Universität Dortmund
Lehrstuhl für Mechanik
Prof. em. Dr. S. Kessel

Technische Mechanik

Aufgabensammlung mit Musterlösungen

als Ergänzung zum Lehrbuch

Technische Mechanik - Technical Mechanics
S. Kessel / D. Fröhling
erschienen bei
B.G. Teubner Verlag Stuttgart - Leipzig

Die Technische Mechanik ist in den ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen ein Grundlagenfach, in dem gelernt werden soll, wie man ein technisches Problem auf der Basis physikalischer Grundgesetze in ein Simulationsmodell überführt, das sich mit Hilfe mathematischer Methoden analysieren läßt. Dieses Zusammenspiel von Physik, Geometrie, linearer Algebra und Analysis, das zunächst oft wie trickreiche Zauberei erscheint, folgt tatsächlich klaren systematischen Regeln, die man allerdings nur durchschaut, wenn man sich Aufgaben nicht nur vorrechnen läßt, sondern sich selbständig bemüht, den Lösungsweg zu finden und bis zum Ziel zu verfolgen.

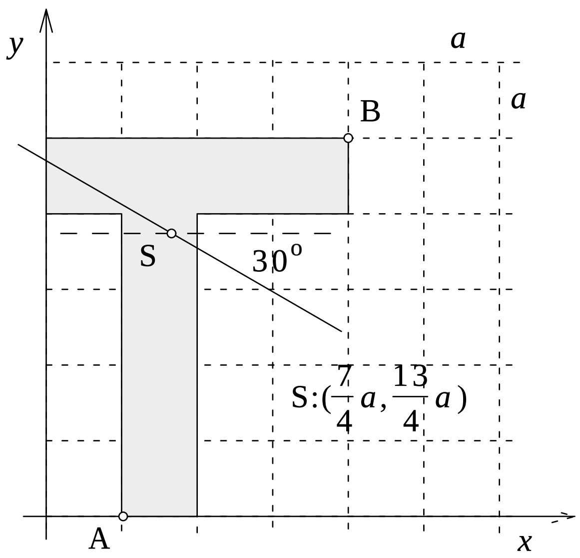
Diese Aufgabensammlung enthält zu den Gebieten, die in den Mechanik-Vorlesungen des Grundstudiums in der Regel behandelt werden, Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades. Es wird empfohlen, zunächst nur die jeweilige Aufgabenstellung zu lesen und die anschließende, meist ausführlich kommentierte Musterlösung, vor dem selbständigen Lösungsversuch nicht zu studieren. Erst wenn kein Lösungsansatz gefunden werden kann, sollte schrittweise die Hilfe der Musterlösung in Anspruch genommen werden.

Im Anhang wird auf den Einsatz von speziellen Computer-Programmen hingewiesen, mit deren Hilfe die expliziten Lösungen der Systemgleichungen bestimmt und die Ergebnisse graphisch dargestellt werden können.

Obwohl die Musterlösungen sorgfältig überprüft wurden, können immer noch Schreib- und/oder Rechenfehler unentdeckt geblieben sein. Deshalb wird bei Abweichungen zwischen Eigenergebnis und Musterergebnis empfohlen, sich beim Lehrstuhl für Mechanik um eine Klärung des Sachverhalts zu bemühen.

Aufgabe 1

Gegeben ist eine Fläche und eine Gerade durch den Punkt S.



Man berechne die Abstände der Flächenrandpunkte A und B von der Geraden.

Richtungsvektor der Geraden:

$$\vec{e} = \cos(30^\circ)\vec{e}_x - \sin(30^\circ)\vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x - \frac{1}{2}\vec{e}_y.$$

Zur Geraden orthogonaler Vektor:

$$\vec{e}_\perp = \cos(60^\circ)\vec{e}_x + \sin(60^\circ)\vec{e}_y = \frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y.$$

Ortsvektoren von S zu den Punkten A und B:

$$\overrightarrow{SA} = \begin{bmatrix} a - \frac{7}{4}a \\ -\frac{13}{4}a \end{bmatrix} = \frac{a}{4}\begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{SB} = \begin{bmatrix} 4a - \frac{7}{4}a \\ 5a - \frac{13}{4}a \end{bmatrix} = \frac{a}{4}\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Abstände der Punkte A und B von der Geraden durch S:

$$d_B = \overrightarrow{SB} \cdot \vec{e}_\perp, \qquad d_A = \overrightarrow{SA} \cdot (-\vec{e}_\perp),$$

$$d_B = \frac{a}{8}(9 + 7\sqrt{3}) = 2.641a,$$

$$d_A = \frac{a}{8}(3 + 13\sqrt{3}) = 3.19a.$$

Aufgabe 2

Die Gerade g_1 durch den Punkt A:$(0, 2L, 2L)$ in Richtung

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z),$$

und die Gerade g_2 durch den Punk B:$(2L,L,0)$ in Richtung

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z),$$

haben keinen Schnittpunkt (windschiefe Geraden). Man berechne den zu beiden Geraden orthogonalen Verbindungsvektor $\vec{v}$ zwischen den Geradenpunkten A* auf g_1 und B* auf g_2. Der Betrag von $\vec{v}$ wird als Abstand der beiden Geraden bezeichnet.

Ortsvektoren zu den Punkten A* und B*:

$$\overrightarrow{OA}^* = \overrightarrow{OA} + \lambda_1\vec{e}_1, \qquad \overrightarrow{OB}^* = \overrightarrow{OB} + \lambda_2\vec{e}_2.$$

λ_1 und λ_2 sind unbekannt.
Der Vektor

$$\vec{v} := \overrightarrow{A^*B^*} = \overrightarrow{OB}^* - \overrightarrow{OA}^* = \overrightarrow{AB} + \lambda_2\vec{e}_2 - \lambda_1\vec{e}_1$$

muss den beiden Orthogonalitätsbedingungen

$$\overrightarrow{A^*B^*}\cdot\vec{e}_1 = 0, \qquad \overrightarrow{A^*B^*}\cdot\vec{e}_2 = 0$$

genügen. Daraus ergeben sich zwei lineare Gleichungen zur Berechnung von λ_1 und λ_2:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + \lambda_2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1) &= -\overrightarrow{AB}\cdot\vec{e}_1, \\ -\lambda_1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) + \lambda_2 &= -\overrightarrow{AB}\cdot\vec{e}_2. \end{aligned} \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 2L \\ L \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2L \\ 2L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2L \\ -L \\ -2L \end{bmatrix},$$

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{14}}(-3+2+3) = \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{14}} =: h_0,$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{e}_1 = \frac{L}{\sqrt{11}}(6-1-2) = \frac{3L}{\sqrt{11}} =: h_1, \qquad \overrightarrow{AB}\cdot\vec{e}_2 = \frac{L}{\sqrt{14}}(-2-2-6) = -\frac{10L}{\sqrt{14}} =: h_2,$$

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + \lambda_2 h_0 &= -h_1, \\ -\lambda_1 h_0 + \lambda_2 &= -h_2, \end{aligned} \qquad \lambda_1 = \frac{h_2 h_0 - h_1}{h_0{}^2 - 1}, \quad \lambda_2 = \frac{h_2 - h_1 h_0}{h_0{}^2 - 1},$$

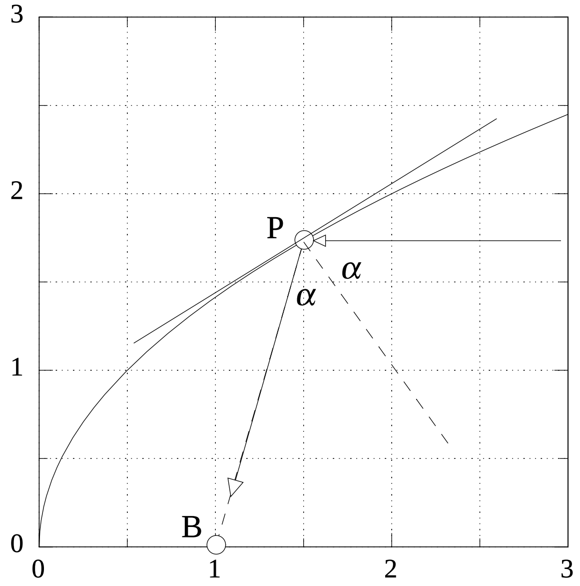
$$\lambda_1 = \frac{62\sqrt{11}}{150}L = 1.371L, \quad \lambda_2 = \frac{116\sqrt{14}}{150}L = 2.894L.$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{A^*B^*} = \overrightarrow{AB} + \lambda_2\vec{e}_2 - \lambda_1\vec{e}_1 = L\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{116}{150}L\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{62}{150}L\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{L}{150}\begin{bmatrix} -2 \\ 20 \\ -14 \end{bmatrix},$$

Abstand der beiden Geraden:

$$|\vec{v}| = \frac{L}{150}\sqrt{4+400+196} = \frac{L}{150}\sqrt{600} = 0.163L.$$

Aufgabe 3



Ein Lichtstrahl trifft parallel zur x-Achse im Punkt P auf die Parabel $y=\sqrt{2bx}$ und wird dort nach dem Reflexionsgesetz „Einfallswinkel = Austrittswinkel“ so umgelenkt, daß er durch den Punkt B auf der x-Achse geht. Man berechne die x-Koordinate des Punktes B.

Ortsvektor des Parabelpunktes P:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \qquad f(x) := \sqrt{2bx}$$

Tangenteneinheitsvektor $\vec{e}_s$ in P:

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \begin{bmatrix} 1 \\ f' \end{bmatrix} \qquad f'(x) := \frac{b}{f} \qquad \left|\frac{d\vec{r}}{dx}\right| = \frac{\sqrt{b^2+f^2}}{f}$$

$$\vec{e}_s = \frac{1}{\sqrt{b^2+f^2}}(f\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y).$$

Hauptnormaleneinheitsvektor $\vec{e}_n$ in P:

$$\vec{e}_n = \vec{e}_s \times \vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{b^2+f^2}}(b\,\vec{e}_x - f\,\vec{e}_y).$$

Winkelfunktionen des Einfallswinkels α:

$$\cos\alpha = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_n = \frac{b}{\sqrt{b^2+f^2}}, \qquad \sin\alpha = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_s = \frac{f}{\sqrt{b^2+f^2}}.$$

Richtungsvektor des in P in Richtung B reflektierten Lichtstrahls:

$$\vec{e}* = \cos\alpha\,\vec{e}_n - \sin\alpha\,\vec{e}_s = \frac{1}{b^2+f^2}\begin{bmatrix} b^2-f^2 \\ -2bf \end{bmatrix}.$$

Ortsvektor zu einem Punkt auf dem reflektierten Strahl:

$$\vec{r}* = \vec{r} + \lambda\vec{e}* = \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{b^2+f^2}\begin{bmatrix} b^2-f^2 \\ -2bf \end{bmatrix}.$$

Im Punkt B ist $y^* = 0$:

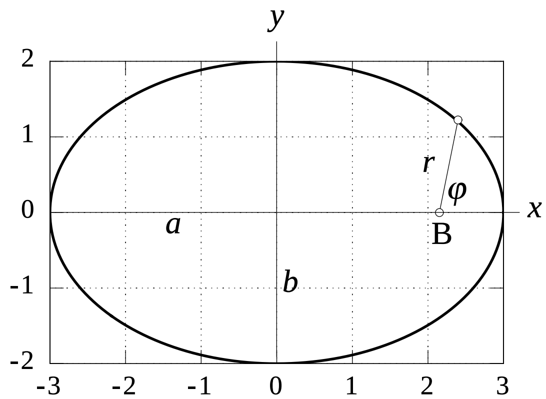
$$f - \lambda\frac{2bf}{b^2+f^2} = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{b^2+f^2}{2b};$$

x-Koordinate des Punktes B:

$$x* = x + \frac{b^2+f^2}{2b}\,\frac{b^2-f^2}{b^2+f^2} = x + \frac{b^2-f^2}{2b} = x + \frac{b^2-2bx}{2b} = \frac{b}{2}.$$

Alle parallel zur x-Achse einfallenden Lichtstrahlen werden in den Brennpunkt B:$(b/2,\ 0)$ der Parabel $y = \sqrt{2bx}$ reflektiert.

Aufgabe 4



Der auf der positiven x-Achse liegende Brennpunkt B der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hat die x-Koordinate $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Man berechne die auf B bezogene Polarkoordinatendarstellung $\{r(\varphi), \varphi\}$.

Für einen Punkt auf der Ellipse gilt

$$x = e + r\cos\varphi = a(\varepsilon + \rho\cos\varphi), \qquad y = r\sin\varphi = a\rho\sin\varphi; \qquad (\varepsilon := \frac{e}{a}, \quad \rho := \frac{r}{a})$$

$$(\varepsilon + \rho\cos\varphi)^2 + \frac{\rho^2\sin^2\varphi}{1-\varepsilon^2} = 1.$$

Diese quadratische Gleichung für $\rho(\varphi)$ wird zunächst auf die Normalform gebracht:

$$(1-\varepsilon^2)(\varepsilon^2 + \rho^2\cos^2\varphi + 2\rho\varepsilon\cos\varphi) + \rho^2(1-\cos^2\varphi) = (1-\varepsilon^2),$$

$$\rho^2(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi) + (1-\varepsilon^2)2\rho\varepsilon\cos\varphi = (1-\varepsilon^2)^2,$$

$$\rho^2 + 2\rho\frac{(1-\varepsilon^2)\varepsilon\cos\varphi}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi} = \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}.$$

Von den beiden Lösungen

$$\rho_{1,2} = -\frac{(1-\varepsilon)^2\varepsilon\cos\varphi}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi} \pm \sqrt{\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi} + \left(\frac{(1-\varepsilon^2)\varepsilon\cos\varphi}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\right)^2}$$

ist nur die positive sinnvoll:

$$\rho = -\frac{(1-\varepsilon)^2\varepsilon\cos\varphi}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi} + \frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^2(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi) + (1-\varepsilon^2)^2\varepsilon^2\cos^2\varphi}}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi},$$

$$\rho = \frac{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon\cos\varphi)}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi},$$

$$\rho = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\varphi};$$

$$r(\varphi) = a\,\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi}.$$

Die Funktion

$$u(\varphi) := \frac{1}{r(\varphi)} = \frac{a}{b^2} + \frac{e}{b^2}\cos\varphi$$

besitzt die Ableitungen

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{e}{b^2}\sin\varphi, \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{e}{b^2}\cos\varphi,$$

und erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u(\varphi)}{d\varphi^2} + u(\varphi) = \frac{a}{b^2}.$$

$$u(\varphi) := \frac{1}{r(\varphi)} = \frac{a}{b^2} + \frac{e}{b^2}\cos\varphi$$

ist die Lösung der Differentialgleichung zu den Anfangsbedingungen

$$u(\varphi)\big|_{\varphi=0} = \frac{a+e}{b^2} = \frac{1}{a-e}, \qquad \frac{du(\varphi)}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=0} = 0.$$

Aufgabe 5

Man berechne für die ebene Kurve

$$\vec{r}(x) = x\vec{e}_x + f(x)\vec{e}_y,$$

wobei x der Kurvenparameter ist, die Tangenteneinheitsvektoren $\vec{e}_s(x)$, die Krümmungen $1/\rho(x)$ und die Hauptnormaleneinheitsvektoren $\vec{e}_n(x)$.

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}(x)}{dx}dx = \{\vec{e}_x + f'(x)\vec{e}_y\},$$

$$ds = |d\vec{r}| = \left|\frac{d\vec{r}(x)}{dx}\right| dx = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+(f'(\xi))^2}\,d\xi. \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

Das Integral kann meistens nur numerisch ausgewertet werden.

$$\vec{e}_s(x) = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dx}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dx}\right|}, \qquad \vec{e}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\{\vec{e}_x + f'(x)\vec{e}_y\}.$$

$$\frac{d\vec{e}_s(x)}{dx} = -\frac{1}{2}\{1+(f')^2\}^{-\frac{3}{2}}\,2ff''\begin{bmatrix}1\\ f'\end{bmatrix} + \{1+(f')^2\}^{-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}0\\ f''\end{bmatrix},$$

$$\frac{d\vec{e}_s(x)}{dx} = \{1+(f')^2\}^{-\frac{3}{2}}\left\{\begin{bmatrix}-ff''\\ -(f')^2 f''\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ (1+(f')^2)f''\end{bmatrix}\right\},$$

$$\frac{d\vec{e}_s(x)}{dx} = \{1+(f')^2\}^{-\frac{3}{2}} f''\begin{bmatrix}-f'\\ 1\end{bmatrix}, \qquad \left|\frac{d\vec{e}_s(x)}{dx}\right| = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2},$$

$$\frac{1}{\rho}\vec{e}_n = \frac{d\vec{e}_s}{ds} = \frac{d\vec{e}_s(x)}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{d\vec{e}_s(x)}{dx}\frac{1}{\dfrac{ds}{dx}} = \frac{\dfrac{d\vec{e}_s(x)}{dx}}{\left|\dfrac{d\vec{e}_s(x)}{dx}\right|}\,\frac{\left|\dfrac{d\vec{e}_s(x)}{dx}\right|}{\dfrac{ds}{dx}},$$

$$\vec{e}_n(x) = \frac{\dfrac{d\vec{e}_s(x)}{dx}}{\left|\dfrac{d\vec{e}_s(x)}{dx}\right|}, \qquad \frac{1}{\rho(x)} = \frac{\left|\dfrac{d\vec{e}_s(x)}{dx}\right|}{\dfrac{ds}{dx}},$$

$$f''(x) = |f''(x)| sign(f''(x)), \qquad sign(f''(x)) := \begin{cases} +1 & \text{wenn } f''(x) > 0 \\ -1 & \text{wenn } f''(x) < 0 \end{cases}$$

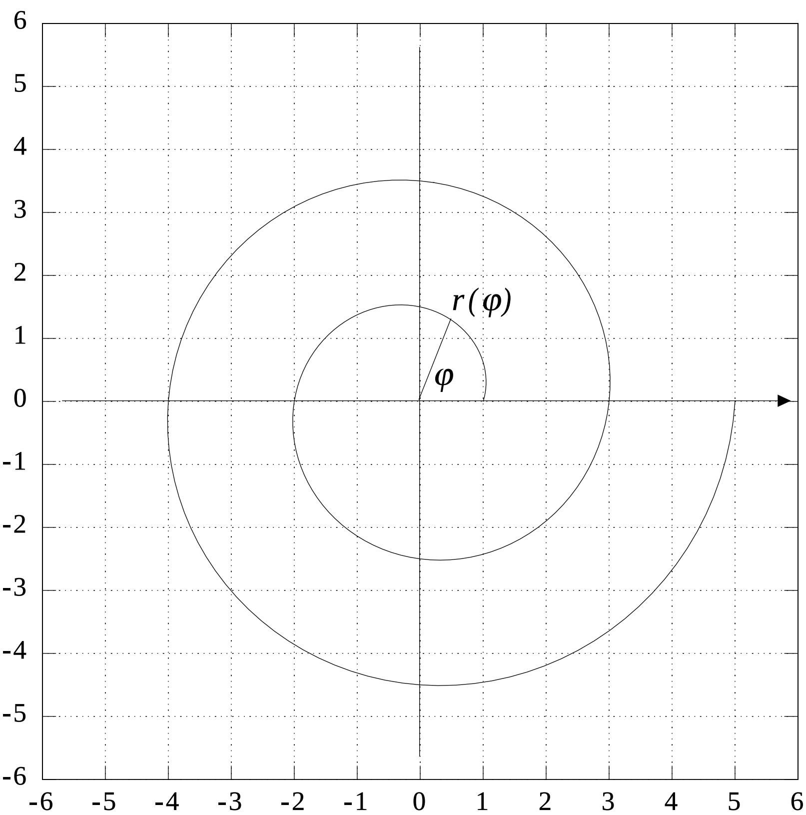
$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{|f''(x)|}{\{1+(f'(x))^2\}^{3/2}}, \qquad \vec{e}_n(x) = \frac{sign(f''(x))}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\{-f'(x)\vec{e}_x + \vec{e}_y\}.$$

Aufgabe 6

Für die in Polarkoordinaten gegebene Spirale

$$\vec{r}(\varphi) = \{r_0 + \frac{h}{2\pi}\varphi\}\vec{e}_r(\varphi).$$

berechne man die Tangenteneinheitsvektoren und die Bogenlänge $s(\varphi)$.



$(r_0 = 1, \quad h = 2, \quad 0 \le \varphi \le 4\pi)$

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = H\{\vec{e}_r + (\xi + \varphi)\vec{e}_\varphi\}, \qquad H := \frac{h}{2\pi}, \qquad \xi := \frac{r_0}{H}.$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| = H\sqrt{1+(\xi+\varphi)^2},$$

$$\vec{e}_s(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+(\xi+\varphi)^2}}\{\vec{e}_r + (\xi+\varphi)\vec{e}_\varphi\}.$$

$$ds = H\sqrt{1+(\xi+\varphi)^2}\,d\varphi, \qquad s(\varphi) = H\int_0^\varphi \sqrt{1+(\xi+\varphi)^2}\,d\varphi,$$

$$\xi+\varphi =: \psi, \qquad \to \qquad d\varphi = d\psi, \qquad s(\varphi) = H\int_\xi^{\xi+\varphi}\sqrt{1+\psi^2}\,d\psi,$$

$$s(\varphi) = \frac{H}{2}\{\psi\sqrt{1+\psi^2} + \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\}\Big|_{\psi=\xi}^{\psi=\xi+\varphi}.$$

Aufgabe 7

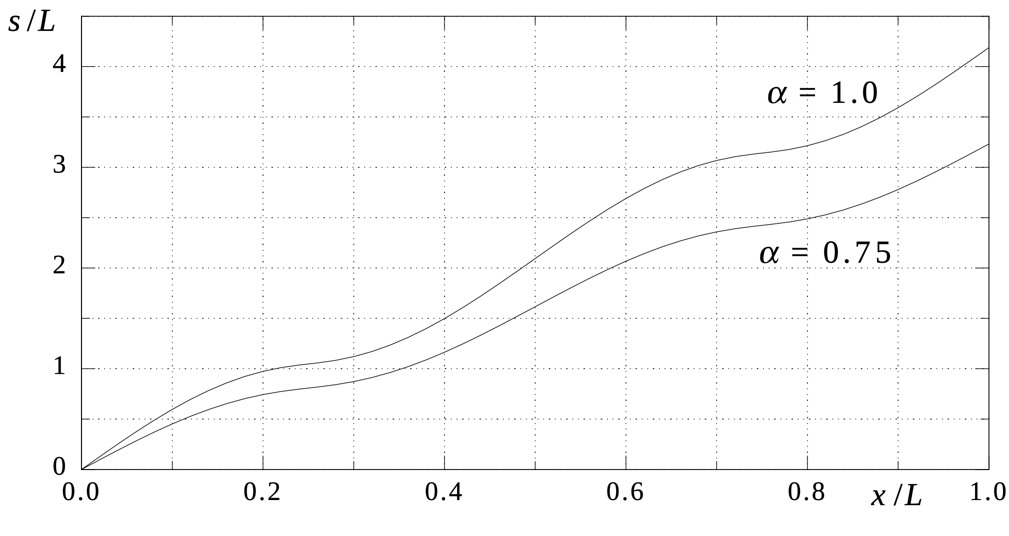
Man berechne numerisch die Bogenlänge einer Sinuskurve mit der Periode L und der Amplitude αL sowie den Krümmungsradius in den Scheitelpunkten der Kurve.

$$f(x) = \alpha L \sin(2\pi\frac{x}{L}), \qquad f'(x) = 2\pi\alpha\cos(2\pi\frac{x}{L}).$$

$$ds = \sqrt{1+(f')^2}\,dx,$$

Differentialgleichung für $s(x)$:

$$\frac{x}{L} =: \xi \qquad \to \qquad \frac{ds}{dx} = \frac{ds}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L}\frac{ds}{d\xi}, \qquad \frac{ds}{d\xi} = L\sqrt{1+\{2\pi\alpha\cos(2\pi\xi)\}^2}.$$



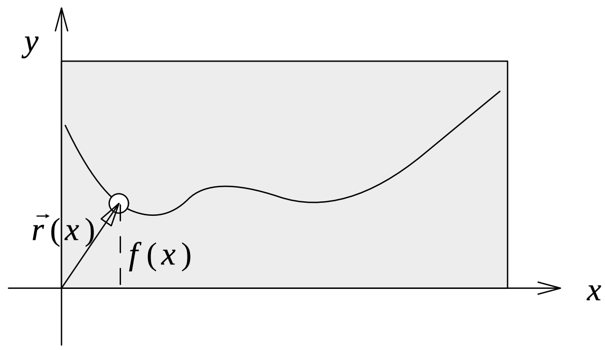
Berechnung der Krümmungsradien $\rho(x)$:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{|f''(x)|}{\{1+(f'(x))^2\}^{3/2}}, \qquad f''(x) = -4\pi^2\frac{\alpha}{L}\sin(2\pi\frac{x}{L}),$$

$$x = \frac{L}{4} \qquad \to \qquad f' = 0, \quad f'' = -4\pi^2\frac{\alpha}{L}, \qquad \rho(\frac{L}{4}) = \frac{L}{4\pi^2\alpha} = 0.025\frac{L}{\alpha}.$$

Aufgabe 8

Die zur z-Achse eines raumfesten Koordinatensystems parallele Achse eines Fräsers bewegt sich entlang der Kurve $y = f(x)$ über die Werkstückfläche in der xy-Ebene. Der Fräser hat den Durchmesser $2R$ und fräst eine Nut in das Werkstück. Man berechne die Gleichungen der Nutflanken.



$$\vec{r} = x\vec{e}_x + f(x)\vec{e}_y$$

Tangenteneinheitsvektor:

$$\vec{e}_s = \frac{\frac{d\vec{r}}{dx}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dx}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}(\vec{e}_x + f'\vec{e}_y).$$

(Linker) Normaleneinheitsvektor:

$$\vec{n} := \vec{e}_z \times \vec{e}_s = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}(\vec{e}_z \times \vec{e}_x + f'\vec{e}_z \times \vec{e}_y) = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}(\vec{e}_y - f'\vec{e}_x).$$

Linke Flanke der Nut:

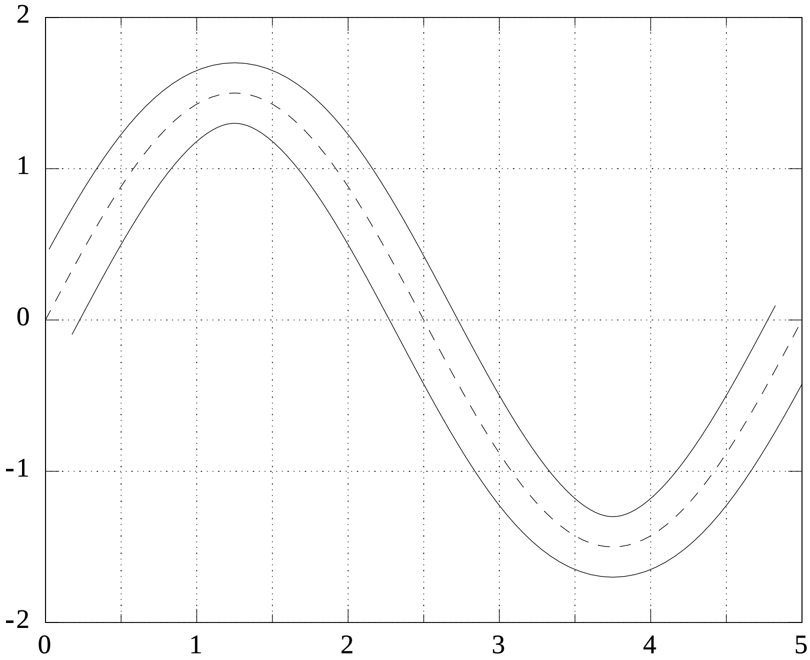
$$\vec{r}_L = \vec{r} + R\vec{n} = (x - \frac{Rf'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}})\vec{e}_x + (f(x) + \frac{R}{\sqrt{1+(f'(x))^2}})\vec{e}_y.$$

Rechte Flanke der Nut:

$$\vec{r}_L = \vec{r} - R\vec{n} = (x + \frac{Rf'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}})\vec{e}_x + (f(x) - \frac{R}{\sqrt{1+(f'(x))^2}})\vec{e}_y.$$

Beispiel:

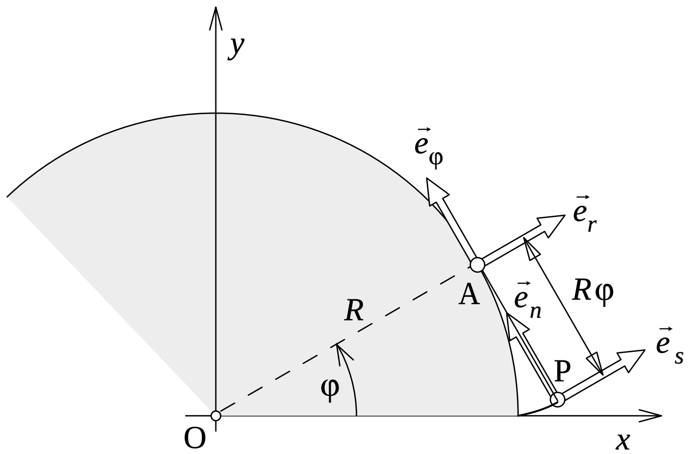
$$f(x) = A\sin(2\pi\frac{x}{\lambda}), \qquad f'(x) = 2\pi\frac{A}{\lambda}\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}),$$



$(A = 1{,}5 \qquad R = 0{,}2 \qquad \lambda = 5)$

Aufgabe 9

Wenn in der xy-Ebene ein Faden von einem Kreiszylinder abgewickelt wird, beschreibt der Endpunkt P des straff gespannten Fadens eine ebene Kurve, die man *Kreisevolvente* nennt. Man berechne die Parameterdarstellung, die Bogenlänge, die Tangenten- und die Hauptnormaleneinheitsvektoren der Kurve.



Der Ortsvektor des Punktes P läßt sich am besten in Zylinderkoordinaten darstellen:

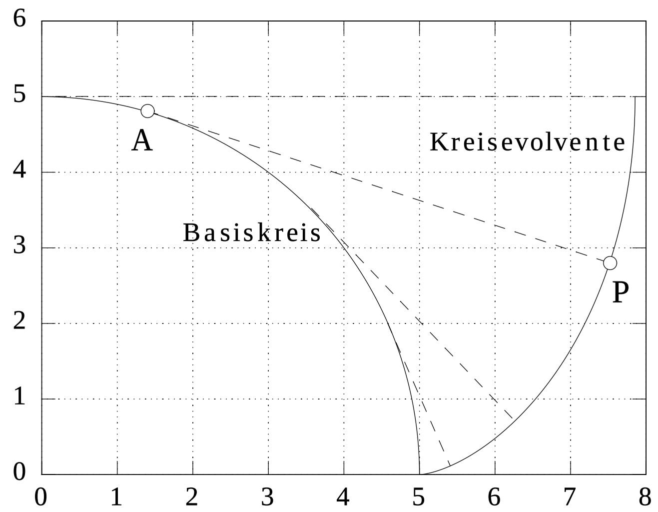
$$\vec{r}(\varphi) = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = R\,\vec{e}_r(\varphi) - R\varphi\,\vec{e}_\varphi(\varphi).$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = R\,\vec{e}_\varphi - R\,\vec{e}_\varphi + R\varphi\,\vec{e}_r = R\varphi\,\vec{e}_r, \qquad \left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| = R\varphi,$$

$$ds = R\varphi\,d\varphi, \qquad s(\varphi) = \frac{1}{2}R\varphi^2.$$

$$\vec{e}_s = \frac{d\vec{r}/d\varphi}{|d\vec{r}/d\varphi|} = \vec{e}_r.$$

$$\frac{1}{\rho}\vec{e}_n := \frac{d\vec{e}_s}{ds} = \frac{d\vec{e}_s}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\vec{e}_s}{d\varphi}\frac{1}{|ds/d\varphi|} = \vec{e}_\varphi\frac{1}{R\varphi}, \qquad \rho = R\varphi, \qquad \vec{e}_n = \vec{e}_\varphi.$$



Aufgabe 10

Auf der Mantelfläche eines Kreiskegelstumpfes (Radien R_0, R_h, Höhe h) verläuft eine Schraubenlinie, die bei einem Umlauf die Höhe h erreicht. Man berechne die Formel für die Länge L der Raumkurve.

In Zylinderkoordinaten gilt

$$r(z) = R_0 - \frac{R_0 - R_h}{h}z, \qquad z(\varphi) = \frac{h}{2\pi}\varphi,$$

$$\frac{R_0 - R_h}{2\pi} =: R, \qquad \frac{h}{2\pi} =: H.$$

$$\vec{r}(\varphi) = (R_0 - R\,\varphi)\vec{e}_r(\varphi) + H\,\varphi\vec{e}_z.$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = -R\,\vec{e}_r(\varphi) + (R_0 - R\,\varphi)\vec{e}_\varphi(\varphi) + H\,\vec{e}_z,$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| = \sqrt{R^2 + (R_0 - R\varphi)^2 + H^2},$$

$$ds = \left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| d\varphi = \sqrt{a_2\varphi^2 + a_1\varphi + a_0}\, d\varphi,$$

$$a_2 := R^2, \qquad a_1 := -2R_0R, \qquad a_0 := H^2 + R^2 + R_0{}^2.$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a_2\varphi^2 + a_1\varphi + a_0}\, d\varphi.$$

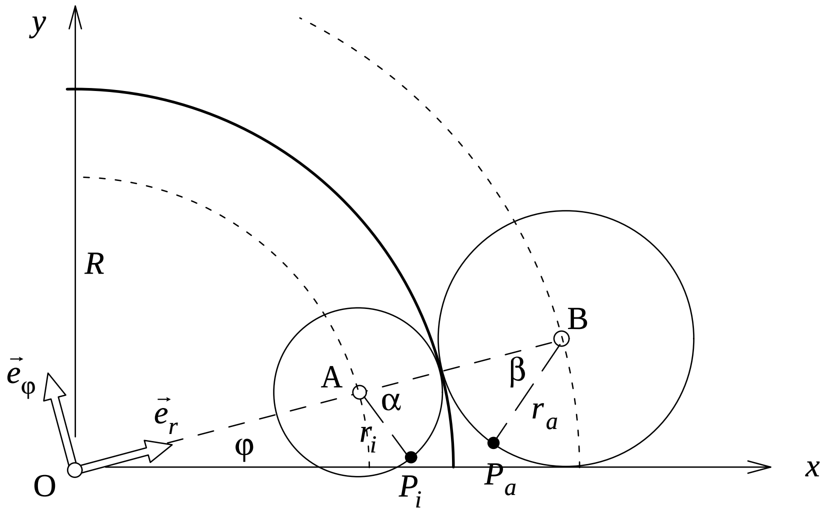
Spezielle Werte:

$$R_0 = 10\,\text{cm}, \qquad R_h = 5\,\text{cm}, \qquad h = 4\,\text{cm},$$

$$a_2 = 0{,}6333\ \text{cm}^2, \qquad a_1 = -15{,}9155\ \text{cm}^2, \qquad a_0 = 101{,}0385\ \text{cm}^2;$$

numerische Integration: $L = 47{,}574\,\text{cm}$.

Aufgabe 11



Auf der Innen- und der Außenseite eines Kreises (Radius R) rollen Kreise mit den Radien r_i und r_a. Man berechne die Bahnkurven der Punkte P_i und P_a, die in der Lage $\varphi = 0$ im Punkt $(x = R, y = 0)$ Kontaktpunkte waren.

Die Rollbedingungen lauten:

$$r_i\alpha = R\varphi, \qquad r_a\beta = R\varphi.$$

Mit dem Kurvenparameter φ lauten die Ortsvektoren der Punkte P_i und P_a

$$\overrightarrow{OP_i} = (R - r_i)\vec{e}_r + r_i\cos\alpha\,\vec{e}_r - r_i\sin\alpha\,\vec{e}_\varphi,$$

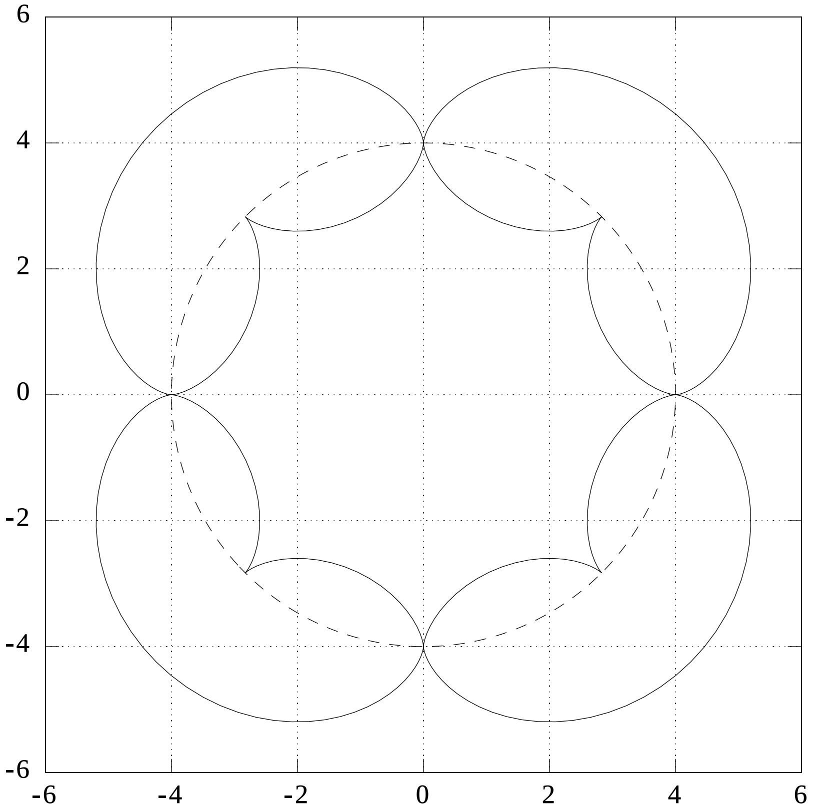
$$\vec{OP}_i = \{R - r_i + r_i \cos(\frac{R}{r_i}\varphi)\}\begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix} - r_i \sin(\frac{R}{r_i}\varphi)\begin{bmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{bmatrix},$$

$$\vec{OP}_a = (R + r_a)\vec{e}_r - r_a \cos\beta\,\vec{e}_r - r_a \sin\beta\,\vec{e}_\varphi,$$

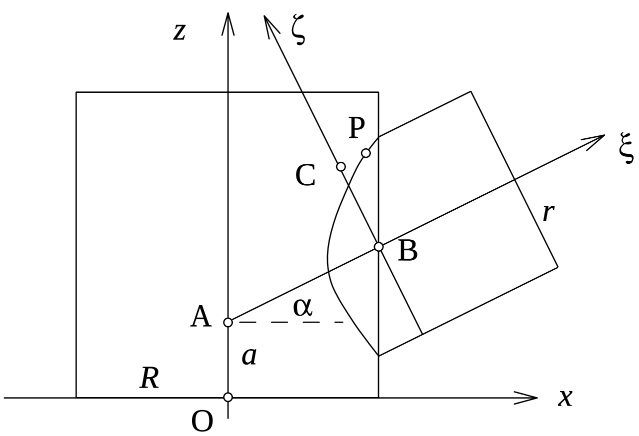
$$\vec{OP}_a = \{R + r_a - r_a \cos(\frac{R}{r_a}\varphi)\}\begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix} - r_a \sin(\frac{R}{r_a}\varphi)\begin{bmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{bmatrix}.$$

Für die folgende Abbildung wurde gewählt:

$$R = 4r, \qquad r_i = 0.5r, \qquad r_a = r.$$



Aufgabe 12



Berechnet werden soll die Schnittkurve zweier Kreiszylinder mit den Radien R und r, deren Achsen in der xz-Ebene liegen und nicht parallel sind.

Der Ortsvektor zu einem Punkt P der Schnittkurve

$$\vec{\mathrm{OP}} = \vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{BC}} + \vec{\mathrm{CP}}$$

erhält mit den Basisvektoren

$$\begin{aligned}
\vec{e}_\xi &= \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z,\\
\vec{e}_\eta &= \vec{e}_y,\\
\vec{e}_\zeta &= -\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_z,
\end{aligned}$$

die Darstellung

$$\vec{\mathrm{OP}} = a\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{R}{\cos\alpha}\begin{bmatrix}\cos\alpha\\0\\\sin\alpha\end{bmatrix} + (r\cos\varphi\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + r\sin\varphi\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\0\\\cos\alpha\end{bmatrix}) + h(\varphi)\begin{bmatrix}\cos\alpha\\0\\\sin\alpha\end{bmatrix}.$$

Dabei sind r,φ und $h(\varphi)$ die Zylinderkoordinaten des Punktes P in der $\{\xi,\eta,\zeta\}$-Basis des schrägen Kreiszylinders und $h(\varphi)$ ist der noch nicht bekannte Abstand des Schnittkurvenpunktes P von der Ebene $\xi = 0$. Weil der Punkt P auf dem vertikalen Kreiszylinder liegt, muß der Abstand des Punktes P von der z-Achse den Wert R annehmen:

$$\sqrt{(\vec{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e}_x)^2 + (\vec{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e}_y)^2} = R,$$

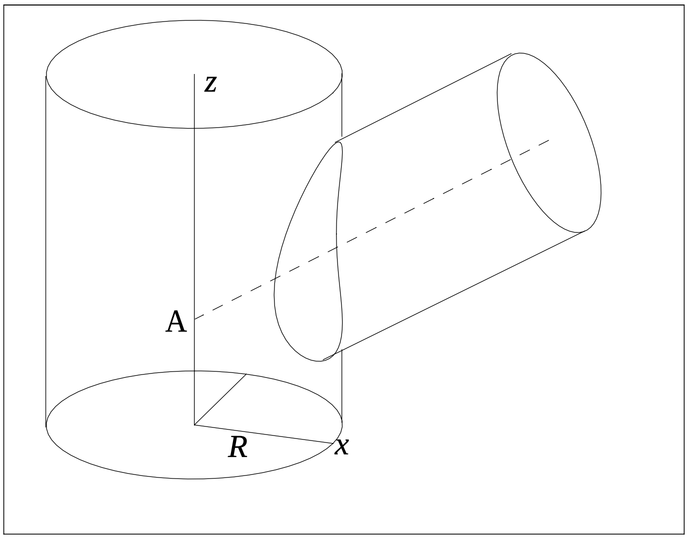
$$(R - r\sin\varphi\sin\alpha + h(\varphi)\cos\alpha)^2 + (r\cos\varphi)^2 = R^2.$$

Daraus erhalten wir den Abstand des Punktes P von der Ebene $\xi = 0$:

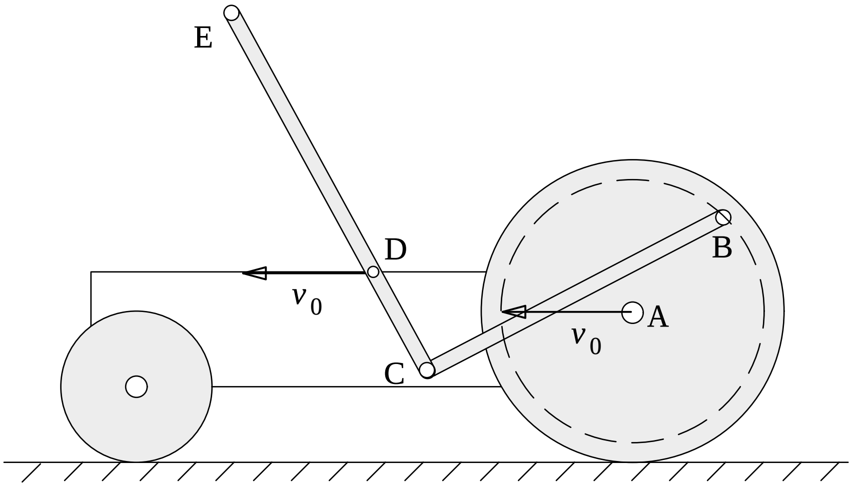
$$h(\varphi) = \frac{\sqrt{R^2 - (r\cos\varphi)^2} - R + r\sin\varphi\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Damit ist die Darstellung der Schnittkurve mit Hilfe des Kurvenparameters $\{0 \le \varphi \le 2\pi\}$ bekannt:

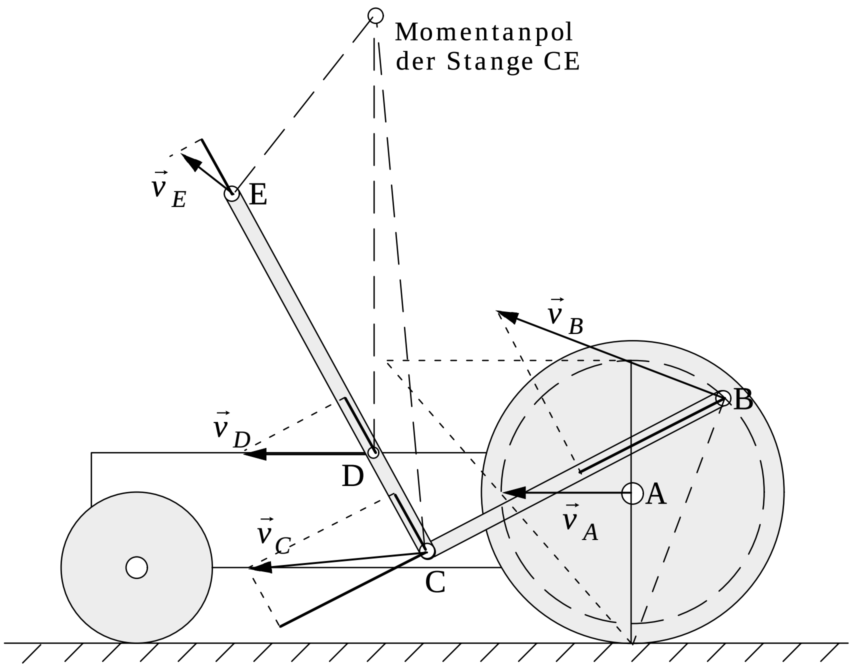
$$\vec{\mathrm{OP}} = \begin{bmatrix} R - r\sin\varphi\sin\alpha + h(\varphi)\cos\alpha \\ r\cos\varphi \\ a + R\tan\alpha + r\sin\varphi\cos\alpha + h(\varphi)\sin\alpha \end{bmatrix}.$$


z
A
R
x

Aufgabe 1

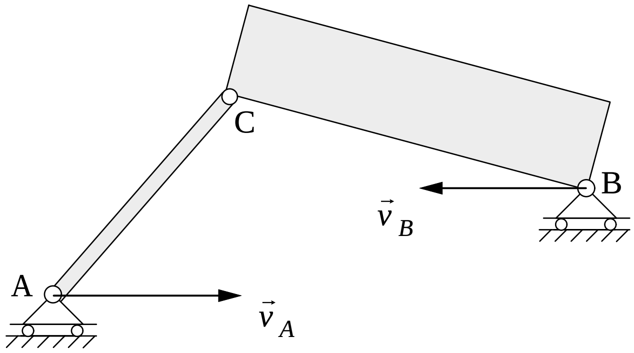


Man konstruiere die Geschwindigkeitsvektoren des Radpunktes B, des Gelenkpunktes C und des Stabendpunktes E unter der Voraussetzung, daß das in A gelagerte Rad rollt und der Drehpunkt D mit dem Wagenkasten fest verbunden ist.

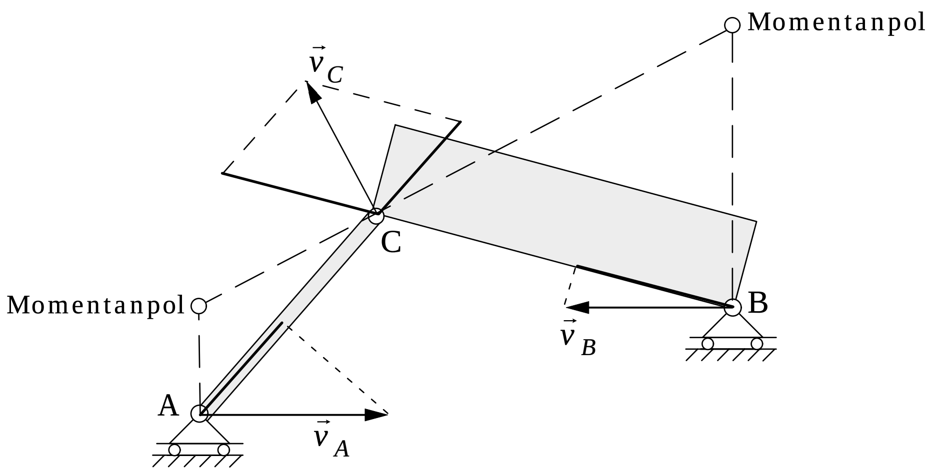


Zunächst wird, ausgehend von der gegebenen Geschwindigkeit des Punktes A, der Geschwindigkeitsvektor von B konstruiert. Dann bestimmt man in B die Projektion von $\vec{v}_B$ auf die Strecke BC und in D die Projektion von $\vec{v}_D = \vec{v}_A$ auf die Strecke CE. $\vec{v}_C$ kann nun aus diesen beiden Projektionen bestimmt werden. Im Schnittpunkt der Lote auf $\vec{v}_C$ und $\vec{v}_D$ liegt der Momentanpol der Stange CE. Aus der bekannten Projektion von $\vec{v}_E$ auf die Strecke CE und der Lage des Momentanpols ergibt sich schließlich $\vec{v}_E$.

Aufgabe 2



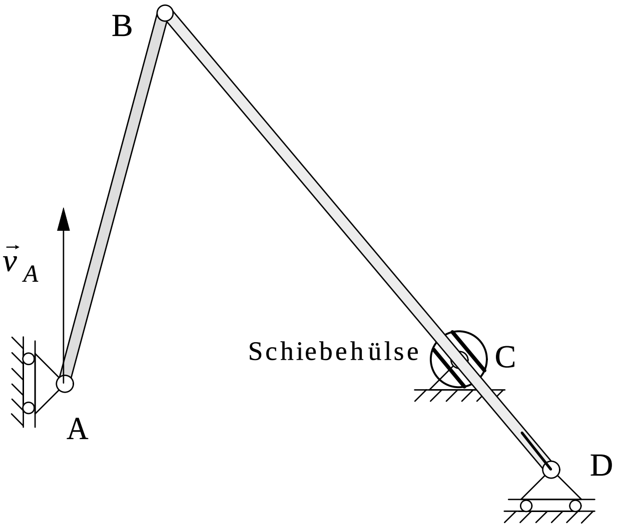
Man bestimme graphisch den Geschwindigkeitsvektor des Punktes C und die Momentanpole der Stange und der Rechteckscheibe im dargestellten momentanen Geschwindigkeitszustand der Körperpunkte A und B.

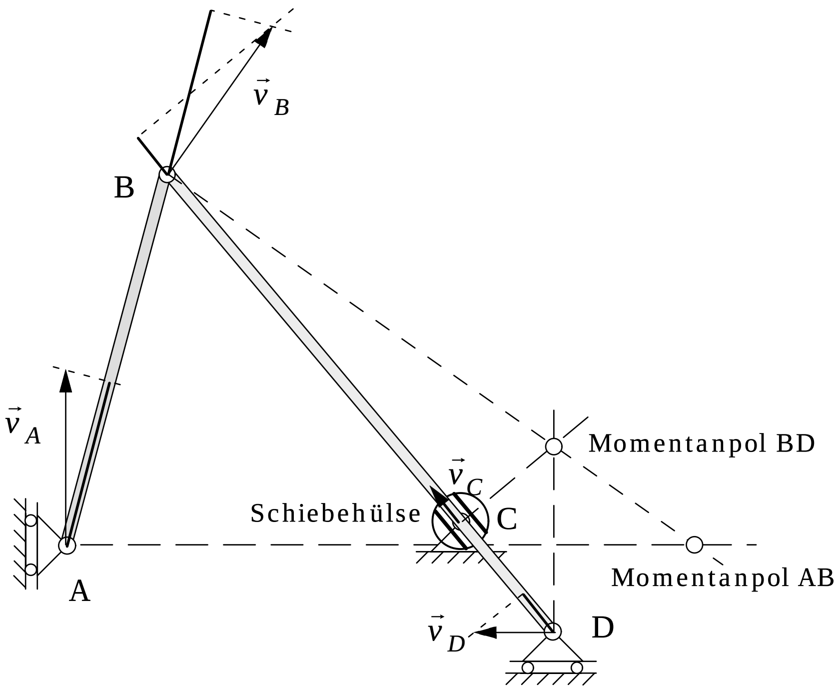


$\vec{v}_C$ wird aus den Projektionen von $\vec{v}_A$ auf die Strecke AC und $\vec{v}_B$ auf die Strekke BC konstruiert. In den Schnittpunkten der Lote auf $\vec{v}_C$ mit den Loten auf $\vec{v}_A$ und $\vec{v}_B$ liegen die beiden Momentanpole.

Aufgabe 3

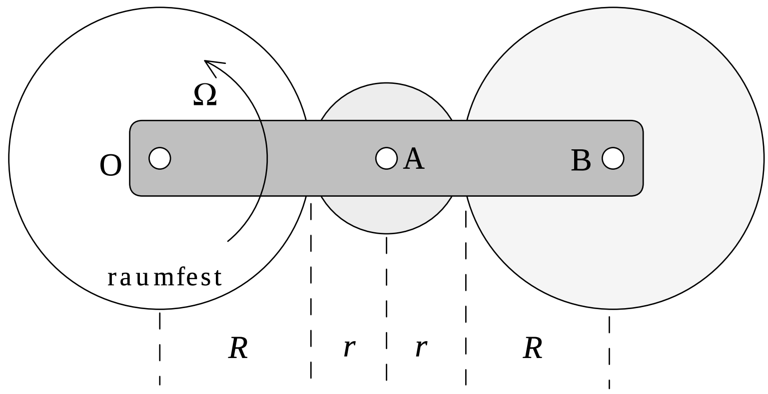
Die Endpunkte A und D zweier in B gelenkig verbundener Stangen werden auf geraden Bahnen geführt und die Stange BD durch eine Schiebehülse in C. Gegeben ist der Geschwindigkeitsvektor des Punktes A. Man konstruiere die Momentanpole der Stangen AB und BD sowie die Geschwindigkeitsvektoren der Gelenkpunkte B und D.



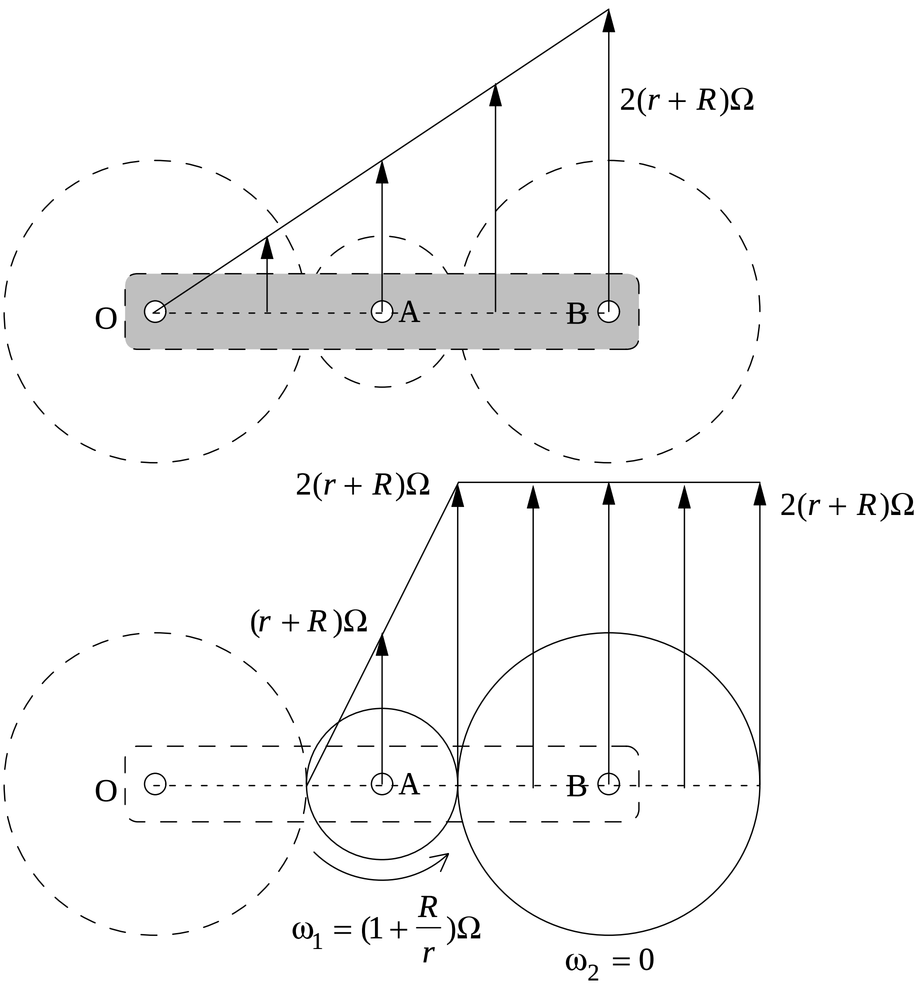


Die Richtung von $\vec{v}_C$ ist durch die momentane Stellung der Schiebehülse bestimmt, also parallel zur Strecke BD. Im Schnittpunkt der Lote auf die Geschwindigkeitsvektoren der Punkte C und D liegt der Momentanpol der Stange BD. Daraus ergibt sich zunächst die Richtung von $\vec{v}_B$. Nun ist noch zu beachten: Die Projektionen von $\vec{v}_A$ und $\vec{v}_B$ auf die Strecke AB müssen gleich sein; so erhält man $\vec{v}_B$. Schließlich kann die Projektion von $\vec{v}_B$ auf die Strecke BD konstruiert werden. Damit kennt man $\vec{v}_C$ und mit Hilfe des Momentanpols der Stange BD auch $\vec{v}_D$. Der Momentanpol der Stange AB liegt im Schnittpunkt der Lote auf $\vec{v}_A$ und $\vec{v}_B$.

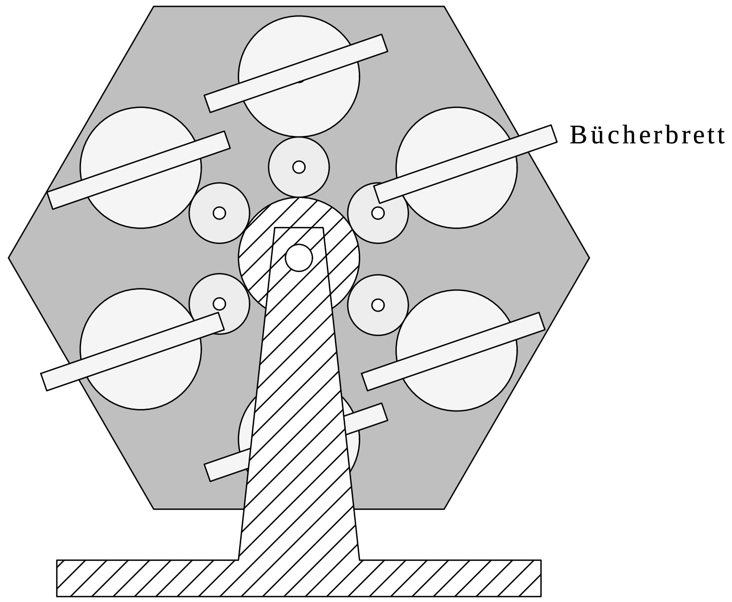
Aufgabe 4



In den Punkten A und B eines Planetenradgetriebes, das sich um den raumfesten Punkt O mit der Winkelgeschwindigkeit Ω dreht, ist jeweils ein Zahnrad gelagert. Das in A gelagerte Rad (Radius r) rollt auf einem raumfesten Zahnrad (Radius R) und auf dem in B gelagerten Rad (Radius R). Man konstruiere die momentanen Geschwindigkeitsvektoren der Punkte auf der Geraden durch O und B.

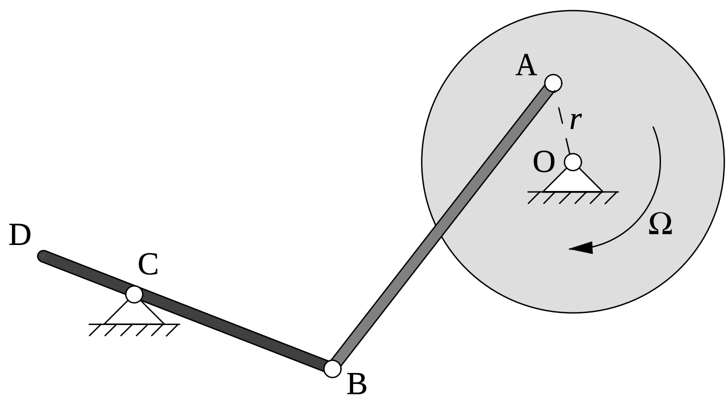


Anwendung:

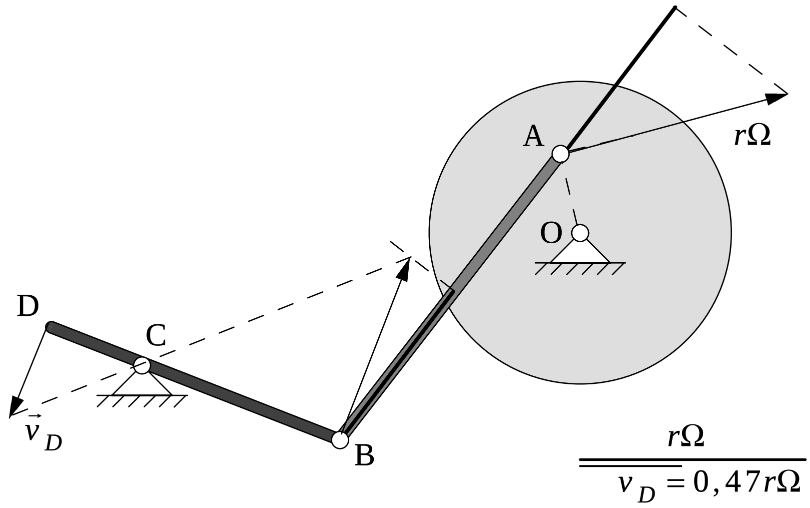


In der sehr besuchenswerten Wolfenbütteler Herzog August Bibliothek ist ein Bücherrad ausgestellt, das mit Hilfe eines Planetenradgetriebes bei Drehung des Rades die eingebauten Bücherpulte so auf einer vertikalen Kreisbahn führt, daß dabei die Neigung der Pulte konstant bleibt. Das Getriebe - erstmals 1588 von dem italienischen Ingenieur Agostini Ramelli beschrieben - besteht aus einem raumfesten Sonnenrad (Radius R) sowie für jedes Bücherpult aus einem Planetenrad (Radius r) und einem mit dem Bücherpult auf einer gemeinsamen Achse sitzenden Planetenrad (Radius R).

Aufgabe 5



Man bestimme graphisch den Geschwindigkeitsvektor des Punktes D in der momentanen Konfiguration, wenn sich das Schwungrad nach dem Gesetz $\varphi = \Omega t$ dreht.



Der Betrag des Vektors $\vec{v}_D$ kann am Geschwindigkeitsmaßstab für $r\Omega$ abgelesen werden.

Aufgabe 1

Auf der in Polarkoordinaten gegebenen Kurve

$$\vec{r}(\varphi) = L(1+\varphi)\vec{e}_r(\varphi)$$

bewegt sich ein Punkt so, daß die Geschwindigkeitsvektorkomponente

$$v_\varphi = \vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi = c = const$$

ist. Man berechne die Funktionen $\varphi(t), R(t) = |\vec{r}(t)|$ und die Bahngeschwindigkeit als Funktion von t.

$$\vec{v} = L\dot{\varphi}\vec{e}_r + L(1+\varphi)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

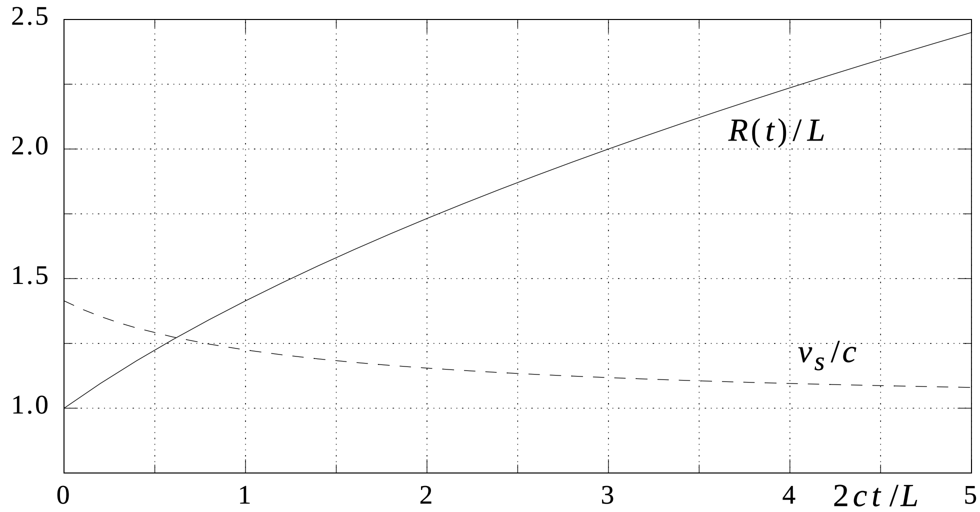
$$\vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi = c \qquad \rightarrow \qquad L(1+\varphi)\dot{\varphi} = c,$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{L}{2}(1+\varphi)^2\right\} = c, \qquad \rightarrow \quad \frac{L}{2}(1+\varphi)^2 = ct + A; \qquad \varphi(0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{L}{2}.$$

$$(1+\varphi)^2 = \frac{2c}{L}t + 1, \qquad \varphi(t) = \sqrt{\frac{2c}{L}t + 1} - 1.$$

$$R(t) = L(1+\varphi(t)) = L\sqrt{\frac{2c}{L}t + 1}.$$

$$v_s = L\dot{\varphi}\sqrt{1 + (1+\varphi)^2} = L\dot{\varphi}\sqrt{2 + \frac{2c}{L}t}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{c}{L\sqrt{\frac{2c}{L}t + 1}}, \qquad v_s(t) = c\frac{\sqrt{\frac{2c}{L}t + 2}}{\sqrt{\frac{2c}{L}t + 1}}.$$



Aufgabe 2

Ein Punkt kann sich auf einer Raumkurve nach dem Weg-Zeit-Gesetz

$$s(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3$$

bewegen. Wie müssen die Konstanten C_0, C_1, C_2 und C_3 gewählt werden, wenn der Punkt zur Zeit $t = 0$ in $s = 0$ aus der Ruhe heraus starten und zur Zeit $t = T$ in

$s = L$ zum Stehen kommen soll?

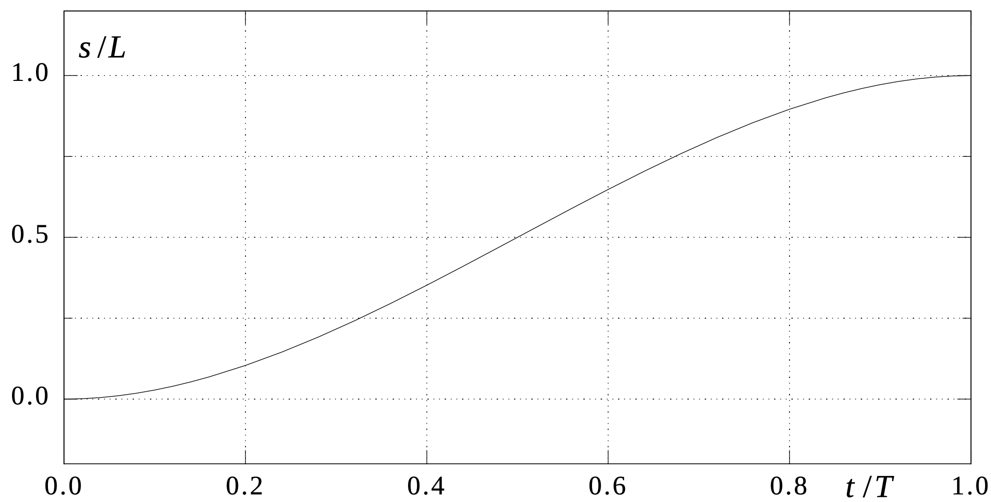
Die Anfangs- und Endbedingungen

$$s(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = 0, \quad s(T) = L, \quad \dot{s}(L) = 0$$

liefern das folgende Gleichungssystem für die Konstanten:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0, \\ C_1 &= 0, \\ C_0 + C_1 T + C_2 T^2 + C_3 T^3 &= L, \\ C_1 + 2C_2 T + 3C_3 T^2 &= 0. \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} C_2 + C_3 T &= \frac{L}{T^2}, \\ 2C_2 + 3C_3 T &= 0. \end{aligned}$$

$$C_2 = \frac{3L}{T^2}, \qquad C_3 = -\frac{2L}{T^3}. \qquad\qquad s(t) = \frac{3L}{T^2} t^2 - \frac{2L}{T^3} t^3.$$



Aufgabe 3

Auf der in Polarkoordinaten gegebenen Spirale

$$\vec{r}(\varphi) = r_0 \varphi \vec{e}_r(\varphi) \qquad r_0 = const$$

bewegt sich ein Punkt nach dem Winkel-Zeit-Gesetz

$$\varphi(t) = \omega_0 t, \qquad \omega_0 = const.$$

Man berechne die Tangentenvektoren, Hauptnormaleneinheitsvektoren und Krümmungen der ebenen Kurve, sowie die Bahngeschwindigkeit, die Bahnbeschleunigung und die Zentripetalbeschleunigung des Punktes P.

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = r_0(\vec{e}_r + \varphi \vec{e}_\varphi), \qquad \left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| = r_0\sqrt{1+\varphi^2}, \qquad \vec{e}_s = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(\vec{e}_r + \varphi \vec{e}_\varphi).$$

$$\frac{d\vec{e}_s}{d\varphi} = -\varphi(1+\varphi^2)^{-3/2}(\vec{e}_r + \varphi\vec{e}_\varphi) + (1+\varphi^2)^{-1/2}(2\vec{e}_\varphi - \varphi\vec{e}_r),$$

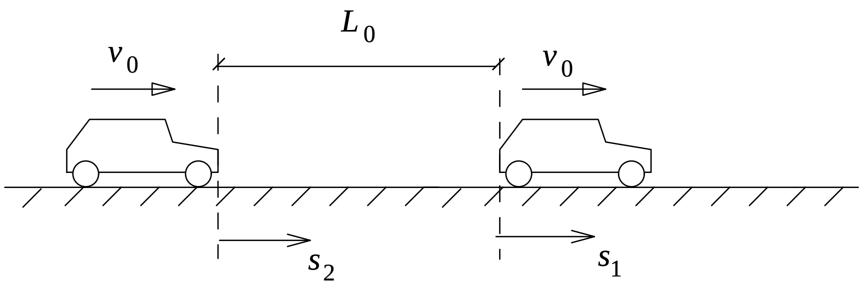
$$\frac{d\vec{e}_s}{d\varphi} = (1+\varphi^2)^{-3/2}(2+\varphi^2)\{-\varphi\vec{e}_r + \vec{e}_\varphi\}, \qquad \left|\frac{d\vec{e}_s}{d\varphi}\right| = \frac{2+\varphi^2}{1+\varphi^2},$$

$$\vec{e}_n = \frac{\dfrac{d\vec{e}_s}{d\varphi}}{\left|\dfrac{d\vec{e}_s}{d\varphi}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}(-\varphi\vec{e}_r + \vec{e}_\varphi), \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\left|\dfrac{d\vec{e}_s}{d\varphi}\right|}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{d\varphi}\right|} = \frac{1}{r_0}\frac{2+\varphi^2}{(1+\varphi^2)^{3/2}}.$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi}\dot{\varphi} = \omega_0 r_0(\vec{e}_r + \omega_0 t\,\vec{e}_\varphi), \qquad v_s = \omega_0 r_0\sqrt{1+(\omega_0 t)^2}.$$

$$a_s = \dot{v}_s = \frac{\omega_0{}^3 r_0 t}{\sqrt{1+(\omega_0 t)^2}}. \qquad a_n = \frac{v_s{}^2}{\rho} = \omega_0{}^2 r_0 \frac{2+(\omega_0 t)^2}{\sqrt{1+(\omega_0 t)^2}}.$$

Aufgabe 4



Zwei Fahrzeuge haben zum Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit v_0 und den Abstand L_0. Das erste Fahrzeug wird ab $t = 0$ mit konstanter Verzögerung $0{,}8g$ bis zum Stand abgebremst. Man berechne die Bremswege für unterschiedliche Fahrgeschwindigkeiten v_0.

Der Fahrer im zweiten Fahrzeug bremst nach einer Reaktionszeit $t_R = 1\text{s}$. Für unterschiedliche Bremsintensitäten $0{,}6g$ und $0{,}4g$ berechne man die erforderlichen Sicherheitsabstände.

Man berechne die Zahl der Fahrzeuge, die mit der Geschwindigkeit v_0 pro Stunde eine Kontrollstelle passieren können, wenn in Kolonne gefahren wird und die erforderlichen Sicherheitsabstände eingehalten werden.

1. Fahrzeug:

$$\ddot{s}_1 = -a_1, \quad \rightarrow \quad \dot{s}_1 = v_0 - a_1 t, \quad \rightarrow \quad s_1 = v_0 t - \frac{1}{2}a_1 t^2;$$

Bremszeit t_B:

$$\dot{s}_1(t_B) = v_0 - a_1 t_B = 0 \qquad \rightarrow \qquad t_B = \frac{v_0}{a_1}.$$

Bremsweg:

$$s_1(t_B) = v_0 t_B - \frac{1}{2} a_1 t_B^{\,2} = \frac{1}{2}\frac{v_0^{\,2}}{a_1}.$$

2. Fahrzeug:

Bremsbeginn zum Zeitpunkt $t = t_R$:

$$\ddot{s}_2 = -a_2, \qquad \rightarrow \qquad \dot{s}_2 = v_0 - a_2(t - t_R), \qquad \rightarrow \qquad s_2 = v_0 t - \frac{1}{2} a_2 (t - t_R)^2 \qquad (t \geq t_R)$$

Anhaltezeit:

$$\dot{s}_2(t_A) = v_0 - a_2(t_A - t_R) = 0 \qquad \rightarrow \qquad t_A = t_R + \frac{v_0}{a_2},$$

Anhalteweg:

$$s_2(t_A) = v_0 t_A - \frac{1}{2}\frac{v_0^{\,2}}{a_2} = v_0 t_R + \frac{1}{2}\frac{v_0^{\,2}}{a_2}.$$

Abstand der Fahrzeuge bei Stand des zweiten Fahrzeugs:

$$\Delta L = L_0 + s_1(t_B) - s_2(t_A).$$

Sicherheitsabstand L_S:

$$L_0 = L_S \qquad \rightarrow \qquad \Delta L = 0 \qquad \rightarrow \qquad L_S = s_2(t_A) - s_1(t_B) = v_0 t_R + \frac{v_0^{\,2}}{2}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)$$

v_0	v_0	$L_{S(a_2=0{,}8g)}$	$L_{S(a_2=0{,}6g)}$	$L_{S(a_2=0{,}4g)}$
80 km / h	22,22 m / s	22,22 m	32,71 m	53,68 m
100 km / h	27,78 m / s	27,78 m	44,17 m	76,95 m
120 km / h	33,33 m / s	33,33 m	56,92 m	104,11 m

Fahrzeugdurchsatz bei Fahrzeugen der Länge L_F:

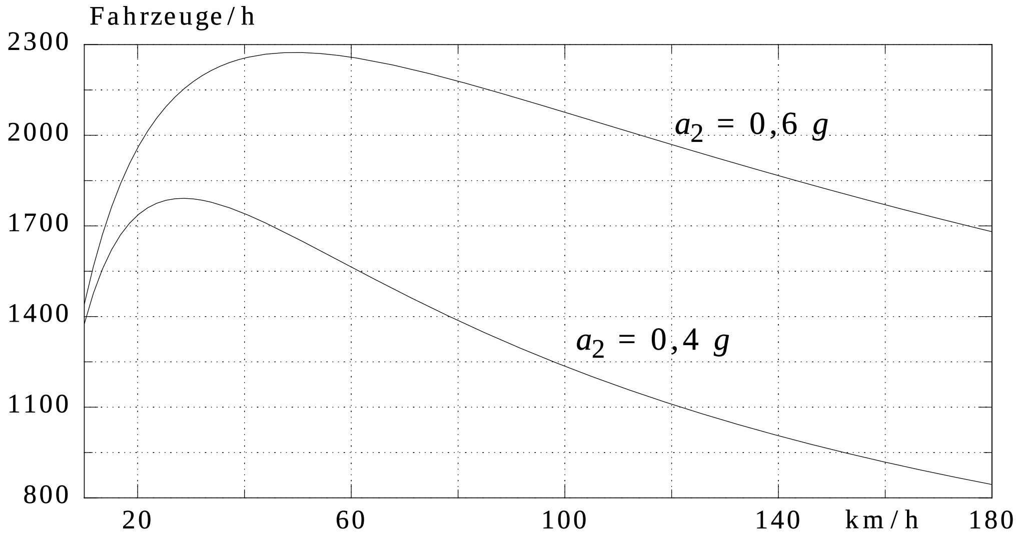
Dauer der Vorbeifahrt eines Fahrzeugs mit der Bezugslänge $L^* := L_F + L_S$ bei der Geschwindigkeit v_0:

$$\Delta t(v_0) = \frac{L^*}{v_0} = \frac{L_F + L_S(v_0)}{v_0}.$$

Zahl der Fahrzeuge, die in einer Stunde an einer Meßstelle vorbeifahren können:

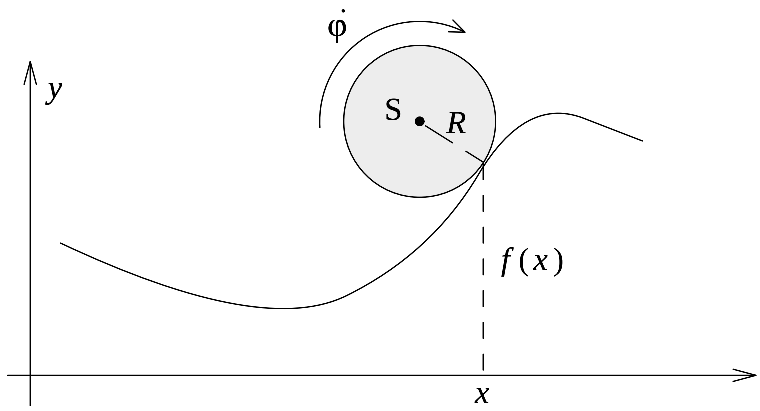
$$n = \frac{3600\,\mathrm{s}}{\Delta t} = 3600\,\mathrm{s}\frac{v_0}{L_F + L_S(v_0)}.$$

Mit den speziellen Werten $L_F = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 0{,}8\,g$, $t_R = 1\mathrm{s}$ erhalten wir die in der folgenden Abbildung dargestellte Funktion $n(v_0)$:



Aufgabe 5

Eine Rad (Radius R) rollt auf einer Bahn, die durch die Funktion $y = f(x)$ gegeben ist. Man berechne die Bahnkurve des Radschwerpunktes, den Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ des Rades, wenn die x-Koordinate des Kontaktpunktes als Funktion der Zeit gegeben ist.



Ortsvektor der Bahnkurve:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + f(x)\vec{e}_y$$

Tangenteneinheitsvektor:

$$\vec{e}_1 = \frac{\frac{d\vec{r}}{dx}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dx}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}(\vec{e}_x + f'\vec{e}_y).$$

Normaleneinheitsvektor (links-orientiert):

$$\vec{e}_2 := \vec{e}_z \times \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}(\vec{e}_y - f'\vec{e}_x).$$

Ortsvektor zum Schwerpunkt des Rades:

$$\vec{r}_S = \vec{r} + R\,\vec{e}_2 = (x - \frac{Rf'}{\sqrt{1+(f')^2}})\vec{e}_x + (f(x) + \frac{R}{\sqrt{1+(f')^2}})\vec{e}_y.$$

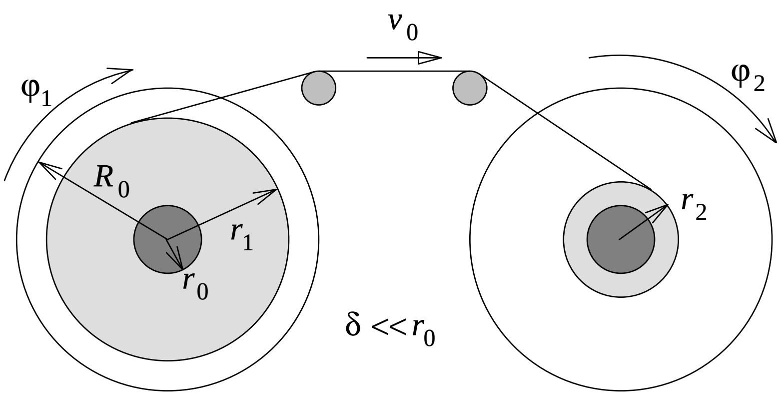
Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes:

$$\vec{v}_S = \frac{d\vec{r}_S}{dx}\dot{x} = (1 - \frac{Rf''}{(1+(f')^2)^{3/2}})\dot{x}(\vec{e}_x + f\vec{e}_y) = (\sqrt{1+(f')^2} - \frac{Rf''}{1+(f')^2})\dot{x}\,\vec{e}_1.$$

Rollbedingung (Kontaktpunkt = Momentanpol):

$$\vec{v}_S = (-\dot{\varphi}\vec{e}_z) \times (R\,\vec{e}_2) = R\dot{\varphi}\vec{e}_1, \qquad \dot{\varphi} = (\frac{\sqrt{1+(f')^2}}{R} - \frac{f''}{1+(f')^2})\dot{x}.$$

Aufgabe 6



Die Winkelgeschwindigkeit einer Tonbandspule ist nicht konstant. Die Banddicke δ sei sehr klein im Vergleich mit dem Spulenkernradius r_0. Man berechne die Winkelgeschwindigkeiten der Tonbandspulen als Funktionen der Zeit t, wobei angenommen werden soll, daß für die veränderlichen Spulenradien der linken und der rechten Spule

$$r_1 = R_0 - \frac{\delta}{2\pi}\varphi_1 \qquad r_2 = r_0 + \frac{\delta}{2\pi}\varphi_2$$

gilt, mit φ_1 und φ_2 als Drehwinkel der Spulen. v_0 ist die konstante Bandgeschwindigkeit.

Kinematische Zwangsbedingung: $r_1\dot\varphi_1 = r_2\dot\varphi_2 = v_0$.

$$(R_0 - \frac{\delta}{2\pi}\varphi_1)\dot\varphi_1 = v_0, \qquad (r_0 + \frac{\delta}{2\pi}\varphi_2)\dot\varphi_2 = v_0,$$

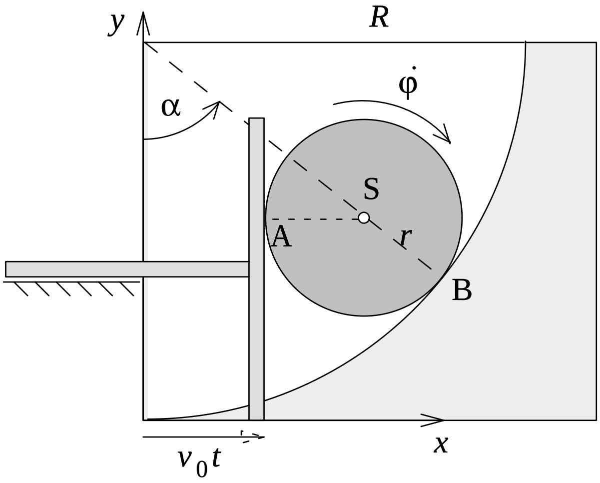
$$R_0\varphi_1 - \frac{\delta}{4\pi}\varphi_1{}^2 = v_0 t + C_1 \qquad r_0\varphi_2 + \frac{\delta}{4\pi}\varphi_2{}^2 = v_0 t + C_2,$$

$$\varphi_1(0) = 0, \qquad \varphi_2(0) = 0, \qquad \rightarrow \qquad C_1 = 0, \qquad C_2 = 0.$$

$$\varphi_1(t) = \frac{2\pi R_0}{\delta}\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{v_0\delta}{\pi R_0{}^2}t}\right\}, \qquad \varphi_2(t) = \frac{2\pi r_0}{\delta}\left\{-1 + \sqrt{1 + \frac{v_0\delta}{\pi r_0{}^2}t}\right\},$$

$$\dot\varphi_1(t) = \frac{v_0}{R_0}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0\delta}{\pi R_0{}^2}t}}, \qquad \dot\varphi_2(t) = \frac{v_0}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_0\delta}{\pi r_0{}^2}t}}.$$

Aufgabe 7



Eine Kreisscheibe (Radius r) wird von einem Schieber auf einer Kreisbahn (Radius R) in x-Richtung geschoben. Der Kontaktpunkt B sei Momentanpol. Man berechne die Winkelgeschwindigkeit der Kreisscheibe sowie die Geschwindigkeiten der Punkte S und A.

$$x_S = v_0 t + r, \qquad \dot x_S = v_0;$$

$$(R-r)\sin\alpha = x_S, \qquad \alpha = \arcsin\frac{v_0 t + r}{R - r}, \qquad \dot\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{(R-r)^2 - (v_0 t + r)^2}};$$

$$y_S = R - (R-r)\cos\alpha, \qquad \dot y_S = (R-r)\dot\alpha\sin\alpha;$$

B ist Momentanpol:

$$\left.\begin{aligned} v_S &= (R-r)\dot{\alpha} \\ v_S &= r\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{R-r}{r}\dot{\alpha} \qquad \text{(Rollbedingung)}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_S + \vec{\omega}\times\overrightarrow{SB} = \vec{0}, \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_S - r\dot{\varphi}\cos\alpha \\ \dot{y}_S - r\dot{\varphi}\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

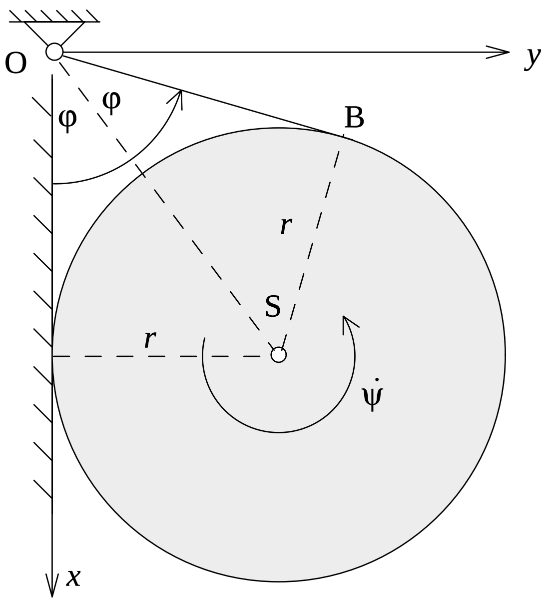
$$\dot{x}_S = r\dot{\varphi}\cos\alpha, \qquad \rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{v_0}{r\cos\alpha},$$

$$\dot{y}_S = r\dot{\varphi}\sin\alpha, \qquad \rightarrow \qquad \dot{y}_S = \frac{v_0}{r}\tan\alpha;$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r - r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = r\dot{\varphi}\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ 1+\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{v}_A \cdot \vec{e}_y = r\dot{\varphi}(1+\sin\alpha) = v_0\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{(Gleitgeschwindigkeit)}$$

Aufgabe 8



Eine Kreisscheibe rollt von einem in O befestigten Faden ab und gleitet dabei auf der vertikalen Wand. Man berechne die Geschwindigkeit des Schwerpunktes und die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe als Funktionen des Winkels φ und dessen Zeitableitungen.

