sin \gamma + R_4 - T_2 \sin \beta - G_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_{Hz}(\vec{F}_k) = aR_3(\cos \gamma + \sin \gamma) - aT_1 + & \quad \sum_{k=1}^n M_{Cz}(\vec{F}_k) = T_1 R - T_2 r + m = 0, \\ + af \sin \alpha - 0,5aG_1 = 0, & \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -T_2 \cos \beta + X_0 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = -R_4 + T_2 \sin \beta + Y_0 - G_3 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Nz}(\vec{F}_k) = R_4 + Y_0 + M_0 = 0.$$

В качестве проверочного примем уравнение равновесия относительно проекций сил на ось y конструкции, освобожденной только от внешних связей

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = R_2 + Y_0 - f \cos \alpha - G_1 - G_2 - G_3 = 0.$$

Программы МАТНЕМАТИСА могут быть нужным образом разделены на части. Возможно объединение этих частей в более крупные и такое оформление, что на экране будет виден только заголовок определённой части. Программа, предлагаемая студентам, состоит из трёх разделов.

- Составление уравнений равновесия
- Решение уравнений равновесия
- Определение активных сил, при которых нити находятся в натяжении, и вычисление реакций

Разделы делятся на подразделы. Так, например, раздел «Составление уравнений равновесия» включает в себя три подраздела.

- Составление уравнений равновесия
 - Постановка задачи
 - Ввод исходных данных
 - Составление уравнений равновесия

При выполнении задания можно вводить необходимую информацию и получать результаты, многократно обращаясь к каждому разделу и подразделу отдельно.

Ниже представлено содержание подразделов «Ввод исходных данных» и «Составление уравнений равновесия».

В разделе «Решение уравнений равновесия» находится общее решение уравнений равновесия в виде (3). При этом представлены два различных метода: с применением функции Solve, алгоритм которой остаётся скрытым от учащегося, и матричный метод, использующий операции матричной алгебры.

В разделе «Определение активных сил, при которых нити находятся в натяжении, и вычисление реакций» задаются параметры, необходимые для проведения вычислений, например, характерные значения переменных $f_{\min}, f_{\max}, m_{\min}, m_{\max}$, решается система неравенств (5). Для одной из точек $P(f, m)$, удовлетворяющей (5), вычисляются по (3) реакции связей, находится погрешность вычислений δ . В этом же разделе строится графическое решение задачи. Ниже представлено содержание и результат подраздела «Решение неравенств, определяющих условия натяжения нитей», остальные подразделы видны как заголовки.

Дальнейшее движение обруча представляет собой качение с проскальзыванием, причем точка контакта движется в сторону, противоположную движению обруча.

2°. Если $k > 1$, то движение происходит аналогично, но точка контакта при режиме проскальзывания движется в сторону движения обруча.

III. Обсуждение результатов

3.1. Результат, полученный в утверждении 1, показывает, что в случае бесконечно большой шероховатости опорной плоскости возможен режим качения с проскальзыванием при нулевой нормальной реакции плоскости, но ненулевой касательной реакции (т. е. силе трения). При этом важно отметить, что не происходит схода со связи, т. е. обруч не совершает «подпрыгиваний». Заметим, что о явлении «подпрыгивания» (т. е. схода со связи) упоминается при формулировке аналогичной задачи в известном сборнике задач по аналитической механике [4] (задача 7.3.6, стр. 62 из [3]).

3.2. Если предполагать, что сила трения исчезает вместе с обнулением нормальной реакции (даже в случае бесконечного коэффициента трения), то, как показано в утверждении 1, дальнейшее движение обруча приводит к парадоксу. Для разрешения этого парадокса необходимо принимать во внимание явление, именуемое как «удар трением». Подробное обсуждение этого явления содержится в книге [5]. Кроме того, парадокс разрешается отказом от бесконечности коэффициента трения.

3.3. В случае конечного коэффициента трения простые аналитические результаты удалось получить лишь при $\lambda \rightarrow \infty$, т. е. когда масса обруча пренебрежимо мала по сравнению с точечной массой. Эти результаты сформулированы в утверждении 2, которое показывает, что проскальзывание возникает всегда, причем направление проскальзывания точки контакта зависит от величины коэффициента трения.

IV. Обоснование результатов

4.1. Пусть $k = \infty$, проскальзывание обруча в точке контакта отсутствует и φ — обобщенная координата, представляющая собой угол поворота обруча, отсчитываемый от вертикали. Расчетная схема для решения приведена на рис. 2, где C — центр масс системы, \vec{N}, \vec{F} — нормальная и касательная силы реакции плоскости, соответственно, а

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{r} \frac{\lambda(1 - \cos \varphi)}{1 + \lambda + \lambda \cos \varphi}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{g}{r} \frac{\lambda(1 + 2\lambda) \sin \varphi}{(1 + \lambda + \lambda \cos \varphi)^2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

2°. Если $\lambda > 13$, то движение обруча представляет собой чистое качение без проскальзывания лишь на интервале $\varphi \in [0, \varphi_*]$, в соответствии с формулами (1), где $\varphi_* = \arccos z_*$, а z_* является наибольшим отрицательным корнем на интервале $z \in [-1, 0]$ кубического уравнения:

$$z^3 \lambda^3 + z^2 (2\lambda^3 + \frac{5}{2} \lambda^2) + z (\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda) + (1 + 3\lambda + \frac{5}{2} \lambda^2) = 0, \quad (2)$$

Дальнейшее движение обруча является качением с проскальзыванием и происходит при **нулевой** нормальной силе реакции и **ненулевой** силе трения скольжения (т. е. касательной силе реакции), причем точка контакта обруча с плоскостью скользит в сторону движения обруча. Закон движения обруча определяется уравнением:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[(\cos \varphi_* - \cos \varphi) \frac{2g}{r} \frac{\lambda + 1}{\lambda} + \dot{\varphi}_*^2 \sin^2 \varphi_* \right], \quad \varphi \geq \varphi_* \quad (3)$$

где $\dot{\varphi}_*^2$ определяется из (1) при $\varphi = \varphi_*$.

Такое движение обруча закончится до достижения значения $\varphi = \pi$, и окрестность $\varphi = \pi$ обруч будет проходить в режиме чистого качения. Дальнейшее движение обруча представляет собой колебательный процесс и здесь не рассматривается. Кроме того, предположение схода с связи (т. е. «подпрыгивание» обруча) при $\varphi > \varphi_*$ приводит к парадоксу (Пэнлеве) и является, следовательно, неприемлемым.

2.2. Рассмотрим случай конечного коэффициента трения ($k < \infty$). Тогда справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2. Пусть $k < \infty$ и λ достаточно велико ($\lambda \rightarrow \infty$). Тогда:

1°. Если $k < 1$, то движение обруча представляет собой чистое качение без проскальзывания вплоть до значения $\varphi = \varphi_1$, определяемого формулой

$$\varphi_1 = \arccos \left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2} \right), \quad (4)$$

■ Составление уравнений равновесия

Постановка задачи

Ввод исходных данных

Отключение сообщений об использовании позиции обозначений, загрузки необходимых пакетов

```
Off[Message];
DeclarePackage["Graphics`Legend`", {"ShowLegend", "LegendPosition"}];
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`;
```

Ввод исходных данных

```
in[0] = g1 = 9.7; g2 = 4.3; g3 = 15.7; a = 0.532;
      beta = 1.053; phi = 0.79; lambda = 1;
      rad1 = .36; rad2 = .72;
```

Составление уравнений равновесия

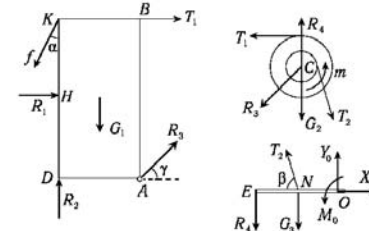


Рис. 2

Освободим систему от внешних и внутренних связей, заменив их реакциями связей, как показано на рис. 2, и запишем систему уравнений равновесия всей конструкции в виде уравнений равновесия прямоугольной пластины, блока, балки (уравнения моментов пластины, блока, балки составлены относительно точек A, C, N соответственно).

```
in[1] = eqns = {x1 + x3 Cos[phi] + t1 - t2 Sin[a] == 0,
               x2 + x3 Sin[phi] - t2 Cos[a] - g1 == 0,
               a x3 (Cos[phi] + Sin[phi]) - a t1 - a t2 Sin[a] - .5 a g1 == 0,
               -x3 Cos[phi] - t1 + t2 Cos[beta] == 0,
               -x3 Sin[phi] - t4 - t2 Sin[beta] - g2 == 0,
               t1 rad1 - t2 rad2 + m == 0, -t2 Cos[beta] + mo == 0,
               -t4 + t2 Sin[beta] - y0 - g3 == 0, t4 - y0 - mo == 0};
TableForm[Table[StringForm["-0.:", eqns[{i, 1}], {i, 9}]]]

Null

Out[9] TableForm[
-0.507258 t1 + x1 + 0.702845 x3 + t1 == 0;
-8.7 - 0.861794 t2 + x2 + 0.710353 x3 == 0;
-4.35 + 0.507258 t1 + 1.4142 x3 - t1 == 0;
-0.702845 x3 - t1 + 0.494967 t2 == 0;
-4.3 - 0.710353 t2 + t4 - 0.868912 t2 == 0;
m + 0.72 t1 - 0.36 t2 == 0;
-0.494967 t2 + x0 == 0;
-15.7 - t4 + 0.868912 t2 + y0 == 0;
mo + t4 + y0 == 0;

В качестве проверочного приема уравнение равновесия относительно проекций сил на ось Oy для всей конструкции, освобожденной только от внешних связей
in[0] = A = x2 - y0 - t2 Cos[a] - g1 - g2 - g3;
StringForm["-0.:", A]

Out[1] = -28.7 - 0.861794 t2 + t2 + y0 == 0;
```

■ Решение уравнений равновесия

■ Выражение реакций из уравнений равновесия через параметры f и m с помощью функции Solve (первый способ)

```

v[3]=
x1 = x = {r1, r2, t1, r3, xo, yo, r4, t2, mo};
varnum = {"r1", "r2", "t1", "r3", "xo", "yo", "r4", "t2", "mo"};
x = x /. Solve[eqns, x];
StringForm["X = " + " ", varnum // MatrixForm, Table[StringForm["", x[[1, #]]], {1, 9}] // MatrixForm

```

$$\text{Null}^2 X = \begin{pmatrix} r1 & 4.22083 + 0.0150621 f - 4.05541 m \\ r2 & 0.65668 + 0.866846 f - 1.36011 m \\ t1 & -4.26376 + 0.497201 f + 2.70776 m \\ r3 & 0.0609834 + 0.00711134 f + 1.91469 m \\ xo & -4.22083 + 0.492196 f + 4.05541 m \\ yo & 20.0433 - 0.00505156 f + 1.36011 m \\ r4 & -3.06634 + 0.858996 f + 0.47936 m \\ t2 & -0.52751 + 0.994402 f + 8.19329 m \\ mo & -16.977 - 0.853945 f - 9.83947 m \end{pmatrix};$$

■ Нахождение общего решения уравнений равновесия матричным методом (второй способ)

Преобразование уравний равновесия к матричному виду $A X = f A_f m A_m + B$.

Получиме матриц A, A_f, A_m, B

```

v[4]=
matcqs = LinearEquationsToMatrix[eqns,
Join[x1, {f, m}]];
matA = TakeColumns[matcqs][[1], 9];
aF = TakeColumns[-matcqs][[1], {10}];
am = TakeColumns[-matcqs][[1], {11}];
b = matcqs[[2]];

```

Запишем уравний равновесия в матричном виде

```

v[5]=
StringForm["" + "X" + " = f" + " m" + " + " + " ", matA // MatrixForm, varnum // MatrixForm, aF // MatrixForm,
am // MatrixForm, b // MatrixForm]

```

$$\begin{pmatrix} 1. & 0 & 1. & 0 & 0.703845 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1. & 0 & 0 & 0.710353 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1. & 1. & 4.442 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1. & -0.703845 & 0 & 0 & 0 & 0.494967 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.710353 & 0 & 0 & 1. & -0.868912 & 0 \\ 0 & 0 & 0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 0 & 0 & -0.494967 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & -1. & 0.868912 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 0 & 1. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ t1 \\ x3 \\ xo \\ yo \\ r4 \\ t2 \\ mo \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0.507258 \\ 0.861794 \\ -0.507258 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 4.25 \\ 0 \\ 4.3 \\ 0 \\ 0 \\ 15.7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нахождение общего решения уравний равновесия в виде $X = f A_f^* m A_m^* + B^*$

Получиме матриц $A^{-1}, A_f^*, A_m^*, B^*$

```

v[6]= a1 = Inverse[matA];
aF1 = a1 . aF;
am1 = a1 . am;
b1 = a1 . b;

```

Запишем общего решения уравний равновесия в виде $X = f A_f^* m A_m^* + B^*$

```

v[7]= StringForm["X = " + " f" + " m" + " + " + " ", varnum // MatrixForm, aF1 // MatrixForm, am1 // MatrixForm, b1 // MatrixForm]

```

$$X = \begin{pmatrix} r1 \\ r2 \\ t1 \\ r3 \\ xo \\ yo \\ r4 \\ t2 \\ mo \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0.0150621 \\ 0.866846 \\ 0.497201 \\ -0.00711134 \\ 0.492196 \\ -0.00505156 \\ 0.858996 \\ 0.994402 \\ -0.853945 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} -4.05541 \\ -1.36011 \\ 1.91469 \\ 4.05541 \\ 1.36011 \\ 1.36011 \\ 0.47936 \\ 8.19329 \\ -9.83947 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.22083 \\ 0.65668 \\ -4.26376 \\ 0.0609834 \\ -4.22083 \\ 20.0433 \\ -3.06634 \\ -8.52751 \\ -16.977 \end{pmatrix}$$

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ СУХОГО ТРЕНИЯ

В статье рассматривается классическая задача о плоском движении неуравновешенного обруча (диска) по шероховатой горизонтальной плоскости. Обсуждаются переходы качения в скольжение (или наоборот), а также некоторые парадоксальные ситуации. Подобные задачи рассматривались в работах [1–3].