Koordinaten und Geschwindigkeit des Schwerpunktes:

$$x_S = \frac{r}{\tan\varphi}, \qquad y_S = r, \qquad \dot{x}_S = -\frac{r\dot{\varphi}}{\sin^2\varphi}, \qquad \dot{y}_S = 0.$$

Geschwindigkeit des Punktes B:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_S + \dot{\psi}\vec{e}_z \times \overrightarrow{SB} = \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r\sin(2\varphi) \\ r\cos(2\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_S - r\dot{\psi}\cos(2\varphi) \\ -r\dot{\psi}\sin(2\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

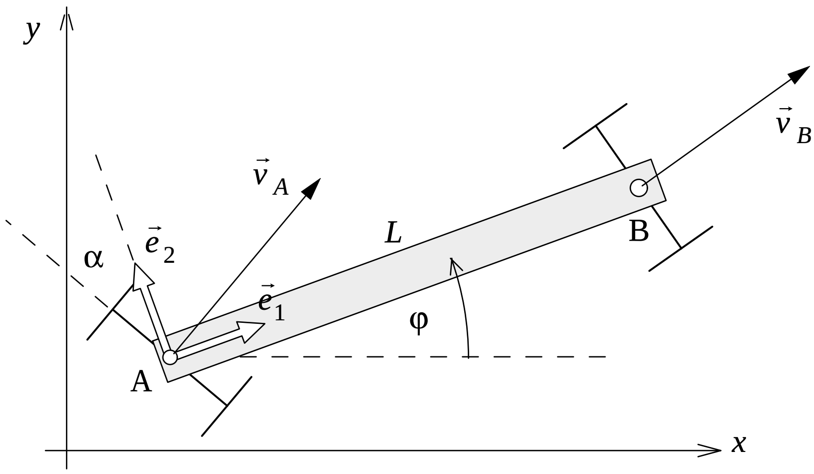
Kinematische Rollbedingung im Punkt B:

$$\vec{v}_B \cdot \vec{e}_{OB} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{v}_B \cdot \begin{bmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{x}_S \cos(2\varphi) - r\dot{\psi} = 0.$$

Winkelgeschwindigkeit der Kreisscheibe:

$$\dot{\psi} = \frac{\cos(2\varphi)}{r}\dot{x}_S = -\frac{\cos(2\varphi)}{\sin^2\varphi}\dot{\varphi} = (1 - \frac{1}{\tan^2\varphi})\dot{\varphi}.$$

Aufgabe 9



Das Bewegungsgesetz $\{x_B(t), y_B(t)\}$ des Fahrzeugpunktes B sei gegeben. Die im Punkt A gelagerte Hinterachse kann nach dem Gesetz $\alpha(t)$ gesteuert werden. Man berechne die Differentialgleichung für den Winkel $\varphi(t)$ und die Bahnkurve des Punktes A.

$$\vec{e}_x = \cos\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\,\vec{e}_2, \qquad \vec{e}_y = \sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2.$$

$$\vec{v}_B = \dot{x}_B\vec{e}_x + \dot{y}_B\vec{e}_y = (\dot{x}_B\cos\varphi + \dot{y}_B\sin\varphi)\vec{e}_1 + (-\dot{x}_B\sin\varphi + \dot{y}_B\cos\varphi)\vec{e}_2.$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \dot{\varphi}\vec{e}_3 \times (-L\,\vec{e}_1) = \vec{v}_B - L\dot{\varphi}\vec{e}_2, \qquad \vec{v}_A = v_A(\cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_2),$$

$$v_A \cos\alpha = \dot{x}_B \cos\varphi + \dot{y}_B \sin\varphi, \qquad \big|\cdot(\sin\alpha)$$
$$v_A \sin\alpha = -\dot{x}_B \sin\varphi + \dot{y}_B \cos\varphi - L\,\dot{\varphi}, \qquad \big|\cdot(-\cos\alpha)$$

$$0 = \dot{x}_B \sin(\varphi+\alpha) - \dot{y}_B \cos(\varphi+\alpha) + L\,\dot{\varphi}\cos\alpha,$$

Differentialgleichung für $\varphi(t)$:

$$\dot{\varphi} = -\dot{x}_B \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{L\cos\alpha} + \dot{y}_B \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{L\cos\alpha}. \quad \to \quad \varphi(t).$$

$$x_A(t) = x_B(t) - L\cos\varphi, \qquad y_A(t) = y_B(t) - L\sin\varphi.$$

1. Sonderfall: Der Punkt B bewegt sich auf der x-Achse:

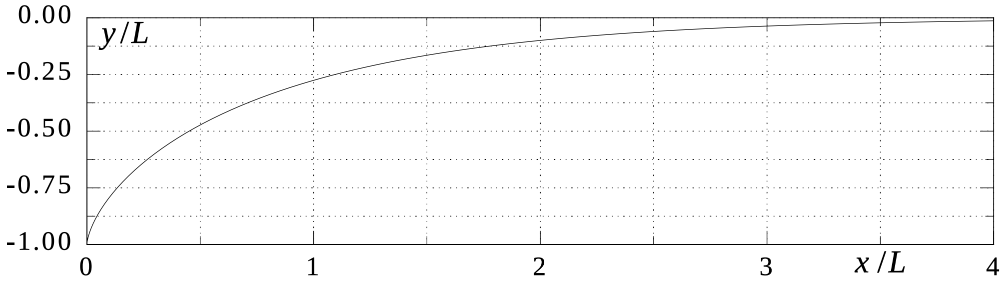
$$\alpha(t) \equiv 0, \qquad x_B(t) = v_0 t, \qquad y_B(t) \equiv 0, \qquad \varphi(0) = \pi/2.$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_0}{L}\sin\varphi,$$

$$\int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{d\phi}{\sin\phi} = -\frac{v_0 t}{L}, \qquad \ln(\tan(\varphi/2)) = -\frac{v_0 t}{L}, \qquad \varphi(t) = 2\arctan(e^{-v_0 t/L}).$$

$$x_A(t) = v_0 t - L\cos\varphi, \qquad y_A(t) = -L\sin\varphi.$$

Bahnkurve des Punktes A:

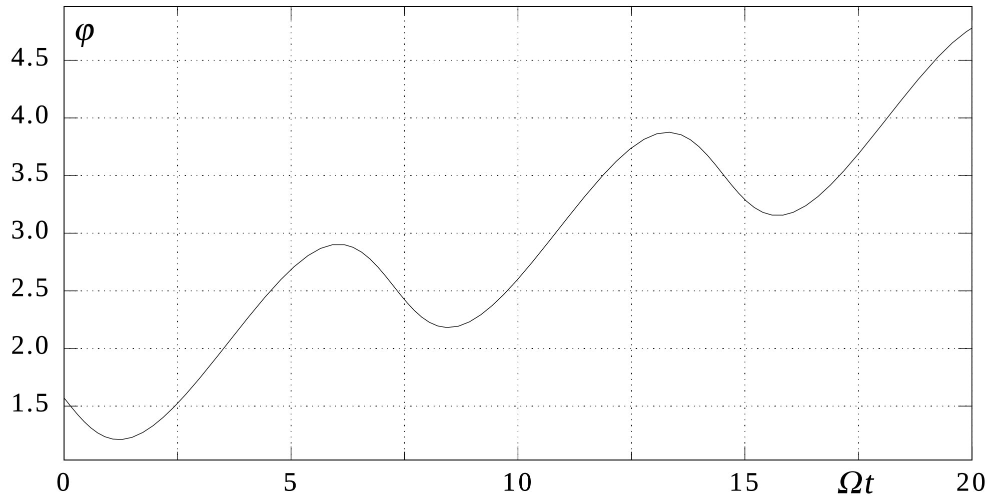


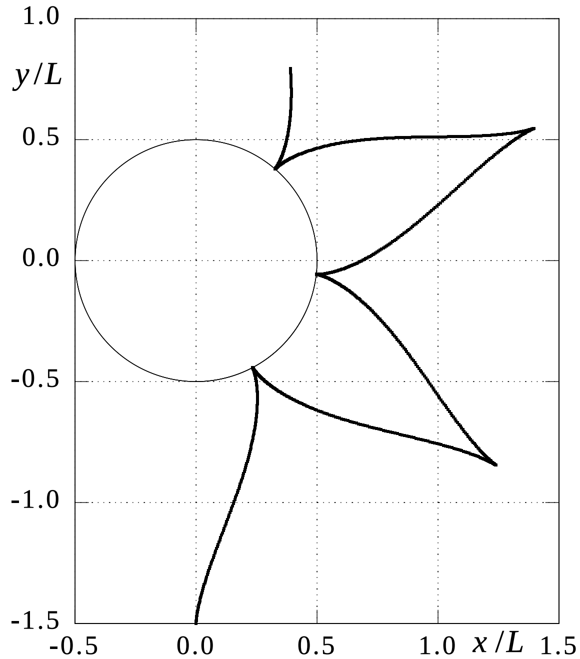
Schleppkurve

2. Sonderfall:
Der Punkt B bewegt sich auf einer Kreisbahn (Durchmesser = Fahrzeuglänge)

$$\alpha(t) \equiv 0, \qquad x_B(t) = \frac{L}{2}\sin(\Omega t), \qquad y_B(t) \equiv -\frac{L}{2}\cos(\Omega t), \qquad \varphi(0) = \pi/2.$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\Omega}{2}\cos(\Omega t)\sin\varphi + \frac{\Omega}{2}\sin(\Omega t)\cos\varphi = \frac{\Omega}{2}\sin(\Omega t - \varphi).$$





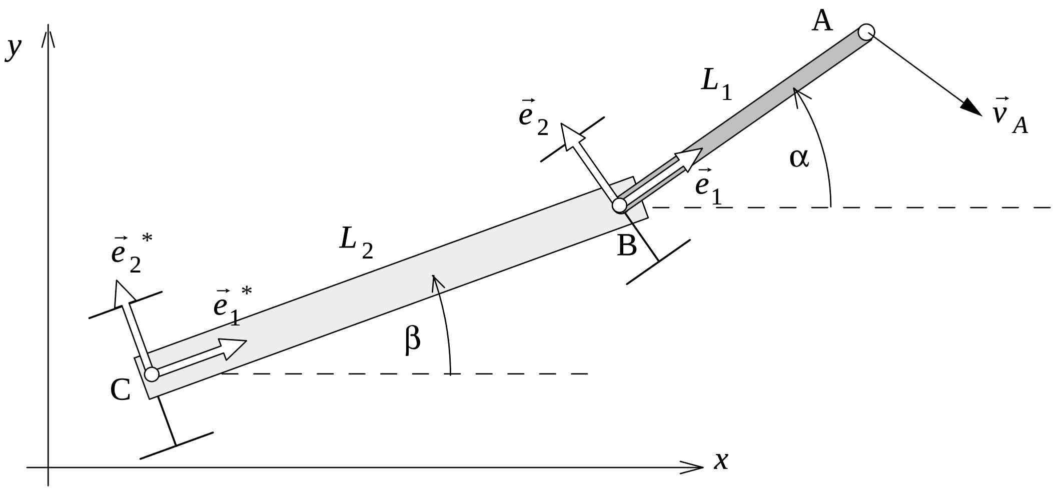
Der Kreis ist die Bahnkurve des Punktes B und die Außenkurve ist die Bahn des Punktes A.

Aufgabe 10

Ein Wagen mit Deichsel und nicht drehbarer Hinterachse wird im Deichselendpunkt A nach dem Bewegungsgesetz $\{x_A(t), y_A(t)\}$ geführt. Man berechne die Differentialgleichungen für die Winkel $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ und die Bahnkurven der Punkte A, B und C für den Spezialfall

$$x_A(t) = v_0 t, \qquad y_A(t) = 0, \qquad \alpha(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \beta(0) = \frac{\pi}{2};$$

$$L_1 = L, \quad L_2 = 2L.$$



$$\vec{v}_A = \dot{x}_A \vec{e}_x + \dot{y}_A \vec{e}_y, \qquad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \dot{\alpha}\vec{e}_z \times (-L_1 \vec{e}_1) = \vec{v}_A - L_1 \dot{\alpha} \vec{e}_2,$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \dot{\beta}\vec{e}_z \times (-L_2 \vec{e}_1^{\,*}) = \vec{v}_B - L_2 \dot{\beta} \vec{e}_2^{\,*} = \vec{v}_A - L_1 \dot{\alpha} \vec{e}_2 - L_2 \dot{\beta} \vec{e}_2^{\,*}.$$

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\begin{matrix} \vec{v}_B = v_B \vec{e}_1, \\ \vec{v}_C = v_C \vec{e}_1^{\,*}; \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \vec{v}_B \cdot \vec{e}_2 = 0, \\ \vec{v}_C \cdot \vec{e}_2^{\,*} = 0; \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \vec{v}_A \cdot \vec{e}_2 = L_1 \dot{\alpha}, \\ \vec{v}_B \cdot \vec{e}_2^{\,*} = L_2 \dot{\beta}. \end{matrix}$$

$$\vec{e}_2 = -\sin\alpha \vec{e}_x + \cos\alpha \vec{e}_y, \qquad \vec{e}_2^{\,*} = -\sin\beta \vec{e}_x + \cos\beta \vec{e}_y.$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2^{\,*} = \cos(\alpha - \beta).$$

$$L_1 \dot{\alpha} = -\dot{x}_A \sin\alpha + \dot{y}_A \cos\alpha,$$

Differentialgleichung für $\alpha(t)$:

$$\dot{\alpha} = -\dot{x}_A \frac{\sin\alpha}{L_1} + \dot{y}_A \frac{\cos\alpha}{L_1}.$$

$$L_2 \dot{\beta} = -\dot{x}_A \sin\beta + \dot{y}_A \cos\beta - L_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta),$$

$$L_2 \dot{\beta} = \dot{x}_A (\sin\alpha \cos(\alpha - \beta) - \sin\beta) + \dot{y}_A (\cos\beta - \cos\alpha \cos(\alpha - \beta)),$$

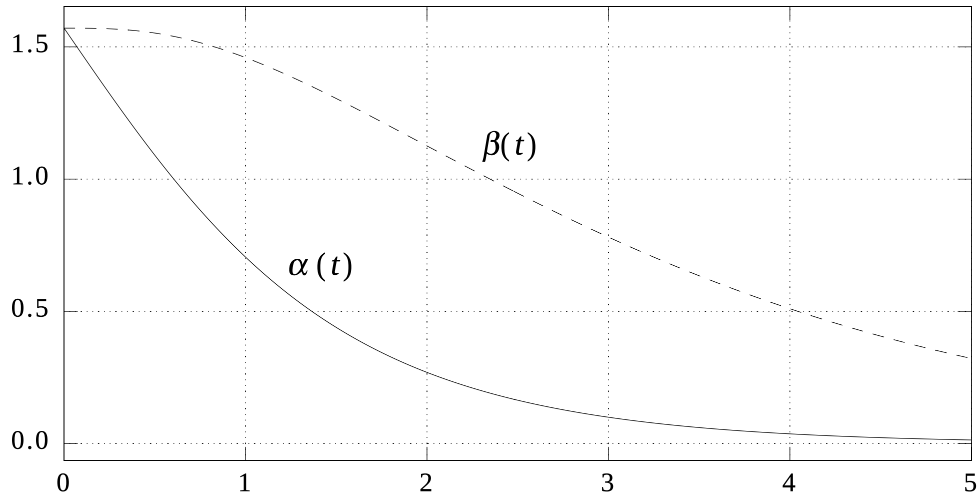
Differentialgleichung für $\beta(t)$:

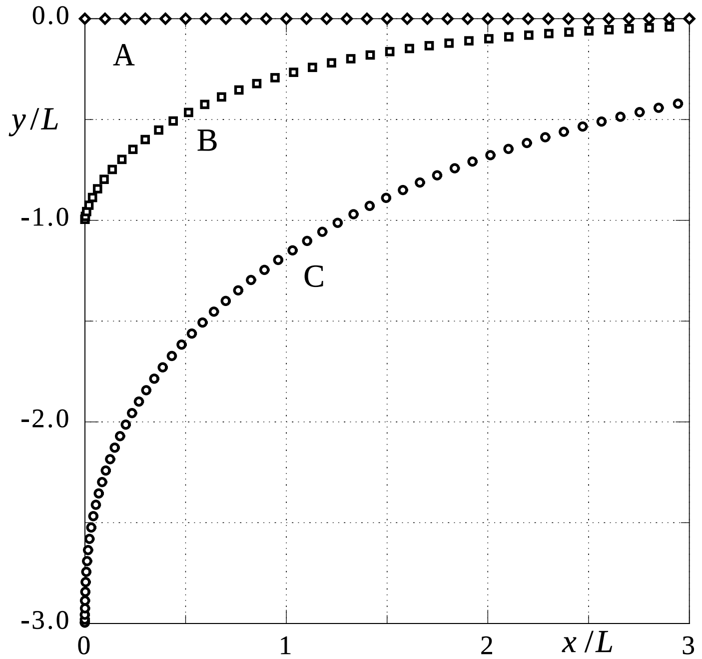
$$\dot{\beta} = -\dot{x}_A \frac{\sin\beta - \sin\alpha \cos(\alpha - \beta)}{L_2} + \dot{y}_A \frac{\cos\beta - \cos\alpha \cos(\alpha - \beta)}{L_2}.$$

Koordinaten der Punkte B und C:

$$x_B = x_A - L_1 \cos\alpha, \qquad y_B = y_A - L_1 \sin\alpha,$$

$$x_C = x_B - L_2 \cos\beta, \qquad y_C = y_B - L_2 \sin\beta.$$

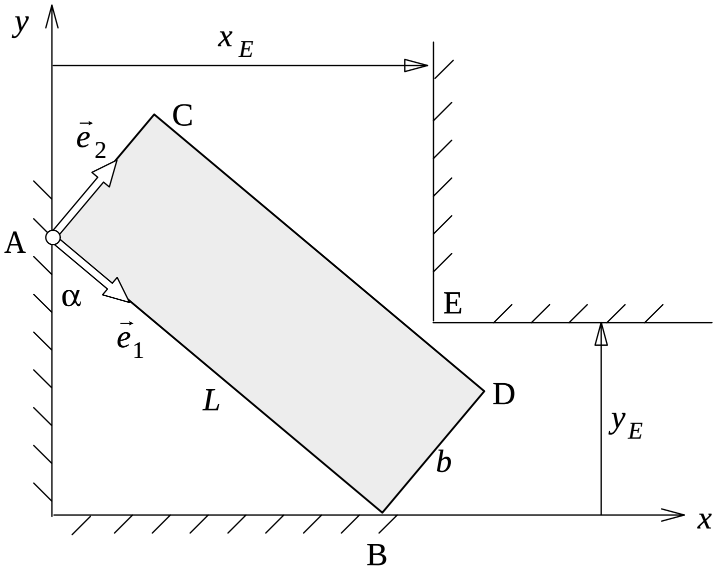




Dargestellt sind gleichzeitige Positionen der Punkte A, B und C.

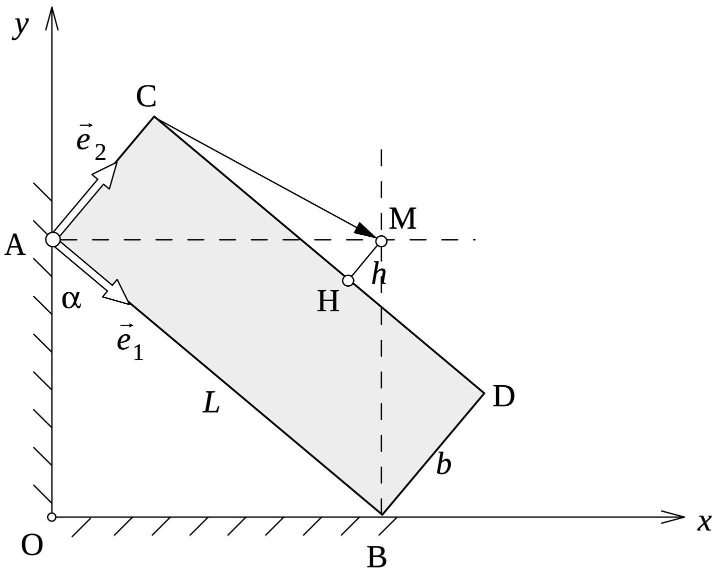
Aufgabe 11

Eine rechteckige Platte (Länge L, Breite b) wird mit den Eckpunkten A und B auf der y- und der x-Achse geführt. Es soll untersucht werden, ob die Platte am Eckpunkt E hängen bleibt. Dafür ist die Hüllkurve der Rechteckseite CD zu berechnen, die aus den momentanen Positionen H der materiellen Punkte auf der Strecke CD besteht, die bei der Plattenbewegung momentan eine Geschwindigkeit parallel zur Strecke CD haben, weil die Tangenten der Hüllkurve nacheinander von den Strecken CD gebildet werden. Die Platte bleibt nicht am Punkt E hängen, wenn E oberhalb der Hüllkurve liegt.



Der Momentanpol M der Platte liegt im Schnittpunkt der Lote auf den Geschwindigkeitsvektoren der Punkte A und B:

$$x_M = L\sin\alpha, \qquad y_M = L\cos\alpha.$$



Der Punkt H als Fußpunkt des Lotes von M auf die Rechteckseite CD hat momentan eine Geschwindigkeit parallel zu CD, also ist er ein Punkt auf der Hüllkurve von CD.

$$x_H = x_M - h\cos\alpha, \qquad y_H = y_M - h\sin\alpha.$$

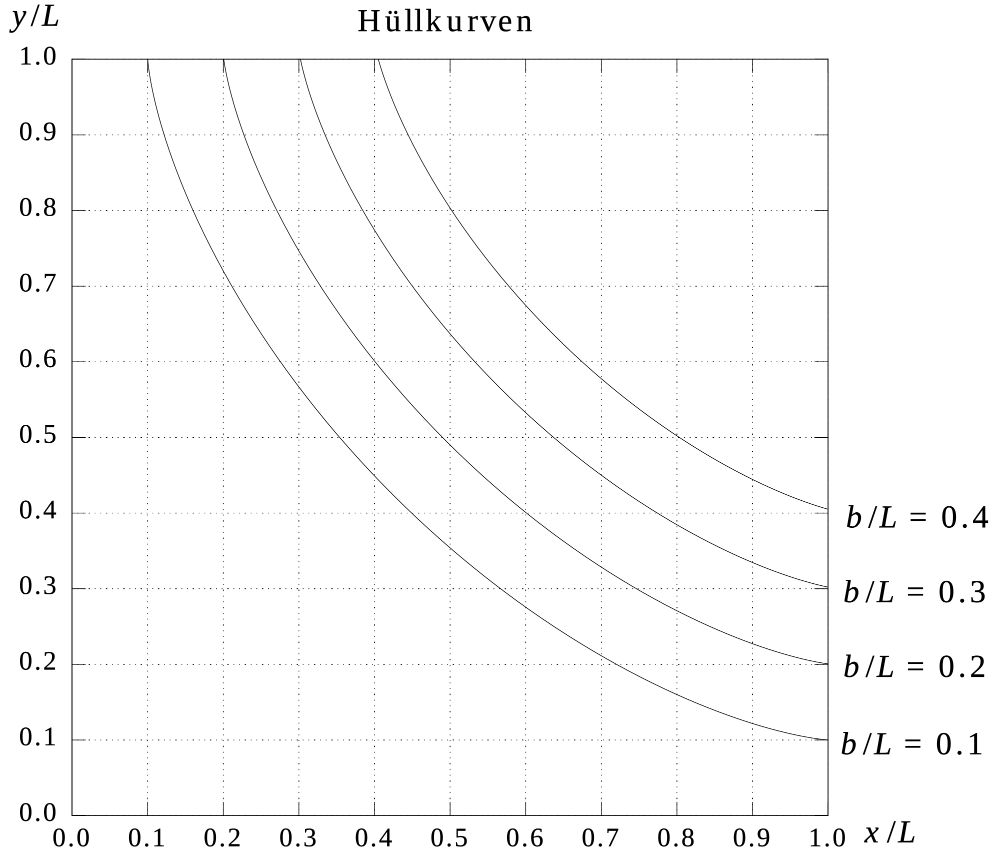
Für den Abstand h des Hüllkurvenpunktes H vom Momentanpol M gilt

$$h = \vec{e}_2 \cdot \overrightarrow{CM} = \vec{e}_2 \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} L\sin\alpha \\ L\cos\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b\cos\alpha \\ L\cos\alpha + b\sin\alpha \end{bmatrix} \right) = L\sin\alpha\cos\alpha - b.$$

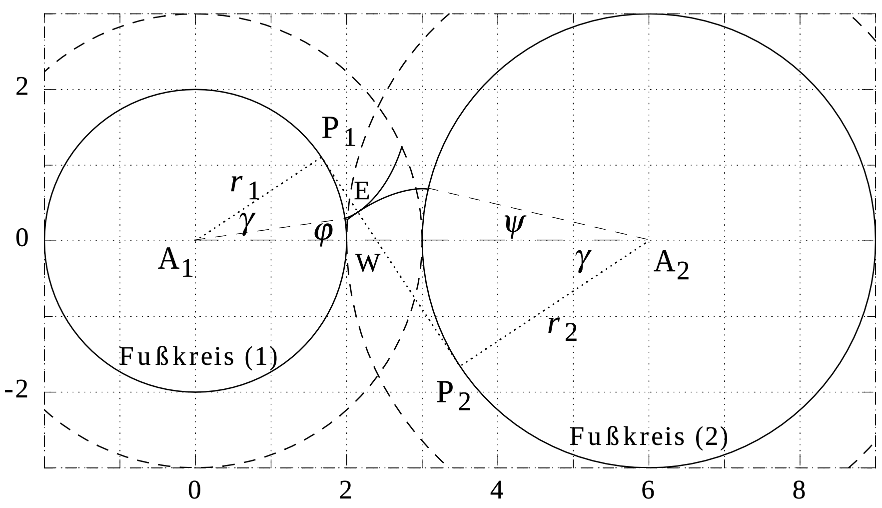
Damit erhalten wir die Parameterdarstellung der Hüllkurve mit α als Kurvenparameter:

$$x_H = L\sin\alpha - L\sin\alpha\cos^2\alpha + b\cos\alpha = L\sin^3\alpha + b\cos\alpha,$$
$$y_H = L\cos\alpha - L\sin^2\alpha\cos\alpha + b\sin\alpha = L\cos^3\alpha + b\sin\alpha.$$

In der folgenden Abbildung sind die Hüllkurven für einige Werte von b/L dargestellt.



Aufgabe 12



Zwei Zahnräder mit Kreisevolventen-Zahnflanken berühren sich momentan im Eingriffspunkt E. Der Abstand der beiden Fußkreise (Radien: r_1, r_2) sei h. Die

Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist die gemeinsame Tangente der beiden Fußkreise und auf ihr liegen die Eingriffspunkte. Der Schnittpunkt der Strecken $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{A_1A_2}$ ist der Wälzpunkt W. Die Drehwinkel φ und ψ der Zahnräder beschreiben die momentane Lage der Fußpunkte der Kreisevolventen. Man bestimme die Ortsvektoren der Zahnflanken und die Winkelbeziehungen für den Zahneingriff sowie die Geschwindigkeitsvektoren der Kontaktpunkte der Zahnflanken.

Es gelten die folgenden geometrischen Zwangsbedingungen:

$$\overline{P_1W} = r_1 \tan\gamma, \qquad \overline{P_2W} = r_2 \tan\gamma, \qquad \overline{P_1P_2} = (r_1 + r_2)\tan\gamma.$$

$$\overline{P_1E} = r_1(\gamma - \varphi), \qquad \overline{P_2E} = r_2(\gamma + \psi), \qquad \overline{P_1P_2} = \overline{P_1E} + \overline{P_2E},$$

$$r_1(\gamma - \varphi) + r_2(\gamma + \psi) = (r_1 + r_2)\tan\gamma,$$

$$r_2\psi = r_1\varphi + (r_1 + r_2)(\tan\gamma - \gamma).$$

Für die Ortsvektoren der Zahnflanken führen wir die Kurvenparameter β_1 und β_2 ein. Dann wird, wenn A_1 der Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems ist und die x-Achse durch A_2 geht:

$$\vec{r}_{z1} = r_1(\cos\beta_1 + \beta_1 \sin\beta_1)\begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix} + r_1(\sin\beta_1 - \beta_1\cos\beta_1)\begin{bmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_{z2} = (r_1 + h + r_2)\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} + r_2(\cos\beta_2 + \beta_2\sin\beta_2)\begin{bmatrix}-\cos\psi \\ \sin\psi\end{bmatrix} + r_2(\sin\beta_2 - \beta_2\cos\beta_2)\begin{bmatrix}-\sin\psi \\ -\cos\psi\end{bmatrix}.$$

Mit $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = 0$ erhält man die beiden Fußpunkte der Zahnflanken und für $\beta_1 = \beta_{1\max}$ und $\beta_2 = \beta_{2\max}$ gilt

$$\left|\vec{r}_{z1}\right|_{\beta_1 = \beta_{1\max}} = r_1 + h, \qquad \left|\vec{r}_{z2} - \overrightarrow{A_1A_2}\right|_{\beta_2 = \beta_{2\max}} = r_2 + h;$$

$$r_1\sqrt{1 + \beta_{1\max}{}^2} = r_1 + h, \qquad r_2\sqrt{1 + \beta_{2\max}{}^2} = r_2 + h.$$

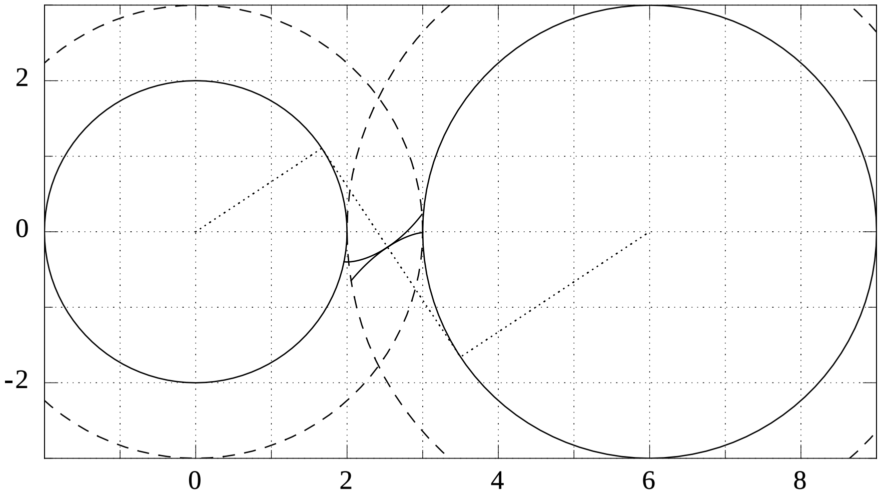
Für den Eingriffspunkt E gilt insbesondere

$$\beta_1 = \gamma - \varphi, \qquad \beta_2 = \gamma + \psi.$$

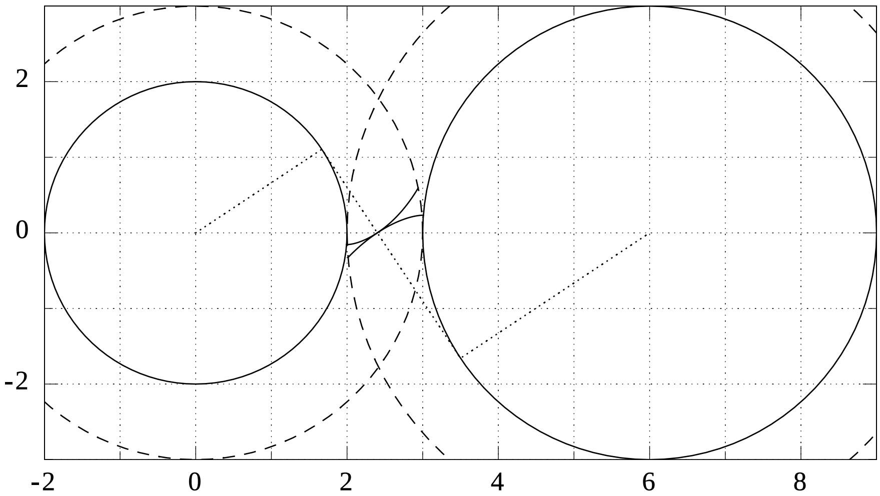
In den folgenden drei Abbildungen sind die Zahnflankenstellungen der beiden Zahnräder für verschiedene Drehwinkel φ des linken Zahnrades dargestellt. Die entsprechenden Drehwinkel ψ ergeben sich aus der Beziehung

$$r_2\psi = r_1\varphi + (r_1 + r_2)(\tan\gamma - \gamma).$$

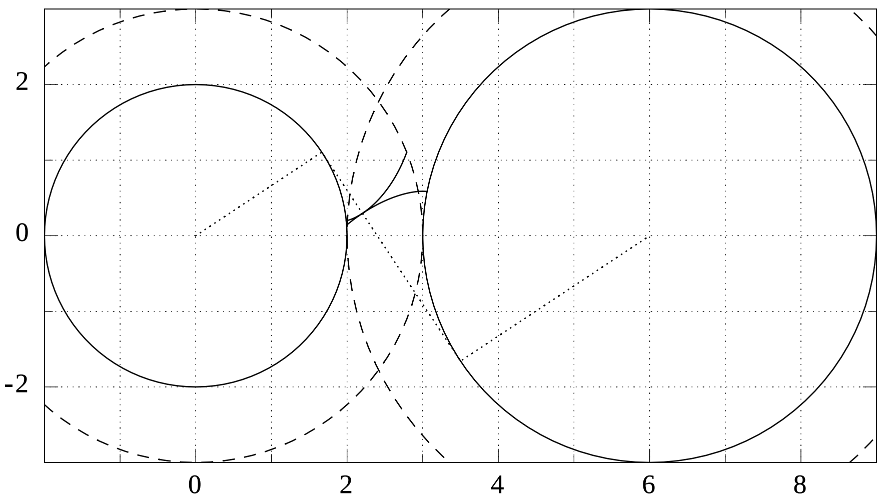
$\varphi = -0.2$



$\varphi = \gamma - \tan\gamma = -0.07764 \qquad (E = W)$



$\varphi = 0.1$



Aus der oben hergeleiteten Zwangsbedingung für die Drehwinkel φ und ψ der beiden Zahnräder

$$r_2\psi = r_1\varphi + (r_1 + r_2)(\tan\gamma - \gamma)$$

erhalten wir für die Winkelgeschwindigkeiten:

$$r_2\dot{\psi} = r_1\dot{\varphi}.$$

Die Geschwindigkeitsvektoren der Eingriffspunkte lauten:

$$\vec{v}_{E_1} = \dot{\varphi}\vec{e}_z \times (\overrightarrow{A_1P_1} + \overrightarrow{P_1E}), \qquad \vec{v}_{E_2} = -\dot{\psi}\vec{e}_z \times (\overrightarrow{A_2P_2} + \overrightarrow{P_2E}).$$

Ist $\vec{e}_{21}$ der Einheitsvektor in Richtung von $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}$ und $\vec{e}_t$ der dazu orthogonale Einheitsvektor parallel zu $\overrightarrow{A_1P_1}$ und tangential zu den Zahnflanken, so wird

$$\vec{v}_{E_1} = \dot{\varphi}\vec{e}_z \times (r_1\vec{e}_t - r_1(\gamma - \varphi)\vec{e}_{21}), \qquad \vec{v}_{E_2} = -\dot{\psi}\vec{e}_z \times (-r_2\vec{e}_t + r_2(\gamma + \psi)\vec{e}_{21}),$$
$$\vec{v}_{E_1} = \dot{\varphi}r_1(\vec{e}_{21} + (\gamma - \varphi)\vec{e}_t), \qquad \vec{v}_{E_2} = \dot{\psi}r_2(\vec{e}_{21} + (\gamma + \psi)\vec{e}_t),$$

also haben die Kontaktpunkte senkrecht zur Zahnflanke immer die gleiche Geschwindigkeit.

Wenn der Eingriffspunkt E insbesondere im Wälzpunkt W liegt, gilt

$$r_1(\gamma - \varphi) = r_1\tan\gamma, \qquad r_2(\gamma + \psi) = r_2\tan\gamma,$$
$$\vec{v}_{W_1} = \dot{\varphi}r_1(\vec{e}_{21} + \tan\gamma\,\vec{e}_t), \qquad \vec{v}_{W_2} = \dot{\psi}r_2(\vec{e}_{21} + \tan\gamma\,\vec{e}_t).$$

Im Wälzpunkt haben die Kontaktpunkte auch tangential die gleiche Geschwindigkeit, also rollen die beiden Zahnräder im Wälzpunkt aufeinander ab. Weil

$$\overline{\mathrm{A_1W}} = \frac{r_1}{\cos\gamma}, \qquad \overline{\mathrm{A_2W}} = \frac{r_2}{\cos\gamma},$$

ist, folgt aus der kinematischen Zwangsbedingung

$$r_2\dot{\psi} = r_1\dot{\varphi}$$

die Rollbedingung

$$\overline{\mathrm{A_1W}}\,\dot{\varphi} = \overline{\mathrm{A_2W}}\,\dot{\psi}.$$

Die Geschwindigkeitsvektoren der Kontaktpunkte im Wälzpunkt sind gleich und orthogonal zur Strecke $\overline{\mathrm{A_1A_2}}$.

Hinweis:

Wenn r_1, r_2 und h gegeben sind, folgt aus den geometrischen Bedingungen

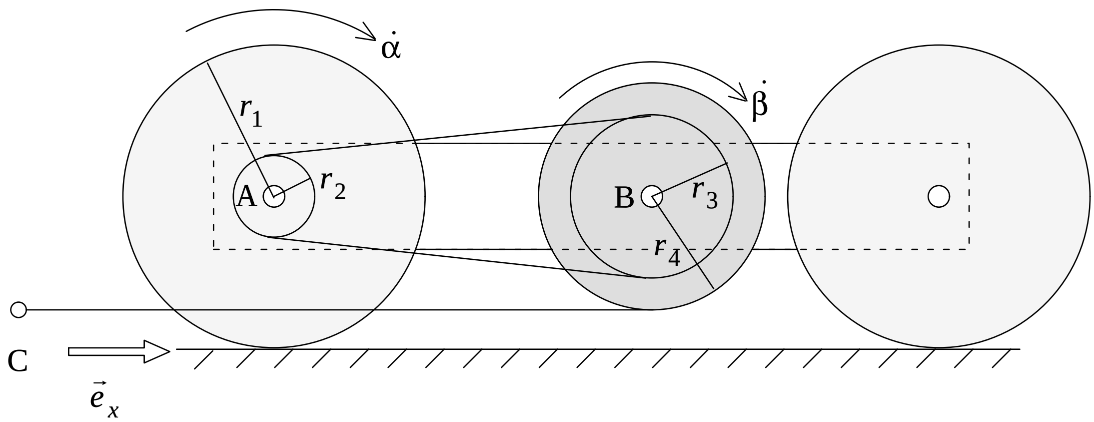
$$r_1\cos\gamma + \overline{\mathrm{P_1P_2}}\sin\gamma + r_2\cos\gamma = r_1 + r_2 + h,$$
$$r_1\sin\gamma + r_2\sin\gamma = \overline{\mathrm{P_1P_2}}\cos\gamma,$$

die Gleichung für den Winkel γ

$$\cos\gamma = \frac{r_1 + r_2}{r_1 + r_2 + h}.$$

Aufgabe 13

Zwei abgesetzte Räder mit den Radien r_1, r_2 und r_3, r_4 sind in den Punkten A und B auf einem Rahmen gelagert und über eine Kette miteinander verbunden. Das Vorderrad und das Hinterrad mit dem Radius r_1 sollen auf einer horizontalen Bahn rollen. Man berechne die Geschwindigkeit des Radpunktes A, wenn der Endpunkt C eines Fadens, der auf die in B gelagerte Scheibe gewickelt ist, die Geschwindigkeit $\vec{v}_C = -v_C \vec{e}_x$ hat.



Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\vec{v}_A = r_1 \dot{\alpha} \vec{e}_x, \qquad \vec{v}_B = \vec{v}_A, \qquad r_2 \dot{\alpha} = r_3 \dot{\beta}.$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B - r_4 \dot{\beta} \vec{e}_x = r_1 \dot{\alpha} \vec{e}_x - r_4 \frac{r_2}{r_3} \dot{\alpha} \vec{e}_x,$$

$$-v_C \vec{e}_x = (r_1 - r_4 \frac{r_2}{r_3}) \dot{\alpha} \vec{e}_x, \qquad \rightarrow \qquad \dot{\alpha} = \frac{r_3}{r_2 r_4 - r_1 r_3} v_C.$$

$$\vec{v}_A = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4 - r_1 r_3} v_C \vec{e}_x.$$

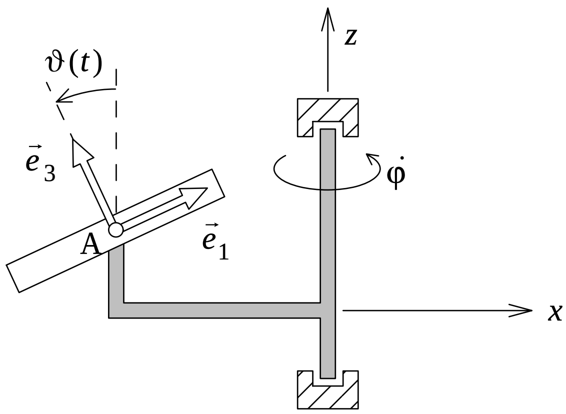
Mit den speziellen Werten

$$r_1 = 4r, \qquad r_2 = r, \qquad r_3 = 2r, \qquad r_4 = 3r$$

erhalten wir

$$\vec{v}_A = -\frac{8}{5} v_C \vec{e}_x.$$

Aufgabe 1



Im Punkt A eines Rahmens, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um die raumfeste z-Achse dreht, ist ein Spiegel drehbar gelagert, der sich mit $\vartheta(t)$ um die $\vec{e}_2$-Achse dreht, die dauernd senkrecht zur Rahmenebene bleibt. Man berechne den Winkelgeschwindigkeitsvektor des Spiegels im mit dem Spiegel bewegten 1,2,3-System und im raumfesten x,y,z-System.

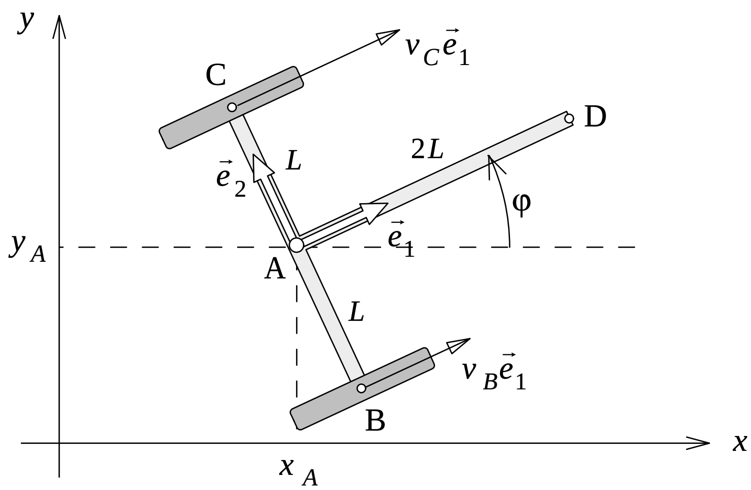
$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z - \dot{\vartheta}\vec{e}_2.$$

$$\vec{e}_z = \sin\vartheta\,\vec{e}_1 + \cos\vartheta\,\vec{e}_3. \qquad \vec{e}_2 = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y.$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\sin\vartheta\,\vec{e}_1 - \dot{\vartheta}\vec{e}_2 + \dot{\varphi}\cos\vartheta\,\vec{e}_3. \qquad \vec{\omega} = \dot{\vartheta}\sin\varphi\,\vec{e}_x - \dot{\vartheta}\cos\varphi\,\vec{e}_y + \dot{\varphi}\vec{e}_z.$$

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2}.$$

Aufgabe 2



Die zur xy-Ebene parallele Bewegung eines Fahrzeugrahmens sei definiert durch die Geschwindigkeitsvektoren der Radlagerpunkte B und C. Man berechne für den Fall $v_B = \text{const}$ und $v_C = \text{const}$, $v_C \neq v_B$ die Winkelgeschwindigkeit des Rahmens $\dot{\varphi}$, den Geschwindigkeitsvektor des Punktes A, die Winkelgeschwindigkeitsvektoren der in B und C gelagerten Räder, wenn diese den Durchmesser $2r$ haben, den Geschwindigkeitsvektor des Rahmenpunktes D, der von der xy-Ebene den Abstand r hat, sowie $\varphi(t), x_A(t)$ und $y_A(t)$, wenn $\varphi(0) = 0, x_A(0) = 0$ und $y_A(0) = L$ ist.

Berechnung von $\dot{\varphi}$ und $\vec{v}_A$:

$$v_C \vec{e}_1 = v_B \vec{e}_1 + \dot{\varphi} \vec{e}_3 \times 2L\, \vec{e}_2 = (v_B - 2L\,\dot{\varphi})\vec{e}_1, \qquad \rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{v_B - v_C}{2L}.$$

$$\vec{v}_A = v_B \vec{e}_1 + \dot{\varphi} \vec{e}_3 \times L\, \vec{e}_2 = (v_B - L\dot{\varphi})\vec{e}_1, \qquad \rightarrow \qquad \vec{v}_A = \frac{v_B + v_C}{2} \vec{e}_1.$$

Winkelgeschwindigkeitsvektoren der Räder:

$$\vec{\omega}_B = \dot{\varphi}\vec{e}_3 + \frac{v_B}{r}\vec{e}_2, \qquad \vec{\omega}_C = \dot{\varphi}\vec{e}_3 + \frac{v_C}{r}\vec{e}_2.$$

Geschwindigkeitsvektor des Punktes D:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \dot{\varphi}\vec{e}_3 \times 2L\, \vec{e}_1 = \vec{v}_A + 2L\dot{\varphi}\vec{e}_2 = \frac{v_B + v_C}{2}\vec{e}_1 + (v_B - v_C)\vec{e}_2.$$

Berechnung der Lagekoordinaten φ, x_A und y_A:

$$\dot{\varphi} = \frac{v_B - v_C}{2L} =: \Omega \qquad \rightarrow \qquad \varphi = \Omega t\,.$$

$$\dot{x}_A = \frac{v_B + v_C}{2}\cos(\Omega t) \quad \rightarrow \quad x_A(t) = \frac{v_B + v_C}{2\Omega}\sin(\Omega t)$$

$$\dot{y}_A = \frac{v_B + v_C}{2}\sin(\Omega t) \quad \rightarrow \quad y_A(t) = \frac{v_B + v_C}{2\Omega}(1 - \cos(\Omega t)) + L\,.$$

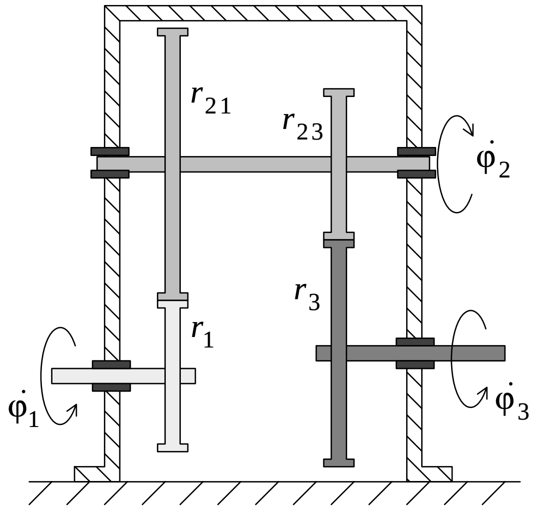
$$\frac{v_B + v_C}{2\Omega} = \frac{v_B + v_C}{v_B - v_C} L =: R$$

Der Punkt A bewegt sich auf dem Kreis

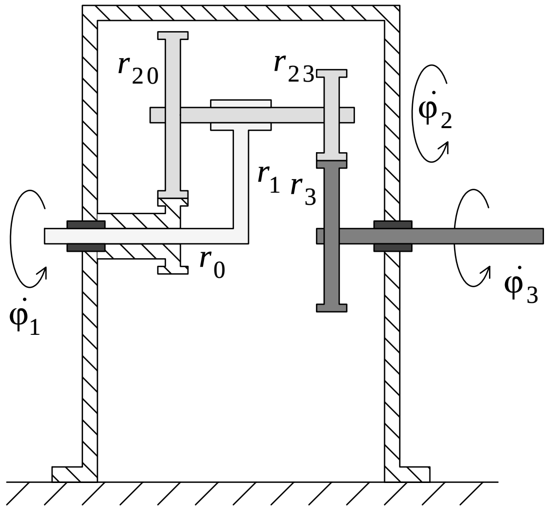
$$x_A{}^2 + [y_A - (R + L)]^2 = R^2\,.$$

Aufgabe 3

Für die dargestellten Getriebe berechne man die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_2$ und $\dot{\varphi}_3$ als Funktionen der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1$.



Standgetriebe



Umlaufgetriebe

Standgetriebe:

Kinematische Zwangsbedingungen:

Im Kontaktpunkt der Zahnräder mit den Radien r_1 und r_{21}:

$$r_1\dot{\varphi}_1 = r_{21}\dot{\varphi}_2.$$

Im Kontaktpunkt der Zahnräder mit den Radien r_{23} und r_3:

$$r_3\dot{\varphi}_3 = r_{23}\dot{\varphi}_2.$$

Daraus folgt:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{r_1}{r_{21}}\dot{\varphi}_1, \qquad \dot{\varphi}_3 = \frac{r_{23}}{r_3}\frac{r_1}{r_{21}}\dot{\varphi}_1.$$

Umlaufgetriebe:

Kinematische Zwangsbedingungen:

Im Kontaktpunkt der Zahnräder mit den Radien r_0 (raumfest) und r_{20}:

$$r_1\dot{\varphi}_1 - r_{20}\dot{\varphi}_2 = 0, \qquad r_1 = r_0 + r_{20}.$$

Im Kontaktpunkt der Zahnräder mit den Radien r_{23} und r_3:

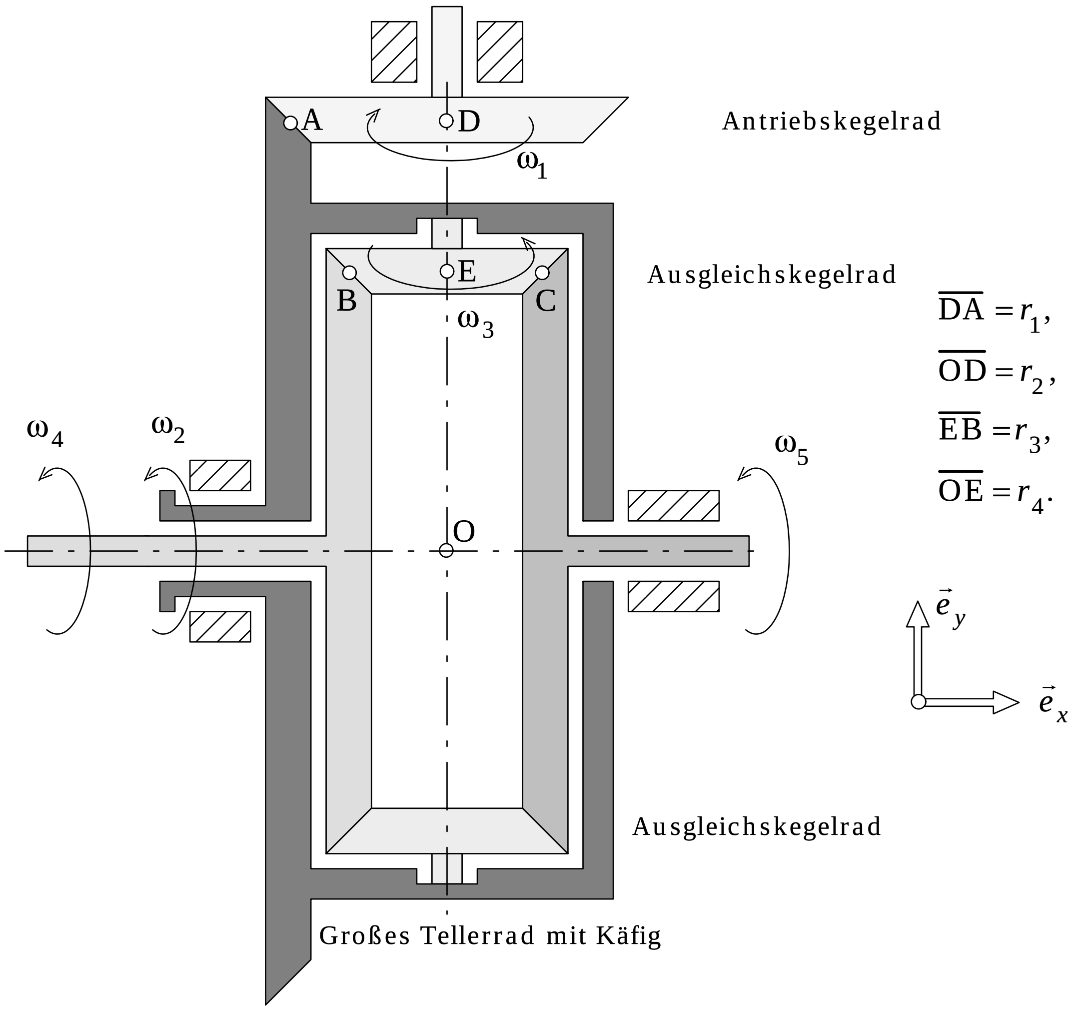
$$r_3\dot{\varphi}_3 = r_1\dot{\varphi}_1 - r_{23}\dot{\varphi}_2.$$

Daraus folgt:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{r_1}{r_{20}}\dot{\varphi}_1, \qquad \dot{\varphi}_3 = \frac{r_1}{r_3}(1 - \frac{r_{23}}{r_{20}})\dot{\varphi}_1.$$

Aufgabe 4

Für das Ausgleichsgetriebe berechne man die Winkelgeschwindigkeiten ω_4 und ω_5 für beliebige Werte von ω_3 mit Hilfe der Abrollbedingungen in den Kontaktpunkten A, B und C.



Darstellung aller Vektoren in der momentanen Konfiguration!

$$\vec{\omega}_{Ant} = -\omega_1 \vec{e}_y, \qquad \vec{\omega}_{GrT} = -\omega_2 \vec{e}_x, \qquad \vec{\omega}_{AGl} = -\omega_2 \vec{e}_x + \omega_3 \vec{e}_y,$$

$$\vec{\omega}_L = -\omega_4 \vec{e}_x, \qquad \vec{\omega}_R = -\omega_5 \vec{e}_x.$$

Antriebsrad:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{Ant} \times (-r_1 \vec{e}_x) = -\omega_1 r_1 \vec{e}_z.$$

Großes Tellerrad:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{GrT} \times (r_2 \vec{e}_y) = -\omega_2 r_2 \vec{e}_z. \qquad \rightarrow \qquad \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2.$$

$$\vec{v}_E = \vec{\omega}_{GrT} \times r_4 \vec{e}_y = -\omega_2 r_4 \vec{e}_z.$$

Ausgleichskegelrad:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_E + \vec{\omega}_{AGl} \times (-r_3 \vec{e}_x) = \vec{v}_E - \omega_3 r_3 \vec{e}_y \times \vec{e}_x = (\omega_3 r_3 - \omega_2 r_4) \vec{e}_z,$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_E + \vec{\omega}_{AGl} \times (r_3 \vec{e}_x) = \vec{v}_E + \omega_3 r_3 \vec{e}_y \times \vec{e}_x = (-\omega_3 r_3 - \omega_2 r_4) \vec{e}_z.$$

Linkes Abtriebsrad:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_L \times (r_4 \vec{e}_y) = -\omega_4 r_4 \vec{e}_z, \qquad \rightarrow \qquad \omega_3 r_3 - \omega_2 r_4 = -\omega_4 r_4.$$

Rechtes Abtriebsrad:

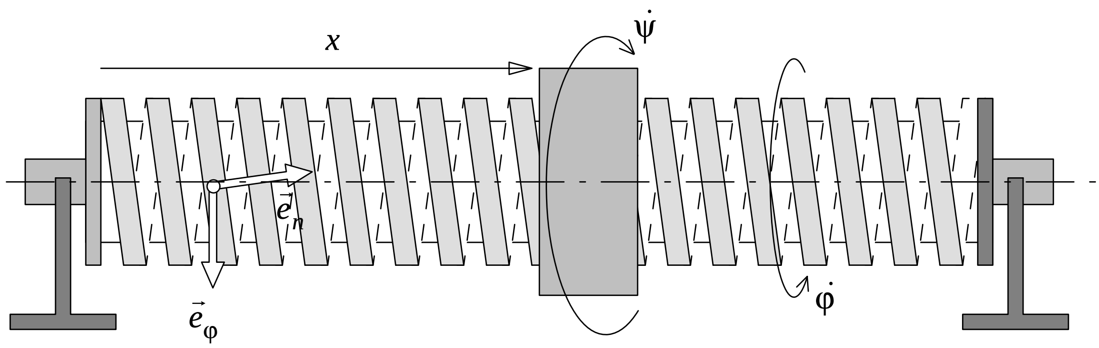
$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_R \times (r_4 \vec{e}_y) = -\omega_5 r_4 \vec{e}_z, \qquad \rightarrow \qquad -\omega_3 r_3 - \omega_2 r_4 = -\omega_5 r_4.$$

Ergebnis:

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1,$$

$$\omega_4 = \omega_2 - \frac{r_3}{r_4}\omega_3 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 - \frac{r_3}{r_4}\omega_3, \qquad \omega_5 = \omega_2 + \frac{r_3}{r_4}\omega_3 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 + \frac{r_3}{r_4}\omega_3.$$

Aufgabe 5



Eine Spindel mit einem Gewinde der Ganghöhe h dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um die Spindelachse. Eine Schraubenmutter mit passendem Gewinde bewegt sich auf der Spindel mit der entgegengesetzt gerichteten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$. Man berechne die kinematische Beziehung zwischen diesen Winkelgeschwindigkeiten und der Translationsgeschwindigkeit $\dot{x}$ der Schraubenmutter.

$$\vec{\omega}_{Sp} = \dot{\varphi}\vec{e}_x, \qquad \vec{\omega}_M = -\dot{\psi}\vec{e}_x.$$

Ein Punkt P_{Sp} auf der Spindelflanke im Abstand r von der Spindelachse hat die Geschwindigkeit

$$\vec{v}_{P_{Sp}} = r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Der dem Punkt P_{Sp} momentan gegenüberliegende Punkt P_M auf der Mutter hat die Geschwindigkeit

$$\vec{v}_{P_M} = \dot{x}\vec{e}_x - r\dot{\psi}\vec{e}_\varphi.$$

Es muß mit

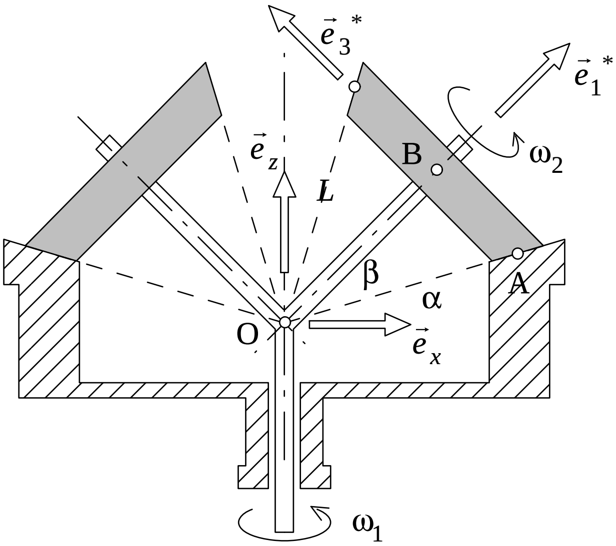
$$\vec{e}_n = \cos\alpha\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_\varphi, \qquad \tan\alpha = \frac{h}{2\pi r},$$

gelten:

$$\vec{v}_{P_{Sp}} \cdot \vec{e}_n = \vec{v}_{P_M} \cdot \vec{e}_n, \qquad -r\dot{\varphi}\sin\alpha = \dot{x}\cos\alpha + r\dot{\psi}\sin\alpha,$$

$$\dot{x} = -r(\dot{\varphi}+\dot{\psi})\tan\alpha = -\frac{h}{2\pi}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}).$$

Aufgabe 6



Ein Kegelrad, das von einer gegabelten Welle geführt wird, rollt in A auf einem raumfesten Kegelrad ab. Man berechne die Beziehungen zwischen den angegebenen Winkelgeschwindigkeiten.

$$\vec{\omega}_W = \omega_1\vec{e}_z, \qquad \vec{\omega}_K = \omega_1\vec{e}_z + \omega_2\vec{e}_1^{\,*}.$$

$$\vec{e}_1^{\,*} = \cos(\alpha+\beta)\vec{e}_x + \sin(\alpha+\beta)\vec{e}_z.$$

$$\vec{v}_B = \omega_1\vec{e}_z \times \overrightarrow{OB} = \omega_1\vec{e}_z \times L\cos\beta\vec{e}_1^{\,*} = \omega_1 L\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\vec{e}_y.$$

$$\vec{v}_{A(K)} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_K \times \overrightarrow{BA} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_K \times (-L\sin\beta\vec{e}_3^{\,*}),$$

$$\vec{e}_3^{\,*} = -\sin(\alpha+\beta)\vec{e}_x + \cos(\alpha+\beta)\vec{e}_z,$$

$$\vec{\omega}_K \times (-L\sin\beta\vec{e}_3^{\,*}) = L\sin\beta(\omega_2 + \omega_1\sin(\alpha+\beta))\vec{e}_y,$$

$$\vec{v}_{A(K)} = L(\omega_2\sin\beta + \omega_1[\cos\beta\cos(\alpha+\beta) + \sin\beta\sin(\alpha+\beta)])\vec{e}_y,$$

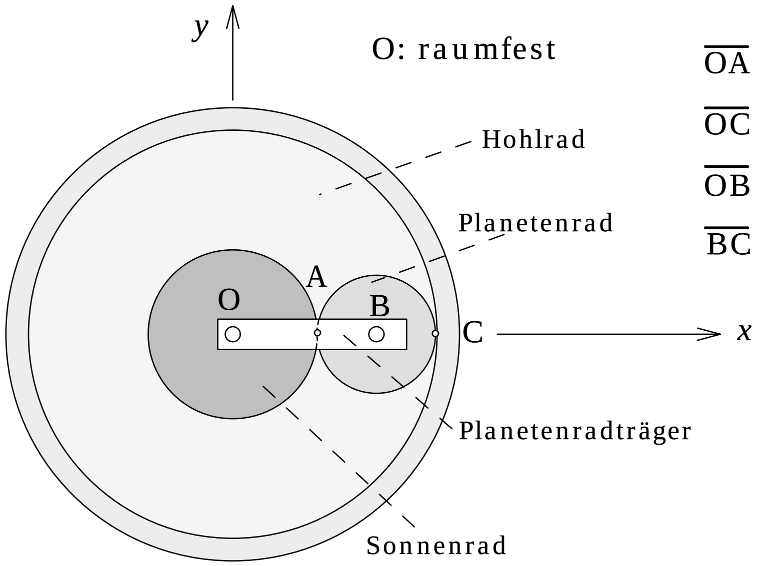
$$\vec{v}_{A(K)} = L(\omega_2\sin\beta + \omega_1\cos\alpha)\vec{e}_y;$$

Abrollbedingung:

$$\vec{v}_{A(K)} = L(\omega_2\sin\beta + \omega_1\cos\alpha)\vec{e}_y = \vec{0}, \qquad \to \quad \omega_2 = -\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\omega_1.$$

Aufgabe 7

Für das Planetenradgetriebe berechne man die Winkelgeschwindigkeiten des Planetenradträgers $\vec{\omega}_{PT}$ und des Planetenrades $\vec{\omega}_P$ als Funktionen der Winkelgeschwindigkeiten des Sonnenrades $\vec{\omega}_S$ und des Hohlrades $\vec{\omega}_H$.



$\overline{OA} = r_S$, $\overline{OC} = r_H$, $\overline{OB} = r_{PT}$, $\overline{BC} = r_P$.

Momentane Geschwindigkeitsvektoren
des Punktes A auf dem Sonnenrad:

$$\vec{v}_{A(S)} = \omega_S \vec{e}_z \times r_S \vec{e}_x = \omega_S r_S \vec{e}_y,$$

des Punktes B auf dem Planetenradträger:

$$\vec{v}_B = \omega_{PT} \vec{e}_z \times r_{PT} \vec{e}_x = \omega_{PT} r_{PT} \vec{e}_y,$$

des Punktes C auf dem Innenrand des Hohlrades:

$$\vec{v}_{C(HR)} = \omega_H \vec{e}_z \times r_H \vec{e}_x = \omega_H r_H \vec{e}_y,$$

der Punkte A und C auf dem Planetenrad:

$$\vec{v}_{A(P)} = \vec{v}_B + \omega_P \vec{e}_z \times (-r_P \vec{e}_x) = \vec{v}_B - \omega_P r_P \vec{e}_y,$$

$$\vec{v}_{C(P)} = \vec{v}_B + \omega_P \vec{e}_z \times r_P \vec{e}_x = \vec{v}_B + \omega_P r_P \vec{e}_y.$$

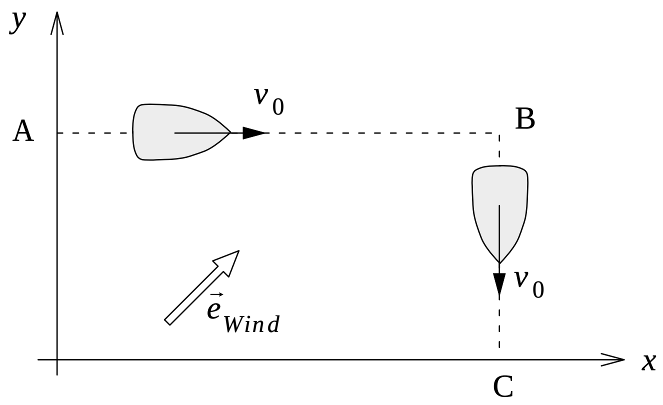
Das in B drehbar gelagerte Planetenrad rollt auf dem Sonnenrad und dem Innenrand des Hohlrades ab. Deshalb gilt

$$\vec{v}_{A(P)} = \vec{v}_{A(S)}, \qquad \vec{v}_{C(P)} = \vec{v}_{C(HR)},$$

$$(\omega_{PT} r_{PT} - \omega_P r_P)\vec{e}_y = \omega_S r_S \vec{e}_y, \qquad (\omega_{PT} r_{PT} + \omega_P r_P)\vec{e}_y = \omega_H r_H \vec{e}_y,$$

$$\omega_{PT} = \frac{\omega_H r_H + \omega_S r_S}{2 r_{PT}}, \qquad \omega_P = \frac{\omega_H r_H - \omega_S r_S}{2 r_P}.$$

Aufgabe 1



Auf einem Schiff, das mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 von A nach B und anschließend von B nach C fährt, registriert man die folgenden Windrichtungen:

$$\vec{e}_{W_{AB}} = \vec{e}_y, \qquad \vec{e}_{W_{BC}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{e}_x + 2\vec{e}_y).$$

Wie groß sind die jeweils auf dem Schiff gemessenen Windgeschwindigkeiten und mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Richtung weht der Wind für einen ruhenden Beobachter?

Die Schiffsgeschwindigkeit ist die Führungsgeschwindigkeit, die auf dem Schiff beobachtete Windgeschwindigkeit ist die Relativgeschwindigkeit und die Windgeschwindigkeit für den ruhenden Beobachter die absolute Geschwindigkeit.

$$\vec{v}_{Wind} = v_{Wind}\vec{e}_{Wind} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y.$$

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_F + \vec{v}_{rel},$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_{AB}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_0 \end{bmatrix} + v_{BC}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

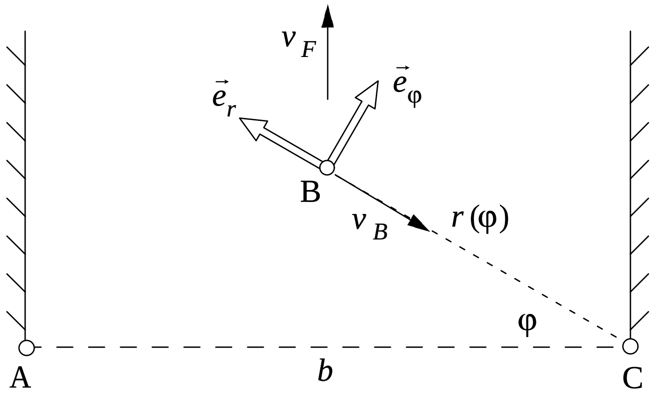
Daraus folgt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0, \\ v_y - v_{AB} &= 0, \\ v_x - v_{BC}/\sqrt{5} &= 0, \\ v_y - 2v_{BC}/\sqrt{5} &= -v_0, \end{aligned} \qquad v_x = v_0, \quad v_{BC} = \sqrt{5}v_0, \quad v_y = v_0, \quad v_{AB} = v_0.$$

$$\vec{v}_{Wind} = v_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y),$$

$$v_{Wind} = v_0\sqrt{2}, \qquad \vec{e}_{Wind} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y).$$

Aufgabe 2



Ein Boot B überquert einen mit konstanter Geschwindigkeit v_F strömenden Fluß von A nach C, wobei es ständig auf den Punkt C zusteuert und mit der konstanten Geschwindigkeit v_B relativ zum Wasser fährt. Man berechne die Bahnkurve $r(\varphi)$.

Führungs- und Relativgeschwindigkeit des Bootes:

$$\vec{v}_F = v_F(\sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi), \qquad \vec{v}_{rel} = -v_B\vec{e}_r,$$

Absolute Geschwindigkeit des Bootes:

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_F + \vec{v}_{rel} = (-v_B + v_F\sin\varphi)\vec{e}_r + v_F\cos\varphi\,\vec{e}_\varphi.$$

Absolute Bahnkurve in Polarkoordinaten:

$$\overrightarrow{CB} = r(\varphi)\vec{e}_r(\varphi).$$

$$\vec{v}_{abs} = \frac{d\overrightarrow{CB}}{dt} = (\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\vec{e}_r + r(\varphi)\vec{e}_\varphi)\dot{\varphi}. \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{l} \dfrac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = -v_B + v_F\sin\varphi, \\ r(\varphi)\dot{\varphi} = v_F\cos\varphi, \end{array}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_F\cos\varphi}{r}, \qquad \rightarrow \qquad \frac{dr}{d\varphi}\frac{v_F\cos\varphi}{r} = -v_B + v_F\sin\varphi,$$

$$\frac{d\ln(r)}{d\varphi} = -\frac{v_B}{v_F}\frac{1}{\cos\varphi} + \tan\varphi, \qquad \ln(\frac{r}{b}) = -\frac{v_B}{v_F}\int_0^\varphi \frac{1}{\cos\bar{\varphi}}d\bar{\varphi} + \int_0^\varphi \tan\bar{\varphi}\,d\bar{\varphi},$$

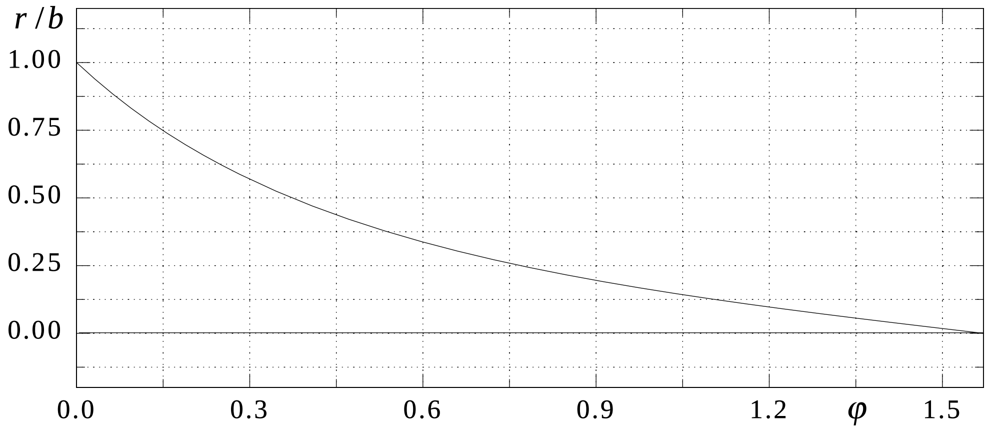
$$\ln(\frac{r}{b}) = -\frac{v_B}{v_F}\left\{\ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{\varphi}}{2}))\right\}_0^\varphi + \{-\ln(\cos\bar{\varphi})\}_0^\varphi,$$

$$\ln(\frac{r}{b}) = -\frac{v_B}{v_F}\ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})) - \ln(\cos\varphi), \qquad \ln(\frac{r\cos\varphi}{b}) = -\frac{v_B}{v_F}\ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})),$$

$$\frac{r\cos\varphi}{b} = e^{-\frac{v_B}{v_F}\ln(\tan(\pi/4+\varphi/2))} = (e^{\ln(\tan(\pi/4+\varphi/2))})^{-v_B/v_F},$$

$$r(\varphi)=\frac{b}{\cos\varphi}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right\}^{-v_B/v_F}.$$

$v_B=2v_F$:

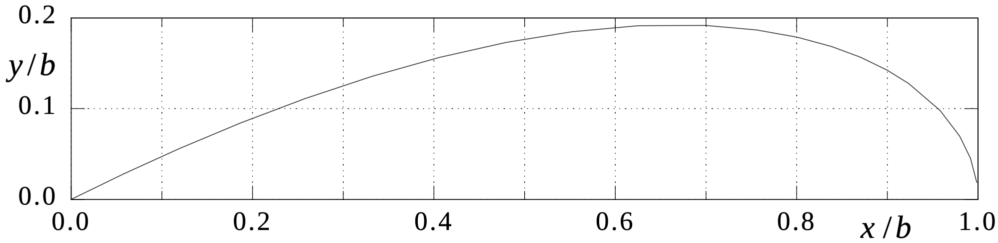


Differentialgleichungen für $r(t)$ und $\varphi(t)$:

$$\vec{v}_{abs}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad\rightarrow\quad \begin{aligned}\dot{r}&=v_F\sin\varphi-v_B,\\ \dot{\varphi}&=v_F\frac{\cos\varphi}{r},\end{aligned}$$

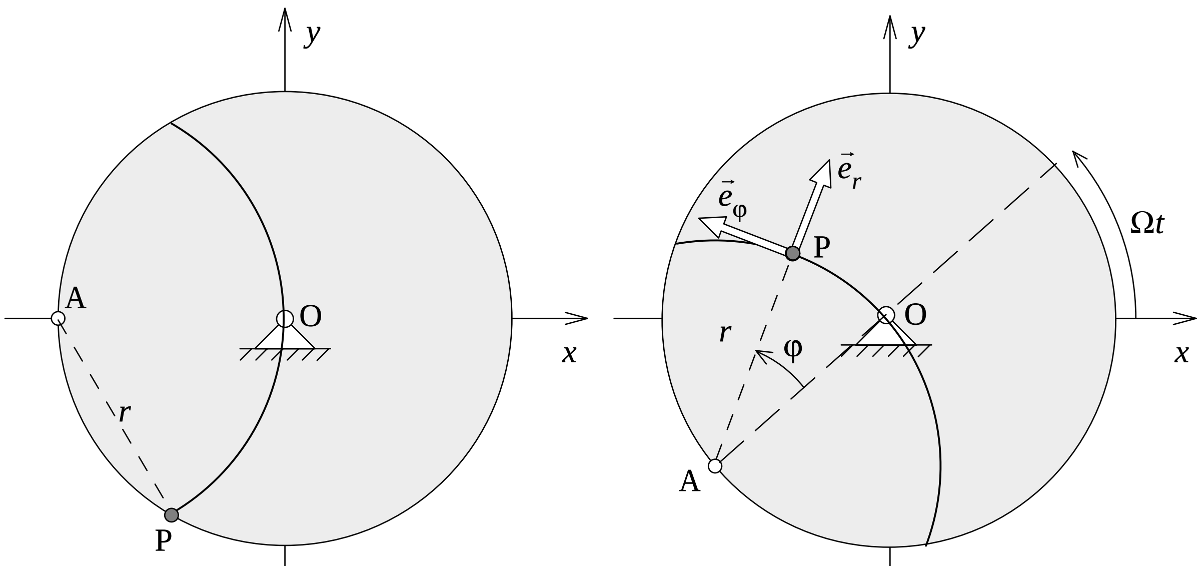
$$v_B=\beta v_F,\qquad r=b\xi,\qquad t=\frac{b}{v_F}\tau,\qquad\rightarrow\qquad \begin{aligned}\xi'&=\sin\varphi-\beta,\\ \varphi'&=\frac{\cos\varphi}{\xi}.\end{aligned}$$

$(\beta=2)$



Aufgabe 3

Auf einer mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω um den Punkt O rotierenden Kreisscheibe (Radius r) bewegt sich ein Punkt P mit konstanter Bahngeschwindigkeit v_0 auf einem Kreisbogen um den Scheibenpunkt A. Man berechne die absolute Geschwindigkeit und die absolute Beschleunigung des Punktes P sowie die absolute Bahnkurve.



$t = 0\colon \quad \varphi(0) = -\frac{\pi}{3}.$ $\qquad$ $t > 0\colon \quad \varphi(t) = -\frac{\pi}{3} + \frac{v_0}{r} t.$

$$\vec{\omega}_F = \Omega \vec{e}_z, \qquad \vec{v}_{rel} = v_0 \vec{e}_\varphi, \qquad \vec{a}_{rel} = -\frac{v_0^2}{r} \vec{e}_r.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = r\{-\cos\varphi \vec{e}_r + \sin\varphi \vec{e}_\varphi\}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = r\{(1-\cos\varphi)\vec{e}_r + \sin\varphi \vec{e}_\varphi\}.$$

$$\vec{v}_F = \vec{\omega}_F \times \overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\Omega\{(1-\cos\varphi)\vec{e}_\varphi - \sin\varphi \vec{e}_r\}.$$

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_F + \vec{v}_{rel} = \{v_0 + r\Omega(1-\cos\varphi)\}\vec{e}_\varphi - r\Omega \sin\varphi \vec{e}_r.$$

$$\vec{a}_F = \vec{\omega}_F \times (\vec{\omega}_F \times \overrightarrow{\mathrm{OP}}) = -\Omega^2 \overrightarrow{\mathrm{OP}} = -r\Omega^2\{(1-\cos\varphi)\vec{e}_r + \sin\varphi \vec{e}_\varphi\}.$$

$$\vec{a}_{Cor} = 2\vec{\omega}_F \times v_{rel} = 2\Omega v_0 \vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = -2\Omega v_0 \vec{e}_r.$$

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_F + \vec{a}_{Cor} + \vec{a}_{rel},$$

$$\vec{a}_{abs} = -\{r\Omega^2(1-\cos\varphi) + 2\Omega v_0 + \frac{v_0^2}{r}\}\vec{e}_r - r\Omega^2 \sin\varphi \vec{e}_\varphi.$$

Absolute Bahnkurve:

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\{(1-\cos\varphi)\vec{e}_r + \sin\varphi \vec{e}_\varphi\},$$

$$\vec{e}_r = \cos(\Omega t + \varphi)\vec{e}_x + \sin(\Omega t + \varphi)\vec{e}_y, \qquad \vec{e}_\varphi = -\sin(\Omega t + \varphi)\vec{e}_x + \cos(\Omega t + \varphi)\vec{e}_y,$$

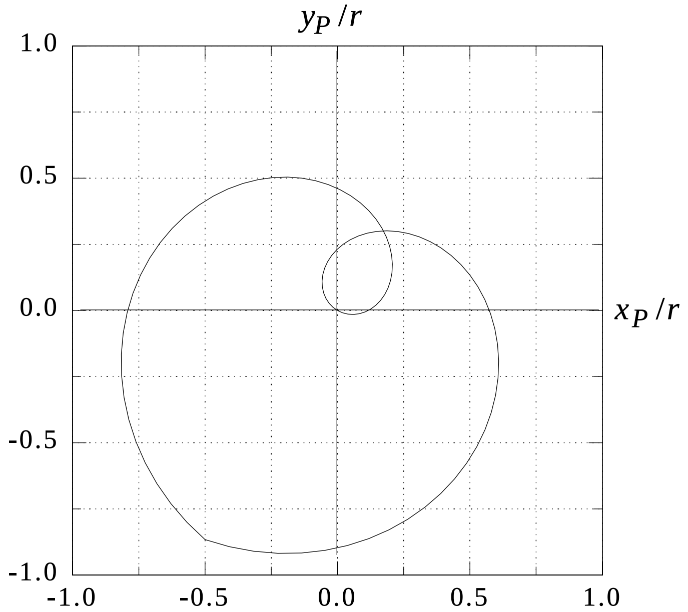
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x_P \vec{e}_x + y_P \vec{e}_y,$$

$$x_P = r\{(1-\cos\varphi)\cos(\Omega t+\varphi) - \sin\varphi\sin(\Omega t+\varphi)\} = r\{\cos(\Omega t+\varphi) - \cos(\Omega t)\},$$
$$y_P = r\{(1-\cos\varphi)\sin(\Omega t+\varphi) + \sin\varphi\cos(\Omega t+\varphi)\} = r\{\sin(\Omega t+\varphi) - \sin(\Omega t)\}.$$

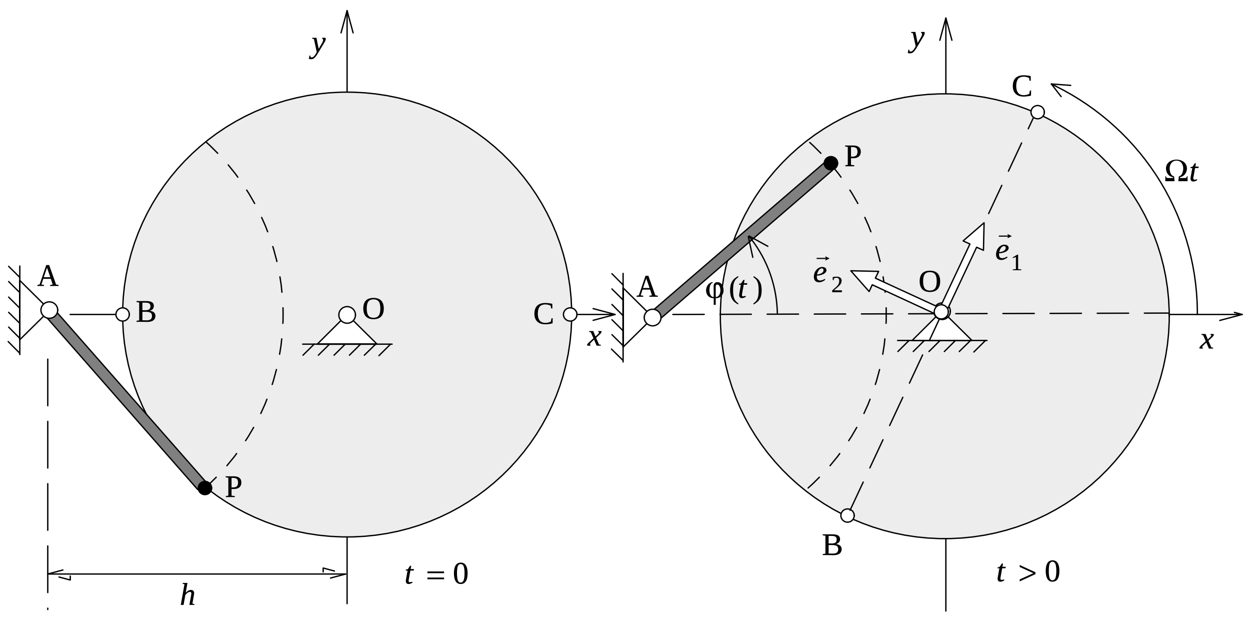
Spezialfall:

$$\varphi(t) = -\frac{\pi}{3} + \frac{v_0}{r}t, \qquad v_0 = \frac{1}{4}r\Omega \qquad \to \qquad \varphi(t) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\Omega t}{4}.$$

$$x_P = r\{\cos(\tfrac{5}{4}\Omega t - \tfrac{\pi}{3}) - \cos(\Omega t)\}, \qquad 0 \le \Omega t \le \frac{8\pi}{3} = 8{,}377.$$
$$y_P = r\{\sin(\tfrac{5}{4}\Omega t - \tfrac{\pi}{3}) - \sin(\Omega t)\};$$



Aufgabe 4

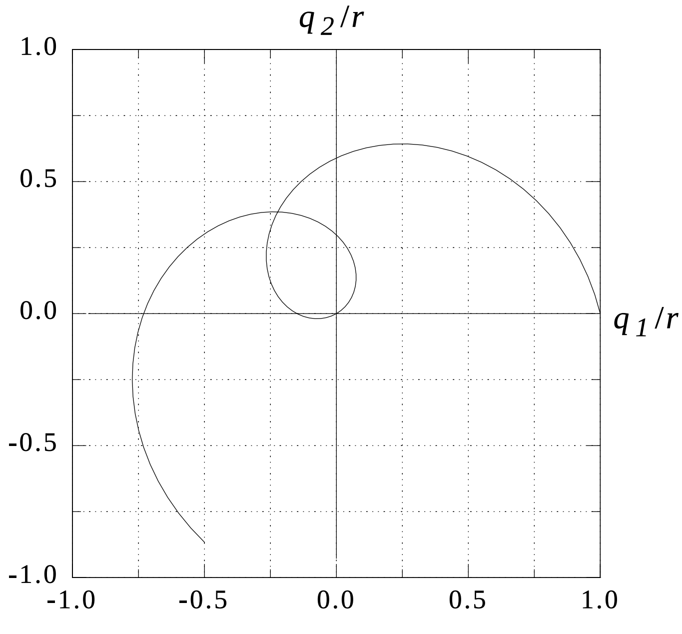


Die in A gelagerte Stange (Länge L) dreht sich nach dem Gesetz $\varphi(t)$, wobei der Endpunkt P eine Kurve auf die mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um O sich drehende Kreisscheibe zeichnet. Man berechne diese Kurve und die Relativgeschwindigkeit des Punktes P für einen Beobachter auf der Kreisscheibe.

$$\alpha := \Omega t,$$
$$\vec{e}_1 = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y, \qquad \vec{e}_2 = -\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y,$$
$$\vec{e}_x = \cos\alpha\,\vec{e}_1 - \sin\alpha\,\vec{e}_2, \qquad \vec{e}_y = \sin\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\alpha\,\vec{e}_2,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = -h\vec{e}_x + L\cos\varphi\,\vec{e}_x + L\sin\varphi\,\vec{e}_y,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (L\cos\varphi - h)\{\cos\alpha\,\vec{e}_1 - \sin\alpha\,\vec{e}_2\} + L\sin\varphi\{\sin\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\alpha\,\vec{e}_2\},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (L\cos(\varphi-\alpha) - h\cos\alpha)\,\vec{e}_1 + (L\sin(\varphi-\alpha) + h\sin\alpha)\,\vec{e}_2.$$
$$\vec{v}_{rel} = \{-L(\dot\varphi - \Omega)\sin(\varphi-\alpha) + h\Omega\sin\alpha\}\vec{e}_1 + \{L(\dot\varphi-\Omega)\cos(\varphi-\alpha) + h\Omega\cos\alpha\}\vec{e}_2.$$

Spezialfall:

$$h = r, \qquad L = r, \qquad \varphi(0) = -\frac{\pi}{3}, \qquad \varphi(t) = -\frac{\pi}{3} + \frac{v_0}{r}t,$$
$$v_0 = \frac{1}{4}\Omega r, \qquad \varphi(t) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\Omega t}{4}.$$
$$q_1 = r\{\cos(\tfrac{3}{4}\Omega t + \tfrac{\pi}{3}) - \cos(\Omega t)\},$$
$$q_2 = r\{-\sin(\tfrac{3}{4}\Omega t + \tfrac{\pi}{3}) + \sin(\Omega t)\}.$$



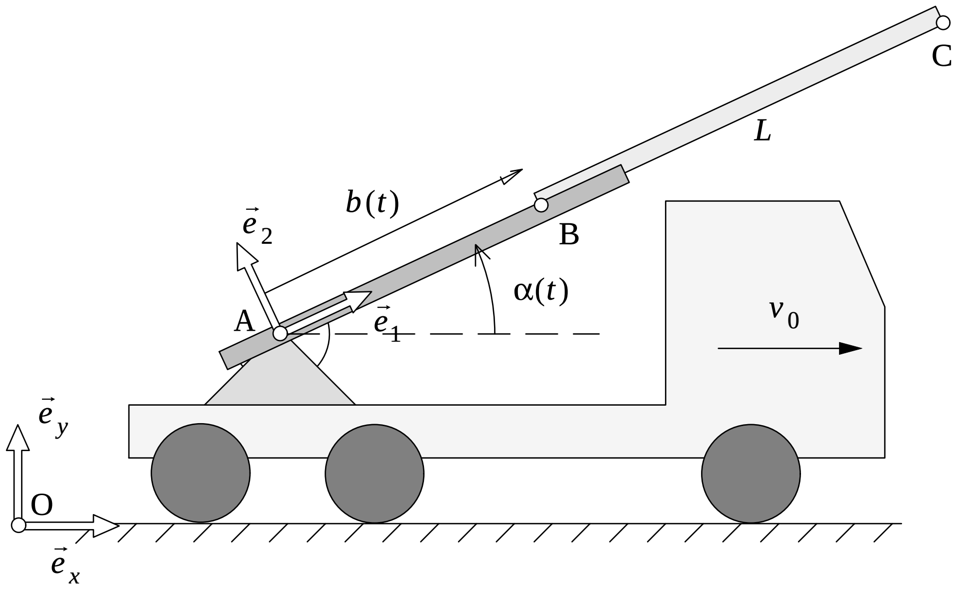
Aufgabe 5

Auf einem mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 fahrenden Fahrzeug ist eine

Leiter montiert, die nach den Gesetzen

$$b(t) = 2v_0 t, \qquad \alpha(t) = \Omega t$$

bewegt wird. Man berechne die absolute Geschwindigkeit und die absolute Beschleunigung des Leiterendpunktes C.



$$\vec{v}_A = v_0 \vec{e}_x = v_0(\cos\alpha\,\vec{e}_1 - \sin\alpha\,\vec{e}_2), \qquad \vec{a}_A = \vec{0}.$$

$$\vec{\omega}_F := \dot{\alpha}\vec{e}_3 = \Omega\,\vec{e}_3, \qquad \dot{\vec{\omega}}_F = \vec{0}.$$

Berechnung der Absolutgeschwindigkeit in der bewegten Basis:

Führungsgeschwindigkeit von C:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_A + \vec{\omega}_F \times \overrightarrow{AC} = \vec{v}_A + \Omega\,\vec{e}_3 \times (b(t)+L)\vec{e}_1 = \vec{v}_A + \Omega(b(t)+L)\vec{e}_2,$$

$$\vec{v}_F = v_0 \cos(\Omega t)\vec{e}_1 + \{-v_0 \sin(\Omega t) + \Omega(2v_0 t + L)\}\vec{e}_2.$$

Relativgeschwindigkeit von C:

$$\vec{v}_{rel} = \dot{b}\,\vec{e}_1 = 2v_0\vec{e}_1.$$

Absolutgeschwindigkeit von C:

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_F + \vec{v}_{rel},$$

$$\vec{v}_{abs} = \{v_0 \cos(\Omega t) + 2v_0\}\vec{e}_1 + \{-v_0 \sin(\Omega t) + \Omega(2v_0 t + L)\}\vec{e}_2.$$

Berechnung der Absolutgeschwindigkeit in der raumfesten Basis (O ist der Ursprung des xy–Koordinatensystems):

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + (b(t)+L)\{\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y\}$$

$$\vec{v}_{abs} = v_0\vec{e}_x + 2v_0\{\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y\} + (2v_0 t + L)\Omega\{-\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y\},$$

$$\vec{v}_{abs}=\{v_0+2v_0\cos\alpha-\Omega(2v_0t+L)\sin\alpha\}\vec{e}_x+\{2v_0\sin\alpha+\Omega(2v_0t+L)\cos\alpha\}\vec{e}_x.$$

Berechnung der Absolutbeschleunigung in der bewegten Basis:

Führungsbeschleunigung des Punktes C:

$$\vec{a}_F=\vec{a}_A+\dot{\vec{\omega}}_F\times\overrightarrow{AC}+\vec{\omega}_F\times(\vec{\omega}_F\times\overrightarrow{AC}),$$

$$\vec{a}_F=-\omega_F{}^2\,\overrightarrow{AC}=-\Omega^2(b(t)+L)\vec{e}_1,$$

CORIOLISbeschleunigung des Punktes C:

$$\vec{a}_{Cor}=2\vec{\omega}_F\times\vec{v}_{rel}=2\Omega\dot{b}\,\vec{e}_3\times\vec{e}_1=4\Omega v_0\vec{e}_2,$$

Relativbeschleunigung des Punktes C:

$$\vec{a}_{rel}=\ddot{b}\,\vec{e}_1=\vec{0},$$

Absolutbeschleunigung des Punktes C:

$$\vec{a}_{abs}=\vec{a}_F+\vec{a}_{Cor}+\vec{a}_{rel},$$

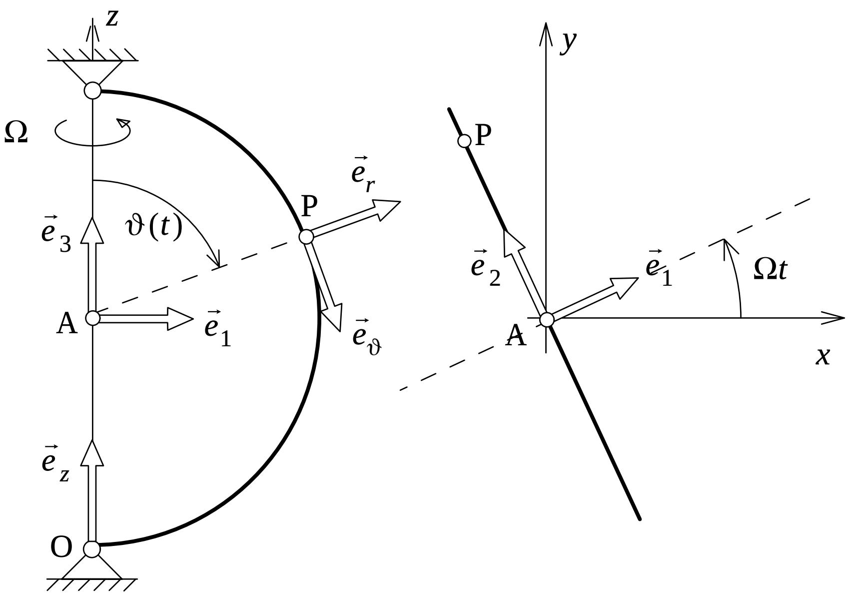
$$\vec{a}_{abs}=-\Omega^2(2v_0t+L)\vec{e}_1+4\Omega v_0\vec{e}_2.$$

Berechnung der Absolutgeschwindigkeit in der raumfesten Basis:

$$\vec{a}_{abs}=\dot{\vec{v}}_{abs},$$

$$\vec{a}_{abs}=\{-4v_0\Omega\sin\alpha-\Omega^2(2v_0t+L)\cos\alpha\}\vec{e}_x+\{4v_0\Omega\cos\alpha-\Omega^2(2v_0t+L)\sin\alpha\}\vec{e}_y.$$

Aufgabe 6



Auf einem Halbkreisring (Radius R), der sich um den vertikalen Durchmesser mit der Winkelgeschwindigkeit Ω dreht, bewegt sich ein Punkt P nach dem Winkel-Zeit-Gesetz $\vartheta(t)$. Für einen mit dem Kreisring bewegten Beobachter berechne man die Relativgeschwindigkeit und Relativbeschleunigung des Punktes P sowie die absolute Geschwindigkeit und die absolute Beschleunigung, die ein raumfester Beobachter registriert.

$$\vec{e}_r = \sin\vartheta\,\vec{e}_1 + \cos\vartheta\,\vec{e}_3, \qquad \vec{e}_\vartheta = \cos\vartheta\,\vec{e}_1 - \sin\vartheta\,\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_z = \cos\vartheta\,\vec{e}_r - \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta, \qquad \vec{e}_\varphi := \vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_2.$$

$$\overrightarrow{AP} = R(\sin\vartheta\,\vec{e}_1 + \cos\vartheta\,\vec{e}_3) = R\,\vec{e}_r,$$

Führungswinkelgeschwindigkeit:

$$\vec{\omega}_F = \Omega\vec{e}_z = \Omega(\cos\vartheta\,\vec{e}_r - \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta).$$

Relativgeschwindigkeit und Relativbeschleunigung des Punktes P:

$$\vec{v}_{rel} = R\,\dot{\vartheta}(\cos\vartheta\,\vec{e}_1 - \sin\vartheta\,\vec{e}_3) = R\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta,$$

$$\vec{a}_{rel} = R\,\ddot{\vartheta}(\cos\vartheta\,\vec{e}_1 - \sin\vartheta\,\vec{e}_3) + R\,\dot{\vartheta}^2(-\sin\vartheta\,\vec{e}_1 - \cos\vartheta\,\vec{e}_3) = R\,\ddot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta - R\,\dot{\vartheta}^2\vec{e}_r.$$

Führungsgeschwindigkeit und Führungsbeschleunigung des Punktes P:

$$\vec{v}_F = \vec{\omega}_F \times \overrightarrow{AP} = \Omega(\cos\vartheta\,\vec{e}_r - \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta) \times R\,\vec{e}_r = R\Omega\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{a}_F = \vec{\omega}_F \times (\vec{\omega}_F \times \overrightarrow{AP}) = \Omega(\cos\vartheta\,\vec{e}_r - \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta) \times R\Omega\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi = R\Omega^2\sin\vartheta(-\cos\vartheta\,\vec{e}_\vartheta - \sin\vartheta\,\vec{e}_r).$$

Coriolisbeschleunigung des Punktes P:

$$\vec{a}_{Cor} = 2\vec{\omega}_F \times \vec{v}_{rel} = 2\Omega(\cos\vartheta\,\vec{e}_r - \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta) \times R\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta = 2R\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta\,\vec{e}_\varphi.$$

Absolutgeschwindigkeit und Absolutbeschleunigung des Punktes P:

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_F + \vec{v}_{rel},$$

$$\vec{v}_{abs} = R\Omega\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi + R\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta;$$

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_F + \vec{a}_{Cor} + \vec{a}_{rel},$$

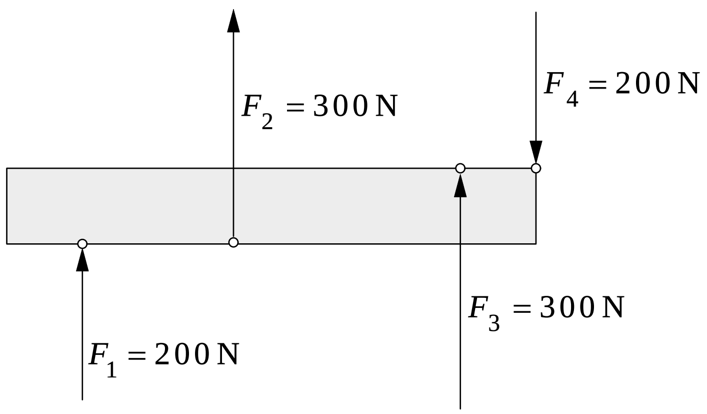
$$\vec{a}_{abs} = -R(\dot{\vartheta}^2 + \Omega^2\sin^2\vartheta)\vec{e}_r + R(\ddot{\vartheta} - \Omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta)\vec{e}_\vartheta + 2R\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta\vec{e}_\varphi.$$

Berechnung der Absolutgeschwindigkeit und der Absolutbeschleunigung im raumfesten Bezugssystem:

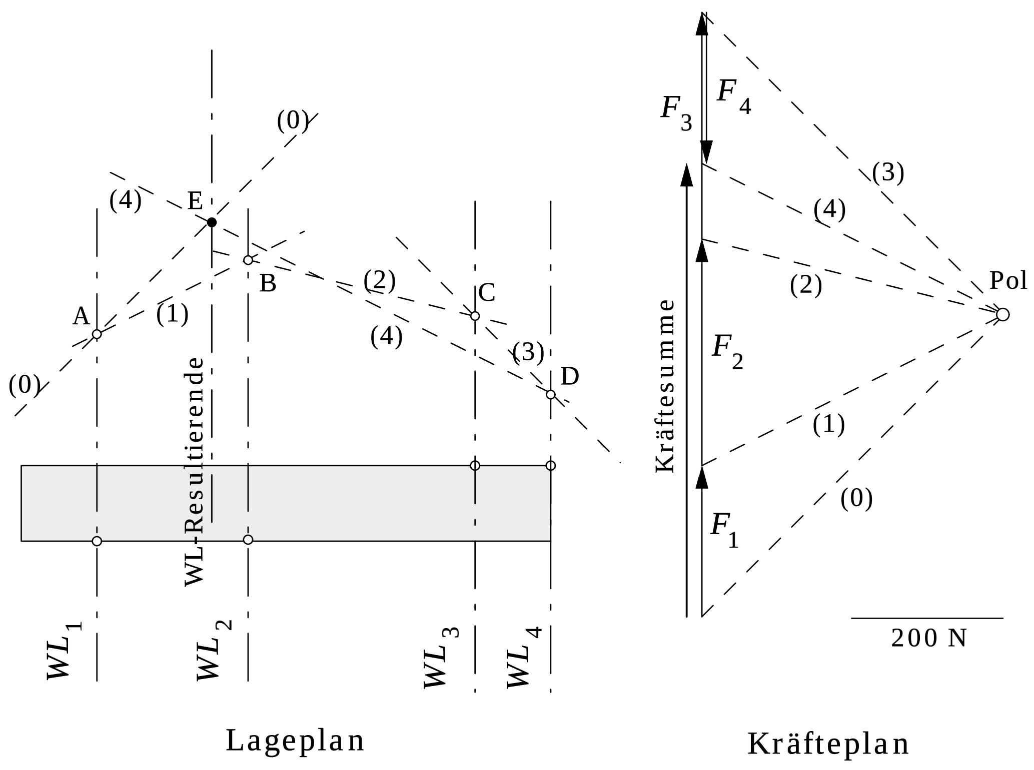
$$\vec{AP} = R \begin{bmatrix} \sin\vartheta\cos(\Omega t) \\ \sin\vartheta\sin(\Omega t) \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_{abs} = R \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos(\Omega t) - \Omega\sin\vartheta\sin(\Omega t) \\ \dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin(\Omega t) + \Omega\sin\vartheta\cos(\Omega t) \\ -\dot{\vartheta}\sin\vartheta \end{bmatrix},$$

$$a_{abs} = R \begin{bmatrix} \ddot{\vartheta}\cos\vartheta\cos(\Omega t) - (\dot{\vartheta}^2 + \Omega^2)\sin\vartheta\cos(\Omega t) - 2\dot{\vartheta}\Omega\cos\vartheta\sin(\Omega t) \\ \ddot{\vartheta}\cos\vartheta\sin(\Omega t) - (\dot{\vartheta}^2 + \Omega^2)\sin\vartheta\sin(\Omega t) + 2\dot{\vartheta}\Omega\cos\vartheta\cos(\Omega t) \\ -\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - \dot{\vartheta}^2\cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 1



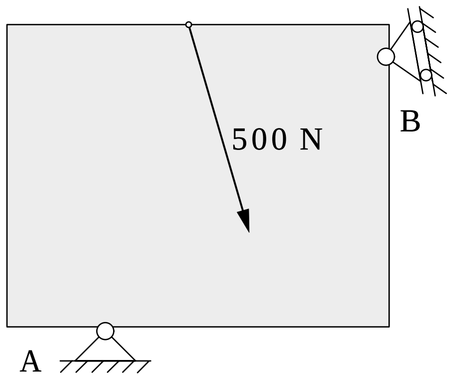
Man bestimme graphisch mit dem Seileck-Verfahren die Resultierende von vier parallelen Kräften, die an einem starren Körper angreifen.