I. Постановка задачи

К однородному круговому обручу массы M , который может катиться (вообще говоря, с проскальзыванием) по горизонтальной шероховатой плоскости, жестко прикреплен точечная масса m (см. рис. 1). В начальный момент обруч покоился, и масса m занимала наивысшее положение, а затем пренебрежимо малый импульс вывел систему из положения этого равновесия. Считая заданным коэффициент трения k при контакте обруча с плоскостью, исследовать движение системы.

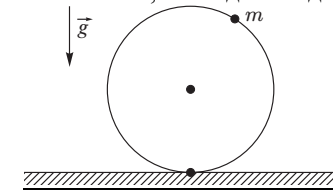


Рис. 1

II. Формулировка результатов

Введем безразмерный параметр $\lambda = m/M$, и пусть r — радиус обруча, φ — обобщенная координата, характеризующая угол поворота обруча, отсчитываемый от вертикали.

2.1. Рассмотрим случай бесконечного коэффициента трения ($k = \infty$). Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $k = \infty$. Тогда:

1°. Если $\lambda \leq 13$, то движение обруча представляет собой чистое качение без проскальзывания, а угловая скорость и угловое ускорение даются формулами:

Литература

1. Локшин Б.Я., Привалов В.А. Влияние параметров системы "груз—парашют" на устойчивость вертикального движения. // Парашюты и проникаемые тела. М., 1980.
2. Привалов В.А. Об установившихся движениях тяжелого осесимметричного тела в сопротивляющейся среде. // Изв. АН СССР, МТТ, 1988. № 3.
3. Лосяцкая М.И., Привалов В.А. Режимы снижения осесимметричного тяжелого тела в воздухе // Механика в авиации и космонавтике. Сб. статей под ред. С.В.Челомея. М., Машиностроение, 1995
4. Бугрова М.И., Привалов В.А. Нелинейные колебания тела в свободном падении в атмосфере. // Сб. научно-методических статей. Теоретическая механика. М.: Изд-во МГУ, 2000.-Вып. 23.
5. Носарев И.М. Аэродинамические исследования парашютов при различных углах атаки. // Труды ЦАГИ. 1976, вып. 1735.
6. Чуркин В.М. Анализ динамики движения парашютной системы в продольной плоскости. // МАИ. Некоторые вопросы механики. Теоретический сборник научных трудов ин-та. Вып. 460, М., 1978.
7. Бочкарев А.Ф., Андреевский В.В., Белоконов В.М. и др. Аэромеханика самолета. М: Машиностроение, 1977.

■ Определение активных сил, при которых нити находятся в натяжении, и вычисление реакций

- Составление неравенств, определяющих условия натяжения нитей, задание параметров, необходимых для вычисления
- Решение неравенств, определяющих условия натяжения нитей

Задание количества и нахождение точек, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} T_1 > 0 \\ T_2 > 0 \end{cases}$ в области $\{(f, m) : f_{\min} \leq f \leq f_{\max}, m_{\min} \leq m \leq m_{\max}\}$

```

[m] =
n1lv = 2;
coordp = (f, m) / FindInstance[{{t1 > 0.66 t2 > 0.66 fmin < f < fmax 66 mmin < m < mmax}, {f, m}, n1lv]
Output: {{(-72., 31.5), (21., 10.)}}
    
```

- Выбор параметров f, m , при которых нити находятся в натяжении, вычисление реакций и погрешности решения
- Графическое представление решения задачи

Результаты решения задачи выводятся в аналитическом виде

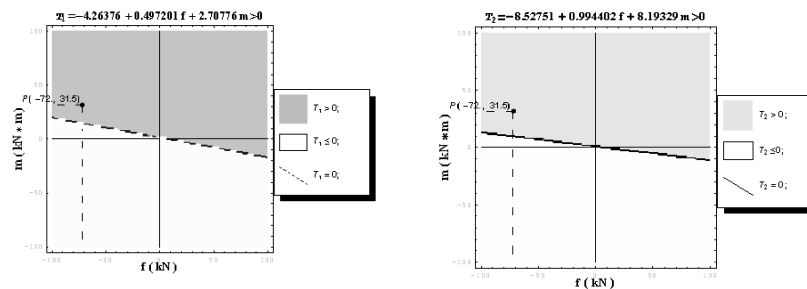
$$P(-72., 31.5) \in \mathcal{D} = \left\{ (f, m) : \begin{cases} T_1 = -4.26376 + 0.497201 f + 2.70776 m > 0 \\ T_2 = -8.52751 + 0.994402 f + 8.19329 m > 0 \end{cases} \right\};$$

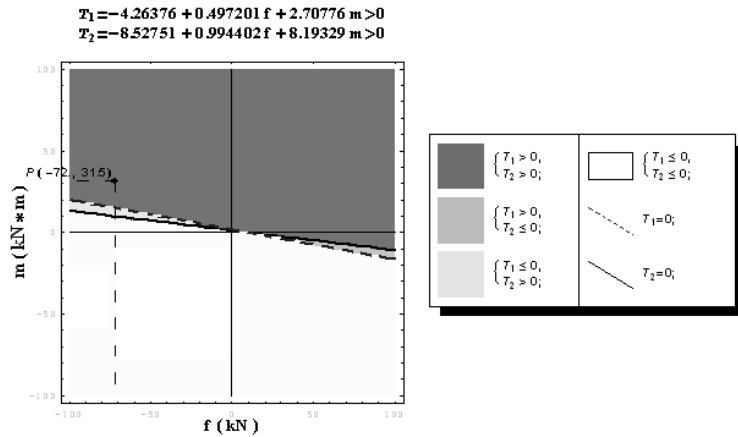
$$X(-72., 31.5) = (R_1, R_2, T_1, R_3, X_0, Y_0, R_4, T_2, M_0)^T =$$

$$= (-124.609 \quad -96.6 \quad 45.232 \quad 60.886 \quad 88.086 \quad 63.25 \quad 202.186 \quad 177.964 \quad -265.436)^T;$$

$$\delta = 1.297 \times 10^{-15} \quad \%;$$

а также в виде областей плоскости параметров





Литература

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р., Курс теоретической механики. Учебник. СПб: Лань, 2002. 736с.
2. Корецкий А.В., Осадченко Н.В. Решение задач статики на персональном компьютере: Методическое пособие. – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 64 с.
3. Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ. М.: Высш. шк., 1986.

$$a_4 = \frac{1}{F} \left(w + \frac{3}{1+a} \right) \frac{1}{1+a} + w_c \cos \alpha_0 \left(1 - \frac{tg^2 \alpha_0}{1+a} \right) + s(3w_i + 1) +$$

$$+ \frac{w+3}{1+a} \cos \alpha_0 + \sin \alpha_0 tg \alpha_0 \frac{5 + tg^2 \alpha_0}{(1+a)^2}$$

$$a_6 = \frac{1}{F} \frac{4w}{(1+a)^2}, \quad a_5 = a_6 + \frac{1}{F} \frac{2s}{\cos \alpha_0 (1+a)} + 2sw_i.$$

Можно выписать условия асимптотической устойчивости с помощью критерия Гурвица. Провести границу области устойчивости в многомерном пространстве параметров системы не удастся из-за их сложности. Но одно необходимое условие устойчивости можно указать сразу. Известно, что для устойчивости необходимо, чтобы коэффициенты характеристического уравнения были положительны. Пользуясь выражением для свободного члена a_6 , заключаем, что выполнение неравенства

$$K'(\alpha_0) \left(1 + \frac{A}{mr^2} \right) > -tg' \alpha_0 \quad (7)$$

является одним из необходимых условий устойчивости винтового движения. Смысл его состоит в том, что в некоторой окрестности нетривиального решения α_0 уравнения (5) не существует других решений. Можно привести примеры тел с такими параметрами, для которых нарушение условия (7) влечет за собой неустойчивость винтового движения.

Пользуясь выражениями для коэффициентов a_0, \dots, a_6 характеристического уравнения, можно ответить на вопрос, устойчиво ли винтовое движение для конкретных значений параметров. Так, для аэродинамических характеристик, соответствующих круглому парашюту, существуют параметры, при которых винтовое движение устойчиво, и, значит, область устойчивости непуста. Этот вывод подтверждается численным интегрированием нелинейных дифференциальных уравнений движения.

Работа выполнялась при поддержке грантов РФФИ (№№ 05-08-01378 и 06-01-00079).

предположении, что полная аэродинамическая сила принадлежит плоскости симметрии самолета выписаны соотношения, совпадающие с (3), (4). Смысл этих балансирующих уравнений в том, что в установившемся штопоре массовые силы (вес и сила инерции) уравновешиваются аэродинамическими силами, а аэродинамические моменты моментами сил инерции.

Устойчивость винтового движения.

Составим уравнения первого приближения относительно частного решения, соответствующего винтовому установившемуся движению.

Пусть

$$a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0$$

характеристическое уравнение. Введем обозначения: $F = \frac{gr}{V_0^2}$ – аналог

числа Фруда (из (2) получаем, что $F = 0,5 \frac{\rho S r}{m} C_x(\alpha_0)$, а значит,

$F > 0$), $a = \frac{A}{mr^2}$ – безразмерный момент инерции (величина, обратная

параметру χ), $w = \chi \left(K'(\alpha_0)(1+a) + \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} \right)$, $w_c = w - \frac{C'_y(\alpha_0)}{C_x(\alpha_0)}$,

$$w_i = w + 1 - \frac{tg^2 \alpha_0}{1+a}, \quad s = \frac{1}{1+a} (3 \cos \alpha_0 + 1 / \cos \alpha_0).$$

Тогда коэффициенты характеристического уравнения можно представить в виде:

$$a_0 = F, \quad a_1 = F(w - w_c \sin^2 \alpha_0 + 4 + \frac{1}{1+a} \sin^2 \alpha_0),$$

$$a_2 = a_1 + F(2w_i - 1) + w_c \cos \alpha_0 + s,$$

$$a_3 = 2w_i F + w_c \cos \alpha_0 \left(2 - \frac{tg^2 \alpha_0}{1+a} \right) + w \frac{\cos \alpha_0}{1+a} (5 + tg^2 \alpha_0) + 3s + \frac{\sin \alpha_0 tg \alpha_0 (2+a)}{(1+a)^2} + \frac{10 \cos \alpha_0}{1+a}$$

УДК 531

В.Е. Павловский, Т.О. Невенчанная, Е.В. Пономарева**

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
*Астраханский государственный технический университет

ДИСТАНЦИОННАЯ ОБУЧАЮЩАЯ СИСТЕМА ПО МЕХАНИКЕ: КОНЦЕПЦИЯ, СТРУКТУРА, ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

В Астраханском государственном техническом университете (АГТУ) в рамках договора о сотрудничестве между АГТУ и механико-математическим факультетом МГУ разработан электронный Интернет-учебник по теоретической механике для технических ВУЗов.

Актуальность работы определяется становлением дистанционного обучения, быстрым развитием информационных и телекоммуникационных технологий и целесообразностью их применения для активизации учебного процесса, особенно в области точных наук, к которым относится теоретическая механика.

Целью работы является создание на базе современных информационных технологий дистанционной обучающей системы по теоретической механике, обеспечивающей как организацию конкретного процесса индивидуального и группового обучения по теоретической механике для технических ВУЗов, так и возможность формирования вариантов электронных учебных курсов по механическим дисциплинам, что особенно актуально в настоящее время, когда происходит объединение курса теоретической механики с разделами других механических дисциплин.

Задачами работы являются:

- создание общей схемы дистанционной обучающей системы «Теоретическая механика для технических ВУЗов»;
- реализация сетевого электронного учебника и его локального аналога;
- обеспечение возможности развития системы электронных курсов механических дисциплин в рамках разработанной концепции.

1. О концепции дистанционной обучающей системы

Построена концепция дистанционной обучающей системы по механике (на примере теоретической механики для технических ВУЗов),

выполненной в виде электронного Интернет-учебника комплексного методического назначения, в том числе, разработана структура учебника, двух его версий (локальной и дистанционной) и программных приложений [1].

Разработаны следующие программные приложения учебника:

- «*Теоретический материал*», содержащее теорию изучаемой дисциплины с примерами решений типовых задач. Теоретический материал учебника представлен разделами: «Кинематика», «Статика», «Динамика точки», «Динамика системы», «Аналитическая механика», «Расчет механизмов». Заметим, что первые пять разделов входят в состав традиционного курса теоретической механики. В состав созданного учебника включен также раздел «Расчет механизмов», в котором даны общие понятия механики, описан междисциплинарный подход к расчету механизмов, позволяющий получать и использовать для решения задач знания из разных областей [2, 3];

- «*Тесты и задачи*», позволяющее приобрести навыки в решении задач и осуществить самоконтроль/контроль знаний. Приложение «Тесты и задачи» в составе учебника содержит 215 тестовых заданий по разделам теоретической механики. Локальная версия учебника дополнительно содержит модули самоконтроля, содержащие 82 тестовых задания. Общее количество тестовых заданий в приложении равно 297;

- «*Практикум*», содержащее набор компьютерных РГР, тематически подобранных в соответствии с этапами комплексного расчета механизмов [2, 3]. Построена структура типовой расчетно-графической работы: каждая РГР включает название и цель работы, описание структуры документа, краткую теорию по изучаемой теме, методические указания по выполнению, условие задачи, варианты заданий, примеры решения.