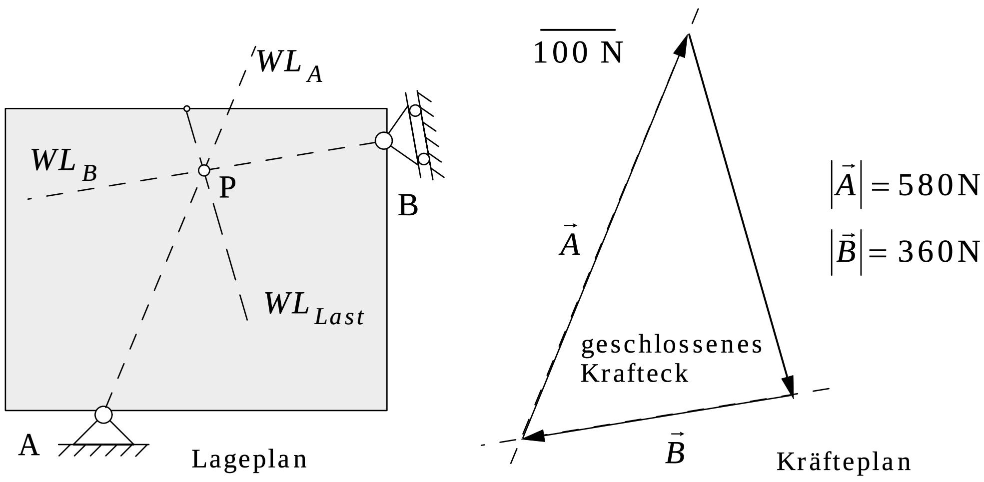
Im Kräfteplan werden zunächst die Kraftvektoren maßstäblich als Vektorkette dargestellt und nach Wahl eines zeichentechnisch möglichst günstigen Pol-Punktes die Pol-Strahlen (0),(1),...,(4) gezeichnet. Dann werden im Lageplan die Wirkungslinien $WL_1,...,WL_4$ der Kräfte maßstabsgetreu dargestellt und durch einen beliebigen Punkt A auf der WL_1 eine Parallele zum Polstrahl (0) gelegt. Ebenfalls durch A wird eine Parallele zum Polstrahl (1) gezeichnet, die WL_2 in B schneidet. Durch B legt man eine Parallele zum Polstrahl (2), die WL_3 in C schneidet, durch C eine Parallele zum Polstrahl (3) die WL_4 in D schneidet. Schließlich zeichnet man durch D die Parallele zum Polstrahl (4) bis zum Schnittpunkt E mit der durch A laufenden Parallelen zum Polstrahl (0). Der Punkt E ist ein Punkt auf der Wirkungslinie der Resultierenden, deren Größe und Richtung dem Kräfteplan entnommen werden kann.

Aufgabe 2

Man bestimme graphisch die Auflagerkräfte der statisch bestimmt gestützten Platte, die durch eine Kraft 500 N belastet ist.

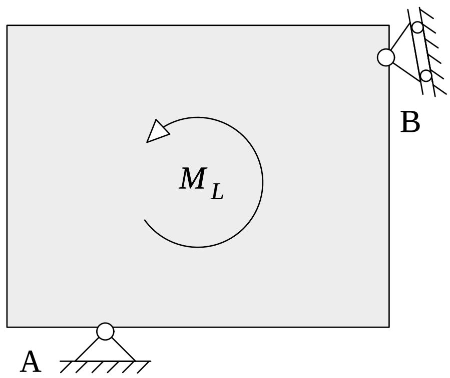


Im Lageplan müssen die Wirkungslinien der Last und der beiden Auflagerkräfte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ durch einen gemeinsamen Punkt gehen, und im Kräfteplan muß das Krafteck geschlossen sein.



Aufgabe 3

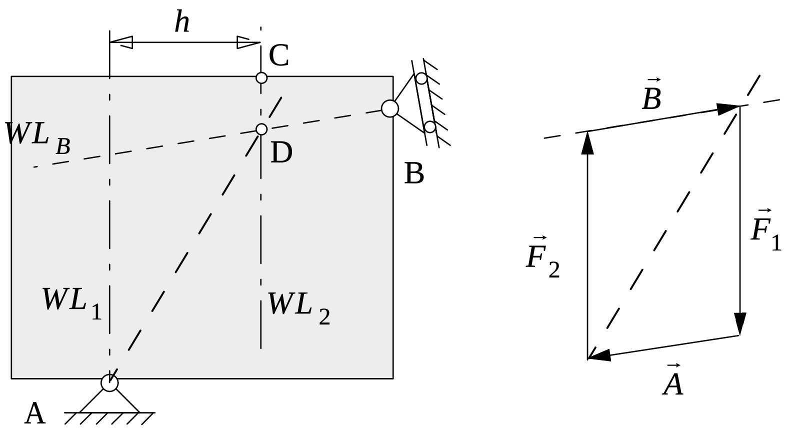
Man bestimme graphisch die Auflagerkräfte der statisch bestimmt gestützten Platte, die durch ein Moment M_L belastet ist.



Das Lastmoment wird durch ein statisch äquivalentes Kräftepaar

$$\{\vec{F}_1 = \frac{M_L}{h}\vec{e}_F \text{ durch } A, \quad \vec{F}_2 = -\frac{M_L}{h}\vec{e}_F \text{ durch } C,\}$$

ersetzt, von dem die Wirkungslinien der Kräfte im Lageplan eingetragen werden.



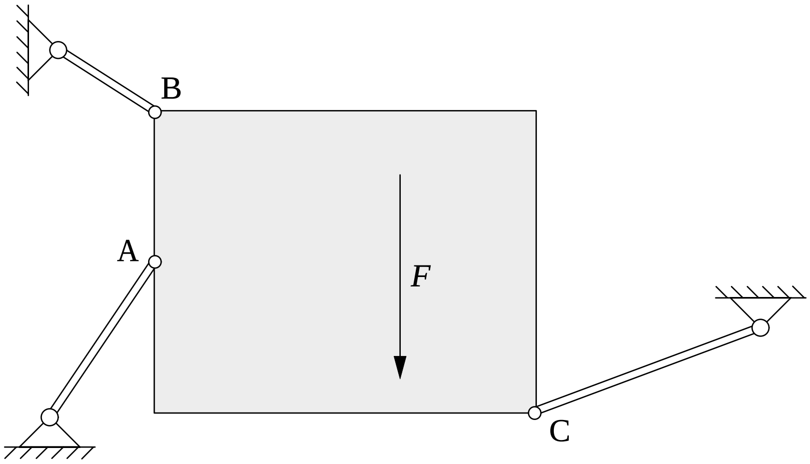
Lageplan Kräfteplan

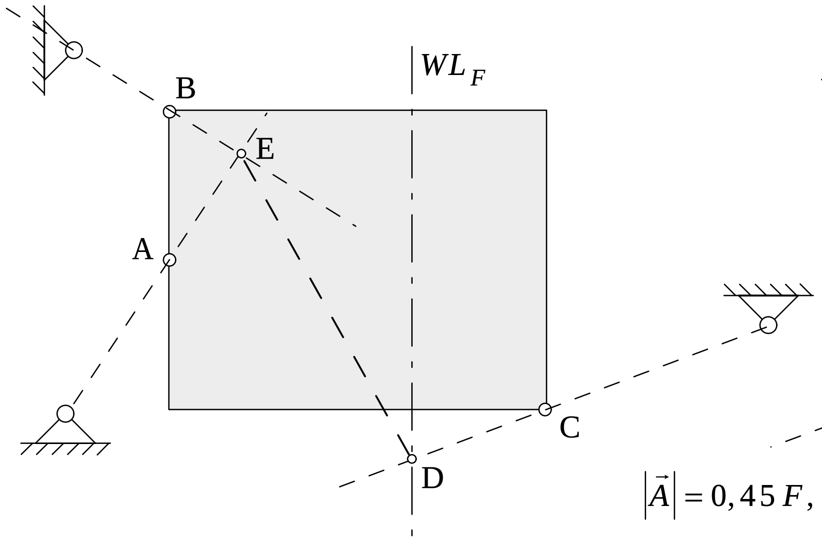
$$|\vec{A}| = |\vec{B}| = \frac{2}{3}\frac{M_L}{h}.$$

Der Punkt D ist Angriffspunkt der Kräftesumme $(\vec{B}+\vec{F}_2)$ und in A greift die Kräftesumme $(\vec{A}+\vec{F}_1)$ an. Diese beiden Kräftesummen sollen ein Gleichgewichtssystem bilden und müssen deshalb die gemeinsame Wirkungslinie AD haben und im Kräfteplan ein geschlossenes Krafteck bilden.

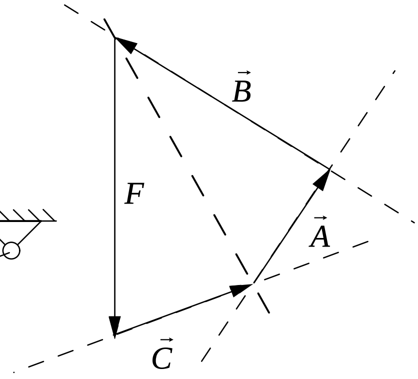
Aufgabe 4

Man bestimme graphisch die Kräfte in den drei Stäben, die in den Punkten A, B und C gelagert sind und die durch eine Kraft F belastete Platte statisch bestimmt stützen.





Lageplan

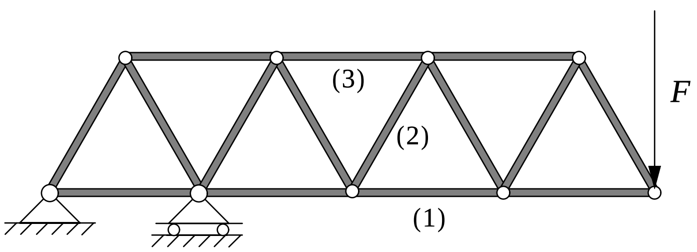


$\left|\vec{A}\right| = 0,45\,F, \qquad \left|\vec{B}\right| = 0,85\,F, \qquad \left|\vec{C}\right| = 0,5F.$

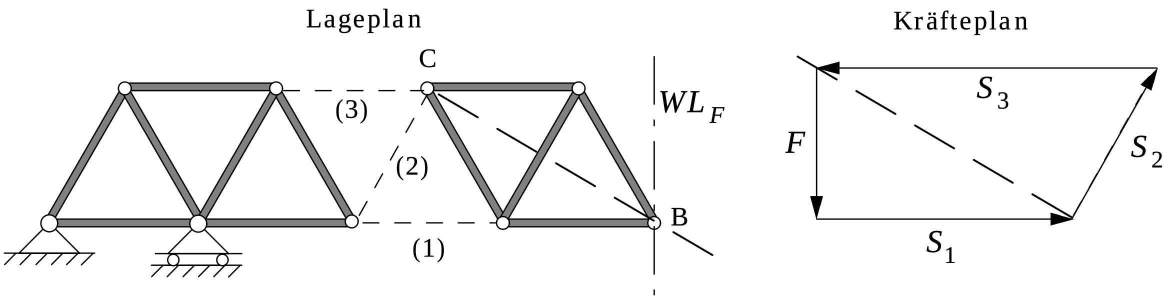
Kräfteplan

Der Punkt E ist Angriffspunkt der Kräftesumme $(\vec{A}+\vec{B})$ und der Punkt D Angriffspunkt der Kräftesumme $(\vec{C}+\vec{F})$. Diese beiden Kräftesummen bilden ein Gleichgewichtssystem, wenn sie die gemeinsame Wirkungslinie DE haben und entgegengesetzt gleich sind, also das Krafteck im Kräfteplan geschlossen ist.

Aufgabe 5



Man bestimme graphisch die Stabkräfte in den Stäben (1), (2) und (3) des statisch bestimmt gestützten ebenen Fachwerks, das durch die Kraft F im Knotenpunkt B belastet ist.



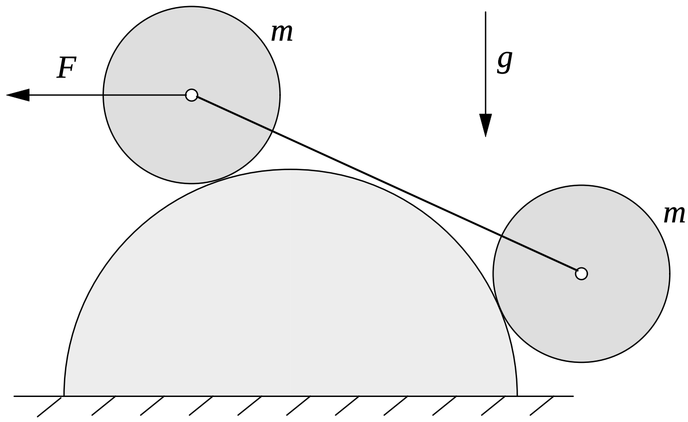
$S_1 = 1{,}7\,F$ (Druckstab)

$S_2 = 1{,}15\,F$ (Druckstab)

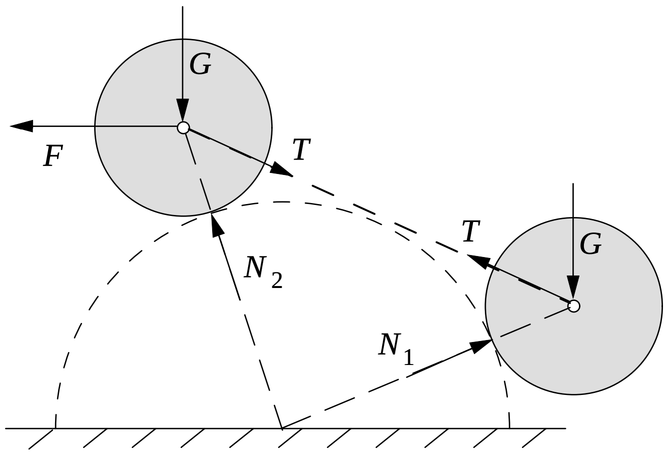
$S_3 = 2{,}25\,F$ (Zugstab)

Die Kräftesumme $(\vec{F} + \vec{S}_1)$ greift im Punkt B und die Kräftesumme $(\vec{S}_2 + \vec{S}_3)$ im Punkt C an. Im Gleichgewichtsfall müssen beide Kräftesummen die gemeinsame Wirkungslinie BC haben und das Krafteck muß sich schließen.

Aufgabe 6

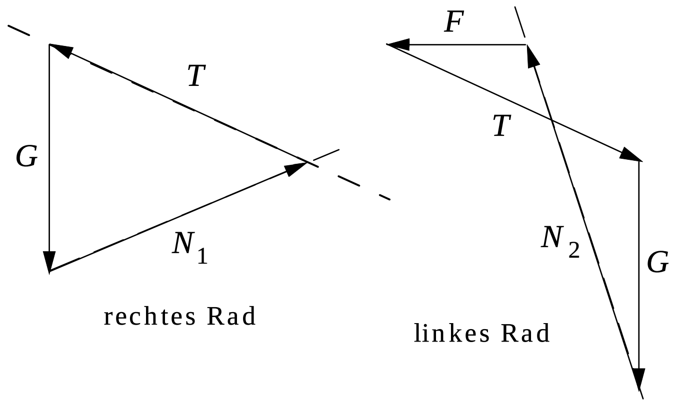


Zwei Räder (Masse m) sind über ein Seil miteinander verbunden und werden von der Kraft F in der dargestellten Lage auf einer kreiszylindrischen Bahn im Gleichgewicht gehalten. Man bestimme graphisch die Kraft F und die drei Reaktionskräfte.



$$G = mg$$

Geschlossene Kraftecke
für die zentralen Kräftesysteme



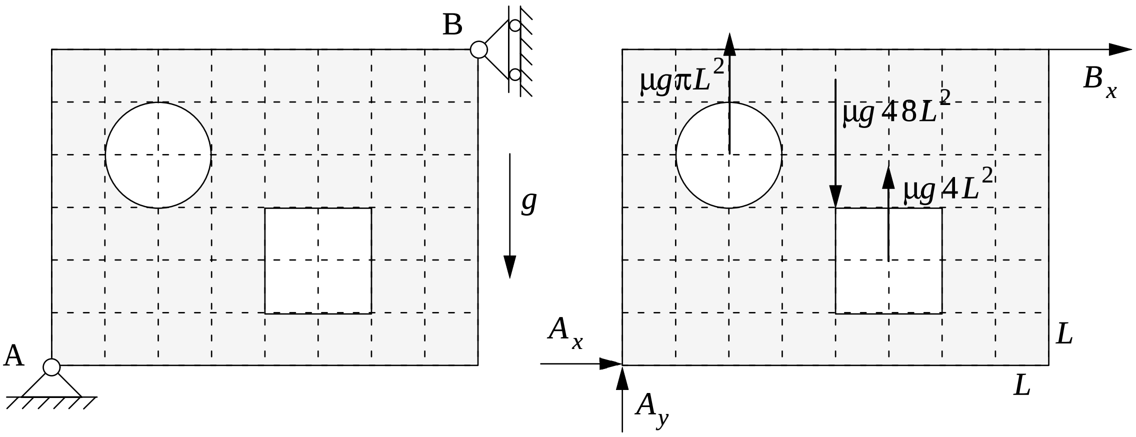
rechtes Rad

linkes Rad

$$F = 1{,}8G, \quad T = 1{,}23G, \quad N_1 = 3{,}7G, \quad N_2 = 4{,}8G.$$

Aufgabe 1

Eine Blechplatte (Masse/Flächeneinheit: μ) mit zwei Löchern ist in den Eckpunkten A und B gelagert. Man berechne die Auflagerkräfte.



Kräftegleichgewicht und Momentengleichgewicht (Bezugspunkt A)

$$A_y + (-48 + 4 + \pi)\mu g L^2 = 0,$$

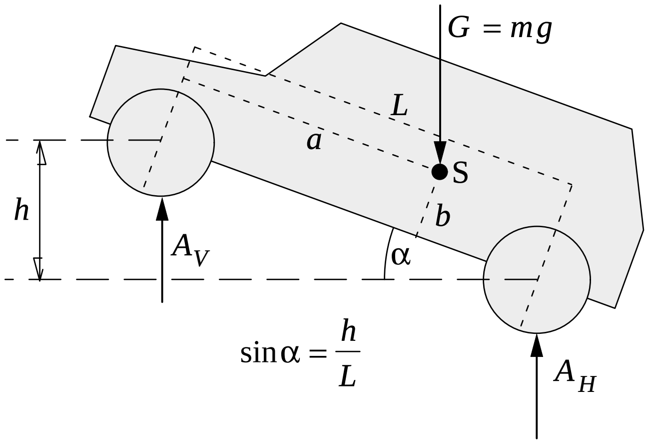
$$A_x + B_x = 0,$$

$$-6LB_x + 2L\pi\mu g L^2 + 5L\,4\mu g L^2 - 4L\,48\mu g L^2 = 0;$$

$$A_y = (44 - \pi)\mu g L^2 = 40{,}86\mu g L^2,$$

$$B_x = \frac{\pi - 86}{3}\mu g L^2 = -27{,}62\mu g L^2, \qquad A_x = -B_x.$$

Aufgabe 2



Die Lage des Schwerpunktes S im Fahrzeug (Masse: m) soll bestimmt werden aus zwei Messungen der Auflagerkraft A_H am Hinterrad bei zwei Fahrzeugneigungen. Gegeben sind:

$$m = 520\,\text{kg}, \qquad L = 2\,\text{m},$$

$$A_H = 2{,}93\,\text{kN} \quad \text{bei} \quad h = 0, \qquad A_H = 3{,}15\,\text{kN} \quad \text{bei} \quad h = 0{,}7\,\text{m}.$$

Vertikale Kräftesumme:

$$A_V + A_H - G = 0.$$

Momentengleichgewicht um Vorderachse:

$$A_H L\cos\alpha - (a\cos\alpha + b\sin\alpha)G = 0.$$

Für $h = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0$ erhalten wir

$$A_V = G - A_H = 520 \cdot 9{,}81\text{N} - 2{,}93 \cdot 10^3\,\text{N} = 2{,}17\,\text{kN}.$$

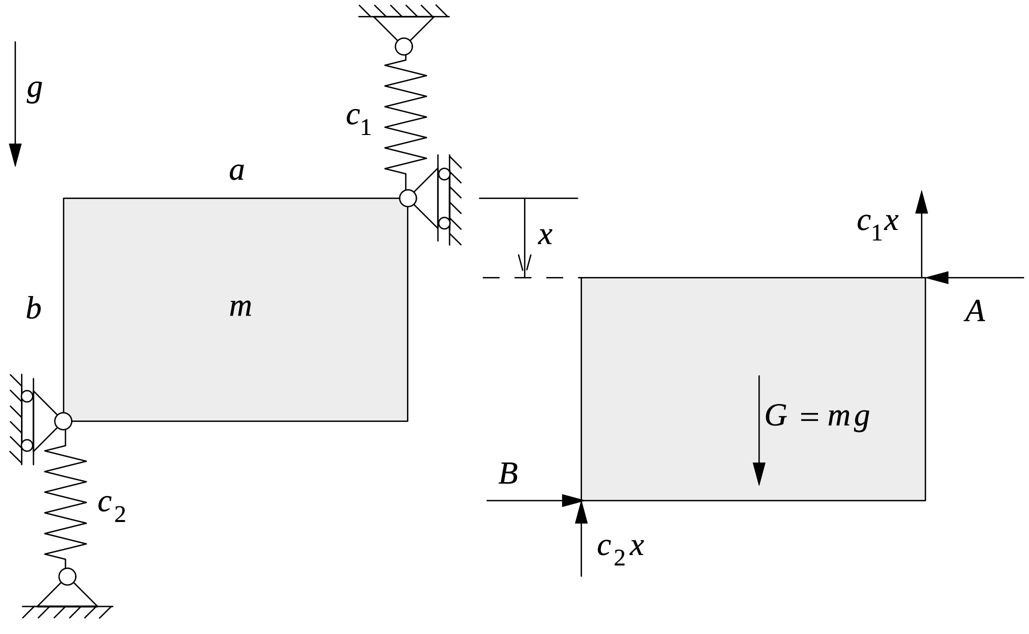
$$A_H L - aG = 0 \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{A_H}{G}L = \frac{2{,}93\,\text{kN}}{5{,}10\,\text{kN}}2\,\text{m} = 1{,}15\,\text{m}.$$

Für $h = 0{,}7\,\text{m} \quad \rightarrow \quad \alpha = \arcsin(h/L) = 20{,}5^{\circ}$ erhalten wir

$$A_V = G - A_H = 520 \cdot 9{,}81\text{N} - 3{,}15 \cdot 10^3\,\text{N} = 1{,}95\,\text{kN}.$$

$$b = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{A_H}{G}L - a\right) = \frac{0{,}9367}{0{,}35}\left(\frac{3{,}15}{5{,}10}2 - 1.15\right)\text{m} = 0{,}23\,\text{m}.$$

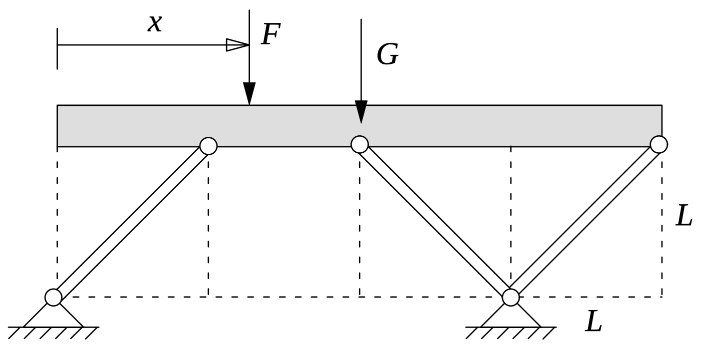
Aufgabe 3



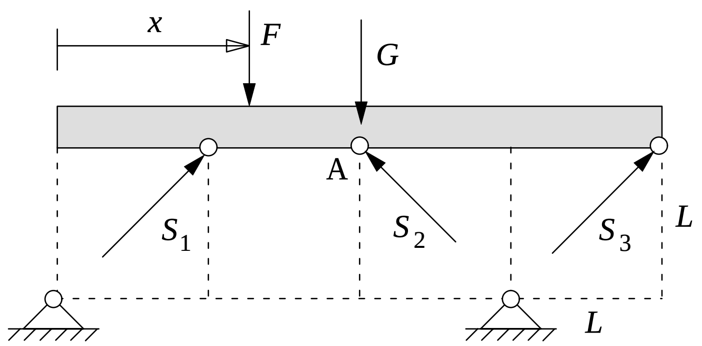
Eine homogene starre Platte hängt an zwei vertikal verschieblichen Auflagern, die sich auf Federn abstützen. Die Federn sind für $x = 0$ entspannt. Man berechne für den Gleichgewichtzustand die Absenkung der Auflager und die Auflagerkräfte. Kräftegleichgewicht und Momentengleichgewicht (Bezugspunkt A):

$$-A + B = 0,$$
$$c_1 x + c_2 x - G = 0, \qquad x = \frac{G}{c_1 + c_2}, \qquad A = B = G\frac{a}{2b}\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}.$$
$$G\frac{a}{2} + Bb - c_2 xa = 0;$$

Aufgabe 4



Ein starrer Balken (Länge $4L$, Gewichtskraft G), der durch drei starre Stäbe (Masse vernachlässigbar klein) gestützt wird, ist mit einer Kraft F belastet. Man berechne die drei Stabkräfte.



Kräftegleichgewicht und Momentengleichgewicht (Bezugspunkt A):

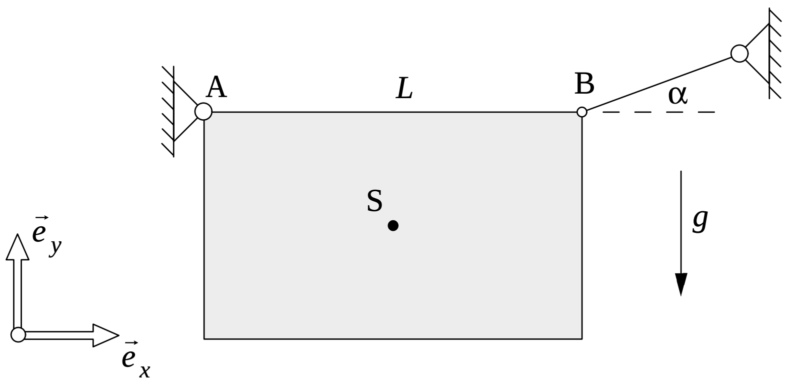
$$\rightarrow: \quad S_1\frac{\sqrt{2}}{2} - S_2\frac{\sqrt{2}}{2} + S_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$
$$\uparrow: \quad S_1\frac{\sqrt{2}}{2} + S_2\frac{\sqrt{2}}{2} + S_3\frac{\sqrt{2}}{2} - F - G = 0,$$
$$-S_1\frac{\sqrt{2}}{2}L + S_3\frac{\sqrt{2}}{2}2L + F(2L - x) = 0.$$

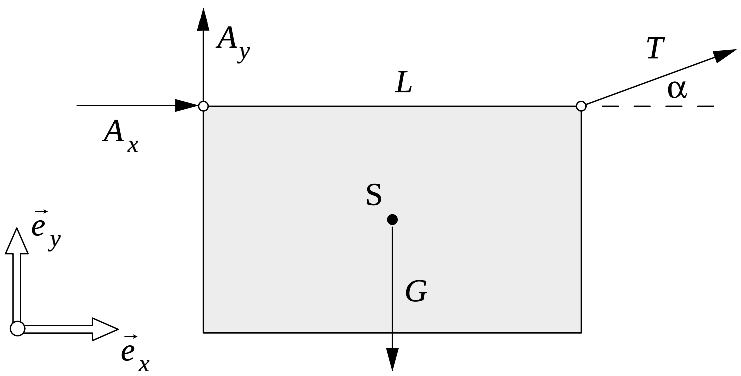
$$S_1 - S_2 + S_3 = 0,$$
$$S_1 + S_2 + S_3 = \sqrt{2}(F + G),$$
$$-S_1 + 2S_3 = -\sqrt{2}F(2 - \frac{x}{L}).$$

$$S_3 = \sqrt{2}(\frac{G}{6} - \frac{F}{2} + \frac{F}{3}\frac{x}{L}), \quad S_1 = \sqrt{2}(\frac{G}{3} + F - \frac{F}{3}\frac{x}{L}), \quad S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(F + G).$$

Aufgabe 5

Eine starre Platte (Gewichtskraft G) ist im Punkt A gelenkig gelagert und wird in B durch ein Seil gehalten, das den Winkel α mit der $\vec{e}_x$-Richtung bildet. Man berechne die Auflagerkraft und die Seilkraft.



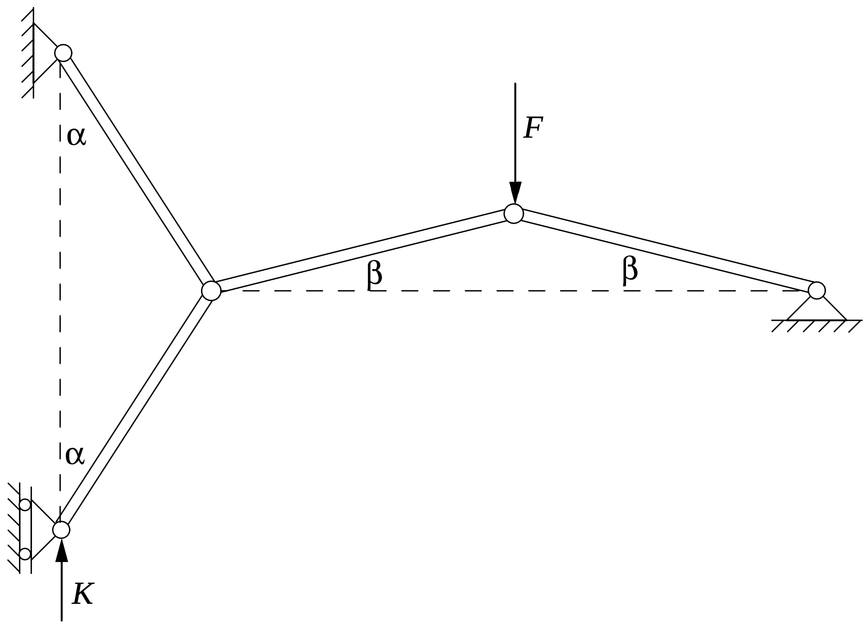


Kräftegleichgewicht und Momentengleichgewicht (Bezugspunkt B):

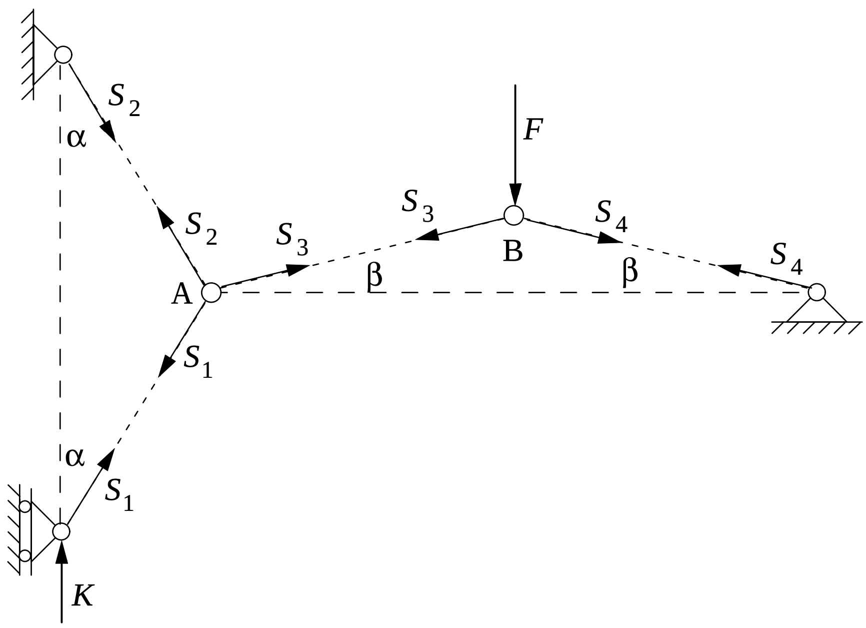
$$\begin{aligned} A_x + T\cos\alpha &= 0, \\ A_y + T\sin\alpha - G &= 0, \qquad \to \quad A_y = \frac{G}{2}, \quad T = \frac{G}{2\sin\alpha}, \quad A_x = -\frac{G}{2\tan\alpha}. \\ G\frac{L}{2} - A_y L &= 0; \end{aligned}$$

Für $\alpha = 0$ ist Gleichgewicht nicht möglich.

Aufgabe 1



Für das Stabmodell einer Kniehebelpresse berechne man die Kraft K, die der gegebenen Kraft F am System das Gleichgewicht hält, und die Kräfte in den vier Stäben.



Kräftgleichgewicht im Gelenkknoten B:

$$\begin{aligned} -S_3\cos\beta + S_4\cos\beta &= 0, \\ -S_3\sin\beta - S_4\sin\beta - F &= 0; \end{aligned} \quad \rightarrow \quad S_3 = S_4 = -\frac{F}{2\sin\beta}.$$

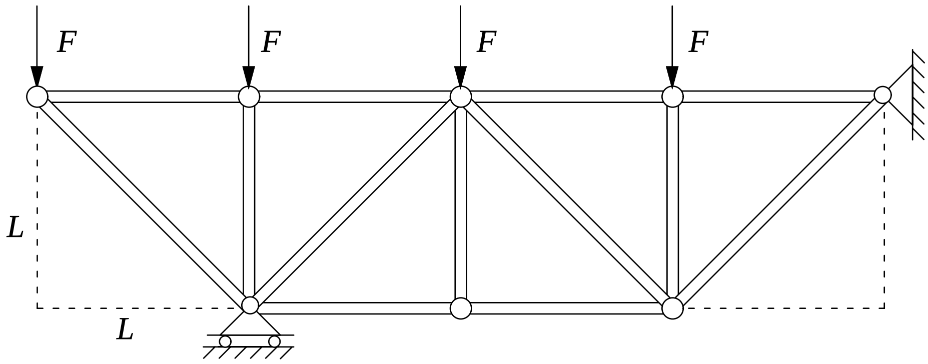
Kräftegleichgewicht im Gelenkknoten A:

$$\begin{aligned} S_3\cos\beta - S_2\sin\alpha - S_1\sin\alpha &= 0, \\ S_3\sin\beta + S_2\cos\alpha - S_1\cos\alpha &= 0, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad S_1 = -\frac{\cos(\alpha-\beta)F}{2\sin(2\alpha)\sin\beta}, \quad S_2 = -\frac{\cos(\alpha+\beta)F}{2\sin(2\alpha)\sin\beta}.$$

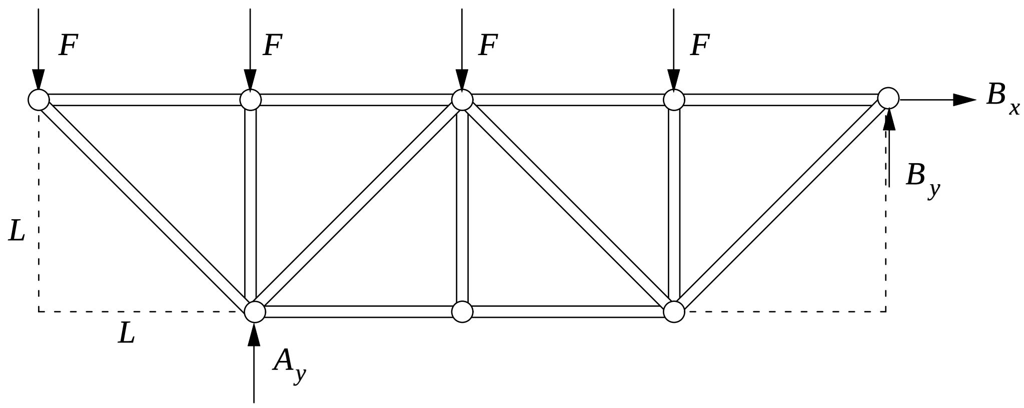
Vertikales Kräftegleichgewicht im einwertigen Auflager:

$$S_1 \cos\alpha + K = 0, \qquad \rightarrow \qquad K = \frac{\cos(\alpha - \beta)F}{4\sin\alpha\sin\beta}.$$

Aufgabe 2



Man berechne die Auflagerkräfte und die Stabkräfte des ebenen Fachwerks.



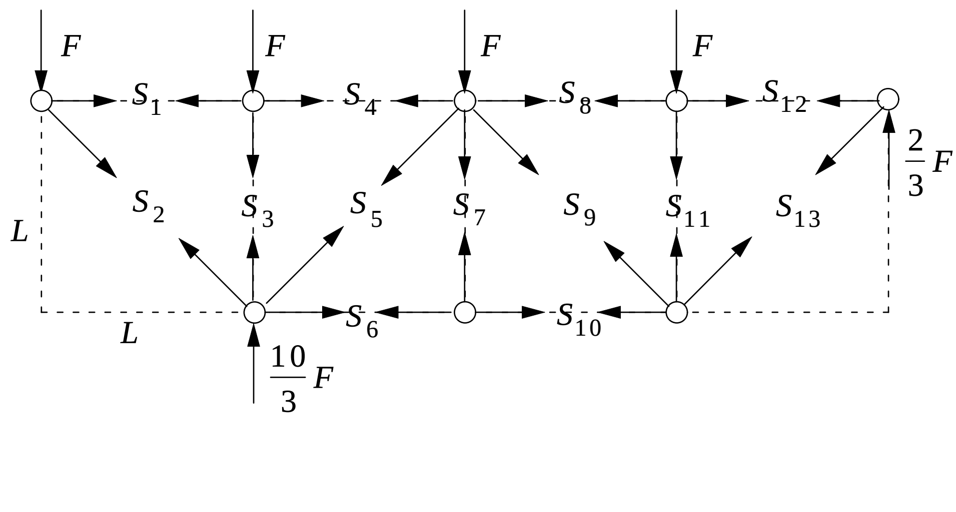
Gleichgewichtsbedingungen für das Fachwerk:

$$B_x = 0,$$

$$A_y + B_y - 4F = 0, \qquad B_x = 0, \quad A_y = \frac{10}{3}F, \quad B_y = \frac{2}{3}F.$$

$$A_y 3L - F\,4L - F\,3L - F\,2L - FL = 0;$$

Freikörperbild der Gelenkknoten:



Gleichgewichtsbedingungen für die zentralen Kräftesysteme in den Gelenkknoten:

$$\begin{aligned} &\rightarrow: \quad S_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 = 0, \\ &\uparrow: \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} S_2 - F = 0; \end{aligned} \qquad S_2 = -\sqrt{2}F, \qquad S_1 = F;$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow: \quad S_4 - S_1 = 0, \\ &\uparrow: \quad -S_3 - F = 0; \end{aligned} \qquad S_3 = -F, \qquad S_4 = F;$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow: \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 + S_6 = 0, \\ &\uparrow: \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 + S_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 + \frac{10}{3} F = 0; \end{aligned} \qquad S_5 = -\frac{4\sqrt{2}}{3} F, \qquad S_6 = \frac{1}{3} F;$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow: \quad -S_6 + S_{10} = 0, \\ &\uparrow: \quad S_7 = 0; \end{aligned} \qquad S_7 = 0, \qquad S_{10} = \frac{1}{3} F;$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow: \quad -S_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_9 + S_8 = 0, \\ &\uparrow: \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} S_5 - S_7 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_9 - F = 0; \end{aligned} \qquad S_8 = -\frac{2}{3} F, \qquad S_9 = \frac{\sqrt{2}}{3} F;$$

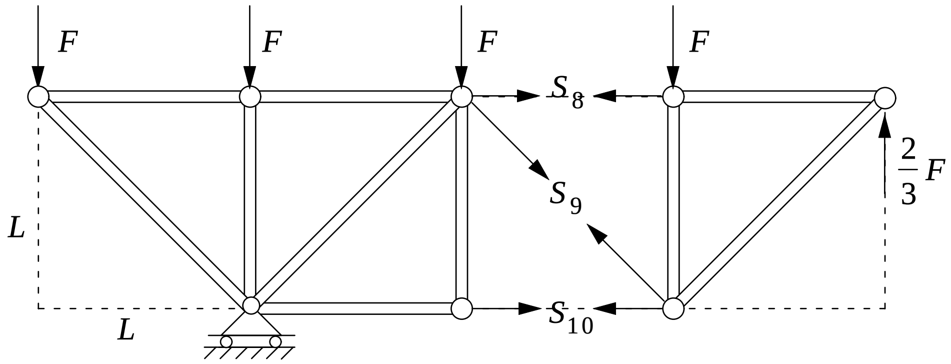
$$\begin{aligned} &\rightarrow: \quad -S_8 + S_{12} = 0, \\ &\uparrow: \quad -S_{11} - F = 0; \end{aligned} \qquad S_{11} = -F, \qquad S_{12} = -\frac{2}{3} F;$$

$$\rightarrow: \quad -S_{10} - \frac{\sqrt{2}}{2} S_9 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_{13} = 0, \qquad S_{13} = \frac{2\sqrt{2}}{3} F.$$

Stabkräfte mit positivem (negativem) Vorzeichen kennzeichnen Zugstäbe (Druckstäbe).

RITTERsches Schnittverfahren:

Mit dem RITTERschen Schnittverfahren kann man gezielt die Stabkräfte in drei Stäben berechnen, die eine Verbindung von zwei starren Teilfachwerken bilden.



Gleichgewichtsbedingungen für das rechte Teilfachwerk:

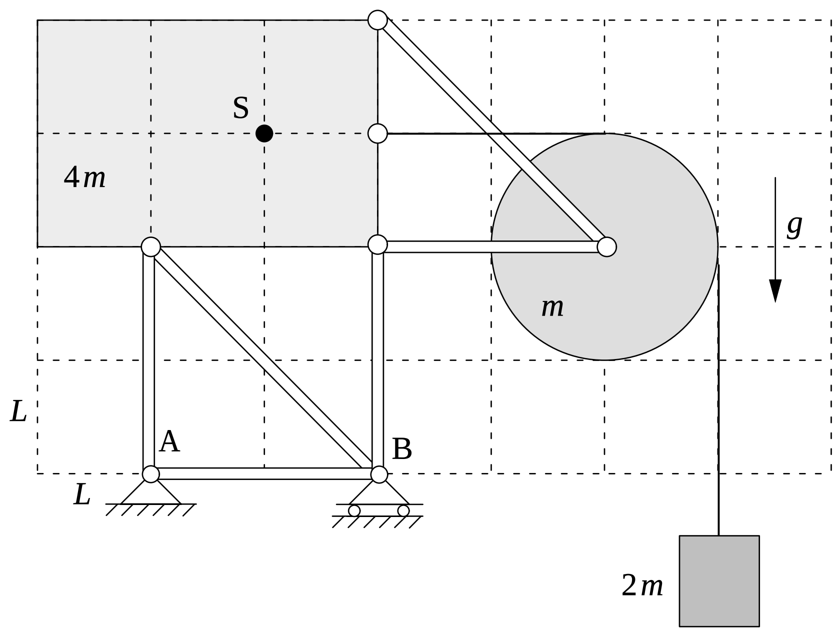
$$-S_8 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_9 - S_{10} = 0,$$

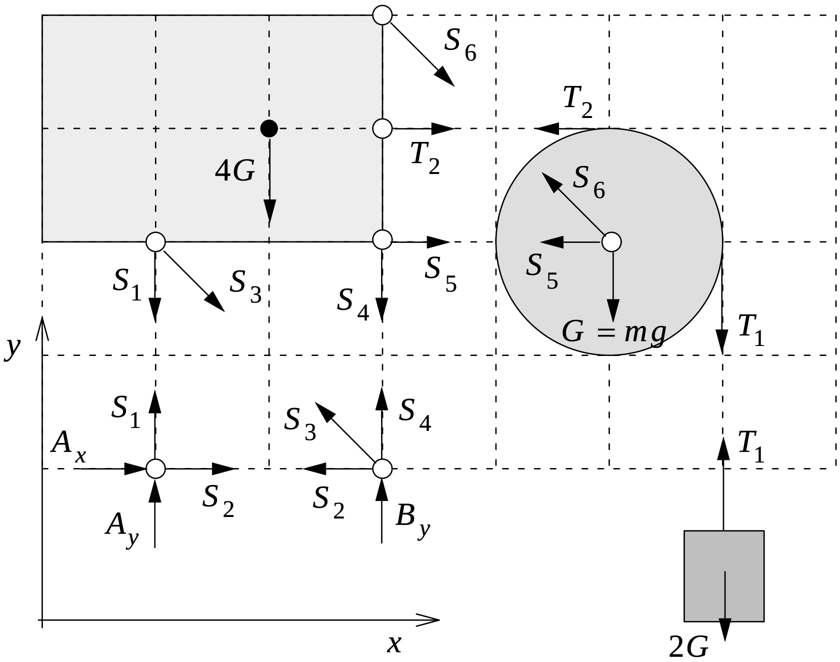
$$\frac{\sqrt{2}}{2} S_9 - F + \frac{2}{3} F = 0, \qquad S_8 = -\frac{2}{3} F, \qquad S_9 = \frac{\sqrt{2}}{3} F, \qquad S_{10} = \frac{1}{3} F.$$

$$S_8 L + \frac{2}{3} F L = 0;$$

Aufgabe 3

Für das ebene System starrer Körper berechne man die Auflagerkräfte und die Stabkräfte. Die Masse der Stäbe sei vernachlässigbar klein.





Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem:

$$\begin{aligned} A_x &= 0, \\ A_y + B_y - 4G - G - 2G &= 0, \quad \to \quad A_x = 0, \quad B_y = 9G, \quad A_y = -2G. \\ B_y 2L - 4GL - G4L - 2G5L &= 0; \end{aligned}$$

Gleichgewichtsbedingungen in den Auflagerknoten A und B:

$$A_x + S_2 = 0, \qquad A_y + S_1 = 0,$$

$$B_y + S_4 + S_3/\sqrt{2} = 0, \qquad -S_2 - S_3/\sqrt{2} = 0;$$

$$\to \quad S_2 = 0, \quad S_1 = 2G, \quad S_3 = 0, \quad S_4 = -9G;$$

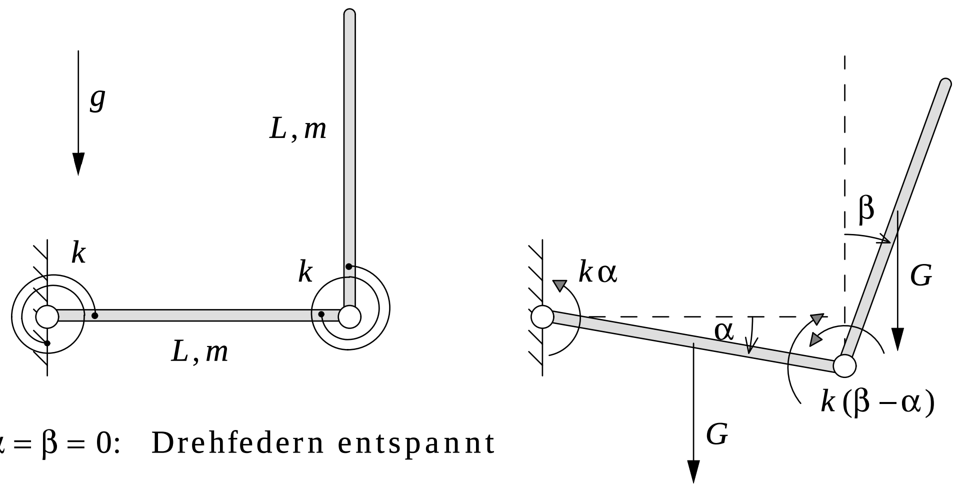
Gleichgewichtsbedingungen für die drei starren Körper:

$$T_1 - 2G = 0, \quad \to \quad T_1 = 2G;$$

$$\begin{aligned} -T_2 - S_5 - S_6/\sqrt{2} &= 0, \\ S_6/\sqrt{2} - G - T_1 &= 0, \quad \to \quad T_2 = 2G, \quad S_6 = 3\sqrt{2}G, \quad S_5 = -5G; \\ T_2 L - T_1 L &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3/\sqrt{2} + S_5 + S_6/\sqrt{2} + T_2 &= 0, \\ -S_1 - S_3/\sqrt{2} - S_4 - S_6/\sqrt{2} - 4G &= 0, \qquad \text{(nur noch als Test)} \\ -4GL - S_4 2L - T_2 L - S_6 2L\sqrt{2} &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4



$\alpha = \beta = 0$: Drehfedern entspannt

Man berechne die Gleichgewichtslage der beiden Stäbe, die in den Gelenken durch zwei Drehfedern gestützt werden. Man setze insbesondere

$$k = mgL = GL.$$

Momentengleichgewicht des rechten Stabes:

$$k(\beta-\alpha) - G\frac{L}{2}\sin\beta = 0, \qquad \alpha = \beta - \frac{1}{2}\sin\beta.$$

Momentengleichgewicht des gesamten Systems:

$$k\alpha - G\frac{L}{2}\cos\alpha - G(L\cos\alpha + \frac{L}{2}\sin\beta) = 0, \qquad \alpha - \frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\beta = 0.$$

$$\beta = 2\alpha - \frac{3}{2}\cos\alpha,$$

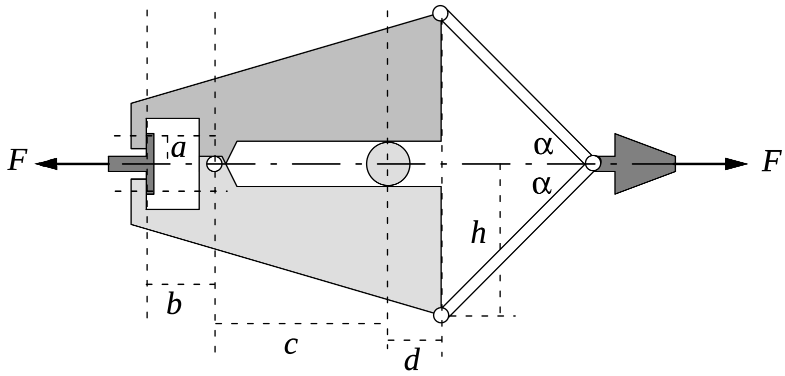
$$\alpha - \frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha - \frac{3}{2}\cos\alpha) = 0.$$

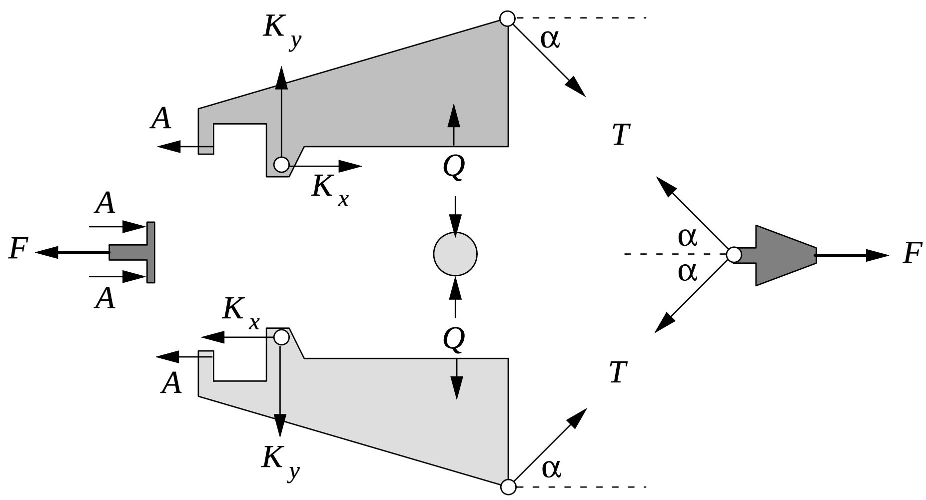
Lösung der nichtlinearen Gleichung:

$$\alpha = 1.1338 = 64,96^{\circ}, \qquad \beta = 1.6327 = 93,55^{\circ}.$$

Aufgabe 5

Die dargestellte Vorrichtung dient als Zugkraftbegrenzer: Wenn die auf den Bolzen wirkende Scherkraft einen maximalen Wert Q_{max} erreicht, wird der Bolzen abgeschert und die Zange öffnet sich. Man berechne die maximal mögliche Zugkraft und die Kraft $\vec{K}$ auf den Gelenkbolzen.





Gleichgewichtsbedingungen für die freigeschnittenen Körper unter Beachtung der Symmetrie:

$$-F + 2A = 0, \qquad \begin{aligned} -A + K_x + T\cos\alpha &= 0, \\ K_y + Q - T\sin\alpha &= 0, \\ Aa + Qc - T\cos\alpha\, h - T\sin\alpha(c+d) &= 0, \end{aligned} \qquad F - 2T\cos\alpha = 0.$$

Ergebnisse:

$$A = \frac{F}{2}, \qquad T = \frac{F}{2\cos\alpha}, \qquad K_x = 0,$$

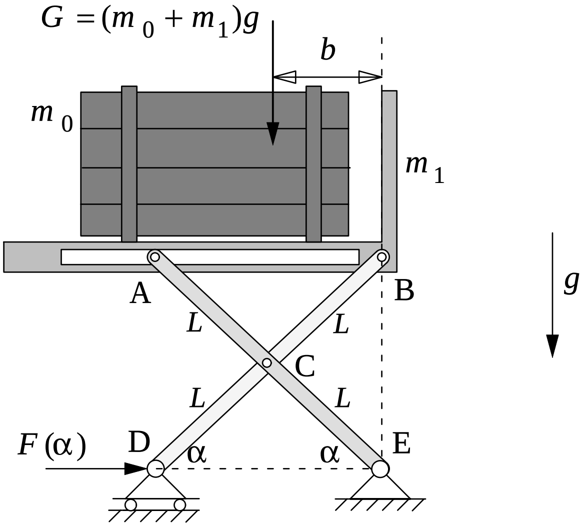
$$Q = \frac{h + (c+d)\tan\alpha - a}{2c}F, \qquad K_y = \frac{a - h - d\tan\alpha}{2c}F.$$

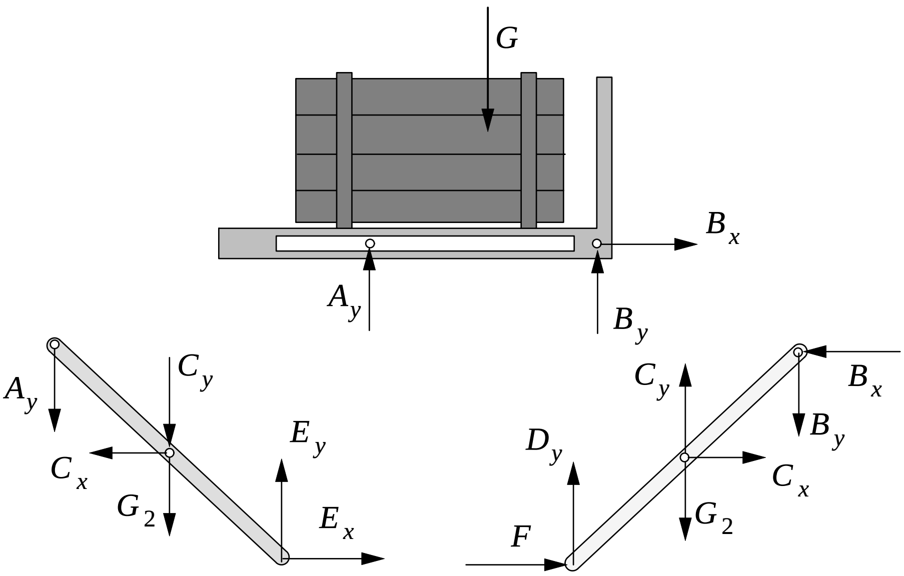
$$F_{\max} = \frac{2c}{h + (c+d)\tan\alpha - a}Q_{\max}.$$

Aufgabe 6

Auf einer Hebebühne (Masse m_1) liegt ein Ladegut (Masse m_0). Die Hubstangen (Länge $2L$, Masse m_2) sind in C gelenkig verbunden. Man berechne die Kraft

$F(\alpha)$, mit der das System im Gleichgewicht gehalten werden kann und alle Kräfte in den Gelenkpunkten A, B, C, D und E.





Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte am Gesamtverband:

$$E_x + F = 0,$$

$$E_y + D_y - G - 2G_2 = 0,$$

$$Gb + 2G_2 L\cos\alpha - D_y 2L\cos\alpha = 0;$$

$$D_y = G_2 + \frac{b}{2L\cos\alpha}G, \qquad E_y = G_2 + (1 - \frac{b}{2L\cos\alpha})G.$$

$$F = -E_x .$$

Gleichgewichtsbedingungen für den Hubtisch mit Last:

$$B_x = 0,$$
$$A_y + B_y - G = 0,$$
$$Gb - A_y 2L\cos\alpha = 0;$$

$$B_x = 0, \qquad A_y = \frac{b}{2L\cos\alpha}G, \qquad B_y = (1 - \frac{b}{2L\cos\alpha})G.$$

Gleichgewichtsbedingungen für die Hubstange AE:

$$-C_x + E_x = 0,$$
$$-A_y - C_y + E_y - G_2 = 0,$$
$$A_y 2L\cos\alpha + C_x L\sin\alpha + C_y L\cos\alpha + G_2 L\cos\alpha = 0;$$

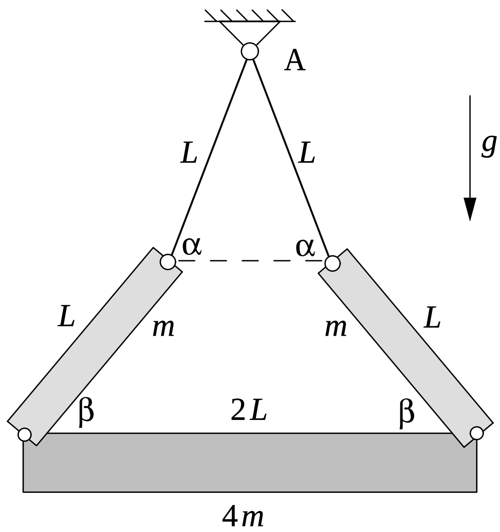
$$C_y = (1 - \frac{b}{L\cos\alpha})G, \qquad C_x = E_x = -\frac{G + G_2}{\tan\alpha}. \qquad F(\alpha) = \frac{G + G_2}{\tan\alpha}.$$

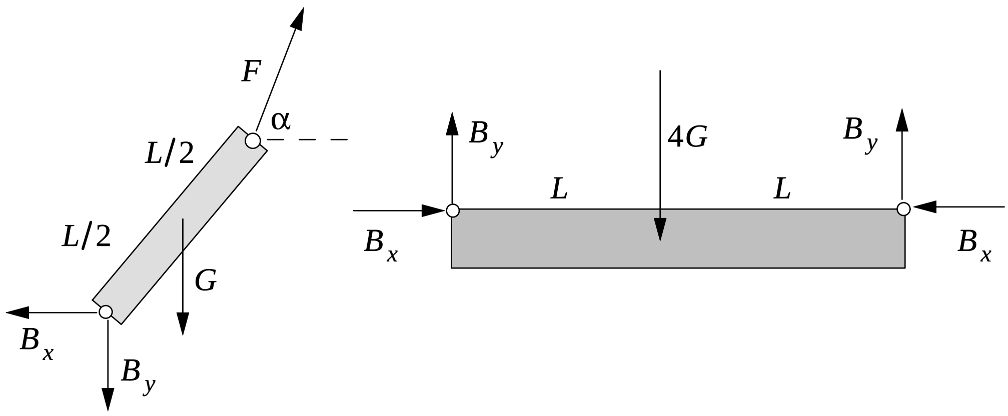
Gleichgewichtsbedingungen für die Hubstange BD:
(nur noch zur Kontrolle)

$$B_x + C_x + F = 0,$$
$$-B_y + C_y + D_y - G_2 = 0,$$
$$C_y L\cos\alpha - C_x L\sin\alpha - B_y 2L\cos\alpha + B_x 2L\sin\alpha - G_2 L\cos\alpha = 0.$$

Aufgabe 7

Drei gelenkig miteinander verbundene starre Körper sind im Punkt A aufgehängt. Unter Beachtung der Symmetrie berechne man die beiden Gleichungen für die Winkel α und β in der Gleichgewichtslage.





Gleichgewichtsbedingungen der freigeschnittenen Körper:

$$-B_x + F\cos\alpha = 0,$$

$$2B_y - 4G = 0, \qquad -B_y - G + F\sin\alpha = 0,$$

$$G\frac{L}{2}\cos\beta + B_y L\cos\beta - B_x L\sin\beta = 0.$$

Reaktionskräfte:

$$B_y = 2G, \qquad B_x = \frac{5}{2}G\frac{\cos\beta}{\sin\beta}, \qquad F = 3G\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Gleichungen für die Neigungswinkel:

$$B_x = F\cos\alpha \qquad \to \qquad \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{6}{5}.$$

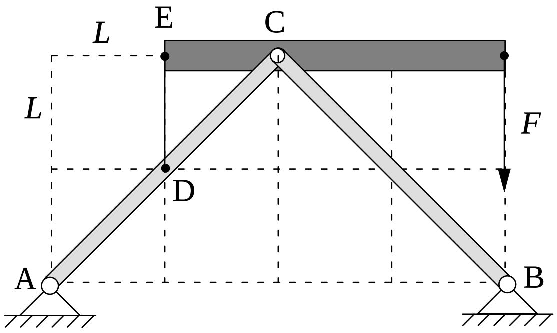
Geometrische Bedingung:

$$L\cos\beta + L\cos\alpha = L.$$

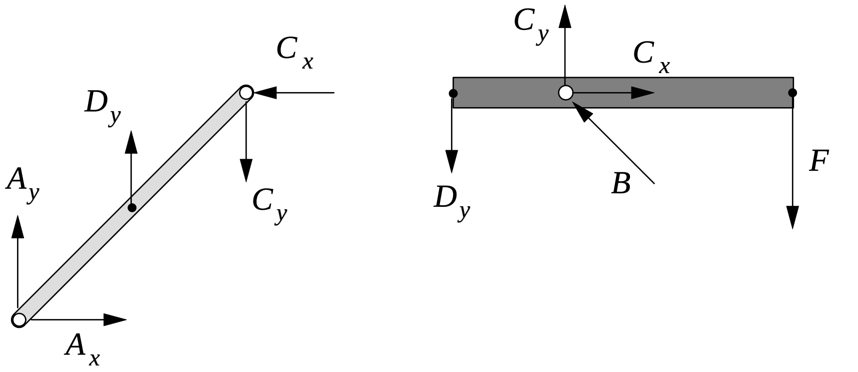
Damit erhalten wir für den Winkel α die nichtlineare Gleichung

$$\frac{\tan\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2\cos\alpha - \cos^2\alpha}} = \frac{6}{5}. \qquad \to \qquad \begin{aligned} \alpha &= 1{,}0862 = 62{,}2^\circ \\ \beta &= 1{,}0073 = 57{,}7^\circ. \end{aligned}$$

Aufgabe 8



Das aus drei starren Stäben bestehende System ist mit der Kraft F belastet. Man berechne die Auflagerkräfte im Auflager A, die Stabkraft im Stab BC, die Kraft im Seil DE sowie die Kräfte im Gelenk C.



$$A_x - C_x = 0, \qquad C_x - \frac{B}{\sqrt{2}} = 0,$$

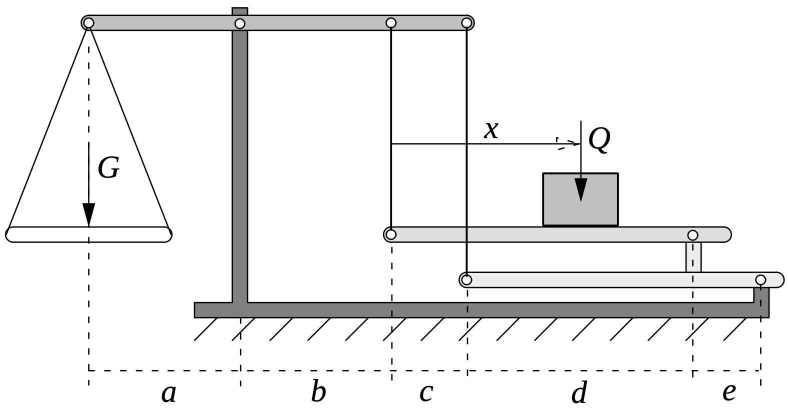
$$A_y + D_y - C_y = 0, \qquad -D_y + C_y + \frac{B}{\sqrt{2}} - F = 0,$$

$$C_x 2L - C_y 2L + D_y L = 0; \qquad D_y L - F\,2L = 0.$$

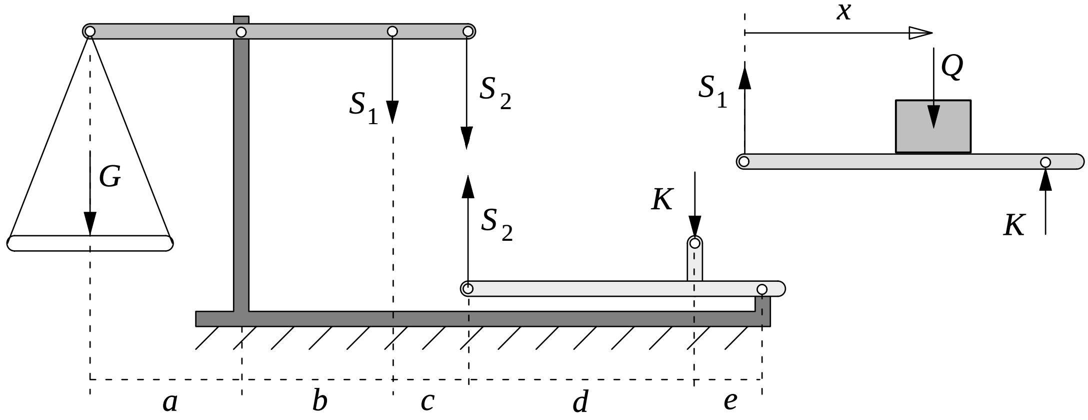
$$D_y = 2F, \qquad \begin{aligned} C_x - C_y &= -F, \\ C_x + C_y &= 3F, \end{aligned} \qquad C_x = F, \qquad C_y = 2F,$$

$$A_x = F, \qquad A_y = 0, \qquad B = \sqrt{2}\,F.$$

Aufgabe 9



Wie müssen die Abmessungen einer Brückenwaage gewählt werden, wenn die Kraft G, die einer Last Q das Gleichgewicht hält, unabhängig sein soll von der Position x der Wirkungslinie der Last?



Gleichgewichtsbedingungen:

$$Ga - S_1 b - S_2(b+c) = 0,$$
$$S_1 + K - Q = 0,$$
$$K(c+d) - Qx = 0,$$
$$Ke - S_2(d+e) = 0.$$

Innere Reaktionskräfte:

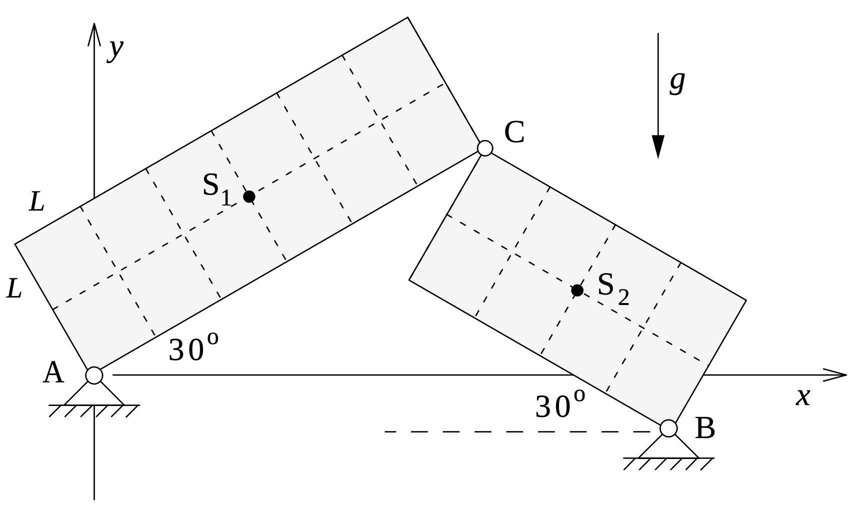
$$K = Q\frac{x}{c+d}, \qquad S_1 = Q\left(1 - \frac{x}{c+d}\right), \quad S_2 = Q\frac{xe}{(c+d)(d+e)}.$$

$$G = \frac{Q}{a}\left\{b - \frac{xb}{c+d} + \frac{xe(b+c)}{(c+d)(d+e)}\right\} = \frac{Q}{a}\left\{b - \frac{x}{c+d}\left(b - \frac{e(b+c)}{d+e}\right)\right\};$$

G wird unabhängig von x, wenn

$$b(d+e) = e(b+c) \qquad \rightarrow \qquad bd = ec.$$

Aufgabe 10



Zwei homogene starre Platten (Gewichtskräfte: $3G$ und $2G$) sind in den Punkten A, B und C gelenkig gelagert. Man berechne die inneren und äußeren Reaktionskräfte.

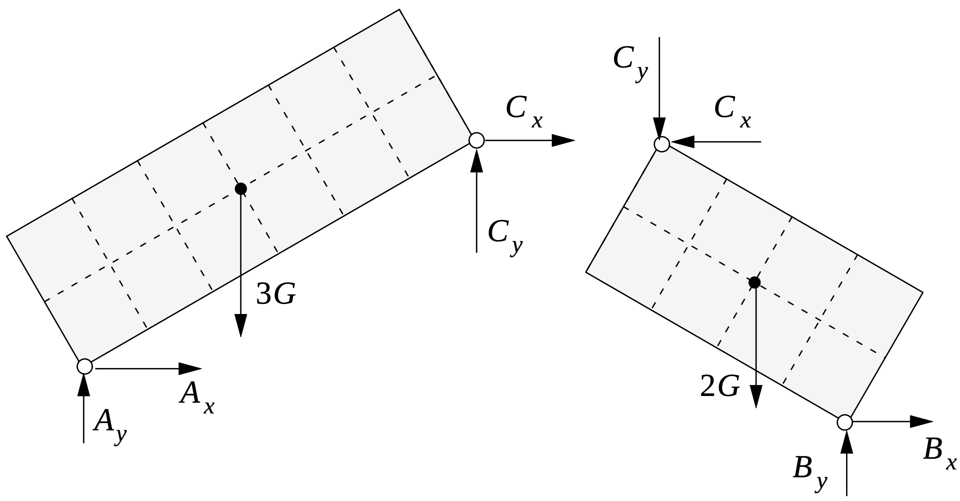
Koordinaten der Schwerpunkte und der Gelenkpunkte:

$$x_{S_1} = 3L\frac{\sqrt{3}}{2} - L\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}-1}{2}L, \qquad y_{S_1} = 3L\frac{1}{2} + L\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}L,$$

$$x_C = 6L\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}L, \qquad y_C = 6L\frac{1}{2} = 3L,$$

$$x_{S_2} = x_C + 2L\frac{\sqrt{3}}{2} - L\frac{1}{2} = \frac{8\sqrt{3}-1}{2}L, \qquad y_{S_2} = y_C - 2L\frac{1}{2} - L\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4-\sqrt{3}}{2}L,$$

$$x_B = x_C + 4L\frac{\sqrt{3}}{2} - 2L\frac{1}{2} = (5\sqrt{3}-1)L, \qquad y_B = y_C - 4L\frac{1}{2} - 2L\frac{\sqrt{3}}{2} = (1-\sqrt{3})L.$$



Kräfte-Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem und den linken Körper:

$$A_x + B_x = 0, \qquad A_x + C_x = 0,$$
$$A_y + B_y - 5G = 0; \qquad A_y + C_y - 3G = 0.$$

Momenten-Gleichgewichtsbedingungen für die beiden Körper, Bezugspunkt C:

$$A_x y_C - A_y x_C + 3G(x_C - x_{S_1}) = 0,$$
$$B_x(y_C - y_B) + B_y(x_B - x_C) - 2G(x_{S_2} - x_C) = 0;$$

$$2A_x - 2\sqrt{3}A_y = -(3\sqrt{3}+1)G,$$
$$A_x(2+\sqrt{3}) + A_y(2\sqrt{3}-1) = (8\sqrt{3}-4)G;$$

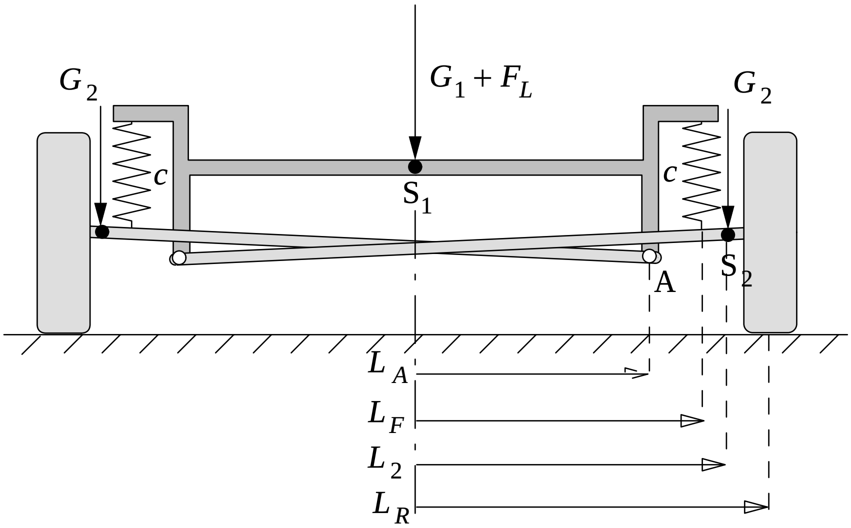
Ergebnisse:

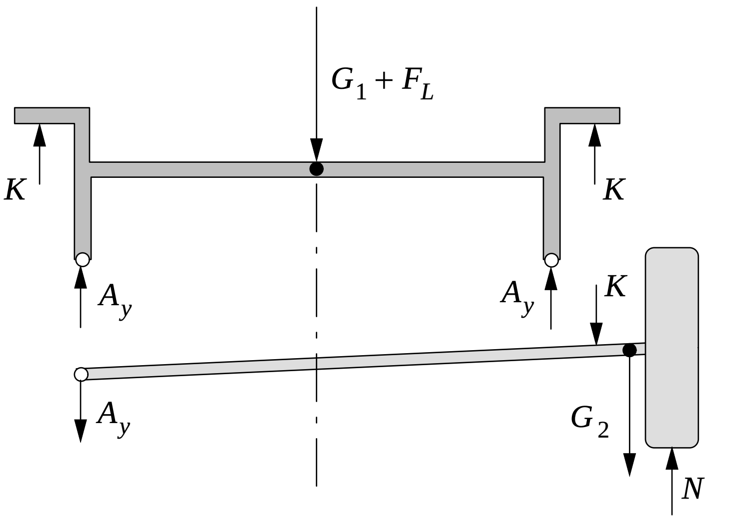
$$A_x = 1{,}057\,G, \qquad A_y = 2{,}3990\,G;$$

$$B_x = C_x = -A_x, \qquad B_y = 2{,}6010\,G, \qquad C_y = 0{,}6010\,G.$$

Aufgabe 11

Für das dargestellte Rad-Achsen-System berechne man unter Beachtung der Symmetrie die Kraft im Gelenkpunkt A und die Länge der Feder (Federsteifigkeit c) im belasteten Zustand, wenn L_0 die Länge der entspannten Feder ist.





Kräfte-Gleichgewichtsbedingungen am Rahmen und an der Achse:

$$2A_y + 2K - (F_L + G_1) = 0;$$

$$N - A_y - K - G_2 = 0;$$

$$N = G_2 + \frac{1}{2}(G_1 + F_L).$$

Momenten-Gleichgewichtsbedingungen an der Achse:

$$N(L_A + L_R) - K(L_A + L_F) - G_2(L_A + L_2) = 0;$$

$$K = \frac{N(L_A + L_R) - G_2(L_A + L_2)}{L_A + L_F},$$

$$K = \frac{G_2(L_R - L_2) + (G_1 + F_L)(L_A + L_R)/2}{L_A + L_F};$$

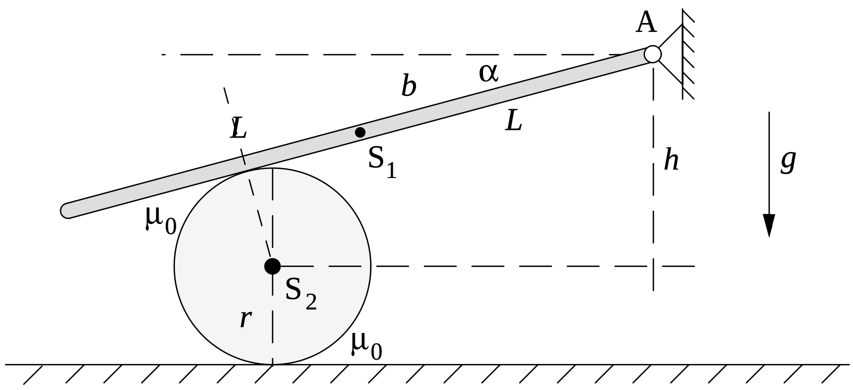
Bei dieser Kraft ist die Feder um ΔL zusammengedrückt:

$$c\,\Delta L = K\,, \qquad \Delta L = \frac{K}{c}.$$

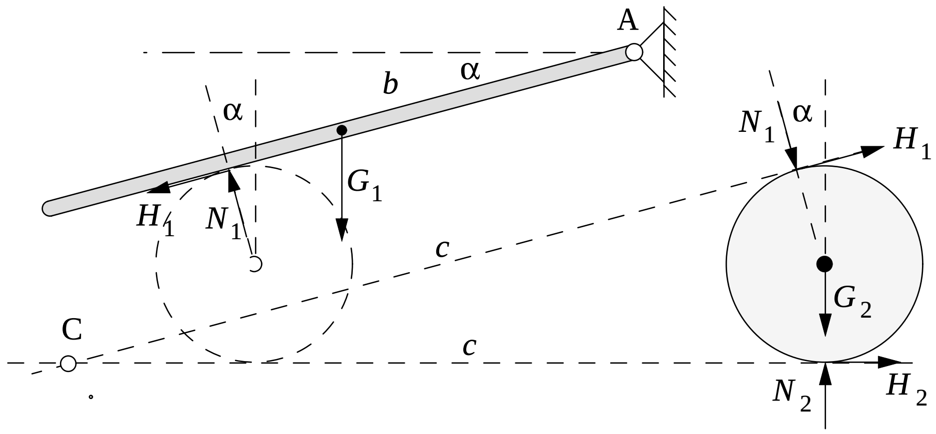
Länge der belasteten Feder:

$$L = L_0 - \Delta L = L_0 - \frac{K}{c}.$$

Aufgabe 1



Eine starre Stange (Länge $2L$, Masse m_1) liegt unter einem Winkel α auf einer Kreisscheibe (Radius r, Masse m_2), die auf einer horizontalen Fläche steht. In den Kontaktpunkten der Kreisscheibe sei μ_0 der Haftreibungskoeffizient. Man berechne die Kräfte in den Kontaktpunkten und die Bedingung für den Winkel α, unter der Gleichgewicht möglich ist.



Geometrische Zwangsbedingung:

$$b\sin\alpha + r\cos\alpha = h \quad \rightarrow \quad b = \frac{h - r\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Gewichtskräfte:

$$G_1 = m_1 g, \quad G_2 = m_2 g.$$

Gleichgewichtsbedingung für die Stange:
Momentengleichgewicht bezogen auf A:

$$G_1 L\cos\alpha - N_1 b = 0, \qquad \rightarrow \qquad N_1 = G_1 \frac{L}{b}\cos\alpha.$$

Gleichgewichtsbedingungen für die Kreisscheibe:
Momentengleichgewicht bezogen auf S_2:

$$H_2 r - H_1 r = 0, \qquad \rightarrow \qquad H_2 = H_1.$$

Momentengleichgewicht bezogen auf C (C = Schnittpunkt der Wirkungslinien der Kräfte H_1 und H_2):

$$N_2 c - G_2 c - N_1 c = 0, \qquad \rightarrow \qquad N_2 = G + N_1.$$

Momentengleichgewicht bezogen auf den unteren Kontaktpunkt der Kreisscheibe:

$$(H_1 \cos\alpha + N_1 \sin\alpha)(r + r\cos\alpha) + (H_1 \sin\alpha - N_1 \cos\alpha) r \sin\alpha = 0,$$

$$H_1(1+\cos\alpha) + N_1 \sin\alpha = 0.$$

Kräfte in den Kontaktpunkten:

$$N_1 = G_1 \frac{L}{b}\cos\alpha, \qquad N_2 = G_2 + N_1, \qquad H_1 = H_2 = -G_1 \frac{L}{b}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

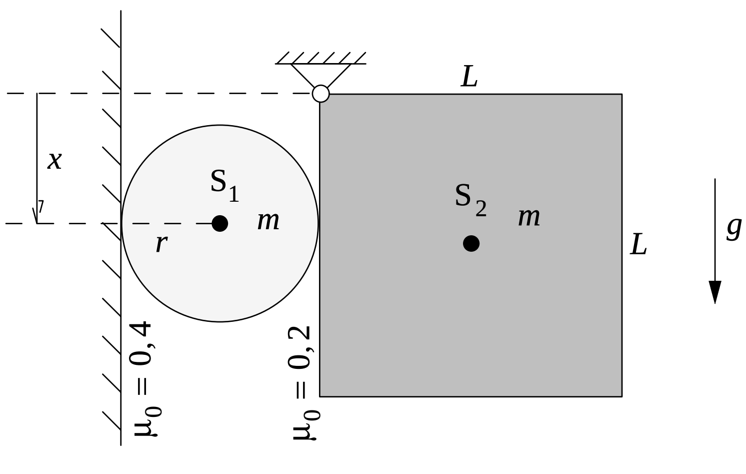
Haftbedingung im Kontaktpunkt Stange/Kreisscheibe:

$$|H_1| \le \mu_o N_1 \quad \rightarrow \quad G_1 \frac{L}{b}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \le \mu_o G_1 \frac{L}{b}\cos\alpha,$$

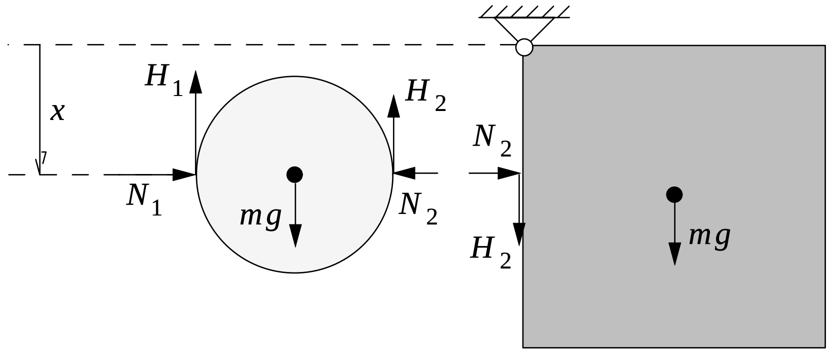
$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \le \mu_o \quad \rightarrow \quad \tan\frac{\alpha}{2} \le \mu_o, \qquad \alpha \le 2\arctan\mu_o.$$

Weil $H_2 = H_1$ aber $N_2 > N_1$ ist, gilt $H_2 < \mu_0 N_2$.

Aufgabe 2



Der gelenkig gelagerte Quader (Masse m, Kantenlänge L) drückt einen Kreiszylinder (Masse m, Radius r) gegen eine vertikale Wand. Wie groß muß x mindestens sein, damit der Kreiszylinder nicht nach unten wegrutscht?