Разработаны две версии учебника: локальная и дистанционная (рис. 1).

уравнение (5) имеет, по меньшей мере, два ненулевых корня, одинаковых по модулю и противоположных по знаку. Если неравенство не выполняется, то уравнение (5) может иметь ненулевые корни, а может и не иметь. Отметим, что это неравенство противоположно по смыслу неравенству (2). Значит, винтовое движение существует вне области устойчивости тривиального движения.

Для угловой скорости вращения плоскости угла атаки при винтовом движении получаем

$$\dot{\phi}_0^2 = \frac{g}{r \cos \alpha_0} \frac{\chi}{1 + \chi} \quad (6)$$

Если рассмотреть сферический маятник с длиной $l = r(1 + \chi)/\chi$, то круговое коническое движение с углом $2\alpha_0$ при вершине конуса он будет совершать с угловой скоростью, квадрат которой равен $\frac{g}{l \cos \alpha_0}$.

Эта угловая скорость совпадает с $\dot{\phi}_0$, определяемой (6). Таким образом, существует аналогия между винтовым движением тела в сопротивляющейся среде и движением конического маятника. Угловые скорости вращения вокруг вертикали одинаковы, но для винтового движения угол α_0 должен удовлетворять трансцендентному уравнению, решения которого зависят не только от массовых, геометрических, но и аэродинамических характеристик тела, тогда как для конического маятника угол при вершине конуса определяется начальными условиями.

Сравним величины скоростей снижения при винтовом и тривиальном движениях. Для винтового движения стационарное значение скорости определяется из (3). Для тривиального движения имеет место такое же соотношение, но с $\alpha_0 = 0$. Поскольку для осесимметричных тел для небольших углов атаки $C_x(0) < C_x(\alpha_0)$ (функция $C_x(\alpha)$ имеет в нуле локальный минимум), то можно отметить, что при винтовом движении скорость меньше, чем при тривиальном движении.

Построенное винтовое движение может служить наиболее простой моделью штопора летательного аппарата. В [7] штопор самолета определяется как снижение по крутой спирали малого радиуса с одновременным вращением вокруг трех его осей. В [7] рассмотрен, в частности, установившийся вертикальный штопор, для которого принимается, что вектор угловой скорости совпадает по направлению с вектором скорости полета, который составляет небольшой угол с вертикалью. В

ных движений тела с вертикально ориентированной осью симметрии с ненулевым углом атаки и произвольной ориентацией плоскости симметрии относительно вертикали. Такое движение назовем планированием. Сила тяжести при планировании уравнивается силой воздействия среды. Как показано в [2], пространственное планирование является неустойчивым.

Итак, вне области устойчивости тривиального движения, выделяемой условием (2), все поступательные установившиеся движения неустойчивы. Поэтому представляет интерес выделение других установившихся движений.

Винтовое движение.

Отказ от ограничения о поступательном характере движения дает еще один тип движений. Его можно описать так [3]: центр давления тела равномерно снижается по вертикали со скоростью V_0 , центр масс движется вокруг вертикали по кругу радиуса $r \sin \theta_0$, описывая в пространстве винтовую линию. Плоскость угла атаки, т.е. плоскость, образованная осью симметрии и вектором скорости центра давления, оставаясь вертикальной, вращается с постоянной скоростью $\dot{\phi}_0$, угол между осью симметрии тела и вертикалью остается неизменным и равен θ_0 . Назовем такое установившееся движение винтовым. Для винтового движения выполняются следующие соотношения:

$$mg = 0.5\rho S V_0^2 C_x(\alpha_0) \quad (3)$$

$$-m r \dot{\phi}_0^2 \sin \theta_0 = 0.5\rho S V_0^2 C_y(\alpha_0) \quad (4)$$

$$(1 + 1/\chi)K(\alpha_0) + tg\alpha_0 = 0. \quad (5)$$

Первое из этих соотношений означает, что сила веса уравнивается силой лобового сопротивления. Второе соотношение выражает тот факт, что подъемная сила равна и направлена противоположно равнодействующей сил инерции. Трансцендентное уравнение (5) определяет установившееся значение угла атаки α_0 . Это уравнение всегда имеет нулевое решение, однако существование рассматриваемого установившегося движения зависит от наличия ненулевых решений. Рассмотрим взаимное расположение графиков функций $K(\alpha)(1+1/\chi)$ и $-tg\alpha$. При выполнении неравенства

$$K'(0)(1+1/\chi) < -1$$



Рис. 1. Структура электронного Интернет-учебника

Локальная версия создана для работы с ней на автономной машине и состоит из трех приложений. Для приложения «Теоретический материал» разработаны две реализации: *реализация 1* – курс лекций, где теоретический материал излагается последовательно; *реализация 2* – конспект-справочник, структурированный по смысловым элементам с использованием гипертекстовых переходов.

Локальная версия представлена на CD-дисках, ее объем составляет 358 МБ.

Дистанционная версия предполагает работу посредством глобальной информационной сети Интернет и структурно содержит также три приложения. Приложение «Теоретический материал» дистанционной версии выполнено в виде курса лекций по теоретической механике. Приложения «Тесты и задачи» и «Практикум» обеих версий практически идентичны, различие заключается в способе работы с ними (автономная машина, локальная сеть или сеть Интернет).

Дистанционная версия электронного Интернет-учебника обеспечивает:

- дистанционное дифференцированное обучение;
- дистанционную разработку версии учебника в сети Интернет;
- формирование общего массива элементов знаний по механике;

- создание на основе сформированного массива знаний по механике базы данных для новых механических курсов разной структуры, содержания.

Дистанционная версия учебника разрабатывалась через Интернет в системе дифференцированного Интернет-обучения «Гекадем», расположена на сервере www.edu.buk.irk.ru. Размер дистанционной версии 14,6 МБ.

Обе версии (локальная и дистанционная) электронного учебника созданы в совместимых форматах, которые являются стандартами Web.

2. Программная реализация приложений учебника

Решены вопросы программной реализации учебника, включающие:

- выбор форматов (с учетом их взаимной совместимости и возможности передачи по сети Интернет) и соответствующих программных средств, реализована технологическая цепочка разработки учебника;
- обеспечение возможности локальной и дистанционной работы с теоретическим материалом, модулями для контроля и самоконтроля знаний, расчетным практикумом, анимированными компьютерными моделями механических объектов, построенных на основе математических моделей и иллюстрирующих полный цикл движения;
- модификацию учебника, пополнение новым учебным материалом.

2.1. Технология создания приложения «Теоретический материал»

Описаны технологические этапы создания приложения «Теоретический материал», построенного как система, состоящая из набора взаимосвязанных HTML-страниц, существенно обогащенных нетекстовыми компонентами.

Рассмотрены способы получения гипертекстового html-формата, создания компьютерных Web-иллюстраций, анимированных моделей механизмов в средах математического пакета Maple, системы автоматизированного проектирования Solid Works совместно с программным комплексом Dynamic Designer Motion. Разработаны и применяются в учебнике двухмерные и трехмерные анимированные модели (рис. 2) механизмов спарника, эллипсографа, кулисных механизмов с качающейся и вращающейся кулисой, синусного механизма, планетарных

коэффициенты (соответственно четная и нечетная функции α). Такая математическая модель воздействия среды соответствует экспериментальным данным для круглого или конусного парашюта [5].

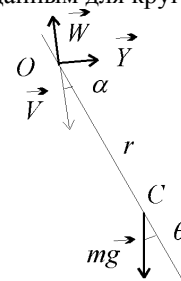


Рис. 1

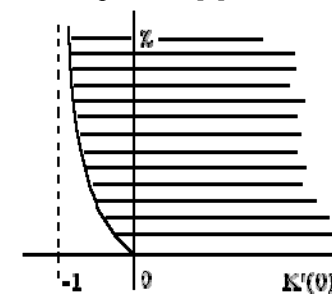


Рис. 2

Поступательные установившиеся движения.

Рассмотрим поступательные, прямолинейные, равномерные движения тела. Вопрос о количестве таких движений связан с существованием решений уравнения

$$K(\alpha_0) + tg\alpha_0 = 0 \quad (1)$$

Значение $\alpha_0 = 0$ всегда является решением этого уравнения. Это решение соответствует вертикальному равномерному снижению тела с вертикально ориентированной осью симметрии. Назовем такое движение тривиальным [1], [6]. Стационарное значение скорости определяется из условия равенства веса и силы сопротивления. Условие асимптотической устойчивости тривиального движения имеет вид [1]

$$K'(0)(1+1/\chi) > -1 \quad (2)$$

где $K'(0)$ — производная при $\alpha=0$ функции аэродинамического качества $K(\alpha) = C_y(\alpha)/C_x(\alpha)$, $\chi = mr^2/A$, A — экваториальный момент инерции. На верхней полуплоскости параметров $(K'(0), \chi)$ (поскольку имеют смысл только положительные значения χ) это неравенство выделяет область устойчивости, расположенную правее гиперболы $\chi = -1 + 1/(K'(0) + 1)$ (рис. 2).

Если $K'(0) < -1$, то вследствие нечетности функции качества $K(\alpha)$ уравнение (1) имеет по меньшей мере два ненулевых решения α_0 и $-\alpha_0$. В этом случае существует множество поступательных равномер-

М.И. Бугрова¹, В.А. Привалов²

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана

² Институт механики МГУ

О ВИНТОВОМ ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В статье рассматривается свободное падение тяжелого осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде. воздействие среды формируется на основе квазистатической модели. вопросы существования и устойчивости поступательных установившихся движений рассмотрены в [1],[2]. В [3] получены условия существования установившегося движения, названного винтовым. В статье [4] проведено сравнение характеристик винтового движения и плоскопараллельных колебаний тела. В настоящей статье рассматриваются вопросы устойчивости винтового движения.

Пусть центральный эллипсоид инерции осесимметричного твердого тела является эллипсоидом вращения относительно оси симметрии тела. Будем считать, что обтекание имеет квазистатический характер. Воздействие среды представим в виде равнодействующей \vec{R} , лежащей в плоскости симметрии обтекания и приложенной в некоторой точке O оси симметрии — центре давления. Расстояние между центром давления O и центром масс C — постоянно, обозначим его через r . Момент по оси симметрии носит диссипативный характер, поэтому модуль проекции абсолютной угловой скорости тела на ось симметрии уменьшается. Будем считать эту проекцию равной нулю. Углом атаки α назовем угол между осью симметрии тела и вектором \vec{V} скорости центра давления (рис. 1). Равнодействующую \vec{R} разложим на две составляющие: силу лобового сопротивления \vec{W} (направлена противоположно скорости центра давления \vec{V}) и подъемную силу \vec{Y} (перпендикулярна \vec{V}). Представим эти составляющие в виде:

$$\vec{W} = -0.5\rho S V C_x(\alpha) \vec{V},$$

$$\vec{Y} r \sin \alpha = 0.5\rho S C_y(\alpha) (\vec{V} \times \vec{r}) \times \vec{V},$$

где ρ — плотность среды, S — характерная площадь тела, V — модуль скорости центра давления, \vec{r} — радиус-вектор центра масс относительно точки O , $C_x(\alpha)$ и $C_y(\alpha)$ — безразмерные аэродинамические

механизмов с внутренним и внешним зацеплением. Модели показывают полный цикл движения данных механизмов, являются параметрическими и усложняемыми (кинематические, динамические модели).

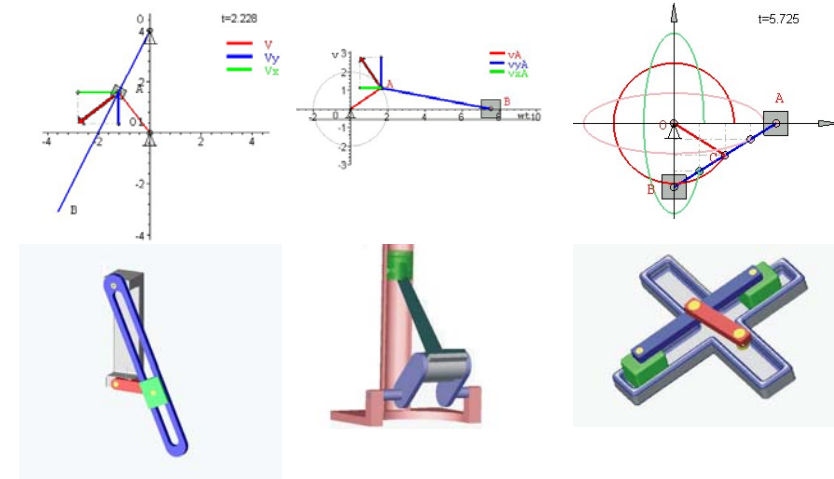


Рис. 2

Реализована дистанционная версия учебника в системе дифференцированного Интернет-обучения «Гекадем», структурно выполненная из необходимого числа учебных блоков (рис. 3), каждому из которых ставятся в соответствие элементы знаний: лекции, РГР, модули контроля знаний, семинары.

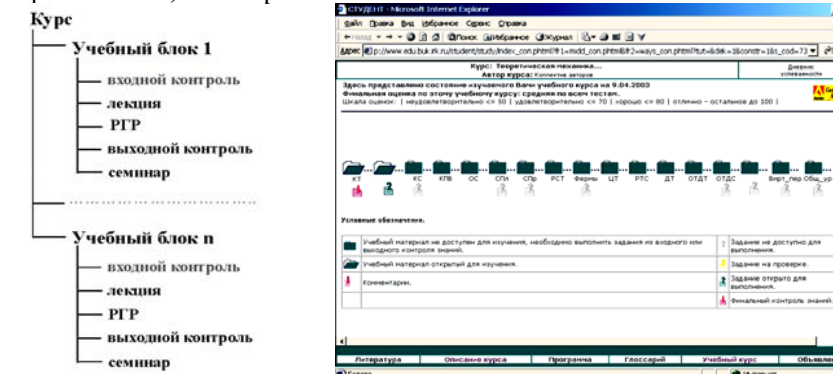


Рис. 3

Для эффективной работы с учебными материалами система позволяет сформировать массив элементов знаний, где хранится весь материал в виде дискретных единиц, из которых формируются курсы с разной структурой, содержанием по «родственным» механическим дисциплинам, например, курсы «Техническая механика», «Прикладная механика» и др. (рис. 4).