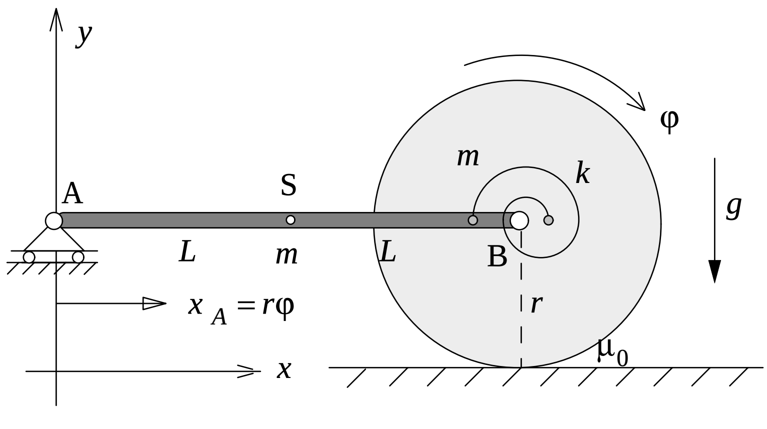
$$N_1 - N_2 = 0,$$
$$H_1 + H_2 - mg = 0, \qquad N_2 x - mg\frac{L}{2} = 0,$$
$$H_1 r - H_2 r = 0;$$

$$H_1 = H_2 = \frac{mg}{2}, \qquad N_1 = N_2 = mg\frac{L}{2x};$$

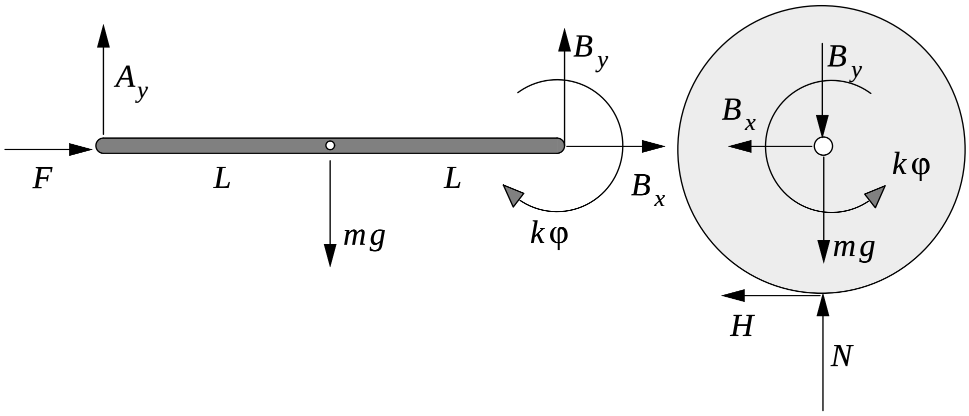
$$H_1 \le 0,4N_1 \quad \to \quad x \le 0,4L, \qquad H_2 \le 0,2N_2 \quad \to \quad x \le 0,2L,$$

$$x \le 0,2L.$$

Aufgabe 3



Eine starre Kreisscheibe (Masse m, Radius r) ist in B mit einer starren Stange AB (Länge $2L$, Masse m) drehbar gelenkig verbunden. Zwischen Stange und Kreisscheibe ist in B eine linear elastische Drehfeder geschaltet (Drehfederkonstante k), die in der dargestellten Lage entspannt ist. Wenn im Punkt A eine nach rechts gerichtete Kraft F angreift, ergibt sich eine Gleichgewichtslage, in der der Punkt A um x nach rechts verschoben, das Rad um den Winkel φ gedreht und die Drehfeder gespannt ist. Man berechne x und φ in dieser Gleichgewichtslage. Wie groß darf F höchstens sein, damit das Rad nicht rutscht?



$$F + B_x = 0, \qquad -B_x - H = 0,$$

$$A_y + B_y - mg = 0, \qquad N - mg - B_y = 0,$$

$$B_y 2L - mgL - k\varphi = 0; \qquad k\varphi - Hr = 0.$$

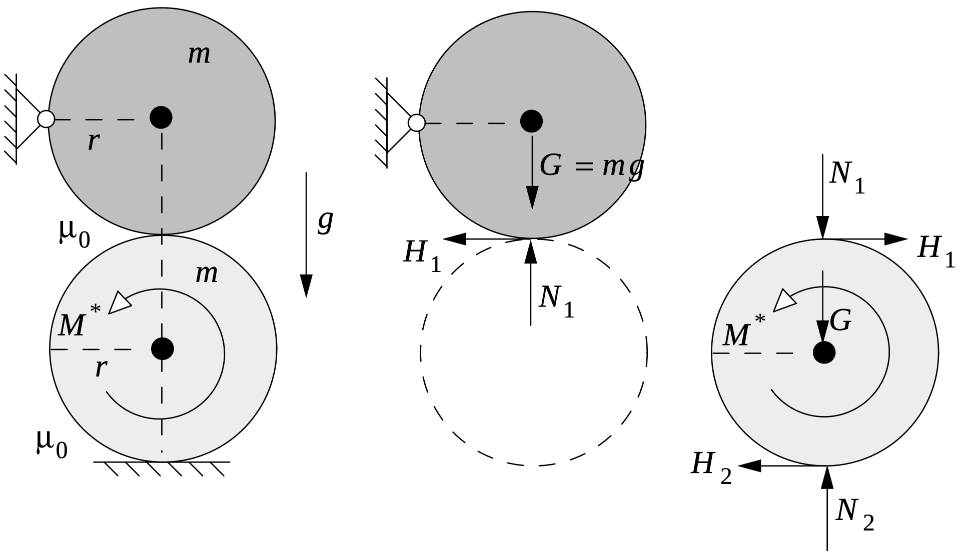
$$B_x = -F, \qquad H = F,$$

$$\varphi = \frac{Fr}{k}, \qquad x_A = r\varphi = \frac{Fr^2}{k}.$$

$$B_y = \frac{1}{2}(mg + F\frac{r}{L}), \qquad A_y = \frac{1}{2}(mg - F\frac{r}{L}), \qquad N = \frac{1}{2}(3mg + F\frac{r}{L}),$$

$$|H| \le \mu_o N \qquad \rightarrow \qquad F \le \frac{3\mu_o mgL}{2L - \mu_o r}.$$

Aufgabe 4



Zwei Kreiszylinder (Masse m, Radius r) sollen in der angegebenen Lage unter der Momentenbelastung M^* im Gleichgewicht sein, wobei $\mu_0 < 1$ angenommen wird. Man berechne den Bereich für das Lastmoment M^*, in dem Gleichgewicht möglich ist.

$$\begin{aligned} N_1 r - Gr - H_1 r &= 0, \\ H_1 - H_2 &= 0, \\ N_2 - N_1 - G &= 0, \\ M^* - H_1 r - H_2 r &= 0. \end{aligned} \quad \rightarrow \quad H_1 = H_2 = \frac{M^*}{2r}, \quad \begin{aligned} N_1 &= G + \frac{M^*}{2r}, \\ N_2 &= 2G + \frac{M^*}{2r}. \end{aligned}$$

$$|H_1| \le \mu_o N_1 \quad \rightarrow \quad |M^*| \le \mu_o (2Gr + M^*),$$

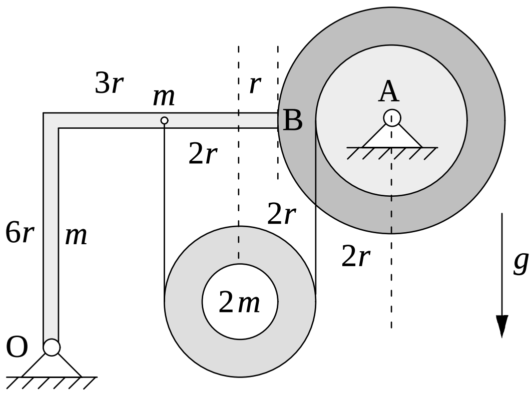
$$|H_2| \le \mu_o N_2 \quad \rightarrow \quad |M^*| \le \mu_o (4Gr + M^*),$$

$$|M^*| - \mu_o M^* \le \mu_o 2Gr;$$

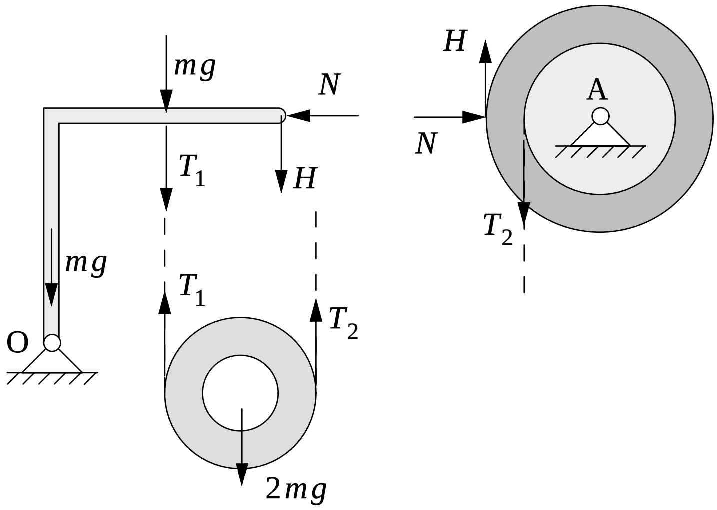
$$M^* > 0: \quad \rightarrow \quad M^* \le \frac{\mu_o 2Gr}{1-\mu_o}, \qquad M^* < 0: \quad \rightarrow \quad |M^*| \le \frac{\mu_o 2Gr}{1+\mu_o},$$

$$-\frac{\mu_o 2Gr}{1+\mu_o} \le M^* \le \frac{\mu_o 2Gr}{1-\mu_o}.$$

Aufgabe 5



Ein in O drehbar gelagerter Winkelhebel (Masse $2m$) stützt sich in B auf einer in A drehbar gelagerten Kreisscheibe ab. In einem Seil, das am Winkelhebel befestigt und auf der in A gelagerten Scheibe aufgewickelt ist, hängt ein Kreisring (Masse $2m$). Im Kontaktpunkt B ist die Haftreibungsziffer $\mu_0 = 0{,}5$ gegeben. Man berechne, wieviel Prozent der maximal möglichen Haftreibungskraft in B im Gleichgewichtsfall erforderlich sind.



Gleichgewichtsbedingungen für den Kreisring:

$$\left.\begin{aligned} T_1 + T_2 - 2mg &= 0, \\ T_2\, 2r - T_1\, 2r &= 0; \end{aligned}\right. \qquad \rightarrow \qquad T_1 = T_2 = mg.$$

Momentengleichgewichtsbedingungen für den Hebel:

$$N\, 6r - T_1\, 3r - mg\, 3r - H\, 6r = 0, \qquad \rightarrow \qquad N - H = mg.$$

Momentengleichgewichtsbedingungen für die in A gelagerte Scheibe:

$$T_2\, 2r - H\, 3r = 0, \qquad \rightarrow \qquad H = \frac{2}{3} mg.$$

Daraus folgt

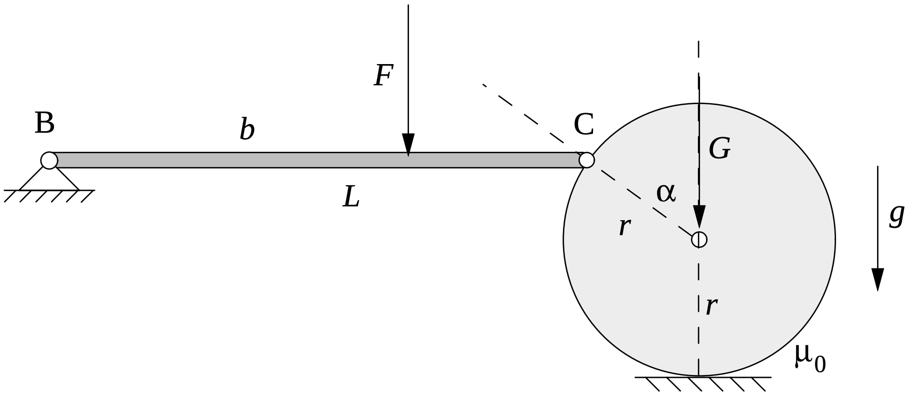
$$N = \frac{5}{3} mg.$$

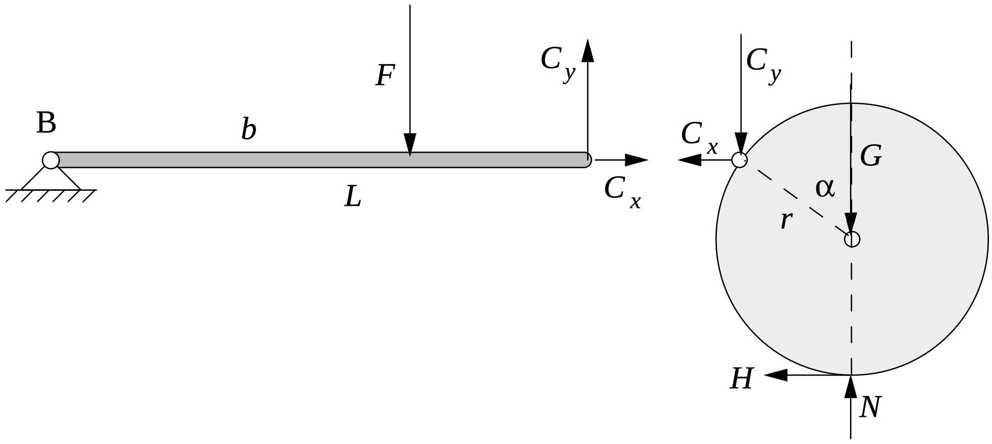
Maximal mögliche Haftreibungskraft: $\quad H_{\max} = \mu_0 N = \frac{5}{6} mg.$

$$\frac{H_{erforderlich}}{H_{\max}} = \frac{\frac{2}{3} mg}{\frac{5}{6} mg} = \frac{4}{5}. \qquad \rightarrow \qquad 80\% \text{ wird genutzt.}$$

Aufgabe 6

Eine starre Stange BC ist in B und C gelenkig gelagert. Die Kreisscheibe (Radius r, Gewichtskraft G) wird im Berührungspunkt mit der horizontalen Ebene durch Haftreibung festgehalten. Für welche Winkel α tritt Selbsthemmung auf?





$$C_y L - Fb = 0, \qquad \rightarrow \qquad C_y = F\frac{b}{L};$$

$$\begin{aligned} -C_x - H &= 0, \qquad & C_x &= -F\frac{b}{L}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = -F\frac{b}{L}\tan(\alpha/2) = -H, \\ -C_y - G + N &= 0, & N &= G + F\frac{b}{L}, \\ C_y r\sin\alpha + C_x(r + r\cos\alpha) &= 0; & & \end{aligned}$$

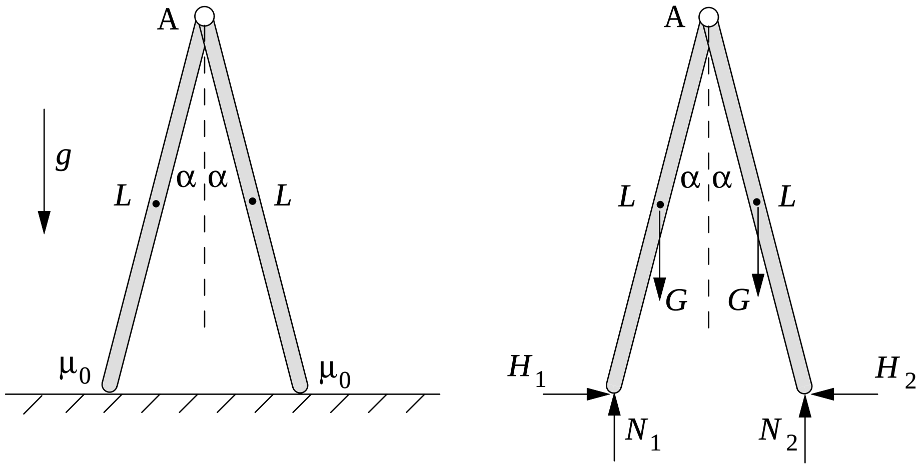
$$H \le \mu_o N \quad \rightarrow \quad F\frac{b}{L}\tan(\alpha/2) \le \mu_0(G + F\frac{b}{L}),$$

$$F \le \frac{\mu_0 GL}{b\{\tan(\alpha/2) - \mu_0\}},$$

Selbsthemmung: $\tan(\alpha/2) \le \mu_0 \quad \rightarrow \quad \alpha \le 2\arctan(\mu_0)$.

Aufgabe 7

Zwei im Punkt A gelenkig miteinander verbundene Stangen (Länge L, Masse m) sollen auf einer horizontalen Ebene so aufgestellt werden, daß mindestens dreifache Sicherheit gegen Abrutschen besteht. Man berechne den erforderlichen Winkel α.



Kräftesummenbedingung für das Gesamtsystem:

$$H_1 - H_2 = 0,$$
$$N_1 + N_2 - 2G = 0,$$

Momentengleichgewichtsbedingungen für die beiden Stangen, bezogen auf den Gelenkpunkt A:

$$-N_1 L \sin\alpha + H_1 L \cos\alpha + G\frac{L}{2}\sin\alpha = 0,$$
$$N_2 L \sin\alpha - H_2 L \cos\alpha - G\frac{L}{2}\sin\alpha = 0.$$

Es ergibt sich zunächst die erwartete Symmetrie des Kräftesystems:

$$H_1 = H_2, \qquad N_1 = N_2.$$

Damit wird dann

$$N_1 = G, \qquad H_1 = \frac{1}{2} G \tan\alpha.$$

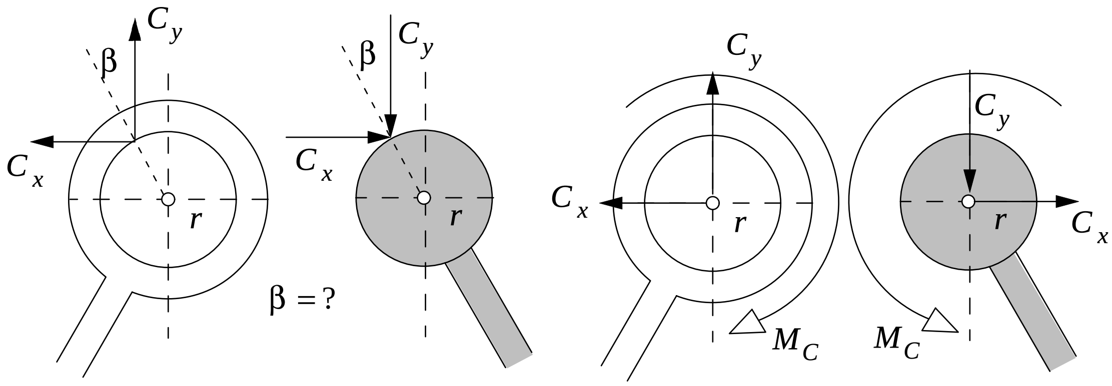
Aus der Sicherheitsforderung folgt:

$$H_1 \le \frac{1}{3}\mu_o N_1, \qquad \to \qquad \alpha \le \arctan(\frac{2}{3}\mu_o).$$

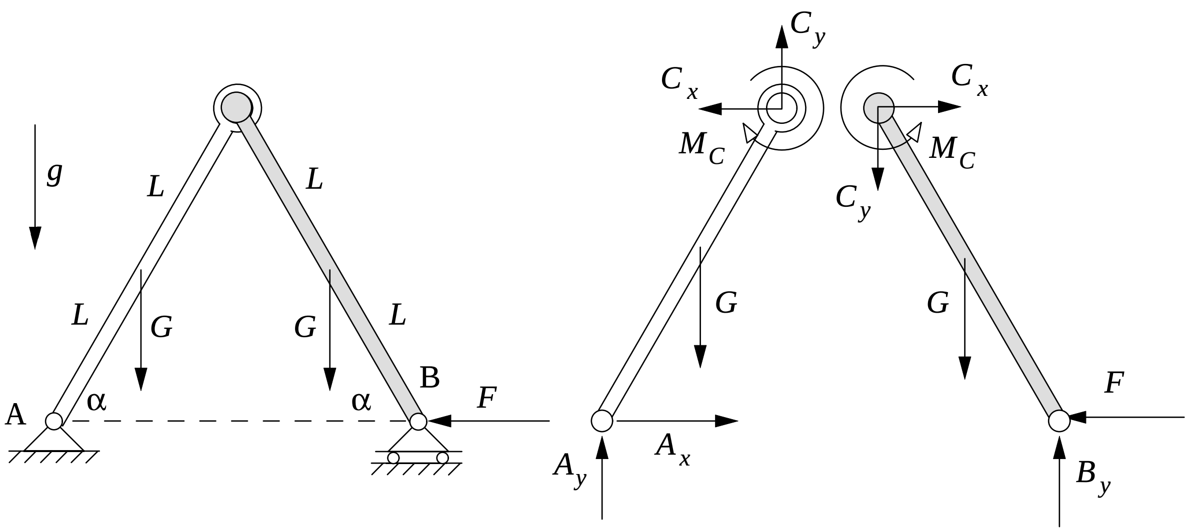
Aufgabe 8

Zwei starre Stangen sind durch ein reibungsbehaftetes Gelenk miteinander verbunden und werden durch die horizontale Kraft F im Gleichgewicht gehalten. Man berechne den Gleichgewichtsbereich für die Kraft F.

Der Angriffspunkt der inneren Reaktionskraft $\vec{C}$ ist unbekannt und deshalb auch das Versatzmoment M_C.



Statisch äquivalente Wechselwirkung im Gelenk.



Gleichgewichtsbedingungen:

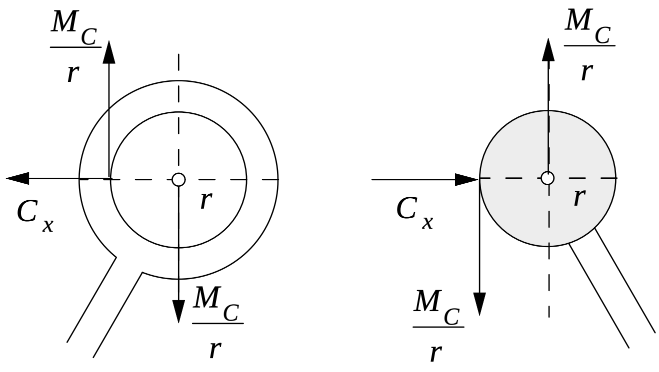
$$A_x - C_x = 0,$$
$$A_y + C_y - G = 0,$$
$$-GL\cos\alpha + C_x\,2L\sin\alpha + C_y\,2L\cos\alpha - M_C = 0;$$

$$C_x - F = 0,$$
$$B_y - C_y - G = 0,$$
$$GL\cos\alpha - C_x\,2L\sin\alpha + C_y\,2L\cos\alpha + M_C = 0.$$

Ergebnisse:

$$C_x = F, \qquad C_y = 0, \qquad B_y = G, \qquad A_x = F, \qquad A_y = G,$$

$$M_C = F\,2L\sin\alpha - GL\cos\alpha.$$



Haftbedingung:

$$\frac{1}{r}\left|M_C\right| \le \mu_0 C_x, \qquad \left|F\,2\sin\alpha - G\cos\alpha\right| \le \mu_0 \frac{r}{L} F,$$

$$F\,2\sin\alpha > G\cos\alpha: \quad \rightarrow \quad F\,2\sin\alpha - \mu_0 F\frac{r}{L} \le G\cos\alpha, \qquad F \le \frac{G\cos\alpha}{2\sin\alpha - \mu_0 r / L};$$

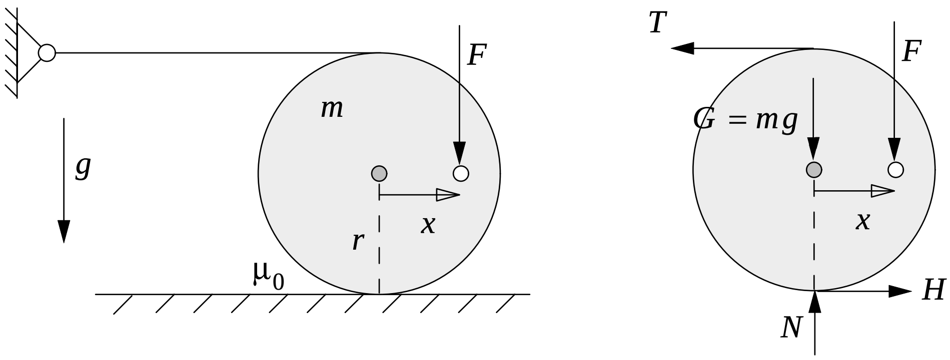
$$F\,2\sin\alpha < G\cos\alpha: \quad \rightarrow \quad G\cos\alpha \le F\,2\sin\alpha + \mu_0 F\frac{r}{L}, \qquad F \ge \frac{G\cos\alpha}{2\sin\alpha + \mu_0 r / L};$$

Gleichgewichtsbereich für die Kraft F:

$$\frac{G\cos\alpha}{2\sin\alpha + \mu_0 r / L} \le F \le \frac{G\cos\alpha}{2\sin\alpha - \mu_0 r / L}.$$

Aufgabe 9

Im Abstand x vom Schwerpunkt der Kreisscheibe greift eine vertikale Kraft F an. In welchem Wertebereich kann F variieren, wenn die Kreisscheibe im Gleichgewicht bleiben soll? Für welche Abstandswerte x entsteht Selbsthemmung?



Gleichgewichtsbedingungen:

$$-T + H = 0,$$
$$-G - F + N = 0,$$
$$T\,2r - Fx = 0.$$

$$T = F\,\frac{x}{2r}, \qquad H = F\,\frac{x}{2r}, \qquad N = G + F.$$

Haftkraftbedingung:

$$F\,\frac{x}{2r} \le \mu_o(G+F), \qquad \to \qquad F(\frac{x}{2r} - \mu_o) \le \mu_o G.$$

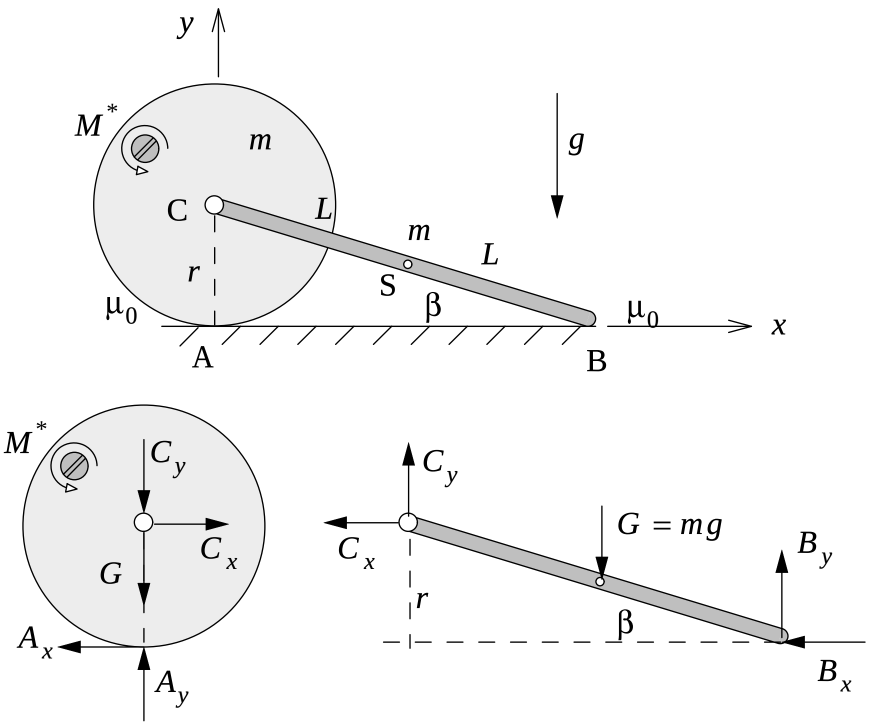
Zulässiger Variationsbereich der Kraft F, wenn $x > 2r\mu_0$ ist:

$$0 < F < \frac{\mu_o G}{\frac{x}{2r} - \mu_o}.$$

$$\text{Selbsthemmung} \quad \Rightarrow \quad x \le 2r\mu_o.$$

Aufgabe 10

Eine Kreisscheibe (Masse m, Radius r) ist im Mittelpunkt C gelenkig mit einer starren Stange (Masse m, Länge $2L$) verbunden. In den Punkten A und B sind die Haftreibungskoeffizienten μ_0 gegeben. Die Kreisscheibe wird mit einem Moment M^* belastet. Wie groß darf M^* höchstens sein, wenn das System im Gleichgewicht sein soll?



Gleichgewichtsbedingungen:

$$C_x - A_x = 0,$$
$$A_y - C_y - G = 0,$$
$$M^* - A_x r = 0;$$

$$-C_x - B_x = 0,$$
$$C_y + B_y - G = 0,$$
$$B_y\, 2L \cos\beta - B_x\, 2L \sin\beta - GL \cos\beta = 0.$$

Äußere und innere Reaktionskräfte:

$$A_x = \frac{M^*}{r}, \qquad B_y = \frac{1}{2}G - \frac{M^*}{r}\tan\beta,$$
$$C_x = \frac{M^*}{r}, \qquad C_y = \frac{1}{2}G + \frac{M^*}{r}\tan\beta,$$
$$B_x = -\frac{M^*}{r}, \qquad A_y = \frac{3}{2}G + \frac{M^*}{r}\tan\beta.$$

Haftkraftbedingungen:

$$|A_x| \le \mu_o A_y \qquad \to \qquad \frac{M^*}{r} \le \mu_0 (\frac{3}{2}G + \frac{M^*}{r}\tan\beta)$$

$$M^* \le \frac{3}{2}Gr \frac{\mu_0}{1 - \mu_0 \tan\beta},$$

$$|B_x| \le \mu_0 B_y \qquad \to \qquad \frac{M^*}{r} \le \mu_0 (\frac{1}{2}G - \frac{M^*}{r}\tan\beta),$$

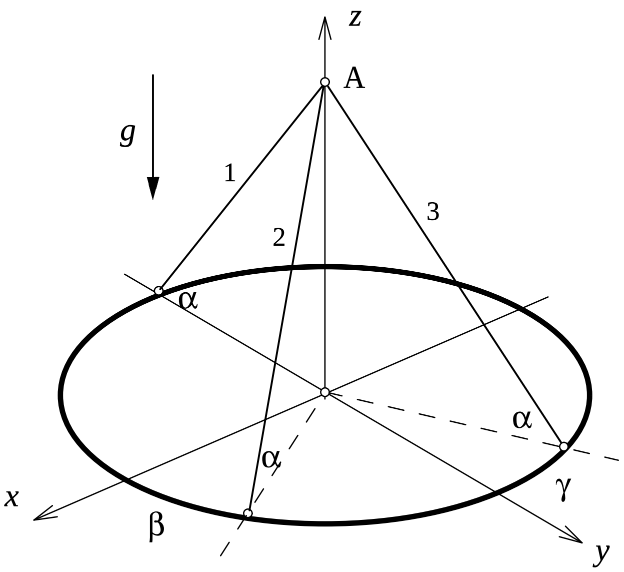
$$M^* \le \frac{1}{2}Gr \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \tan\beta}.$$

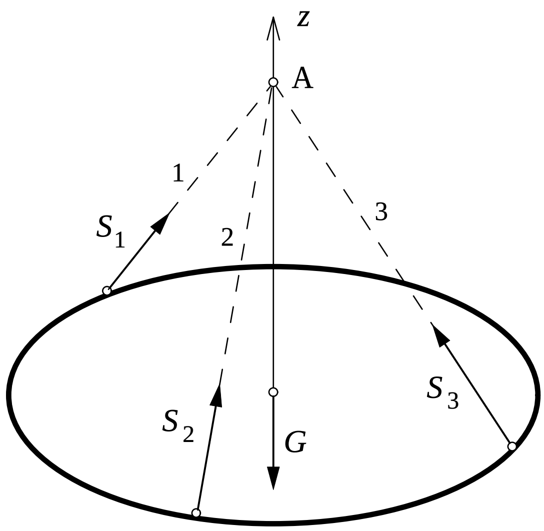
Beide Haftkraftbedingungen sind erfüllt, wenn

$$M^* \le \frac{1}{2}Gr \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \tan\beta}.$$

Aufgabe 1

Ein homogener Kreisring (Gewichtskraft G) hängt an drei gleich langen Seilen. Man berechne die drei Seilkräfte.





(zentrales Kräftesystem)

Gleichgewichtsbedingungen:

$$S_1\begin{bmatrix}0\\ \cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}+S_2\begin{bmatrix}-\cos\alpha\cos\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\end{bmatrix}+S_3\begin{bmatrix}\cos\alpha\sin\gamma\\ -\cos\alpha\cos\gamma\\ \sin\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Aus der zweiten und der dritten Gleichung folgt:

$$S_1-S_2\sin\beta-S_3\cos\gamma=0,$$

$$S_1+S_2+S_3=\frac{G}{\sin\alpha}.$$

Nach Elimination der Kraft S_1 erhalten wir:

$$S_2(1+\sin\beta)+S_3(1+\cos\gamma)=\frac{G}{\sin\alpha},$$

$$-S_2\cos\beta+S_3\sin\gamma=0,$$

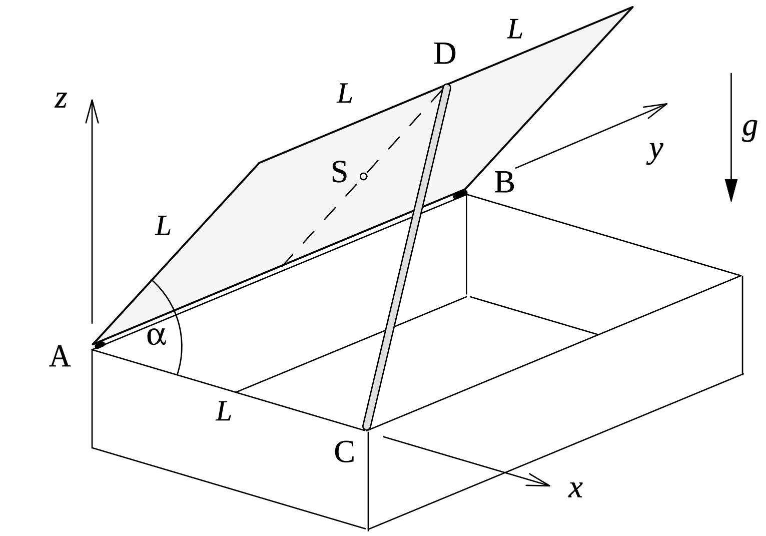
also mit:

$$\eta:=\sin\alpha(\sin\gamma+\cos\beta+\cos(\beta-\gamma)),$$

$$S_1=\frac{\cos(\beta-\gamma)}{\eta}G,\qquad S_2=\frac{\sin\gamma}{\eta}G,\qquad S_3=\frac{\cos\beta}{\eta}G.$$

Aufgabe 2

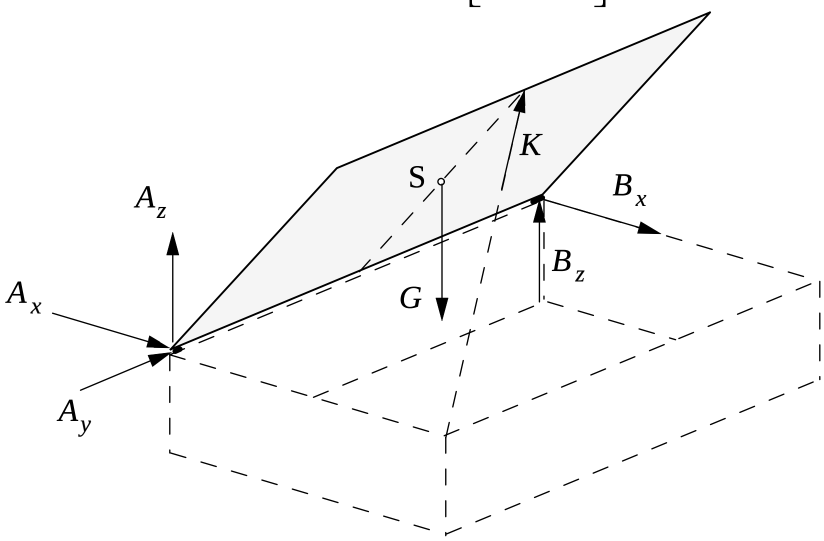
Der Deckel (Gewichtskraft G) einer Kiste ist um den Winkel α geöffnet und wird von einem Stab (Masse vernachlässigbar) gestützt. Man berechne die Stützkraft und die Reaktionskräfte in den Lagern des Deckels.



Lager A: dreiwertig Lager B: zweiwertig

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = L\begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 \\ 1 \\ \sin\alpha \end{bmatrix}, \qquad \left|\overrightarrow{CD}\right| = L\sqrt{3 - 2\cos\alpha},$$

$$\vec{e}_{CD} = \frac{1}{\sqrt{3-2\cos\alpha}}\begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 \\ 1 \\ \sin\alpha \end{bmatrix}.$$



Kräftegleichgewicht:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{bmatrix} + \frac{K}{\sqrt{3-2\cos\alpha}}\begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 \\ 1 \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Momentengleichgewicht bezogen auf den Punkt C:

$$\begin{bmatrix}-L\\0\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-L\\2L\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}B_x\\0\\B_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-L+(L/2)\cos\alpha\\L\\(L/2)\sin\alpha\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\-G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}2LB_z-LG&=0,\\LA_z+LB_z-GL(1-\frac{\cos\alpha}{2})&=0,\\-LA_y-2LB_x&=0.\end{aligned}$$

Ergebnisse:

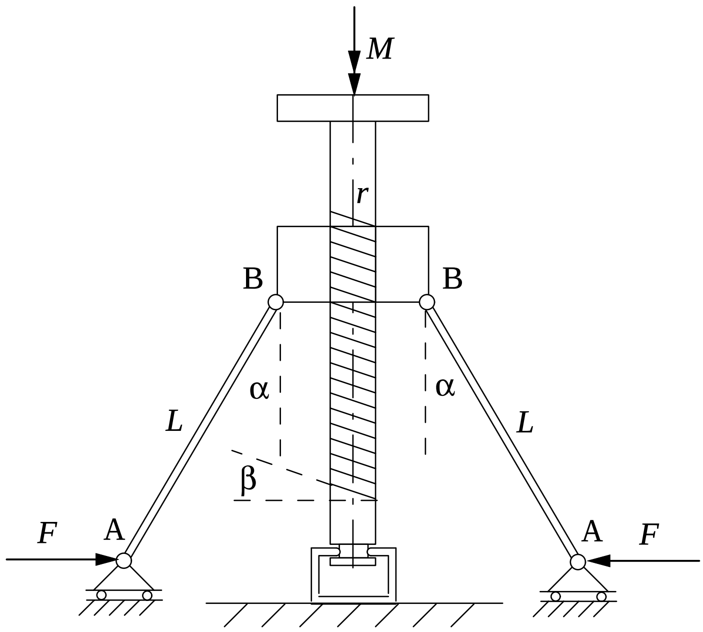
$$B_z=\frac{G}{2},\qquad A_z=\frac{G}{2}(1-\cos\alpha),$$

$$K=G\frac{\sqrt{3-2\cos\alpha}}{2\tan\alpha},$$

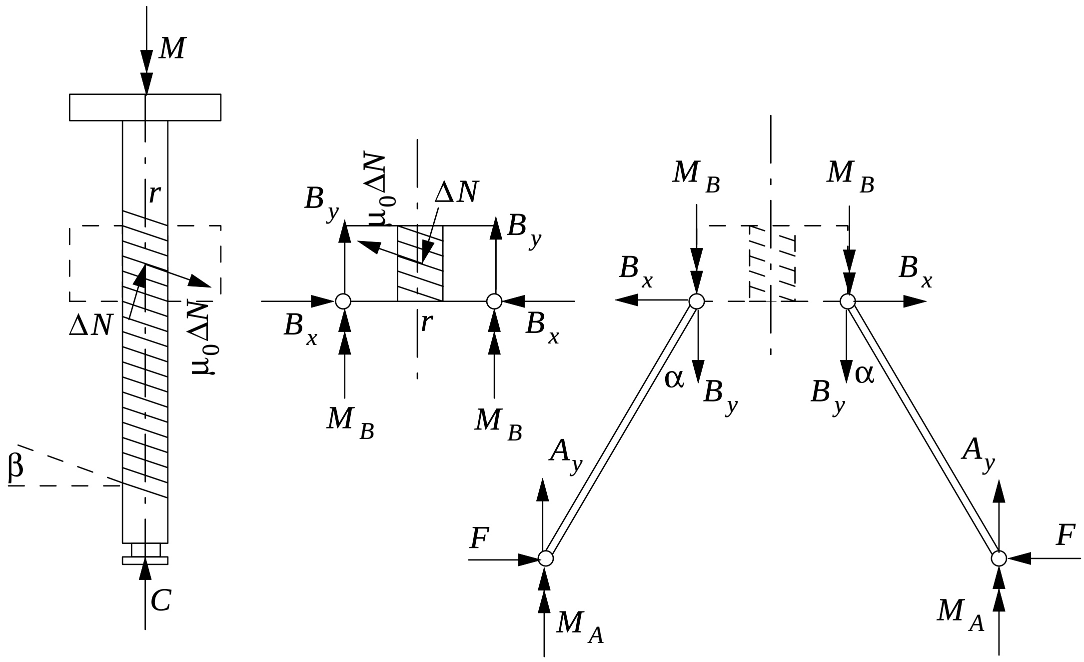
$$A_y=-\frac{G}{2\tan\alpha},\qquad B_x=\frac{G}{4\tan\alpha},\qquad A_x=\frac{G}{2\tan\alpha}(\frac{1}{2}-\cos\alpha).$$

Aufgabe 3

Eine Spindel ist über eine Spindelmutter mit zwei Stäben verbunden, deren Endpunkte A horizontal beweglich gelagert sind. Das an der Spindel angreifende Moment steht im Gleichgewicht mit den Kräften F in A.



Das Spindelgewinde habe den wirksamen Radius r und den Steigungswinkel β. Der Haftreibungswinkel ρ_0 sei kleiner als β. Man berechne die in den Lagern wirkenden Reaktionskräfte und den Gleichgewichtsbereich. Die Lager A und B seien so konstruiert, daß sie auch Momente um eine vertikale Achse übertragen können.



Das Freikörperbild bezieht sich auf den Grenzfall: Gerade noch keine Abwärtsbewegung der Spindelmutter (Vergrößerung des Winkels α).

Kräftegleichgewicht an der Spindel in vertikaler Richtung:

$$C + \sum(\Delta N \cos\beta - \mu_0 \Delta N \sin\beta) = 0, \qquad \rightarrow \quad C = -\sum \Delta N(\cos\beta - \mu_0 \sin\beta);$$

Momentengleichgewicht um die Spindelachse:

$$M - \sum(r\Delta N \sin\beta + r\mu_0 \Delta N \cos\beta) = 0 \qquad \rightarrow \quad \frac{M}{r} = \sum \Delta N(\sin\beta + \mu_0 \cos\beta);$$

$$\sum \Delta N = \frac{M}{r} \frac{1}{\sin\beta + \mu_0 \cos\beta}.$$

$$C = -\frac{M}{r} \frac{\cos\beta - \mu_0 \sin\beta}{\sin\beta + \mu_0 \cos\beta} = -\frac{M}{r} \frac{1 - \tan\rho_0 \tan\beta}{\tan\beta + \tan\rho_0} = -\frac{M}{r} \frac{1}{\tan(\beta + \rho_0)}.$$

Kräftegleichgewicht an der Spindelmutter in vertikaler Richtung:

$$2B_y + \sum(-\Delta N \cos\beta + \mu_0 \Delta N \sin\beta) = 0, \qquad \rightarrow \qquad B_y = \frac{1}{2} \sum \Delta N(\cos\beta - \mu_0 \sin\beta),$$

$$B_y = \frac{1}{2} \frac{M}{r} \frac{\cos\beta - \mu_0 \sin\beta}{\sin\beta + \mu_0 \cos\beta} = \frac{1}{2} \frac{M}{r} \frac{1}{\tan(\beta + \rho_0)};$$

Momentengleichgewicht an der Spindelmutter um die vertikale Achse:

$$2M_B - \sum (r\Delta N \sin\beta + r\mu_0 \Delta N \cos\beta) = 0, \qquad \to \qquad M_B = \frac{1}{2}M.$$

Kräftegleichgewicht am linken Hebel:

$$F - B_x = 0, \qquad A_y - B_y = 0;$$

Momentengleichgewicht am linken Hebel:

$$M_A - M_B = 0, \qquad B_x L\cos\alpha - B_y L\sin\alpha = 0;$$

$$B_x = B_y \tan\alpha, \qquad M_A = M_B, \qquad A_y = B_y, \qquad F = \frac{1}{2}\frac{M}{r}\frac{\tan\alpha}{\tan(\beta+\rho_0)}.$$

Ergebnis für den Grenzfall: Spindelmutter bewegt sich gerade noch nicht aufwärts:

$$F = \frac{1}{2}\frac{M}{r}\frac{\tan\alpha}{\tan(\beta-\rho_0)}.$$

Gleichgewichtsbereich:

$$\frac{1}{2}\frac{M}{r}\frac{\tan\alpha}{\tan(\beta+\rho_0)} \le F \le \frac{1}{2}\frac{M}{r}\frac{\tan\alpha}{\tan(\beta-\rho_0)}.$$

Aufgabe 4

Der Handgriff eines Handbohrers soll so gehalten werden, daß er sich nicht drehen kann und nur in vertikaler Richtung beweglich bleibt. In dieser Richtung wirkt die Druckkraft F_{02}, und an der Handkurbel senkrecht zum Hebel (Länge h) greift die Kraft F_{01} an. Unter dieser gegebenen Last wird der Bohrer an der Bohrerspitze im Koordinatenursprung von einer vertikalen Kraft F_1 und einem um die z-Achse drehenden Moment M_1 im Gleichgewicht gehalten. Die Positionen der Kraftangriffspunkte A, B, C, D und H sind durch die folgenden Ortsvektoren gegeben:

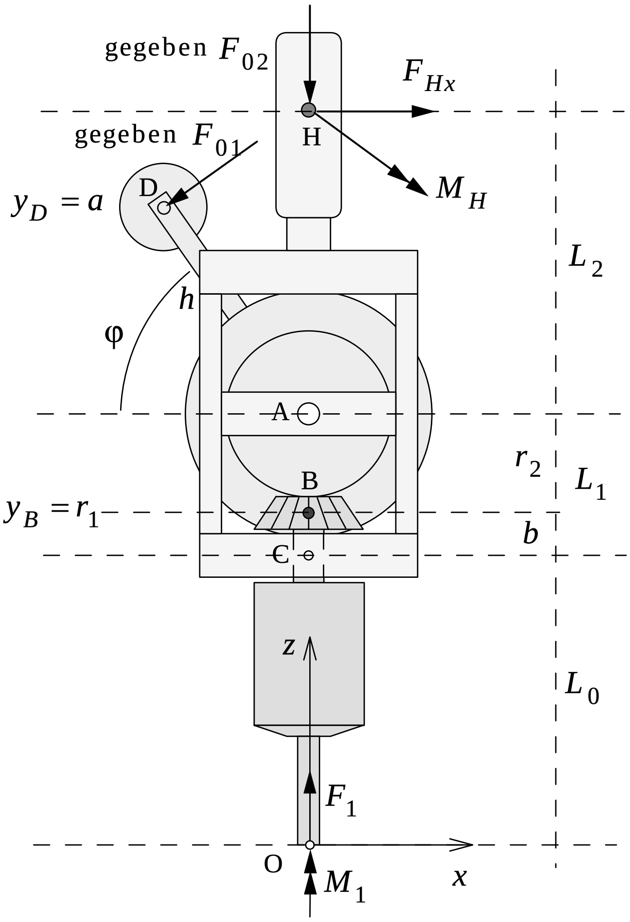
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (L_0 + L_1)\vec{e}_z = (L_0 + b + r_2)\vec{e}_z,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (L_0 + b)\vec{e}_z + r_1\vec{e}_y,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = L_0\vec{e}_z,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (L_0 + L_1 + h\sin\varphi)\vec{e}_z - h\cos\varphi\vec{e}_x + a\vec{e}_y,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (L_0 + L_1 + L_2)\vec{e}_z.$$



Man berechne für eine beliebige Kurbelstellung φ die Kraft F_1 und das Moment M_1 im Gleichgewichtsfall sowie die äußeren Reaktionslasten am Handgriff, die inneren Reaktionslasten in den Lagern des Antriebskegelrades und des Bohrkopfes sowie die innere Reaktionskraft zwischen dem Kegelrad und den Tellerrad im Kontaktpunkt B.

Endgültige Ergebnisse der Berechnungen sind jeweils in der Zeile nach einem →-Symbol aufgelistet.

Gleichgewichtsbedingungen für die am Gesamtsystem angreifenden äußeren Kräfte:

$$\begin{bmatrix} -F_{01}\sin\varphi \\ 0 \\ -F_{01}\cos\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{Hx} \\ 0 \\ -F_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

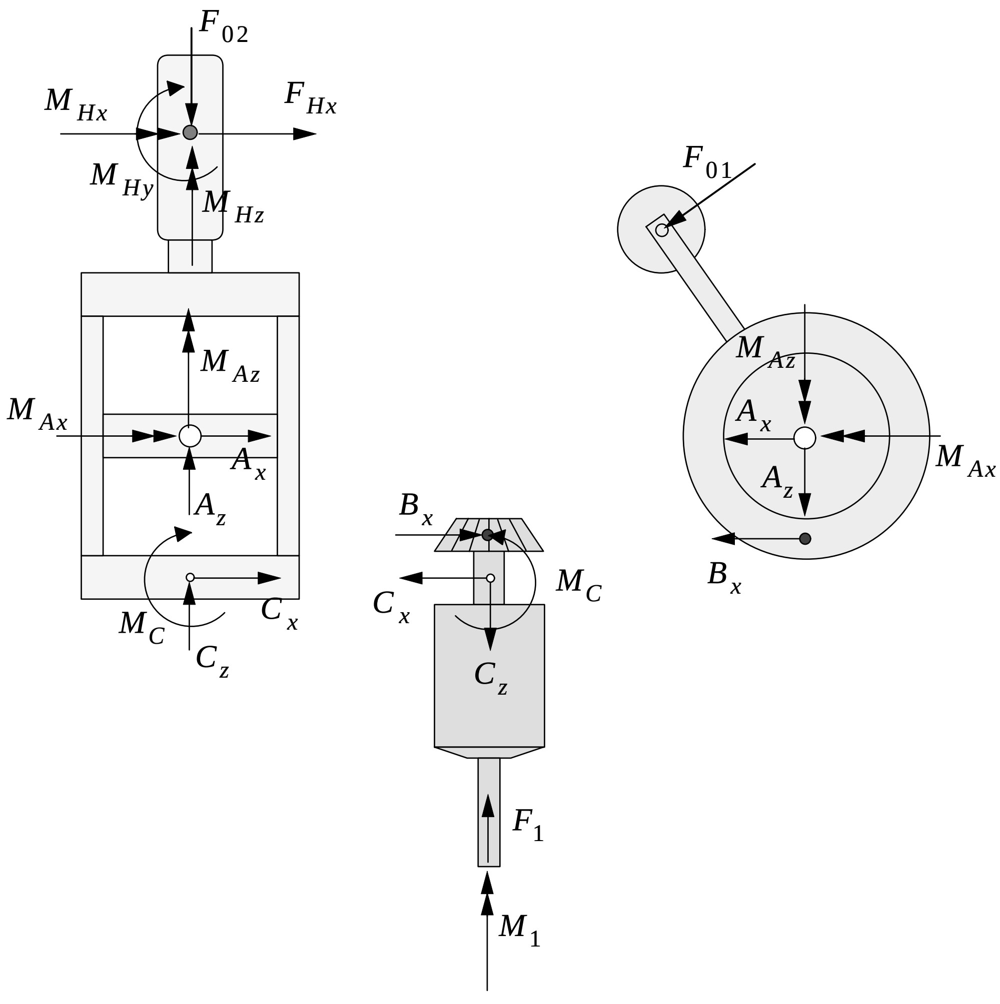
$$\rightarrow \qquad F_{Hx} = F_{01}\sin\varphi, \qquad F_1 = F_{02} + F_{01}\cos\varphi.$$

$$\begin{bmatrix} -h\cos\varphi \\ a \\ h\sin\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -F_{01}\sin\varphi \\ 0 \\ -F_{01}\cos\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{Hx} \\ 0 \\ -F_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Hx} \\ M_{Hy} \\ M_{Hz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} -aF_{01}\cos\varphi + M_{Hx} &= 0, \\ -hF_{01} + L_2F_{Hx} + M_{Hy} &= 0, \qquad \rightarrow \qquad M_{Hx} = aF_{01}\cos\varphi, \qquad M_{Hy} = (h - L_2\sin\varphi)F_{01}, \\ aF_{01}\sin\varphi + M_{Hz} + M_1 &= 0; \end{aligned}$$

$$M_{Hz} + M_1 = -aF_{01}\sin\varphi.$$

Im folgenden Freikörperbild liegen die Wirkungslinien aller Kräfte mit Ausnahme von F_{01} und B_x in der xz-Ebene.



Gleichgewichtsbedingungen für das Antriebs-Tellerrad, das starr mit der Kurbel verbunden ist:

$$\begin{bmatrix} -F_{01}\sin\varphi \\ 0 \\ -F_{01}\cos\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_x \\ 0 \\ -A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad A_z = -F_{01}\cos\varphi,$$

$$A_x = -F_{01}\sin\varphi - B_x;$$

$$\begin{bmatrix} -h\cos\varphi \\ a \\ h\sin\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -F_{01}\sin\varphi \\ 0 \\ -F_{01}\cos\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r_1 \\ -r_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -B_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_{Ax} \\ 0 \\ -M_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} -aF_{01}\cos\varphi - M_{Ax} &= 0, \\ -hF_{01} + r_2 B_x &= 0, \\ aF_{01}\sin\varphi + r_1 B_x - M_{Az} &= 0; \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad B_x = \frac{h}{r_2}F_{01}, \qquad M_{Ax} = -aF_{01}\cos\varphi, \qquad M_{Az} = (a\sin\varphi + h\frac{r_1}{r_2})F_{01},$$

$$\rightarrow \qquad A_x = -(\sin\varphi + \frac{h}{r_2})F_{01}.$$

Gleichgewichtsbedingungen für den Bohrkopf, der starr mit dem Kegelrad verbunden ist:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_x \\ 0 \\ -C_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ r_1 \\ b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -M_C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} B_x - C_x &= 0, \\ C_z &= F_1, \\ bB_x - M_C &= 0, \\ -r_1 B_x + M_1 &= 0; \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad C_z = F_{02} + F_{01}\cos\varphi,$$

$$\rightarrow \qquad C_x = \frac{h}{r_2}F_{01}, \qquad M_C = b\,\frac{h}{r_2}F_{01}, \qquad M_1 = h\,\frac{r_1}{r_2}F_{01}.$$

$$\rightarrow \qquad M_{Hz} = -(a\sin\varphi + h\frac{r_1}{r_2})F_{01}.$$

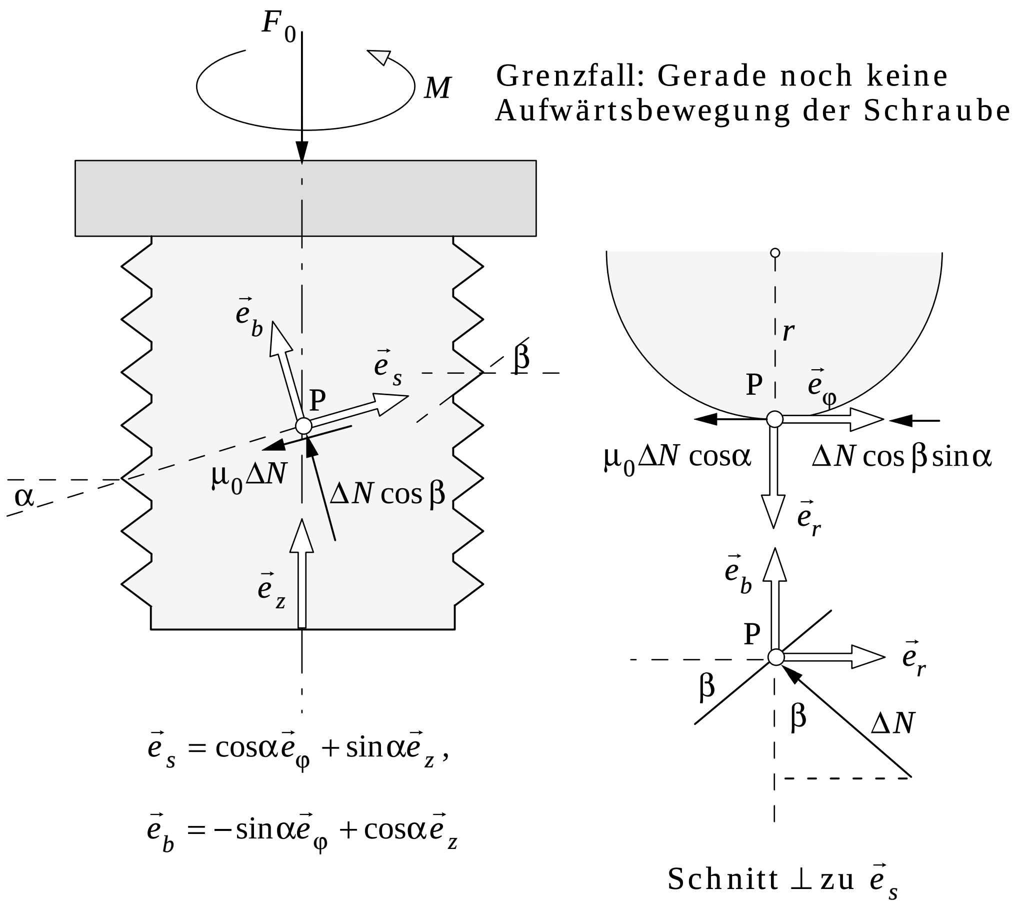
(Nur noch zur Kontrolle) Gleichgewichtsbedingungen für den Rahmen des Handbohrers:

$$\begin{bmatrix} F_{Hx} \\ 0 \\ -F_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_x \\ 0 \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x \\ 0 \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{bereits erfüllt;}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_x \\ 0 \\ C_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{Hx} \\ 0 \\ -F_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ 0 \\ M_{Az} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Hx} \\ M_{Hy} \\ M_{Hz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} M_{Ax} + M_{Hx} &= 0, \\ -L_1 C_x + L_2 F_{Hx} + M_C + M_{Hy} &= 0, \qquad \text{bereits erfüllt.} \\ M_{Az} + M_{Hz} &= 0, \end{aligned}$$

Aufgabe 5



Eine Schraube (Gewindesteigungswinkel α, Gewinderadius r, Flankenwinkel β, Haftreibungskoeffizient μ_0) ist axial durch eine Kraft $-F_0 \vec{e}_z$ und ein Moment M

belastet. Man berechne den Gleichgewichtsbereich.

Auf ein Flächenelement ΔA der Gewindeflanke an der Stelle P wirken die Normalkraft

$$\Delta\vec{N} = \Delta N(-\sin\beta\vec{e}_r + \cos\beta\vec{e}_b) = \Delta N(-\sin\beta\vec{e}_r - \cos\beta\sin\alpha\vec{e}_\varphi + \cos\beta\cos\alpha\vec{e}_z)$$

und, wenn die Schraube sich gerade noch nicht nach oben bewegt, die maximale Haftreibungskraft

$$\Delta\vec{H} = -\mu_0\Delta N\vec{e}_s = -\mu_0\Delta N(\cos\alpha\vec{e}_\varphi + \sin\alpha\vec{e}_z).$$

Aus der Kräftegleichgewichtsbedingung in z-Richtung folgt

$$-F_0 + \sum\Delta N\cos\beta\cos\alpha - \sum\mu_0\Delta N\sin\alpha = 0,$$

$$\sum\Delta N = \frac{F_0}{\cos\beta\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha}.$$

Die Momentengleichgewichtsbedingung um die z-Achse lautet

$$M - \sum r\Delta N\cos\beta\sin\alpha - \sum r\mu_0\Delta N\cos\alpha = 0,$$

$$\frac{M}{r} = \sum\Delta N(\cos\beta\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha).$$

Die Elimination der Summe der Normalkraftbeträge ΔN ergibt mit

$$\tan\rho_0^* := \frac{\mu_0}{\cos\beta} > \mu_0,$$

$$\frac{M}{r} = F_0\frac{\cos\beta\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha}{\cos\beta\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha} = F_0\frac{\tan\alpha + \tan\rho_0^*}{1 - \tan\alpha\tan\rho_0^*} = F_0\tan(\alpha + \rho_0^*).$$

Wenn die Schraube sich gerade noch nicht nach unten bewegt, ändert sich nur die Richtung der maximalen Haftreibungskraft. Deshalb gilt dann

$$\frac{M}{r} = F_0\tan(\alpha - \rho_0^*).$$

Die Schraube befindet sich also in einem Gleichgewichtszustand, wenn

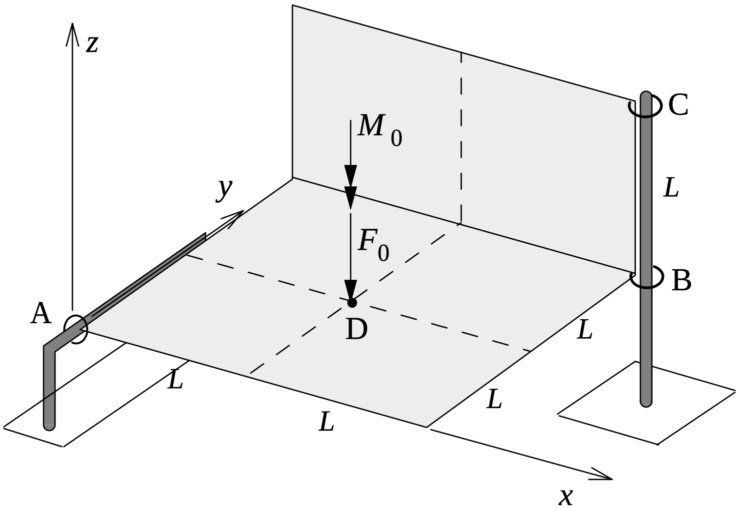
$$F_0\tan(\alpha - \rho_0^*) < \frac{M}{r} < F_0\tan(\alpha + \rho_0^*)$$

ist.

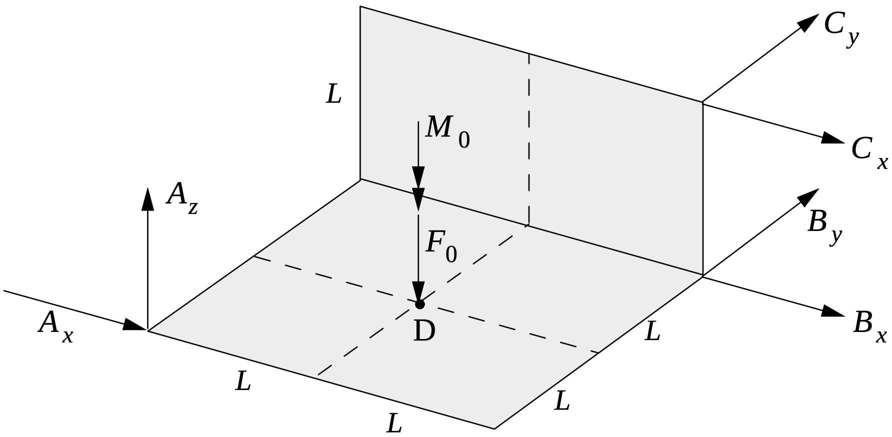
Bei einer Schraube, die sich im Lastzustand $\{F_0 > 0, M = 0\}$ nicht bewegen soll, muß $\rho_0^* > \alpha$ sein, weil dann $M = 0$ im Gleichgewichtsbereich liegt (Selbsthemmung).

Aufgabe 6

Auf der in den Punkten A, B und C jeweils zweiwertig gestützten Plattform wird im Punkt D ein Loch gebohrt und dabei die Kraft F_0 und das Moment M_0 erzeugt. Man berechne die Auflagerkräfte.



Freikörperbild:



Kräftegleichgewichtsbedingung:

$$\begin{aligned} A_x + B_x + C_x &= 0, \\ B_y + C_y &= 0, \\ A_z - F_0 &= 0. \end{aligned}$$

Momentengleichgewichtsbedingung (Bezugspunkt A):

$$\begin{bmatrix} L \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2L \\ 2L \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2L \\ 2L \\ L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

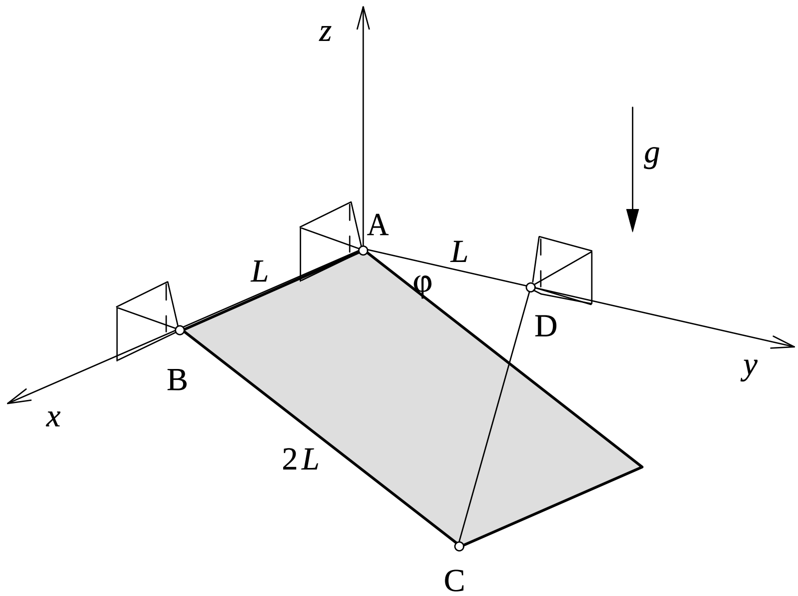
$$-LF_0 - LC_y = 0,$$
$$LF_0 + LC_x = 0,$$
$$-M_0 + 2LB_y - 2LB_x + 2LC_y - 2LC_x = 0.$$

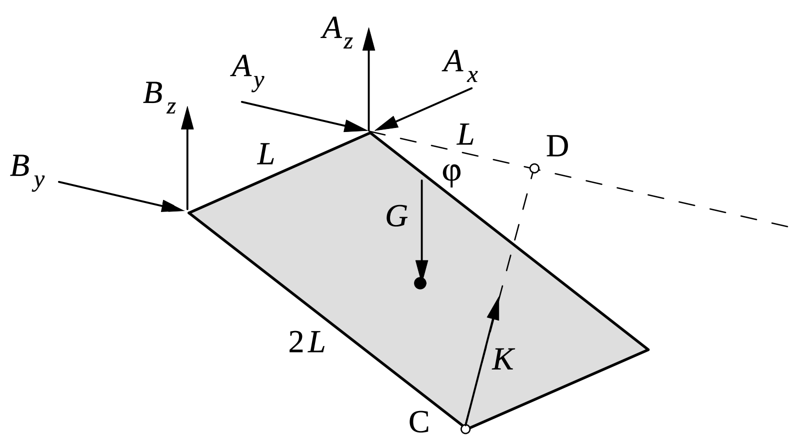
Auflagerkräfte:

$$A_x = \frac{M_0}{2L}, \qquad A_z = F_0, \qquad B_x = F_0 - \frac{M_0}{2L}, \qquad B_y = F_0, \qquad C_x = -F_0, \qquad C_y = -F_0.$$

Aufgabe 7

Eine homogene dünne Rechteckplatte (Gewichtskraft G, Kanten: $L, 2L$) ist in A dreiwertig und in B zweiwertig gelagert und wird von einem Seil CD in der um den Winkel φ um die x-Achse gedrehten Lage gehalten. Man berechne alle Reaktionskräfte.





Berechnung des Richtungsvektors der Seilkraft $\vec{K}$:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L \\ 2L\cos\varphi \\ -2L\sin\varphi \end{bmatrix} = L\begin{bmatrix} -1 \\ 1-2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad \left|\overrightarrow{CD}\right| = L\sqrt{6-4\cos\varphi}.$$

$$\vec{e}_K = \frac{1}{\sqrt{6-4\cos\varphi}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1-2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Momentengleichgewichtsbedingung bezogen auf A:

(Da D auf der Wirkungslinie von $\vec{K}$ liegt, kann das auf A bezogene Moment von $\vec{K}$ einfacher mit $\overrightarrow{AD}\times\vec{K}$ berechnet werden.)

$$\begin{bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \times \frac{K}{\sqrt{6-4\cos\varphi}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1-2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L/2 \\ L\cos\varphi \\ -L\sin\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$L\begin{bmatrix} 0 \\ -B_z \\ B_y \end{bmatrix} + \frac{KL}{\sqrt{6-4\cos\varphi}}\begin{bmatrix} 2\sin\varphi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + GL\begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

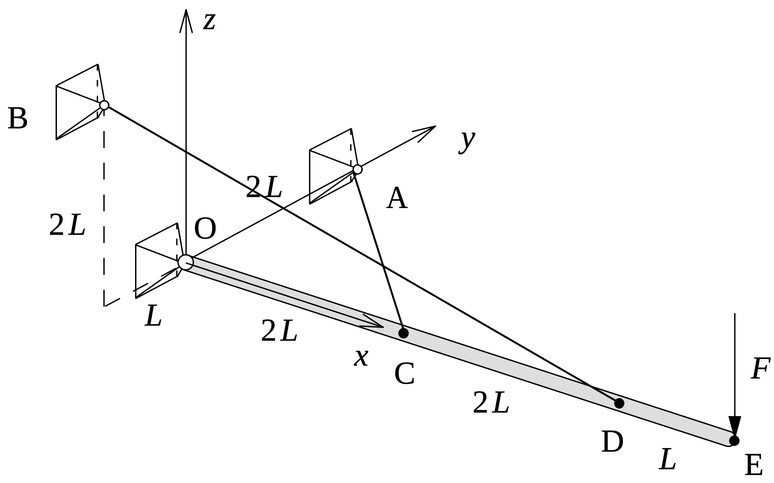
$$K = \frac{G}{2}\frac{\sqrt{6-4\cos\varphi}}{\tan\varphi}, \qquad B_z = \frac{G}{2}, \qquad B_y = \frac{G}{2\tan\varphi}.$$

Kräftegleichgewichtsbedingung:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} + \frac{K}{\sqrt{6-4\cos\varphi}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1-2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_x = \frac{G}{2\tan\varphi}, \qquad A_y = -\frac{G}{\tan\varphi}(1-\cos\varphi), \qquad A_z = -\frac{G}{2} - G\cos\varphi.$$

Aufgabe 8



Ein in O gelenkig gelagerter Stab OE wird von zwei Seilen AC und BC gehalten und durch eine Kraft F in E belastet. Man berechne die Auflagerkraft $\vec{R}$ in O und die Kräfte in den beiden Seilen.

$$\overrightarrow{CA} = L\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{DB} = L\begin{bmatrix}-4\\-1\\2\end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_{DB} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix}-4\\1\\2\end{bmatrix}.$$

Kräftegleichgewicht:

$$\vec{R} + S_1\vec{e}_{CA} + S_2\vec{e}_{DB} - F\vec{e}_z = \vec{0},$$

$$\begin{bmatrix}R_x\\R_y\\R_z\end{bmatrix} + \frac{S_1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{S_2}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix}-4\\-1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\-F\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix};$$

Momentengleichgewicht bezogen auf den Punkt O:

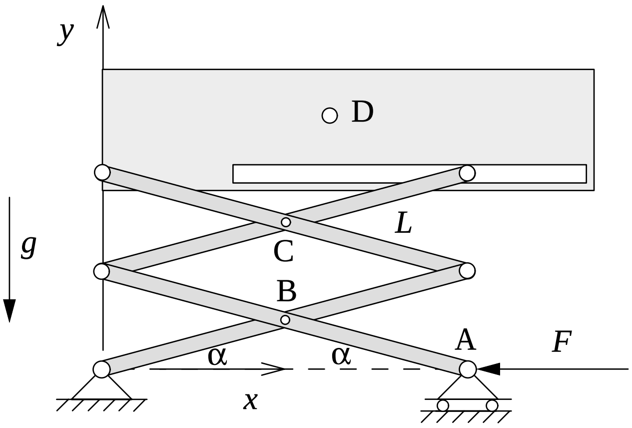
$$\overrightarrow{OC}\times\vec{S}_1 + \overrightarrow{OD}\times\vec{S}_2 + \overrightarrow{OE}\times\vec{F} = \vec{0},$$

$$\begin{bmatrix}2L\\0\\0\end{bmatrix}\times\frac{S_1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4L\\0\\0\end{bmatrix}\times\frac{S_2}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix}-4\\-1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5L\\0\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\-F\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned}&-\frac{S_2}{\sqrt{21}}8L + 5FL = 0,\\ &\frac{S_1}{\sqrt{2}}2L - \frac{S_2}{\sqrt{21}}4L = 0;\end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{5\sqrt{21}}{8}F, \qquad S_1 = \frac{5\sqrt{2}}{4}F,$$

$$R_x = \frac{15}{4}F, \qquad R_y = -\frac{5}{8}F, \qquad R_z = -\frac{1}{4}F.$$

Aufgabe 1



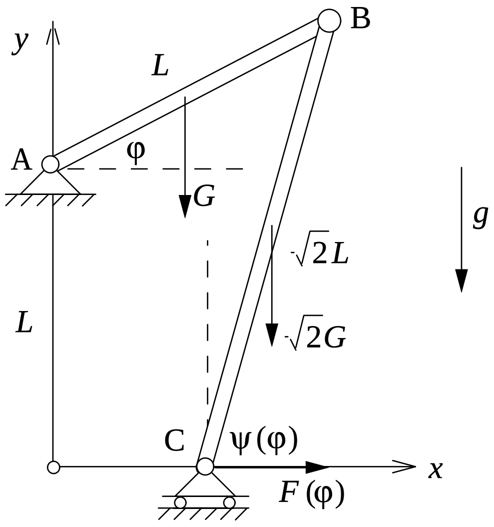
Ein Scherengitter aus vier starren Stäben (Masse m, Länge $2L$) stützt eine Arbeitsbühne (Masse $25m$). Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit berechne man die Kraft F, die das System in der dargestellten Lage im Gleichgewicht hält.

$$\delta W = -F\,\delta x_A - 2mg\,\delta y_B - 2mg\,\delta y_C - 25mg\,\delta y_D = 0,$$

$$\begin{aligned}
x_A &= 2L\cos\alpha, & \delta x_A &= -2L\sin\alpha\,\delta\alpha,\\
y_B &= L\sin\alpha, & \delta y_B &= L\cos\alpha\,\delta\alpha,\\
y_C &= 3L\sin\alpha, & \delta y_C &= 3L\cos\alpha\,\delta\alpha,\\
y_D &= 4L\sin\alpha + const, & \delta y_D &= 4L\cos\alpha\,\delta\alpha.
\end{aligned}$$

$$(F\,2L\sin\alpha - 108mgL\cos\alpha)\delta\alpha = 0 \qquad \rightarrow \qquad F = \frac{54mg}{\tan\alpha}.$$

Aufgabe 2



Man berechne mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit die im Punkt C angreifende Kraft $F(\varphi)$, die das dargestellte System, das aus zwei im Punkt B gelenkig miteinander verbundenen starren Stangen besteht, im Gleichgewicht hält.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_C + L\sqrt{2}\cos\psi = L\cos\varphi, \qquad L\sqrt{2}\sin\psi = L + L\sin\varphi.$$

$$x_C = L\cos\varphi - \sqrt{2}L\sqrt{1-\sin^2\psi},$$

$$x_C = L\cos\varphi - \sqrt{2}L\sqrt{1-\frac{1}{2}(1+\sin\varphi)^2} = L(\cos\varphi - \sqrt{1-2\sin\varphi-\sin^2\varphi}).$$

y-Koordinaten der Angriffspunkte der Gewichtskräfte:

$$y_1 = L + \frac{L}{2}\sin\varphi, \qquad y_2 = \frac{L\sqrt{2}}{2}\sin\psi = \frac{L}{2}(1+\sin\varphi).$$

Virtuelle Arbeit:

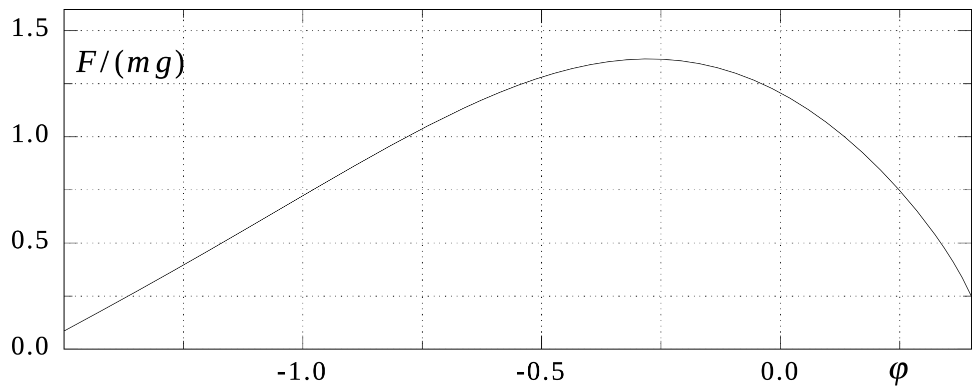
$$\delta W = F\,\delta x_C - mg\,\delta y_1 - \sqrt{2}mg\,\delta y_2 = (F\frac{\partial x_C}{\partial\varphi} - mg\frac{\partial y_1}{\partial\varphi} - \sqrt{2}mg\frac{\partial y_2}{\partial\varphi})\delta\varphi.$$

$$\frac{\partial x_C}{\partial\varphi} = L(-\sin\varphi + \frac{\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-2\sin\varphi-\sin^2\varphi}}), \qquad \frac{\partial y_1}{\partial\varphi} = \frac{L}{2}\cos\varphi, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial\varphi} = \frac{L}{2}\cos\varphi.$$

Kraft im Punkt C:

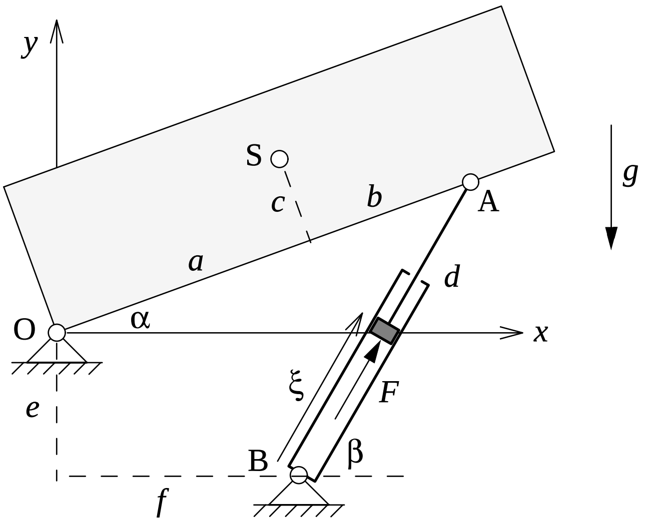
$$\delta W = 0 \qquad \to \qquad F = mg\frac{\dfrac{\partial y_1}{\partial\varphi} + \sqrt{2}\dfrac{\partial y_2}{\partial\varphi}}{\dfrac{\partial x_C}{\partial\varphi}},$$

$$F(\varphi) = \frac{mg}{2}\frac{1+\sqrt{2}}{-\tan\varphi + \dfrac{1+\sin\varphi}{\sqrt{1-2\sin\varphi-\sin^2\varphi}}}.$$



Aufgabe 3

Man berechne die im Hubzylinder auf den Kolben wirkende Kraft F, die den in O drehbar gelagerten Körper (Masse: m) im Gleichgewicht hält.



Kinematische Zwangsbedingungen:

$$(\xi + d)\sin\beta = e + (a+b)\sin\alpha, \qquad y_S = a\sin\alpha + c\cos\alpha.$$
$$(\xi + d)\cos\beta = (a+b)\cos\alpha - f,$$

Daraus folgt:

$$(\xi + d)^2 = (a+b)^2 + e^2 + f^2 + 2(a+b)(e\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

$$\xi = \sqrt{(a+b)^2 + e^2 + f^2 + 2(a+b)(e\sin\alpha - f\cos\alpha)} - d.$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} = \frac{(a+b)(e\cos\alpha + f\sin\alpha)}{\sqrt{(a+b)^2 + e^2 + f^2 + 2(a+b)(e\sin\alpha - f\cos\alpha)}}.$$

$$\frac{\partial y_S}{\partial\alpha} = a\cos\alpha - c\sin\alpha.$$

Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\delta W = -mg\,\delta y_S + F\,\delta\xi = (-mg\frac{\partial y_S}{\partial\alpha} + F\frac{\partial\xi}{\partial\alpha})\delta\alpha = 0, \qquad F = mg\frac{\dfrac{\partial y_S}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial\xi}{\partial\alpha}}.$$

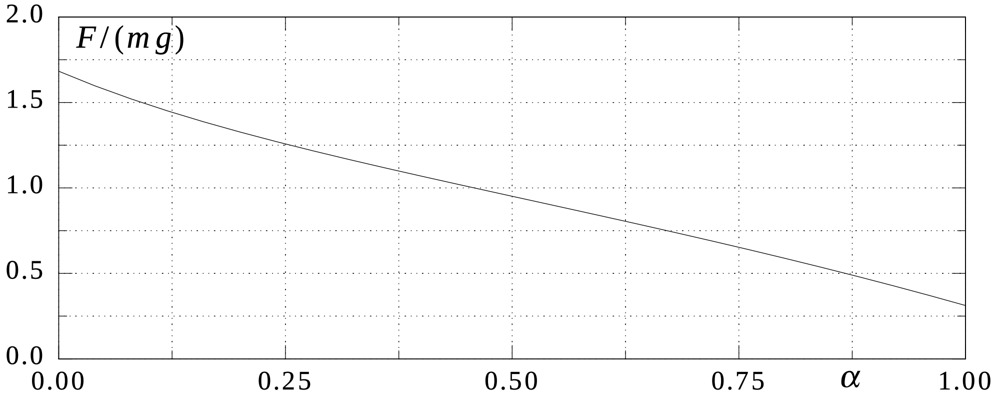
Mit den speziellen Werten

$$a = 5L,\quad b = 3L,\quad c = 2L,\quad d = 4L,\quad e = 2L,\quad f = 3L$$

wird

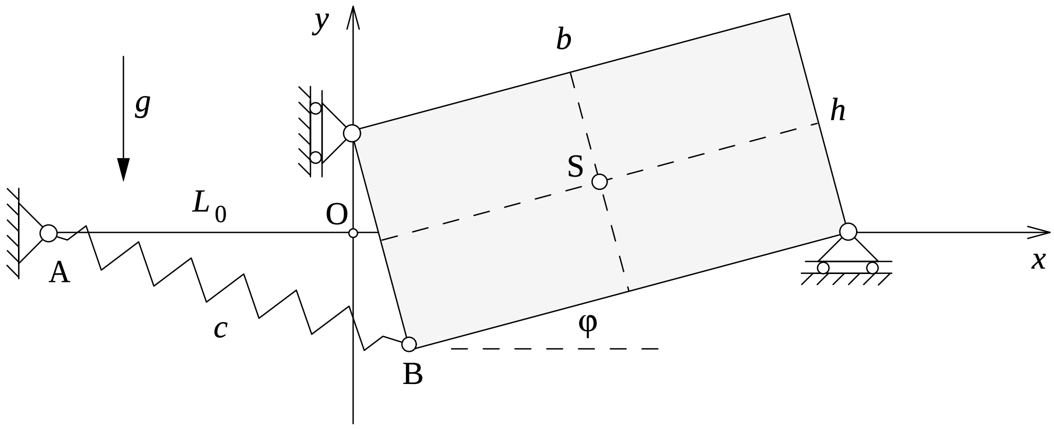
$$\frac{\partial y_S}{\partial\alpha} = (5\cos\alpha - 2\sin\alpha)L, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} = \frac{16\cos\alpha + 24\sin\alpha}{\sqrt{77 + 32\sin\alpha - 48\cos\alpha}}L,$$

$$F = mg\frac{(5\cos\alpha - 2\sin\alpha)\sqrt{77 + 32\sin\alpha - 48\cos\alpha}}{16\cos\alpha + 24\sin\alpha}.$$



Aufgabe 4

Zwei Eckpunkte einer starren rechteckigen Platte (Masse m, Kantenlängen b, h) werden auf den Koordinatenachsen eines kartesischen Koordinatensystems geführt. Der Punkt B ist mit einer Feder (Steifigkeit c) verbunden, die in der Lage $\varphi = 0$ entspannt ist und dann die Länge L_0 hat. Man berechne die Gleichgewichtsbedingung.



Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_B = h\sin\varphi, \qquad y_B = -b\sin\varphi, \qquad y_S = \frac{h}{2}\cos\varphi - \frac{b}{2}\sin\varphi.$$

$$L(\varphi) = \sqrt{(L_o + x_B)^2 + y_B{}^2} = \sqrt{L_o{}^2 + 2L_o h\sin\varphi + (h^2 + b^2)\sin^2\varphi}.$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot}(\varphi) = mg\,y_S(\varphi) + \frac{1}{2}c(L(\varphi) - L_o)^2.$$

Verallgemeinerte Kraft:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi} = -mg\frac{\partial y_S}{\partial\varphi} - c(L(\varphi) - L_o)\frac{\partial L(\varphi)}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial y_S}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2}(h \sin\varphi + b\cos\varphi), \qquad \frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{L(\varphi)}[L_o h \cos\varphi + (h^2 + b^2)\sin\varphi\cos\varphi].$$

Gleichgewichtsbedingung:

$$mg\frac{\partial y_S}{\partial \varphi} + c(L(\varphi) - L_o)\frac{\partial L(\varphi)}{\partial \varphi} = 0.$$

Mit den speziellen Werten

$$b = L_0, \qquad h = \frac{L_0}{2}, \qquad c = \frac{mg}{L_0}$$

erhalten wir

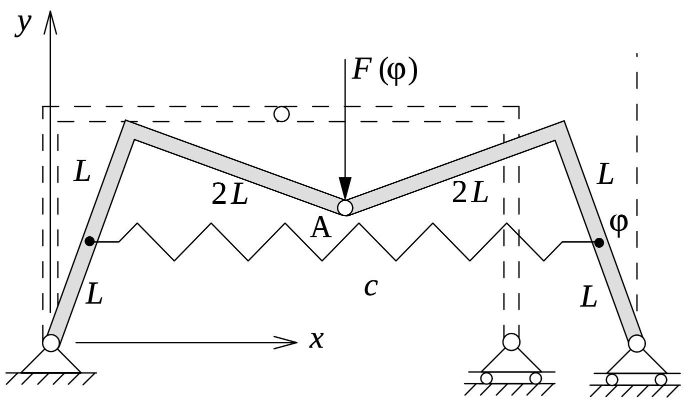
$$y_S = \frac{L_0}{4}(\cos\varphi - 2\sin\varphi), \qquad L(\varphi) = L_0\sqrt{1 + \sin\varphi + (5/4)\sin^2\varphi},$$

$$\frac{\partial y_S}{\partial \varphi} = -\frac{L_0}{4}(\sin\varphi + 2\cos\varphi), \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{L_0}{4}\frac{2\cos\varphi + 5\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 + \sin\varphi + (5/4)\sin^2\varphi}},$$

$$5\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi - \frac{2\cos\varphi + 5\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 + \sin\varphi + (5/4)\sin^2\varphi}} = 0,$$

$$\varphi = 2{,}556 = 146{,}5^{\circ}.$$

Aufgabe 5



Man berechne mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit die Kraft $F(\varphi)$, wenn die Feder (Federkonstante c) in der Lage $\varphi = 0$ entspannt ist.

Virtuelle Verschiebung des Kraftangriffspunktes:

$$y_A = 2L\cos\varphi - 2L\sin\varphi, \qquad \delta y_A = -2L(\sin\varphi + \cos\varphi)\delta\varphi.$$

Federverlängerung und potentelle Energie der Feder:

$$f(\varphi) = 4L\cos\varphi + 2L\sin\varphi - 4L,$$

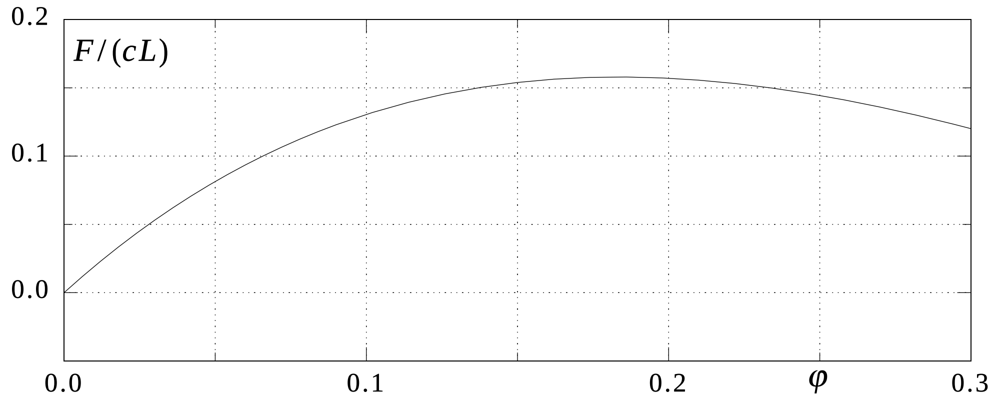
$$E_{pot}(\varphi) = \frac{1}{2} c\, f^2(\varphi).$$

Virtuelle Arbeit und Gleichgewichtsbedingung:

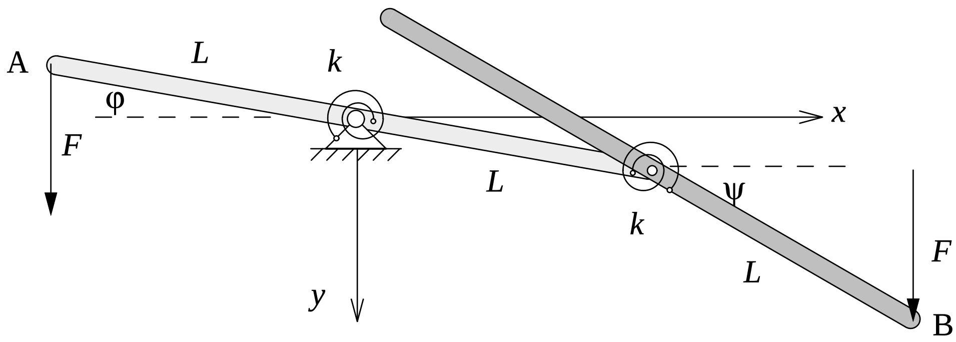
$$\delta W = -F \delta y_A - \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi} \delta\varphi = \{F\, 2L(\sin\varphi + \cos\varphi) - cf \frac{\partial f}{\partial \varphi}\} \delta\varphi,$$

$$\delta W = 0 \quad \rightarrow \quad F(\varphi) = c \frac{f \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}}{2L(\sin\varphi + \cos\varphi)},$$

$$F(\varphi) = 2cL \frac{-\dfrac{3}{2}\sin(2\varphi) + 2\cos(2\varphi) + 4\sin\varphi - 2\cos\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi}.$$



Aufgabe 6



Man berechne für das System mit zwei Freiheitsgraden die verallgemeinerten Kräfte Q_φ und Q_ψ sowie für den speziellen Wert $k = 2FL$ die Gleichgewichtskonfiguration. Die beiden Drehfedern (Federkonstante k) sind in der Lage $\varphi = \psi = 0$ entspannt.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$y_A = -L\sin\varphi, \qquad \delta y_A = -L\cos\varphi\,\delta\varphi;$$

$$y_B = L\sin\varphi + L\sin\psi, \qquad \delta y_B = L\cos\varphi\,\delta\varphi + L\cos\psi\,\delta\psi.$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}k\varphi^2 + \frac{1}{2}k(\psi-\varphi)^2 = \frac{1}{2}k(2\varphi^2 + \psi^2 - 2\varphi\psi).$$

Virtuelle Arbeit und verallgemeinerte Kräfte:

$$\delta W = F\delta y_A + F\delta y_B - \frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi}\delta\varphi - \frac{\partial E_{pot}}{\partial\psi}\delta\psi,$$

$$\delta W = -FL\cos\varphi\,\delta\varphi + FL(\cos\varphi\,\delta\varphi + \cos\psi\,\delta\psi) - k(2\varphi-\psi)\delta\varphi - k(\psi-\varphi)\delta\psi,$$

$$Q_\varphi = k(\psi - 2\varphi), \qquad Q_\psi = FL\cos\psi - k(\psi-\varphi).$$

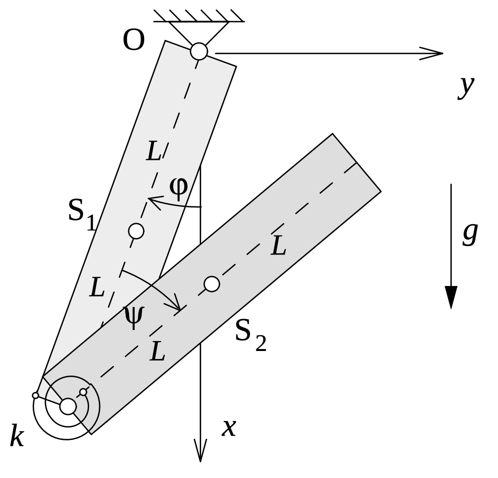
Gleichgewichtsbedingungen:

$$Q_\varphi = 0 \quad\to\quad \psi = 2\varphi,$$

$$Q_\psi = 0 \quad\to\quad \cos(2\varphi) = \frac{k}{FL}\varphi; \qquad\qquad k = 2FL \quad\to\quad \cos(2\varphi) = 2\varphi,$$

$$2\varphi = 0{,}739 \quad\to\quad \varphi = 21{,}2^{\circ}, \quad \psi = 42{,}3^{\circ}.$$

Aufgabe 7



Zwei starre Körper der Masse m sind über eine Drehfeder (Federsteifigkeit $k = mgL$) gelenkig verbunden und in O drehbar aufgehängt. Die Drehfeder sei für $\psi = 0$ entspannt. Man berechne die potentielle Energie des Systems und mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit die Gleichungen für die Koordinaten φ und ψ in der Gleichgewichtslage.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_{S_1} = L\cos\varphi, \qquad x_{S_2} = 2L\cos\varphi - L\cos(\varphi+\psi).$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}k\psi^2 - mg\,x_{S_1} - mg\,x_{S_2} = \frac{1}{2}k\psi^2 - mg(x_{S_1} + x_{S_2}),$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}k\psi^2 - mg\,L(3\cos\varphi - \cos(\varphi + \psi)).$$

Verallgemeinerte Kräfte:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi} = mg\,L\,(-3\sin\varphi + \sin(\varphi + \psi)), \qquad Q_\psi = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial\psi} = -k\psi + mg\,L\sin(\varphi + \psi).$$

Gleichgewichtsbedingungen:

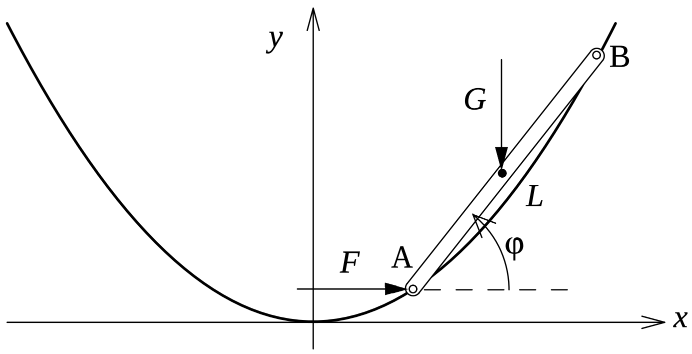
$$Q_\varphi = 0, \qquad Q_\psi = 0, \qquad \to \qquad \begin{array}{l} 3\sin\varphi = \sin(\varphi+\psi), \\ \psi = \dfrac{mgL}{k}\sin(\varphi + \psi), \end{array}$$

$$\frac{mgL}{k} = 1 \qquad \to \qquad 3\sin\varphi = \psi,$$

$$3\sin\varphi = \sin(\varphi + 3\sin\varphi) \qquad \to \qquad \varphi = 0.3255 = 18.6^\circ; \qquad \psi = 54{,}9^\circ.$$

Aufgabe 8

Ein Stab (Länge L, Gewichtskraft G) kann mit seinen Endpunkten A und B auf einer Führungsschiene gleiten, deren Form durch die Funktion $y(x) = x^2/L$ beschrieben wird. Man berechne mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit die Kraft $F(\varphi)$, die der Gewichtskraft des Stabes in der Lage φ das Gleichgewicht hält.



Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_B = x_A + L\cos\varphi, \qquad \frac{x_B^{\,2}}{L} - \frac{x_A^{\,2}}{L} = L\sin\varphi.$$

Daraus folgt:

$$(x_A + L\cos\varphi)^2 - x_A^{\,2} = L^2\sin\varphi, \qquad x_A = \frac{L}{2}(\tan\varphi - \cos\varphi).$$

$$y_S = y_A + \frac{L}{2}\sin\varphi = \frac{x_A^{\;2}}{L} + \frac{L}{2}\sin\varphi, \qquad y_S = \frac{L}{4}(\tan^2\varphi + \cos^2\varphi).$$

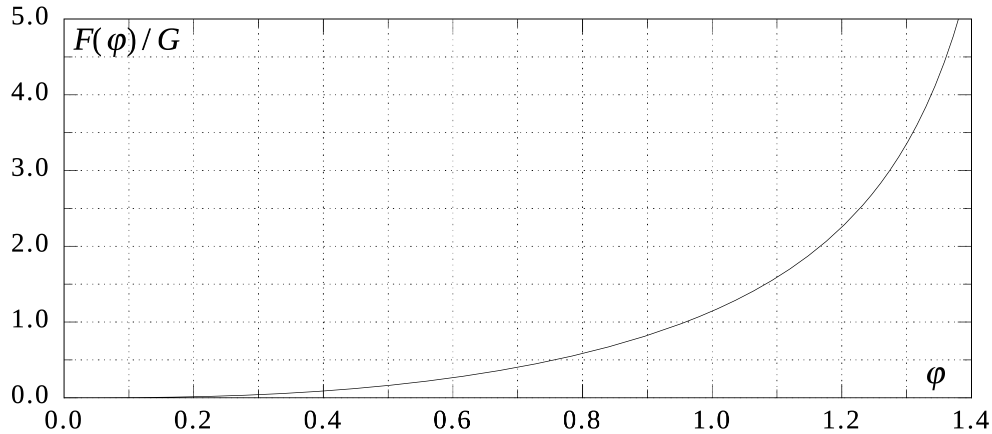
Virtuelle Verschiebungen:

$$\delta x_A = \frac{L}{2}(\frac{1}{\cos^2\varphi} + \sin\varphi)\delta\varphi, \qquad \delta y_S = \frac{L}{2}(\frac{\tan\varphi}{\cos^2\varphi} - \cos\varphi\sin\varphi)\delta\varphi.$$

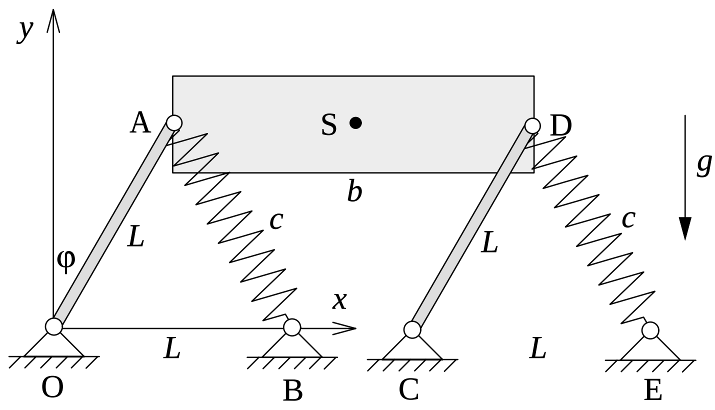
Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\delta W = F\delta x_A - G\delta y_S = \{\frac{FL}{2}(\frac{1}{\cos^2\varphi} + \sin\varphi) - \frac{GL}{2}(\frac{\tan\varphi}{\cos^2\varphi} - \cos\varphi\sin\varphi)\}\delta\varphi = 0,$$

$$F(\varphi) = G\,\frac{\tan\varphi - \cos^3\varphi\sin\varphi}{1 + \cos^2\varphi\sin\varphi}.$$



Aufgabe 9



In der Lage $\varphi = 0$ sind die Federn entspannt. Man berechne die potentielle Energie des Systems und die verallgemeinerte Kraft Q_φ als Funktion des Winkels φ

und außerdem die Federkonstante c der linearen Zug-Druck-Federn so, daß in der Lage $\varphi = 30^{\text{o}}$ der Körper der Masse m im Gleichgewichtszustand ist.

Federlänge in beliebiger Lage φ:

$$s(\varphi) = \sqrt{(L - L\sin\varphi)^2 + (L\cos\varphi)^2} = \sqrt{2}L\sqrt{1-\sin\varphi}.$$

Potentielle Energie des Systems:

$$E_{pot} = mgL\cos\varphi + 2\frac{c}{2}[s(\varphi) - L\sqrt{2}]^2.$$

Verallgemeinerte Kraft:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial E_{pot}(\varphi)}{\partial\varphi} = mgL\sin\varphi - 2c[s(\varphi) - L\sqrt{2}]\frac{\partial s(\varphi)}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial s(\varphi)}{\partial\varphi} = -\frac{L\cos\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1-\sin\varphi}},$$

$$Q_\varphi = mgL\sin\varphi + 2cL^2\frac{(\sqrt{1-\sin\varphi} - 1)\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin\varphi}}.$$

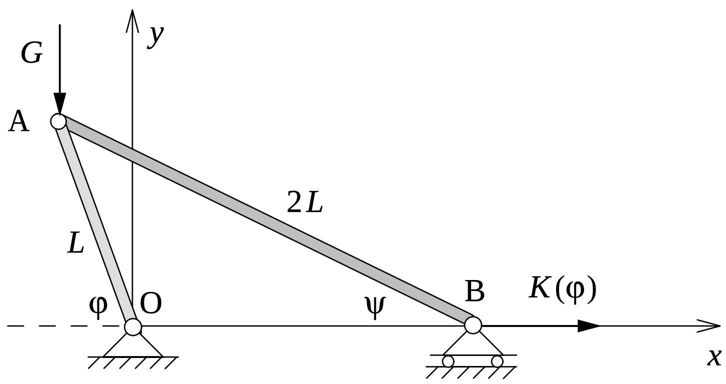
Gleichgewichtsbedingung:

$$Q_\varphi = 0 \quad \to \quad mg\sin\varphi = 2cL\frac{(1-\sqrt{1-\sin\varphi})\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin\varphi}}.$$

Erforderliche Federkonstante:

$$c = \frac{mg}{2L}\left.\frac{\sin\varphi\sqrt{1-\sin\varphi}}{(1-\sqrt{1-\sin\varphi})\cos\varphi}\right|_{\varphi=30^o} = \frac{mg}{L}\frac{1}{2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)} = 0{,}697\frac{mg}{L}.$$

Aufgabe 10



Man berechne mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit die Haltekraft K als Funktion des Winkels φ.

Kinematische Bedingungen und virtuelle Verschiebungen:

$$y_A = L\sin\varphi, \qquad \delta y_A = L\cos\varphi\,\delta\varphi.$$

$$2L\sin\psi = L\sin\varphi, \qquad \to \qquad \cos\psi = \frac{1}{2}\sqrt{4-\sin^2\varphi},$$

$$x_B = 2L\cos\psi - L\cos\varphi = L(\sqrt{4-\sin^2\varphi} - \cos\varphi), \qquad \delta x_B = L(\sin\varphi - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{4-\sin^2\varphi}})\delta\varphi.$$

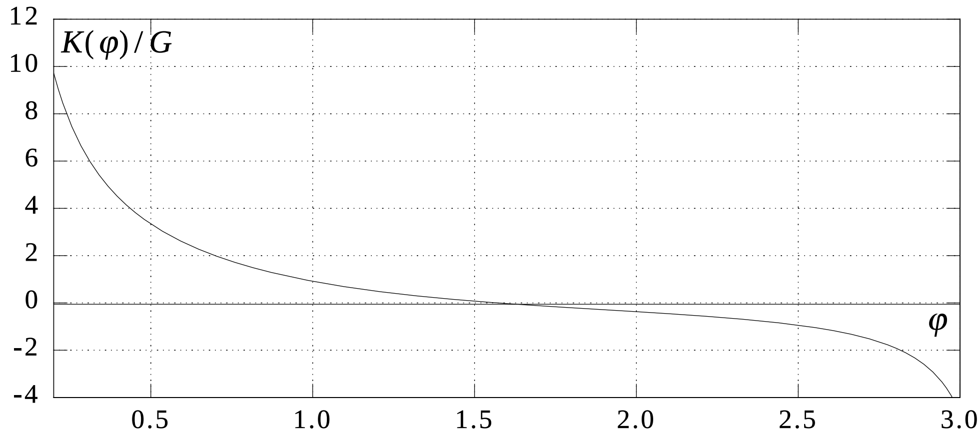
Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\delta W = -G\,\delta y_A + K\,\delta x_B = 0,$$

$$\{-GL\cos\varphi + KL(\sin\varphi - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}})\}\delta\varphi = 0,$$

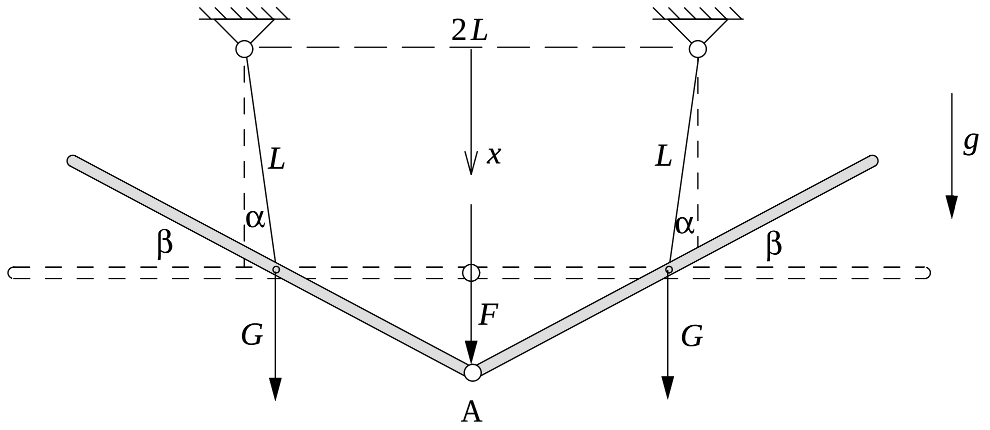
Haltekraft:

$$K(\varphi) = G\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi - \dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{4-\sin^2\varphi}}}.$$



Aufgabe 11

Zwei Stangen (Masse m, Länge $2L$) sind jeweils im Schwerpunkt an einen Faden (Länge L) gebunden und im Abstand $2L$ aufgehängt, so daß sie in horizontaler Lage im Gleichgewicht sind; im Punkt A sind sie gelenkig verbunden. Man berechne die neue Gleichgewichtslage, wenn in A zusätzlich eine Kraft F in vertikaler Richtung angreift.



Kinematische Zwangsbedingungen und virtuelle Verschiebungen:

$$2(L\sin\alpha + L\cos\beta) = 2L, \qquad \to \qquad \sin\alpha + \cos\beta = 1,$$

$$\cos\beta = 1 - \sin\alpha, \qquad \sin\beta = \sqrt{1-(1-\sin\alpha)^2} = \sqrt{2\sin\alpha - \sin^2\alpha}.$$

$$x_{S_1} = x_{S_2} = L\cos\alpha, \qquad x_A = L\cos\alpha + L\sin\beta = L(\cos\alpha + \sqrt{2\sin\alpha - \sin^2\alpha}),$$

$$\delta x_{S_1} = \delta x_{S_2} = -L\sin\alpha\,\delta\alpha, \qquad \delta x_A = L(-\sin\alpha + \frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}{\sqrt{2\sin\alpha - \sin^2\alpha}})\delta\alpha,$$

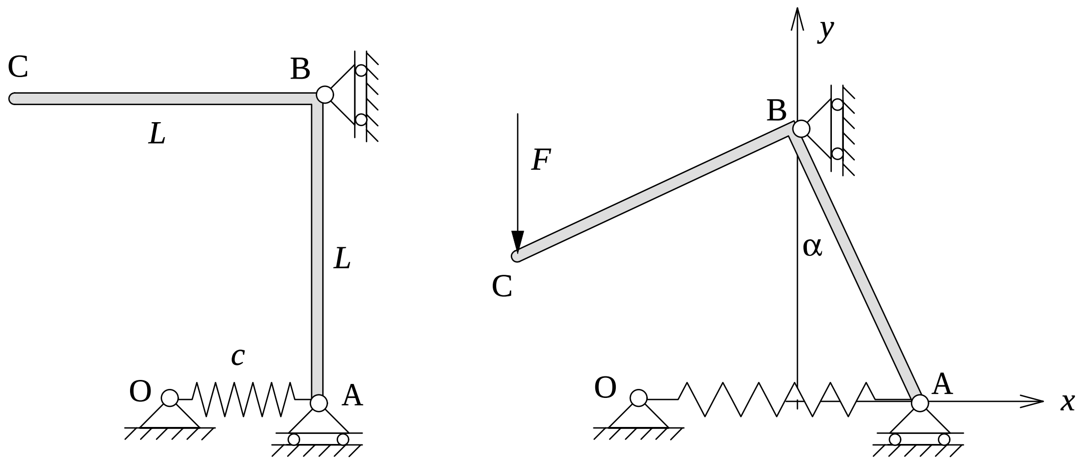
Virtuelle Arbeit und Gleichgewichtsbedingung:

$$\delta W = -2GL\sin\alpha\,\delta\alpha + FL(-\sin\alpha + \frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}{\sqrt{2\sin\alpha - \sin^2\alpha}})\delta\alpha = 0,$$

$$\frac{1-\sin\alpha}{\tan\alpha\sqrt{2\sin\alpha - \sin^2\alpha}} = 1 + \frac{2G}{F}, \qquad \to \qquad \alpha, \qquad \beta = \arccos(1-\sin\alpha).$$

$$F = 2G \qquad \to \qquad \alpha = 0{,}3824 = 21{,}9^{\circ}, \qquad \beta = 0{,}8933 = 51{,}2^{\circ}.$$

Aufgabe 12



Man berechne die für die Auslenkung α erforderliche Kraft F. Für $\alpha = 0$ ist die Feder entspannt.

Virtuelle Verschiebungen der Kraftangriffspunkte A und C:

$$x_A = L\sin\alpha, \qquad y_C = L\cos\alpha - L\sin\alpha.$$

$$\delta x_A = L\cos\alpha\,\delta\alpha, \qquad \delta y_C = -L(\sin\alpha + \cos\alpha)\delta\alpha.$$

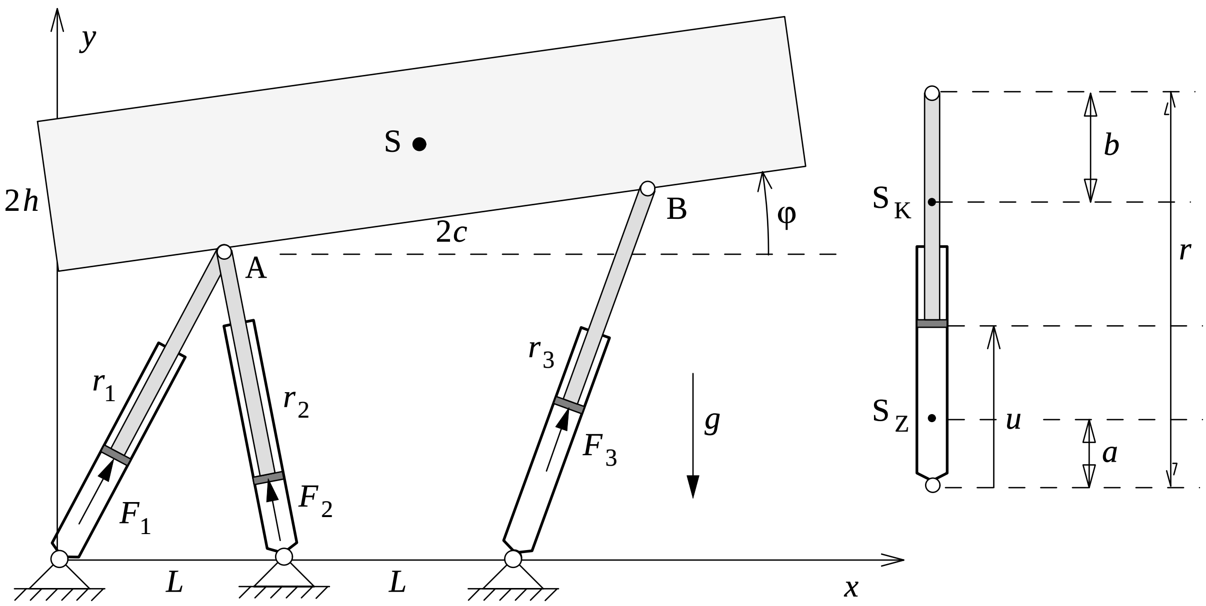
Virtuelle Arbeit und Gleichgewichtsbedingung:

$$\delta W = -F\delta y_C - cx_A\delta x_A$$

$$\delta W = -F\delta y_C - cx_A\delta x_A = \{FL(\cos\alpha + \sin\alpha) - cL^2\sin\alpha\cos\alpha\}\delta\alpha = 0,$$

$$F(\alpha) = cL\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}.$$

Aufgabe 13



Man berechne die Kräfte F_i in den drei Hubzylindern, die den starren Körper (Gewichtskraft G) in einer beliebigen Lage (x_A, y_A, φ) im Gleichgewicht halten. Die Hubstangen bestehen aus dem Hubzylinder (Gewichtskraft G_Z) und dem Hubkolben (Gewichtskraft G_K). Alle Gewichtskräfte greifen in den betreffenden Schwerpunkten an und wirken in $-\vec{e}_y$-Richtung.

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit wird im Gleichgewichtsfall die virtuelle Arbeit der Kräfte F_i und der Gewichtskräfte insgesamt null:

$$\sum_{i=1}^{3}(F_i\delta u_i - G_Z\delta y_{SZi} - G_K\delta y_{SKi}) - G\delta y_S = 0.$$

Für die Auswertung dieser Gleichung müssen die Kolbenverschiebungen u_i und die y-Koordinaten der Schwerpunkte durch die Koordinaten (x_A, y_A, φ) ausgedrückt werden (kinematische Zwangsbedingungen). Es gilt jedoch

$$u_i = r_i - \text{Kolbenlänge} \qquad \rightarrow \qquad \delta u_i = \delta r_i .$$

Mit den Längen der Hubstangen

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x_A - L)^2 + y_A{}^2}, \\ r_3 &= \sqrt{(x_A + 2c\cos\varphi - 2L)^2 + (y_A + 2c\sin\varphi)^2}, \end{aligned}$$

und den Neigungswinkeln α_i der Hubstangen gegen die x-Achse, wird

$$\sin\alpha_1 = \frac{y_A}{r_1}, \qquad \sin\alpha_2 = \frac{y_A}{r_2}, \qquad \sin\alpha_3 = \frac{y_B}{r_3} = \frac{y_A + 2c\sin\varphi}{r_3}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} y_{SZ1} &= a\sin\alpha_1 = a\frac{y_A}{r_1}, & y_{SK1} &= (r_1 - b)\sin\alpha_1 = (1 - \frac{b}{r_1})y_A, \\ y_{SZ2} &= a\sin\alpha_2 = a\frac{y_A}{r_2}, & y_{SK2} &= (r_2 - b)\sin\alpha_2 = (1 - \frac{b}{r_2})y_A, \\ y_{SZ3} &= a\sin\alpha_3 = a\frac{y_A + 2c\sin\varphi}{r_3}, & y_{SK3} &= (r_3 - b)\sin\alpha_3 = (1 - \frac{b}{r_3})(y_A + 2c\sin\varphi), \end{aligned}$$

$$y_S = y_A + c\sin\varphi + h\cos\varphi.$$

Die virtuelle Änderung einer Funktion $f(x_A, y_A, \varphi)$ lautet

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x_A}\delta x_A + \frac{\partial f}{\partial y_A}\delta y_A + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\delta\varphi.$$

Wir führen nun zweckmäßige Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} A_{i1} &:= \frac{\partial r_i}{\partial x_A}, & B_{i1} &:= \frac{\partial y_{SZi}}{\partial x_A}, & C_{i1} &:= \frac{\partial y_{SKi}}{\partial x_A}, & D_1 &:= \frac{\partial y_S}{\partial x_A}, \\ A_{i2} &:= \frac{\partial r_i}{\partial y_A}, & B_{i2} &:= \frac{\partial y_{SZi}}{\partial y_A}, & C_{i2} &:= \frac{\partial y_{SKi}}{\partial y_A}, & D_2 &:= \frac{\partial y_S}{\partial y_A}, \\ A_{i3} &:= \frac{\partial r_i}{\partial \varphi}; & B_{i3} &:= \frac{\partial y_{SZi}}{\partial \varphi}; & C_{i3} &:= \frac{\partial y_{SKi}}{\partial \varphi}, & D_3 &:= \frac{\partial y_S}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Damit kann die virtuelle Arbeit nach den Koordinatenvariationen sortiert geschrieben werden

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{i=1}^{3} F_i A_{i1} - G_Z \sum_{i=1}^{3} B_{i1} - G_K \sum_{i=1}^{3} C_{i1} - GD_1)\delta x_A + \\
&\quad + (\sum_{i=1}^{3} F_i A_{i2} - G_Z \sum_{i=1}^{3} B_{i2} - G_K \sum_{i=1}^{3} C_{i2} - GD_2)\delta y_A + \qquad . \\
&\qquad + (\sum_{i=1}^{3} F_i A_{i3} - G_Z \sum_{i=1}^{3} B_{i3} - G_K \sum_{i=1}^{3} C_{i3} - GD_3)\delta\varphi = 0.
\end{aligned}
$$

Soll diese Gleichung für beliebige virtuelle Koordinatenänderungen $\delta x_A, \delta y_A$ und $\delta\varphi$ gelten, so müssen die folgenden drei Gleichungen für die Kräfte F_i erfüllt sein:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} F_i A_{i1} &= G_Z \sum_{i=1}^{3} B_{i1} + G_K \sum_{i=1}^{3} C_{i1} + GD_1, \\
\sum_{i=1}^{3} F_i A_{i2} &= G_Z \sum_{i=1}^{3} B_{i2} + G_K \sum_{i=1}^{3} C_{i2} + GD_2, \\
\sum_{i=1}^{3} F_i A_{i3} &= G_Z \sum_{i=1}^{3} B_{i3} + G_K \sum_{i=1}^{3} C_{i3} + GD_3.
\end{aligned}
$$

Da insbesondere

$$A_{13} = 0, \qquad A_{23} = 0$$

ist, erhalten wir sofort

$$F_3 = \frac{1}{A_{33}} \left\{ G_Z \sum_{i=1}^{3} B_{i3} + G_K \sum_{i=1}^{3} C_{i3} + GD_3 \right\}.$$

Mit

$$K_1 := \left\{ G_Z \sum_{i=1}^{3} B_{i1} + G_K \sum_{i=1}^{3} C_{i1} + GD_1 \right\} - F_3 A_{31},$$

$$K_2 := \left\{ G_Z \sum_{i=1}^{3} B_{i2} + G_K \sum_{i=1}^{3} C_{i2} + GD_2 \right\} - F_3 A_{32},$$

erhalten wir schließlich für die Kräfte F_1 und F_2 das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
A_{11} F_1 + A_{21} F_2 &= K_1, \\
A_{12} F_1 + A_{22} F_2 &= K_2,
\end{aligned}
$$

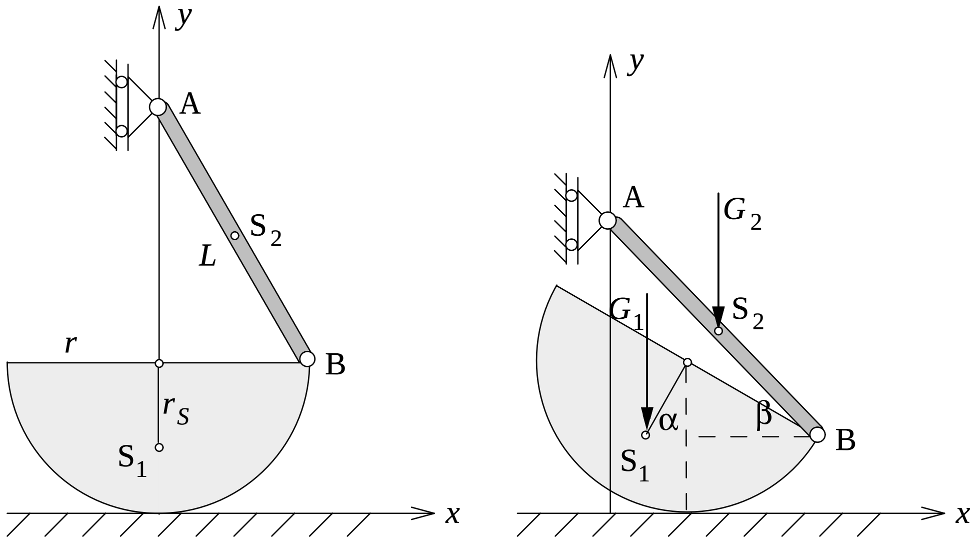
mit den Lösungen

$$F_1 = \frac{K_1 A_{22} - K_2 A_{21}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}, \qquad F_1 = \frac{K_2 A_{11} - K_1 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}.$$

Die Ableitungsterme A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} und D_i werden zuerst analytisch berechnet und dann für eine bestimmte Konfiguration (x_A, y_A, φ) numerisch ausgewertet.

Aufgabe 14

Ein Halbkreiszylinder (Radius r, Masse m_1) ist im Punkt B gelenkig mit einer starren Stange (Länge L, Masse m_2) verbunden, die im Punkt A auf der y-Achse geführt wird. Man berechne mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit die Gleichgewichtslage α, wenn der Halbkreiszylinder auf der x-Achse abrollt.



Kinematische Zwangsbedingung:

$$L\cos\beta = \alpha r + r\cos\alpha.$$

Virtuelle Verschiebungen der Schwerpunkte in y-Richtung:

$$y_{S_1} = r - r_S\cos\alpha,$$

$$y_{S_2} = r - r\sin\alpha + \frac{L}{2}\sin\beta = r(1-\sin\alpha) + \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - r^2(\alpha+\cos\alpha)^2},$$

$$\delta y_{S_1} = r_S \sin\alpha\,\delta\alpha,$$

$$\delta y_{S_2} = \{-r\cos\alpha - \frac{1}{2}\frac{r^2(\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha)}{\sqrt{L^2 - r^2(\alpha+\cos\alpha)^2}}\}\delta\alpha.$$

Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta W = -G_1\delta y_{S_1} - G_2\delta y_{S_2} = 0$$

folgt dann die nichtlineare Gleichung

$$-G_1 r_S\sin\alpha + G_2 r\{\cos\alpha + \frac{r(\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha)}{2\sqrt{L^2 - r^2(\alpha+\cos\alpha)^2}}\} = 0,$$

deren Nullstelle α_0 die Gleichgewichtslage des Systems beschreibt. Für die speziellen Werte

$$L = 2r, \qquad m_1 = 4m, \qquad m_2 = m, \qquad r_S = \frac{4}{3\pi} r$$

lautet die Gleichung

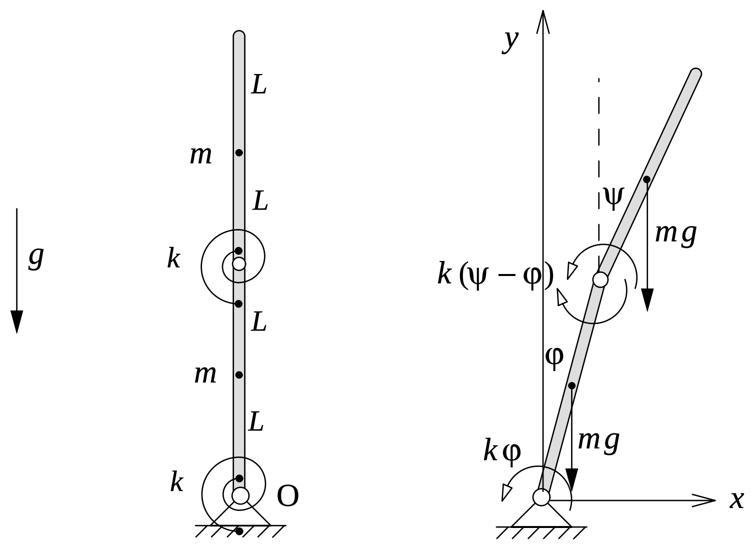
$$-\frac{16}{3\pi}\sin\alpha + \cos\alpha + \frac{(\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha)}{2\sqrt{4 - (\alpha + \cos\alpha)^2}} = 0,$$

und als Nullstelle erhalten wir

$$\alpha_0 = 0.63905 = 36.6^{\circ}.$$

Aufgabe 15

Zwei starre Stangen (Länge $2L$, Masse m) sind gelenkig miteinander verbunden und in O gelenkig gelagert. Durch zwei Drehfedern (Drehfederkonstante k) soll die vertikale Gleichgewichtslage $\varphi = 0, \psi = 0$ stabilisiert werden. Wie groß muß k dann mindestens sein?



Das System ist konservativ und die potentielle Energie

$$E_{pot} = \frac{1}{2}k\varphi^2 + \frac{1}{2}k(\psi - \varphi)^2 + mgL\cos\varphi + mgL(2\cos\varphi + \cos\psi)$$

muß in der Gleichgewichtslage $\varphi = \psi = 0$ ein Minimum haben. Mit $k = \alpha mgL$ wird

$$c_{11} := \left.\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=\psi=0} = mgL(2\alpha - 3), \qquad c_{22} := \left.\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\psi^2}\right|_{\varphi=\psi=0} = mgL(\alpha - 1),$$

$$c_{12} := \left.\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\varphi\partial\psi}\right|_{\varphi=\psi=0} = -\alpha mgL,$$

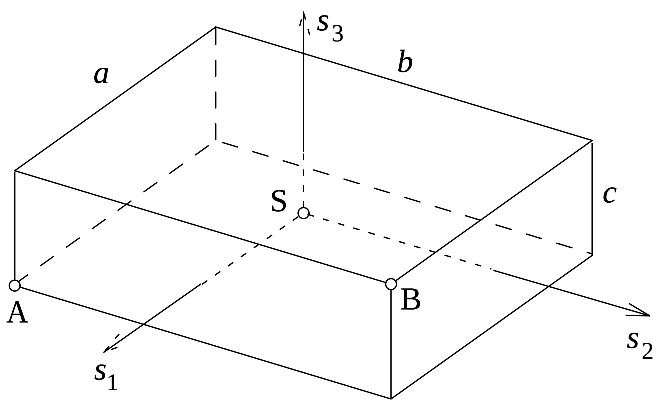
und es muß

$$c_{11} > 0 \quad \rightarrow \quad \alpha > 3/2,$$
$$c_{22} > 0 \quad \rightarrow \quad \alpha > 1,$$
$$c_{11}c_{22} - c_{12}{}^2 > 0 \quad \rightarrow \quad \alpha^2 - 5\alpha + 3 > 0 \quad \rightarrow \quad \alpha > \frac{5+\sqrt{13}}{2} = 4,303$$

sein, also $k > 4,303 mgL$.

Aufgabe 1

Man berechne den Trägheitstensor eines homogenen Quaders der Masse m bezogen auf den Schwerpunkt S und daraus die Trägheitsmomente für Rechteckplatten und Stäbe um die Symmetrieachsen. Außerdem berechne man mit Hilfe des STEINERschen Satzes den Trägheitstensor bezogen auf den Punkt A sowie die Trägheitsmomente um die zu s_3 parallele Achse durch A und die Achse AB.



Massendichte und Massenelement:

$$\rho = \frac{m}{abc}. \qquad dm = \rho dV = \rho ds_1 ds_2 ds_3.$$

Trägheitsmomente um die s_i-Achsen durch S (Symmetrieachsen):

$$\Theta_{S11} = \int_m (s_2{}^2 + s_3{}^2) dm,$$

$$\Theta_{S11} = \rho \int_{-c/2}^{c/2} (\int_{-b/2}^{b/2} (\int_{-a/2}^{a/2} (s_2{}^2 + s_3{}^2) ds_1) ds_2) ds_3,$$

$$\Theta_{S11} = \rho \int_{-c/2}^{c/2} (\int_{-b/2}^{b/2} a(s_2{}^2 + s_3{}^2) ds_2) ds_3,$$

$$\Theta_{S11} = \rho \int_{-c/2}^{c/2} a(\frac{b^3}{12} + b s_3{}^2) ds_3,$$

$$\Theta_{S11} = \rho a (\frac{b^3}{12} c + b \frac{c^3}{12}) = \rho abc \frac{b^2 + c^2}{12},$$

$$\Theta_{S11} = m \frac{b^2 + c^2}{12}, \qquad \Theta_{S22} = m \frac{c^2 + a^2}{12}, \qquad \Theta_{S33} = m \frac{a^2 + b^2}{12};$$

Massendeviationsmomente:

$$\Theta_{S12} = -\int_m s_1 s_2 dm,$$

$$\Theta_{S12} = -\rho \int_{-c/2}^{c/2} (\int_{-b/2}^{b/2} (\int_{-a/2}^{a/2} s_1 s_2 ds_1) ds_2) ds_3,$$

$$\Theta_{S12} = -\rho \int_{-c/2}^{c/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} 0 s_2 ds_2 \right) ds_3 = 0,$$

$$\Theta_{S12} = 0, \qquad \Theta_{S23} = 0, \qquad \Theta_{S31} = 0.$$

Trägheitstensor im s_i-System (= Hauptachsensystem für S):

$$\mathbf{\Theta}_S = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

Platte in der $s_1 s_2$-Ebene: ($c << a$ und $c << b$)

$$\mathbf{\Theta}_S = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2(1 + c^2/b^2) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(1 + c^2/a^2) & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \approx \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

Stab auf der s_1-Achse: ($b << a$ und $c << a$)

$$\mathbf{\Theta}_S = \frac{m}{12} a^2 \begin{bmatrix} (b^2 + c^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + c^2/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + b^2/a^2 \end{bmatrix} \approx \frac{m}{12} a^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trägheitstensor des Quaders bezogen auf den Punkt A:

$$\mathbf{\Theta}_A = \mathbf{\Theta}_S + m\, \boldsymbol{\vartheta}(\overrightarrow{AS}),$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\vartheta}(\overrightarrow{AS}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & c^2 + a^2 & -bc \\ ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Theta}_A = m \begin{bmatrix} \frac{b^2 + c^2}{3} & \frac{ab}{4} & \frac{ac}{4} \\ \frac{ab}{4} & \frac{c^2 + a^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ \frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2 + b^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Trägheitsmoment um die zu s_3 parallele Achse durch den Punkt A:

$$\Theta_{A(\vec{e}_3)} = \vec{e}_3 \cdot (\mathbf{\Theta}_A \vec{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (m \begin{bmatrix} \frac{b^2+c^2}{3} & \frac{ab}{4} & \frac{ac}{4} \\ \frac{ab}{4} & \frac{c^2+a^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ \frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$\Theta_{A(\vec{e}_3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot m \begin{bmatrix} \frac{ac}{4} \\ -\frac{bc}{4} \\ \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix} = m \frac{a^2+b^2}{3}.$$

Trägheitsmoment um die Achse AB:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

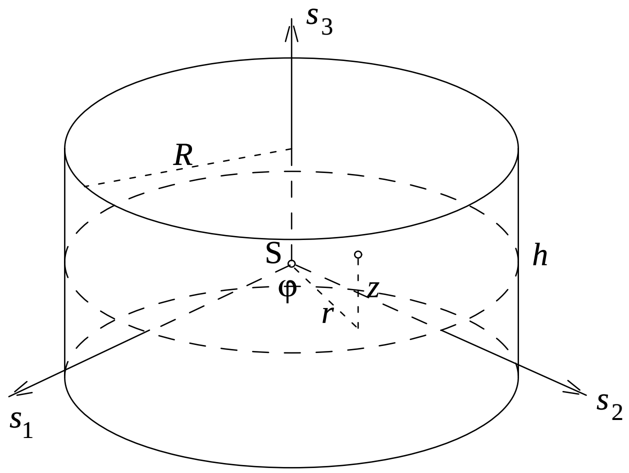
$$\Theta_{A(\vec{e}_{AB})} = \vec{e}_{AB} \cdot (\mathbf{\Theta}_A \vec{e}_{AB}) = \frac{m}{b^2+c^2} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot (\begin{bmatrix} \frac{b^2+c^2}{3} & \frac{ab}{4} & \frac{ac}{4} \\ \frac{ab}{4} & \frac{c^2+a^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ \frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix}),$$

$$\Theta_{A(\vec{e}_{AB})} = \frac{m}{b^2+c^2} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{a}{4}(b^2+c^2) \\ \frac{c^2+a^2}{3} b - \frac{b}{4} c^2 \\ \frac{a^2+b^2}{3} c - \frac{c}{4} b^2 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{A(\vec{e}_{AB})} = \frac{m}{b^2+c^2} (\frac{c^2+a^2}{3} b^2 + \frac{a^2+b^2}{3} c^2 - \frac{b^2 c^2}{2}).$$

Aufgabe 2

Man berechne den Trägheitstensor eines homogenen Kreiszylinders der Masse m bezogen auf den Schwerpunkt S und daraus die Trägheitsmomente für Kreisscheiben und Stäbe um die Symmetrieachsen.



Massendichte und Massenelement:

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}. \qquad dm = \rho dV = \rho r\, dr\, d\varphi\, dz.$$

$$s_1 = r\cos\varphi, \qquad s_2 = r\sin\varphi, \qquad s_3 = z,$$

Trägheitsmomente um die s_i-Achsen durch S (Symmetrieachsen):

$$\Theta_{S11} = \int_m (s_2{}^2 + s_3{}^2)\,dm,$$

$$\Theta_{S11} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^R (r^2 \sin^2\varphi + z^2) r\,dr\Big) d\varphi\Big) dz,$$

$$\Theta_{S11} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\frac{R^4}{4}\sin^2\varphi + \frac{R^2}{2} z^2\Big) d\varphi\Big) dz,$$

$$\Theta_{S11} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \Big(\frac{R^4}{4}\pi + \frac{R^2}{2} z^2\, 2\pi\Big) dz \;= \rho\Big(\frac{R^4}{4}\pi h + \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{h^3}{12}\Big),$$

$$\Theta_{S11} = m\Big(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\Big), \qquad \Theta_{S22} = \Theta_{S11},$$

$$\Theta_{S33} = \int_m (s_1{}^2 + s_2{}^2)\,dm,$$

$$\Theta_{S33} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^R r^3 dr\Big) d\varphi\Big) dz,$$

$$\Theta_{S33} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \left(\int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi \right) dz = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^4}{4} 2\pi dz = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi h = \frac{mR^2}{2}.$$

Trägheitstensor im s_i-System (= Hauptachsensystem für S):

$$\mathbf{\Theta}_S = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} 3R^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{bmatrix}.$$

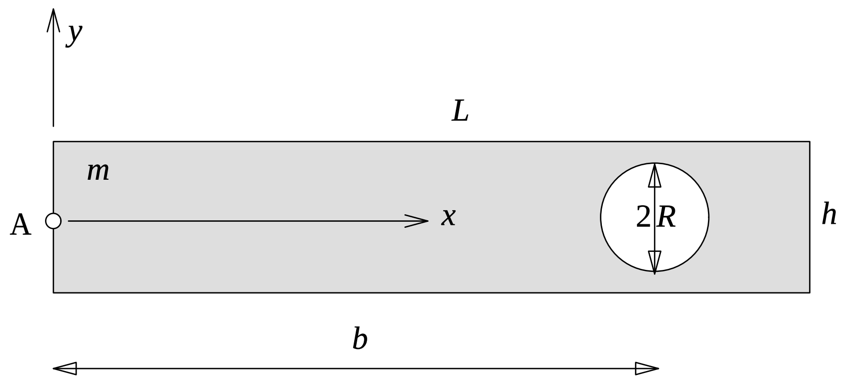
Kreisscheibe: $(h << R)$

$$\mathbf{\Theta}_S = \frac{m}{4} R^2 \begin{bmatrix} 1 + h^2/(3R^2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h^2/(3R^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \approx \frac{m}{4} R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Stab auf der s_3-Achse: $(R << h)$

$$\mathbf{\Theta}_S = \frac{m}{12} h^2 \begin{bmatrix} 1 + 3R^2/h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 3R^2/h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2/h^2 \end{bmatrix} \approx \frac{m}{12} h^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3



Man berechne die Lage des Schwerpunktes S der Rechteckscheibe mit Kreisloch und das Trägheitsmoment um die zur Scheibe senkrechte Achse durch S; die Masse der gelochten Scheibe sei m.

Masse pro Flächeneinheit:

$$\rho = \frac{m}{Lh - \pi R^2}.$$

Masse m_1 des Vollrechtecks und Masse m_2 des Kreisloches:

$$m_1 = \rho L h = m \frac{Lh}{Lh - \pi R^2}, \qquad m_2 = -\rho \pi R^2 = -m \frac{\pi R^2}{Lh - \pi R^2}.$$

Koordinate des Gesamtschwerpunktes auf der x-Achse:

$$x_S = \frac{1}{m}(m_1 \frac{L}{2} + m_2 b).$$

Trägheitsmoment des Vollrechtecks bezogen auf A:

$$\Theta_{A1} = \Theta_{S1} + m_1 (L/2)^2 = \frac{m_1}{12}(L^2 + h^2) + m_1 \frac{L^2}{4} = m_1(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{12}),$$

Trägheitsmoment des Kreislochs bezogen auf A:

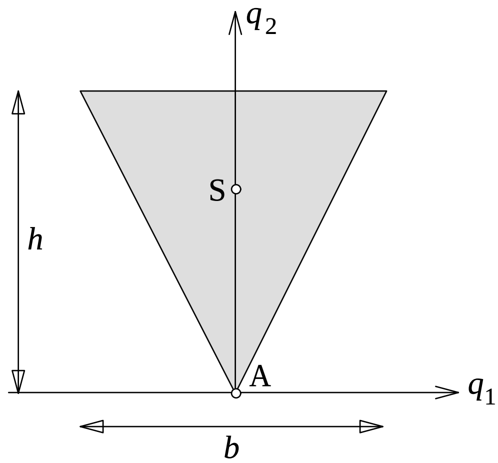
$$\Theta_{A2} = \Theta_{S2} + m_2 b^2 = m_2(\frac{R^2}{2} + b^2).$$

Trägheitsmoment der gelochten Scheibe bezogen auf A und den Schwerpunkt:

$$\Theta_A = \Theta_{A1} + \Theta_{A2} = m_1(\frac{L^2}{3} + \frac{h^2}{12}) + m_2(\frac{R^2}{2} + b^2).$$

$$\Theta_S = \Theta_A - (m_1 + m_2) x_S{}^2.$$

Aufgabe 4



Für die gleichschenklige Dreiecksscheibe (Masse m) berechne man die Lage des Schwerpunktes S und die Trägheitsmomente um parallele Achsen senkrecht zur Scheibenebene in den Punkten A und S.

Masseneelement:

$$dm = \frac{2m}{bh} dq_1 dq_2,$$

Schwerpunktlage auf der q_2-Achse:

$$q_{S2} = \frac{1}{m}\int_m q_2 dm = \frac{2}{bh}\int_0^h \Big(\int_{-bq_2/(2h)}^{bq_2/(2h)} q_2 \; dq_1\Big) dq_2,$$

$$q_{S2} = \frac{2}{bh}\int_0^h \frac{b}{h} q_2{}^2 dq_2 = \frac{2}{3}h.$$

Trägheitsmoment bezogen auf die q_3-Achse durch A:

$$\Theta_A = \int_m (q_1{}^2 + q_2{}^2) dm,$$

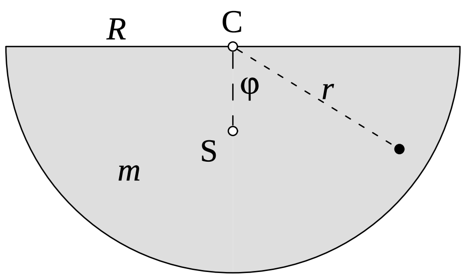
$$\Theta_A = \frac{2m}{bh}\int_0^h \Big(2\int_0^{bq_2/(2h)} (q_1{}^2 + q_2{}^2) dq_1\Big) dq_2,$$

$$\Theta_A = \frac{4m}{bh}\int_0^h \Big(\frac{b^3}{24h^3} + \frac{b}{2h}\Big) q_2{}^3 dq_2 = m\Big(\frac{b^2}{24} + \frac{h^2}{2}\Big).$$

Trägheitsmoment bezogen auf die zu q_3-parallele Achse durch S:

$$\Theta_S = \Theta_A - m\,\frac{4h^2}{9} = m\Big(\frac{b^2}{24} + \frac{h^2}{18}\Big).$$

Aufgabe 5



Man berechne das Trägheitsmoment einer homogenen Halbkreisscheibe bezogen auf die zur Scheibenebene senkrechte Achse durch den Schwerpunkt.

Schwerpunktlage:

$$\overline{CS} = \frac{1}{A}\int_A r\cos\varphi dA = \frac{1}{A}\int_0^R \Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos\varphi d\varphi\Big) dr = \frac{4}{3\pi}R.$$

Trägheitsmoment bezogen auf Punkt C:

$$\Theta_C = \int_m r^2 dm = \bar{\rho}\int_A r^2 dA, \qquad \bar{\rho} := \frac{2m}{\pi R^2}.$$

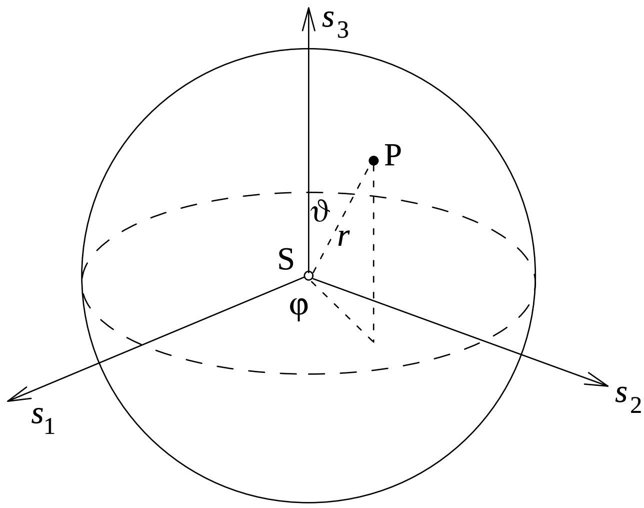
$$\Theta_C = \bar{\rho}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^R r^3 dr\right)d\varphi = \bar{\rho}\,\frac{R^4\pi}{4} = \frac{1}{2}mR^2.$$

Trägheitsmoment bezogen auf S:

$$\Theta_S = \Theta_C - m(\overline{\mathrm{CS}})^2 = \Theta_C - m\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 R^2,$$

$$\Theta_S = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mR^2 = 0{,}32mR^2.$$

Aufgabe 6



Man berechne den Trägheitstensor einer homogenen Kugel (Masse m, Radius R) bezogen auf den Schwerpunkt S.

Kugelkoordinaten: $\{r \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\}$

Beziehung zwischen den kartesischen Koordinaten und den Kugelkoordinaten eines Punktes P:

$$s_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad s_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad s_3 = r\cos\vartheta.$$

Volumenelement:

$$dV = (rd\vartheta)(r\sin\vartheta d\varphi)(dr) = r^2\sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

$$\Theta_{S33} = \int_m (s_1{}^2 + s_2{}^2)dm, \qquad dm = \rho dV = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}dV,$$

$$\Theta_{S33} = \rho\int_V (s_1{}^2 + s_2{}^2)dV = \rho\int_V r^2\sin^2\vartheta dV,$$

$$\Theta_{S33} = \rho \int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} (\int_0^{R} r^4 \sin^3 \vartheta) dr) d\vartheta) d\varphi = \rho \frac{R^5}{5} 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta,$$

$$\sin^3 \vartheta = \frac{3}{4} \sin \vartheta - \frac{1}{4} \sin(3\vartheta), \qquad \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin(3\vartheta) d\vartheta = \frac{4}{3},$$

$$\Theta_{S33} = \rho \frac{R^5}{5} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{3m}{4\pi R^3} \frac{R^5}{5} 2\pi \frac{4}{3},$$

$$\Theta_{S33} = \frac{2}{5} m R^2 = \Theta_{S11} = \Theta_{S22}.$$

Alle Massendeviationsmomente sind null, weil die Massenverteilung der homogenen Kugel im s_i-System symmetrisch ist.

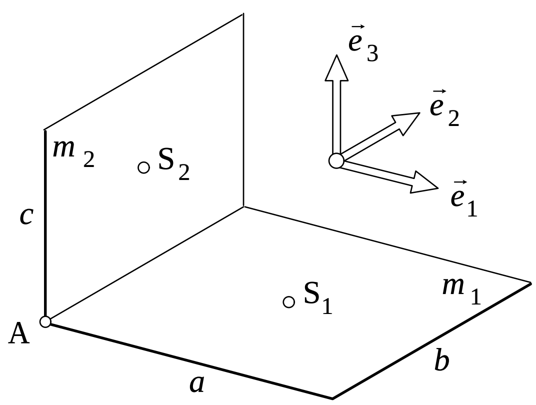
$$\mathbf{\Theta}_S = \frac{2}{5} m R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} m R^2 \boldsymbol{1}.$$

Der auf den Schwerpunkt der Kugel bezogene Trägheitstensor ist dem Einheitstensor proportional. Alle Achsen durch den Schwerpunkt sind Trägheitshauptachsen.

Der auf den Schwerpunkt S bezogene Drehimpulsvektor einer Kugel ist immer proportional zum Winkelgeschwindigkeitsvektor:

$$\vec{L}_S = \mathbf{\Theta}_S \vec{\omega} \ , \qquad \vec{L}_S = \frac{2}{5} m R^2 \vec{\omega}.$$

Aufgabe 7



Zwei orthogonal verbundene dünne Rechteckplatten bilden einen starren Körper. Man berechne den auf den Punkt A bezogenen Trägheitstensor in der angegebenen Basis, die auch für jede der beiden Platten gelten soll. Für den Spezialfall

$$m_1 = m_2 = m, \qquad a = b = c = L$$

berechne man die Hauptträgheitsmomente und die Trägheitshauptachsen sowie das Trägheitsmoment um die Achse AS_1.

$$\boldsymbol{\Theta}_{S_1} = \frac{m_1}{12}\begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Theta}_{S_2} = \frac{m_2}{12}\begin{bmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{AS_1} = \begin{bmatrix} a/2 \\ b/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{AS_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ b/2 \\ c/2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\vartheta}(\overrightarrow{AS}_1) = \begin{bmatrix} b^2/4 & -ab/4 & 0 \\ -ab/4 & a^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2)/4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\vartheta}(\overrightarrow{AS}_2) = \begin{bmatrix} (b^2+c^2)/4 & 0 & 0 \\ 0 & c^2/4 & -bc/4 \\ 0 & -bc/4 & b^2/4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Theta}_A = \boldsymbol{\Theta}_{S_1} + m_1\boldsymbol{\vartheta}(\overrightarrow{AS}_1) + \boldsymbol{\Theta}_{S_2} + m_2\boldsymbol{\vartheta}(\overrightarrow{AS}_2),$$

$$\boldsymbol{\Theta}_A = m_1\begin{bmatrix} b^2/3 & -ab/4 & 0 \\ -ab/4 & a^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2)/3 \end{bmatrix} + m_2\begin{bmatrix} (b^2+c^2)/3 & 0 & 0 \\ 0 & c^2/3 & -bc/4 \\ 0 & -bc/4 & b^2/3 \end{bmatrix}.$$

Spezialfall: $m_1 = m_2 = m, \qquad a = b = c = L$

$$\boldsymbol{\Theta}_A = \frac{mL^2}{12}\begin{bmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 12 \end{bmatrix}.$$

Charakteristische Gleichung:

$$\det\begin{bmatrix} 12-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 8-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 12-\lambda \end{bmatrix} = 0, \qquad (12-\lambda)(\lambda^2 - 20\lambda + 78) = 0,$$

$$\lambda_I = 12, \qquad \lambda_{II} = 10 - \sqrt{22} = 5,31, \qquad \lambda_{III} = 10 + \sqrt{22} = 14,69.$$

Hauptträgheitsmomente:

$$\Theta_I = mL^2, \qquad \Theta_{II} = 0{,}44mL^2, \qquad \Theta_{III} = 1{,}22mL^2.$$

Trägheitshauptachsenrichtungen:

$$\begin{bmatrix} 12-\lambda_H & -3 & 0 \\ -3 & 8-\lambda_H & -3 \\ 0 & -3 & 12-\lambda_H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_H = \lambda_I \qquad \rightarrow \qquad a_2 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_3 = -1, \qquad \vec{e}_I = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_H = \lambda_{II} \qquad \rightarrow \qquad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{12-\lambda_{II}}{3}, \quad a_3 = 1, \qquad \vec{e}_{II} = \begin{bmatrix} 0{,}3787 \\ 0{,}8445 \\ 0{,}3787 \end{bmatrix},$$

$$\vec{e}_{III} = \vec{e}_I \times \vec{e}_{II} = \begin{bmatrix} 0{,}5972 \\ -0{,}5355 \\ 0{,}5972 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{\Theta}_A = \frac{mL^2}{12}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}31 & 0 \\ 0 & 0 & 14{,}69 \end{bmatrix}_{HAS}$$

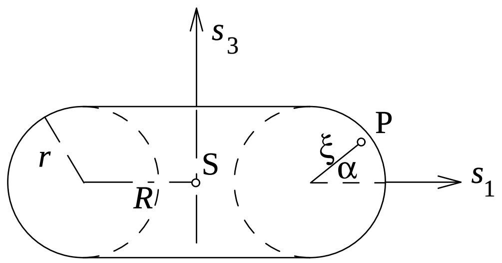
Trägheitsmoment um die Achse AS_1:

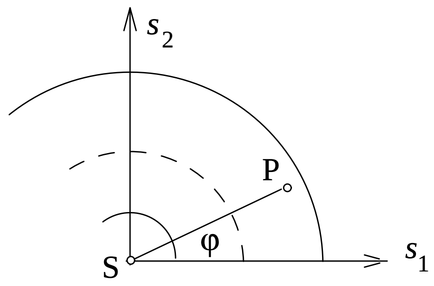
$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \Theta_{A(\vec{e})} = \vec{e}\cdot(\mathbf{\Theta}_A\vec{e}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\left(\frac{mL^2}{12}\begin{bmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Theta_{A(\vec{e})} = \frac{7mL^2}{12}.$$

Aufgabe 8

Man berechne den auf den Schwerpunkt S bezogenen Trägheitstensor eines Kreis-Toruskörpers (Masse m, Radien r, R) im symmetrisch liegenden s_i-System (Hauptachsensystem), also die Trägheitsmomente $\Theta_{S33}, \Theta_{S11} = \Theta_{S22}$. Die Massendeviationsmomente sind null.





Ortsvektor eines Toruspunktes P:

$$\vec{r} = (R + \xi\cos\alpha)\cos\varphi\vec{e}_1 + (R + \xi\cos\alpha)\sin\varphi\vec{e}_2 + \xi\sin\alpha\vec{e}_3,$$

$$0 \le \xi \le r, \qquad 0 \le \alpha,\varphi < 2\pi.$$

Bei infinitesimalen Koordinatenänderungen $d\xi, d\alpha, d\varphi$ entstehen vektorielle Linienelemente

$$d\vec{r}_\xi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}d\xi, \qquad d\vec{r}_\alpha = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha}d\alpha, \qquad d\vec{r}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi,$$

$$d\vec{r}_\xi = \begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\varphi\\ \cos\alpha\sin\varphi\\ \sin\alpha\end{bmatrix}d\xi, \quad d\vec{r}_\alpha = \begin{bmatrix}-\xi\sin\alpha\cos\varphi\\ -\xi\sin\alpha\sin\varphi\\ \xi\cos\alpha\end{bmatrix}d\alpha, \quad d\vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix}-(R+\xi\cos\alpha)\sin\varphi\\ (R+\xi\cos\alpha)\cos\varphi\\ 0\end{bmatrix}d\varphi,$$

die das Volumenelement

$$dV = d\vec{r}_\xi \cdot (d\vec{r}_\varphi \times d\vec{r}_\alpha) = \xi(R + \xi\cos\alpha)d\xi d\alpha d\varphi$$

aufspannen.

Volumen des Toruskörpers und Massendichte:

$$V = \int_V dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r (\xi R + \xi^2\cos\alpha)d\xi d\alpha d\varphi = 2\pi^2 Rr^2, \qquad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{2\pi^2 Rr^2}.$$

Trägheitsmomente um die Koordinatenachsen ($\vec{r} = \vec{s}$):

$$\Theta_{S33} = \int_m (s_1{}^2 + s_2{}^2)dm, \qquad s_1{}^2 + s_2{}^2 = (R + \xi\cos\alpha)^2,$$

$$\Theta_{S33} = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r (R + \xi\cos\alpha)^3\xi d\xi d\alpha d\varphi = m(R^2 + \frac{3}{4}r^2),$$

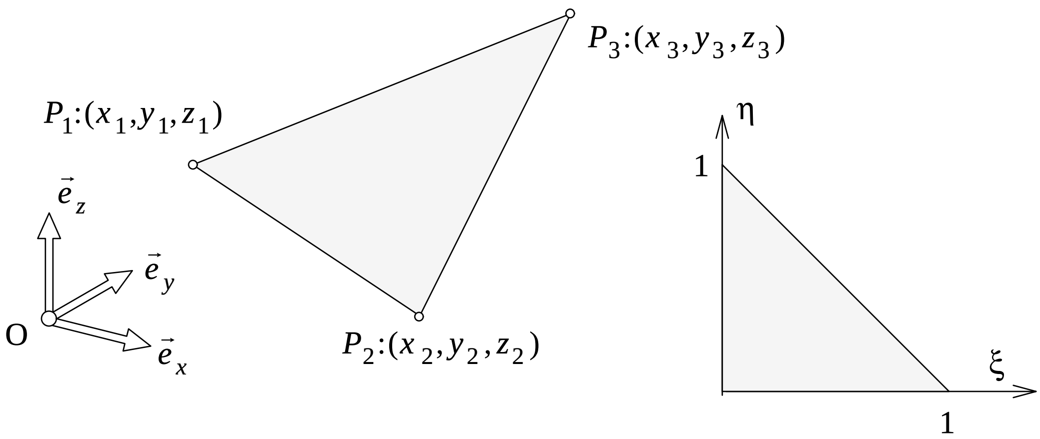
$$\Theta_{S11} = \int_m (s_2{}^2 + s_3{}^2)dm, \qquad s_2{}^2 + s_3{}^2 = (R + \xi\cos\alpha)^2\sin^2\varphi + \xi^2\sin^2\alpha,$$

$$\Theta_{S11} = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r \{(R + \xi\cos\alpha)^3\xi\sin^2\varphi + (R + \xi\cos\alpha)\xi^3\sin^2\alpha\}d\xi d\alpha d\varphi = \frac{m}{2}(R^2 + \frac{5}{4}r^2).$$

Aufgabe 9

Man berechne den auf den Koordinatenursprung O bezogenen Trägheitstensor einer beliebigen Dreiecksfläche mit konstanter Masse pro Flächeneinheit.

Hinweis: Man bilde das Einheitsdreieck in der $\xi\eta$-Ebene auf das beliebige Dreieck im dreidimensionalen Raum ab und berechne die Flächenintegrale in den $\xi\eta$-Koordinaten.



Die lineare Abbildung des Einheitsdreiecks auf das beliebige Dreieck im dreidimensionalen Raum, bei der folgende Punktzuordnung gelten soll

ξ	η	P
0	0	P_1
1	0	P_2
0	1	P_3

lautet

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\xi + (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\eta.$$

Die beiden infinitesimalen Linienelemente

$$d\vec{r}_\xi := \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) d\xi, \qquad d\vec{r}_\eta := \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta = (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) d\eta,$$

spannen im Dreieck $P_1P_2P_3$ das Flächenelement

$$dA = \left| d\vec{r}_\xi \times d\vec{r}_\eta \right| = \left| (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \right| d\xi d\eta = 2A\, d\xi d\eta$$

auf, wobei A die Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ist.

Das auf die x-Achse durch den Punkt O bezogene Massenträgheitsmoment des Dreiecks $P_1P_2P_3$

$$\Theta_{0xx} = \int_m (y^2 + z^2) dm = \int_A (y^2 + z^2) \frac{m}{A} dA = 2m \int_{\eta=0}^{1} \{ \int_{\xi=0}^{1-\eta} (y^2 + z^2) d\xi \} d\eta$$

erhält mit den linearen Abbildungsgleichungen des Einheitsdreiecks auf das Dreieck $P_1P_2P_3$ im xyz-Koordinatensystem

$$\begin{aligned}x &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta,\\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta,\\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)\xi + (z_3 - z_1)\eta,\end{aligned}$$

die Darstellung

$$\begin{aligned}\Theta_{0xx} = 2m \int_{\eta=0}^{1} \{ \int_{\xi=0}^{1-\eta} [y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta]^2 \, d\xi \} \, d\eta +\\ + 2m \int_{\eta=0}^{1} \{ \int_{\xi=0}^{1-\eta} [z_1 + (z_2 - z_1)\xi + (z_3 - z_1)\eta]^2 \, d\xi \} \, d\eta.\end{aligned}$$

Mit den Integralen

$$\int_{\eta=0}^{1} \{ \int_{\xi=0}^{1-\eta} 1 \, d\xi \} \, d\eta = \int_{\eta=0}^{1} (1-\eta) d\eta = \frac{1}{2},$$

$$\int_{\eta=0}^{1} \{ \int_{\xi=0}^{1-\eta} \xi \, d\xi \} \, d\eta = \frac{1}{2} \int_{\eta=0}^{1} (1-\eta)^2 \, d\eta = \frac{1}{6}, \qquad \int_{\eta=0}^{1} \{ \int_{\xi=0}^{1-\eta} \eta \, d\xi \} \, d\eta = \int_{\eta=0}^{1} \eta(1-\eta) d\eta = \frac{1}{6},$$

$$\int_{\eta=0}^{1} \{ \int_{\xi=0}^{1-\eta} \xi\eta \, d\xi \} \, d\eta = \frac{1}{2} \int_{\eta=0}^{1} \eta(1-\eta)^2 \, d\eta = \frac{1}{24},$$

$$\int_{\eta=0}^{1} \{ \int_{\xi=0}^{1-\eta} \xi^2 \, d\xi \} \, d\eta = \frac{1}{3} \int_{\eta=0}^{1} (1-\eta)^3 \, d\eta = \frac{1}{12}, \qquad \int_{\eta=0}^{1} \{ \int_{\xi=0}^{1-\eta} \eta^2 \, d\xi \} \, d\eta = \int_{\eta=0}^{1} \eta^2 (1-\eta) d\eta = \frac{1}{12},$$

erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\Theta_{0xx} = \frac{m}{6}(y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) +\\ + \frac{m}{6}(z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 + z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1).\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich für die Massenträgheitsmomente um die y- und die z-Achse durch O:

$$\begin{aligned}\Theta_{0yy} = \frac{m}{6}(z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 + z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) +\\ + \frac{m}{6}(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1),\end{aligned}$$

$$\Theta_{0zz} = \frac{m}{6}(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) +$$
$$+ \frac{m}{6}(y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1).$$

Für das Massendeviationsmoment

$$\Theta_{0xy} = -\int_m xy\,dm = -\int_A xy\frac{m}{A}dA = -2m\int_{\eta=0}^{1}\{\int_{\xi=0}^{1-\eta} xy\,d\xi\}\,d\eta$$

ist das Integral

$$\int_{\eta=0}^{1}\{\int_{\xi=0}^{1-\eta}[x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta][y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta]d\xi\}\,d\eta$$

zu berechnen. Wir erhalten schließlich

$$\Theta_{0xy} = -\frac{m}{12}\{2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + x_1(y_2 + y_3) + x_2(y_3 + y_1) + x_3(y_1 + y_2)\},$$

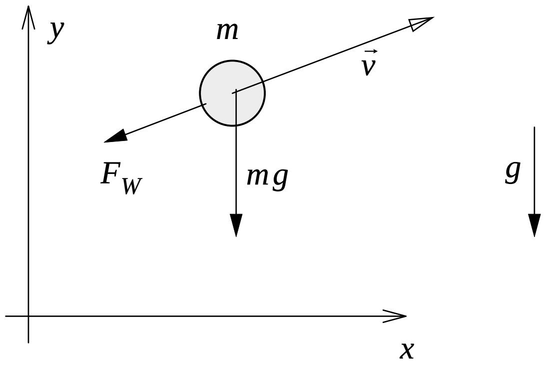
und entsprechend

$$\Theta_{0yz} = -\frac{m}{12}\{2(y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3) + y_1(z_2 + z_3) + y_2(z_3 + z_1) + y_3(z_1 + z_2)\},$$

$$\Theta_{0zx} = -\frac{m}{12}\{2(z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3) + z_1(x_2 + x_3) + z_2(x_3 + x_1) + z_3(x_1 + x_2)\}.$$

Mit diesem Ergebnis kann man den Trägheitstensor eines Körpers berechnen, der aus dünnen Scheibenpolygonen zusammengesetzt ist. Man muß dann die Polygone in Dreiecke zerlegen und schließlich die entsprechenden Teilergebnisse addieren.

Aufgabe 1



Man berechne die Wurfbewegung eines Balls (Masse m, Durchmesser d, Widerstandsbeiwert $c_W = 0.6$) in der xy-Ebene unter Berücksichtigung des Luftwiderstands

$$F_W = \frac{1}{2} c_W \rho_{\mathrm{Luft}} A_{\mathrm{S}} v^2.$$
$$(\rho_{\mathrm{Luft}} = 1.22\ \mathrm{kgm}^{-3})$$

Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - F_W \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|},$$
$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \qquad \lambda := \frac{1}{2} \frac{c_W \rho_{\mathrm{Luft}} A_{\mathrm{S}}}{\mathrm{m}}.$$

Mit

$$y_1 = x, \qquad y_2 = y, \qquad y_3 = \dot{x}, \qquad y_4 = \dot{y}$$

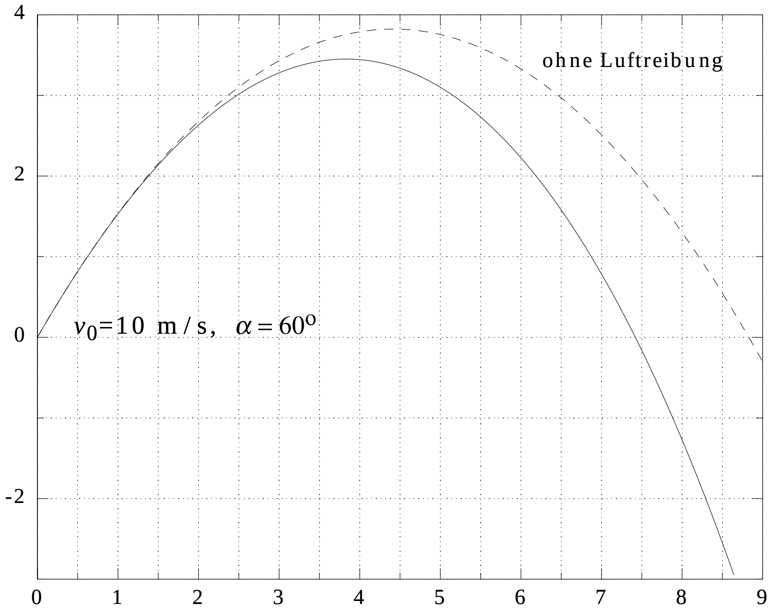
erhalten wir das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_3 \\ \dot{y}_2 &= y_4 \\ \dot{y}_3 &= -\lambda\sqrt{y_3^2 + y_4^2}\, y_3 \\ \dot{y}_4 &= -g - \lambda\sqrt{y_3^2 + y_4^2}\, y_4 \end{aligned}$$

Zahlenbeispiel:

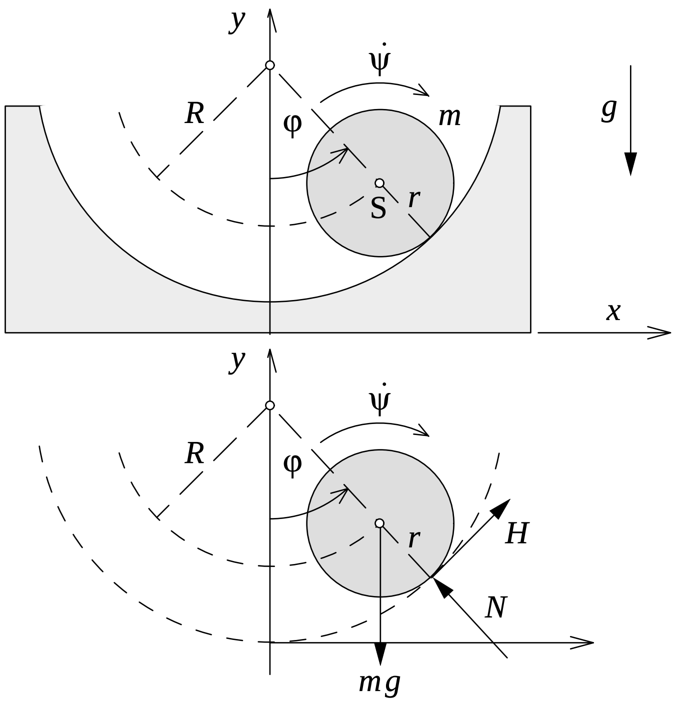
$$m = 0.5\,\mathrm{kg} \qquad d = 0.2\,\mathrm{m} \qquad A_{\mathrm{S}} = \frac{\pi}{4} d^2 = \pi \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{0.6 \cdot 1.22\,\mathrm{kgm}^{-3} \cdot \pi \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2}{0.5\,\mathrm{kg}} = 2.3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^{-1}$$



Aufgabe 2

Eine Kreisscheibe (Masse m, Radius r) rollt im Schwerkraftfeld in einer kreiszylindrischen Schale (Radius $(R+r)$). Man stelle die Bewegungsgleichung in der Koordinate φ auf und bestimme die Reaktionskräfte als Funktionen von φ. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $\varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = 0$.



Kinematische Rollbedingung:

$$r\dot{\psi} = R\dot{\varphi} \qquad \to \quad \dot{\psi} = \frac{R}{r}\dot{\varphi}.$$

Schwerpunktsatz:

$$m\vec{a}_S = -mg\vec{e}_y + H\vec{e}_\varphi - N\vec{e}_r,$$

$$\vec{a}_S = R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r, \qquad \vec{e}_y = -\cos\varphi\vec{e}_r + \sin\varphi\vec{e}_\varphi,$$

$$mR\ddot{\varphi} = H - mg\sin\varphi,$$

$$mR\dot{\varphi}^2 = N - mg\cos\varphi;$$

Momentensatz bezogen aus S:

$$\Theta_S\ddot{\psi} = -Hr, \qquad (\Theta_S = \tfrac{1}{2}mr^2, \quad \ddot{\psi} = \frac{R}{r}\ddot{\varphi})$$

$$\tfrac{1}{2}mR\ddot{\varphi} = -H;$$

Bewegungsgleichung der Kreisscheibe:

$$\tfrac{3}{2}mR\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0, \qquad \rightarrow \qquad \ddot{\varphi} + \omega_0^{\,2}\sin\varphi = 0, \qquad (\omega_0^{\,2} := \frac{2g}{3R}).$$

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \omega_0^{\,2}\sin\varphi\dot{\varphi} = 0, \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega_0^{\,2}\cos\varphi\right\} = 0,$$

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega_0^{\,2}\cos\varphi = -\omega_0^{\,2}\cos\varphi_0, \qquad \rightarrow \qquad \dot{\varphi}^2 = 2\omega_0^{\,2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Reaktionskräfte:

$$N = mg\cos\varphi + mR\dot{\varphi}^2, \qquad H = -\frac{mR}{2}\ddot{\varphi},$$

$$N = \frac{mg}{3}(7\cos\varphi - 4\cos\varphi_0), \qquad H = \frac{mg}{3}\sin\varphi.$$

Die erforderliche Haftkraft H wird für $\varphi = \varphi_0$ am größten. In dieser Lage ist

$$N = mg\cos\varphi_0,$$

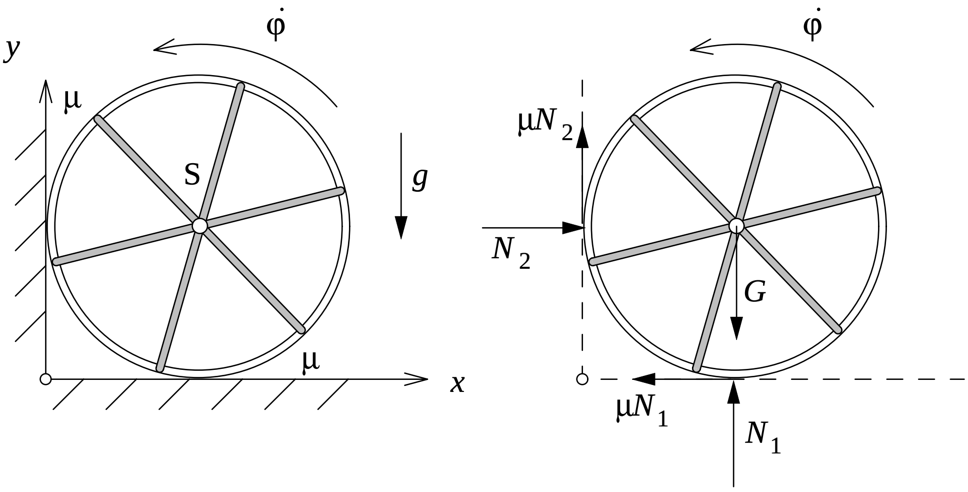
und weil $|H| \le \mu_0 N$ sein muß, wobei μ_0 der Haftreibungskoeffizient im Kontaktpunkt der Kreisscheibe ist, erhalten wir für den Anfangswinkel φ_0 die Bedingung

$$\tan\varphi_0 \le 3\mu_0.$$

Nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann die Scheibe rollen.

Aufgabe 3

Ein Rad mit 6 Speichen (Radius: R, Masse des Radkranzes: $6m$, Masse einer Speiche: m) wird mit der Winkelgeschwindigkeit ω in eine Ecke gestellt und durch Gleitreibungskräfte abgebremst. Wieviele Umdrehungen macht das Rad bis zum Stillstand, wenn der Gleitreibungskoeffizient $\mu = 0{,}2$ ist?



$$G = 12mg$$

Massenträgheitsmoment bezogen auf S:

$$\Theta_S = 6mR^2 + 6\frac{mR^2}{3} = 8mR^2.$$

Schwerpunktsatz:

$$12m\ddot{x}_S = N_2 - \mu N_1,$$
$$12m\ddot{y}_S = N_1 + \mu N_2 - 12mg;$$

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_S \equiv R, \quad y_S \equiv R; \qquad \to \qquad \ddot{x}_S \equiv 0, \quad \ddot{y}_S \equiv 0;$$

Damit folgt aus dem Schwerpunktsatz:

$$N_2 = \mu N_1, \qquad N_1 = \frac{12mg}{1+\mu^2}.$$

Momentensatz bezogen auf S:

$$\Theta_S \ddot{\varphi} = -\mu N_1 R - \mu N_2 R, \qquad \to \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{\mu+\mu^2}{1+\mu^2}\frac{g}{R},$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{9}{26}\frac{g}{R}, \qquad \dot{\varphi} = -\frac{9}{26}\frac{g}{R}t + \omega.$$

Dauer T der Drehbewegung:

$$0 = -\frac{9}{26}\frac{g}{R}T + \omega, \qquad \to \qquad T = \frac{26}{9}\frac{\omega R}{g}.$$

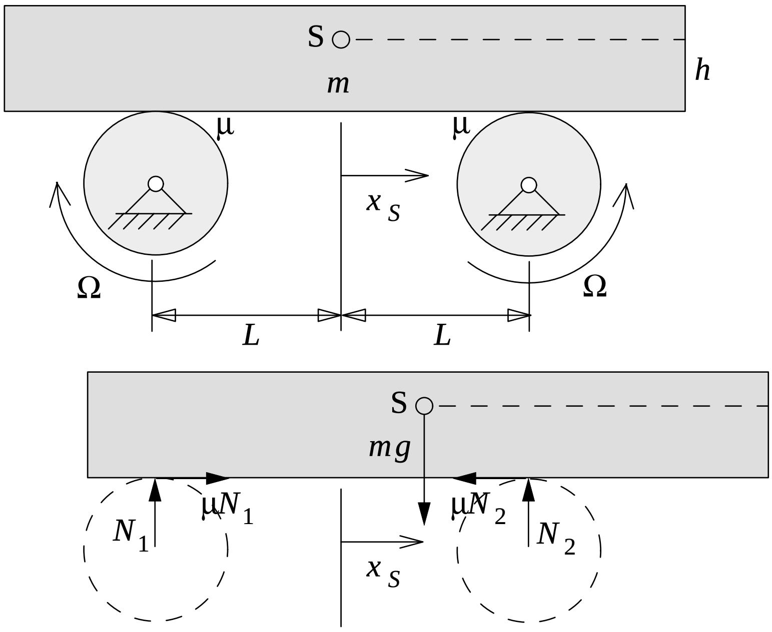
$$\varphi(t) = -\frac{9}{52}\frac{g}{R}t^2 + \omega t, \qquad \to \qquad \varphi(T) = \frac{13}{9}\frac{R\omega^2}{g}.$$

Anzahl der Umdrehungen: $U = \varphi(T)/(2\pi)$.

Aufgabe 4

Ein Körper (Masse: m) wird in der Lage $x_S(0) = b < L$ auf zwei mit großer Winkelgeschwindigkeit Ω drehende Walzen (Radius: r, Gleitreibungskoeffizient: μ) gelegt. Man berechne die Horizontalbewegung des Körpers unter den Annahmen

$$L > \mu h, \qquad r\Omega >> |\dot{x}_S|.$$



Kinematische Zwangsbedingungen für den Körper:

$$\vec{a}_S = \ddot{x}_S \vec{e}_x, \qquad \vec{\omega} \equiv \vec{0}.$$

Schwerpunkt- und Momentensatz bezogen auf S:

$$m\ddot{x}_S = \mu N_1 - \mu N_2,$$
$$0 = N_1 + N_2 - mg,$$
$$0 = \mu N_1 h - \mu N_2 h + N_2(L - x_S) - N_1(L + x_S);$$

Reaktionskräfte:

$$N_1 = \frac{mg}{2}\left(1 - \frac{x_S}{L - \mu h}\right), \qquad N_2 = \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{x_S}{L - \mu h}\right),$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}_S + \frac{\mu g}{L - \mu h} x_S = 0.$$

Allgemeine Lösung (harmonische Schwingung):

$$x_S = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t), \qquad \omega_0{}^2 := \frac{\mu g}{L - \mu h}.$$

Anfangsbedingungen:

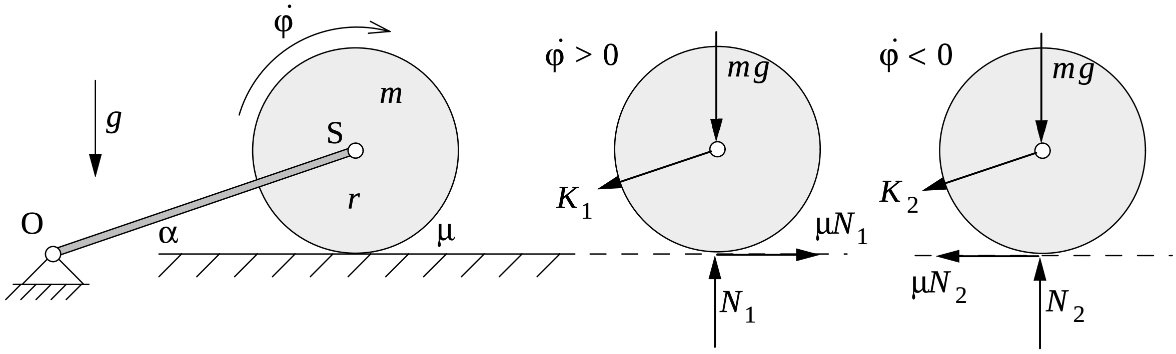
$$x_S(0) = b, \qquad \dot{x}_S = 0;$$

Spezielle Lösung:

$$x_S(t) = b\cos(\omega_0 t).$$

Aufgabe 5

Eine Kreisscheibe (Masse m, Radius r) ist mit einer Stange (Masse vernachlässigbar klein) an den Punkt O gefesselt. Vor dem Absetzen der Scheibe auf eine horizontale Ebene (Gleitreibungsziffer μ) dreht sich die Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \Omega$ um die Achse durch S. Man berechne den Abbremsvorgang.



Kinematische Zwangsbedingung:

$$\vec{a}_S \equiv \vec{0}.$$

$\dot{\varphi}(0) = \Omega > 0$:

Schwerpunktsatz:

$$0 = \mu N_1 - K_1\cos\alpha, \qquad 0 = N_1 - K_1\sin\alpha - mg; \qquad K_1 = mg\frac{\mu}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}, \qquad N_1 = mg\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

Momentensatz bezogen auf S:

$$\Theta_S\ddot{\varphi} = -\mu N_1 r, \qquad (\Theta_S = \frac{mr^2}{2})$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} = -2\mu\frac{g}{r}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

Winkelgeschwindigkeit während des Abbremsens und Dauer T_1:

$$\dot{\varphi}(t) = -2\mu\frac{g}{r}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}t + \Omega.$$

$$\dot{\varphi}(T_1) = 0, \qquad \rightarrow \qquad T_1 = \frac{\Omega r(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{2\mu g\cos\alpha}.$$

$\dot{\varphi}(0) = -\Omega$::

Schwerpunktsatz:

$$0 = -\mu N_2 - K_2 \cos\alpha, \qquad K_2 = -mg \frac{\mu}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}, \qquad N_2 = mg \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$
$$0 = N_2 - K_2 \sin\alpha - mg;$$

Momentensatz bezogen auf S:

$$\Theta_S \ddot{\varphi} = \mu N_2 r, \qquad (\Theta_S = \frac{mr^2}{2})$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} = 2\mu \frac{g}{r} \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Winkelgeschwindigkeit während des Abbremsens und Dauer T_2:

$$\dot{\varphi}(t) = 2\mu \frac{g}{r} \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} t - \Omega.$$

$$\dot{\varphi}(T_2) = 0, \qquad \rightarrow \qquad T_2 = \frac{\Omega r(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{2\mu g \cos\alpha}.$$

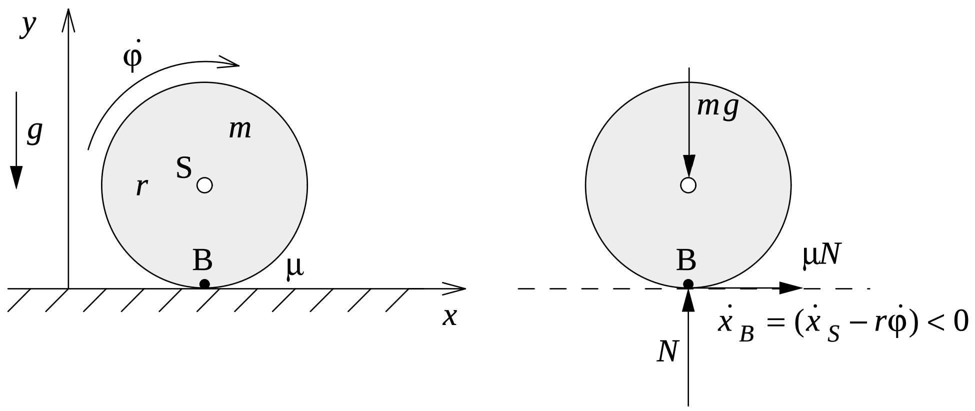
$$T_1 < T_2.$$

Aufgabe 6

Eine Kreisscheibe (Masse m, Radius r) wird im Geschwindigkeitszustand

$$\vec{v}_S(t=0) = \vec{0}, \qquad \vec{\omega}(t=0) = -\Omega\vec{e}_z, \qquad (\dot{\varphi}(0) = \Omega),$$

auf eine horizontale Bahn (Gleitreibungskoeffizient μ) gesetzt und beginnt eine Rutschbewegung. Man berechne die Dauer dieser Bewegung und den Geschwindigkeitszustand der anschließenden Rollbewegung.



Der momentane Kontaktpunkt B der Scheibe hat nach dem Aufsetzen die Geschwindigkeit

$$\dot{x}_B = (\dot{x}_S - r\dot{\varphi}) < 0,$$

deshalb ist die Gleitreibungskraft in x-Richtung orientiert. Während der Rutschbewegung hat die Scheibe zwei Freiheitsgrade, denn zwischen x_S und φ existiert keine kinematische Bedingung. Es gilt nur

$$\ddot{y}_S \equiv 0.$$

Schwerpunkt- und Momentensatz bezogen auf S:

$$m\ddot{x}_S = \mu N, \qquad \ddot{x}_S = \mu g,$$
$$m\ddot{y}_S = N - mg, \qquad 0 = N - mg,$$
$$\Theta_S \ddot{\varphi} = -\mu N r; \qquad \ddot{\varphi} = -2\mu g/r;$$

Aus den beiden Bewegungsgleichungen folgt mit den Anfangsbedingungen

$$x_S(0) = 0, \qquad \dot{x}_S(0) = 0, \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \dot{\varphi}(0) = \Omega,$$

$$\dot{x}_S(t) = \mu g t, \qquad \dot{\varphi}(t) = \Omega - \frac{2\mu g}{r} t.$$

$$\dot{x}_B(t) = \dot{x}_S(t) - r\dot{\varphi}(t) = -r\Omega + 3\mu g t.$$

$$x_S(t) = \frac{1}{2}\mu g t^2, \qquad \varphi(t) = \Omega t - \frac{\mu g}{r} t^2.$$

Dauer T der Rutschbewegung:

$$\dot{x}_B(T) = -r\Omega + 3\mu g T = 0, \qquad \rightarrow \qquad T = \frac{r\Omega}{3\mu g}.$$

Kinematischer Zustand beim Ende der Rutschbewegung:

$$\dot{x}_S(T) = \frac{1}{3} r\Omega, \qquad \dot{\varphi}(T) = \frac{1}{3}\Omega.$$

Für $t > T$ rollt die Kreisscheibe mit diesen Geschwindigkeiten ab der Lage

$$x_S(T) = \frac{1}{18}\frac{r^2\Omega^2}{\mu g}, \qquad \varphi(T) = \frac{2}{9}\frac{r\Omega^2}{\mu g}.$$

Aufgabe 7

Der Schwerpunkt S eines Körpers bewegt sich auf einer Ellipse (Halbachsen: a und b) so, daß sein Beschleunigungsvektor ständig zu einem Brennpunkt hin orientiert bleibt. In Polarkoordinaten bezogen auf den rechten Brennpunkt gilt für die Bahnkurve

$$r(\varphi) = a\,\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi}. \qquad \left(e := \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \varepsilon := e/a\right)$$

In der Lage $\varphi = 0$ habe der Schwerpunkt die Geschwindigkeit v_0. Man berechne den Beschleunigungsvektor des Schwerpunktes.