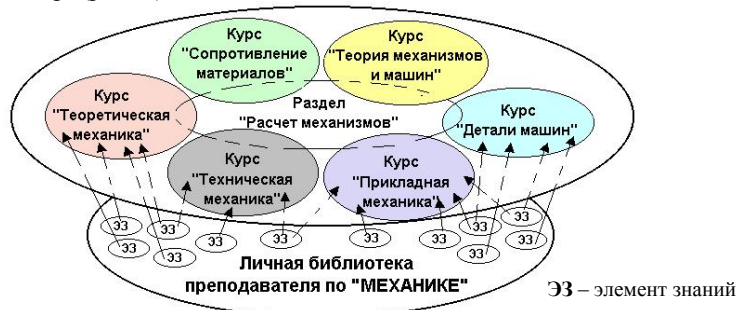


Рис. 4. Формирование механических курсов на основе общего массива элементов знаний

2.2. Технология создания приложения «Тесты и задачи»

Решены вопросы программной реализации модулей самоконтроля и контроля знаний приложения «Тесты и задачи» в сетевой среде и в виде локальной подсистемы.

Программная реализация модуля самоконтроля. Задача проведения самоконтроля знаний обучаемого изначально не требует санкционированного доступа обучаемого к материалам и решена локально, без взаимодействия с Web-сервером, что значительно повышает быстродействие системы. Для реализации системы самоконтроля была использована схема «HTML+JavaScript», основанная на организации в HTML-документе форм и их обработке непосредственно на компьютере обучаемого.

Система контроля знаний выполнена в системе «Гекадем», позволяющей осуществлять индивидуальное и групповое обучение и использовать для проверки знаний тестовые задания следующих типов: «да/нет», «упорядочивание списка», «multiple choice» (многовариантный выбор), «ввод собственного ответа», что оправдано целью охватить как теоретические, так и практические положения курса теоретической механики для технических ВУЗов, сформировать предметные навыки, закрепить полученные знания.

решений разумен в настоящее время как подтверждение аналитичности функций (5).

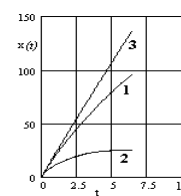


Рис. 6

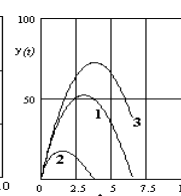


Рис. 7

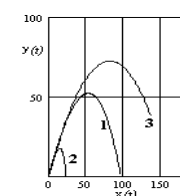


Рис. 8

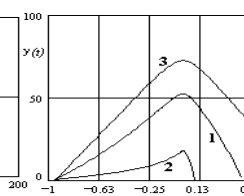


Рис. 9

Контроль достоверности и точности решения задачи (4),(2) может быть проведен как по этим функциям, приведенным в [2] в табличной форме, так и по зависимости $y(R_y)$ фиг.2 работы [2]. Очевидно, что они совпадают с точностью до графического представления функций. Отметим, что в данной работе дополнительно дискретно проанализировано влияние коэффициента сопротивления среды, соответственно увеличенного (кривые 2) и уменьшенного (кривые 3) по сравнению с данными работы [2] на порядок, так как в цитируемой работе акцентировано внимание на существенное усложнение решения задачи при сильно выраженном сопротивлении среды. В предлагаемом алгоритме очевидно, что отмеченный факт никак не сказывается ни на сложности, ни на трудоемкости решения рассматриваемой задачи.

Литература

10. Эйлер Л. Исследование истинной кривой, описываемой брошенными телами в воздухе или в какой-либо другой среде. // Эйлер Л. Исследования по баллистике. М.: Физматгиз. 1961. с. 455-494.
11. Чудинов П.С. О движении материальной точки в среде с квадратичным законом сопротивления. // ПММ. Т.65. В.3. 2001. с. 436-441.
12. Коровайцев А.В., Коровайцева Н.С. Структурный подход обучения методам решения задач динамики. // Сб. тр. Междунар. научно-методич. Конференции. Тула. 2005. с. 54-59.
13. Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами. // Ред. Хитрик М.С., Федоров С.М. М.: Машиностроение. 1972. 231 с.
14. Коровайцев А.В. Нелинейное деформирование тонкостенных элементов конструкций при больших перемещениях и поворотах. // Реферат дисс. М.: 1988. 32 с.

смаатриваемой задаче выраженной жесткости и осциллируемости решения используем только явный подход и не корректируем второй этап алгоритма.

На рис.4-5 показан вид функций $\beta(t)$ и $y(t)$, построенных с помощью графического иллюстратора системы Mathcad-6 по их дискретным значениям в формулах (4-5) с безразмерными периодами 0,2, 0,1, 0,01 и 0,001 (кривые с номерами с 1 по 4). Видно, что кривые 3 и 4 графически неразличимы. Поэтому проводимые ниже параметрические расчеты выполнены при безразмерном периоде дискретности $T_0=0.01$. Достаточность представления функции $\alpha(t)$ ее решетчатым аналогом $\beta(t)$ с позиций инженерной точности очевидна даже для явной функции периода $T_0=0.2$ при также очевидном недопустимом для обычных расчетов загроблении представления функции всего 5 точками на всем исследуемом интервале времени без корректировки второго этапа алгоритма.

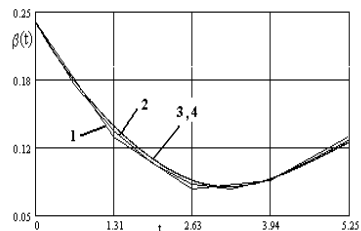


Рис. 4

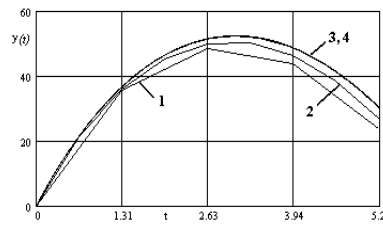


Рис. 5

Решение задачи (1),(2) или ее аналога в классе решетчатых функций (4),(2) после нахождения общего решения уравнений (4), расчета произвольных констант и использования приспособовывания сохраняет вид (5) на втором и последующих шагах и пересчету подлежат только значения V_0 , θ_0 и β .

На рис. 6-9 представлены функции $x(t)$, $y(t)$ и $u(x)$, построенные по формулам (5) при исходных данных:

$$V_0=44.69 \text{ м/с}, \theta_0=1.047, \mu=0.548 \cdot 10^{-3} \text{ с}^2/\text{м}^2, g=9.81 \text{ м/с}^2, m=0.145 \text{ кг}.$$

Отметим, что, несмотря на аналитичность формул (5) их целесообразно строить с помощью компьютера, но этот факт никак не связан ни с численными расчетами, ни с какими-либо погрешностями. Можно по формулам (5) строить функции и вручную, с помощью таблиц или калькулятора, но вряд ли такой способ представлений аналитических

2.3. Технология создания приложения «Практикум»

Решены вопросы программной реализации приложения в локальной и дистанционной версиях: в локальной версии приложение «Практикум» представляет собой объединенную в отдельный блок совокупность РГР, встроенную в состав учебника; дистанционная версия приложения реализована в системе дифференцированного Интернет-обучения «Геакадем», при этом каждая РГР помещается в библиотеку преподавателя, из которой в дальнейшем такая РГР встраивается в структуру дистанционного курса по теоретической механике.

Каждая РГР технологически выполнена в табличном процессоре Microsoft Excel в виде отдельного файла, состоящего из нескольких листов, содержащих текстовый материал, рисунки, формулы, диаграммы (рис. 5).

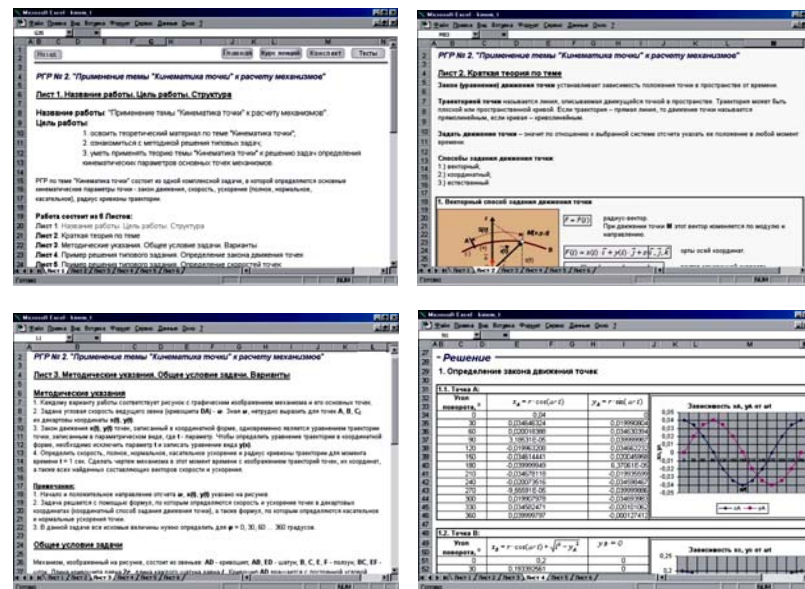


Рис. 5

3. Практическое применение Интернет-учебника

Базовая апробация разработанного электронного Интернет-учебника выявила его основные характеристики:

1) Возможные режимы работы: самостоятельное обучение, сопровождение учебного процесса при традиционной форме обучения, дистанционное обучение.

2) Объем материала, заложенного в дистанционную обучающую систему «Теоретическая механика для технических ВУЗов», соответствует 88-часовой программе изучения курса теоретической механики. Из них 40 часов отведено изучению теоретического материала, 14 часов - на выполнение РГР, 22 часа – работа с тестами и задачами (в том числе, промежуточный и итоговый контроль знаний), 12 часов – семинары.

3) Среднее контактное время работы с системой – 1–1,5 часа на каждое занятие курса, при этом при повторных сеансах работы с системой это время уменьшается. Среднее время прохождения итогового теста по курсу – 1,5 часа.

4) Средний оценочный балл по занятиям составляет 60–70 % от возможного максимума, что свидетельствует о высоком уровне сложности вопросов.

Электронный учебник «Теоретическая механика для технических ВУЗов» может быть полезен студентам для самостоятельного изучения курса теоретической механики и при подготовке к зачетам и экзаменам; студентам дистанционной формы обучения; преподавателям при ведении занятий и при обучении на ФПК; преподавателям, разрабатывающим электронные курсы по механическим дисциплинам для разных специальностей.

С учетом сделанных в ходе испытаний учебника предложений по его доработке базовая версия учебника доработана и подготовлена к эксплуатации.

Литература

1. Павловский В.Е., Невенчанная Т.О., Курганская Г.С., Пономарева Е.В. Концепция, структура, программная реализация электронного Интернет-учебника по теоретической механике. // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН № 39. М., 2003. 28 с.
2. Невенчанная Т.О., Павловский В.Е., Пономарева Е.В. Комплексный расчет механизмов в электронном учебнике по теоретической механике. // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН №38. М., 2003. 32 с.
3. Невенчанная Т.О., Павловский В.Е., Пономарева Е.В. Комплексный расчет механизмов в дистанционном Интернет-учебнике по теоретической механике. // Проблемы механики современных машин: Материалы второй международной конференции / ВСГТУ. - Улан-Удэ, 2003. Т. 1. 172 с. с. 71 – 74.

функции $\alpha(t)$ ее решетчатым аналогом $\beta(t)$ [4]. По определению решетчатая функция существует лишь при дискретных равноотстоящих друг от друга значениях независимой переменной и равна нулю между этими значениями аргумента [4, стр. 63]. Интерпретация этого строгого математического определения может быть различной. Например, с позиций развиваемых алгоритмов дискретной математики решетчатую функцию можно считать кусочно-постоянной функцией в пределах каждого из периодов дискретности. Последняя интерпретация соответствует алгоритму решения задачи с уравнениями (4) рекуррентного типа. С позиций графических иллюстраций результатов расчетов с привлечением аппарата решетчатых функций более логичной представляется замена их на кусочно-линейные функции, что обычно и закладывается в качестве основы различных графопостроителей.

Замена исходной функции $\alpha(t)$ ее решетчатым аналогом $\beta(t)$ позволяет при любом фиксированном периоде решетчатой функции T_0 построить строгое аналитическое решение уравнений (4) по следующему алгоритму:

1) на первом (сколь угодно малом) шаге вычисления аналитического решения уравнений (4) в классе решетчатых функций используем, наряду с начальными условиями (2), и следующие из них условия

$$\alpha(0) = \frac{\mu V_0}{m}, \quad \beta(0) = \frac{\mu V_0}{m}.$$

Получим общее решение в виде

$$x(t) = \frac{V_0 \cos \theta_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t}); \quad y(t) = \left(\frac{V_0 \sin \theta_0}{\beta} + \frac{g}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\beta t}) - \frac{g}{\beta} t \quad (5)$$

2) на втором и последующих шагах решения $\beta(t)$ отстает от функции $\alpha(t)$ на период решетчатой функции T_0 , то есть вычисляется по значению функции $\alpha(t)$ в конце предыдущего шага расчета.

Отметим, что получаемый при этом алгоритм весьма близок к реализации метода дифференцирования по параметру, а, следовательно, может быть как явным, так и неявным [5]. При этом базовые решения как явной, так и неявной модификаций метода по-прежнему представляются только аналитическими функциями, хотя в модификации неявного метода без компьютера не обойтись в любом случае. В последующих расчетах для простоты, а также в связи с отсутствием в рас-

УДК 531.36

Б.Я.Локиин, Ю.М.Окунев

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова (НИИМ МГУ)

О ДВИЖЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО ШАРА В ВОЗДУШНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрена задача динамики твердого тела в сопротивляющейся среде. Показано, что поступательное прямолинейное торможение тела произвольной формы невозможно. Для тел специальной формы такое торможение может существовать, но оно неустойчиво. Проведен детальный анализ фазового портрета динамической системы, описывающей движение неоднородного шара.

В последнее время в связи с потребностями построения оценок траекторий движения метеоритов (болидов) и их осколков возрос интерес к задаче о движении так называемых плохо обтекаемых тел в воздушной среде [1, 2]. Моделирование полета болидов в полном объеме требует учета многих факторов (процессы теплообмена, унос массы, изменение формы тела, формирование нестационарного аэродинамического воздействия и т.д.). Естественно, возникает вопрос: какую информацию о свойствах движения такого тела можно получить с помощью методов классической механики в рамках «простых» постановок задачи?

Задача о движении с большой скоростью твердого недеформируемого тела в однородной неподвижной среде под действием сил со стороны среды в отсутствии сил другой природы (задача о торможении) уже обсуждалась в [2]. При описании аэродинамического воздействия на тело учитывались лишь основные качественные особенности его формирования. Было показано, что для тела с формой «общего положения» режим поступательного прямолинейного торможения невозможен.

1. Анализ свойств движения «в большом» – далеко не простая задача, так как требует подробного описания заведомо нелинейного аэродинамического воздействия. Поэтому ограничимся телом простой формы – шаром, центр масс G которого не совпадает с геометрическим центром O (Рис.1). В качестве фазовых координат математической модели движения выберем угловую скорость Ω тела, величину V скоро-

Применим при этом общий двенадцатиэтапный алгоритм решения [3]. Тогда получаем совокупность трех различных расчетных схем (рис. 1-3): схемы начального положения материальной точки, кинематической и силовой схем согласно правилам положительных знаков.

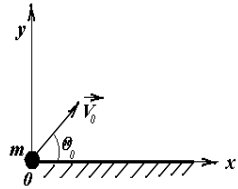


Рис. 1

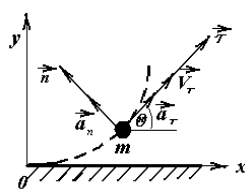


Рис. 2

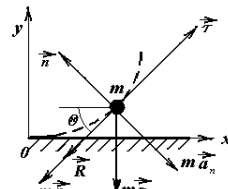


Рис. 3

Аналогично идеологии конечного элемента для систем с произвольной топологией при построении разрешающей системы, выделим в векторе состояния два независимых подвектора, что соответствует этапу 2 алгоритма работы [3]. В неподвижной декартовой системе координат силовая расчетная схема задачи получает простейший вид, которому соответствуют две условно раздельные задачи Коши:

$$m\ddot{x} = -R_x; \quad m\ddot{y} = -R_y - mg, \quad (1)$$

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = V_0 \cos \theta_0; \quad y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = V_0 \sin \theta_0. \quad (2)$$

Здесь m - масса точки, x, y - декартовы координаты текущего положения точки, R_x, R_y - компоненты силы сопротивления движению, g - ускорение свободного падения, V - скорость движения точки, θ - угол наклона траектории движения точки к горизонтальной, совпадающей с осью x .

Отметим, что структура уравнений (1) удобна для их автономного решения, но при квадратичном законе сопротивления

$$R_x = -\mu V \dot{x}; \quad R_y = -\mu V \dot{y}, \quad (3)$$

этому мешает нелинейная зависимость компонент R_x, R_y от компонент скорости движения \dot{x}, \dot{y} .

Однако однородная часть уравнений (1) имеет одинаковую структуру при записи в виде

$$\ddot{x} + \alpha(t)\dot{x} = 0; \quad \ddot{y} + \alpha(t)\dot{y} = g; \quad \alpha(t) = \frac{\mu V(t)}{m}. \quad (4)$$

Полнота задач (2),(4) позволяет сразу же перейти к их решению. При построении аналитического решения используем представление

сти точки G и два угла (например, угол атаки и угол скольжения), определяющие ориентацию вектора V относительно связанной с шаром системы координат.

Для описания воздействия среды на шар примем квазистатическую модель: линия действия аэродинамической силы R проходит через центр O шара, величина этой силы пропорциональна квадрату скорости точки O .

Предположим дополнительно, что одна из главных центральных осей инерции шара расположена ортогонально линии OG . В этом случае существует множество начальных условий движения, при которых шар совершает плоско-параллельное движение, линия OG перемещается в одной и той же плоскости. Ограничимся изучением семейства траекторий плоско-параллельного движения шара. Отметим, что сформулированная задача относится к числу наиболее прозрачных по постановке задач теоретической механики о взаимном влиянии поступательного и вращательного движений тела.

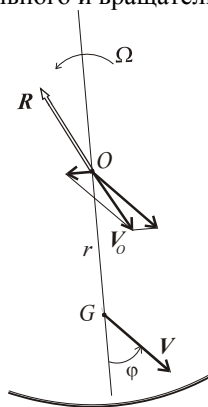


Рис.1

Введем следующие обозначения (Рис.1):

m , J - масса шара и его центральный момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости движения,

V - скорость центра масс шара,

V_0 - скорость центра шара,

R - величина результирующей аэродинамической силы, $R = sV_0^2$, где $s = const$,

r - расстояние между центром шара и центром тяжести ($|OG|$),

Ω - угловая скорость вращения тела вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения,

φ - угол между вектором V скорости центра масс и линией OG (угол атаки),

\dot{x} - производная по времени t от координаты x .

Уравнения плоско-параллельного движения тела имеют вид:

$$\begin{cases} m\dot{V} = -sV_0(V - r\Omega \sin \varphi), \\ mV(\dot{\varphi} + \Omega) = srV_0\Omega \cos \varphi, \\ J\dot{\Omega} = srV_0(V - r\Omega). \end{cases} \quad (1)$$

УДК 531.36

А.В. Коровайцев

Московский авиационный институт
(государственный технический университет)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СРЕДЕ С КВАДРАТИЧНЫМ ЗАКОНОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Постоянно происходящие научно-технические революции приводят к непрерывным переосмыслениям итогов науки, методов и алгоритмов решения ее проблем. Особенно резкие переосмысления характерны настоящему времени, когда компьютерная революция стала свершившимся фактом реальности. Вместе с тем, были и к счастью, по-видимому, всегда останутся классические постановки, в которых эти переосмысления становятся под стать времени весьма существенными при неизбежности самих постановок. Это вызывает к ним непреходящий интерес и обычно составляет основу различных новых алгоритмов как аналитического, так и численного решения «старых» задач, в частности, и рассматриваемой. В классику механики вошли многие прекрасные достижения российского механика Эйлера, разработавшего специальный алгоритм, основанный на точном интегрировании уравнения годографа скорости при квадратичной зависимости сопротивления среды от скорости материальной точки [1]. Постановка и решение близких к рассматриваемой проблем стали рассматриваться как основная задача внешней баллистики. Ей посвящены работы многих авторов, которые использовали методы малого параметра, вариации произвольных постоянных, возмущений, рядов, Чаплыгина и другие. Особенно отметим методы и алгоритмы иерархизированного решения задачи, в котором в системе уравнений движения выделяется разрешающее дифференциальное уравнение, решение которого дополняется различными квадратурами. Отметим, что получаемый таким образом алгоритм [2] относится к числу алгоритмов дискретного типа, а расчет по получаемым расчетным формулам будет содержать погрешности дискретизации. Поэтому в продолжение серии работ П.С. Чудинова [2] и цитируемых им авторов рассмотрим иной алгоритм решения, пригодный как при произвольном коэффициенте сопротивления среды, так и при произвольном законе ее сопротивления.

$\varphi < \gamma_1$, $\gamma_2 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ меняет направление скольжения (сначала скользит налево, затем направо).

Для абсолютно шероховатой поверхности $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $f = \infty$. Весьма неожиданным оказывается результат (см. рис. 2), что не всегда точка соприкосновения S останавливается в процессе удара, не смотря на бесконечно большой коэффициент трения. При малых значениях угла падения $\beta < \tilde{\gamma}_1$ касательная составляющая скорости не обращается в ноль. Имеет место полное скольжение налево. Этот результат особенно не очевиден для случая абсолютно неупругого удара (см. рис. 4).

Отметим также, что случай удара материальной точки о шероховатую поверхность [8] не может быть получен из приведенных в данной работе результатов предельным переходом. При этом одновременно стремятся к нулю параметры ρ, b, h , а тогда в силу (28) ничего нельзя сказать про углы $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$.

Литература

1. *Плявниекс В.Ю.* Расчет косоугольного удара о препятствие. // Вопросы динамики и прочности, № 18. – Рига: Зинатне, 1969. С. 87-109.
2. *Нагаев Р.Ф.* Механические процессы с повторными затухающими соударениями. – М.: Наука 1985.
3. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Международная программа образования, 1997.
4. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977.
5. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел, т.1. – М.: Наука, 1983.
6. *Кобринский А.Е., Кобринский А.А.* Виброударные системы (динамика и устойчивость). – М.: Наука, 1973.
7. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Изд-во литературы по строительству, 1965.
8. *Дубинин В.В., Гришин С.А., Лапшин В.В.* Удар материальной точки о шероховатую поверхность: Препр. № 21 / ИПМ РАН. – М., 1997.
9. *Лапшин В.В., Дубинин В.В.* Абсолютно неупругий удар тела о шероховатую поверхность. Препр. № 18 / ИПМ РАН. – М., 1998.

Преобразуем систему уравнений (1). Введем новое безразмерное «время» τ с помощью формулы $d\tau = V dt / r$, новые безразмерные переменные

$$\omega = r\Omega / V \text{ и } u = V/\bar{V}, \quad (2)$$

где \bar{V} - некоторая характерная скорость, например, скорость звука, и новые безразмерные параметры $a = sr/m$, $b = mr^2/J$. Тогда $V_0 = V\sqrt{1 - 2\omega \sin \varphi + \omega^2}$, и первое уравнение из системы (1) – уравнение продольного движения – примет вид

$$u' = -au(1 - \omega \sin \varphi) \cdot \sqrt{1 - 2\omega \sin \varphi + \omega^2}, \quad (3)$$

где u' - производная по новому времени τ .

Два других уравнения системы (1) представим в форме:

$$\begin{cases} \varphi' = -\omega(1 - a \cos \varphi) \cdot \sqrt{1 - 2\omega \sin \varphi + \omega^2}, \\ \omega' = a\sqrt{1 - 2\omega \sin \varphi + \omega^2} \cdot [\omega - \omega^2 \sin \varphi + b(\sin \varphi - \omega)]. \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) является автономной, не содержит переменной u и может быть исследована отдельно от (3).

Очевидно, что эта система имеет два стационарных решения

$$1) \omega(\tau) \equiv 0, \quad \varphi(\tau) \equiv 0 \quad \text{и} \quad 2) \omega(\tau) \equiv 0, \quad \varphi(\tau) \equiv \pm\pi,$$

отвечающих вышеупомянутым режимам прямолинейного поступательного торможения. В первом из них центр масс движется впереди центра шара, а во втором – позади.

2. Исследуем вопрос об устойчивости первого из отмеченных режимов торможения. Уравнения линейного приближения имеют вид

$$\begin{cases} \varphi' = -\omega(1 - a), \\ \omega' = a[(1 - b)\omega + b\varphi]. \end{cases} \quad (5)$$

Выпишем характеристическое уравнение системы (5):

$$\lambda^2 + a(b-1)\lambda + ab(1-a) = 0. \quad (6)$$

Учитывая положительность параметров a, b , заключаем, что для устойчивости исследуемого режима необходимо выполнение условий

$$a < 1, \quad b \geq 1. \quad (7)$$

В практически интересных случаях плотность тела во много раз превышает плотность среды, поэтому первое из условий (7) выполняется почти всегда. Второе условие может быть выполнено, если центр шара отстоит от центра масс на расстоянии, превышающем центральный радиус инерции шара, то есть при существенной неоднородности

распределения масс в шаре. Аналогичный анализ для второго режима торможения, когда центр шара (центр давления) движется впереди центра масс, показал, что этот режим всегда неустойчив, что и следовало ожидать.

Отметим, что полученные результаты аналогичны результатам в [2,3], хотя рассмотренные структуры аэродинамического воздействия несколько различаются.

3. Проведем теперь анализ поведения траекторий динамической системы (4) «в большом». Нетрудно видеть, что решения системы (4) обладают свойством симметрии: наряду с решением $\omega(\tau)$, $\varphi(\tau)$ существует и решение $-\omega(\tau)$, $-\varphi(\tau)$. Вследствие этого и автономности системы (4) достаточно рассматривать поведение фазовых траекторий только в полуплоскости $\omega(\tau) \geq 0$. Более того, принимая во внимание, что угол φ входит в уравнения только под знаком тригонометрических функций, можно ограничиться фазовым портретом только в области

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad \omega(\tau) \geq 0,$$

которая представляет собой так называемую «развертку фазового полуцилиндра».