Der Ortsvektor des Schwerpunktes lautet

$$\vec{R}(t) = r(\varphi(t))\vec{e}_r(\varphi(t)).$$

Daraus folgt

$$\vec{v}_S = \dot{\vec{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \qquad \vec{a}_S = \ddot{\vec{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi.$$

Die Forderung

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \qquad \rightarrow \qquad r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0,$$

bedeutet, daß

$$r^2\dot{\varphi} = const$$

gilt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Schwerpunkt im rechten Scheitelpunkt der Ellipse und hat die Geschwindigkeit

$$\vec{v}_S(0) = (a - e)\dot{\varphi}(0)\vec{e}_\varphi(0) = v_0\vec{e}_\varphi(0).$$

Dann ist also

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{a - e}, \qquad \rightarrow \qquad r^2\dot{\varphi} = (a - e)^2\frac{v_0}{a - e} = (a - e)v_0,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{a - e}{r^2}v_0.$$

Mit

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = v_0\frac{a - e}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -v_0(a - e)\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\dot{\varphi} = v_0\frac{a - e}{r^2}\frac{d\dot{r}}{d\varphi} = -v_0{}^2\frac{(a - e)^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

wird

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - rv_0{}^2\frac{(a - e)^2}{r^4} = -v_0{}^2\frac{(a - e)^2}{r^2}\left\{\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right\}.$$

Für die Ellipse gilt

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{a}{b^2},$$

so daß wir für den Beschleunigungsvektor des Schwerpunktes erhalten:

$$\vec{a}_S = -v_0{}^2\frac{(a - e)^2 a}{b^2}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r = -v_0{}^2 a\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r.$$

Nach dem NEWTONschen Grundgesetz (Schwerpunktsatz) gilt

$$m\vec{a}_S = \vec{F},$$

also wirkt auf den Körper die zu $1/r^2$ proportionale Kraft

$$\vec{F} = -m v_0{}^2 a \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r .$$

Die von der Sonne auf einen Planeten ($m = m_{Planet}$) ausgeübte Gravitationskraft lautet

$$F = -\gamma \frac{m_{Planet} m_{Sonne}}{r^2} \vec{e}_r ,$$

$$\text{Gravitationskonstante: } \gamma = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2},$$

$$m_{Sonne} = 1.993 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Für die Bahndaten gilt

$$v_0{}^2 a \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \gamma m_{Sonne} .$$

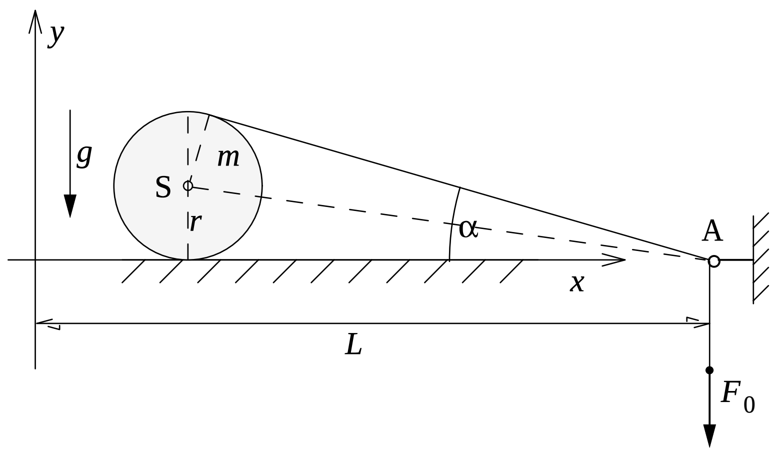
Setzt man für die Erde

$$a = 1.5 \cdot 10^{11} \text{m}, \qquad \varepsilon = 0.0167,$$

so erhält man

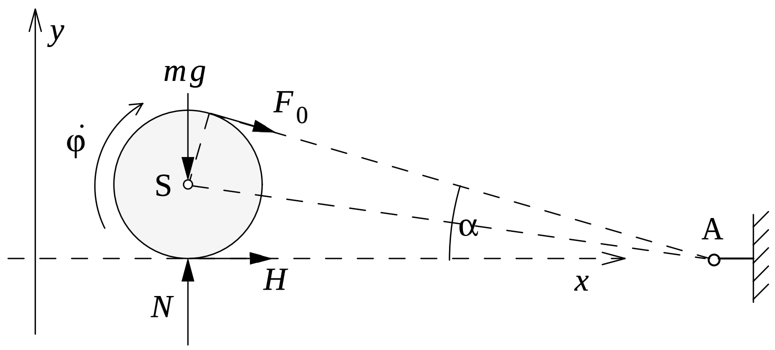
$$v_0 = 30 \text{ km/s}.$$

Aufgabe 8



Auf eine Kreisscheibe (Masse m, Radius r) ist ein Faden gewickelt, der reibungsfrei durch einen festen Ring A geführt wird und an dem mit einer konstanten Kraft F_0 gezogen wird. Man bestimme die Bewegungsgleichung der rollenden Kreisscheibe für $0 \le x_S < (L - r)$.

$$\tan(\alpha/2) = \frac{r}{L - x_S}, \qquad \alpha = 2 \arctan \frac{r}{L - x_S} .$$



Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot{x}_S = r\dot{\varphi}, \qquad \dot{y}_S \equiv 0.$$

Schwerpunkt- und Momentensatz:

$$m\ddot{x}_S = H + F_0 \cos\alpha, \qquad m\ddot{x}_S = H + F_0 \cos\alpha,$$

$$m\ddot{y}_S = N - mg - F_0 \sin\alpha, \qquad \Theta_S = \frac{1}{2} m r^2, \qquad 0 = N - mg - F_0 \sin\alpha,$$

$$\Theta_S \ddot{\varphi} = F_0 r - Hr; \qquad \tfrac{1}{2} m\ddot{x}_S = F_0 - H;$$

$$N = mg + F_0 \sin\alpha,$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{3}{2} m\ddot{x}_S = F_0(1+\cos\alpha), \qquad \ddot{x}_S = \frac{2F_0}{3m}\{1+\cos(2\arctan\frac{r}{L-x_S})\}.$$

$$H = F_0 - \frac{F_0}{3}(1+\cos\alpha) = \frac{F_0}{3}(2-\cos\alpha).$$

Numerische Lösung der Bewegungsgleichung:

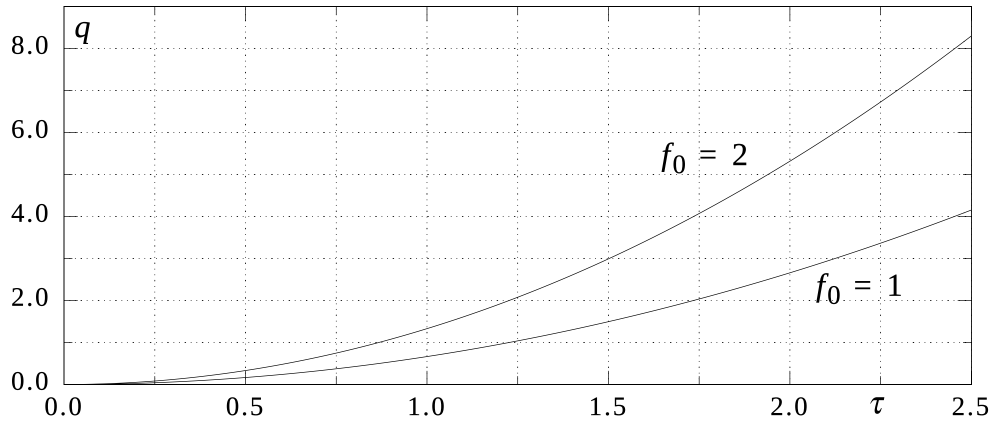
$$t =: \sqrt{\frac{r}{g}}\tau, \qquad x_S =: rq, \qquad \frac{d()}{dt} = \frac{d()}{d\tau}\sqrt{\frac{g}{r}} =: \sqrt{\frac{g}{r}}()', \qquad \ddot{x}_S = gq'',$$

$$F_0 = f_0 mg, \qquad L = \lambda r,$$

$$q'' = \frac{2}{3} f_0 \{1+\cos(2\arctan\frac{1}{\lambda - q})\}.$$

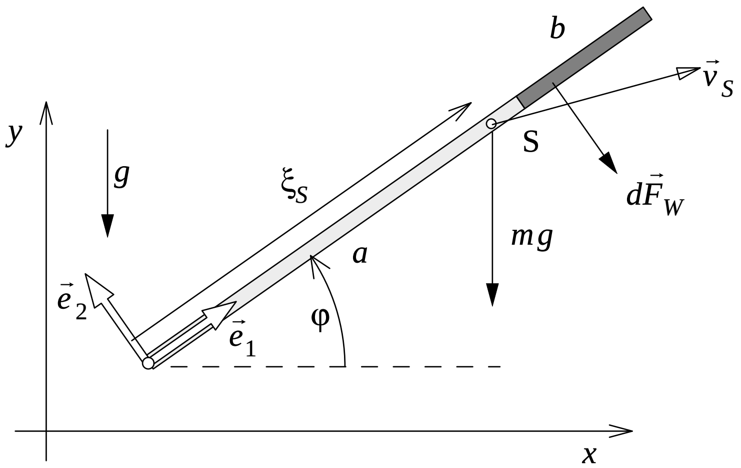
$$q_1 := q, \qquad q_2 := q', \qquad \begin{aligned} q_1' &= q_2, \\ q_2' &= \frac{2}{3} f_0 \{1+\cos(2\arctan\frac{1}{\lambda - q_1})\}. \end{aligned}$$

$$\lambda = 10, \qquad q_1(0) = 0, \qquad q_2(0) = 0.$$



Aufgabe 9

Eine Stange (Länge $(a+b)$, Kreisquerschnittradius r) besteht aus Holz (Länge a) und einer Stahlspitze (Länge b). Sie wird mit einer Neigung φ_0 und einer Geschwindigkeit v_0 in Längsrichtung abgeworfen. Man berechne die Bahn des Schwerpunktes S und den Neigungswinkel φ unter Berücksichtigung der Luftreibung.



$$\text{Holz:} \quad \rho_1 = 600\,\text{kgm}^{-3}, \qquad \text{Stahl:} \quad \rho_2 = 7800\,\text{kgm}^{-3},$$

$$a = 3\,\text{m}, \qquad b = 0.3\,\text{m}, \qquad r = 0.02\,\text{m},$$

Massengeometrische Größen:

$$m_1 = \rho_1 \pi r^2 a = 2.26\,\text{kg}, \qquad m_2 = \rho_2 \pi r^2 b = 2.94\,\text{kg}$$

$$\xi_S = \frac{m_1 a/2 + m_2(a+b/2)}{m_1 + m_2} = 2.43\,\text{m}$$

$$\Theta_S = \frac{1}{12} m_1 a^2 + m_1(\xi_S - \frac{a}{2})^2 + \frac{1}{12} m_2 b^2 + m_2(a + \frac{b}{2} - \xi_S)^2,$$

$$\Theta_S = 5.20\,\mathrm{kgm}^2.$$

Geschwindigkeitszustand der Stangenpunkte:

$$\vec{v}_S = \dot{x}_S \vec{e}_x + \dot{y}_S \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_x = \cos\varphi \vec{e}_1 - \sin\varphi \vec{e}_2, \qquad \vec{e}_y = \sin\varphi \vec{e}_1 + \cos\varphi \vec{e}_2,$$

$$\vec{v}(\xi) = \vec{v}_S + (\xi - \xi_S)\dot{\varphi}\vec{e}_2,$$

$$v_2(\xi) = \vec{v}(\xi) \cdot \vec{e}_2 = \vec{v}_S \cdot \vec{e}_2 + (\xi - \xi_S)\dot{\varphi} = v_{S2} + (\xi - \xi_S)\dot{\varphi},$$

$$\vec{v}_S \cdot \vec{e}_2 = v_{S2} = -\dot{x}_S \sin\varphi + \dot{y}_S \cos\varphi.$$

Luftwiderstandskraft auf das Stabelement $d\xi$ an der Stelle $\xi\vec{e}_1$:

$$d\vec{F}_W = -\frac{1}{2} c_W \rho_{\mathrm{Luft}} 2r d\xi v_2{}^2(\xi) \frac{v_2(\xi)}{|v_2(\xi)|} \vec{e}_2 = -\lambda |v_2(\xi)| v_2(\xi) d\xi \vec{e}_2,$$

$$\lambda := \frac{1}{2} c_W \rho_{\mathrm{Luft}} 2r,$$

$$\rho_{\mathrm{Luft}} = 1.22\,\mathrm{kgm}^{-3}, \qquad c_W = 0.8, \qquad \lambda = 0.019\,\mathrm{kgm}^{-2}.$$

Reduktion des Luftwiderstandes in den Stangenschwerpunkt S:

$$\vec{F}_W = -\lambda \int_0^L |v_2(\xi)| v_2(\xi) d\xi \vec{e}_2 = -\lambda \int_0^L |v_2(\xi)| v_2(\xi) d\xi \{-\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y\},$$

$$\vec{M}_{SW} = -\lambda \int_0^L |v_2(\xi)| v_2(\xi)(\xi - \xi_S) d\xi \vec{e}_3.$$

Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{x}_S = F_{Wx},$$
$$m\ddot{y}_S = F_{Wy} - mg,$$
$$\Theta_S \ddot{\varphi} = M_{SW}.$$

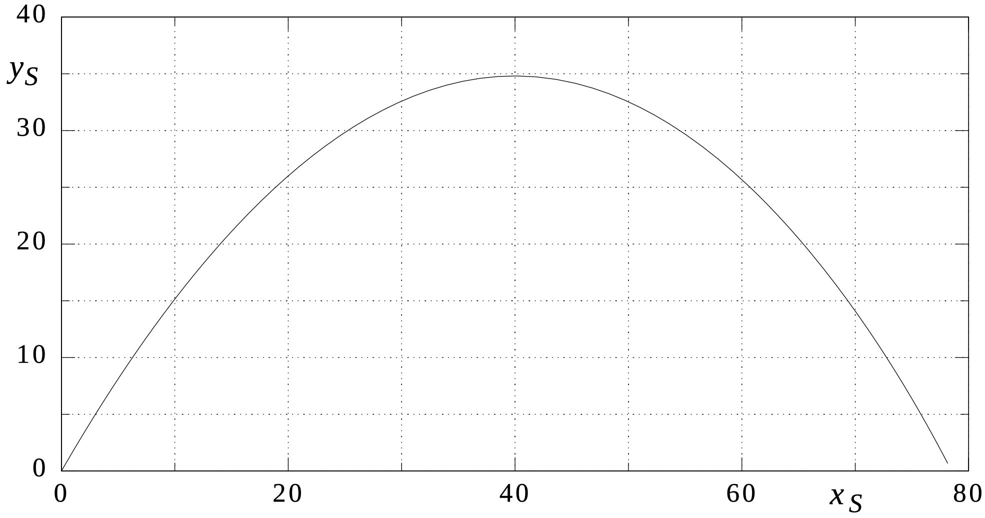
Umwandlung in ein Differentialgleichungsystem 1. Ordnung:

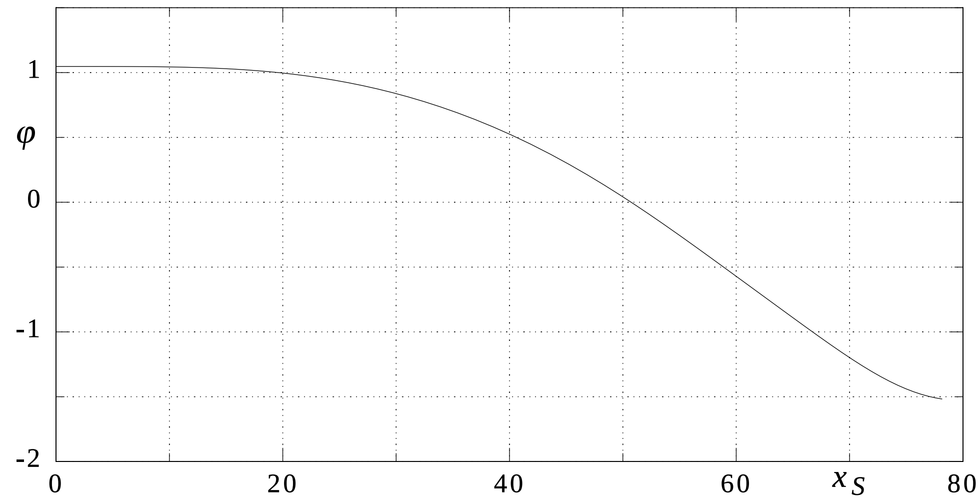
$$y_1 := x_S, \quad y_2 := y_S, \quad y_3 := \varphi, \quad y_4 := \dot{x}_S, \quad y_5 := \dot{y}_S, \quad y_6 := \dot{\varphi};$$

$$\dot{y}_1 = y_4,$$
$$\dot{y}_2 = y_5,$$
$$\dot{y}_3 = y_6,$$
$$\dot{y}_4 = F_{Wx}/m,$$
$$\dot{y}_5 = F_{Wy}/m - g,$$
$$\dot{y}_6 = M_{SW}/\Theta_S.$$

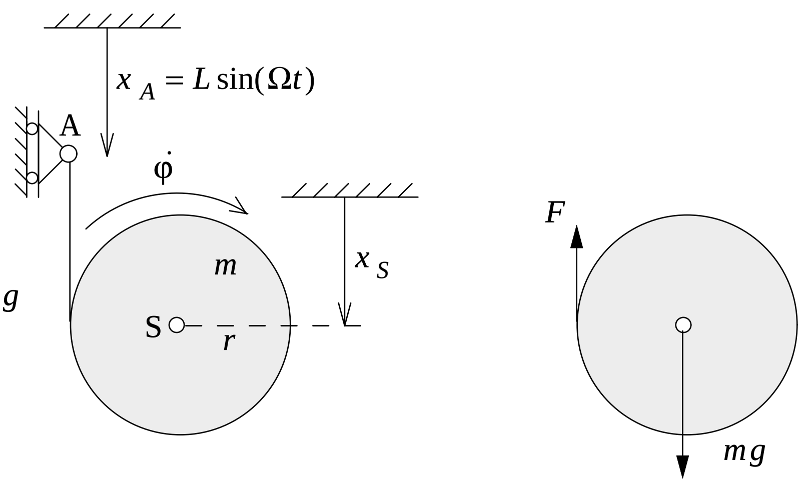
Spezielle Startwerte:

$$v_0 = 30\,\mathrm{ms}^{-1}, \qquad \varphi_0 = 60^{\circ} = 1{,}05.$$





Aufgabe 10



Auf eine Kreisscheibe (Masse m, Radius r) ist ein Faden gewickelt, dessen Endpunkt A vertikal nach dem Gesetz $x_A(t) = L\sin(\Omega t)$ bewegt wird. Man berechne die Bewegungsgleichung der Scheibe in der Koordinate x_S, die Reaktionskraft im Punkt A und die obere Grenze für die Kreisfrequenz Ω, damit der Faden unter Zugbelastung bleibt.

Kinematische Zwangsbedingung:

$$\dot{x}_S - r\dot{\varphi} = \dot{x}_A.$$

Schwerpunkt- und Momentensatz:

$$m\ddot{x}_S = mg - F, \qquad \Theta_S = \frac{1}{2}mr^2, \qquad m\ddot{x}_S = mg - F,$$

$$\Theta_S\ddot{\varphi} = Fr; \qquad \frac{1}{2}m(\ddot{x}_S - \ddot{x}_A) = F;$$

Bewegungsgleichung und Reaktionskraft im Faden:

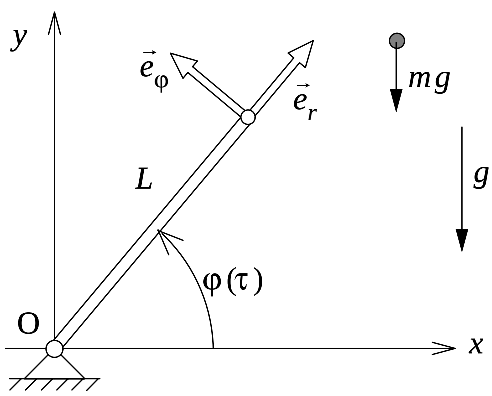
$$\ddot{x}_S = \frac{1}{3}(2g + \ddot{x}_A), \qquad F = \frac{1}{3}m(g - \ddot{x}_A).$$

$$F = \frac{1}{3}m(g + L\Omega^2\sin(\Omega t)),$$

$$F > 0 \quad \to \quad g > L\Omega^2 \quad \to \quad \Omega < \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Aufgabe 11

Aus einem Rohr der Länge L, das sich nach dem Gesetz $\varphi(\tau) = \pi/8 + (\pi/18)\sin(\Omega\tau)$ in der vertikalen xy-Ebene um den Endpunkt O dreht, werden kontinuierlich Kugeln der Masse m abgeschossen, die im Rohr die Geschwindigkeit c haben. Man berechne die Kurve, auf der zum Zeitpunkt t alle Kugeln liegen, die im Zeitintervall $0 \le \tau \le t$ abgeschossen wurden.



Lage des Rohrendpunktes zum Zeitpunkt τ:

$$\vec{r}_0(\tau) = L\vec{e}_r(\tau) = L\begin{bmatrix}\cos\varphi(\tau) \\ \sin\varphi(\tau)\end{bmatrix}.$$

Abschußgeschwindigkeit der Kugel zum Zeitpunkt τ:

$$\vec{v}_0(\tau) = c\vec{e}_r(\tau) + L\dot{\varphi}(\tau)\vec{e}_\varphi(\tau) = c\begin{bmatrix}\cos\varphi(\tau)\\ \sin\varphi(\tau)\end{bmatrix} + L\dot{\varphi}(\tau)\begin{bmatrix}-\sin\varphi(\tau)\\ \cos\varphi(\tau)\end{bmatrix}.$$

Bewegungsgleichung einer Kugel:

$$m\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{bmatrix} = m\begin{bmatrix}0\\ -g\end{bmatrix}.$$

Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_1\\ -gt + C_2\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_1 t + C_3\\ -\frac{1}{2}gt^2 + C_2 t + C_4\end{bmatrix}.$$

Für die Kugel, die zum Zeitpunkt $\tau < t$ das Rohr verläßt gilt:

$$\begin{bmatrix}C_1\\ -g\tau + C_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c\cos\varphi(\tau) - L\dot{\varphi}(\tau)\sin\varphi(\tau)\\ c\sin\varphi(\tau) + L\dot{\varphi}(\tau)\cos\varphi(\tau)\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}C_1\tau + C_3\\ -\frac{1}{2}g\tau^2 + C_2\tau + C_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}L\cos\varphi(\tau)\\ L\sin\varphi(\tau)\end{bmatrix};$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
C_1 &= c\cos\varphi(\tau) - L\dot{\varphi}(\tau)\sin\varphi(\tau),\\
C_2 &= g\tau + c\sin\varphi(\tau) + L\dot{\varphi}(\tau)\cos\varphi(\tau),\\
C_3 &= L\cos\varphi(\tau) - C_1\tau,\\
C_4 &= L\sin\varphi(\tau) + \tfrac{1}{2}g\tau^2 - C_2\tau.
\end{aligned}$$

Die zum Zeitpunkt $\tau < t$ abgeschossene Kugel hat zum Zeitpunkt t den Ortsvektor:

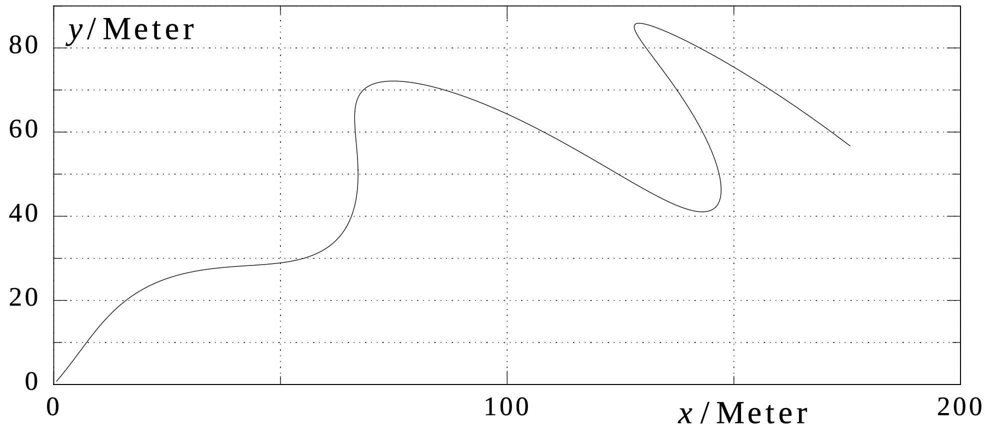
$$\vec{r}(t;\tau) = \begin{bmatrix}L\cos\varphi(\tau) + \{c\cos\varphi(\tau) - L\dot{\varphi}(\tau)\sin\varphi(\tau)\}(t-\tau)\\ L\sin\varphi(\tau) + \{c\sin\varphi(\tau) + L\dot{\varphi}(\tau)\cos\varphi(\tau)\}(t-\tau) - \frac{1}{2}g(t-\tau)^2\end{bmatrix}.$$

Faßt man zu einem bestimmten Zeitpunkt t die Abwurfzeit $\tau < t$ als Kurvenparameter auf, so erhält man eine Kurve, auf der alle Kugeln momentan liegen, die im Zeitintervall $0 \le \tau \le t$ abgeschossen wurden.

Mit den speziellen Werten

$$L = 1\,\text{m}, \qquad c = 50\,\text{m/s}, \qquad \Omega = 3/\text{s}, \qquad t = 5\,\text{s}$$

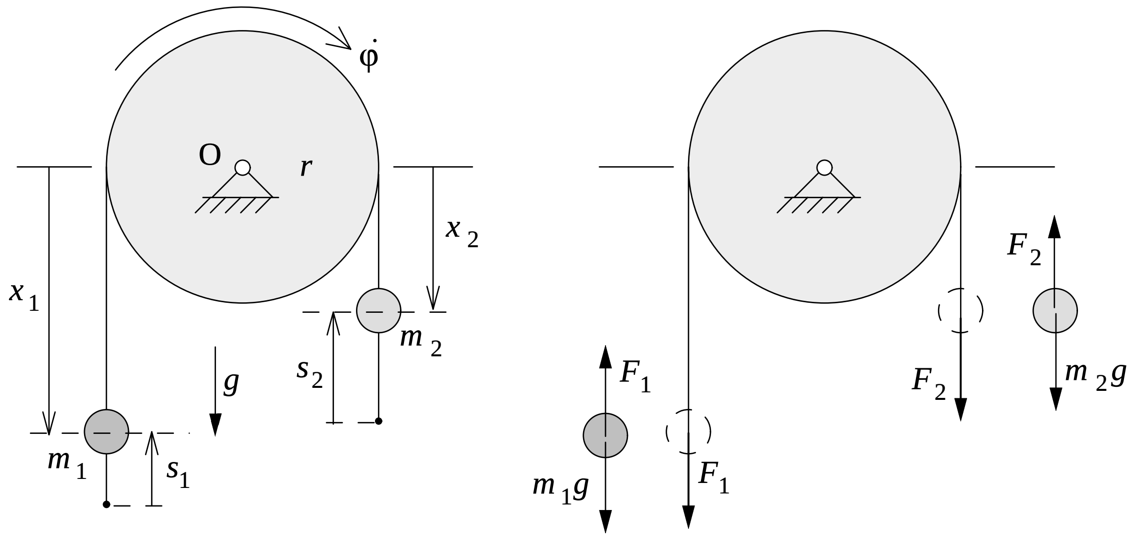
erhalten wir die folgende Kurve



y / Meter
80
60
40
20
0
0
100
x / Meter
200

Aufgabe 1

Zwei Turner (Massen m_1, m_2) klettern an einem Seil, das über eine drehbare Kreisscheibe (Trägheitsmoment Θ_0) geführt wird und nicht rutschen soll. Man berechne die Bewegungsgesetze $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Turner, wenn die Klettergesetze $s_1(t)$ und $s_2(t)$ gegeben sind.



Es sei

$$s_1(0) = s_2(0) = 0, \qquad \dot s_1(0) = \dot s_2(0) = 0, \qquad \varphi(0) = 0, \quad \dot\varphi(0) = 0.$$

$$x_1(0) = x_2(0) = L.$$

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot x_1 = -r\dot\varphi - \dot s_1, \qquad \dot x_2 = r\dot\varphi - \dot s_2.$$

Schwerpunkt- und Momentensatz für die freigeschnittenen Körper:

$$\begin{aligned} m_1\ddot x_1 &= m_1 g - F_1, & & m_1(r\ddot\varphi + \ddot s_1) = -m_1 g + F_1,\\ m_2\ddot x_2 &= m_2 g - F_2, & \rightarrow \quad & m_2(r\ddot\varphi - \ddot s_2) = m_2 g - F_2,\\ \Theta_0\ddot\varphi &= rF_2 - rF_1; & & \Theta_0\ddot\varphi / r = F_2 - F_1. \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot\varphi = \frac{(m_2 - m_1)g + m_2\ddot s_2 - m_1\ddot s_1}{r(m_1 + m_2 + \Theta_0/r^2)}.$$

Lösung der Bewegungsgleichung:

$$\dot\varphi(t) = \frac{(m_2 - m_1)gt + m_2\dot s_2(t) - m_1\dot s_1(t)}{r(m_1 + m_2 + \Theta_0/r^2)},$$

$$\varphi(t) = \frac{\frac{1}{2}(m_2 - m_1)gt^2 + m_2 s_2(t) - m_1 s_1(t)}{r(m_1 + m_2 + \Theta_0/r^2)},$$

$$x_1(t) = L - r\varphi(t) - s_1(t), \qquad x_2(t) = L + r\varphi(t) - s_2(t).$$

Spezialfall:

$$m_1 = m_2 = m, \qquad \Theta_0 = \tfrac{1}{2} m r^2, \qquad \dot{s}_2 \equiv 0,$$

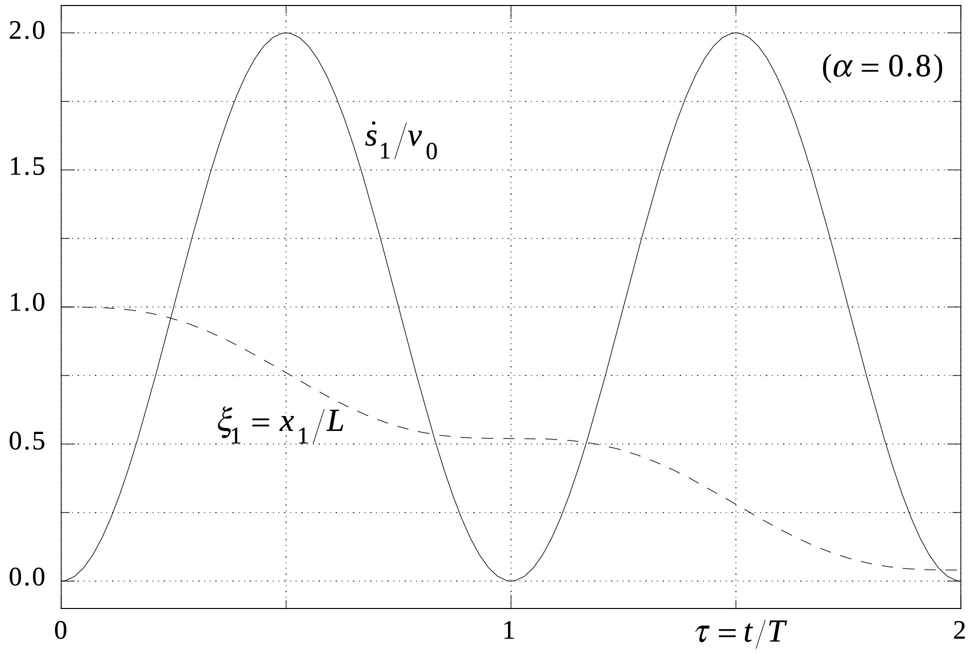
$$\varphi(t) = -\frac{2 s_1(t)}{5r},$$

$$x_1(t) = L - \frac{3 s_1(t)}{5}, \qquad x_2(t) = L - \frac{2 s_1(t)}{5};$$

$$\dot{s}_1(t) = v_0 \{1 - \cos(2\pi \frac{t}{T})\}, \qquad s_1(t) = v_0 \{t - \frac{T}{2\pi} \sin(2\pi \frac{t}{T})\};$$

$$\xi_1 := \frac{x_1}{L}, \quad \xi_2 := \frac{x_2}{L}, \quad \tau := \frac{t}{T}, \quad \alpha := \frac{v_0 T}{L};$$

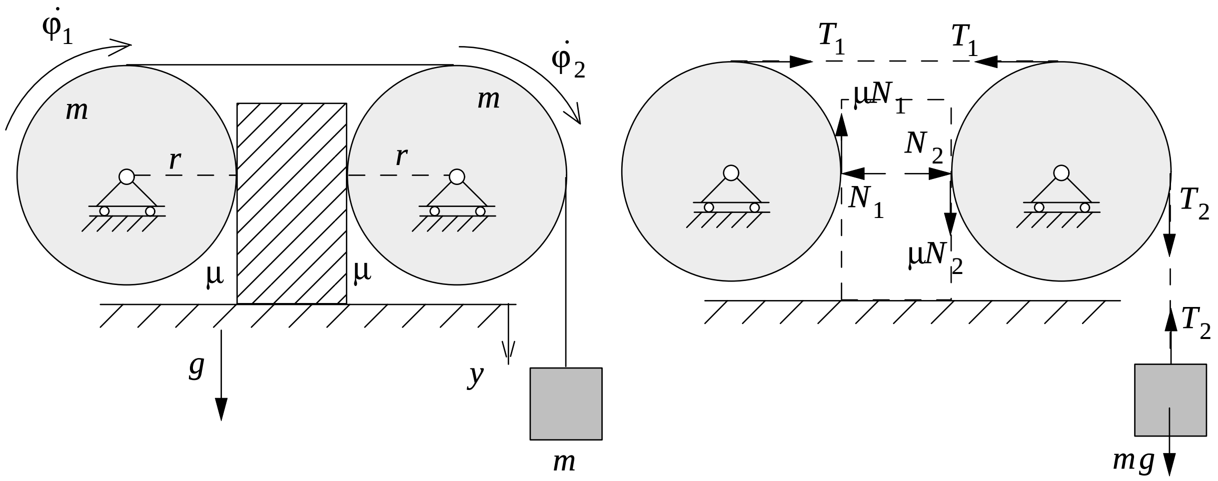
$$\xi_1(t) = 1 - \frac{3}{5}\alpha\{\tau - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi\tau)\}, \qquad \xi_2(t) = 1 - \frac{2}{5}\alpha\{\tau - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi\tau)\}.$$



$(\alpha = 0.1)$

Aufgabe 2

Zwei Kreisscheiben (Masse m, Radius r) sind auf horizontal beweglichen Auflagern drehbar gelagert. An einem Seil, das auf die linke Kreisscheibe gewickelt ist und über die rechte Kreisscheibe geführt wird, hängt eine Masse m. Die beiden Kreisscheiben haben Reibungskontakt (Gleitreibungsziffer μ) mit einem unbeweglichen Körper. Man berechne die Beschleunigung $\ddot{y}$ der Masse m.



Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot{y} = r\dot{\varphi}_2, \quad r\dot{\varphi}_1 = r\dot{\varphi}_2.$$

Die Schwerpunkte der Kreisscheiben sind horizontal und vertikal unbeweglich:

$$\ddot{x}_{S_1} = 0, \qquad \ddot{x}_{S_2} = 0.$$

Schwerpunkt- und Momentensatz für die drei Körper des Systems:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_{S_1} &= -N_1 + T_1, & && 0 &= -N_1 + T_1,\\
\Theta_{S_1}\ddot{\varphi}_1 &= T_1 r - \mu N_1 r, & && \tfrac{1}{2} m\ddot{y} &= T_1 - \mu N_1,\\
m\ddot{x}_{S_2} &= N_2 - T_1, & \rightarrow && 0 &= N_2 - T_1,\\
\Theta_{S_2}\ddot{\varphi}_2 &= T_2 r - T_1 r - \mu N_2 r, & && \tfrac{1}{2} m\ddot{y} &= T_2 - T_1 - \mu N_2,\\
m\ddot{y} &= mg - T_2; & && m\ddot{y} &= mg - T_2;
\end{aligned}$$

daraus folgt:

$$N_1 = N_2 = T_1, \qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2} m\ddot{y} &= (1-\mu)T_1,\\ \tfrac{3}{2} m\ddot{y} &= mg - (1+\mu)T_1, \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{y} = \frac{1-\mu}{2-\mu} g.$$

Reaktionskräfte:

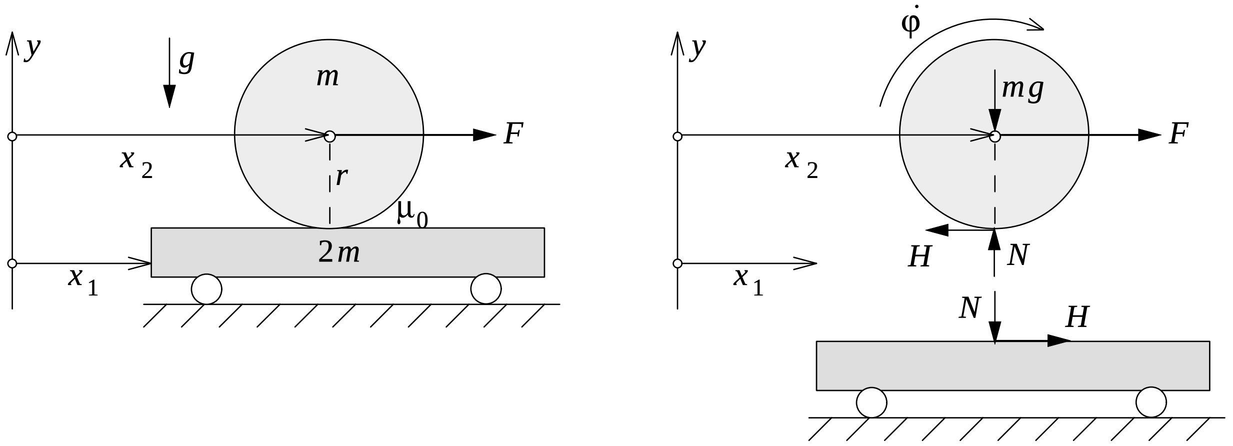
$$T_1 = \frac{1}{4-2\mu} mg, \qquad T_2 = 2T_1.$$

Aufgabe 3

Ein Rad (Masse m, Radius r) soll von einer Kraft F auf einem Wagen (Masse $2m$, Länge L) rollend bewegt werden. Man berechne den erforderlichen Haftreibungskoeffizienten und die Zeit T, in der das Rad vom linken bis zum rechten Wagen-ende rollt, wenn

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

als Anfangsbedingungen gegeben sind.



Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + r\dot{\varphi}, \qquad \dot{y}_2 \equiv 0.$$

Schwerpunkt- und Momentensatz für die beiden Körper:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x}_1 &= H, \\ m\ddot{x}_2 &= -H + F, \\ m\ddot{y}_2 &= N - mg, \\ \Theta_S\ddot{\varphi} &= Hr; \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} 2m\ddot{x}_1 &= H, \\ m\ddot{x}_2 &= -H + F, \\ 0 &= N - mg, \\ \tfrac{1}{2}mr^2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)/r &= Hr; \end{aligned}$$

$$N = mg, \qquad \begin{aligned} m(2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= F, \\ \tfrac{1}{2}m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) - 2m\ddot{x}_1 &= 0; \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{x}_1 = \frac{F}{7m}, \qquad \ddot{x}_2 = \frac{5F}{7m}.$$

Haftkraft:

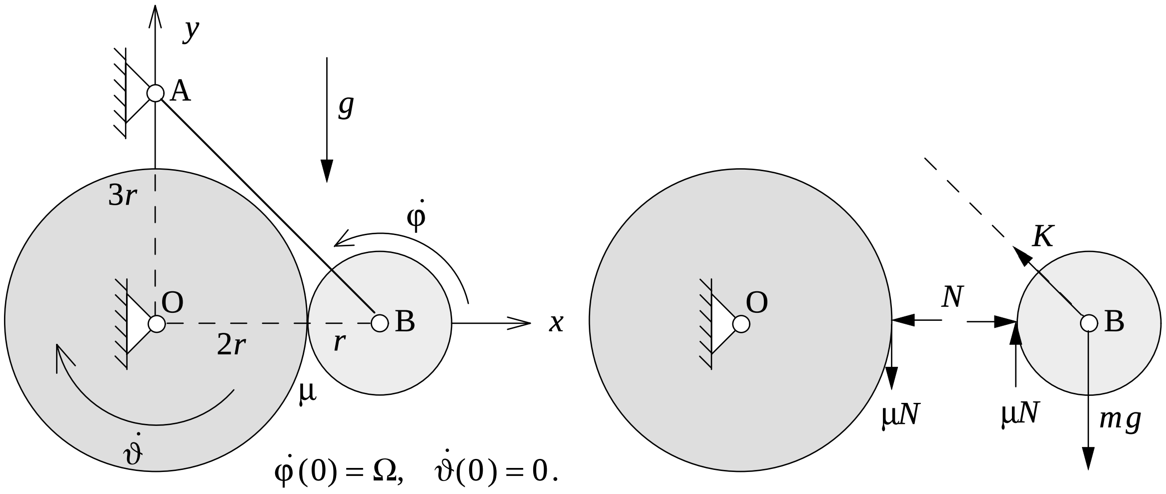
$$H = \frac{2}{7}F, \qquad |H| \le \mu_0 N, \qquad \rightarrow \qquad \frac{2}{7}F \le \mu_0 mg, \qquad \mu_0 \ge \frac{2F}{7mg}.$$

Lage des Rades auf dem Wagen:

$$d := x_2 - x_1, \qquad \ddot{d} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{4F}{7m}, \qquad \dot{d} = \frac{4F}{7m}t, \qquad d = \frac{2F}{7m}t^2.$$

$$d(T) = L \qquad \rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{7mL}{2F}}.$$

Aufgabe 4



Eine Kreisscheibe (Masse m, Radius r) ist im Endpunkt B einer masselosen Stange AB drehbar gelagert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird sie mit der Winkelgeschwindigkeit Ω auf eine ruhende, im Punkt O drehbar gelagerte Kreisscheibe (Masse $2m$, Radius $2r$) gesetzt. Durch die Gleitreibungskraft im Kontaktpunkt wird die kleine Kreisscheibe gebremst und die große in Drehbewegung versetzt. Man berechne die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Scheiben und den Energieverlust durch Gleitreibung.

Der Schwerpunkt B der kleinen Kreisscheibe bewegt sich nicht. Deshalb gilt

$$N - \frac{K}{\sqrt{2}} = 0, \qquad \mu N + \frac{K}{\sqrt{2}} - mg = 0; \qquad N = \frac{mg}{1+\mu}, \qquad K = \sqrt{2}N.$$

Bewegungsgleichungen der beiden Kreisscheiben:

$$\Theta_B \ddot{\varphi} = -\mu N r, \qquad \Theta_0 \ddot{\vartheta} = \mu N\, 2r;$$

$$\Theta_B = \frac{1}{2} m r^2, \qquad \Theta_0 = \frac{1}{2} 2m(2r)^2 = 4mr^2;$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\mu}{1+\mu}\frac{g}{r}, \qquad \ddot{\vartheta} = \frac{1}{2}\frac{\mu}{1+\mu}\frac{g}{r};$$

Winkelgeschwindigkeiten während der Gleitbewegung:

$$\dot{\varphi} = \Omega - \frac{2\mu}{1+\mu}\frac{g}{r}t, \qquad \dot{\vartheta} = \frac{1}{2}\frac{\mu}{1+\mu}\frac{g}{r}t.$$

Die Gleitbewegung endet zum Zeitpunkt T, wenn

$$2r\dot{\vartheta}(T) = r\dot{\varphi}(T)$$

ist, also für

$$T = \frac{1+\mu}{3\mu}\frac{\Omega r}{g}.$$

Danach drehen sich die Scheiben mit den Winkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\varphi}(T) = \frac{\Omega}{3}, \qquad \dot{\vartheta}(T) = \frac{\Omega}{6}.$$

Energieverlust:

$$\Delta E_{kin} = E_{kin}(T) - E_{kin}(0),$$

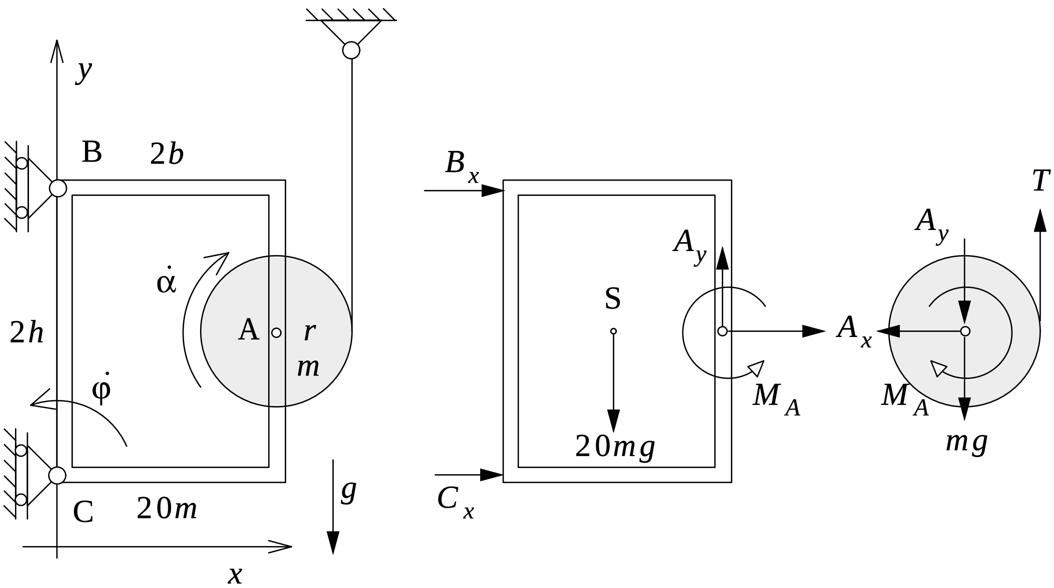
$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}(\Theta_0\dot{\vartheta}^2 + \Theta_A\dot{\varphi}^2)\Big|_{t=T} - \frac{1}{2}(\Theta_0\dot{\vartheta}^2 + \Theta_A\dot{\varphi}^2)\Big|_{t=0},$$

$$\Delta E_{kin} = -\frac{1}{6}mr^2\Omega^2.$$

Der Energieverlust entspricht der Arbeit W der Gleitreibungskräfte an den beiden Kreisscheiben:

$$W = \int_0^T -\mu N r\dot{\varphi}dt + \int_0^T \mu N\, 2r\dot{\vartheta}dt = \mu N r\int_0^T (\frac{3\mu}{1+\mu}\frac{g}{r}t - \Omega)dt = -Nr\frac{1+\mu}{6}\frac{r\Omega^2}{g} = -\frac{1}{6}mr^2\Omega^2.$$

Aufgabe 5



Ein starrer Rahmen (Masse $20m$) wird über eine Seilscheibe (Masse m, Radius r), auf die ein Motor das Antriebsmoment M_A überträgt, in vertikaler Richtung bewegt. Man bestimme die Bewegungsgleichung sowie die Lagerkräfte in den Punkten A, B und C.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot{x}_A = 0, \qquad \dot{y}_A = r\dot{\alpha}, \qquad \dot{\varphi} = 0, \qquad \dot{x}_S = 0, \qquad \dot{y}_S = \dot{y}_A.$$

Schwerpunkt und Momentensatz für den Rahmen:

$$\begin{aligned} 20m\ddot{x}_S &= A_x + B_x + C_x, & 0 &= A_x + B_x + C_x,\\ 20m\ddot{y}_S &= -20mg + A_y, \quad \rightarrow & 20m\ddot{y}_A &= -20mg + A_y,\\ \Theta_S\ddot{\varphi} &= A_y b - B_x h + C_x h + M_A; & 0 &= A_y b - B_x h + C_x h + M_A; \end{aligned}$$

Schwerpunkt und Momentensatz für die Seilscheibe:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_A &= -A_x, & 0 &= -A_x,\\ m\ddot{y}_A &= -mg - A_y + T, \quad \rightarrow & m\ddot{y}_A &= -mg - A_y + T,\\ \Theta_A\ddot{\alpha} &= M_A - Tr; & \Theta_A \ddot{y}_A/r &= M_A - Tr; \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung:

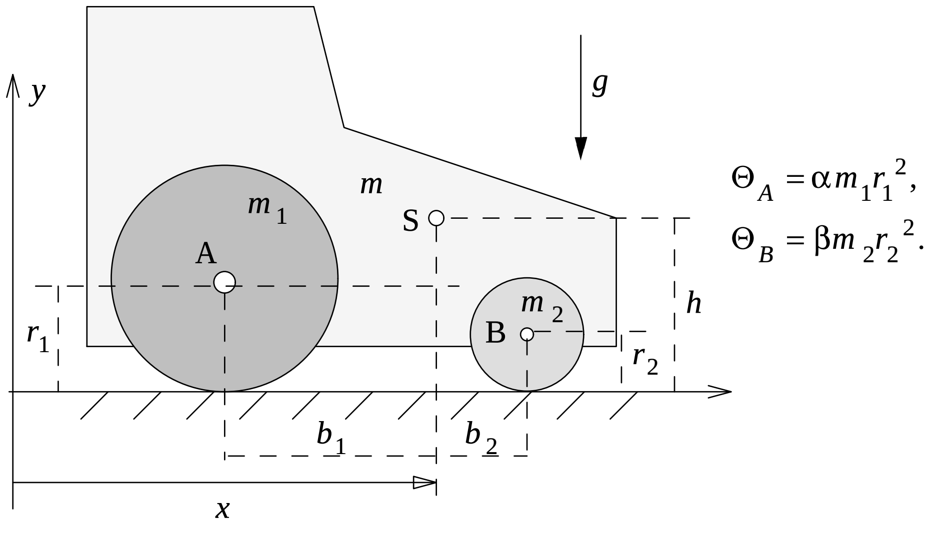
$$(21m + \frac{\Theta_A}{r^2})\ddot{y}_A = -21mg + \frac{M_A}{r}, \qquad \ddot{y}_A = -\frac{42}{43}g + \frac{2}{43}\frac{M_A}{mr}.$$

Reaktionskräfte:

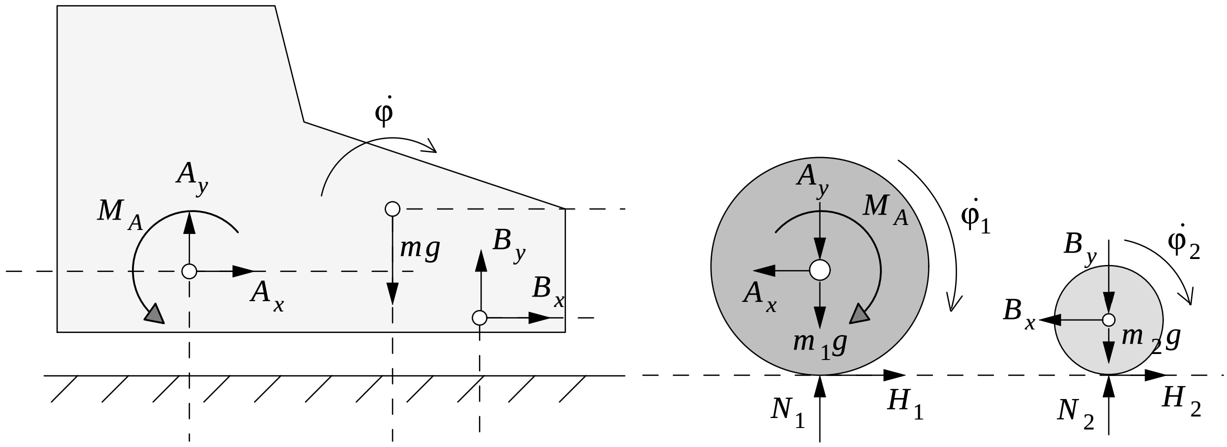
$$T = \frac{21}{43}mg + \frac{42}{43}\frac{M_A}{r},$$

$$A_x = 0, \qquad A_y = \frac{20}{43}mg + \frac{40}{43}\frac{M_A}{r}, \qquad B_x = \frac{A_y b + M_A}{2h}, \qquad C_x = -B_x.$$

Aufgabe 6



Ein Fahrzeug (Masse ohne Räder: m, Hinterradpaar: Masse m_1, Trägheitsmoment Θ_A, Vorderradpaar: Masse m_2, Trägheitsmoment Θ_B) wird durch ein auf das Hinterradpaar wirkendes Moment M_A angetrieben. Man berechne die Bewegungsgleichung für die Koordinate x sowie die inneren und äußeren Reaktionskräfte, wenn die Räder rollen.



Im Freikörperbild sind die eingetragenen Kräfte die in der Symmetrieebene des Fahrzeugs liegenden Resultierenden der auf die einzelnen Räder der Radpaare wirkenden Kräfte; die Kräfte auf ein Rad sind also jeweils nur halb so groß wie die dargestellten Kräfte.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot{x}_A = \dot{x}, \quad \dot{x}_S =: \dot{x}, \quad \dot{x}_B = \dot{x}, \quad \dot{y}_A = 0, \quad \dot{y}_S = 0, \quad \dot{y}_B = 0,$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{x}}{r_1}, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}}{r_2}.$$

Schwerpunkt- und Momentensatzgleichungen mit diesen Bedingungen:

$$m\ddot{x} = A_x + B_x,$$
$$m_1\ddot{x} = -A_x + H_1,$$
$$\Theta_A \frac{\ddot{x}}{r_1} = M_A - H_1 r_1,$$
$$m_2\ddot{x} = -B_x + H_2,$$
$$\Theta_B \frac{\ddot{x}}{r_2} = -H_2 r_2;$$

$$\rightarrow$$

$$(m + m_1 + \frac{\Theta_A}{r_1^2} + m_2 + \frac{\Theta_B}{r_2^2})\ddot{x} = \frac{M_A}{r_1},$$

$$m^* := m + m_1 + \frac{\Theta_A}{r_1^2} + m_2 + \frac{\Theta_B}{r_2^2} = m + (1+\alpha)m_1 + (1+\beta)m_2,$$

$$\ddot{x} = \frac{M_A}{r_1 m^*} \qquad \text{(Bewegungsgleichung)}$$

$$0 = A_y + B_y - mg,$$
$$0 = M_A - A_x(h - r_1) - B_x(h - r_2) + A_y b_1 - B_y b_2,$$
$$0 = N_1 - A_y - m_1 g,$$
$$0 = N_2 - B_y - m_2 g.$$

Reaktionskräfte:

$$H_1 = \frac{M_A}{r_1}(1 - \alpha\frac{m_1}{m^*}), \qquad H_2 = -\frac{M_A}{r_1}\beta\frac{m_2}{m^*},$$

$$A_x = \frac{M_A}{r_1}\{1 - (1+\alpha)\frac{m_1}{m^*}\}, \qquad B_x = \frac{M_A}{r_1}(1+\beta)\frac{m_2}{m^*},$$

$$A_y = \frac{mgb_2 - M_A + A_x(h - r_1) + B_x(h - r_2)}{b_1 + b_2}, \quad B_y = \frac{mgb_1 + M_A - A_x(h - r_1) - B_x(h - r_2)}{b_1 + b_2},$$

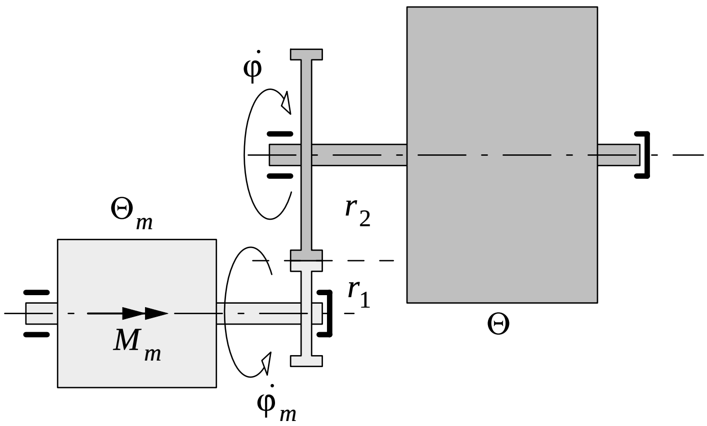
$$N_1 = m_1 g + A_y, \qquad N_2 = m_2 g + B_y.$$

Die Räder können nur dann rollen, wenn die Bedingungen

$$N_1 > 0, \qquad N_2 > 0, \qquad |H_1| < \mu_0 N_1, \qquad |H_2| < \mu_0 N_2$$

erfüllt sind.

Aufgabe 7



Ein Gleichstrommotor (Trägheitsmoment Θ_m) treibt über eine Zahnradübersetzung eine Maschine (Trägheitsmoment Θ) an. Man berechne den Antriebsvorgang, wenn die Drehbewegungen von Motor und Maschine jeweils geschwindigkeitsproportional gedämpft sind.

Der in der Ankerwicklung des Motors fließende Strom I_A erzeugt das auf den Anker wirkende Moment

$$M_m = \psi I_A.$$

Wenn sich der Motor mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_m$ dreht, wird in der Ankerwicklung die Spannung $\psi\dot{\varphi}_m$ induziert. Ist R_A der elektrische Widerstand und L_A die Induktivität der Ankerwicklung, so gilt mit der an die Klemmen des Motors angelegten Spannung U_A

$$L_A \dot{I}_A + R_A I_A = U_A - \psi\dot{\varphi}_m.$$

Die Winkelgeschwindigkeiten von Motor und Maschine sind über die kinematische Zwangsbedingung

$$r_1\dot{\varphi}_m = r_2\dot{\varphi} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\varphi}_m = \frac{r_2}{r_1}\dot{\varphi} =: \eta\dot{\varphi}$$

miteinander verknüpft; η ist das Übersetzungsverhältnis.

In den Momentensatzgleichungen für den Motor und die Maschine

$$\Theta_m \ddot{\varphi}_m = M_m - b_m \dot{\varphi}_m - Kr_1,$$
$$\Theta \ddot{\varphi} = -b\dot{\varphi} + Kr_2,$$

ist K die zwischen den Zahnrädern in Umfangsrichtung wirkende innere Reaktionskraft; b_m und b sind die Dämpfungskonstanten der geschwindigkeitsproportionalen Rotationsdämpfungen. Nach Elimination der Reaktionskraft K erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\Theta^* \ddot{\varphi} + b^* \dot{\varphi} = \eta M_m,$$
$$\Theta^* := \Theta + \eta^2 \Theta_m, \qquad b^* := b + \eta^2 b_m.$$

Wir setzen

$$\dot{\varphi} =: \omega$$

und erhalten schließlich das lineare Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für I_A und ω:

$$\Theta^* \dot{\omega} + b^* \omega - \eta \psi I_A = 0,$$
$$\eta \psi \omega + L_A \dot{I}_A + R_A I_A = U_A.$$

Mit

$$y_1 := \omega, \qquad y_2 := I_A$$

wird

$$\dot{y}_1 = -\frac{b^*}{\Theta^*} y_1 + \frac{\eta\psi}{\Theta^*} y_2,$$
$$\dot{y}_2 = -\frac{\eta\psi}{L_A} y_1 - \frac{R_A}{L_A} y_2 + \frac{U_A}{L_A}.$$

Setzen wir für die elektrischen Größen

$$U_A = 100\,\mathrm{V}, \qquad R_A = 50\,\Omega = 50\,\mathrm{V/A}, \qquad L_A = 0.5\,\mathrm{Vs/A}, \qquad \psi = 10^{-2}\,\mathrm{Vs},$$

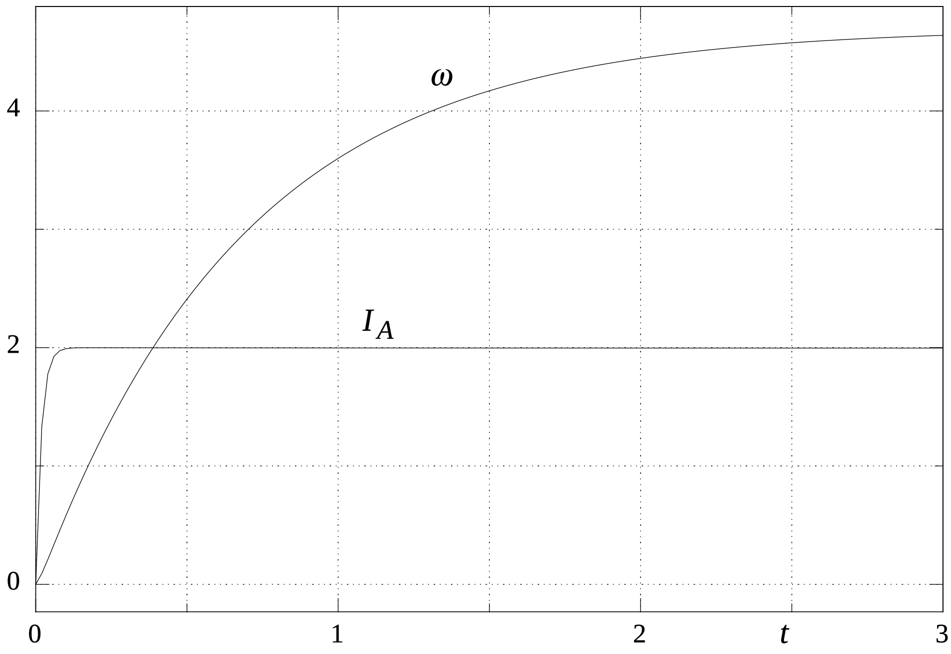
und für die mechanischen Größen

$$\Theta_m = 10^{-4}\,\mathrm{kgm}^2, \qquad \Theta = 10^{-2}\,\mathrm{kgm}^2, \qquad \eta = 4, \qquad b_m = b = 10^{-3}\,\mathrm{Nms},$$

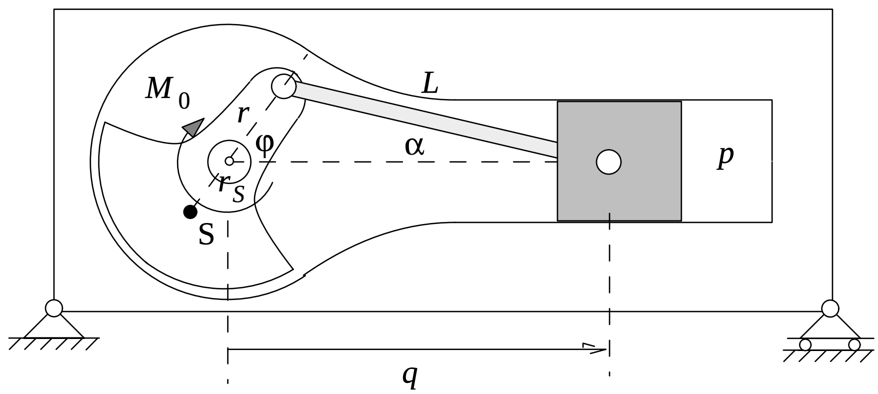
so ergibt sich zu den Anfangsbedingungen

$$y_1(0) = 0, \qquad y_2(0) = 0$$

die in den folgenden Abbildungen dargestellte Lösung.



Aufgabe 8



Für den Kolbenmotor (Abtriebsmoment M_0, Zylinderdruck p) berechne man die Bewegungsgleichung sowie die inneren und äußeren Reaktionskräfte.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$r\sin\varphi = L\sin\alpha, \qquad \rightarrow \qquad \sin\alpha = \lambda\sin\varphi, \qquad \lambda := \frac{r}{L}.$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-(\lambda\sin\varphi)^2}.$$

$$\frac{d\sin\alpha}{d\varphi} = \cos\alpha\frac{d\alpha}{d\varphi} = \lambda\cos\varphi, \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\alpha}{d\varphi} = \lambda\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha} =: f_1(\varphi).$$

$$f_2(\varphi) := \frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} = \lambda\frac{\sin\alpha\cos\varphi\ f_1(\varphi) - \cos\alpha\sin\varphi}{\cos^2\alpha}.$$

$$\dot\alpha = f_1\dot\varphi, \qquad \ddot\alpha = f_1\ddot\varphi + f_2\dot\varphi^2.$$

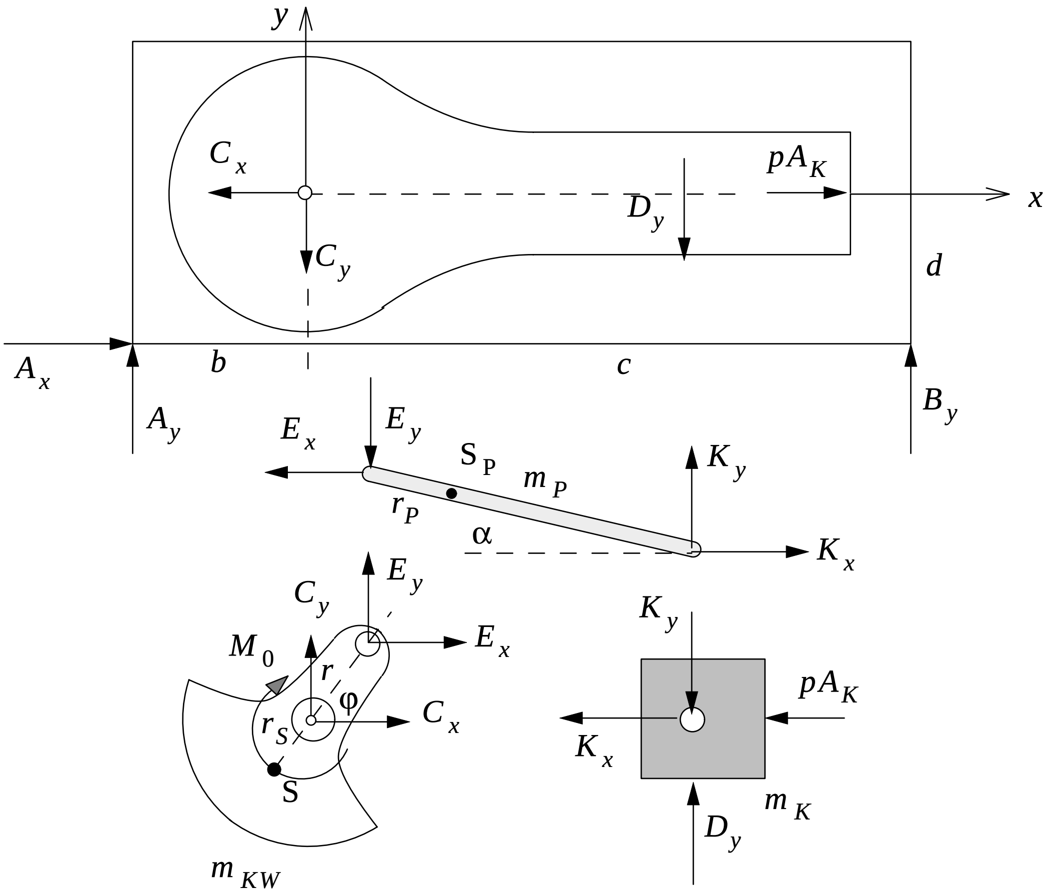
$$q = r\cos\varphi + L\cos\alpha,$$

$$\dot{q} = -(r\sin\varphi + L\sin\alpha\, f_1(\varphi))\dot{\varphi} = -r\sin\varphi(1 + f_1(\varphi))\dot{\varphi},$$

$$k_1(\varphi) := -r\sin\varphi(1 + f_1(\varphi)),$$

$$k_2(\varphi) := \frac{dk_1(\varphi)}{d\varphi} = -r(\cos\varphi + f_1(\varphi)\cos\varphi + f_2(\varphi)\sin\varphi),$$

$$\dot{q} = k_1\dot{\varphi}, \qquad \ddot{q} = k_1\ddot{\varphi} + k_2\dot{\varphi}^2.$$



$$x_S = -r_S\cos\varphi, \qquad \dot{x}_S = r_S\sin\varphi\dot{\varphi}, \qquad \ddot{x}_S = r_S\sin\varphi\ddot{\varphi} + r_S\cos\varphi\dot{\varphi}^2,$$

$$y_S = -r_S\sin\varphi, \qquad \dot{y}_S = -r_S\cos\varphi\dot{\varphi}, \qquad \ddot{y}_S = -r_S\cos\varphi\ddot{\varphi} + r_S\sin\varphi\dot{\varphi}^2,$$

$$x_{S_P} = r\cos\varphi + r_P\cos\alpha,$$

$$\dot{x}_{S_P} = -r\sin\varphi\dot{\varphi} - r_P\sin\alpha\dot{\alpha} = -(r + \lambda r_P f_1(\varphi))\sin\varphi\dot{\varphi},$$

$$h_1(\varphi) := -(r + \lambda r_P f_1(\varphi))\sin\varphi,$$

$$h_2(\varphi) := \frac{dh_1(\varphi)}{d\varphi} = -r\cos\varphi - \lambda r_P f_1(\varphi)\cos\varphi - \lambda r_P f_2(\varphi)\sin\varphi,$$

$$\dot{x}_{S_P} = h_1\dot{\varphi}, \qquad \ddot{x}_{S_P} = h_1\ddot{\varphi} + h_2\dot{\varphi}^2;$$

$$y_{S_P} = r\sin\varphi - r_P \sin\alpha = (r - \lambda r_P)\sin\varphi,$$

$$g_1(\varphi) := (r - \lambda r_P)\cos\varphi,$$

$$g_2(\varphi) := \frac{dg_1(\varphi)}{d\varphi} = -(r - \lambda r_P)\sin\varphi,$$

$$\dot{y}_{S_P} = g_1\dot{\varphi}, \qquad \ddot{y}_{S_P} = g_1\ddot{\varphi} + g_2\dot{\varphi}^2.$$

Bewegungsgleichung aus dem Leistungssatz

$$\dot{E}_{kin} = P,$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\left\{\Theta_{0KW}\dot{\varphi}^2 + m_P(\dot{x}_{S_P}^2 + \dot{y}_{S_P}^2) + \Theta_{S_P}\dot{\alpha}^2 + m_K\dot{q}^2\right\},$$

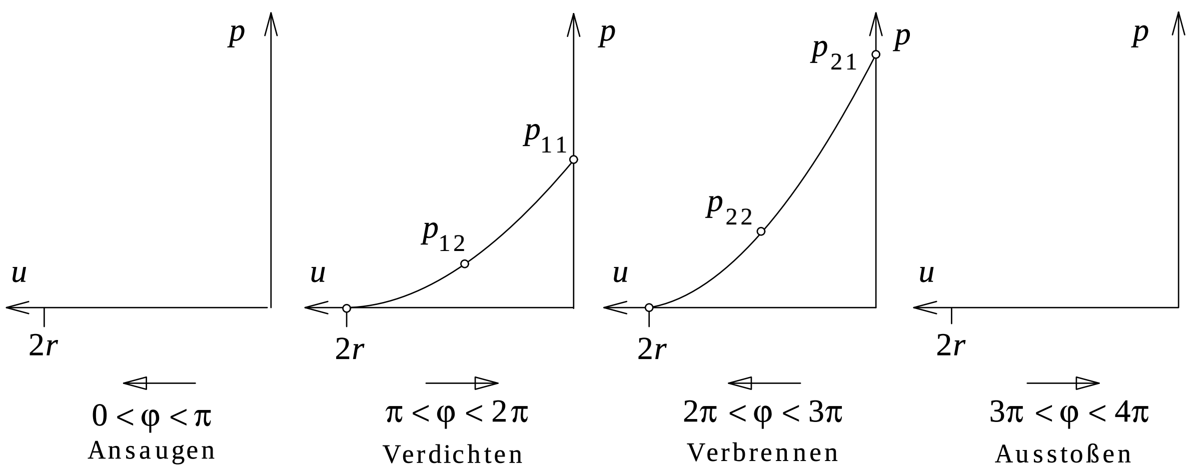
$$\dot{E}_{kin} = \left\{\Theta_{0KW}\ddot{\varphi} + m_P(h_1\ddot{x}_{S_P} + g_1\ddot{y}_{S_P}) + \Theta_{S_P} f_1\ddot{\alpha} + m_K k_1\ddot{q}\right\}\dot{\varphi},$$

$$P = -M_0\dot{\varphi} - pA_K\dot{q} = -(M_0 + pA_K k_1(\varphi))\dot{\varphi},$$

$$(\Theta_{0KW} + m_P(h_1^2 + g_1^2) + \Theta_{S_P} f_1^2 + m_K k_1^2)\ddot{\varphi} +$$
$$+ (m_P(h_1 h_2 + g_1 g_2) + \Theta_{S_P} f_1 f_2 + m_K k_1 k_2)\dot{\varphi}^2 = -M_0 - pA_K k_1,$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{(m_P(h_1 h_2 + g_1 g_2) + \Theta_{S_P} f_1 f_2 + m_K k_1 k_2)\dot{\varphi}^2 + M_0 + pA_K k_1}{\Theta_{0KW} + m_P(h_1^2 + g_1^2) + \Theta_{S_P} f_1^2 + m_K k_1^2}.$$

Der Druck p im Kolben muß als Funktion des Winkels φ zur Verfügung stehen. Näherungsweise kann die folgende Darstellung benutzt werden, wobei u die Kolbenverschiebung ist:



Mit $\xi = u/(2r)$ und den LAGRANGEschen Interpolationspolynomen

$$N_1(\xi) := \frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)}, \qquad N_2(\xi) := \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)}, \qquad N_3(\xi) := \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)},$$

$$N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

formulieren wir die Funktionen $p_1(\xi)$ und $p_2(\xi)$ als Polynome 2. Grades mit den Stützstellen

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 1/2, \quad \xi_3 = 1$$

$$p_1(\xi) = p_{11} N_1(\xi) + p_{12} N_2(\xi),$$

$$p_2(\xi) = p_{21} N_1(\xi) + p_{22} N_2(\xi),$$

$$N_1(\xi) = \frac{(\xi - 0.5)(\xi - 1)}{(-0.5)(-1)} = 2\xi^2 - 3\xi + 1, \qquad N_2(\xi) = \frac{\xi(\xi - 1)}{0.5(-0.5)} = -4(\xi^2 - \xi),$$

$$p_1(\xi) = (2p_{11} - 4p_{12})\xi^2 + (4p_{12} - 3p_{11})\xi + p_{11},$$

$$p_2(\xi) = (2p_{21} - 4p_{22})\xi^2 + (4p_{22} - 3p_{21})\xi + p_{21}.$$

Diese Funktionen werden in Abhängigkeit vom Kurbeldrehwinkel φ benötigt. Mit

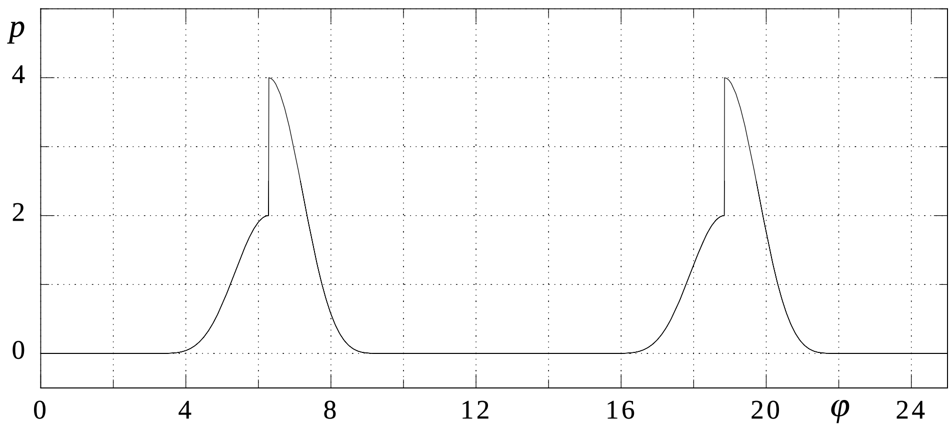
$$u(\varphi) = r + L - q(\varphi) = r + L - (r\cos\varphi + L\sqrt{1 - (\lambda \sin\varphi)^2}),$$

$$\xi = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2\lambda}(1 - \sqrt{1 - (\lambda\sin\varphi)^2}),$$

den speziellen Werten

$$p_{11} = 2.0, \qquad p_{12} = 0.5, \qquad p_{21} = 4.0, \qquad p_{22} = 1.0$$

und $\lambda = 0.2$ wird $p(\varphi)$



Aus den folgenden Schwerpunkt- und Momentensatzgleichungen erhalten wir die inneren Reaktionskräfte:

$$
\begin{aligned}
m_{KW}\ddot{x}_S &= C_x + E_x,\\
m_{KW}\ddot{y}_S &= C_y + E_y,\\
\Theta_{S_P}\ddot{\alpha} &= (K_y - E_y)r_P\cos\alpha + (K_x - E_x)r_P\sin\alpha - K_y L\cos\alpha - K_x L\sin\alpha,\\
m_P\ddot{x}_{S_P} &= -E_x + K_x,\\
m_P\ddot{y}_{S_P} &= -E_y + K_y,\\
m_K\ddot{q} &= -K_x - pA_K,\\
0 &= D_y - K_y.
\end{aligned}
$$

$$K_x = -m_K\ddot{q} - pA_K,$$

$$D_y = K_y = -K_x\tan\alpha - \frac{\Theta_{S_P}}{L\cos\alpha}\ddot{\alpha} + m_P\ddot{x}_{S_P}\frac{r_P}{L}\tan\alpha + m_P\ddot{y}_{S_P}\frac{r_P}{L},$$

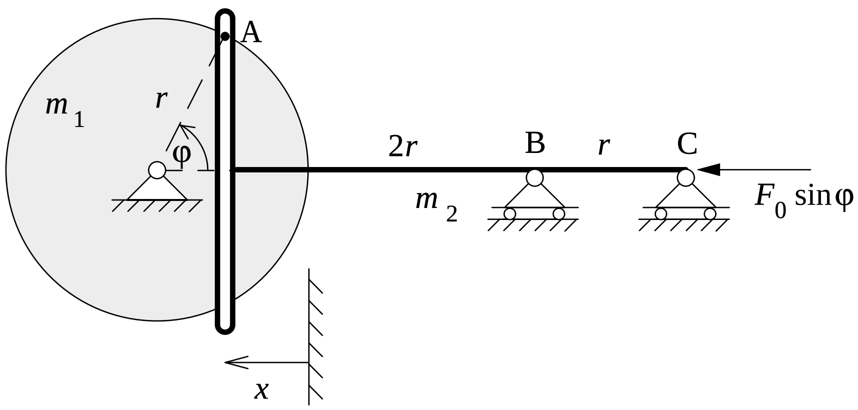
$$E_x = K_x - m_P\ddot{x}_{S_P},\qquad E_y = K_y - m_P\ddot{y}_{S_P},$$

$$C_x = m_{KW}\ddot{x}_S - E_x,\qquad C_y = m_{KW}\ddot{y}_S - E_y.$$

Die drei äußeren Reaktionskräfte ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$
\begin{aligned}
&A_x - C_x + pA_K = 0,\\
&A_y + B_y - C_y - D_y = 0,\\
&B_y(b+c) - C_y b - D_y(b+q) + (C_x - pA_K)d = 0.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9

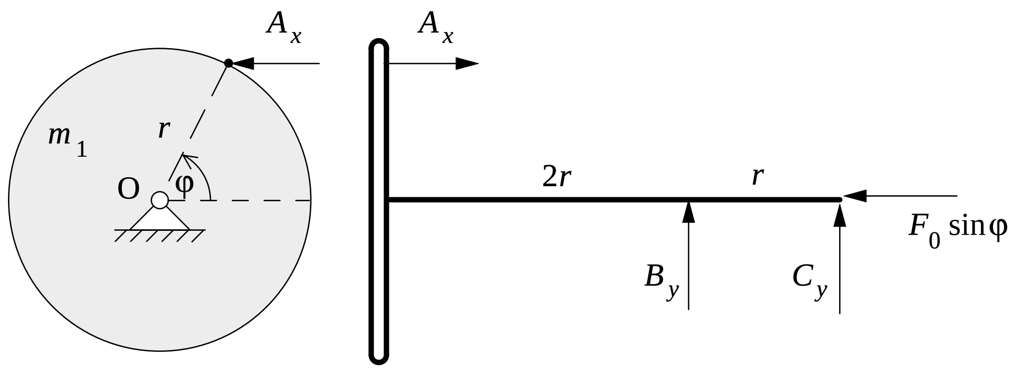


Eine Schubstange (Masse m_2) führt reibungsfrei einen Stift A, der auf dem Rand einer Kreisscheibe (Radius r, Masse m_1) befestigt ist. Die Kreisscheibe ist um eine vertikale Achse drehbar gelagert. Man berechne die Bewegungsgleichung in der Koordinate φ, wenn die Schubstange mit einer horizontal wirkenden Kraft

$F_0 \sin\varphi$ angetrieben wird.

Kinematische Zwangsbedingung:

$$x = r(1-\cos\varphi), \qquad \rightarrow \qquad \dot{x} = r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \ddot{x} = r\ddot{\varphi}\sin\varphi + r\dot{\varphi}^2\cos\varphi.$$



Momentensatz für die Kreisscheibe:

$$\Theta_0\ddot{\varphi} = A_x r\sin\varphi. \qquad (\Theta_0 = \frac{1}{2}m_1 r^2)$$

Schwerpunktsatz in x-Richtung für die Schubstange:

$$m_2\ddot{x} = F_0\sin\varphi - A_x.$$

Elimination der inneren Reaktionskraft liefert die Bewegungsgleichung:

$$\Theta_0\ddot{\varphi} = (F_0\sin\varphi - m_2\ddot{x})r\sin\varphi,$$

$$\Theta_0\ddot{\varphi} + m_2 r\sin\varphi(r\ddot{\varphi}\sin\varphi + r\dot{\varphi}^2\cos\varphi) = F_0 r\sin^2\varphi,$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2F_0\sin^2\varphi - 2m_2 r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi}{r(m_1 + 2m_2\sin^2\varphi)}.$$

Weil sich die Schubstange nicht dreht, gilt die Momentengleichgewichtsbedingung

$$C_y r - A_x r\sin\varphi = 0, \qquad \rightarrow \qquad C_y = A_x\sin\varphi.$$

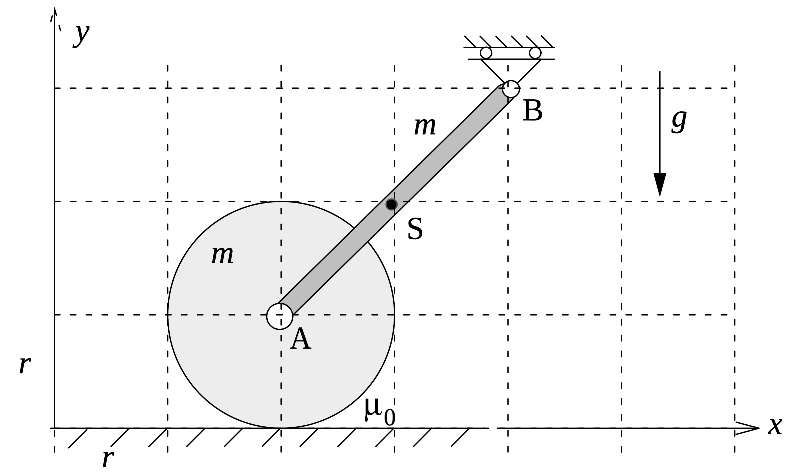
Aus dem Schwerpunktsatz in y-Richtung für die Schubstange folgt

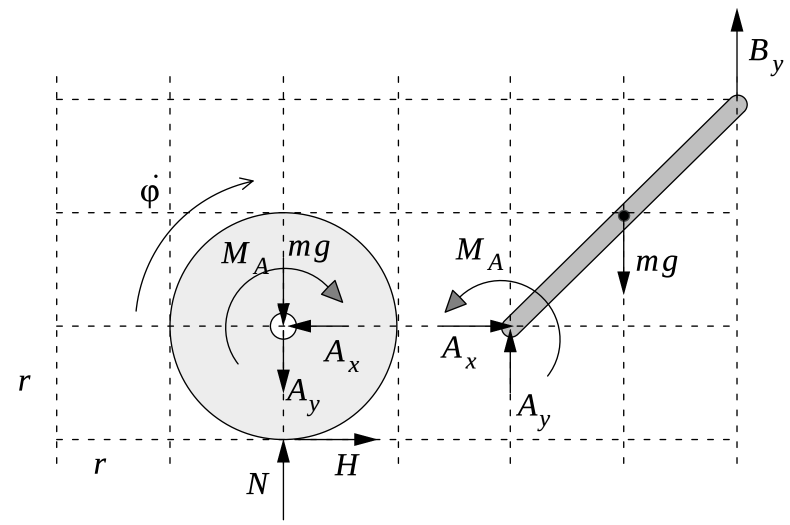
$$B_y + C_y = 0 \qquad \rightarrow \qquad B_y = -C_y.$$

Die beiden Auflagerkräfte bilden ein Kräftepaar mit dem Moment $A_x r\sin\varphi$, das dem auf die Kreisscheibe wirkenden Moment entspricht.

Aufgabe 10

Ein Rad (Radius r, Masse m) ist mit einer Stange AB verbunden, die im Endpunkt B horizontal geführt wird. Auf der Stange sitzt ein Motor, der das Rad mit einem Moment M_A antreibt, so daß sich das System in x-Richtung bewegt. Man berechne die Bewegungsgleichung für die Koordinate x_A, alle Reaktionskräfte und das maximal mögliche Antriebsmoment, wenn das Rad rollen soll.





Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}_A}{r}, \qquad \dot{y}_A \equiv 0, \qquad \dot{x}_S = \dot{x}_A, \qquad \dot{y}_S \equiv 0, \qquad \dot{\psi} \equiv 0.$$

Schwerpunkt- und Momentensatz:

$$m\ddot{x}_A = H - A_x, \qquad m\ddot{x}_S = A_x,$$

$$m\ddot{y}_A = N - A_y - mg, \qquad m\ddot{y}_S = A_y + B_y - mg, \qquad \Theta_A = \frac{1}{2}mr^2.$$

$$\Theta_A\ddot{\varphi} = M_A - Hr, \qquad \Theta_S\ddot{\psi} = M_A + B_y r + A_x r - A_y r;$$

$$m\ddot{x}_A = H - A_x,$$
$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_A = \frac{M_A}{r} - H, \qquad \rightarrow \qquad \ddot{x}_A = \frac{2}{5}\frac{M_A}{mr}, \qquad A_x = \frac{2}{5}\frac{M_A}{r}, \quad H = \frac{4}{5}\frac{M_A}{r};$$
$$m\ddot{x}_A = A_x;$$

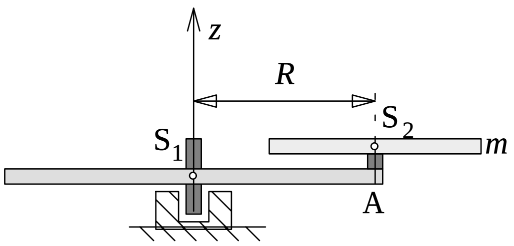
$$N - A_y = mg,$$
$$A_y + B_y = mg, \qquad \rightarrow \qquad B_y = \frac{1}{2}mg - \frac{7}{10}\frac{M_A}{r}, \quad A_y = \frac{1}{2}mg + \frac{7}{10}\frac{M_A}{r}, \qquad N = \frac{3}{2}mg + \frac{7}{10}\frac{M_A}{r}.$$
$$B_y + A_x - A_y = -\frac{M_A}{r}.$$

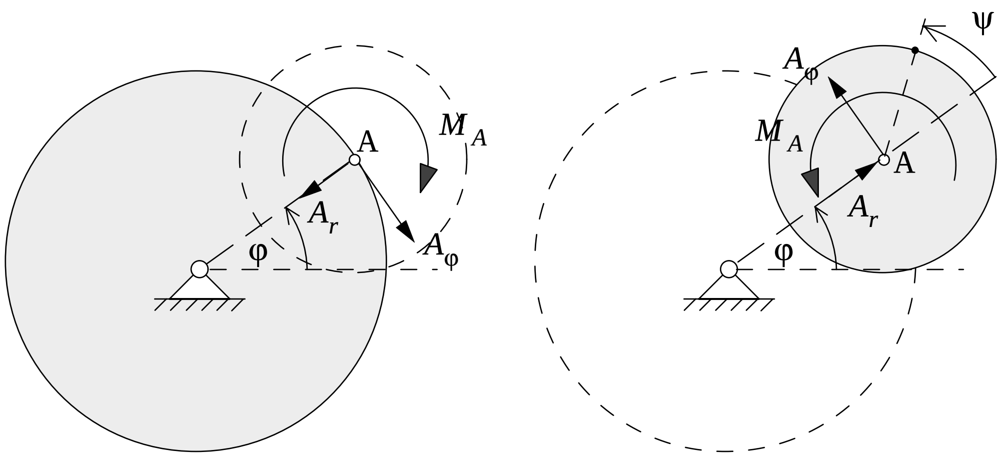
Dynamische Rollbedingung:

$$H \le \mu_0 N \qquad \rightarrow \qquad \frac{4}{5}\frac{M_A}{r} \le \mu_0\left(\frac{3}{2}mg + \frac{7}{10}\frac{M_A}{r}\right), \qquad M_A \le \frac{15\mu_0 mgr}{8 - 7\mu_0}.$$

Aufgabe 12

Auf einer Kreisscheibe (Trägheitsmoment Θ_{S_1}), die um die raumfeste z-Achse drehbar gelagert ist, treibt ein Motor im Punkt A eine Kreisscheibe (Masse m, Trägheitsmoment Θ_{S_2}) mit dem Antriebsmoment M_A zur Drehbewegung um die zur z-Achse parallele Achse durch A an. Man bestimme die Bewegungsgleichungen der beiden Kreisscheiben, die Reaktionskräfte im Punkt A und die Drehimpulsbilanz des Gesamtsystems.





Momentensatz für die große Kreisscheibe:

$$\Theta_{S_1}\ddot{\varphi} = -M_A - A_\varphi R.$$

Schwerpunkt- und Momentensatz für die kleine Kreisscheibe:

$$m\vec{a}_{S_2} = A_r\vec{e}_r + A_\varphi\vec{e}_\varphi, \qquad \begin{aligned} -mR\dot{\varphi}^2 &= A_r, \\ mR\ddot{\varphi} &= A_\varphi; \end{aligned}$$

$$\Theta_{S_2}(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}) = M_A.$$

Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{M_A}{\Theta_{S_1}+mR^2}, \qquad \ddot{\psi} = \frac{M_A}{\Theta_{S_2}} + \frac{M_A}{\Theta_{S_1}+mR^2}.$$

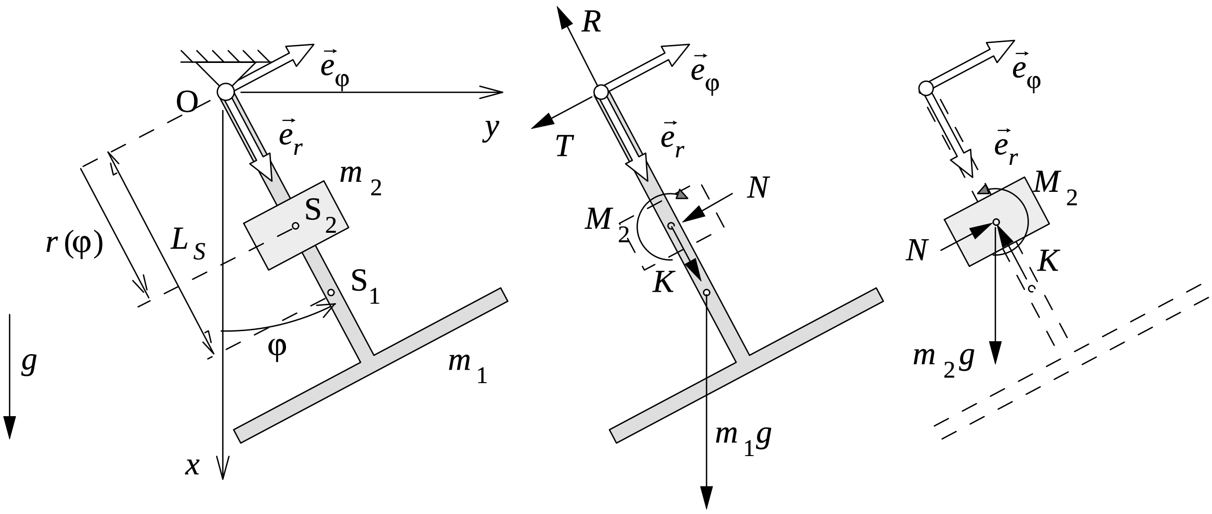
Drehimpuls des Gesamtsystems bezogen auf die z-Achse:

$$\vec{L}_0 = \{\Theta_{S_1}\dot{\varphi} + \Theta_{S_2}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}) + mR^2\dot{\varphi}\}\vec{e}_z,$$

$$\dot{\vec{L}}_0 = \{\Theta_{S_1}\ddot{\varphi} + \Theta_{S_2}(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}) + mR^2\ddot{\varphi}\}\vec{e}_z = \{-M_A - A_\varphi R + M_A + A_\varphi R\}\vec{e}_z = \vec{0},$$

Der Gesamtdrehimpuls bleibt erhalten.

Aufgabe 13



Auf einer Schaukel (Masse m_1) bewegt sich ein Körper (Masse m_2, Trägheitsmoment Θ_{S_2}) nach dem vorgegebenen Gesetz $r(\varphi)$. Man berechne die Bewegungsgleichung der Schaukel in der Koordinate φ sowie die Reaktionskräfte R, T, K, N in der $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$-Basis und das Reaktionsmoment M_2.

Momentensatz für die Schaukel:

$$\Theta_0\ddot{\varphi} = -m_1 g L_S \sin\varphi - Nr(\varphi) - M_2.$$

Kinematische Zwangsbedingung für den Gleitkörper:

$$\overrightarrow{OS}_2 = r(\varphi)\vec{e}_r(\varphi), \qquad \vec{v}_{S_2} = r'\dot{\varphi}\vec{e}_r + r\vec{e}_\varphi\dot{\varphi} = (r'\vec{e}_r + r\vec{e}_\varphi)\dot{\varphi},$$

$$\vec{a}_{S_2} = (r''\dot{\varphi}\vec{e}_r + 2r'\vec{e}_\varphi\dot{\varphi} - r\vec{e}_r\dot{\varphi})\dot{\varphi} + (r'\vec{e}_r + r\vec{e}_\varphi)\ddot{\varphi} = (r'\ddot{\varphi} + r''\dot{\varphi}^2 - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2r'\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\varphi.$$

Schwerpunkt- und Momentensatz für den Gleitkörper:

$$m_2\begin{bmatrix} r'\ddot{\varphi} + (r'' - r)\dot{\varphi}^2 \\ r\ddot{\varphi} + 2r'\dot{\varphi}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 g\cos\varphi \\ -m_2 g\sin\varphi \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{S_2}\ddot{\varphi} = M_2.$$

Mit

$$N = m_2 g\sin\varphi + m_2(r\ddot{\varphi} + 2r'\dot{\varphi}^2)$$

erhalten wir aus dem Momentensatz für die Schaukel

$$\Theta_0\ddot{\varphi} = -m_1 g L_S \sin\varphi - (m_2 g\sin\varphi + m_2(r\ddot{\varphi} + 2r'\dot{\varphi}^2))r(\varphi) - \Theta_{S_2}\ddot{\varphi},$$

die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{(m_1 L_S + m_2 r)g\sin\varphi + 2m_2 r' r\,\dot{\varphi}^2}{\Theta_0 + \Theta_{S_2} + m_2 r^2}.$$

Aus dem Schwerpunktsatz für die Schaukel, dargestellt in der Polarkoordinatenbasis, ergeben sich die Reaktionskräfte im Lagerpunkt O:

$$m_1\begin{bmatrix} -L_S\dot{\varphi}^2 \\ L_S\ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g\cos\varphi \\ -m_1 g\sin\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ -N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R \\ -T \end{bmatrix}.$$

Mit einer Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung für $\varphi(t)$ können anschließend alle Reaktionskräfte und das Reaktionsmoment berechnet werden:

$$\begin{aligned} N &= m_2 g\sin\varphi + m_2(r\ddot{\varphi} + 2r'\dot{\varphi}^2), \\ K &= m_2 g\cos\varphi - m_2\{r'\ddot{\varphi} + (r'' - r)\dot{\varphi}^2\}, \\ R &= m_1 g\cos\varphi + m_1 L_S\dot{\varphi}^2 + K, \\ T &= -m_1 g\sin\varphi - m_1 L_S\ddot{\varphi} - N, \\ M_2 &= \Theta_{S_2}\ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Mit den speziellen Werten

$$m_1 = 2m, \quad m_2 = 2m, \quad L_S = \frac{3}{4}L, \quad \Theta_0 = \frac{17}{12}mL^2, \quad \Theta_{S_2} = \frac{1}{4}mL^2,$$

und der Variablentransformation

$$\sqrt{\frac{g}{L}}t =: \tau, \qquad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{L}}\frac{d\varphi}{d\tau} = \sqrt{\frac{g}{L}}\varphi', \qquad \ddot{\varphi} = \frac{g}{L}\varphi'',$$

erhalten wir zu den Verschiebungsgesetzen $r(\varphi)$ der Masse m_2

$$r(\varphi) = L\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos(2\varphi)\},$$

wenn $(\sin\varphi > 0)$ und wenn $(\sin\varphi \le 0 \quad und \quad \dot{\varphi} > 0)$ ist,

$$r(\varphi) = \frac{L}{4},$$

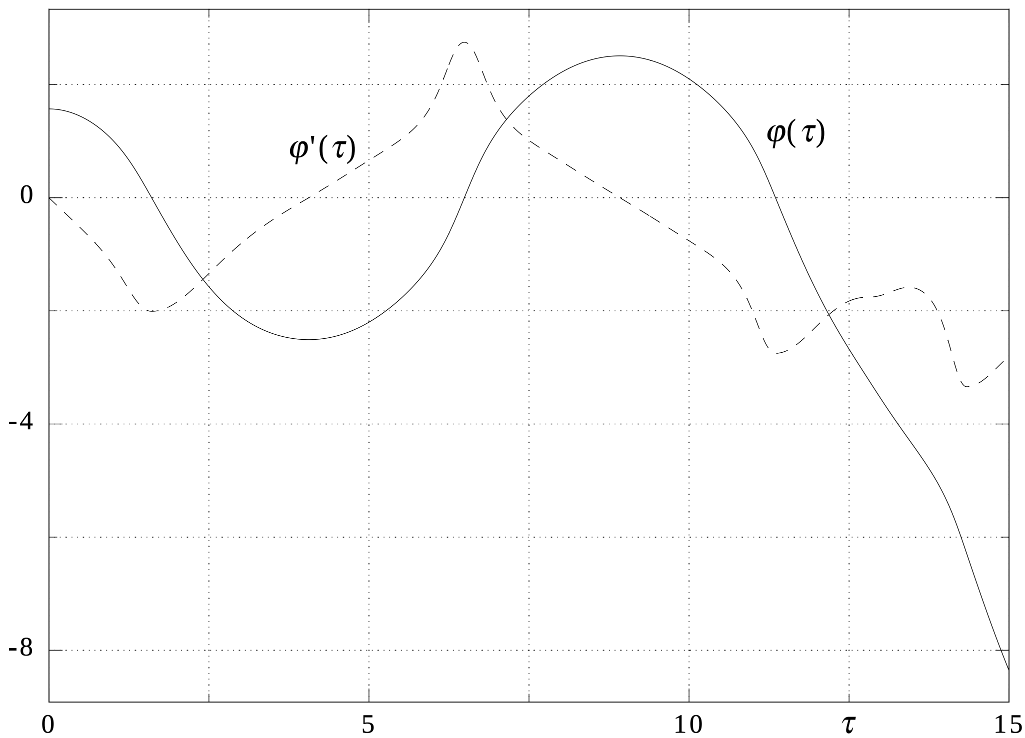
wenn $(\sin\varphi \le 0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi} < 0)$ ist, dimensionslose Differentialgleichungen; in den ersten beiden Fällen

$$\varphi'' = -\frac{\{\frac{3}{2} + (1 - \frac{1}{2}\cos(2\varphi))\}\sin\varphi + (1 - \frac{1}{2}\cos(2\varphi))\sin(2\varphi)\varphi'^2}{\frac{5}{3} + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}\cos(2\varphi))^2},$$

und im dritten Fall:

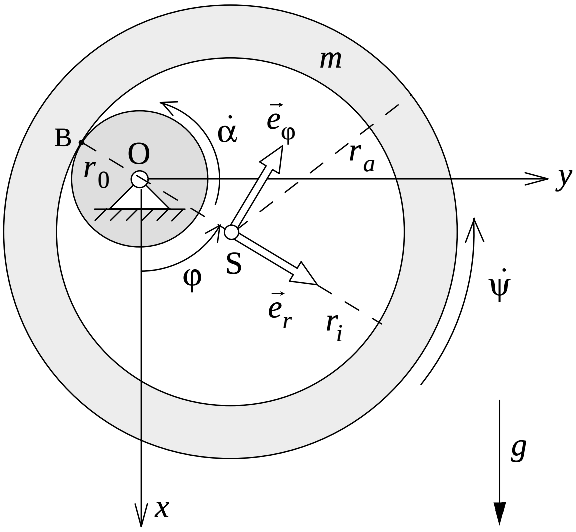
$$\varphi'' = -\frac{48}{43}\sin\varphi.$$

Zu den Anfangsbedingungen $\{\varphi(0) = 90^{\circ}, \ \dot{\varphi}(0) = 0\}$ ergibt sich eine zum Überschlag führende Schaukelbewegung:



Aufgabe 14

Ein Kreisring (Masse m, Innenradius r_i, Außenradius r_a) soll auf einem Kreiszylinder (Radius r_0), der um die raumfeste Achse durch O eine Drehschwingung $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\Omega t)$ ausführt, im Schwerkraftfeld eine Rollschwingung ausführen. Man stelle die Bewegungsgleichung auf.