Приравняем нулю правую часть первого из уравнений (4), тогда в указанной области получим уравнение (при этом учитывается $|\varphi| < \pi/2$)

$$\omega = \sin \varphi + \sqrt{\frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} - \cos^2 \varphi} \quad (8)$$

кривой, разделяющей области возрастания и убывания приведенной угловой скорости. Аналогично, приравняв нулю правую часть второго уравнения из (4), получим уравнение

$$\omega = \frac{1 - b \pm \sqrt{(1 - b)^2 + 4b \sin^2 \varphi}}{2 \sin \varphi} \quad (9)$$

кривой (точнее, двух ее ветвей), разбивающей указанную область на подобласти возрастания и убывания угла атаки. Обе ветви расположены в полосе $0 < \varphi < \pi$ симметрично относительно $\varphi = \pi/2$.

На рис. 2 кривые (8) и (9) изображены штрихпунктирными линиями. Ясно, что построенные кривые одновременно существуют только в полосе $0 < \varphi < \pi/2$, и в этой полосе существует единственная нетривиальная точка их пересечения – точка $N(\varphi_*, \omega_*)$. Этой единственной

точка соприкосновения S : в области I или при $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \gamma_3$ сначала скользит направо и останавливается в фазе деформации; в области II или при $\gamma_2 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ сначала скользит налево и останавливается в фазе деформации; в области III или при $\gamma_3 < \beta \leq \tilde{\gamma}_3$ сначала скользит направо и останавливается в фазе восстановления; в области IV или при $\tilde{\gamma}_2 \leq \beta < \gamma_2$ сначала скользит налево и останавливается в фазе восстановления; в области V или при $\beta > \tilde{\gamma}_3$ скользит направо (полное скольжение); в области VI или при $\beta < \tilde{\gamma}_2$ скользит налево (полное скольжение).

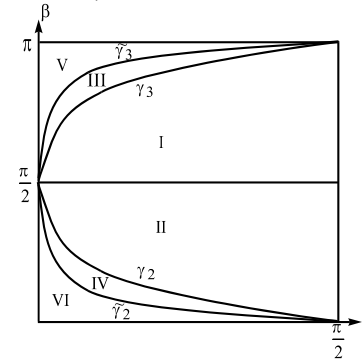


Рис. 3.

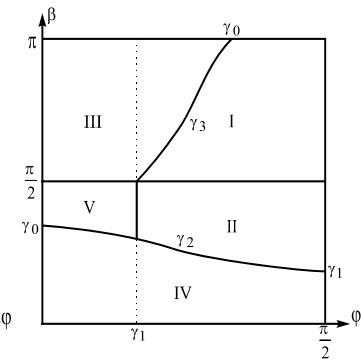


Рис. 4.

В случае абсолютно неупругого удара $k = 0$, и в силу (50) $\tilde{\gamma}_i = \gamma_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Области соответствующие различным типам удара показаны на рис. 4. В процессе удара точка соприкосновения S : в области I или при $\varphi \geq \gamma_1$, $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \gamma_3$ сначала скользит направо, затем останавливается; в области II или при $\varphi \geq \gamma_1$, $\gamma_2 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ сначала скользит налево, затем останавливается; в области III или при $\beta \geq \frac{\pi}{2}$ и $\beta > \gamma_3$ скользит направо (полное скольжение); в области IV или при $\beta < \gamma_2$ скользит налево (полное скольжение); в области V или при

при $\varphi \geq \gamma_1$, $\tilde{\gamma}_2 \leq \beta < \gamma_2$ сначала скользит налево и останавливается в фазе восстановления; в области V или при $\beta \geq \frac{\pi}{2}$ и $\beta > \tilde{\gamma}_3$ скользит направо (полное скольжение); в области VI или при $\beta < \tilde{\gamma}_2$ скользит налево (полное скольжение); в области VII или при $\beta < \gamma_1$, $\gamma_2 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ меняет направление скольжения в фазе деформации (сначала скользит налево затем направо); в области VIII или при $\beta < \gamma_1$, $\tilde{\gamma}_2 \leq \beta < \gamma_2$ меняет направление скольжения в фазе восстановления (сначала скользит налево затем направо).

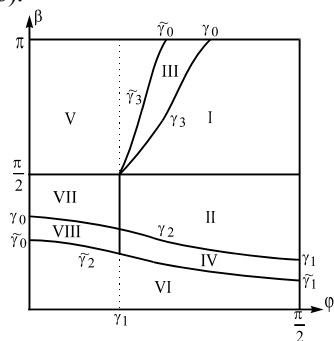


Рис. 3. Упругий удар.

Полученное решение является корректным. Любым начальным условиям соответствует единственный вполне определенный характер движения в процессе удара и имеет место непрерывная зависимость от параметров. На границах областей и более того в точках бифуркации этих границ для определения характера движения тела при ударе можно пользоваться формулами, соответствующими любой из пограничных областей. Они дадут один и тот же результат.

Если в момент удара центр масс расположен над точкой соприкосновения S или $b = 0$ (этот случай имеет место при ударе осе симметричного диска о поверхность), то $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_3 = \pi - \gamma_2$, $\tilde{\gamma}_3 = \pi - \tilde{\gamma}_2$. Всегда $\gamma_1 \leq \varphi \leq \gamma_0$ и зависимость типа удара от скорости точки соприкосновения до удара показана на рис. 3. В процессе удара

неподвижной точке отвечает также единственное нетривиальное стационарное решение вида

$$\varphi(\tau) \equiv const = \varphi_* \neq 0, \quad \omega(\tau) \equiv const = \omega_* \neq 0.$$

При малых значениях параметров a, b имеем:

$$\varphi_* \approx a, \quad \omega_* \approx 1/a.$$

Замечание. Следует помнить, что величина ω характеризует различие между направлениями скоростей точек O и G шара. Когда ω велико, то мгновенный центр скоростей находится внутри шара. В этих условиях принятую выше модель аэродинамического воздействия вряд ли можно считать корректной.

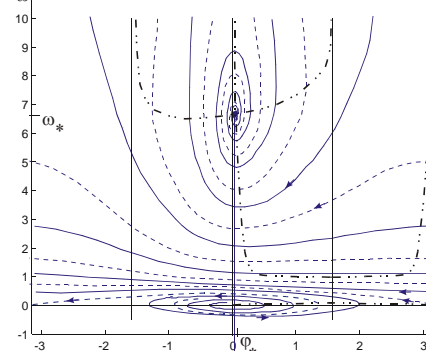


Рис. 2

Тем не менее, найденная неподвижная точка служит опорным образом при построении полного фазового портрета динамической системы (4). При малых значениях параметров a, b легко устанавливается устойчивость этой точки в первом приближении (точка $N(\varphi_*, \omega_*)$ – устойчивый фокус). Если предположить отсутствие предельного цикла, охватывающего эту точку $N(\varphi_*, \omega_*)$, то построенный «скелет» фазового портрета системы (4) (кривые (8) и (9)) позволяет сформировать его окончательно. Проведенная серия численных экспериментов подтвердила полученные качественные результаты.

На рис. 2 представлен типичный фазовый портрет системы (4): начало координат – неустойчивый фокус, пунктиром отмечены фазовые траектории – сепаратрисы, одна из которых «выходит» из точки $(\pi, 0)$, а другая «входит» в точку $(-\pi, 0)$. Сплошной линией изображена фазовая траектория «общего положения», выходящая из окрестности начала координат. Видно, что почти все траектории стягиваются к указанной выше неподвижной точке $N(\varphi_*, \omega_*)$.

4. Построенная выше картина позволяет получить представление о характере взаимного влияния угловой скорости тела и угла атаки. Рассмотрим теперь, как ведет себя величина скорости u , для чего обратимся к уравнению (3). Нетрудно показать, что в точке N , (как и в других неподвижных точках подсистемы (4)), имеем: $u' < 0$, то есть эта

точка представляет собой проекцию прямолинейной траектории полной системы (3)-(4), вдоль которой изменяется лишь одна фазовая координата u (она экспоненциально убывает). Поскольку $u' < 0$ в некоторой конечной окрестности точки $N(\varphi_*, \omega_*)$, а сама эта точка - притягивающая, то свойство монотонного убывания скорости u выполняется через некоторое конечное время на каждой траектории. Таким образом, вдоль любой траектории системы (3)-(4) прослеживается тенденция убывания скорости u центра масс, хотя возможны интервалы времени, в течение которых эта величина возрастает.

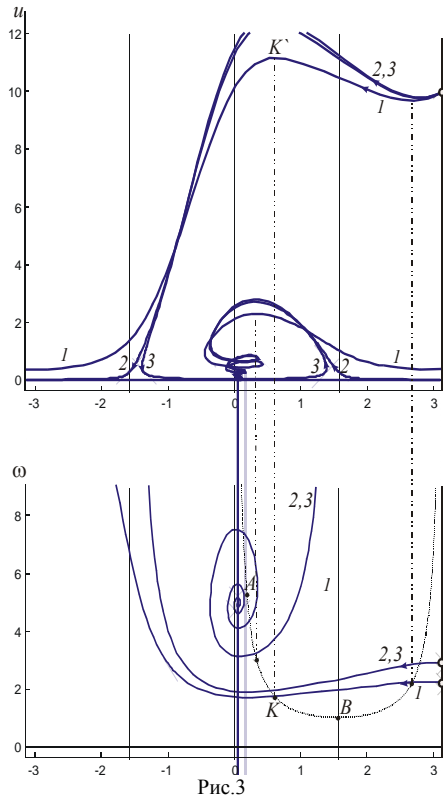


Рис.3

на рисунке практически не различаются. В верхней части рисунка изображены проекции тех же траекторий $1, 2, 3$ на плоскость (φ, u) . Траектория 1 - это типичная траектория системы (3)-(4). Видно, что в

Указанные обстоятельства иллюстрируются на рис. 3. В нижней части рисунка на плоскости (φ, ω) точечной линией изображена граница области U , внутри которой скорость u возрастает, вне этой области - убывает. Существуют две траектории $\omega_A(\varphi)$ и $\omega_B(\varphi)$, касающиеся этой границы в точках A и B соответственно (на рисунке приведена только первая из этих линий, она отмечена цифрой 1). При пересечении кривой $\omega(\varphi)$ участка AB границы скорость u достигает локального максимума, при пересечении границы вне участка AB - минимума. Цифрами $1, 2, 3$ отмечены проекции трех фазовых траекторий системы (3)-(4) на плоскость (φ, ω) , причем изображения проекций $2, 3$

- скользит направо (полное скольжение) тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \cup \Pi_\tau^+ \cup -\Pi_3 \cup -\tilde{\Pi}_3$ и $\varphi \leq \gamma_0$;
- скользит налево (полное скольжение) тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \cup \Pi_\tau^- \cup -\tilde{\Pi}_2$;
- меняет направление скольжения в фазе деформации (сначала скользит налево, а затем направо) тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \cup \Pi_\tau^- \cup \Pi_2$ и $\varphi \leq \gamma_1$;
- меняет направление скольжения в фазе восстановления (сначала скользит налево, а затем направо) тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \cup \Pi_\tau^- \cup -\Pi_2 \cup \tilde{\Pi}_2$ и $\varphi \leq \gamma_1$.

Характер движения точки соприкосновения S в процессе удара зависит от направления скорости этой точки до удара и не зависит от ее величины. Введем угол

$$\beta = \arctg \frac{u_n^-}{u_\tau^-}, \text{ где } \beta \in [0, \pi],$$

который является углом падения точки S . отсчитываемым от касательного к опорной поверхности направления (рис.1). Тип удара или характер движения точки соприкосновения S в процессе удара определяется соотношением значений угла трения φ , угла падения β и углов $\gamma_i, \tilde{\gamma}_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$).

Анализ приведенных выше условий, определяющих тип удара, показывает, что некоторые из этих условий являются избыточными. На рис. 2 показаны области значений угла трения φ и угла падения β , которые соответствуют различным типам ударов. В качестве границ, разделяющих эти области, выступают кривые, которые соответствуют зависимости углов $\gamma_2, \gamma_3, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ от угла трения φ . Аналитически эти условия имеют следующий вид. В процессе удара точка соприкосновения S : в области I или при $\varphi \geq \gamma_1, \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \gamma_3$ сначала скользит направо и останавливается в фазе деформации; в области II или при $\varphi \geq \gamma_1, \gamma_2 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ сначала скользит налево и останавливается в фазе деформации; в области III или при $\varphi \geq \gamma_1, \gamma_3 < \beta \leq \tilde{\gamma}_3$ сначала скользит направо и останавливается в фазе восстановления; в области IV или

$$\Pi_n^- = \{(u_\tau^-, u_n^-) : u_n^- \leq 0\}, \quad \Pi_\tau^- = \{(u_\tau^-, u_n^-) : u_\tau^- \leq 0\},$$

$$\Pi_\tau^+ = \{(u_\tau^-, u_n^-) : u_\tau^- \geq 0\},$$

$$\Pi_1 = \{(u_\tau^-, u_n^-) : u_n^- (\rho^2 + h^2) - u_\tau^- bh \leq 0\} = \{(u_\tau^-, u_n^-) : u_n^- - u_\tau^- tg\gamma_1 \leq 0\},$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \{(u_\tau^-, u_n^-) : u_n^- [bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^- [\rho^2 + b^2 + fbh] \leq 0\} = \\ &= \{(u_\tau^-, u_n^-) : u_n^- - u_\tau^- tg\gamma_2 \leq 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_2 &= \{(u_\tau^-, u_n^-) : (1+k)u_n^- [bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^- [\rho^2 + b^2 + fbh] \leq 0\} = \\ &= \{(u_\tau^-, u_n^-) : u_n^- - u_\tau^- tg\tilde{\gamma}_2 \leq 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \{(u_\tau^-, u_n^-) : u_n^- [bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^- [\rho^2 + b^2 - fbh] \geq 0\} = \\ &= \begin{cases} (u_\tau^-, u_n^-) : u_n^- - u_\tau^- tg\gamma_3 \leq 0 & \text{при } \varphi > \gamma_1 \\ u_n^- - u_\tau^- tg\gamma_3 \geq 0 & \text{при } \varphi < \gamma_1 \\ u_\tau^- \leq 0 & \text{при } \varphi = \gamma_1 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_3 &= \{(u_\tau^-, u_n^-) : (1+k)u_n^- [bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^- [\rho^2 + b^2 - fbh] \geq 0\} = \\ &= \begin{cases} (u_\tau^-, u_n^-) : u_n^- - u_\tau^- tg\tilde{\gamma}_3 \leq 0 & \text{при } \varphi > \gamma_1 \\ u_n^- - u_\tau^- tg\tilde{\gamma}_3 \geq 0 & \text{при } \varphi < \gamma_1 \\ u_\tau^- \leq 0 & \text{при } \varphi = \gamma_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Каждое из этих множеств является полуплоскостью. Тогда в силу условий (12), (14), (15), (17), (18), (24), (27) имеем, что в процессе удара точка соприкосновения S :

- останавливается в фазе деформации тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \cup \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3$ и $\varphi \geq \gamma_1$;
- сначала скользит направо и останавливается в фазе восстановления, тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \cup \Pi_\tau^+ \cup -\Pi_3 \cup \tilde{\Pi}_3$ и $\gamma_0 \geq \varphi \geq \gamma_1$;
- сначала скользит налево и останавливается в фазе восстановления тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \cup \Pi_\tau^- \cup -\Pi_2 \cup \tilde{\Pi}_2$ и $\varphi \geq \gamma_1$;

точках пересечения кривой $\omega(\varphi)$ с границей области U происходит изменение знака u' (соответствующие точки на плоскостях (φ, ω) и (φ, u) для наглядности соединены штрихпунктирной кривой, например, пара точек K и K'). Затем, когда траектория оказывается в достаточно малой окрестности точки N , скорость u монотонно стремится к нулю, оставаясь положительной при $\tau \rightarrow +\infty$. Минимальные значения u , которые достигаются при пересечении границы области U вне участка AB , также положительны, но тем меньше, чем больше значение ω в точке пересечения.

Однако, в рассматриваемой области существует единственная траектория, на которой в некоторый конечный момент времени (при конечной длине дуги траектории движения) скорость u обращается в ноль, а ω - в бесконечность, что отвечает мгновенной остановке центра масс шара, но не самого шара. Эта траектория находится в "вилке" между типичными траекториями 2 и 3. Отмеченная "остановка" происходит при $\varphi = -\pi/2$ с мгновенным перескоком в положение $\varphi = \pi/2$. Во-первых, уменьшение скорости u означает, что в модель аэродинамического воздействия необходимо вносить изменения. Во-вторых, можно ожидать, что собственно угловая скорость Ω вращения в момент остановки принимает конечное значение.

5. Для оценки параметров вращательного движения тела рассмотрим более подробно поведение угловой скорости Ω вращения на траекториях около «выходящей» из точки $(\pi, 0)$ сепаратрисы. При этом

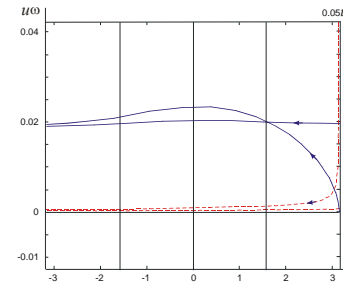


Рис.4

начальная ориентация тела такова, что центр G масс шара расположен позади его центра O . Это соответствует окрестности второго (неустойчивого, см. п.2) режима торможения.

В силу принятой замены переменных (2) ясно, что Ω отличается от произведения $u\omega$ лишь постоянным множителем \bar{V}/r .

Поэтому для одной траектории указанного типа построим график зависимости $u\omega$ от φ (сплошная кривая на рис.4). Видно, что в течение первого полуоборота шара по отношению к вектору скорости, когда угол атаки уменьшается от π до 0, угловая скорость Ω возрастает до

некоторого конечного значения, а при дальнейшем движении – убывает. Для сравнения на рис. 4 пунктирной линией представлено изменение величины скорости u . Оказалось, что за этот «полуоборот» скорость уменьшилась в 40-50 раз. По-видимому, именно поэтому «раскрутка» шара происходит на указанном интервале, когда набегающий поток создает максимальный крутящий момент.

Замечание. При расчетах, результаты которых представлены на рис. 2, 3, 4, использовались разные значения параметров a и b с тем, чтобы в рамках выбранных масштабов изображений подчеркнуть обсуждаемые качественные особенности траекторий.

Таким образом, использование классических подходов к задаче [4] о движении тела в среде позволяет выявить некоторые нетривиальные свойства движения тела даже в рамках относительно элементарных представлений о воздействии среды на тело.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (гранты №№ 03-01-00190 и 05-08-01378) и Программы «Университеты России».

Литература

1. А.Н. Азовский, В.В. Шувалов. Влияние геометрической формы на движение фрагмента разрушенного метеороида. *Астрономический вестник*, 2002, т.36, №4, с.359-365.
2. Б.Я. Локишин, Ю.М. Окунев, В.А. Самсонов. Влияние несимметрии тела на траекторию его движения в среде. *Сб. научно-метод. статей «Теоретическая механика»*. Изд-во Московского университета, 2004, № 25, с. 133-139.
3. Ю.М. Окунев. Сопоставление двух задач о движении тела в среде. *Сб. научно-метод. статей «Теоретическая механика»*. Изд-во Московского университета, 2003, № 24, с. 133-137.
4. Б.Я. Локишин, В.А. Привалов, В.А. Самсонов. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. Изд-во Московского университета, 1986, 86 с.

Значение угловой скорости тела после удара определяется из третьего из уравнений (4)–(5) $\omega^+ = \omega^- + \frac{R_n b + R_\tau h}{m\rho^2}$. Скорость центра

масс тела после удара определяется из уравнений (1).

Графическая интерпретация условий, соответствующих различным типам удара. В предыдущем разделе рассмотрены различные типы движения тела при ударе и получены условия, при которых имеет место тот или иной тип удара. Эти условия достаточно сложны и зависят от значений шести параметров: положения точки соударения относительно центра масс, определяемого параметрами b и h ; радиуса инерции тела относительно центра масс ρ ; коэффициента трения тела о поверхность f и скорости точки соприкосновения S в начале удара. Непротиворечивость этих условий и корректность модели удара (т.е. однозначность определения характеристик движения в конце удара для любого тела и любых значений скоростей в начале удара) далеко неочевидна. Для упрощения анализа этих условий введем угол трения φ и углы $\gamma_i, \tilde{\gamma}_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctg f, \quad \gamma_0 = \arctg \frac{\rho^2 + b^2}{bh}, \quad \gamma_1 = \arctg \frac{bh}{\rho^2 + h^2}, \\ \gamma_2 &= \arctg \frac{\rho^2 + b^2 + fbh}{bh + f(\rho^2 + h^2)}, \quad \gamma_3 = \arctg \frac{\rho^2 + b^2 - fbh}{bh - f(\rho^2 + h^2)}, \\ \tilde{\gamma}_i &= \arctg \frac{tg\gamma_i}{1+k} \quad (i = 0, 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (28)$$

$$tg\gamma_2 = tg\gamma_1 \frac{tg\gamma_0 + tg\varphi}{tg\gamma_1 + tg\varphi}, \quad tg\gamma_3 = tg\gamma_1 \frac{tg\gamma_0 - tg\varphi}{tg\gamma_1 - tg\varphi}$$

Учитывая (20), получаем $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

Замечание. Здесь и далее $\arctg x \in [0, \pi]$ при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Введем следующие множества значений скорости точки соприкосновения S в начале удара u_τ^-, u_n^-

ции в течение первого этапа фазы восстановления. Из уравнений удара для фазы деформации и первого этапа фазы восстановления получаем

$$R'_n = \frac{-m\rho^2 u'_\tau}{bh + f(\rho^2 + h^2)}, u'_\tau = u_\tau^- - u_n^- \frac{[bh + f(\rho^2 + h^2)]}{bh + f(\rho^2 + h^2)},$$

$$R_n^{**} = \frac{-m\rho^2 u'_\tau}{bh + f(\rho^2 + h^2)}, u_n^* = -u'_\tau \frac{\rho^2 + b^2 + fbh}{bh + f(\rho^2 + h^2)}$$
(25)

На втором этапе фазы восстановления при $t \in [t^*, t^+]$ точка соприкосновения скользит направо $u_\tau^* = 0$, $u_\tau^+ > 0$, $u_n^* \geq 0$, $u_n^+ \geq 0$, $R_\tau^{***} = -f R_n^{**}$, $R_n'' = kR'_n$, $R_n^{***} = kR'_n - R_n^{**}$. Из уравнений удара для второго этапа фазы восстановления получаем

$$u_\tau^+ = \frac{1}{m\rho^2} (kR'_n - R_n^{**}) [bh - f(\rho^2 + h^2)],$$

$$u_n^+ = u_n^* + \frac{1}{m\rho^2} (kR'_n - R_n^{**}) (\rho^2 + b^2 - fbh)$$
(26)

Данный случай имеет место, тогда и только тогда, когда:

$$u_n^- \leq 0, u_\tau^- < 0, f < \frac{bh}{\rho^2 + h^2},$$

$$u_n^- [bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^- [\rho^2 + b^2 + fbh] > 0,$$

$$(1+k)u_n^- [bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^- [\rho^2 + b^2 + fbh] \leq 0$$
(27)

Для всех рассмотренных выше случаев определены условия, при которых они имеют место, а также скорость точки соприкосновения S после удара и импульсы ударных сил реакции опорной поверхности для фаз деформации и восстановления. Найдем полные импульсы ударных реакций в течение всего удара $R_n = R'_n + R_n'' = (1+k)R'_n$, $R_\tau = R'_\tau + R_\tau''$. Причем, если изменяется направление скольжения точки S в фазе деформации, то $R'_n = R_n^{**} + R_n^{***}$, $R'_\tau = R_\tau^{**} + R_\tau^{***}$. Если изменяется направление скольжения точки S в фазе восстановления, то $R_n'' = R_n^{**} + R_n^{***}$.

УДК 531.66

В.В.Лапшин, А.А.Пожалостин
МГТУ им. Н.Э.Баумана

УПРУГИЙ УДАР ТЕЛА О ПОВЕРХНОСТЬ

Явление удара часто встречается при движении механических систем, в том числе при работе различных машин и механизмов. Многие (но не все) прикладные задачи могут быть исследованы в соответствии с теорией удара Ньютона [1-9]. Аналитическое решение плоской задачи об ударе тела о шероховатую поверхность при точечном контакте тела с поверхностью ранее получено в [1, 2]. В этом случае однозначно определяется импульс ударной силы реакции и характер движения (скорости) тела после удара. В данной работе показано, что тип удара или характер движения точки соприкосновения в процессе удара определяется с помощью графической картины на плоскости параметров угол трения φ и угол падения β (который определяет направление скорости точки соприкосновения тела с поверхностью до удара). В качестве границ, разделяющих области, соответствующие различным типам удара, выступают кривые, поведение которых зависит от положения точки соударения относительно центра масс тела, радиуса инерции тела, угла трения и коэффициента восстановления. Данная работа является естественным продолжением [9], в которой рассмотрен случай абсолютно неупругого удара.

Исследование процесса удара. Рассмотрим плоский упругий удар тела массой m о неподвижную шероховатую поверхность (рис. 1) в рамках теории удара Ньютона [1-9]. Предполагается, что деформацией тела и поверхности в процессе удара можно пренебречь (тело и поверхность являются абсолютно твердыми телами). Хотя в работе удар рассматривается как процесс, состоящий из фазы деформации и восстановления, продолжительность удара равна нулю (или является бесконечно малой величиной). Более точные деформационные модели удара [3], основанные на исследовании упруго-пластической деформации тела и поверхности в процессе удара, являются существенно более сложными, выходят за рамки теоретической механики и обычно требуют численных методов решения.

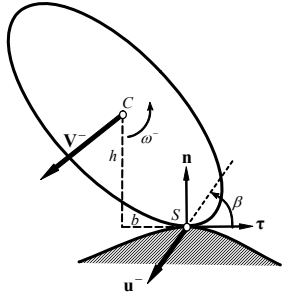


Рис. 1.

Пусть C – центр масс тела, S – точка контакта тела с поверхностью при ударе. Радиус инерции тела относительно центра масс обозначим ρ . Единичные вектора τ и \mathbf{n} определяют касательное и нормальное направление к поверхности в точке соударения S . Обозначим через $\mathbf{R} = (R_\tau, R_n)$ касательный и нормальный импульсы ударной силы реакции в точке S .

Положение центра масс C относительно точки S определяется параметрами $h \geq 0$ и b . Не нарушая общности можно считать, что центр масс C лежит слева от точки соударения S или $b \geq 0$.

Обозначим через $\mathbf{V} = (V_\tau, V_n)$ касательную и нормальную скорость центра масс C . $\mathbf{u} = (u_\tau, u_n)$ касательную и нормальную скорость точки соударения S . ω угловую скорость тела. За положительное примем направление угловой скорости против хода часовой стрелки. Скорости точек C и S связаны кинематическими соотношениями

$$u_\tau = V_\tau + \omega h, \quad u_n = V_n + \omega b. \quad (1)$$

Процесс удара разделим на две фазы: фазу деформации, в течение которой нормальная составляющая скорости точки соприкосновения уменьшается до нуля, оставаясь отрицательной, и фазу восстановления, в течение которой нормальная составляющая скорости точки соприкосновения увеличивается от нуля до некоторого положительного значения. Значения всех скоростей до удара будем обозначать верхним индексом минус $-$, после удара верхним индексом плюс $+$. В конце фазы деформации (или начале фазы восстановления) верхним индексом штрих $'$.