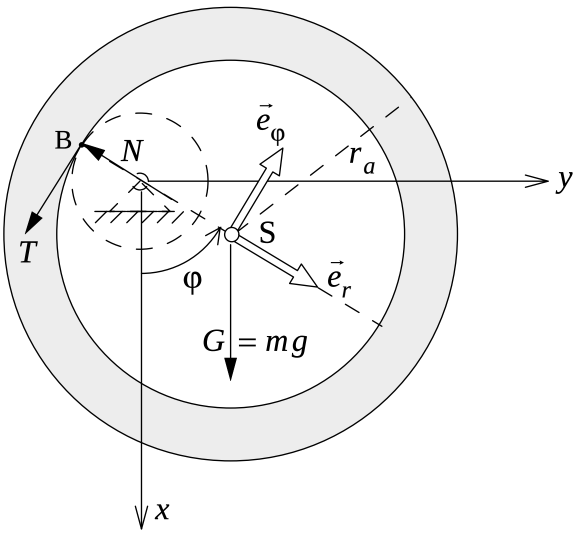


Kinematische Zwangsbedingung:
Im Kontaktpunkt B müssen der Kreiszylinder und der Kreisring gleiche Geschwindigkeiten haben.

$$\vec{v}_{B(Zylinder)} = \vec{v}_{B(Ring)} = \vec{v}_{S(Ring)} + \vec{\omega}_{(Ring)} \times \overrightarrow{SB},$$

$$-r_0\dot{\alpha}\vec{e}_\varphi = (r_i - r_0)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\psi}\vec{e}_z \times (-r_i\vec{e}_r),$$

$$-r_0\dot{\alpha}\vec{e}_\varphi = (r_i - r_0)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r_i\dot{\psi}\vec{e}_\varphi, \qquad \rightarrow \qquad \dot{\psi} = (1 - \frac{r_0}{r_i})\dot{\varphi} + \frac{r_0}{r_i}\dot{\alpha}.$$



Schwerpunkt- und Momentensatz:

$$m\vec{a}_S = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g}, \qquad \Theta_S \ddot{\psi} = T r_i;$$

$$m(r_i - r_0)(\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r) = -T\vec{e}_\varphi - N\vec{e}_r + mg(\cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi),$$

$$m(r_i - r_0)\ddot{\varphi} = -T - mg\sin\varphi,$$

$$m(r_i - r_0)\dot{\varphi}^2 = N - mg\cos\varphi,$$

$$\Theta_S \frac{r_i - r_0}{r_i^{\,2}} \ddot{\varphi} = -\Theta_S \frac{r_0}{r_i^{\,2}} \ddot{\alpha} + T.$$

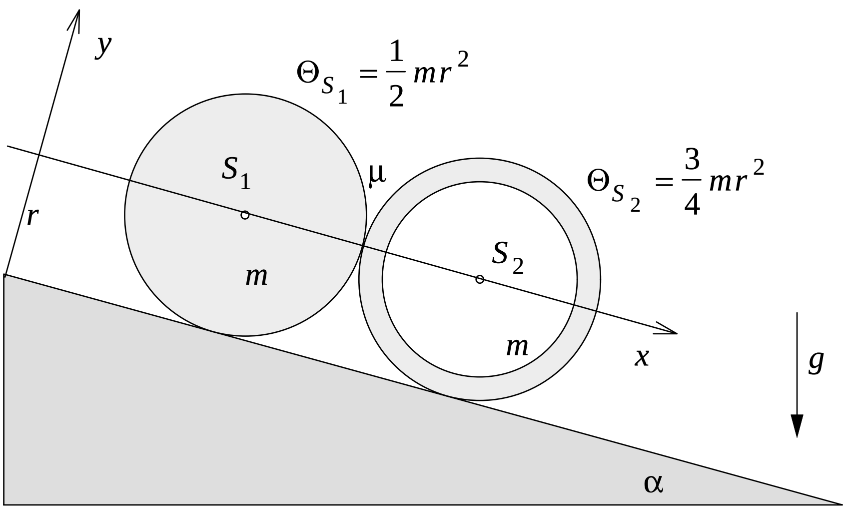
Bewegungsgleichung:

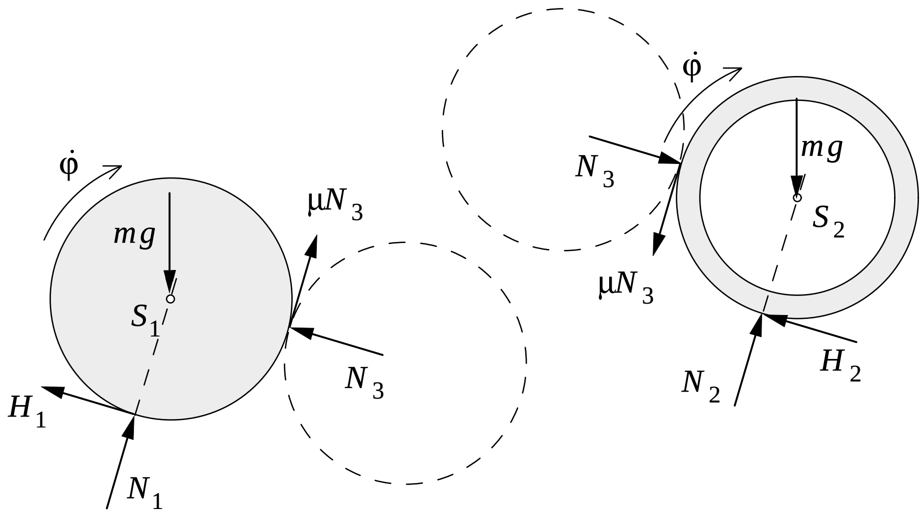
$$\left(1 + \frac{\Theta_S}{m r_i^{\,2}}\right)\ddot{\varphi} + \frac{g}{r_i - r_0}\sin\varphi = -\frac{\Theta_S r_0}{m(r_i - r_0) r_i^{\,2}}\ddot{\alpha}.$$

$$\Theta_S = \int_m r^2 dm = \frac{m}{\pi(r_a^{\,2} - r_i^{\,2})}\int_0^{2\pi}\left(\int_{r_i}^{r_a} r^3 dr\right)d\varphi = \frac{m}{2}(r_a^{\,2} + r_i^{\,2}).$$

Aufgabe 15

Zwei Kreiszylinder (Radius r) mit gleicher Masse m aber unterschiedlicher Massenverteilung rollen gemeinsam auf einer schiefen Ebene abwärts, wobei der Kreiszylinder mit dem kleineren Massenträgheitsmoment ($\Theta_{S_1} = mr^2/2$) den Kreiszylinder mit dem größeren Massenträgheitsmoment ($\Theta_{S_2} = 3mr^2/4$) schiebt. Im Kontaktpunkt der beiden Kreiszylinder wirkt eine Gleitreibungskraft. Man bestimme die Bewegungsgleichung für die Schwerpunktskoordinate $x := x_{S_1}$ und die Kraft zwischen den beiden Kreiszylindern.





Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot{x} := \dot{x}_{S_1} = \dot{x}_{S_2} = r\dot{\varphi}, \qquad \dot{y}_{S_1} = \dot{y}_{S_2} = 0,$$

Schwerpunkt- und Momentensatz für die beiden rollenden Kreiszylinder unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - H_1 - N_3, \qquad m\ddot{x} = mg\sin\alpha - H_2 + N_3,$$

$$0 = N_1 - mg\cos\alpha + \mu N_3, \qquad 0 = N_2 - mg\cos\alpha - \mu N_3,$$

$$\frac{1}{2}mr^2\frac{\ddot{x}}{r} = H_1 r - \mu N_3 r; \qquad \frac{3}{4}mr^2\frac{\ddot{x}}{r} = H_2 r - \mu N_3 r;$$

Daraus folgt zunächst:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} = mg\sin\alpha - (1+\mu)N_3, \qquad \frac{7}{4}m\ddot{x} = mg\sin\alpha + (1-\mu)N_3;$$

$$\frac{3}{2(1+\mu)}m\ddot{x} = \frac{1}{1+\mu}mg\sin\alpha - N_3, \qquad \frac{7}{4(1-\mu)}m\ddot{x} = \frac{1}{1-\mu}mg\sin\alpha + N_3.$$

Elimination der Reaktionskraft N_3 liefert die Bewegungsgleichung:

$$\{\frac{3}{2(1+\mu)} + \frac{7}{4(1-\mu)}\}\ddot{x} = \{\frac{1}{1+\mu} + \frac{1}{1-\mu}\}g\sin\alpha,$$

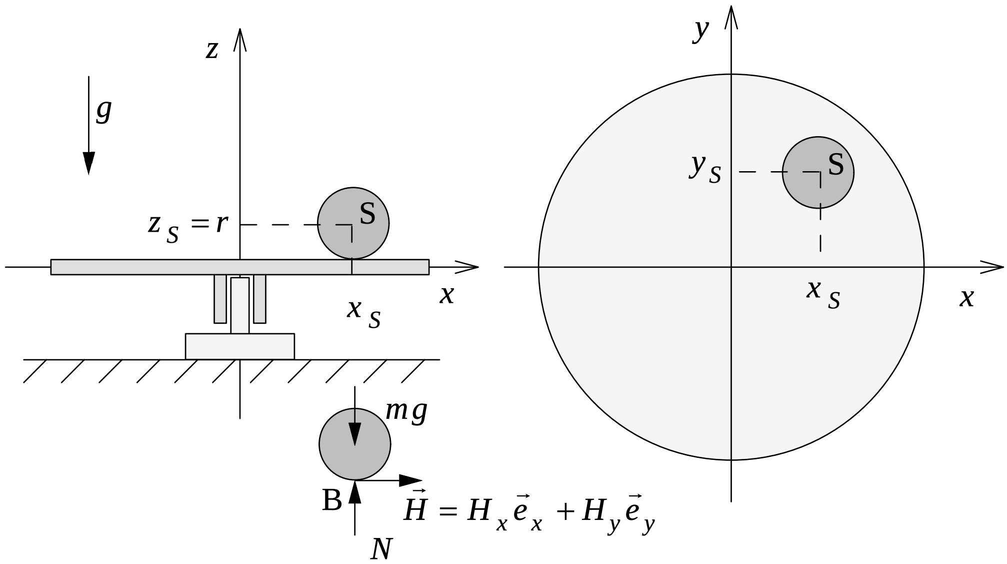
$$\ddot{x} = \frac{8}{13+\mu}g\sin\alpha.$$

Reaktionskraft zwischen den Kreiszylindern:

$$N_3 = \frac{1}{13+\mu}mg\sin\alpha.$$

Aufgabe 1

Auf einer horizontalen starren Kreisplatte, die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω um die raumfeste z-Achse gedreht wird, rollt eine Kugel (Masse m, Radius r). Man stelle die Bewegungsgleichung für die Schwerpunktbewegung auf.



Der unter dem Schwerpunkt S liegende Kontaktpunkt B der Kreisplatte hat die Geschwindigkeit

$$\vec{v}_{B(Platte)} = \Omega \vec{e}_z \times (x_S \vec{e}_x + y_S \vec{e}_y) = -\Omega y_S \vec{e}_x + \Omega x_S \vec{e}_y .$$

Der Kontaktpunkt B der Kugel hat die Geschwindigkeit

$$\vec{v}_{B(Kugel)} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \overrightarrow{SB}, \qquad \vec{v}_{B(Kugel)} = \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_S - \omega_y r \\ \dot{y}_S + \omega_x r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aus der Rollbedingung für die Kugel

$$\vec{v}_{B(Kugel)} = \vec{v}_{B(Platte)}$$

folgt dann

$$-\Omega y_S = \dot{x}_S - \omega_y r,$$
$$\Omega x_S = \dot{y}_S + \omega_x r.$$

Der Winkelgeschwindigkeitsvektor der rollenden Kugel lautet also

$$\vec{\omega} = \frac{\Omega x_S - \dot{y}_S}{r} \vec{e}_x + \frac{\Omega y_S + \dot{x}_S}{r} \vec{e}_y .$$

Der Schwerpunktsatz für die Kugel liefert die Gleichungen

$$m\ddot{x}_S = H_x,$$
$$m\ddot{y}_S = H_y,$$
$$0 = N - mg.$$

Der auf den Schwerpunkt S bezogene Trägheitstensor der Kugel ist dem Einheitstensor proportional

$$\mathbf{\Theta}_S = \frac{2}{5} m r^2 \boldsymbol{1}.$$

Der Drehimpulsvektor ist deshalb proportional zum Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\vec{L}_S = \mathbf{\Theta}_S \vec{\omega} = \frac{2}{5} m r^2 \boldsymbol{1} \vec{\omega} = \frac{2}{5} m r^2 \vec{\omega},$$

und der Drehimpulssatz

$$\mathbf{\Theta}_S \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{\Theta}_S \vec{\omega} = \vec{M}_S$$

lautet

$$\frac{2}{5} m r^2 \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{2}{5} m r \begin{bmatrix} \Omega \dot{x}_S - \ddot{y}_S \\ \Omega \dot{y}_S + \ddot{x}_S \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rH_y \\ -rH_x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Für die Komponenten der erforderlichen Haftkraft gilt also

$$H_x = -\frac{2}{5} m (\Omega \dot{y}_S + \ddot{x}_S), \qquad H_y = \frac{2}{5} m (\Omega \dot{x}_S - \ddot{y}_S).$$

Aus den beiden Gleichungen des Schwerpunktsatzes erhalten wir damit die Bewegungsgleichungen des Kugelschwerpunktes

$$\begin{aligned} \ddot{x}_S &= -\frac{2}{5}(\Omega \dot{y}_S + \ddot{x}_S), \\ \ddot{y}_S &= \frac{2}{5}(\Omega \dot{x}_S - \ddot{y}_S); \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{x}_S + \frac{2}{7} \Omega \dot{y}_S &= 0, \\ \ddot{y}_S - \frac{2}{7} \Omega \dot{x}_S &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung für $\dot{x}_S$:

$$\dddot{x}_S + \lambda^2 \dot{x}_S = 0, \qquad \lambda := \frac{2}{7} \Omega,$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\dot{x}_S = C_1 \cos(\lambda t) + C_2 \sin(\lambda t),$$
$$x_S = \frac{1}{\lambda} \{C_1 \sin(\lambda t) - C_2 \cos(\lambda t)\} + C_3,$$

Aus

$$\ddot{y}_S = \lambda \dot{x}_S = \lambda \{C_1 \cos(\lambda t) + C_2 \sin(\lambda t)\}$$

folgt

$$\dot{y}_S = C_1 \sin(\lambda t) - C_2 \cos(\lambda t) + C_4,$$

$$y_S = \frac{1}{\lambda}\{-C_1 \cos(\lambda t) - C_2 \sin(\lambda t)\} + C_4 t + C_5.$$

Setzen wir diese Lösungen in die erste der ursprünglichen Differentialgleichungen ein, so stellen wir fest

$$\lambda\{-C_1 \sin(\lambda t) + C_2 \cos(\lambda t)\} + \lambda\{C_1 \sin(\lambda t) - C_2 \cos(\lambda t) + C_4\} = 0,$$

$$C_4 = 0.$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$x_S(0) = r, \quad y_S(0) = 0, \quad \dot{x}_S(0) = 0, \quad \dot{y}_S(0) = r\Omega, \qquad \rightarrow \qquad \omega_x(0) = 0, \quad \omega_y(0) = 0,$$

erhalten wir die Gleichungen

$$-\frac{C_2}{\lambda} + C_3 = r, \quad -\frac{C_1}{\lambda} + C_5 = 0, \qquad C_1 = 0, \qquad -C_2 + C_4 = r\Omega,$$

also wird

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = -r\Omega, \qquad C_3 = r - \frac{r\Omega}{\lambda}, \qquad C_4 = 0, \qquad C_5 = 0.$$

$$x_S(t) = -\frac{5}{2}r + \frac{7}{2}r\cos(\lambda t), \qquad y_S(t) = \frac{7}{2}r\sin(\lambda t).$$

Die Bahnkurve des Schwerpunktes ist ein Kreis mit dem Radius $7r/2$ um den Mittelpunkt $x_M = -5r/2$, $y_M = 0$.

Mit

$$\dot{x}_S = -r\Omega\sin(\lambda t), \qquad \dot{y}_S = r\Omega\cos(\lambda t),$$

$$\ddot{x}_S = -\frac{2}{7}r\Omega^2\cos(\lambda t), \qquad \ddot{y}_S = -\frac{2}{7}r\Omega^2\sin(\lambda t),$$

wird die erforderliche Haftkraft

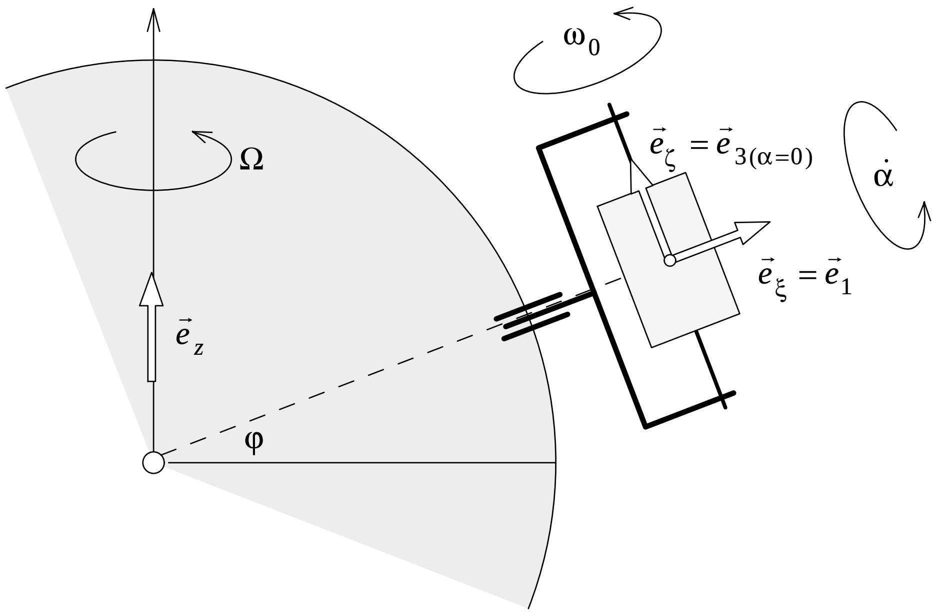
$$H_x = -\frac{2}{7}mr\Omega^2\cos(\lambda t), \qquad H_y = -\frac{2}{7}mr\Omega^2\sin(\lambda t), \qquad |\vec{H}| = \frac{2}{7}mr\Omega^2.$$

Aus der Bedingung $|\vec{H}| \le \mu_0 N$ folgt dann eine Bedingung für die zulässige Winkelgeschwindigkeit Ω der Kreisplatte:

$$\frac{2}{7}mr\Omega^2 \le \mu_0 mg \qquad \rightarrow \qquad \Omega^2 \le \frac{7}{2}\mu_0\frac{g}{r}.$$

Aufgabe 2

Auf der mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega\vec{e}_z$ rotierenden Erde ist unter der geographischen Breite φ ein Rahmen so gelagert, daß er sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ um die zur Erdoberfläche senkrechte $\vec{e}_\xi$-Achse drehen kann. Der Einheitsvektor $\vec{e}_\zeta$ zeigt in nördliche Richtung und der (nicht dargestellte) Einheitsvektor $\vec{e}_\eta$ in östliche Richtung. Mit dem Rahmen, in dem ein rotationssymmetrischer Kreisel gelagert ist, ist die Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ fest verbunden. Der Kreisel (Deklinationskreisel) dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die $\vec{e}_3$-Achse. Berechnet werden soll die Bewegungsgleichung für den Winkel α.



In der nicht-körperfesten $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$-Basis hat der Kreisel wegen der Rotationssymmetrie den auf den Schwerpunkt S bezogenen Trägheitstensor

$$\mathbf{\Theta}_S = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}.$$

Dabei ist B das Trägheitsmoment um die $\vec{e}_3$-Achse.

Die mit dem Rahmen fest verbundene Basis lautet in der erdfesten Basis

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\xi,$$
$$\vec{e}_2 = \cos\alpha\,\vec{e}_\eta + \sin\alpha\,\vec{e}_\zeta,$$
$$\vec{e}_3 = -\sin\alpha\,\vec{e}_\eta + \cos\alpha\,\vec{e}_\zeta.$$

Daraus folgt

$$\vec{e}_\zeta = \sin\alpha\,\vec{e}_2 + \cos\alpha\,\vec{e}_3.$$

Winkelgeschwindigkeitsvektor der Erde:

$$\vec{\omega}_E = \Omega\vec{e}_z = \Omega(\sin\varphi\,\vec{e}_\xi + \cos\varphi\,\vec{e}_\zeta),$$
$$\vec{\omega}_E = \Omega(\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\sin\alpha\,\vec{e}_2 + \cos\varphi\cos\alpha\,\vec{e}_3).$$

Winkelgeschwindigkeitsvektor des Rahmens:

$$\vec{\omega}_R = \vec{\omega}_E + \dot{\alpha}\,\vec{e}_\xi,$$

$$\vec{\omega}_R = (\Omega\sin\varphi + \dot{\alpha})\vec{e}_1 + \Omega\cos\varphi\sin\alpha\,\vec{e}_2 + \Omega\cos\varphi\cos\alpha\,\vec{e}_3.$$

Winkelgeschwindigkeitsvektor des Kreiselkörpers:

$$\vec{\omega}_K = \vec{\omega}_R + \omega_0\vec{e}_3,$$

$$\vec{\omega}_K = (\Omega\sin\varphi + \dot{\alpha})\vec{e}_1 + \Omega\cos\varphi\sin\alpha\,\vec{e}_2 + (\Omega\cos\varphi\cos\alpha + \omega_0)\vec{e}_3.$$

Drehimpulsvektor des Kreisels:

$$\vec{L}_S = \mathbf{\Theta}_S\vec{\omega}_K = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\alpha} + \Omega\sin\varphi \\ \Omega\cos\varphi\sin\alpha \\ \omega_0 + \Omega\cos\varphi\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\dot{\alpha} + \Omega\sin\varphi) \\ A\Omega\cos\varphi\sin\alpha \\ B(\omega_0 + \Omega\cos\varphi\cos\alpha) \end{bmatrix}.$$

Drehimpulssatz bezogen auf den Schwerpunkt:

$$\dot{\vec{L}}_S = \vec{M}_S \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{d\vec{L}_S}{dt}\right)_{rel} + \vec{\omega}_R \times \vec{L}_S = \vec{M}_S,$$

$$\begin{bmatrix} A\ddot{\alpha} \\ A\Omega\dot{\alpha}\cos\varphi\cos\alpha \\ -B\Omega\dot{\alpha}\cos\varphi\sin\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\alpha} + \Omega\sin\varphi \\ \Omega\cos\varphi\sin\alpha \\ \Omega\cos\varphi\cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A(\dot{\alpha} + \Omega\sin\varphi) \\ A\Omega\cos\varphi\sin\alpha \\ B(\omega_0 + \Omega\cos\varphi\cos\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{S2} \\ M_{S3} \end{bmatrix}.$$

Aus der ersten Komponente dieser Vektorgleichung erhalten wir die gesuchte Bewegungsgleichung für den Winkel α:

$$\ddot{\alpha} + \frac{B}{A}\Omega\omega_0\cos\varphi\sin\alpha + (\frac{B}{A} - 1)\Omega^2\cos^2\varphi\frac{\sin(2\alpha)}{2} = 0.$$

Wenn $|\alpha| << 1$ ist, wird näherungsweise

$$\ddot{\alpha} + \nu^2\alpha = 0,$$

$$\nu^2 := \frac{B}{A}\Omega\omega_0\cos\varphi + (\frac{B}{A} - 1)\Omega^2\cos^2\varphi,$$

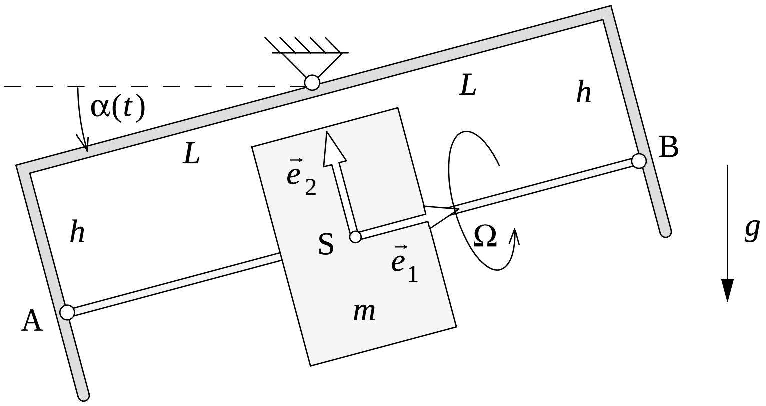
und weil $\Omega << \omega_0$ ist, können wir setzen

$$\nu^2 \approx \frac{B}{A}\Omega\omega_0\cos\varphi.$$

Der Deklinationskreisel schwingt also mit kleiner Amplitude annähernd harmonisch um die Nordrichtung.

Die zweite und dritte Komponente des vektoriell dargestellten Drehimpulssatzes ergeben die auf den Schwerpunkt bezogenen Reaktionsmomente der Lagerkräfte der Kreiselachse im Rahmen.

Aufgabe 3



Ein Kreiszylinder (Masse m, auf den Schwerpunkt bezogene Hauptträgheitsmomente Θ_1, Θ_2) dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die Achse AB, die in einem Rahmen nach dem Gesetz $\alpha(t)$ um eine raumfeste Achse senkrecht zur Rahmenebene gedreht wird. Man berechne die Reaktionskräfte im dreiwertigen Lager A und im zweiwertigen Lager B. Die $\vec{e}_i$-Basis sei mit dem Rahmen fest verbunden.

Führungswinkelgeschwindigkeitsvektor der Basis:

$$\vec{\omega}_F = \dot{\alpha}\vec{e}_3, \qquad (\vec{e}_3 := \vec{e}_1 \times \vec{e}_2)$$

Winkelgeschwindigkeitsvektor des Kreiszylinders:

$$\vec{\omega} = \Omega\vec{e}_1 + \dot{\alpha}\vec{e}_3.$$

Auf den Schwerpunkt S bezogener Drehimpulsvektor des Kreiszylinders, dargestellt in der $\vec{e}_i$-Basis:

$$\vec{L}_S = \mathbf{\Theta}_S\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1\Omega \\ 0 \\ \Theta_2\dot{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Absolute zeitliche Änderung des Drehimpulsvektors:

$$\dot{\vec{L}}_S = \left(\frac{d\vec{L}_S}{dt}\right)_{rel} + \vec{\omega}_F \times \vec{L}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_2\ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Theta_1\Omega \\ 0 \\ \Theta_2\dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta_1\Omega\dot{\alpha} \\ \Theta_2\ddot{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Beschleunigungsvektor des Schwerpunktes:

$$\vec{a}_S = h\ddot{\alpha}\vec{e}_1 + h\dot{\alpha}^2\vec{e}_2.$$

Zu berechnende Reaktionskräfte in den Lagerpunkten A und B:

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3, \qquad \vec{B} = B_2\vec{e}_2 + B_3\vec{e}_3.$$

Schwerpunktsatz:

$$m\vec{a}_S = m\vec{g} + \vec{A} + \vec{B}, \qquad \rightarrow \qquad mh\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \dot{\alpha}^2 \\ 0 \end{bmatrix} = mg\begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix},$$

Drehimpulssatz bezogen auf den Schwerpunkt S:

$$\dot{\vec{L}}_S = \vec{M}_S, \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta_1\Omega\dot{\alpha} \\ \Theta_2\ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = L\begin{bmatrix} 0 \\ A_3 - B_3 \\ B_2 - A_2 \end{bmatrix}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt schließlich:

$$A_1 = mh\ddot{\alpha} + mg\sin\alpha,$$

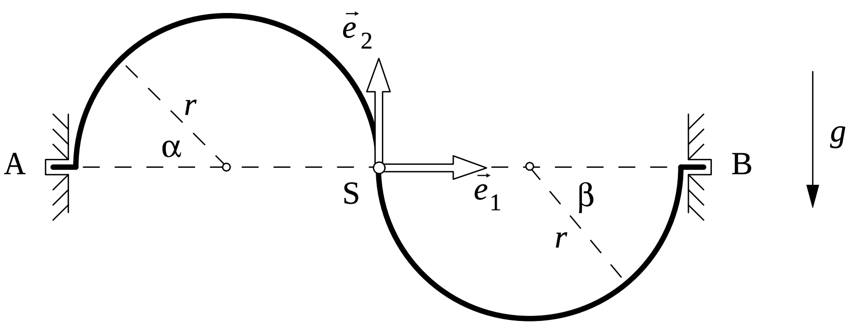
$$A_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\Theta_2}{L}\ddot{\alpha} + mh\dot{\alpha}^2 + mg\cos\alpha\right),$$

$$A_3 = \frac{\Theta_1}{2L}\Omega\dot{\alpha},$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Theta_2}{L}\ddot{\alpha} + mh\dot{\alpha}^2 + mg\cos\alpha\right),$$

$$B_3 = -\frac{\Theta_1}{2L}\Omega\dot{\alpha}.$$

Aufgabe 4



Ein aus zwei Halbkreisbögen bestehender Rahmen (Masse m) aus dünnem Draht dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die Achse AB. Man berechne die Auflagerkräfte.

Koordinaten der Massenelemente:

linker Kreisbogen:

$$s_1 = -r(1+\cos\alpha), \quad s_2 = r\sin\alpha, \quad s_3 = 0;$$

rechter Kreisbogen:

$$s_1 = r(1+\cos\beta), \quad s_2 = -r\sin\beta, \quad s_3 = 0;$$

Massenelement dm eines Halbkreisbogens:

$$dm = \frac{m/2}{\pi r} r\,d\varphi = \frac{m}{2\pi} d\varphi, \qquad d\varphi = d\alpha \text{ oder } d\beta.$$

Massenträgheitsmomente um die Koordinatenachsen durch S:

$$\Theta_{S11} = \int_m (s_2^{\,2} + s_3^{\,2})dm, \qquad \Theta_{S22} = \int_m (s_3^{\,2} + s_1^{\,2})dm, \qquad \Theta_{S33} = \int_m (s_1^{\,2} + s_2^{\,2})dm,$$

$$\Theta_{S11} = \frac{m}{2\pi} r^2 \left(\int_0^\pi \sin^2\alpha\, d\alpha + \int_0^\pi \sin^2\beta\, d\beta\right) = \frac{1}{2} m r^2,$$

$$\Theta_{S22} = \frac{m}{2\pi} r^2 \left(\int_0^\pi (1+\cos\alpha)^2 d\alpha + \int_0^\pi (1+\cos\beta)^2 d\beta\right) = \frac{3}{2} m r^2,$$

$$\Theta_{S33} = \frac{m}{2\pi} r^2 \left(2\int_0^\pi (1+\cos\alpha) d\alpha + 2\int_0^\pi (1+\cos\beta) d\beta\right) = 2 m r^2;$$

Massendeviationsmomente:

$$\Theta_{S12} = -\int_m s_1 s_2\, dm,$$

$$\Theta_{S12} = \frac{m}{2\pi} r^2 \left(\int_0^\pi \sin\alpha(1+\cos\alpha) d\alpha + \int_0^\pi \sin\beta(1+\cos\beta) d\beta\right) = \frac{2}{\pi} m r^2,$$

$$\Theta_{S13} = \Theta_{S23} = 0.$$

Trägheitstensor bezogen auf S in der $\vec{e}_i$-Basis:

$$\mathbf{\Theta}_S = m r^2 \begin{bmatrix} 1/2 & 2/\pi & 0 \\ 2/\pi & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Drehimpulsvektor bezogen auf S und Winkelgeschwindigkeitsvektor:

$$\vec{L}_S = \mathbf{\Theta}_S \vec{\omega}, \qquad \vec{\omega} = \Omega \vec{e}_1,$$

$$\vec{L}_S = mr^2 \begin{bmatrix} 1/2 & 2/\pi & 0 \\ 2/\pi & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = mr^2 \Omega \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/\pi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Absolute zeitliche Änderung des Drehimpulsvektors:

$$\dot{\vec{L}}_S = \underbrace{\left(\frac{d\vec{L}_S}{dt} \right)_{rel}}_{=\vec{0}} + \vec{\omega} \times \vec{L}_S = \begin{bmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times mr^2 \Omega \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/\pi \\ 0 \end{bmatrix} = mr^2 \Omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/\pi \end{bmatrix}.$$

Reaktionskräfte in den Auflagern A und B:

$$\vec{A} = A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3, \qquad \vec{B} = B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3.$$

Wegen der kinematischen Zwangsbedingung

$$\vec{a}_S = \vec{0}$$

folgt aus dem Schwerpunktsatz:

$$m\vec{a}_S = m\vec{g} + \vec{A} + \vec{B},$$

$$\begin{aligned} A_2 + B_2 &= -m\vec{g} \cdot \vec{e}_2, \\ A_3 + B_3 &= -m\vec{g} \cdot \vec{e}_3; \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \vec{g} = -g\vec{e}_z = -g\{\cos(\Omega t)\vec{e}_2 - \sin(\Omega t)\vec{e}_3\}.$$

Der Drehimpulssatz bezogen auf S lautet

$$\dot{\vec{L}}_S = \vec{M}_S, \qquad \rightarrow \qquad mr^2\Omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = 2r \begin{bmatrix} 0 \\ A_3 - B_3 \\ B_2 - A_2 \end{bmatrix},$$

und daraus folgt

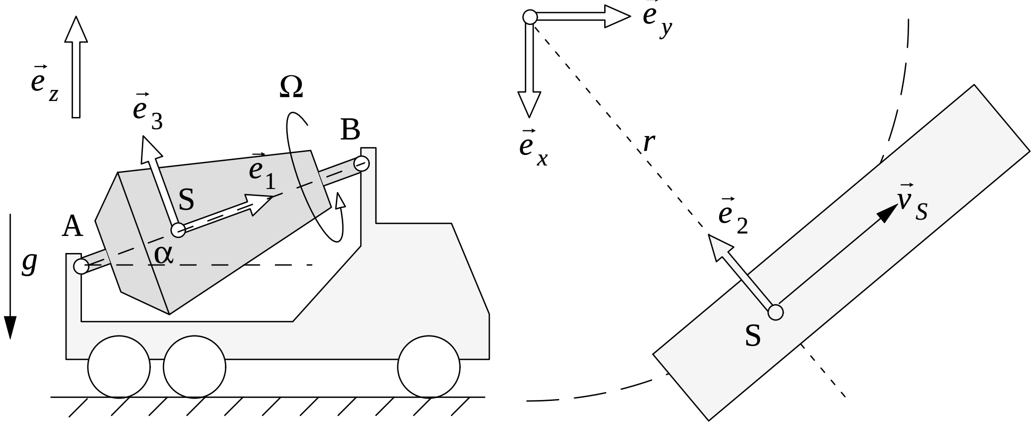
$$\begin{aligned} A_3 - B_3 &= 0, \\ B_2 - A_2 &= \frac{1}{\pi} mr\Omega^2. \end{aligned}$$

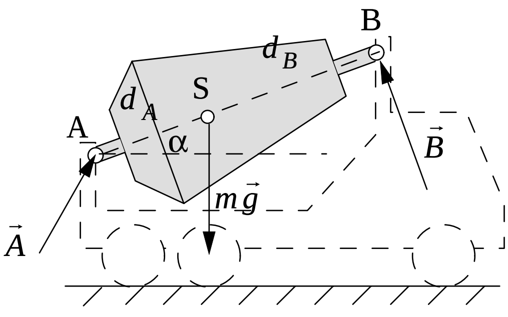
Aus dem Schwerpunktsatz und dem Drehimpulssatz (Momentensatz) erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{m}{2}\{-\frac{1}{\pi} r\Omega^2 + g\cos(\Omega t)\}, \\ B_2 &= \frac{m}{2}\{\frac{1}{\pi} r\Omega^2 + g\cos(\Omega t)\}, \\ A_3 &= B_3 = -\frac{m}{2} g\sin(\Omega t). \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Auf einem Fahrzeug ist in den Auflagern A (dreiwertig) und B (zweiwertig) ein rotationssymmetrischer Behälter (Schwerpunkt S, Masse m, Hauptträgheitsmomente bezogen auf den Schwerpunkt: $\Theta_{S1} = \Theta$, $\Theta_{S2} = \Theta_{S3} = \beta\Theta$) gelagert, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die Achse AB dreht. Das Fahrzeug fährt in der raumfesten xy-Ebene mit konstanter Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S auf einem Kreis (Radius r). Man berechne im fahrzeugfesten $\vec{e}_i$-System die absolute Winkelgeschwindigkeit des Behälters und die Lagerkräfte in A und B.





$$\overline{\mathrm{AS}} = d_A, \quad \overline{\mathrm{BS}} = d_B$$

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$$

$$\vec{B} = B_2\vec{e}_2 + B_3\vec{e}_3$$

Führungswinkelgeschwindigkeit infolge der Kreisbogenfahrt:

$$\vec{\omega}_F = \frac{v_S}{r}\vec{e}_z = \frac{v_S}{r}(\sin\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\alpha\,\vec{e}_3).$$

Absolute Winkelgeschwindigkeit des Behälters:

$$\vec{\omega} = \Omega\vec{e}_1 + \vec{\omega}_F = (\Omega + \frac{v_S}{r}\sin\alpha)\vec{e}_1 + \frac{v_S}{r}\cos\alpha\,\vec{e}_3.$$

Drehimpulsvektor des Behälters, dargestellt im fahrzeugfesten $\vec{e}_i$-System:

$$\vec{L}_S = \mathbf{\Theta}_S\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 \\ 0 & \beta\Theta & 0 \\ 0 & 0 & \beta\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega + \omega_F \sin\alpha \\ 0 \\ \omega_F \cos\alpha \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} \Omega + \omega_F \sin\alpha \\ 0 \\ \beta\omega_F \cos\alpha \end{bmatrix}, \qquad \omega_F = \frac{v_S}{r}.$$

Schwerpunktssatz:

$$m\vec{a}_S = m\vec{g} + \vec{A} + \vec{B}, \qquad m\begin{bmatrix} 0 \\ v_S{}^2/r \\ 0 \end{bmatrix} = -mg\begin{bmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = mg\sin\alpha, \qquad A_2 + B_2 = m\,\frac{v_S{}^2}{r}, \qquad A_3 + B_3 = mg\cos\alpha.$$

Auf S bezogener Drehimpulssatz:

$$\dot{\vec{L}}_S = \vec{M}_S,$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_S}{dt}\right)_{rel} + \vec{\omega}_F \times \vec{L}_S = -d_A\vec{e}_1 \times \vec{A} + d_B\vec{e}_1 \times \vec{B}.$$

Weil Ω und $\omega_F = v_S/r$ konstant sind, wird $\left(\frac{d\vec{L}_S}{dt}\right)_{rel} = \vec{0}$. Also ist

$$\omega_F\begin{bmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \times \Theta\begin{bmatrix} \Omega + \omega_F\sin\alpha \\ 0 \\ \beta\omega_F\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix},$$

$$\Theta\omega_F\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega\cos\alpha + (1-\beta)\omega_F\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_A A_3 - d_B B_3 \\ d_B B_2 - d_A A_2 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt

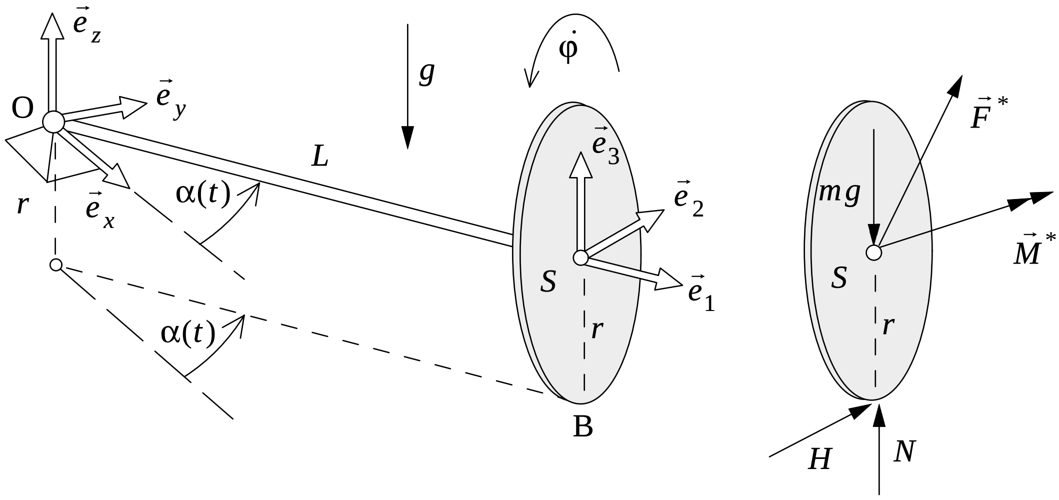
$$A_2 = \frac{d_B}{d_A}B_2, \qquad B_2 = \frac{d_A}{d_A + d_B}\,m\,\frac{v_S{}^2}{r},$$

$$A_3 = \frac{d_B mg\cos\alpha + \Theta\omega_F\cos\alpha\{\Omega + (1-\beta)\omega_F\sin\alpha\}}{d_A + d_B},$$

$$B_3 = \frac{d_A mg\cos\alpha - \Theta\omega_F\cos\alpha\{\Omega + (1-\beta)\omega_F\sin\alpha\}}{d_A + d_B}.$$

Aufgabe 6

Ein Rad (Masse m, Radius r) wird von einer Stange (Masse m_0, Länge L), die in O drehbar gelagert ist, um die raumfeste z-Achse geführt. Die Drehbewegung sei durch das Winkel-Zeit-Gesetz $\alpha(t)$ vorgegeben. Das Rad ist im Schwerpunkt S um die Stange drehbar gelagert und soll auf der horizontalen Ebene $z = -r$ rollen. Man berechne die inneren und äußeren Reaktionskräfte und Reaktionsmomente.



Die mit der Stange fest verbundene $\vec{e}_i$-Basis dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}_F = \dot{\alpha}\vec{e}_z = \dot{\alpha}\vec{e}_3.$$

Es gilt also

$$\dot{\vec{e}}_1 = \vec{\omega}_F \times \vec{e}_1 = \dot{\alpha}\vec{e}_2, \qquad \dot{\vec{e}}_2 = \vec{\omega}_F \times \vec{e}_2 = -\dot{\alpha}\vec{e}_1,$$

$$\vec{r}_S = L\vec{e}_1, \qquad \vec{v}_S = L\dot{\alpha}\vec{e}_2, \qquad \vec{a}_S = L\ddot{\alpha}\vec{e}_2 - L\dot{\alpha}^2\vec{e}_1.$$

Das Rad hat die Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}\vec{e}_3 + \dot{\varphi}\vec{e}_1.$$

Aus der kinematischen Rollbedingung folgt

$$\vec{v}_B = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times (-r\vec{e}_3) = (L\dot{\alpha} + r\dot{\varphi})\vec{e}_2 = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\varphi} = -\frac{L}{r}\dot{\alpha},$$

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}(-\frac{L}{r}\vec{e}_1 + \vec{e}_3).$$

Wegen der rotationssymmetrischen Massenverteilung des Rades um die $\vec{e}_1$-Achse besitzt der auf den Schwerpunkt S bezogene Trägheitstensor des Rades in der nicht-körperfesten $\vec{e}_i$-Basis die Darstellung

$$\mathbf{\Theta}_S = \Theta\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Theta := \frac{1}{4}mr^2.$$

Der auf S bezogene Drehimpulsvektor des Rades lautet

$$\vec{L}_S = \mathbf{\Theta}_S \vec{\omega} = \Theta\dot{\alpha}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -L/r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Theta\dot{\alpha}(-\frac{2L}{r}\vec{e}_1 + \vec{e}_3),$$

und seine absolute zeitliche Änderung

$$\dot{\vec{L}}_S = \left(\frac{d\vec{L}_s}{dt}\right)_{rel} + \vec{\omega}_F \times \vec{L}_S = \Theta\ddot{\alpha}\begin{bmatrix} -2L/r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \Theta\dot{\alpha}^2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2L/r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\vec{L}}_S = \Theta\{-(2\ddot{\alpha}L/r)\vec{e}_1 - (2\dot{\alpha}^2 L/r)\vec{e}_2 + \ddot{\alpha}\vec{e}_3\}.$$

Mit den vom Radlager am Ende der Stange OS auf das Rad wirkenden Reaktionskräften und Reaktionsmomentenmomenten

$$\vec{F}^* = F_1^*\vec{e}_1 + F_2^*\vec{e}_2 + F_3^*\vec{e}_3, \qquad \vec{M}^* = M_2^*\vec{e}_2 + M_3^*\vec{e}_3,$$

liefern der Schwerpunktsatz und der auf S bezogene Drehimpussatz für das Rad die Gleichungen

$$m\vec{a}_S = \vec{F}^* - mg\vec{e}_3 + N\vec{e}_3 + H\vec{e}_2, \qquad \dot{\vec{L}}_S = \vec{M}^* - r\,\vec{e}_3 \times H\,\vec{e}_2 = \vec{M}^* + rH\,\vec{e}_1;$$

$$mL\begin{bmatrix} -\dot{\alpha}^2 \\ \ddot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^* \\ F_2^* + H \\ F_3^* - mg + N \end{bmatrix}, \qquad \Theta\begin{bmatrix} -2\ddot{\alpha}L/r \\ -2\dot{\alpha}^2 L/r \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Hr \\ M_2^* \\ M_3^* \end{bmatrix}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$H = -\frac{1}{2}mL\,\ddot{\alpha}, \qquad F_1^* = -mL\dot{\alpha}^2, \qquad F_2^* = \frac{3}{2}mL\,\ddot{\alpha},$$

$$M_2^* = -\frac{1}{2}mLr\,\dot{\alpha}^2, \qquad M_3^* = \frac{1}{4}mr^2\ddot{\alpha},$$

$$N = mg - F_3^*.$$

Die Stange hat bezogen auf O den Drehimpuls

$$\vec{L}_0 = \frac{1}{3}m_0 L^2\dot{\alpha}\vec{e}_z,$$

und der Drehimpulssatz für die Stange lautet mit dem Antriebsmoment M_{03}

$$\dot{\vec{L}}_0 = M_{03}\vec{e}_3 + \frac{L}{2}\vec{e}_1 \times (-m_0 g\vec{e}_3) + L\vec{e}_1 \times (-\vec{F}^*) + (-\vec{M}^*),$$

$$\frac{1}{3}m_0L^2\ddot{\alpha}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\M_{03}\end{bmatrix}+\frac{L}{2}m_0g\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+L\begin{bmatrix}0\\F_3{}^*\\-F_2{}^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-M_2{}^*\\-M_3{}^*\end{bmatrix},$$

also wird

$$F_3{}^*=-\frac{1}{2}m_0g-\frac{1}{2}mr\dot{\alpha}^2,\qquad N=(m+\frac{m_0}{2})g+mr\,\dot{\alpha}^2,$$

und das erforderliche Antriebsmoment in O

$$M_{03}=(\frac{1}{3}m_0L^2+\frac{3}{2}mL^2+\frac{1}{4}mr^2)\ddot{\alpha}.$$

Das Rad kann nur dann rollen, wenn die dynamische Rollbedingung

$$|H|\leq\mu_0N\quad\rightarrow\quad\frac{1}{2}mL\ddot{\alpha}\leq\mu_0\{(m+\frac{m_0}{2})g+mr\dot{\alpha}^2\}$$

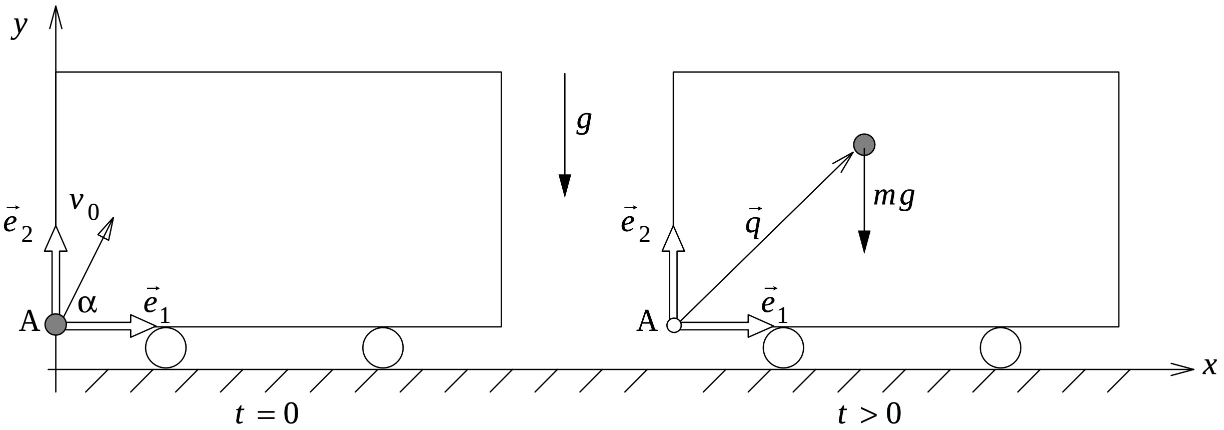
ist.

Aufgabe 1

In einem Fahrzeug, das sich mit der Führungsbeschleunigung $\vec{a}_F = (g/4)\vec{e}_x$ bewegt, wird im Punkt A zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Ball mit der Relativgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{rel}(0) = v_0(\cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_2)$$

abgeworfen. Man berechne die Wurfbahn, die ein mit dem Fahrzeug bewegter Beobachter sieht.



Führungsbeschleunigung:

$$\vec{a}_F = \frac{g}{4}\vec{e}_1.$$

Bewegungsgleichung im beschleunigt bewegten Bezugssystem:

$$m\vec{a}_{rel} = -mg\vec{e}_2 + (-m\vec{a}_F) \quad \rightarrow \quad m\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0\\ mg\end{bmatrix} - m\begin{bmatrix}g/4\\ 0\end{bmatrix},$$

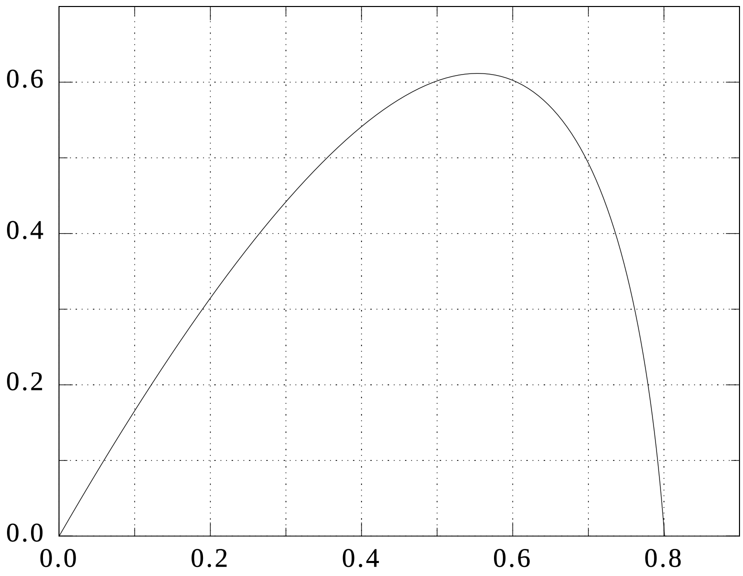
$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= -\frac{g}{4},\\ \ddot{q}_2 &= -g;\end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{q}_1 &= -\frac{g}{4}t + v_0\cos\alpha,\\ \dot{q}_2 &= -gt + v_0\sin\alpha;\end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned}q_1 &= -\frac{g}{8}t^2 + v_0 t\cos\alpha,\\ q_2 &= -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t\sin\alpha.\end{aligned}$$

Der Ball berührt zum Zeitpunkt T den Fahrzeugboden. Dann gilt

$$-\frac{g}{2}T^2 + v_0 T\sin\alpha = 0, \quad \rightarrow \quad T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g};$$

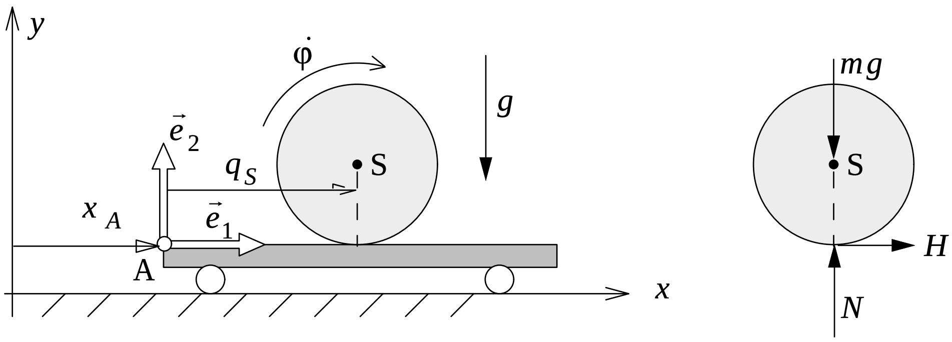
$$q_1(T) = \frac{v_0^{\,2}}{2g}\sin\alpha(4\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Die folgende Abbildung zeigt die Relativbahn des Ballschwerpunktes für $\alpha = 60^{\circ}$ und $v_0 = 4\ \mathrm{m/s}$.



Aufgabe 2

Eine Kugel (Masse m, Radius R) liegt auf einem waagrechten Schwingtisch, der die harmonische Schwingung $x_A = h\sin(\Omega t)$ ausführt. Bei welcher Kreisfrequenz Ω kann die Kugel noch rollen, wenn der Haftreibungskoeffizient μ_0 gegeben ist?



Führungsbeschleunigung des bewegten Bezugssystems:

$$\vec{a}_F = \ddot{x}_A \vec{e}_1 = -h\Omega^2 \sin(\Omega t)\vec{e}_1.$$

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot{q}_S = R\dot{\varphi}, \qquad \vec{a}_{Srel} = \ddot{q}_S \vec{e}_1.$$

Schwerpunktsatz im bewegten $\vec{e}_i$-System:

$$m\vec{a}_{Srel} = -mg\vec{e}_2 + N\vec{e}_2 + H\vec{e}_1 + (-m\vec{a}_F), \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} m\ddot{q}_S &= H - m\ddot{x}_A, \\ N &= mg. \end{aligned}$$

Momentensatz, bezogen auf den Schwerpunkt:

$$\Theta_S \ddot{\varphi} = -HR, \qquad \rightarrow \qquad \frac{2}{5} mR^2 \frac{\ddot{q}_S}{R} = -HR,$$

Bewegungsgleichung:

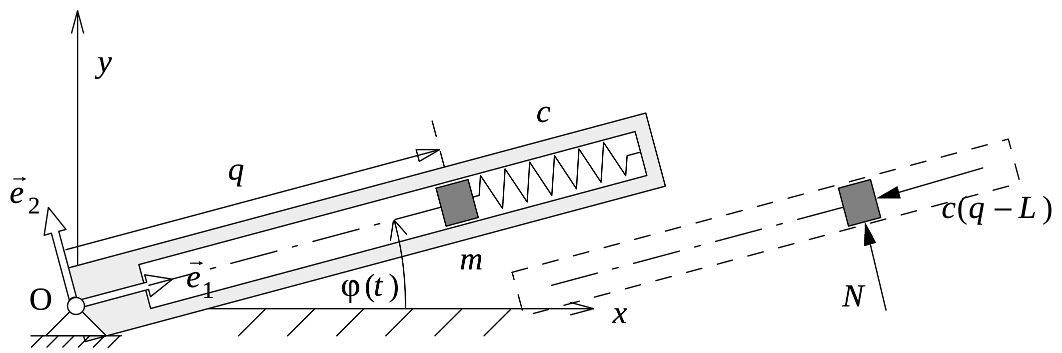
$$m\ddot{q}_S = H - m\ddot{x}_A, \qquad \frac{2}{5}m\ddot{q}_S = -H, \qquad \rightarrow \qquad \ddot{q}_S = -\frac{5}{7}\ddot{x}_A.$$

Reaktionskraft:

$$H = \frac{2}{7}m\ddot{x}_A = -\frac{2}{7}mh\Omega^2\sin(\Omega t).$$

$$|H| \le \mu_0 N \qquad \rightarrow \qquad \frac{2}{7}mh\Omega^2 \le \mu_0 mg, \qquad \rightarrow \qquad \Omega \le \sqrt{\frac{7\mu_0 g}{2h}}.$$

Aufgabe 3



In einem Rahmen, der sich nach dem vorgegebenen Winkel-Zeit-Gesetz $\varphi(t)$ in der xy-Ebene um den raumfesten Punkt O dreht, kann reibungsfrei eine Masse m gleiten, die mit einer Feder (Steifigkeit c) verbunden ist. In der Lage $q = L$ sei die Feder entspannt. Man bestimme die Bewegungsgleichung der Relativbewegung der Masse im rotierenden Bezugssystem.

Kinematische Zwangsbedingung:

$$\vec{v}_{rel} = \dot{q}\vec{e}_1, \qquad \vec{a}_{rel} = \ddot{q}\vec{e}_1.$$

Führungswinkelgeschwindigkeit und -beschleunigung:

$$\vec{\omega}_F = \dot{\varphi}\vec{e}_3, \qquad \dot{\vec{\omega}}_F = \ddot{\varphi}\vec{e}_3, \qquad (\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2).$$

Führungsbeschleunigung der Masse m:

$$\vec{a}_F = \dot{\vec{\omega}}_F \times q\vec{e}_1 + \vec{\omega}_F \times (\vec{\omega}_F \times q\vec{e}_1) = \ddot{\varphi}q\vec{e}_2 - \dot{\varphi}^2 q\vec{e}_1.$$

CORIOLISbeschleunigung der Masse m:

$$\vec{a}_{Cor} = 2\vec{\omega}_F \times \vec{v}_{rel} = 2\dot{\varphi}\vec{e}_3 \times \dot{q}\vec{e}_1 = 2\dot{\varphi}\dot{q}\vec{e}_2.$$

Schwerpunktsatz im rotierenden $\vec{e}_i$-System:

$$m\vec{a}_{rel} = -c(q-L)\vec{e}_1 + N\vec{e}_2 + (-m\vec{a}_F) + (-m\vec{a}_{Cor}),$$

$$m\ddot{q}\vec{e}_1 = -c(q-L)\vec{e}_1 + N\vec{e}_2 - m\ddot{\varphi}q\vec{e}_2 + \underbrace{m\dot{\varphi}^2 q\vec{e}_1}_{\text{Zentrifugalkraft}} - 2m\dot{\varphi}\dot{q}\vec{e}_2,$$

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{q} = -c(q-L) + m\dot{\varphi}^2 q.$$

Reaktionskraft:

$$N = m\ddot{\varphi}q + 2m\dot{\varphi}\dot{q}.$$

Ist insbesondere

$$\dot{\varphi} = \Omega = const$$

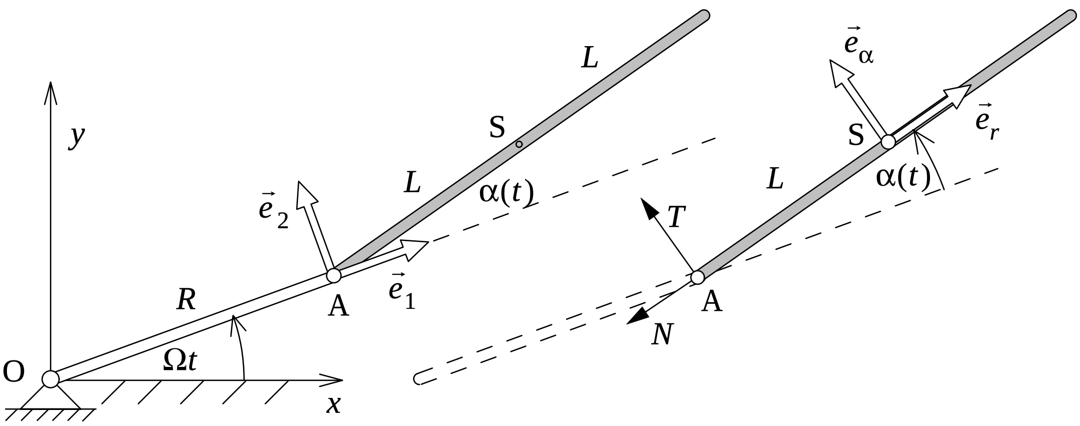
so lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} + (\omega_0{}^2 - \Omega^2)q = \omega_0{}^2 L, \qquad \omega_0{}^2 := \frac{c}{m}.$$

Wenn $\Omega < \omega_0$ ist, führt die Masse m eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \Omega^2}$ aus.

Aufgabe 4

Im Endpunkt A einer starren Stange (Länge R), die sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω in der xy-Ebene um den raumfesten Punkt O dreht, ist eine zweite starre Stange (Länge $2L$, Masse m) gelenkig so befestigt, daß sie sich reibungsfrei ebenfalls in der xy-Ebene drehen kann. Man bestimme die Bewegungsgleichung für die Relativdrehung $\alpha(t)$ und die Reaktionskräfte im Gelenkpunkt A.



Kinematische Zwangsbedingung: Der Schwerpunkt S bewegt sich im $\vec{e}_i$-System auf einem Kreis mit dem Radius L um den Punkt A.

$$\vec{v}_{S\,rel} = L\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha, \qquad \vec{a}_{S\,rel} = L\ddot{\alpha}\vec{e}_\alpha - L\dot{\alpha}^2\vec{e}_r.$$

Führungsbeschleunigung des Schwerpunktes:

$$\vec{a}_{SF} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_F \times \overrightarrow{AS} + \vec{\omega}_F \times (\vec{\omega}_F \times \overrightarrow{AS}),$$

$$\vec{a}_A = -R\Omega^2 \vec{e}_1, \qquad \vec{\omega}_F = \Omega \vec{e}_3, \qquad \dot{\vec{\omega}}_F = \vec{0}, \qquad \overrightarrow{AS} = L\vec{e}_r,$$

$$\vec{a}_{SF} = -\Omega^2 R\,\vec{e}_1 - \Omega^2 L\vec{e}_r = -\Omega^2 R\,(\cos\alpha \vec{e}_r - \sin\alpha \vec{e}_\alpha) - \Omega^2 L\vec{e}_r.$$

CORIOLISbeschleunigung des Schwerpunktes:

$$\vec{a}_{S\,Cor} = 2\vec{\omega}_F \times \vec{v}_{S\,rel} = 2\Omega L\dot{\alpha}\,\vec{e}_3 \times \vec{e}_\alpha = -2\dot{\alpha}\Omega L\vec{e}_r.$$

Schwerpunktsatz im rotierenden $\vec{e}_i$-System:

$$m\vec{a}_{S\,rel} = -N\vec{e}_r + T\vec{e}_\alpha + (-m\vec{a}_{S\,F}) + (-m\vec{a}_{S\,Cor}),$$

$$m\,(L\ddot{\alpha}\vec{e}_\alpha - L\dot{\alpha}^2\vec{e}_r) = -N\vec{e}_r + T\vec{e}_\alpha + m\Omega^2\{(L + R\cos\alpha)\vec{e}_r - R\sin\alpha\vec{e}_\alpha\} + 2m\dot{\alpha}\Omega L\vec{e}_r,$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} mL\ddot{\alpha} &= T - m\Omega^2 R\sin\alpha, \\ mL\dot{\alpha}^2 &= N - m\Omega^2(L + R\cos\alpha) - 2m\dot{\alpha}\Omega L. \end{aligned}$$

Momentensatz bezogen auf den Schwerpunkt:

$$\Theta_S\ddot{\varphi} = -TL, \qquad \varphi := \Omega t + \alpha, \qquad \Theta_S = \frac{1}{3}mL^2, \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{3}mL\ddot{\alpha} = -T.$$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} mL\ddot{\alpha} &= T - m\Omega^2 R\sin\alpha, \\ \frac{1}{3}mL\ddot{\alpha} &= -T, \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad \ddot{\alpha} + \omega_0{}^2\sin\alpha = 0, \qquad \omega_0{}^2 := \frac{3R}{4L}\Omega^2.$$

Die Stange bewegt sich wie ein physikalisches Pendel.

Reaktionskräfte:

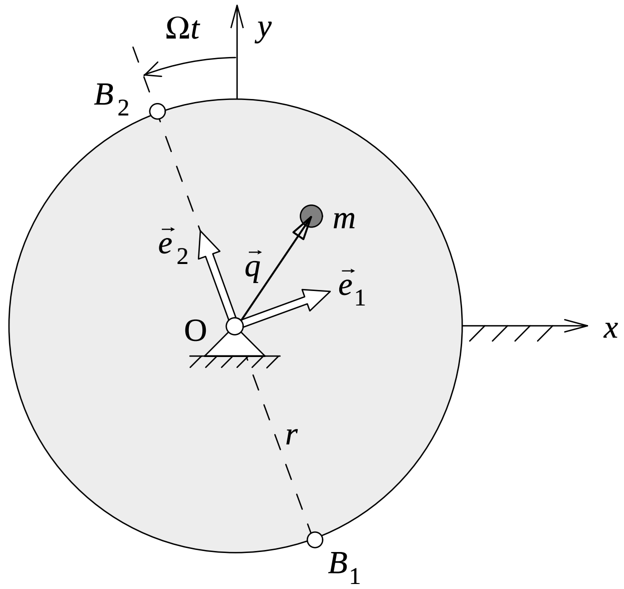
$$T = \frac{1}{4}mR\Omega^2\sin\alpha, \qquad N = mL\dot{\alpha}^2 + m\Omega^2(L + R\cos\alpha) + 2mL\Omega\dot{\alpha}.$$

$$\ddot{\alpha}\dot{\alpha} + \omega_0{}^2\sin\alpha\,\dot{\alpha} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 - \omega_0{}^2\cos\alpha = const,$$

$$\alpha(0) = \alpha_0, \qquad \dot{\alpha}(0) = 0: \qquad \rightarrow \qquad \dot{\alpha}(\alpha) = \omega_0\sqrt{2}\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}.$$

Aufgabe 5

Auf einer horizontalen Plattform (Radius r), die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die vertikale Achse durch den Punkt O dreht, befinden sich zwei Beobachter B_1 und B_2. Eine kleine Scheibe (Masse m) wird von B_1 aus über die reibungsfreie Plattform mit der Relativgeschwindigkeit v_0 auf B_2 zu geschoben. Man berechne die relative Bahnkurve des Scheibenschwerpunktes.



$$\vec{\omega}_F = \Omega \vec{e}_3, \qquad \dot{\vec{\omega}}_F = \vec{0}.$$

Schwerpunktsatz für die Scheibe im rotierenden $\vec{e}_i$-System:

$$m\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -mg\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ N\end{bmatrix} - m\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \Omega\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \Omega\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ 0\end{bmatrix}\right) - 2m\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \Omega\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ 0\end{bmatrix},$$

$$m\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -mg\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ N\end{bmatrix} + \underbrace{m\Omega^2\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ 0\end{bmatrix}}_{\text{Zentrifugalkraft}} \underbrace{-2m\Omega\begin{bmatrix}-\dot{q}_2\\ \dot{q}_1\\ 0\end{bmatrix}}_{\text{CORIOLISkraft}},$$

Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{q}_1 - 2\Omega\dot{q}_2 - \Omega^2 q_1 = 0,$$
$$\ddot{q}_2 + 2\Omega\dot{q}_1 - \Omega^2 q_2 = 0.$$

Reaktionskraft:

N=mg.

Spezielle Lösungsvektoren der Bewegungsgleichungen sind, wie man durch Einsetzen erkennt:

$$\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\Omega t)\\ -\sin(\Omega t)\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin(\Omega t)\\ \cos(\Omega t)\end{bmatrix}.$$

Mit dem Lösungsansatz

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = f(t)\begin{bmatrix} \cos(\Omega t) \\ -\sin(\Omega t) \end{bmatrix} + g(t)\begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot f \cos(\Omega t) + \ddot g \sin(\Omega t) &= 0, \\ -\ddot f \sin(\Omega t) + \ddot g \cos(\Omega t) &= 0; \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \ddot f = 0, \qquad \ddot g = 0; \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} f(t) &= C_1 + C_2 t, \\ g(t) &= C_3 + C_4 t. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen lautet nun:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = (C_1 + C_2 t)\begin{bmatrix} \cos(\Omega t) \\ -\sin(\Omega t) \end{bmatrix} + (C_3 + C_4 t)\begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{bmatrix}.$$

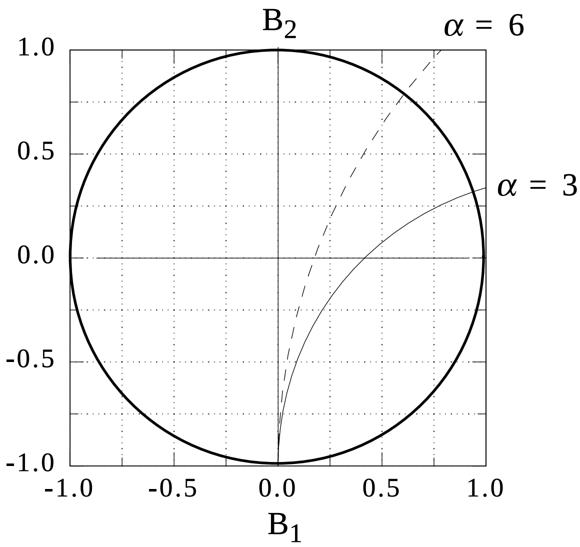
Mit den vier Konstanten $C_1,\ldots,C_4$ müssen vier Anfangsbedingungen erfüllt werden.

Ist insbesondere laut Aufgabenstellung

$$q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = -r, \quad \dot q_1(0) = 0, \quad \dot q_2(0) = v_0,$$

so lautet die spezielle Lösung

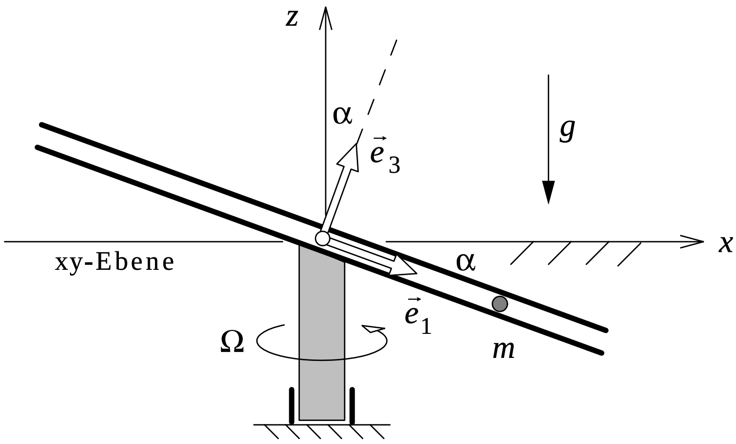
$$\begin{aligned} q_1(t) &= (v_0 t - r)\sin(\Omega t) + r\Omega t \cos(\Omega t), \\ q_2(t) &= (v_0 t - r)\cos(\Omega t) - r\Omega t \sin(\Omega t). \end{aligned}$$



$$\alpha := v_0 / (\Omega r).$$

Aufgabe 6

Zwei parallele starre Platten rotieren mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die raumfeste vertikale z-Achse. Zwischen den Platten kann reibungsfrei eine kleine Kugel (Masse m) gleiten. Man bestimme in den Koordinaten q_1 und q_2 die Bewegungsgleichungen des Kugelschwerpunktes.



$$\vec{e}_1 = \cos\alpha\cos(\Omega t)\vec{e}_x + \cos\alpha\sin(\Omega t)\vec{e}_y - \sin\alpha\,\vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_2 = -\sin(\Omega t)\vec{e}_x + \cos(\Omega t)\vec{e}_y, \qquad \vec{e}_z = -\sin\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\alpha\,\vec{e}_3.$$

$$\vec{e}_3 = \sin\alpha\cos(\Omega t)\vec{e}_x + \sin\alpha\sin(\Omega t)\vec{e}_y + \cos\alpha\,\vec{e}_z;$$

Ortsvektor des Kugelschwerpunktes:

$$\vec{q} = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2.$$

Kinematische Zwangsbedingung:

$$q_3 = 0.$$

Führungswinkelgeschwindigkeit:

$$\vec{\omega}_F = \Omega\vec{e}_z = \Omega(-\sin\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\alpha\,\vec{e}_3).$$

Führungsbeschleunigung:

$$\vec{a}_F = \vec{\omega}_F \times (\vec{\omega}_F \times \vec{q}) = \Omega^2 \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = -\Omega^2 \begin{bmatrix} \cos^2\alpha\, q_1 \\ q_2 \\ \sin\alpha\cos\alpha\, q_1 \end{bmatrix}.$$

CORIOLISbeschleunigung:

$$\vec{a}_{Cor} = 2\vec{\omega}_F \times \vec{v}_{rel} = 2\Omega \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\Omega \begin{bmatrix} -\cos\alpha\,\dot{q}_2 \\ \cos\alpha\,\dot{q}_1 \\ -\sin\alpha\,\dot{q}_2 \end{bmatrix}.$$

Schwerpunktsatz im rotierenden Bezugssystem:

$$m\vec{a}_{rel} = -mg\vec{e}_z + N\vec{e}_3 - m\vec{a}_F - m\vec{a}_{Cor}.$$

$$m\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ 0\end{bmatrix} = mg\begin{bmatrix}\sin\alpha\\ 0\\ -\cos\alpha\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ N\end{bmatrix} + m\Omega^2\begin{bmatrix}\cos^2\alpha\, q_1\\ q_2\\ \sin\alpha\cos\alpha\, q_1\end{bmatrix} + 2m\Omega\begin{bmatrix}\cos\alpha\,\dot{q}_2\\ -\cos\alpha\,\dot{q}_1\\ \sin\alpha\,\dot{q}_2\end{bmatrix}.$$

Bewegungsgleichungen:

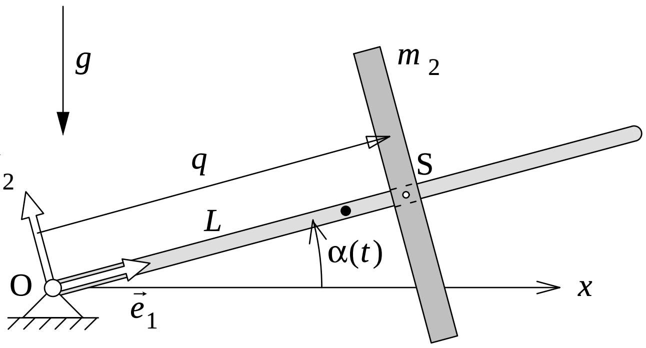
$$\ddot{q}_1 - 2\Omega\cos\alpha\,\dot{q}_2 - \Omega^2\cos^2\alpha\, q_1 = g\sin\alpha,$$

$$\ddot{q}_2 + 2\Omega\cos\alpha\,\dot{q}_1 - \Omega^2 q_2 = 0.$$

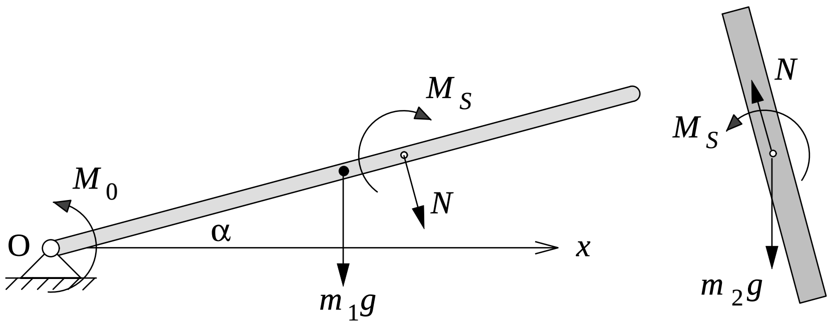
Reaktionskraft:

$$N = mg\cos\alpha - m\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha\, q_1 - 2m\Omega\sin\alpha\,\dot{q}_2.$$

Aufgabe 7



Auf einer starren Stange (Masse m_1, Länge $2L$), die sich in einer vertikalen Ebene nach dem gegebenen Gesetz $\alpha(t)$ um den raumfesten Punkt O dreht, kann reibungsfrei eine starre Scheibe (Masse m_2, Trägheitsmoment Θ_S) gleiten. Man berechne die Bewegungsgleichung für die Koordinate q des Scheibenschwerpunktes S auf der Stabachse, die Reaktionskraft in S und die Reaktionsmomente in O und S.



$$\vec{g} = -g(\sin\alpha\vec{e}_1 + \cos\alpha\vec{e}_2).$$

Momentensatz für die Scheibe:

$$\Theta_S \ddot{\alpha} = M_S .$$

Kinematische Zwangsbedingung:

$$\vec{v}_{S\,rel} = \dot{q}\,\vec{e}_1, \qquad \vec{a}_{S\,rel} = \ddot{q}\,\vec{e}_1 .$$

Führungs- und CORIOLISbeschleunigung des Scheibenschwerpunktes S:

$$\vec{a}_{S\,F} = \ddot{\alpha}\,\vec{e}_3 \times q\,\vec{e}_1 + \dot{\alpha}\,\vec{e}_3 \times (\dot{\alpha}\,\vec{e}_3 \times q\,\vec{e}_1) = \ddot{\alpha} q\,\vec{e}_2 - \dot{\alpha}^2 q\,\vec{e}_1,$$

$$\vec{a}_{S\,Cor} = 2\dot{\alpha}\,\vec{e}_3 \times \dot{q}\,\vec{e}_1 = 2\dot{\alpha}\dot{q}\,\vec{e}_2 .$$

Schwerpunktsatz für die Scheibe:

$$m_2 \vec{a}_{S\,rel} = m_2 \vec{g} + N\vec{e}_2 + (-m_2 \vec{a}_{S\,F}) + (-m_2 \vec{a}_{S\,Cor}),$$

$$m_2 \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ 0 \end{bmatrix} = -m_2 g \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} - m_2 \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}^2 q \\ \ddot{\alpha} q \end{bmatrix} - m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2\dot{\alpha}\dot{q} \end{bmatrix},$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q} - \dot{\alpha}^2 q = -g \sin\alpha .$$

Reaktionslasten auf die Scheibe:

$$N = m_2 g \cos\alpha + m_2 \ddot{\alpha} q + m_2 2\dot{\alpha}\dot{q}, \qquad M_S = \Theta_S \ddot{\alpha}.$$

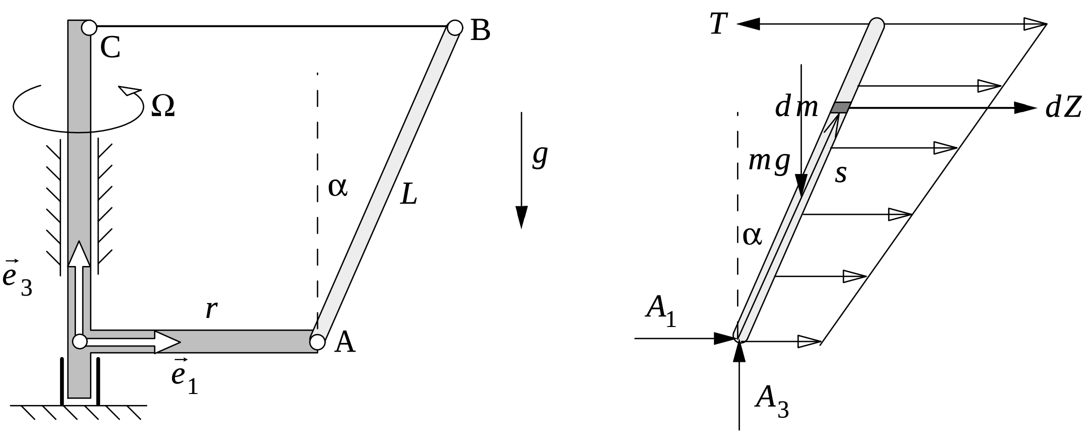
Auf O bezogener Momentensatz für die Stange:

$$\Theta_0 \ddot{\alpha} = M_0 - M_S - Nq - m_1 g L \cos\alpha, \qquad (\Theta_0 = \frac{4}{3} m_1 L^2)$$

In O auf die Stange wirkendes Reaktionsmoment:

$$M_0 = (\Theta_0 + \Theta_S)\ddot{\alpha} + qN + m_1 g L \cos\alpha .$$

Aufgabe 8



Eine starre Stange AB (Länge L, Masse m) ist in einem mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω um eine raumfeste vertikale Achse rotierenden Rahmen in A gelenkig gelagert und mit einem Seil BC verbunden, so daß sich die Stange relativ zum Rahmen nicht bewegt. Man berechne die Seilkraft und die Auflagerkräfte in A.

Auf ein Massenelement $dm = (m/L)ds$ im Abstand s vom Punkt A wirkt in $\vec{e}_1$-Richtung die Zentrifugalkraft

$$d\vec{Z} = dm\,(r + s\sin\alpha)\Omega^2 \vec{e}_1.$$

Diese Zentrifugalkraftbelastung des Stabes kann als stetig verteilte Streckenlast

$$q_1(s) := \frac{m}{L}(r + s\sin\alpha)\Omega^2$$

beschrieben werden. Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Stab im rotierenden Bezugssystem berechnen wir nun die Reaktionskräfte im Auflager A und im Seil:

$$A_1 - T + \int_0^L q_1(s)ds = 0, \qquad A_3 - mg = 0,$$

$$T\,L\cos\alpha - mg\frac{L}{2}\sin\alpha - \int_0^L q_1(s)s\cos\alpha\, ds = 0;$$

$$\int_0^L q_1(s)ds = \frac{m}{L}\Omega^2 \int_0^L (r + s\sin\alpha)ds = m\Omega^2(r + \frac{L}{2}\sin\alpha),$$

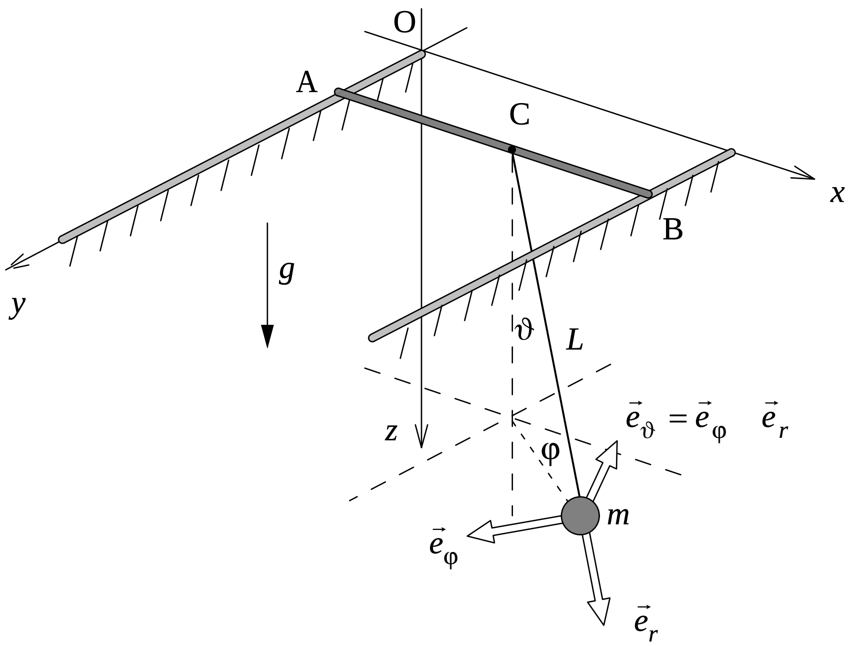
$$\int_0^L q_1(s)s\cos\alpha ds = \frac{m}{L}\Omega^2\cos\alpha \int_0^L (rs + s^2\sin\alpha)ds = m\Omega^2\cos\alpha(r\frac{L}{2} + \frac{L^2}{3}\sin\alpha),$$

$$T = \frac{1}{2}mg\tan\alpha + m\Omega^2(\frac{r}{2} + \frac{L}{3}\sin\alpha),$$

$$A_1 = \frac{1}{2}mg\tan\alpha - m\Omega^2(\frac{r}{2} + \frac{L}{6}\sin\alpha), \qquad A_3 = mg.$$

Aufgabe 9

Auf einer parallel zur raumfesten x-Achse geführten Schiene AB bewegt sich der Befestigungspunkt C eines Seils der Länge L, an dem eine Masse m hängt. Man bestimme die Bewegungsgleichungen der Masse m in den Koordinaten ϑ und φ sowie die Seilkraft S, wobei $x_C(t)$ und $y_C(t)$ vorgegeben sind.



Lokale Kugelkoordinatenbasis:

$$\vec{e}_r = \sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\vartheta\,\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_x = \sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_r + \cos\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_\vartheta - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{e}_\vartheta = \cos\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\vartheta\,\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_y = \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_\vartheta + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y; \qquad \vec{e}_z = \cos\vartheta\,\vec{e}_r - \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta.$$

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\vartheta} = \vec{e}_\vartheta, \qquad \frac{\partial\vec{e}_\vartheta}{\partial\vartheta} = -\vec{e}_r, \qquad \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\sin\vartheta\,\vec{e}_r - \cos\vartheta\,\vec{e}_\vartheta.$$

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = \sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi, \qquad \frac{\partial\vec{e}_\vartheta}{\partial\varphi} = \cos\vartheta\,\vec{e}_\varphi,$$

Relativbewegung der Masse m für einen mit dem Punkt C translatorisch bewegten Beobachter, der den Ortsvektor

$$\vec{q}(t) = L\,\vec{e}_r(\vartheta(t),\varphi(t))$$

verwendet:

$$\vec{v}_{rel} = L\left(\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\right) = L\left(\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi\right),$$

$$\vec{a}_{rel} = L\left(\ddot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + \dot{\vartheta}\left(\frac{\partial\vec{e}_\vartheta}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial\vec{e}_\vartheta}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\right) + \ddot{\varphi}\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\,\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\right),$$

$$\vec{a}_{rel} = L\left(-(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta)\vec{e}_r + (\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta)\vec{e}_\vartheta + (\ddot{\varphi}\sin\vartheta + 2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta)\vec{e}_\varphi\right).$$

Führungsbeschleunigung:

$$\vec{a}_F = \ddot{x}_C\vec{e}_x + \ddot{y}_C\vec{e}_y,$$

$$\vec{a}_F = (\ddot{x}_C \cos\varphi + \ddot{y}_C \sin\varphi)\sin\vartheta\,\vec{e}_r + (\ddot{x}_C \cos\varphi + \ddot{y}_C \sin\varphi)\cos\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + (-\ddot{x}_C \sin\varphi + \ddot{y}_C \cos\varphi)\vec{e}_\varphi.$$

Schwerpunktsatz für die Masse m

$$m\vec{a}_{rel} = -S\vec{e}_r + mg\vec{e}_z - m\vec{a}_F,$$

dargestellt in der Kugelkoordinatenbasis:

$$mL\begin{bmatrix} -\dot{\vartheta}^2 - \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta \\ \ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta \\ \ddot{\varphi}\sin\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + mg\begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \\ 0 \end{bmatrix} - m\ddot{x}_C\begin{bmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix} - m\ddot{y}_C\begin{bmatrix} \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

In der zweiten und dritten Komponente dieser Vektorgleichung stehen die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{\vartheta} = \dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{g}{L}\sin\vartheta - \frac{\cos\vartheta}{L}(\ddot{x}_C\cos\varphi + \ddot{y}_C\sin\varphi),$$

$$\ddot{\varphi} = -2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} + \frac{1}{L\sin\vartheta}(\ddot{x}_C\sin\varphi - \ddot{y}_C\cos\varphi).$$

Die Reaktionskraft lautet

$$S = mL(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta) + mg\cos\vartheta - m\sin\vartheta(\ddot{x}_C\cos\varphi + \ddot{y}_C\sin\varphi).$$

In diesen Gleichungen ist der Sonderfall der ebenen Bewegung in der xz-Ebene enthalten, für den $y_C \equiv 0, \quad \varphi \equiv 0$ gilt:

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{L}\sin\vartheta - \frac{\cos\vartheta}{L}\ddot{x}_C, \qquad S = mL\dot{\vartheta}^2 + mg\cos\vartheta - m\ddot{x}_C\sin\vartheta.$$

Wenn der Punkt C mit konstanter Geschwindigkeit bewegt wird, enthalten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\vartheta} = \dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{g}{L}\sin\vartheta,$$

$$\ddot{\varphi} = -2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta},$$

die spezielle Lösung

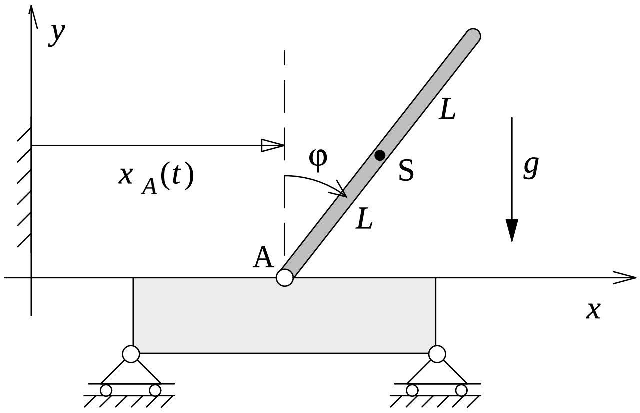
$$\vartheta = \vartheta_0 = const, \qquad \dot{\varphi} = \Omega = const,$$

wobei

$$\Omega^2\cos\vartheta_0 = \frac{g}{L}$$

gelten muß. Der Schwerpunkt bewegt sich dann mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω auf einem Kreis mit dem Radius $L\sin\vartheta_0$ um die Parallele zur z-Achse durch C. Die Resultierende von Gewichtskraft mg und Zentrifugalkraft $mL\Omega^2\sin\vartheta_0$ liegt in Richtung $\vec{e}_r$ auf dem Mantel des Kreiskegels mit der Spitze in C.

Aufgabe 10



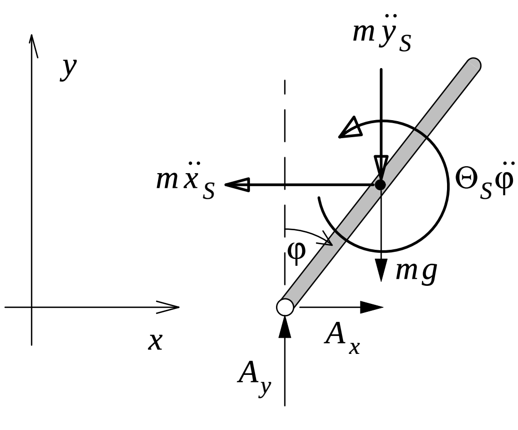
Auf einem Fahrzeug, das sich horizontal nach dem vorgegebenen Gesetz $x_A(t)$ bewegt, ist im Punkt A eine starre Stange (Länge $2L$, Masse m) reibungsfrei drehbar gelagert. Man bestimme die Bewegungsgleichung der Stange in der Koordinate φ mit Hilfe der d'Alembertschen Trägheitskräfte.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_S = x_A + L\sin\varphi, \qquad \ddot{x}_S = \ddot{x}_A + L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\dot{\varphi}^2\sin\varphi,$$

$$y_S = L\cos\varphi, \qquad \ddot{y}_S = -L\ddot{\varphi}\sin\varphi - L\dot{\varphi}^2\cos\varphi.$$

Die Reduktion der auf die Massenelemente dm der Stange wirkenden Trägheitskräfte in den Schwerpunkt S



ergibt die im Schwerpunkt wirkenden Kräfte $m\ddot{x}_S$ in negativer x–Richtung und

$m\ddot{y}_S$ in negativer y–Richtung sowie das Moment der Trägheitskräfte $\Theta_S\ddot{\varphi}$ in negativer φ–Richtung.