Нормальная скорость точки S до удара отрицательна, в конце фазы деформации равна нулю, после удара положительна, а нормальная составляющая импульса ударной силы реакции должна быть не отрицательной

$$u_n^- < 0, \quad u_n' = 0, \quad u_n^+ > 0, \quad R_n \geq 0 \quad (2)$$

S в момент смены направления скольжения, R_n^{r*}, R_τ^{r*} – импульсы ударной реакции в течение первого этапа фазы деформации. Из уравнений удара для первого этапа фазы деформации получаем

$$R_n^{r*} = \frac{-m\rho^2 u_\tau^-}{bh + f(\rho^2 + h^2)}, \quad u_n^* = u_n^- - u_\tau^- \frac{[\rho^2 + b^2 + fbh]}{bh + f(\rho^2 + h^2)} \quad (21)$$

На втором этапе фазы деформации при $t \in [t^*, t']$ точка соприкосновения скользит направо $u_\tau^* = 0, u_\tau' > 0, u_n^* = 0, R_\tau^{r**} = -fR_n^{r**}$. В этих соотношениях R_n^{r**}, R_τ^{r**} – импульсы ударной реакции в течение второго этапа фазы деформации. Из уравнений удара для второго этапа фазы деформации получаем

$$R_n^{r**} = \frac{-m\rho^2 u_n^*}{\rho^2 + b^2 - fbh}, \quad u_\tau' = -u_n^* \frac{[bh - f(\rho^2 + h^2)]}{\rho^2 + b^2 - fbh}. \quad (22)$$

При $t \in [t', t^+]$ точка соприкосновения скользит направо $u_\tau' \geq 0, u_\tau^+ > 0, u_n' = 0, R_\tau^r = -fR_n^r, R_n^r = kR_n', R_n^+ = R_n^r + R_n^{r**}$. Из уравнений удара для фазы восстановления получаем

$$u_\tau^+ = u_\tau' + \frac{1}{m\rho^2} kR_n^r [bh - f(\rho^2 + h^2)], \quad u_n^+ = \frac{1}{m\rho^2} kR_n^r (\rho^2 + b^2 - fbh). \quad (23)$$

Данный случай имеет место, тогда и только тогда, когда:

$$u_n^- \leq 0, \quad u_\tau^- < 0, \quad f < \frac{bh}{\rho^2 + h^2}, \quad u_n^- [bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^- [\rho^2 + b^2 + fbh] \leq 0 \quad (24)$$

4.2. Изменение направления скольжения в фазе восстановления. Тогда $t^- \leq t' \leq t^* \leq t^+$ и $u_n^* \geq 0$. В фазе деформации при $t \in [t^-, t']$ и на первом этапе фазы восстановления при $t \in [t', t^*]$ точка соприкосновения скользит налево $u_\tau^- < 0, u_\tau' < 0, u_\tau^* = 0, R_\tau^r = fR_n^r, R_\tau^{r**} = fR_n^{r**}$. В этих соотношениях u_n^*, u_τ^* – скорость точки соударения S в момент смены направления скольжения, R_n^{r**}, R_τ^{r**} – импульсы ударной реак-

$$u_{\tau}^{+} = u_{\tau}^{\prime} + \frac{kR_n^{\prime}[bh - f(\rho^2 + h^2)\text{sign } u_{\tau}]}{m\rho^2},$$

$$u_{\tau}^{+} = u_{\tau}^{-} - (1+k)u_n^{-} \frac{bh - f(\rho^2 + h^2)\text{sign } u_{\tau}}{\rho^2 + b^2 - fbh\text{sign } u_{\tau}}$$

Данный случай имеет место, тогда и только тогда, когда:

а) при скольжении направо

$$u_n^{-} \leq 0, u_{\tau}^{-} > 0, f \leq \frac{\rho^2 + b^2}{bh}, \quad (17)$$

$$u_n^{-}[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_{\tau}^{-}[\rho^2 + b^2 - fbh] < 0,$$

$$(1+k)u_n^{-}[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_{\tau}^{-}[\rho^2 + b^2 - fbh] < 0$$

б) при скольжении налево

$$u_n^{-} \leq 0, u_{\tau}^{-} < 0, (1+k)u_n^{-}[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_{\tau}^{-}[\rho^2 + b^2 + fbh] > 0 \quad (18)$$

4. Изменение направления скольжения. В процессе удара точка соприкосновения S сначала скользит налево, а затем направо. Этот случай имеет место, когда не выполнено условие (10) или

$$f < \frac{bh}{\rho^2 + h^2} < \frac{\rho^2 + b^2}{bh} \quad (19)$$

Здесь кроме (10) использовано неравенство

$$\frac{bh}{\rho^2 + h^2} < \frac{\rho^2 + b^2}{bh}, \quad (20)$$

которое всегда справедливо. В силу $b \geq 0$ и не отрицательности h оно эквивалентно $b^2 h^2 \leq (\rho^2 + b^2)(\rho^2 + h^2)$, где радиус инерции $\rho \neq 0$.

Пусть t^* момент изменения направления скольжения в процессе удара. Возможны два подслучая.

4.1. Изменение направления скольжения в фазе деформации. Тогда $t^- \leq t^* \leq t' \leq t^+$ и $u_n^* \leq 0$. На первом этапе фазы деформации при $t \in [t^-, t^*]$ точка соприкосновения скользит налево $u_{\tau}^- < 0$, $u_{\tau}^* = 0$, $R_{\tau}^* = f R_n^*$. В этих соотношениях u_n^*, u_{τ}^* – скорость точки соударения

Уравнения удара (уравнения движения центра масс и изменения кинетического момента тела относительно центра масс) в фазе деформации имеют вид

$$m(V_{\tau}^{\prime} - V_{\tau}^{-}) = R_{\tau}^{\prime}, \quad m(V_n^{\prime} - V_n^{-}) = R_n^{\prime}, \quad m\rho^2(\omega^{\prime} - \omega^{-}) = R_n^{\prime}b + R_{\tau}^{\prime}h \quad (4)$$

а в фазе восстановления

$$m(V_{\tau}^{+} - V_{\tau}^{\prime}) = R_{\tau}^{\prime\prime}, \quad m(V_n^{\prime} - V_n^{-}) = R_n^{\prime}, \quad m\rho^2(\omega^{+} - \omega^{\prime}) = R_n^{\prime\prime}b + R_{\tau}^{\prime\prime}h \quad (5)$$

Здесь $R_n^{\prime}, R_{\tau}^{\prime}, R_n^{\prime\prime}, R_{\tau}^{\prime\prime}$ – нормальные и касательные составляющие импульса ударной силы реакции соответственно в фазах деформации и восстановления. Для нормальных составляющих имеем [1–7] $R_n^{\prime\prime} = kR_n^{\prime}$, где $0 \leq k \leq 1$ – коэффициент восстановления при ударе.

Учитывая (1), из (4) и (5) получаем соотношения для изменения скорости точки соприкосновения S в фазе деформации

$$m\rho^2(u_{\tau}^{\prime} - u_{\tau}^{-}) = R_{\tau}^{\prime}(\rho^2 + h^2) + R_n^{\prime}bh, \quad -m\rho^2 u_n^{-} = R_n^{\prime}(\rho^2 + b^2) + R_{\tau}^{\prime}bh, \quad (6)$$

и фазе восстановления

$$m\rho^2(u_{\tau}^{+} - u_{\tau}^{\prime}) = R_{\tau}^{\prime\prime}(\rho^2 + h^2) + kR_n^{\prime}bh, \quad m\rho^2 u_n^{+} = kR_n^{\prime}(\rho^2 + b^2) + R_{\tau}^{\prime\prime}bh \quad (7)$$

Отсюда

$$m\rho^2(u_{\tau}^{+} - u_{\tau}^{-}) = R_{\tau}(\rho^2 + h^2) + R_n bh,$$

$$m\rho^2(u_n^{+} - u_n^{-}) = R_n(\rho^2 + b^2) + R_{\tau}bh, \quad (8)$$

где $R_n = (1+k)R_n^{\prime}$, $R_{\tau} = R_{\tau}^{\prime} + R_{\tau}^{\prime\prime}$.

Примем гипотезу Рауса [1–4] о том, что при ударе трение сводится к сухому трению с коэффициентом трения f .

$$|R_{\tau}| \leq f R_n \quad (9)$$

Если точка соприкосновения в процессе удара в течение некоторого (бесконечно малого) интервала времени имеет постоянное направление в касательной скорости, то в этой фазе удара $R_{\tau} = -f R_n \text{sign } u_{\tau}$.

В результате удара точка соприкосновения S может в касательном к поверхности направлении остановиться или скользить в течение всего удара. При этом если в процессе удара под действием трения касательная скорость u_{τ} становится равной нулю в некоторый момент

времени $t^* \in [t^-, t^+]$. то это не означает, что в дальнейшем в процессе удара она останется равной нулю. Для того, чтобы $u_\tau \equiv 0$ при $t \in [t^*, t^+]$ должны выполняться соотношения $m\rho^2(u_\tau^+ - u_\tau^*) = 0 = R_\tau^{**}(\rho^2 + h^2) + R_n^{**}bh$, $|R_\tau^{**}| \leq fR_n^{**}$, где $u_\tau^* = 0$ – скорость точки соприкосновения в момент t^* , а R_τ^{**}, R_n^{**} – импульсы ударной силы реакции за время $[t^*, t^+]$. Отсюда

$$f \geq \frac{bh}{\rho^2 + h^2}. \quad (10)$$

Если условие (10) нарушено, то точка соприкосновения в силу геометрического положения тела начинает скольжение в дальнейшем в процессе удара, причем это скольжение направо или $u_\tau^+ > 0$, так как при этом $R_\tau^{**} = -fR_n^{**}$ и

$$m\rho^2(u_\tau^+ - u_\tau^*) = m\rho^2u_\tau^+ = R_\tau^{**}(\rho^2 + h^2) + R_n^{**}bh > 0.$$

Может произойти изменение направления скольжения точки соприкосновения в процессе удара. Сначала она скользит налево или с отрицательной скоростью, которая под действием силы трения уменьшается до нуля, а затем начинает скользить направо с увеличивающейся положительной скоростью.

Перейдем к рассмотрению различных типов удара в зависимости от того, как осуществляется скольжение в процессе удара.

1. Скольжение прекращается в фазе деформации $u'_\tau = u_\tau^+ = 0$.

Из уравнений удара (5) и (6) получаем

$$R'_n = m \frac{-u_n^-(\rho^2 + h^2) + u_\tau^-bh}{\rho^2 + b^2 + h^2}, \quad R'_\tau = m \frac{u_n^-bh - u_\tau^-(\rho^2 + b^2)}{\rho^2 + b^2 + h^2}, \quad (11)$$

$$R''_\tau = -\frac{bh}{\rho^2 + h^2}kR'_n, \quad u_n^+ = \frac{k}{m}(\rho^2 + b^2 + h^2)R'_n$$

Данный случай имеет место, тогда и только тогда, когда

$$u_n^- \leq 0, \quad f \geq \frac{bh}{\rho^2 + h^2}, \quad u_n^-(\rho^2 + h^2) - u_\tau^-bh \leq 0, \quad (12)$$

$$u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] \leq 0, \\ u_n^-[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 - fbh] \geq 0$$

2. Скольжение прекращается в фазе восстановления $\text{sign } u_\tau^- = \text{sign } u'_\tau$, $u_\tau^+ = 0$, $R'_\tau = -fR'_n \text{sign } u_\tau$. Из уравнений удара для фазы деформации и восстановления (6), (7) получаем

$$R'_n = \frac{-m\rho^2u_n^-}{\rho^2 + b^2 - fbh \text{sign } u_\tau}, \quad u'_\tau = u_\tau^- - u_n^- \frac{bh - f(\rho^2 + h^2) \text{sign } u_\tau}{\rho^2 + b^2 - fbh \text{sign } u_\tau} \quad (13)$$

$$R''_\tau = -\frac{kR'_n bh + m\rho^2u'_\tau}{\rho^2 + h^2}, \quad u_n^+ = \frac{kR'_n(\rho^2 + b^2) + R''_\tau bh}{m\rho^2}$$

Данный случай имеет место, тогда и только тогда, когда а) при скольжении направо

$$u_n^- \leq 0, \quad u_\tau^- > 0, \quad \frac{bh}{\rho^2 + h^2} \leq f \leq \frac{\rho^2 + b^2}{bh}, \quad (14)$$

$$u_n^-[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 - fbh] < 0, \\ (1+k)u_n^-[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 - fbh] \geq 0$$

б) при скольжении налево

$$u_n^- \leq 0, \quad u_\tau^- < 0, \quad f \geq \frac{bh}{\rho^2 + h^2}, \\ u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] > 0, \quad (15)$$

$$(1+k)u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] \leq 0$$

3. Полное скольжение (без изменения направления). В этом случае $\text{sign } u_\tau^- = \text{sign } u_\tau^+$, $R'_\tau = -fR'_n \text{sign } u_\tau$, $R''_\tau = -fR''_n \text{sign } u_\tau = -fkR'_n \text{sign } u_\tau$. Из уравнений удара для фазы деформации и восстановления (6), (7) получаем

$$R'_n = \frac{-m\rho^2u_n^-}{\rho^2 + b^2 - fbh \text{sign } u_\tau}, \quad u'_\tau = u_\tau^- - u_n^- \frac{bh - f(\rho^2 + h^2) \text{sign } u_\tau}{\rho^2 + b^2 - fbh \text{sign } u_\tau}, \quad (16)$$