Ein mit der Stange bewegter Beobachter formuliert als Gleichgewichtsbedingung für die Momente im Punkt A:

$$-\Theta_S\ddot{\varphi} - m\ddot{x}_S L\cos\varphi + m\ddot{y}_S L\sin\varphi + mgL\sin\varphi = 0.$$

Mit den Zwangsbedingungen folgt daraus die Bewegungsgleichung

$$\Theta_A\ddot{\varphi} + m\ddot{x}_A L\cos\varphi - mgL\sin\varphi = 0.$$

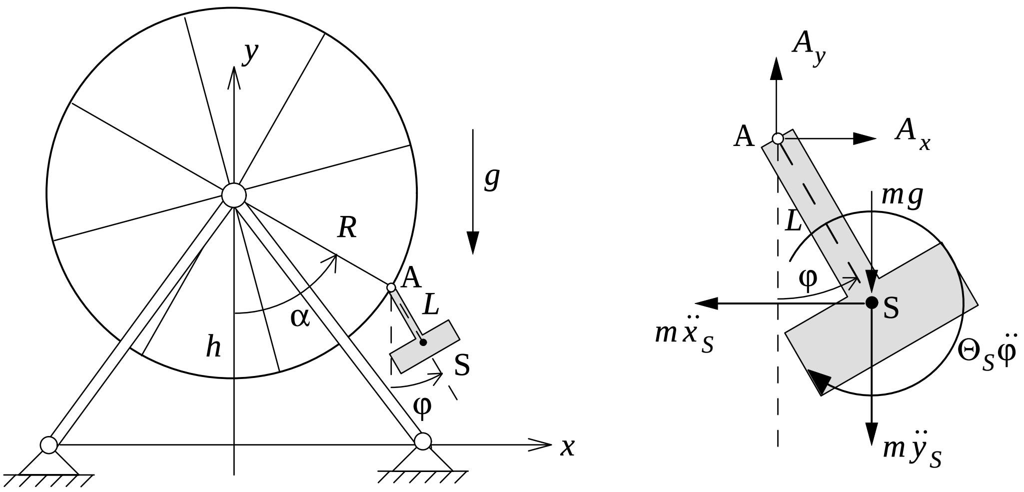
$$\Theta_A = \Theta_S + mL^2.$$

Die Reaktionskräfte erhalten wir aus den Kräftegleichgewichtsbedingungen:

$$A_x - m\ddot{x}_S = 0, \qquad A_x = m(\ddot{x}_A + L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\dot{\varphi}^2\sin\varphi),$$

$$A_y - mg - m\ddot{y}_S = 0. \qquad A_y = m(g - L\ddot{\varphi}\sin\varphi - L\dot{\varphi}^2\cos\varphi).$$

Aufgabe 11



Ein Riesenrad (Radius R) dreht sich nach dem gegebenen Winkel-Zeit-Gesetz $\alpha(t)$. Man berechne die Bewegungsgleichung einer Gondel (Masse m, Trägheitsmoment Θ_S) in der Koordinate φ und die Lagerkräfte im Gelenkpunkt A.

Für den mit der Gondel bewegten Beobachter gelten die Kräfte-Gleichgewichtsbedingungen:

$$A_x - m\ddot{x}_S = 0,$$

$$A_y - m\ddot{y}_S - mg = 0,$$

und die auf den Punkt A bezogene Momenten-Gleichgewichtsbedingung:

$$-\Theta_S\ddot{\varphi} - m\ddot{x}_S L\cos\varphi - m\ddot{y}_S L\sin\varphi - mgL\sin\varphi = 0.$$

Mit

$$x_S = R\sin\alpha + L\sin\varphi, \qquad y_S = h - R\cos\alpha - L\cos\varphi,$$

$$\dot{x}_S = R\dot{\alpha}\cos\alpha + L\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \dot{y}_S = R\dot{\alpha}\sin\alpha + L\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\ddot{x}_S = R\ddot{\alpha}\cos\alpha - R\dot{\alpha}^2\sin\alpha + L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\dot{\varphi}^2\sin\varphi,$$

$$\ddot{y}_S = R\ddot{\alpha}\sin\alpha + R\dot{\alpha}^2\cos\alpha + L\ddot{\varphi}\sin\varphi + L\dot{\varphi}^2\cos\varphi,$$

$$\ddot{x}_S\cos\varphi + \ddot{y}_S\sin\varphi = R\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha) + R\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha) + L\ddot{\varphi},$$

erhalten wir aus der Momenten-Gleichgewichtsbedingung die Bewegungsgleichung

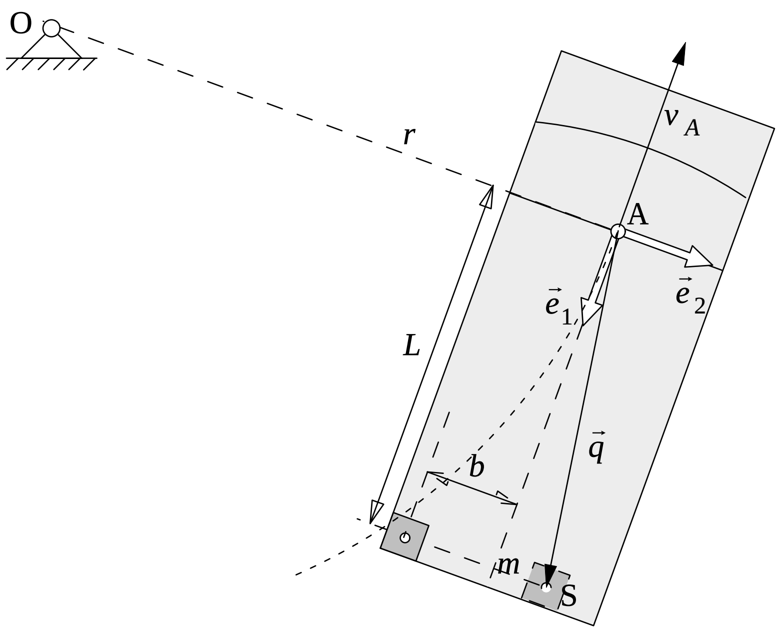
$$\Theta_A\ddot{\varphi} + mRL\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha) + mRL\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha) + mgL\sin\varphi = 0,$$

$$\Theta_A = \Theta_S + mL^2.$$

Aus den Kräfte-Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich die Lagerkräfte

$$A_x = m\ddot{x}_S, \qquad A_y = mg + m\ddot{y}_S.$$

Aufgabe 12



Auf der Ladefläche eines Fahrzeugs, dessen Punkt A mit konstanter Geschwindigkeit v_A auf einem Kreis mit dem Radius r um den Punkt O fährt, kann eine Kiste (Masse m) reibungsfrei entlang der hinteren Ladeklappe gleiten. Man berechne $q_2(t)$ zu den Anfangsbedingungen

$$q_1(0) = L, \quad q_2(0) = -b, \quad \dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = 0.$$

Schwerpunktsatz im rotierenden $\vec{e}_i$-System:

$$m\vec{a}_{Srel} = -mg\vec{e}_3 - N\vec{e}_1 + N_3\vec{e}_3 - m\vec{a}_{SF} - m\vec{a}_{SCor};$$

N ist die von der Ladeklappe auf die Kiste wirkende Reaktionskraft.

$$\vec{v}_{Srel} = \dot{q}_2\vec{e}_2, \qquad \vec{a}_{Srel} = \ddot{q}_2\vec{e}_2, \qquad \vec{a}_A = -\frac{v_A^{\,2}}{r}\vec{e}_2, \qquad \vec{\omega}_F = \frac{v_A}{r}\vec{e}_3, \qquad \dot{\vec{\omega}}_F = \vec{0},$$

$$\vec{a}_{SF} = \vec{a}_A - \omega_F^{\,2}(L\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2), \qquad \vec{a}_{SCor} = -2\frac{v_A}{r}\dot{q}_2\vec{e}_1;$$

$$m\begin{bmatrix}0\\ \ddot{q}_2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -mg\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-N\\ 0\\ N_3\end{bmatrix} - m\frac{v_A^{\,2}}{r^2}\begin{bmatrix}-L\\ -r-q_2\\ 0\end{bmatrix} - m\,2\frac{v_A}{r}\begin{bmatrix}-\dot{q}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

Bewegungsgleichung und Bewegungsgesetz:

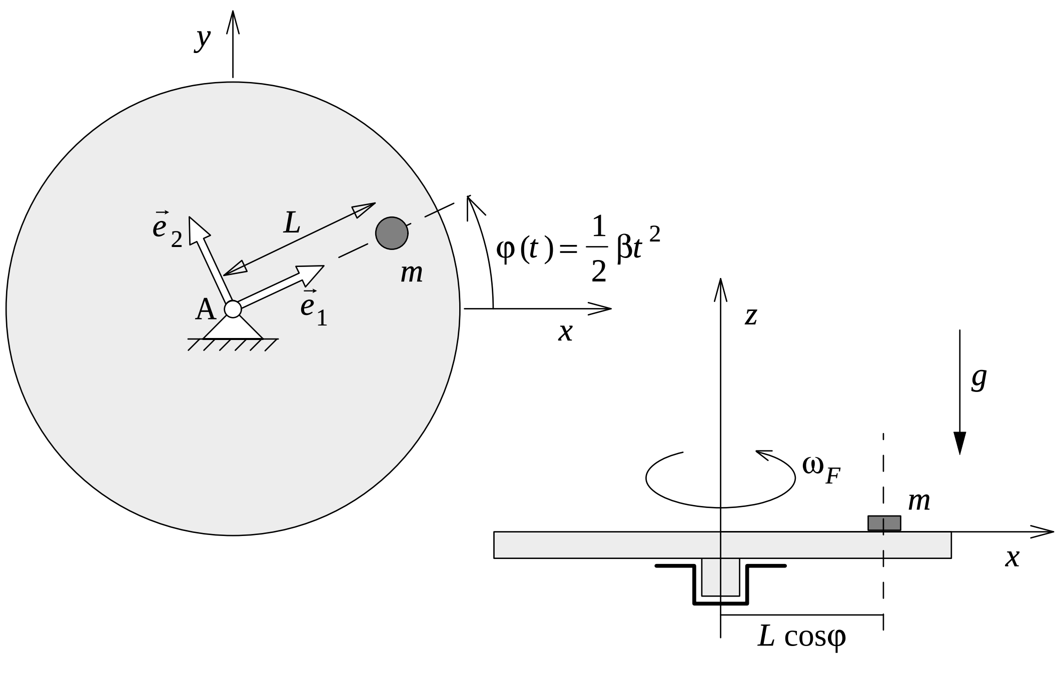
$$\ddot{q}_2 - \omega_F^{\,2}q_2 = \omega_F^{\,2}r, \qquad \omega_F := \frac{v_A}{r},$$

$$q_2(t) = (r-b)\cosh(\omega_F t) - r.$$

Reaktionskräfte:

$$N_3 = mg, \qquad N = m(\omega_F^{\,2}L^2 + 2\omega_F\dot{q}_2).$$

Aufgabe 13



Auf einer horizontalen Kreeisscheibe, die sich um die vertikale z-Achse durch A drehen kann, liegt ein Geldstück (Masse m) im Abstand L von der Drehachse.

Zum Zeitpunkt $t=0$ beginnt die Drehbewegung $\varphi(t)=(1/2)\beta t^2$. Bis zu welchem Zeitpunkt T kann die Haftreibungskraft eine Relativbewegung des Geldstücks auf der Kreisscheibe verhindern? (Haftreibungskoeffizient: μ_0)

Schwerpunktsatz im rotierenden $\vec{e}_i$-System:

$$m\vec{a}_{rel} = -mg\vec{e}_3 + N\vec{e}_3 + \vec{H} - m\vec{a}_F - m\vec{a}_{Cor}$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{0}, \qquad \vec{a}_{rel} = 0, \qquad \vec{a}_{Cor} = \vec{0}, \qquad \vec{a}_F = \dot{\vec{\omega}}_F \times L\vec{e}_1 - \omega_F{}^2 L\vec{e}_1,$$

$$\vec{\omega}_F = \dot{\varphi}\vec{e}_3 = \beta t\vec{e}_3, \qquad \dot{\vec{\omega}}_F = \beta\vec{e}_3,$$

$$\vec{a}_F = L\beta\,\vec{e}_2 - (\beta t)^2 L\,\vec{e}_1.$$

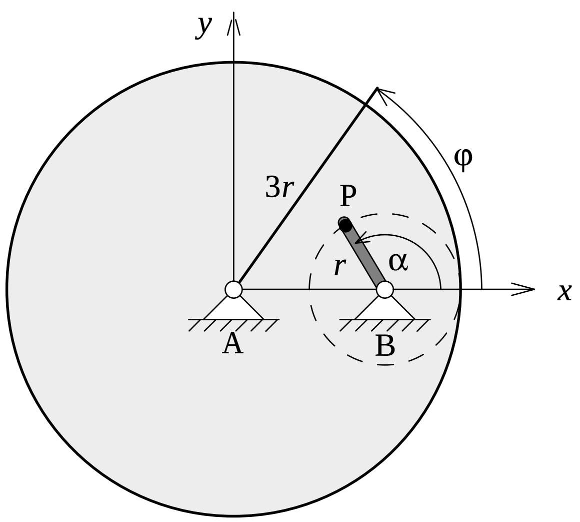
$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\-mg\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\N\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}H_1\\H_2\\0\end{bmatrix} + mL\begin{bmatrix}(\beta t)^2\\-\beta\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} N &= mg,\\ H_1 &= -mL(\beta t)^2,\\ H_2 &= mL\beta; \end{aligned}$$

$$\left|\vec{H}\right| = \sqrt{H_1{}^2 + H_2{}^2} = mL\beta\sqrt{\beta^2 t^4 + 1},$$

$$\left|\vec{H}\right| \le \mu_0 N \qquad \rightarrow \qquad L\beta\sqrt{\beta^2 t^4 + 1} \le \mu_0 g,$$

$$\beta^2 t^4 \le \left(\frac{\mu_0 g}{\beta L}\right)^2 - 1, \qquad T = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\sqrt[4]{\left(\frac{\mu_0 g}{\beta L}\right)^2 - 1}.$$

Aufgabe 14



Der Endpunkt P eines in B drehbar gelagerten Stabes (Länge r) wird mit der Kraft N auf eine in A ebenfalls drehbar gelagerte Kreisscheibe (Masse m, Radius $3r$) gedrückt. Wenn sich der Stab BP mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

$\dot{\alpha} = \Omega$ dreht, überträgt er in P die Gleitreibungskraft μN auf die Kreisscheibe, die dadurch zu einer Drehbewegung $\varphi(t)$ angetrieben wird. Man bestimme die entsprechende nichtlineare Bewegungsgleichung und berechne die Winkelgeschwindigkeit der Kreisscheibe numerisch mit den speziellen Werten

$$r = 0.15\,\mathrm{m}, \quad m = 5\,\mathrm{kg}, \quad N = 10\,\mathrm{kgms}^{-2}, \quad \mu = 0.3, \quad \Omega = 2\pi\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Hinweis: Alle Vektoren werden in der raumfesten xy-Basis dargestellt.

Ortsvektor und absoluter Geschwindigkeitsvektor des Punktes P:

$$\vec{AP} = \begin{bmatrix} 2r + r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_{P\,abs} = r\dot{\alpha}\begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Führungsgeschwindigkeit des Punktes P (= Geschwindigkeit des Punktes P, wenn er mit der Kreisscheibe fest verbunden wäre):

$$\vec{v}_{P\,F} = \vec{\omega}_F \times \vec{AP} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2r + r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} r\sin\alpha \\ \dot{\varphi}(2r + r\cos\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Relativgeschwindigkeit des Punktes P (= Geschwindigkeit des Punktes P, die ein mit der Kreisscheibe bewegter Beobachter registrieren würde):

$$\vec{v}_{P\,rel} = \vec{v}_{P\,abs} - \vec{v}_{P\,F} = \begin{bmatrix} r(\dot{\varphi} - \dot{\alpha})\sin\alpha \\ -2r\,\dot{\varphi} - r(\dot{\varphi} - \dot{\alpha})\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}.$$

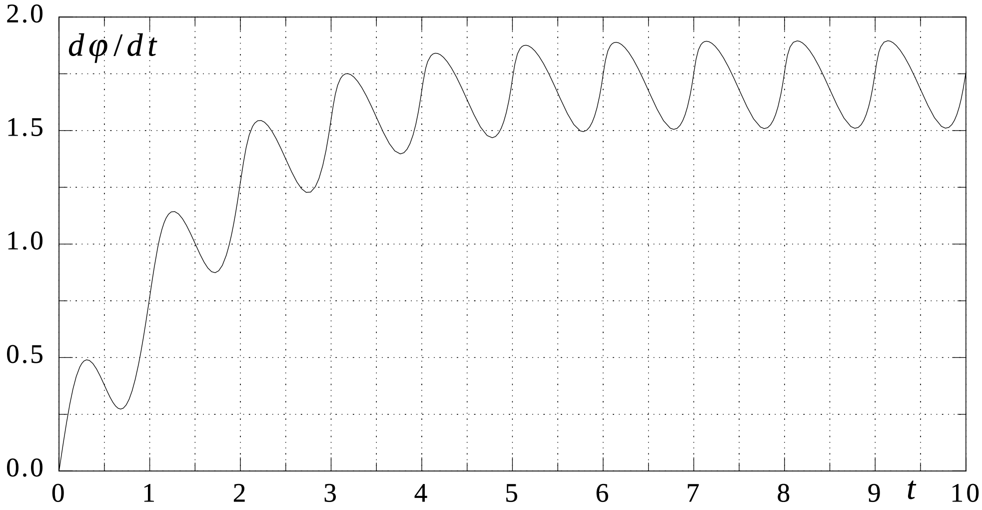
Auf die Kreisscheibe wirkende Gleitreibungskraft und Momentensatz für die Kreisscheibe:

$$\vec{F}_R = \mu N \frac{\vec{v}_{P\,rel}}{\left|\vec{v}_{P\,rel}\right|}, \qquad \Theta_A \ddot{\varphi} = (\vec{AP} \times \vec{F}_R) \cdot \vec{e}_z.$$

Bewegungsgleichung:

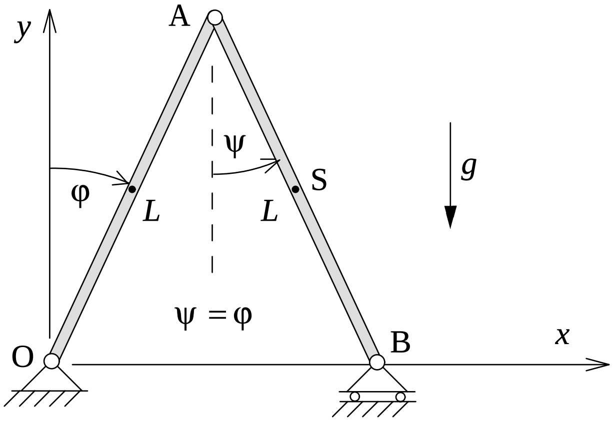
$$\ddot{\varphi} = \frac{\mu N}{\Theta_A \left|\vec{v}_{P\,rel}\right|} (\vec{AP} \times \vec{v}_{P\,rel}) \cdot \vec{e}_z,$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2\mu N (AP_x\, v_{P\,rel\,y} - AP_y\, v_{P\,rel\,x})}{9mr^2 \sqrt{(v_{P\,rel\,x})^2 + (v_{P\,rel\,y})^2}}.$$


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
dφ / dt
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
t
10

Aufgabe 1

Zwei homogene starre Stangen (Länge L, Masse m) sind in A gelenkig miteinander verbunden. Der Stangenendpunkt B wird reibungsfrei auf der x-Achse geführt. Man berechne mit Hilfe des Energiesatzes der Mechanik die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ als Funktion des Winkels φ, wenn das System aus der Lage $\varphi = \varphi_0$ ohne Anfangsgeschwindigkeit gestartet wird.



Schwerpunktkoordinate der Stange AB:

$$x_S = \frac{3}{2} L \sin\varphi, \qquad y_S = \frac{1}{2} L \cos\varphi.$$

Schwerpunktgeschwindigkeit:

$$\dot{x}_S = \frac{3}{2} L\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \dot{y}_S = -\frac{1}{2} L\dot{\varphi}\sin\varphi;$$

$$v_S{}^2 = \frac{1}{4}(1 + 8\cos^2\varphi)L^2\dot{\varphi}^2.$$

Kinetische Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_S{}^2 + \frac{1}{2}\Theta_S\dot{\varphi}^2, \qquad \Theta_0 = \frac{1}{3} mL^2, \quad \Theta_S = \frac{1}{12} mL^2;$$

$$E_{kin} = (\frac{1}{3} + \cos^2\varphi) mL^2\dot{\varphi}^2.$$

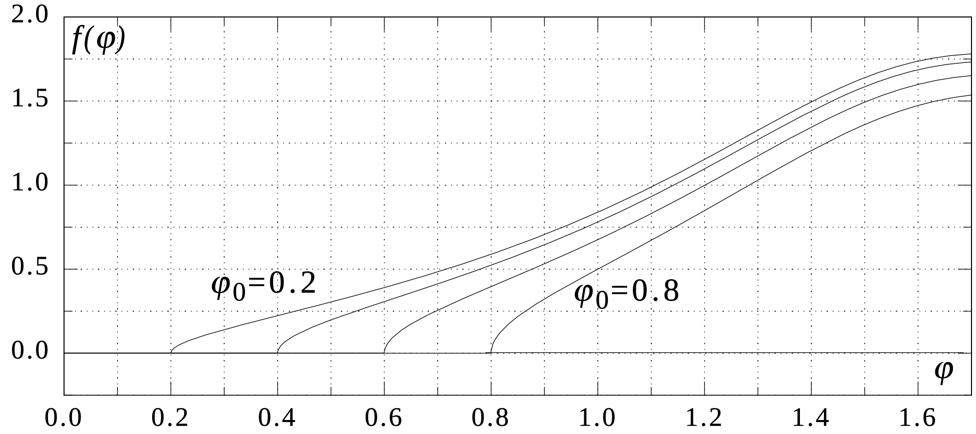
Potentielle Energie:

$$E_{pot} = 2\,mg\,\frac{L}{2}\cos\varphi = mgL\cos\varphi.$$

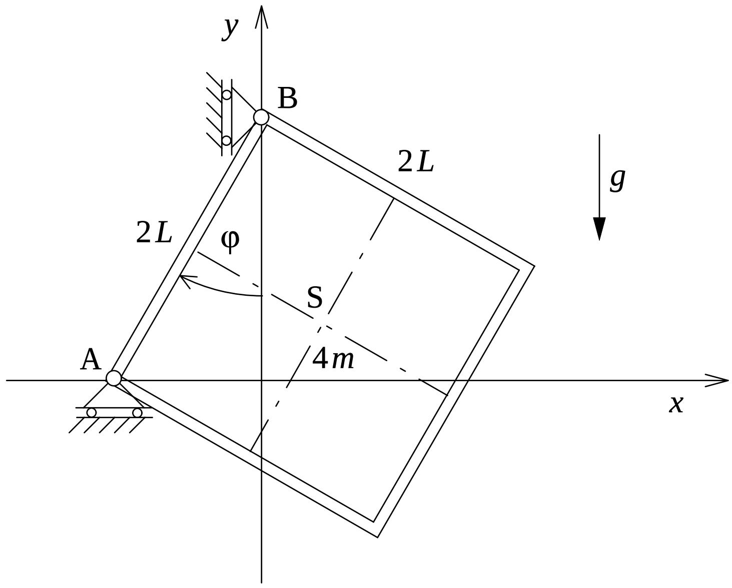
Energiesatz:

$$E_{kin} + E_{pot} = const \qquad \to \qquad (\frac{1}{3} + \cos^2\varphi) mL^2\dot{\varphi}^2 + mgL\cos\varphi = mgL\cos\varphi_0,$$

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{3(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{1 + 3\cos^2\varphi}}\sqrt{\frac{g}{L}} =: f(\varphi)\sqrt{\frac{g}{L}}.$$



Aufgabe 2



Ein homogener quadratischer Rahmen aus vier Stäben der Masse m bewegt sich im Schwerkraftfeld, wobei die Eckpunkte A und B auf den kartesischen Koordinatenachsen geführt werden. Man berechne mit Hilfe des Energiesatzes der Mechanik die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$, wenn $\dot{\varphi}(0) = 0$ ist.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_S = y_S = -L\sin\varphi + L\cos\varphi, \qquad \dot{x}_S = \dot{y}_S = -(\cos\varphi + \sin\varphi)L\dot{\varphi},$$

$$v_S{}^2 = 2\{1 + \sin(2\varphi)\}L^2\dot{\varphi}^2.$$

Kinetische und potentielle Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}4mv_S{}^2 + \frac{1}{2}\Theta_S\dot{\varphi}^2, \qquad \Theta_S = 4\{\frac{1}{12}m(2L)^2 + mL^2\} = \frac{16}{3}mL^2,$$

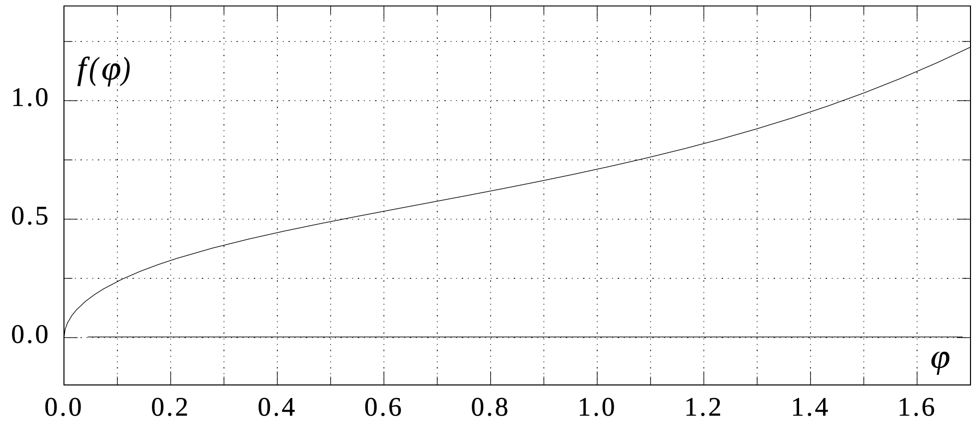
$$E_{kin} = 4\{\frac{5}{3} + \sin(2\varphi)\}mL^2\dot{\varphi}^2;$$

$$E_{pot} = 4mgy_S, \qquad E_{pot} = 4mgL(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

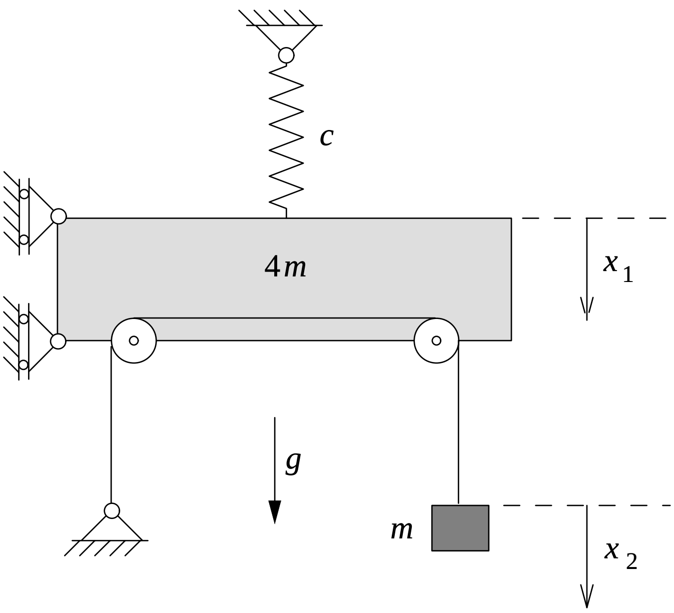
Energiesatz der Mechanik:

$$4\{\frac{5}{3} + \sin(2\varphi)\}mL^2\dot{\varphi}^2 + 4mgL(\cos\varphi - \sin\varphi) = 4mgL,$$

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{3(1+\sin\varphi - \cos\varphi)}{5+3\sin(2\varphi)}}\sqrt{\frac{g}{L}} =: f(\varphi)\sqrt{\frac{g}{L}}.$$



Aufgabe 3



Eine vertikal geführte Platte (Masse $4m$) hängt an einer Feder (Steifigkeit c), die in der Lage $x_1 = 0$ entspannt ist. Eine Masse m ist mit einem Seil verbunden, das über zwei (näherungsweise masselose) Rollen geführt wird. Bei entspannter Feder ist auch $x_2 = 0$. Man berechne mit Hilfe des Energiesatzes der Mechanik die Bewegungsgleichung für die Koordinate x_1 und das Bewegungsgesetz $x_1(t)$ zu den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0 .$$

Die Abrollbedingung für das Seil lautet

$$\dot{x}_2 = 2\dot{x}_1 \qquad \rightarrow \qquad x_2 = 2x_1.$$

Kinetische und potentielle Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} 4m\dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2{}^2 = 4m\dot{x}_1{}^2,$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} cx_1{}^2 - 4mgx_1 - mgx_2 = \frac{1}{2} cx_1{}^2 - 6mgx_1.$$

Energiesatz:

$$\dot{E}_{kin} + \dot{E}_{pot} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 8m\dot{x}_1\ddot{x}_1 + cx_1\dot{x}_1 - 6mg\dot{x}_1 = 0.$$

Bewegungsgleichung:

$$8m\ddot{x}_1 + cx_1 = 6mg,$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0{}^2 x_1 = \omega_0{}^2 \frac{6mg}{c}, \qquad \omega_0{}^2 := \frac{c}{8m}.$$

Statische Auslenkung:

$$x_{1(statisch)} = \frac{6mg}{c}.$$

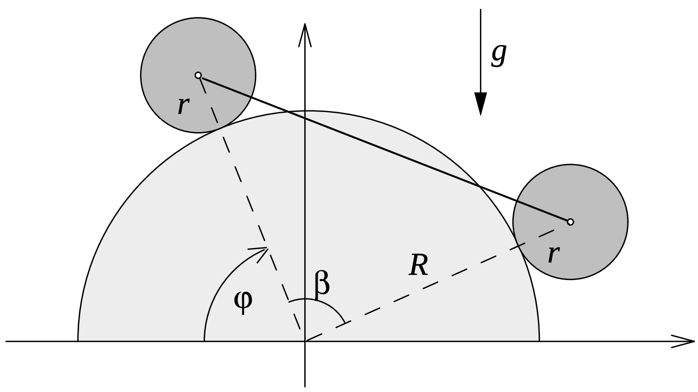
Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung:

$$x_1(t) = \frac{6mg}{c} + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t),$$

An die Anfangsbedingungen angepaßte Lösung:

$$x_1(t) = \frac{6mg}{c} \{1 - \cos(\omega_0 t)\}.$$

Aufgabe 4



Mit Hilfe des Leistungssatzes berechne man die Bewegungsgleichung der beiden auf einer vertikalen Kreisbahn (Radius R) rollenden Räder (Masse m, Radius r), die durch ein Seil (Masse vernachlässigbar) miteinander verbunden sind.

Rollbedingung:

$$(R+r)\dot{\varphi} = r\,\omega_{Rad}, \qquad \rightarrow \qquad \omega_{Rad} = \frac{R+r}{r}\dot{\varphi}.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = 2\left\{\frac{1}{2}m{v_S}^2 + \frac{1}{2}\Theta_S\omega_{Rad}^2\right\} = m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{mr^2}{2}\frac{(R+r)^2}{r^2}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2.$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = mg(R+r)\{\sin\varphi + \sin(\varphi+\beta)\}.$$

Leistungssatz für ein konservatives System:

$$\dot{E}_{kin} = -\dot{E}_{pot}$$

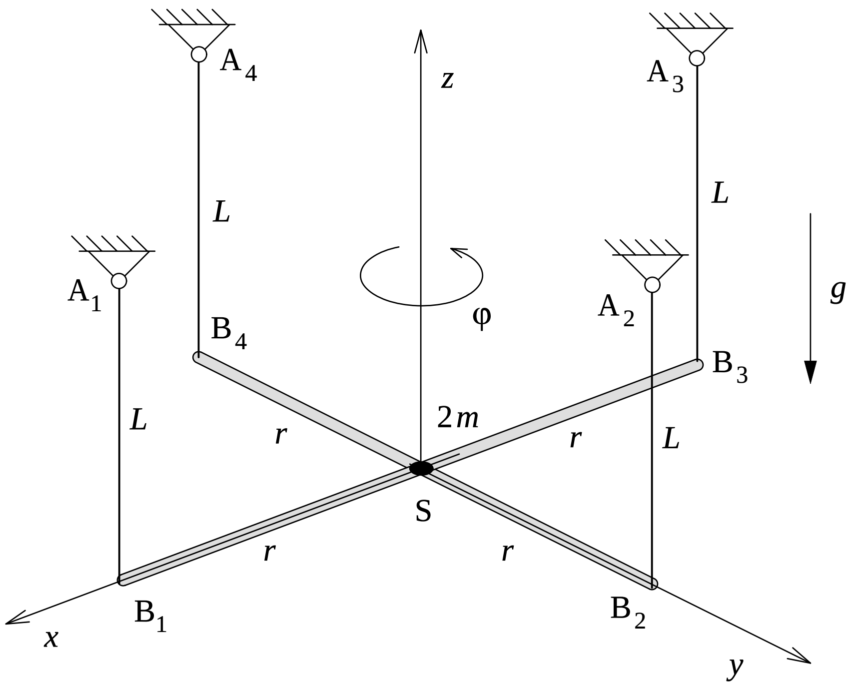
$$3m(R+r)^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -mg(R+r)\{\cos\varphi + \cos(\varphi+\beta)\}\dot{\varphi}.$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{3(R+r)}\{\cos\varphi + \cos(\varphi+\beta)\} = 0.$$

Aufgabe 5

Ein starres Stabkreuz (Masse $2m$) hängt an vier Seilen der Länge L im Schwerkraftfeld.



In der Ruhelage befindet sich der Schwerpunkt S im Koordinatenursprung. Wird das Stabkreuz um den Winkel φ um die z-Achse gedreht, so hebt sich der Schwerpunkt um $z_S(\varphi)$. Man berechne mit Hilfe des Energiesatzes der Mechanik die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$, wenn das Stabkreuz nach einer Drehung um

$\pi/2$ ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wird.

Ortsvektoren in der ausgelenkten Lage:

$$\vec{OA_1} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ L \end{bmatrix}, \qquad \vec{OB_1} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z_S \end{bmatrix}, \qquad \vec{A_1B_1} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi - r \\ r\sin\varphi \\ z_S - L \end{bmatrix},$$

$$\left|\vec{A_1B_1}\right| = \sqrt{2r^2(1-\cos\varphi) + (z_S - L)^2}.$$

Kinematische Zwansgbedingung:

$$\left|\vec{A_1B_1}\right| = L, \qquad \rightarrow \qquad z_S = L - \sqrt{L^2 - 2r^2(1-\cos\varphi)},$$

$$\dot{z}_S = \frac{dz_S(\varphi)}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{L^2 - 2r^2(1-\cos\varphi)}}\dot{\varphi}.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = 2\left\{\frac{1}{2}m\dot{z}_S{}^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{12}(2r)^2\dot{\varphi}^2\right\} = m\dot{z}_S{}^2 + \frac{1}{3}mr^2\dot{\varphi}^2,$$

$$E_{kin} = \left(\frac{r^2\sin^2\varphi}{L^2 - 2r^2(1-\cos\varphi)} + \frac{1}{3}\right)mr^2\dot{\varphi}^2.$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = 2mgz_S = 2mg(L - \sqrt{L^2 - 2r^2(1-\cos\varphi)}).$$

Energiesatz:

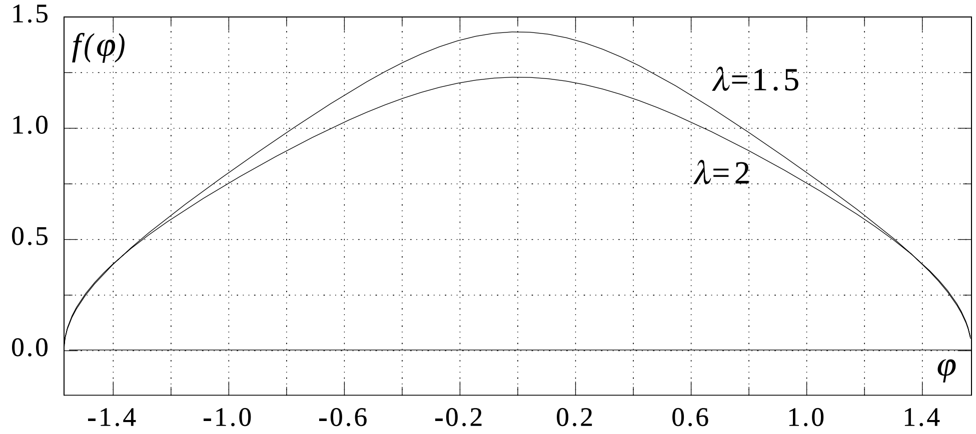
$$E_{kin} + E_{pot} = const = 2mg(L - \sqrt{L^2 - 2r^2}),$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{r^2}\frac{\sqrt{L^2 - 2r^2(1-\cos\varphi)} - \sqrt{L^2 - 2r^2}}{\left(\dfrac{r^2\sin^2\varphi}{L^2 - 2r^2(1-\cos\varphi)} + \dfrac{1}{3}\right)}.$$

$$L =: \lambda r \;, \quad (\lambda > \sqrt{2}), \quad \lambda^2 - 2 =: \gamma,$$

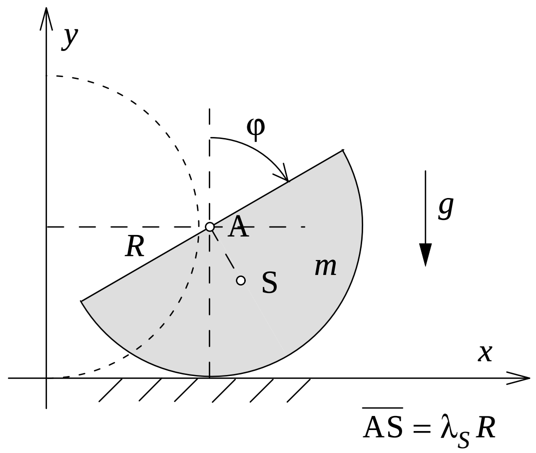
$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{r}}\sqrt{\frac{f_1(\varphi)}{f_2(\varphi)}}, \qquad f_1(\varphi) = \sqrt{\gamma + 2\cos\varphi} - \sqrt{\gamma}, \quad f_2(\varphi) = \frac{\sin^2\varphi}{\gamma + 2\cos\varphi} + \frac{1}{3};$$

$$\dot{\varphi}(\varphi) = f(\varphi)\sqrt{\frac{2g}{r}}.$$



Aufgabe 6

Eine Halbkreisscheibe (Radius R, Masse m) wird im Schwerkraftfeld in der Lage $\varphi = 0$ aus der Ruhe heraus losgelassen und rollt dann auf einer horizontalen Schiene (x-Achse). Man berechne mit Hilfe des Energiesatzes der Mechanik die Winkelgeschwindigkeit als Funktion des Winkels φ.



Massengeometrische Größen:

$$\Theta_A = \frac{1}{2} m R^2, \qquad \Theta_S = \Theta_A - m L_S{}^2 = m R^2 (\frac{1}{2} - \lambda_S{}^2), \qquad \lambda_S = \frac{4}{3\pi}.$$

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_A = R\varphi, \qquad x_S = x_A + \lambda_S R \cos\varphi, \qquad y_S = R - \lambda_S R \sin\varphi;$$

$$\dot{x}_S = R(1 - \lambda_S \sin\varphi)\dot{\varphi}, \qquad \dot{y}_S = -R\lambda_S \cos\varphi\dot{\varphi},$$

$$v_S{}^2 = (1 + \lambda_S{}^2 - 2\lambda_S \sin\varphi) R^2 \dot{\varphi}^2.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_S{}^2 + \frac{1}{2} \Theta_S \dot{\varphi}^2,$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m R^2 (\frac{3}{2} - 2\lambda_S \sin\varphi)\dot{\varphi}^2.$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = mgy_S = mgR(1 - \lambda_S \sin\varphi).$$

Energiesatz der Mechanik mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$:

$$E_{kin} + E_{pot} = const,$$

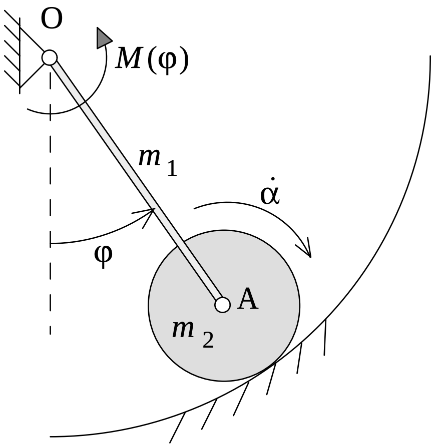
$$\frac{1}{2} m R^2 (\frac{3}{2} - 2\lambda_S \sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + mgR(1 - \lambda_S \sin\varphi) = mgR,$$

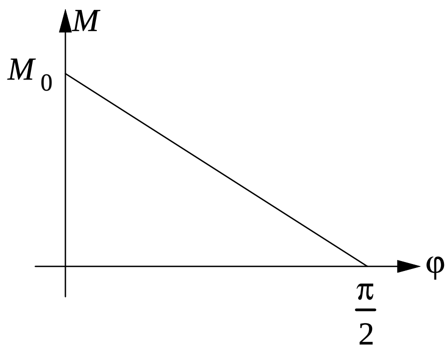
Daraus folgt

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{\frac{4\lambda_S \sin\varphi}{3 - 4\lambda_S \sin\varphi}}.$$

Aufgabe 7

Ein Moment $M(\varphi)$ treibt eine Stange (Masse m_1, Länge R) an, die mit einem Rad (Masse m_2, Radius r) in A gelenkig verbunden ist. Das Rad soll auf einer Kreisbahn (Radius $R + r$) abrollen. Man berechne mit Hilfe des Arbeitssatzes die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$ im Bereich $0 \le \varphi \le \pi/2$. Für $\varphi = 0$ sei $\dot{\varphi} = 0$.





Kinematische Zwangsbedingung:

$$R\dot{\varphi} = r\dot{\alpha} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\alpha} = \frac{R}{r}\dot{\varphi}.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_A{}^2 + \frac{1}{2}\Theta_A \dot{\alpha}^2,$$

$$\Theta_0 = \frac{1}{3} m_1 R^2, \quad v_A{}^2 = R^2 \dot{\varphi}^2, \qquad \Theta_A = \frac{1}{2} m_2 r^2,$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} m_1 + \frac{3}{2} m_2) R^2 \dot{\varphi}^2.$$

Arbeit des Momentes

$$M(\varphi) = M_0(1 - \frac{2}{\pi}\varphi), \qquad (0 \le \varphi \le \pi/2).$$

$$W(\varphi) = \int_0^{\varphi} M(\overline{\varphi})d\overline{\varphi} = M_0(\varphi - \frac{1}{\pi}\varphi^2).$$

Arbeitssatz:

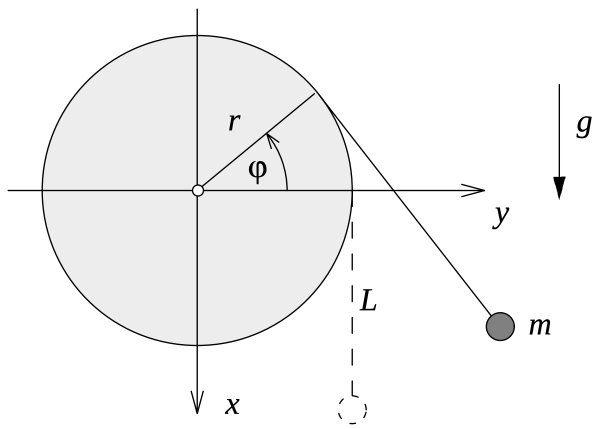
$$E_{kin}\Big|_{\varphi} - E_{kin}\Big|_0 = W(\varphi),$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1 + \frac{3}{2}m_2)R^2\dot{\varphi}^2 = M_0(\varphi - \frac{1}{\pi}\varphi^2).$$

Daraus folgt

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{2M_0(\varphi - (1/\pi)\varphi^2)}{(m_1/3 + 3m_2/2)R^2}}.$$

Aufgabe 8



Ein Massenpunkt m ist mit einem Faden verbunden, der auf einen raumfesten Kreiszylinder gewickelt ist. Man berechne mit Hilfe des Energiesatzes der Mechanik die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$ zu den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Kinematische Zwangsbedingung für den Ortsvektor des Massenpunktes:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi + (L + r\varphi)\cos\varphi \\ r\cos\varphi + (L + r\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Geschwindigkeitsvektor des Massenpunktes:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}(L + r\varphi)\dot{\varphi}.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (L + r\varphi)^2 \dot{\varphi}^2 .$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = -m\vec{g} \cdot \vec{r} = -mg\vec{e}_x \cdot \vec{r} = mg\{r \sin\varphi - (L + r\varphi)\cos\varphi\}.$$

Energiesatz:

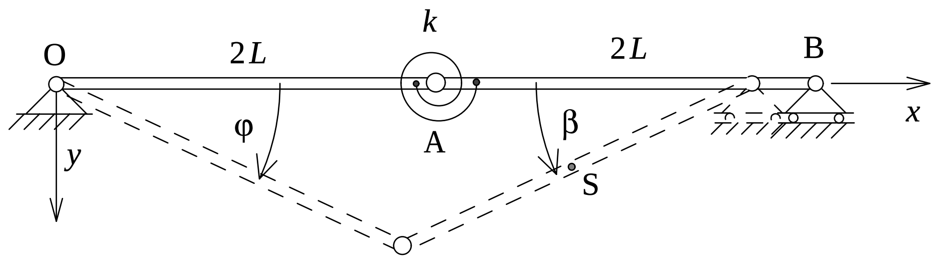
$$\frac{1}{2} m (L + r\varphi)^2 \dot{\varphi}^2 + mg\{r \sin\varphi - (L + r\varphi)\cos\varphi\} = mg \frac{\sqrt{2}}{2}(r - L - \frac{\pi r}{4}).$$

Daraus folgt

$$\dot{\varphi}(\varphi) = -\frac{\sqrt{g}\sqrt{\sqrt{2}(r - L - \frac{\pi}{4} r) - 2r\sin\varphi + 2(L + r\varphi)\cos\varphi}}{L + r\varphi}.$$

Aufgabe 9

Zwei starre Stangen (Masse m, Länge 2L) sind im Gelenkpunkt A mit einer Drehfeder (Federkonstante k) verbunden. Der Gelenkpunkt O ist raumfest, der Gelenkpunkt B horizontal verschieblich gelagert. In der Lage $\varphi = 0$ sei die Drehfeder entspannt. Man berechne mit Hilfe des Energiesatzes der Mechanik die Winkelgeschwindigkeit der Stange OA in der beliebigen Lage φ, wenn das System aus der Lage $\varphi = 45^0$ aus der Ruhe heraus gestartet wird, und die Bewegungsgleichung.



Kinematische Zwangsbedingungen für den Schwerpunkt und die Winkelgeschwindigkeit der Stange AB:

$$\vec{r}_S = 3L\cos\varphi\,\vec{e}_x + L\sin\varphi\,\vec{e}_y, \qquad 2L\sin\varphi = 2L\sin\beta \qquad \to \qquad \varphi = \beta.$$

$$\vec{v}_S = (-3\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)L\dot{\varphi}, \qquad \dot{\beta} = \dot{\varphi}.$$

$$v_S{}^2 = (1 + 8\sin^2\varphi)L^2\dot{\varphi}^2.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_S{}^2 + \frac{1}{2}\Theta_S\dot{\beta}^2, \qquad \Theta_0 = \frac{4}{3} mL^2, \qquad \Theta_S = \frac{1}{3} mL^2,$$

$$E_{kin} = (\frac{4}{3} + 4\sin^2\varphi) mL^2\dot{\varphi}^2.$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k(2\varphi)^2 = 2k\varphi^2 .$$

Energiesatz der Mechanik:

$$(\frac{4}{3} + 4\sin^2\varphi) mL^2 \dot{\varphi}^2 + 2k\varphi^2 = 2k(\pi/4)^2 .$$

Daraus folgt

$$\dot{\varphi}(\varphi) = -\sqrt{\frac{k}{mL^2}} \sqrt{\frac{(\pi^2\ \ 8) - 2\varphi^2}{(4/3) + 4\sin^2\varphi}} .$$

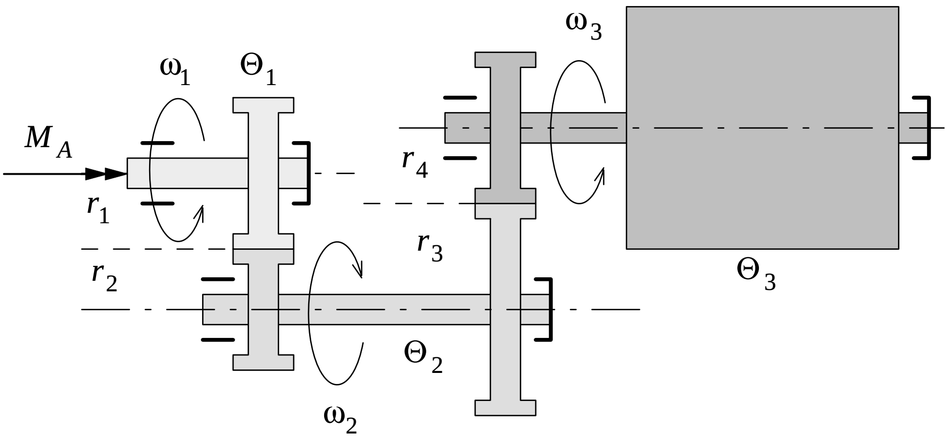
Ableitung der Bewegungsgleichung:

$$\dot{E}_{kin} + \dot{E}_{pot} = 0,$$

$$8\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi} mL^2 \dot{\varphi}^2 + (\frac{4}{3} + 4\sin^2\varphi) mL^2\, 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 4k\varphi\dot{\varphi} = 0,$$

$$(\frac{4}{3} + 4\sin^2\varphi)\ddot{\varphi} + 4\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{2k}{mL^2}\varphi = 0.$$

Aufgabe 10



Man berechne mit Hilfe des Leistungssatzes das erforderliche Antriebsmoment M_A, damit der Rotor (Trägheitsmoment Θ_3) in der Zeit T von der Ruhe aus linear zunehmend die Winkelgeschwindigkeit $\omega_3 = \Omega$ erhält. Reibungsverluste im Getriebe sind zu vernachlässigen.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2, \qquad r_3\omega_2 = r_4\omega_3, \qquad \to \qquad \omega_1 = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}\omega_3, \qquad \omega_2 = \frac{r_4}{r_3}\omega_3, \qquad \omega_3 = \Omega\frac{t}{T}.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(\Theta_1\omega_1{}^2 + \Theta_2\omega_2{}^2 + \Theta_3\omega_3{}^2) = \frac{1}{2}\Theta^*\omega_3{}^2,$$

$$\Theta^* := \Theta_1\left(\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}\right)^2 + \Theta_2\left(\frac{r_4}{r_3}\right)^2 + \Theta_3.$$

Leistung des Antriebsmomentes:

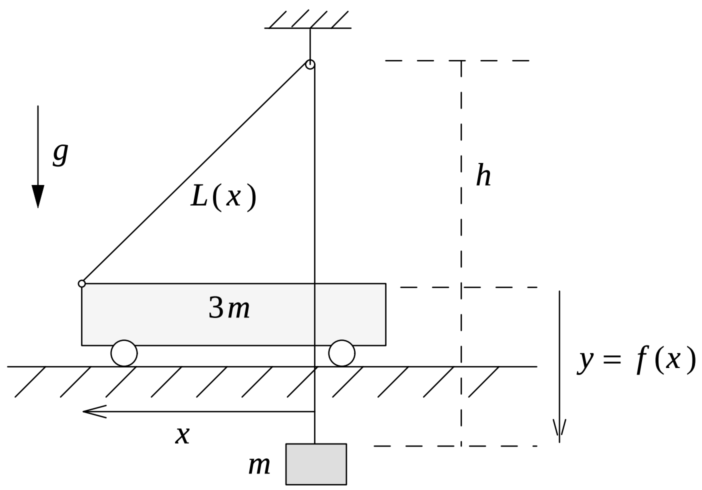
$$P = M_A\omega_1 = M_A\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}\omega_3.$$

Leistungssatz:

$$\dot{E}_{kin} = P \qquad \rightarrow \qquad \Theta^*\omega_3\dot{\omega}_3 = M_A\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}\omega_3,$$

$$M_A = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\Theta^*\frac{\Omega}{T}.$$

Aufgabe 11



Man berechne mit Hilfe des Energiesatzes der Mechanik die Geschwindigkeit $\dot{x}(x)$ des Wagens (Masse $3m$), der über ein Seil der Länge L_0 mit der Masse m verbunden ist. Zu Beginn der Bewegung sei $x = 2h$ und $\dot{x} = 0$.

Kinematische Zwangsbedingung:

$$L(x) + h + f(x) = L_0, \qquad L(x) = \sqrt{h^2 + x^2},$$

$$f(x) = L_0 - h - \sqrt{h^2 + x^2}.$$

Energiesatz der Mechanik:

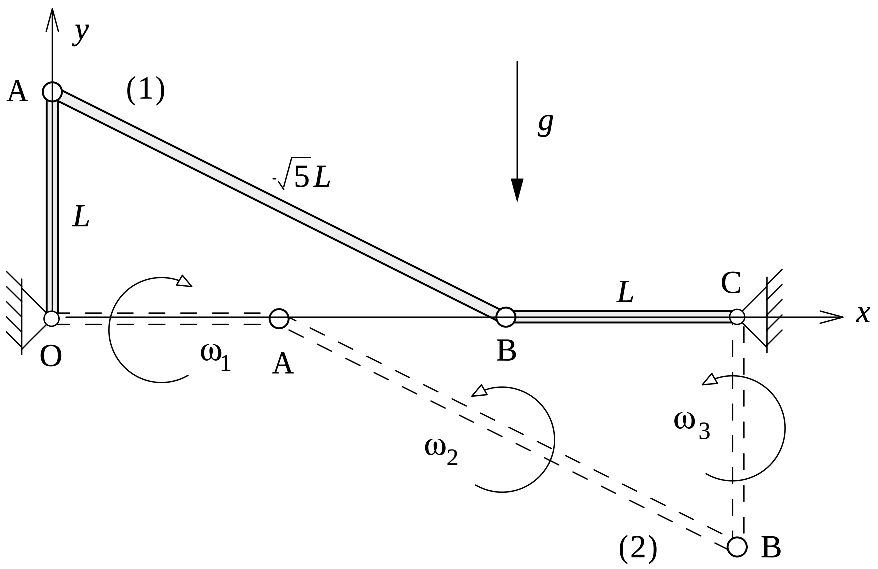
$$E_{kin} + E_{pot} = const \qquad \rightarrow \qquad \frac{3m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(f'(x)\dot{x})^2 - mgf(x) = const,$$

$$\frac{1}{2}(3+\frac{x^2}{h^2+x^2})\dot{x}^2-g(L_0-h-\sqrt{h^2+x^2})=-g(L_0-h-\sqrt{5}h),$$

$$\frac{3h^2+4x^2}{h^2+x^2}\dot{x}^2=2g(\sqrt{5}h-\sqrt{h^2+x^2}),$$

$$\dot{x}(x)=-\sqrt{\frac{2g(\sqrt{5}h-\sqrt{x^2+h^2})(x^2+h^2)}{4x^2+3h^2}}.$$

Aufgabe 12



Drei homogene starre Stangen (Masse pro Längeneinheit m/L) werden in der Konfiguration (1) im Schwerkraftfeld aus der Ruhe heraus losgelassen. Man berechne die Geschwindigkeit des Punktes B in der momentanen Konfiguration (2).

Kinematik in der Konfiguration (2):

$$\vec{v}_A=-\omega_1 L\vec{e}_y, \qquad \vec{v}_B=\omega_3 L\vec{e}_x, \qquad \rightarrow \qquad \omega_3=\frac{v_B}{L},$$

$$\begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\vec{v}_A+\omega_2\vec{e}_z\times\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix} 0 \\ -L\omega_1 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2L \\ -L \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L\omega_2 \\ -L\omega_1+2L\omega_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\rightarrow \qquad \omega_2=\frac{v_B}{L}, \quad \omega_1=2\frac{v_B}{L}.$$

Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes der Stange AB:

$$\vec{v}_S = \vec{v}_B + \omega_2 \vec{e}_z \times \overrightarrow{BS} = \begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_B/L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -L \\ L/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_B/2 \\ -v_B \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_S^{\,2} = \frac{5}{4} v_B^{\,2}.$$

Kinetische Energie in der Konfiguration (2)

$$E_{kin(2)} = \frac{1}{2}\{\frac{mL^2}{3}\omega_1^{\,2} + \sqrt{5}mv_S^{\,2} + \frac{\sqrt{5}m\,5L^2}{12}\omega_2^{\,2} + \frac{mL^2}{3}\omega_3^{\,2}\},$$

$$E_{kin(2)} = \frac{5}{6}(1+\sqrt{5})mv_B^{\,2}.$$

Potentielle Energie in der Konfiguration (1):

$$E_{pot(1)} = mg\frac{L}{2} + \sqrt{5}mg\frac{L}{2} = (1+\sqrt{5})mg\frac{L}{2}.$$

Potentielle Energie in der Konfiguration (2):

$$E_{pot(2)} = -mg\frac{L}{2} - \sqrt{5}mg\frac{L}{2} = -(1+\sqrt{5})mg\frac{L}{2}.$$

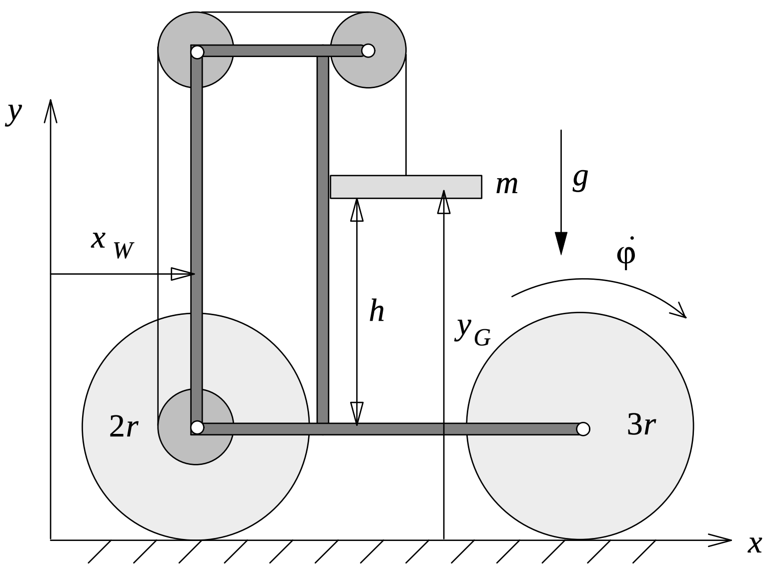
Energiesatz der Mechanik:

$$\{E_{kin} + E_{pot}\}_{(2)} = \{E_{kin} + E_{pot}\}_{(1)},$$

$$\frac{5}{6}(1+\sqrt{5})mv_B^{\,2} - (1+\sqrt{5})mg\frac{L}{2} = (1+\sqrt{5})mg\frac{L}{2},$$

$$v_B = \sqrt{\frac{6}{5}gL}.$$

Aufgabe 13



Mit Hilfe des Energiesatzes der Mechanik berechne man die Geschwindigkeit des Wagens, nachdem die Masse m um die Höhe h abgesunken ist. Alle Anfangsgeschwindigkeiten sind null.

Als gegeben sind anzusetzen: Die Masse m_R des Rahmens, die Masse m_A und das Trägheitsmoment Θ_A der Vorderräder, die Masse m_B und das Trägheitsmoment Θ_B der Hinterräder, die Massen m_C und die Trägheitsmomente Θ_C der oberen Umlenkrollen.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot{x}_W = 3r\dot{\varphi}, \qquad \dot{y}_G = -r\dot{\varphi}.$$

Kinetische Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\left\{(m_R + m_A + m_B + 2m_C)\dot{x}_W{}^2 + (\Theta_A + \Theta_B + 2\Theta_C)\dot{\varphi}^2 + m(\dot{x}_W{}^2 + \dot{y}_G{}^2)\right\}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\left\{m_R + m_A + m_B + 2m_C + \frac{\Theta_A + \Theta_B + 2\Theta_C}{9r^2} + \frac{10}{9}m\right\}\dot{x}_W{}^2 =: \frac{1}{2}m^*\dot{x}_W{}^2.$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = mgy_G.$$

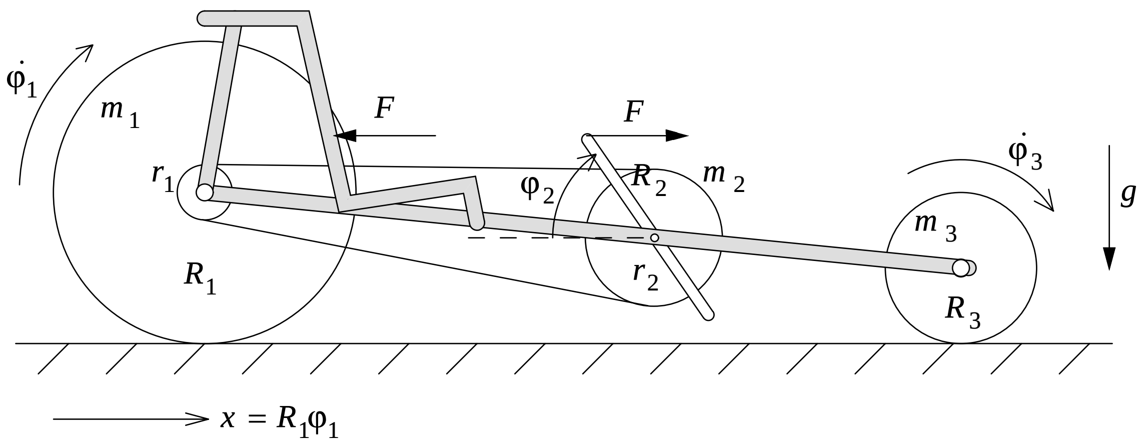
Energiesatz der Mechanik:

$$(E_{kin} + E_{pot})\Big|_{Anfang} = (E_{kin} + E_{pot})\Big|_{Ende},$$

$$mg(3r + h) = \frac{1}{2}m^*\dot{x}_W{}^2\Big|_{Ende} + mg3r,$$

$$\dot{x}_W\Big|_{Ende} = \sqrt{\frac{2mgh}{m^*}}.$$

Aufgabe 14



Für das durch ein Pedal angetriebene Fahrzeug (Masse ohne Räder: m_0) berechne man mit Hilfe des Leistungssatzes die Bewegungsgleichung in der Koordinate x.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot{x} = R_1\dot{\varphi}_1, \qquad r_1\dot{\varphi}_1 = r_2\dot{\varphi}_2, \qquad R_3\dot{\varphi}_3 = \dot{x}.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\left\{m_0\dot{x}^2 + (m_1\dot{x}^2 + \Theta_1\dot{\varphi}_1^{\,2}) + (m_2\dot{x}^2 + \Theta_2\dot{\varphi}_2^{\,2}) + (m_3\dot{x}^2 + \Theta_3\dot{\varphi}_3^{\,2})\right\} =: \frac{1}{2}m^*\dot{x}^2,$$

$$m^* := m_0 + (m_1 + \frac{\Theta_1}{R_1^{\,2}}) + (m_2 + \Theta_2\frac{r_1^{\,2}}{(r_2R_1)^2}) + (m_3 + \frac{\Theta_3}{R_3^{\,2}}).$$

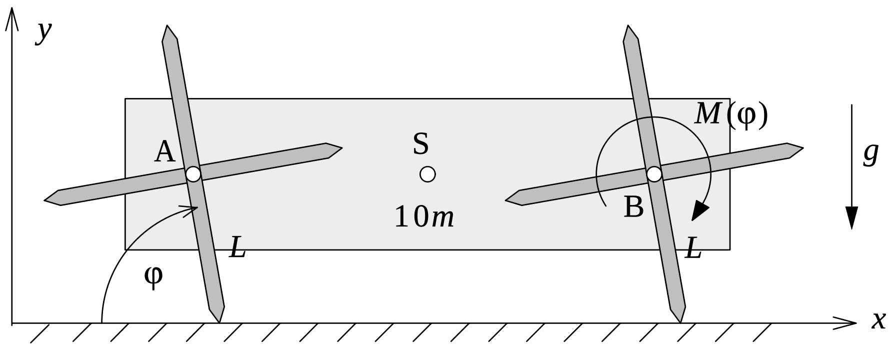
Leistung der inneren Antriebskraft F:

$$P = -F\dot{x} + F(\dot{x} + R_2\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2) = F\sin(\frac{r_1}{r_2R_1}x)\frac{r_1R_2}{r_2R_1}\dot{x}.$$

Bewegungsgleichung:

$$\dot{E}_{kin} = P \qquad \rightarrow \qquad m^*\ddot{x} = F\sin(\frac{r_1}{r_2R_1}x)\frac{r_1R_2}{r_2R_1}.$$

Aufgabe 15



Ein Fahrzeug (Masse $10m$) bewegt sich auf zwei Stelzenrädern (Masse m) auf einer horizontalen Ebene. Auf das rechte Speichenrad wirkt das Antriebsmoment $M(\varphi)$. Man berechne mit Hilfe des Leistungssatzes die Bewegungsgleichung des Fahrzeugs in der Koordinate φ im Intervall $\pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4$.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_A = const - L\cos\varphi, \qquad y_A = L\sin\varphi,$$

$$\dot{x}_A = \dot{x}_S = \dot{x}_B = L\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y}_A = \dot{y}_S = \dot{y}_B = L\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

$$v_A^{\,2} = v_S^{\,2} = v_B^{\,2} = L^2\dot{\varphi}^2.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\left\{10mv_S{}^2 + mv_A{}^2 + mv_B{}^2 + \Theta_A\dot{\varphi}^2 + \Theta_B\dot{\varphi}^2\right\},$$

$$\Theta_A = \Theta_B = 2\frac{m}{2}\frac{(2L)^2}{12} = \frac{1}{3}mL^2,$$

$$E_{kin} = \frac{19}{3}mL^2\dot{\varphi}^2, \qquad \dot{E}_{kin} = \frac{38}{3}mL^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}.$$

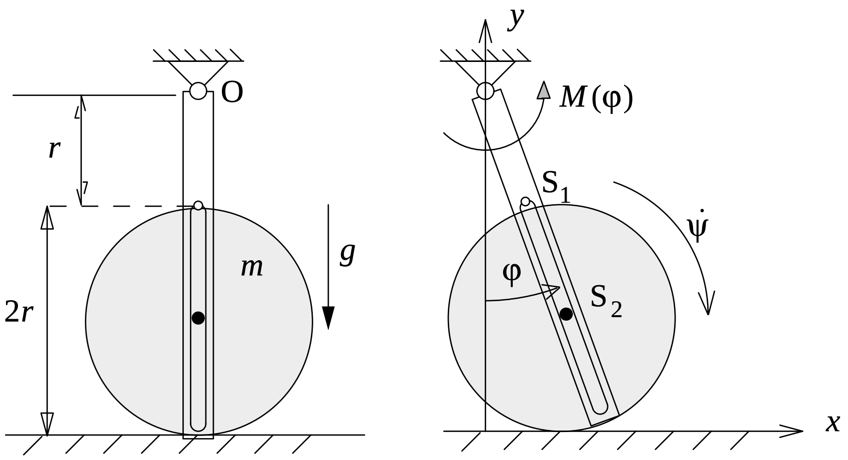
Leistung der Gewichtskräfte und des Antriebsmomentes:

$$P = M(\varphi)\dot{\varphi} - 12mg\dot{y}_S = \{M(\varphi) - 12mgL\cos\varphi\}\dot{\varphi}.$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{38}{3}mL^2\ddot{\varphi} + 12mgL\cos\varphi = M(\varphi).$$

Aufgabe 16



Die in O drehbare gelagerte starre Stange (Trägheitsmoment $\Theta_0 = 3mr^2$, Masse $2m$, Schwerpunkt S_1) führt in einem Schlitz reibungsfrei den Schwerpunkt S_2 einer Kreisscheibe (Radius r, Masse m), die auf einer horizontalen Schiene rollen soll. Die Stange wird von einem Moment $M(\varphi)$ angetrieben. Man berechne mit Hilfe des Leistungssatzes die Bewegungsgleichung des Systems in der Koordinate φ.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_{S_2} = 2r\tan\varphi, \qquad \dot{x}_{S_2} = \frac{2r}{\cos^2\varphi}\dot{\varphi}, \qquad y_{S_1} = 3r - r\cos\varphi, \qquad \dot{y}_{S_1} = r\sin\varphi\dot{\varphi},$$

$$r\dot{\psi} = \dot{x}_{S_2}, \qquad \dot{\psi} = \frac{2\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi}.$$

Leistung der Gewichtskraft der Stange und des Antriebsmomentes:

$$P = M(\varphi)\dot{\varphi} - 2mg\dot{y}_{S_1} = \{M(\varphi) - 2mgr\sin\varphi\}\dot{\varphi}.$$

Kinetische Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\left\{\Theta_0\dot{\varphi}^2 + m\dot{x}_{S_2}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\psi}^2\right\} = 3mr^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\cos^4\varphi}\right)\dot{\varphi}^2.$$

Leistungssatz:

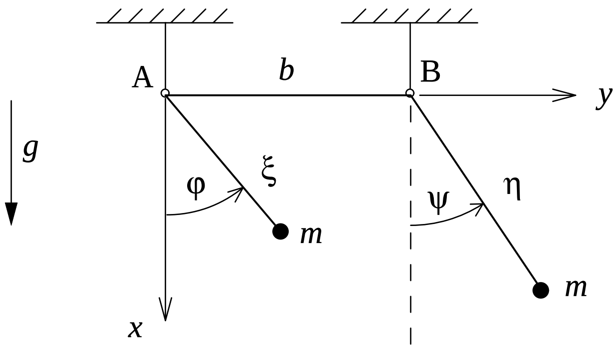
$$\dot{E}_{kin} = P\,.$$

Bewegungsgleichung:

$$mr^2\left\{\left(3 + \frac{6}{\cos^4\varphi}\right)\ddot{\varphi} + 12\frac{\sin\varphi}{\cos^5\varphi}\dot{\varphi}^2\right\} + 2mgr\sin\varphi = M(\varphi).$$

Aufgabe 1

Ein masseloser, unausdehnbarer Faden der Länge L ist an jedem Ende mit einem Massenpunkt verbunden. Der Faden wird durch zwei glatte Ringe A und B im Abstand b geführt. Man bestimme die Bewegungsgleichungen der beiden Massenpunkte in der vertikalen xy-Ebene.



Kinematische Zwangsbedingung:

$$\eta = L - b - \xi, \qquad \rightarrow \qquad \dot{\eta} = -\dot{\xi}.$$

Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der Massenpunkte:

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} \xi\cos\varphi \\ \xi\sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} \eta\cos\psi \\ b + \eta\sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L-b-\xi)\cos\psi \\ b + (L-b-\xi)\sin\psi \end{bmatrix},$$

$$\vec{v}_1 = \dot{\xi}\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} + \xi\dot{\varphi}\begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = -\dot{\xi}\begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix} + (L-b-\xi)\dot{\psi}\begin{bmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \end{bmatrix}.$$

Kinetische Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m(v_1{}^2 + v_2{}^2),$$

$$v_1{}^2 = \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\varphi}^2, \qquad v_2{}^2 = \dot{\xi}^2 + (L-b-\xi)^2\dot{\psi}^2,$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\{2\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\varphi}^2 + (L-b-\xi)^2\dot{\psi}^2\}.$$

Virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte und verallgemeinerte Kräfte:

$$\delta W = m\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_1 + m\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_2 = mg(\delta x_1 + \delta x_2),$$

$$\delta x_1 = \cos\varphi\,\delta\xi - \xi\sin\varphi\,\delta\varphi, \qquad \delta x_2 = -\cos\psi\,\delta\xi - (L-b-\xi)\sin\psi\,\delta\psi,$$

$$\delta W = mg(\cos\varphi - \cos\psi)\delta\xi - mg\xi\sin\varphi\delta\varphi - mg(L-b-\xi)\sin\psi\delta\psi,$$

$$Q_\xi := mg(\cos\varphi - \cos\psi), \qquad Q_\varphi := -mg\xi\sin\varphi, \qquad Q_\psi := -mg(L-b-\xi)\sin\psi.$$

Terme in den LAGRANGEschen Gleichungen:

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{\xi}} = 2m\dot{\xi}, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{\varphi}} = m\xi^2\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{\psi}} = m(L-b-\xi)^2\dot{\psi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\xi}}\right) = 2m\ddot{\xi}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\xi^2\ddot{\varphi} + 2m\xi\dot{\xi}\dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\psi}}\right) = m(L-b-\xi)^2\ddot{\psi} - 2m(L-b-\xi)\dot{\xi}\dot{\psi},$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \xi} = m\xi\dot{\varphi}^2 - 2m(L-b-\xi)\dot{\psi}^2, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial \psi} = 0;$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 2\ddot{\xi} - \xi\dot{\varphi}^2 + 2(L-b-\xi)\dot{\psi}^2 - g(\cos\varphi - \cos\psi) &= 0, \\ \xi\ddot{\varphi} + 2\dot{\xi}\dot{\varphi} + g\sin\varphi &= 0, \\ (L-b-\xi)\ddot{\psi} - 2\dot{\xi}\dot{\psi} + g\sin\psi &= 0. \end{aligned}$$

Umformung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für die numerische Integration nach dem RUNGE-KUTTA-Verfahren:

$$\zeta := \xi/L, \qquad \beta := b/L,$$

$$\omega_0^2 := \frac{g}{L}, \qquad \omega_0 t =: \tau, \qquad (...)^{\cdot} = \frac{d(...)}{dt} = \frac{d(...)}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{d(...)}{d\tau}\omega_0 =: \omega_0(...)',$$

$$\begin{aligned} 2\zeta'' - \zeta\varphi'^2 + 2(1-\beta-\zeta)\psi'^2 - \cos\varphi + \cos\psi &= 0, \\ \zeta\varphi'' + 2\zeta'\varphi' + \sin\varphi &= 0, \\ (1-\beta-\zeta)\psi'' - 2\zeta'\psi' + \sin\psi &= 0; \end{aligned}$$

$$y_1 := \zeta, \quad y_2 := \varphi, \quad y_3 := \psi, \quad y_4 := \zeta', \quad y_5 := \varphi', \quad y_6 := \psi';$$

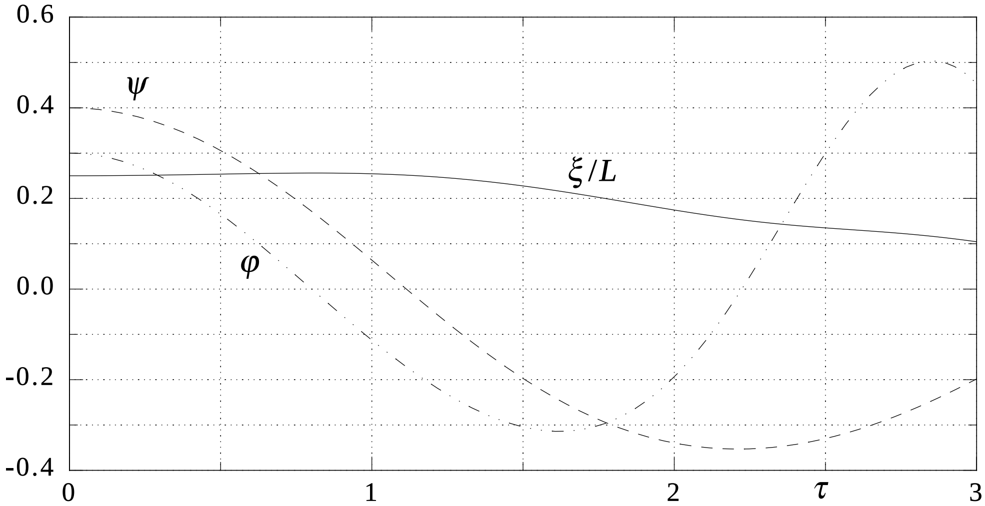
$$\begin{aligned} y_1' &= y_4, \\ y_2' &= y_5, \\ y_3' &= y_6, \\ y_4' &= 0.5 y_1 y_5^2 - (1-\beta-y_1)y_6^2 + \cos y_2 - \cos y_3, \\ y_5' &= -(2y_4y_5 + \sin y_2)/y_1, \\ y_6' &= (2y_4y_6 - \sin y_3)/(1-\beta-y_1). \end{aligned}$$

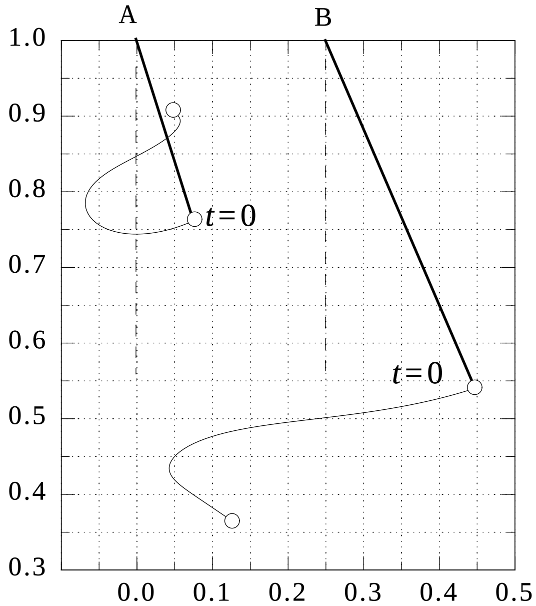
Anfangsbedingungen:

$$y_1(0) = \frac{\xi(0)}{L} = 0.25 \qquad y_2(0) = \varphi(0) = 0.3 \qquad y_3(0) = \psi(0) = 0.4$$

$$y_4(0) = \frac{\xi'(0)}{L} = 0 \qquad y_5(0) = \varphi'(0) = 0 \qquad y_6(0) = \psi'(0) = 0.$$

Systemparameter $\beta = 0.25$.





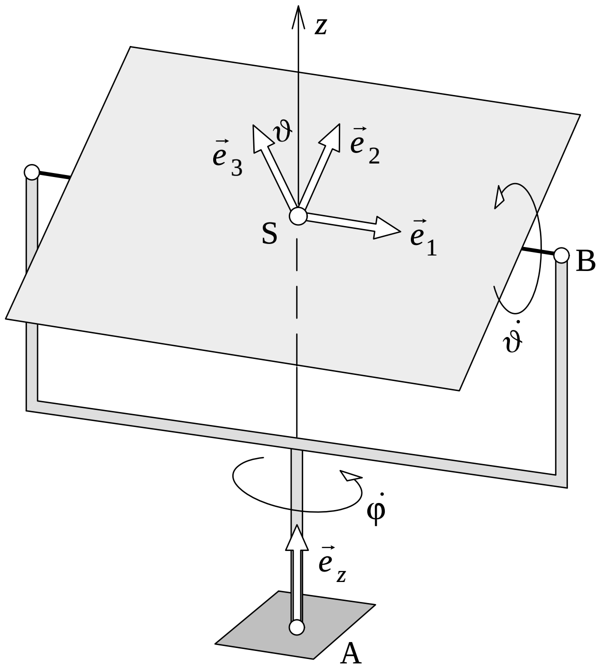
Bahnkurven der Massenpunkte im Intervall $0 \le \tau \le 3$.

Aufgabe 2

Eine starre Platte ist in einem Rahmen gelagert und wird von einem Motor in B mit dem Moment $M_B(t)$ angetrieben. Der Rahmen ist in A gelagert und kann sich um die raumfeste z-Achse drehen. In A befindet sich ein Motor, der den Rahmen mit einem Moment $M_A(t)$ antreibt. Gegeben sind das Trägheitsmoment Θ_{Az} des Rahmens um die z-Achse sowie der auf den Schwerpunkt S der Platte bezogene Trägheitstensor im $\vec{e}_i$ −System

$$\mathbf{\Theta}_S = \begin{bmatrix} \Theta_{S1} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{S2} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{S3} \end{bmatrix}$$

Man bestimme die Bewegungsgleichungen der Platte in den Koordinaten ϑ und φ .



Winkelgeschwindigkeitsvektor der Platte:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\vartheta}\vec{e}_1 = \dot{\varphi}(\sin\vartheta\,\vec{e}_2 + \cos\vartheta\,\vec{e}_3) + \dot{\vartheta}\vec{e}_1 .$$

Kinetische Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta_{Az}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathbf{\Theta}_S\vec{\omega} = \frac{1}{2}\Theta_{Az}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi}\sin\vartheta \\ \dot{\varphi}\cos\vartheta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \Theta_{S1} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{S2} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{S3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi}\sin\vartheta \\ \dot{\varphi}\cos\vartheta \end{bmatrix},$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\{(\Theta_{Az} + \Theta_{S2})\dot{\varphi}^2 + \Theta_{S1}\dot{\vartheta}^2 + (\Theta_{S3} - \Theta_{S2})\cos^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\}.$$

Virtuelle Arbeit der Antriebsmomente und verallgemeinerte Kräfte:

$$\delta W = M_A\delta\varphi + M_B\delta\vartheta =: Q_\varphi\delta\varphi + Q_\vartheta\delta\vartheta,$$

$$Q_\varphi = M_A, \qquad Q_\vartheta = M_B .$$

Terme der LAGRANGEschen Gleichungen:

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}} = (\Theta_{Az} + \Theta_{S2})\dot{\varphi} + (\Theta_{S3} - \Theta_{S2})\cos^2\vartheta\,\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\vartheta}} = \Theta_{S1}\dot{\vartheta},$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial \vartheta} = -(\Theta_{S3} - \Theta_{S2})\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta;$$

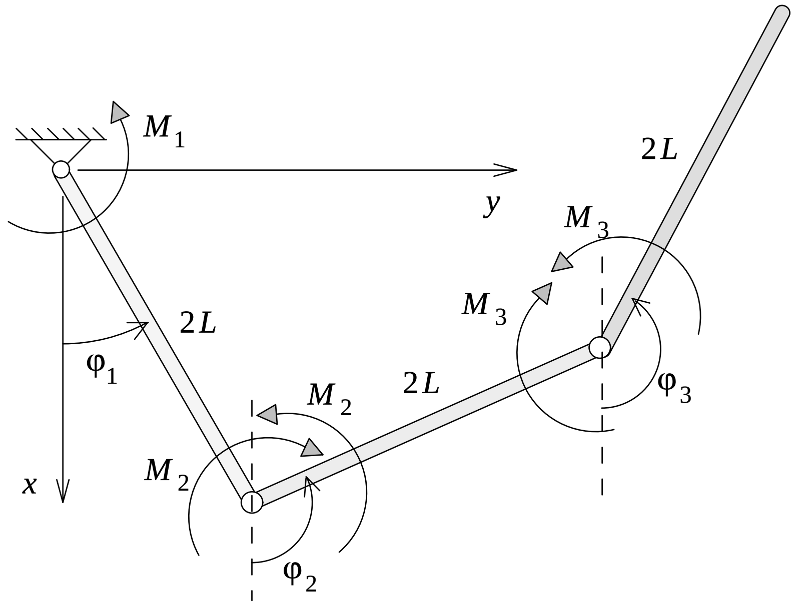
Bewegungsgleichungen:

$$(\Theta_{Az} + \Theta_{S2})\ddot{\varphi} + (\Theta_{S3} - \Theta_{S2})\ddot{\varphi}\cos^2\vartheta - 2(\Theta_{S3} - \Theta_{S2})\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta = M_B(t),$$

$$\Theta_{S1}\ddot{\vartheta} + (\Theta_{S3} - \Theta_{S2})\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = M_A(t).$$

Aufgabe 3

Eine ebene Stabkette aus gleichen Stäben (Masse m, Länge $2L$) wird durch das äußere Antriebsmoment M_1 und die beiden inneren Antriebsmomente M_2 und M_3 bewegt. Man bestimme die Bewegungsgleichungen für die absoluten Drehwinkel φ_i.



Virtuelle Arbeit der Momente und verallgemeinerte Kräfte:

$$\delta W = (M_1 - M_2)\delta\varphi_1 + (M_2 - M_3)\delta\varphi_2 + M_3\delta\varphi_3,$$

$$Q_1 = M_1 - M_2, \qquad Q_2 = M_2 - M_3, \qquad Q_3 = M_3.$$

Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der Stabschwerpunkte:

$$\vec{r}_{S_1} = L\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1\end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{S_2} = L\begin{bmatrix}2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 \\ 2\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2\end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{S_3} = L\begin{bmatrix}2\cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 \\ 2\sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2 + \sin\varphi_3\end{bmatrix};$$

$$\vec{v}_{S_1} = L\begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{S_2} = L\begin{bmatrix} -2\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - \dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 \\ 2\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 \end{bmatrix},$$

$$\vec{v}_{S_3} = L\begin{bmatrix} -2\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - 2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 - \dot{\varphi}_3 \sin\varphi_3 \\ 2\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + 2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 + \dot{\varphi}_3 \cos\varphi_3 \end{bmatrix}.$$

$$v_{S_1}^2 = L^2\dot{\varphi}_1{}^2, \qquad v_{S_2}^2 = L^2\{4\dot{\varphi}_1{}^2 + \dot{\varphi}_2{}^2 + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\},$$

$$v_{S_3}^2 = L^2\{4\dot{\varphi}_1{}^2 + 4\dot{\varphi}_2{}^2 + \dot{\varphi}_3{}^2 + 8\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + 4\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)\}.$$

Kinetische Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(m v_{S_i}^2 + \frac{1}{3} m L^2 \dot{\varphi}_i{}^2) =: \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} m_{ij}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j,$$

$$m_{11} = \frac{28}{3} mL^2, \qquad m_{22} = \frac{16}{3} mL^2, \qquad m_{33} = \frac{4}{3} mL^2,$$

$$m_{12} = m_{21} = 6\cos(\varphi_2 - \varphi_1) mL^2,$$

$$m_{13} = m_{31} = 2\cos(\varphi_3 - \varphi_1) mL^2,$$

$$m_{23} = m_{32} = 2\cos(\varphi_3 - \varphi_2) mL^2.$$

Terme der LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} m_{ij}(\delta_{ik}\dot{\varphi}_j + \dot{\varphi}_i\delta_{jk}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} m_{kj}\dot{\varphi}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_{ik}\dot{\varphi}_i = \sum_{j=1}^{3} m_{kj}\dot{\varphi}_j,$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial m_{ij}}{\partial \varphi_k}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}_K}\right) = \sum_{j=1}^{3} m_{kj}\ddot{\varphi}_j + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial m_{kj}}{\partial \varphi_i}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j;$$

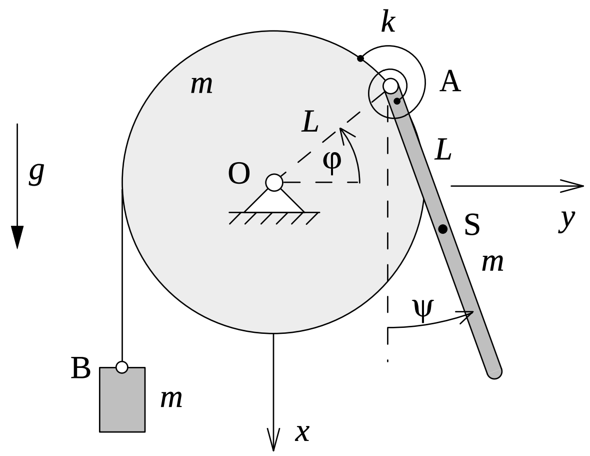
Bewegungsgleichungen:

$$\sum_{j=1}^{3} m_{1j}\ddot{\varphi}_j + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial m_{1j}}{\partial \varphi_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{ij}}{\partial \varphi_1})\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j = M_1 - M_2,$$

$$\sum_{j=1}^{3} m_{2j}\ddot{\varphi}_j + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial m_{2j}}{\partial \varphi_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{ij}}{\partial \varphi_2})\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j = M_2 - M_3,$$

$$\sum_{j=1}^{3} m_{3j}\ddot{\varphi}_j + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial m_{3j}}{\partial \varphi_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{ij}}{\partial \varphi_3})\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j = M_3.$$

Aufgabe 4



Auf eine in O drehbar gelagerte Kreisscheibe (Radius L, Masse m) ist ein Faden gewickelt, der im Punkt B mit einer Masse m verbunden ist. In A ist eine Stange (Länge $2L$, Masse m) über eine Drehfeder (Federkonstante k, in der Lage ($\varphi = 0$, $\psi = 0$) entspannt) mit der Kreisscheibe gelenkig verbunden. Man bestimme die Bewegungsgleichungen in den Koordinaten φ und ψ.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_S = -L\sin\varphi + L\cos\psi, \qquad y_S = L\cos\varphi + L\sin\psi,$$

$$\dot{x}_S = -L(\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\psi), \qquad \dot{y}_S = L(-\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\psi),$$

$$\dot{x}_B = L\dot{\varphi}.$$

Kinetische Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\left\{m\dot{x}_B^{\,2} + \Theta_0\dot{\varphi}^2 + m v_S^{\,2} + \Theta_S\dot{\psi}^2\right\},$$

$$\Theta_0 = \frac{1}{2}mL^2, \qquad \Theta_S = \frac{1}{12}m(2L)^2 = \frac{1}{3}mL^2,$$

$$v_S^{\,2} = \dot{x}_S^{\,2} + \dot{y}_S^{\,2} = L^2\{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi)\},$$

$$E_{kin} = mL^2\{\frac{5}{4}\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3}\dot{\psi}^2 - \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi)\}.$$

Potentielle Energie des Systems:

$$E_{pot} = -mgx_B - mgx_S + \frac{1}{2}k(\psi - \varphi)^2,$$

$$E_{pot} = mgL(-\varphi + \sin\varphi - \cos\psi) + \frac{1}{2}k(\psi - \varphi)^2.$$

Terme der LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot\varphi} = mL^2\{\frac{5}{2}\dot\varphi - \dot\psi\sin(\varphi-\psi)\}, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot\psi} = mL^2\{\frac{4}{3}\dot\psi - \dot\varphi\sin(\varphi-\psi)\},$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi} = -mL^2\dot\varphi\dot\psi\cos(\varphi-\psi), \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial \psi} = mL^2\dot\varphi\dot\psi\cos(\varphi-\psi),$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi} = mgL(-1+\cos\varphi) - k(\psi-\varphi), \qquad \frac{\partial E_{pot}}{\partial \psi} = mgL\sin\psi + k(\psi-\varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot\varphi}\right) = mL^2\{\frac{5}{2}\ddot\varphi - \ddot\psi\sin(\varphi-\psi) - \dot\psi(\dot\varphi-\dot\psi)\cos(\varphi-\psi)\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot\psi}\right) = mL^2\{\frac{4}{3}\ddot\psi - \ddot\varphi\sin(\varphi-\psi) - \dot\varphi(\dot\varphi-\dot\psi)\cos(\varphi-\psi)\}.$$

Bewegungsgleichungen:

$$mL^2\{\frac{5}{2}\ddot\varphi - \ddot\psi\sin(\varphi-\psi) + \dot\psi^2\cos(\varphi-\psi)\} = mgL(1-\cos\varphi) + k(\psi-\varphi),$$

$$mL^2\{\frac{4}{3}\ddot\psi - \ddot\varphi\sin(\varphi-\psi) - \dot\varphi^2\cos(\varphi-\psi)\} = -mgL\sin\psi - k(\psi-\varphi).$$

Wir setzen nun

$$\frac{k}{mgL} =: \kappa, \qquad \frac{g}{L} =: {\omega_0}^2, \qquad \frac{k}{mL^2} = \kappa{\omega_0}^2; \qquad \omega_0 t =: \tau, \qquad \frac{d()}{dt} = \omega_0\frac{d()}{d\tau} =: \omega_0()'.$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen in dimensionsloser Darstellung:

$$\frac{5}{2}\varphi'' - \psi''\sin(\varphi-\psi) + \psi'^2\cos(\varphi-\psi) + \cos\varphi - \kappa(\psi-\varphi) = 1,$$
$$\frac{4}{3}\psi'' - \varphi''\sin(\varphi-\psi) - \varphi'^2\cos(\varphi-\psi) + \sin\psi + \kappa(\psi-\varphi) = 0.$$

Die Gleichungen sind für die Gleichgewichtslage $\varphi = 0, \quad \psi = 0$ identisch erfüllt.

Für die numerische Lösung setzen wir

$$q_1 := \varphi, \quad q_2 := \psi, \quad q_3 := \varphi', \quad q_4 := \psi'.$$

Das entsprechende nichtlineare Differentialgleichungssystem 1. Ordnung lautet nun

$$q_1' = q_3,$$
$$q_2' = q_4,$$
$$q_3' = f_1(q_1, q_2, q_3, q_4),$$
$$q_4' = f_2(q_1, q_2, q_3, q_4);$$

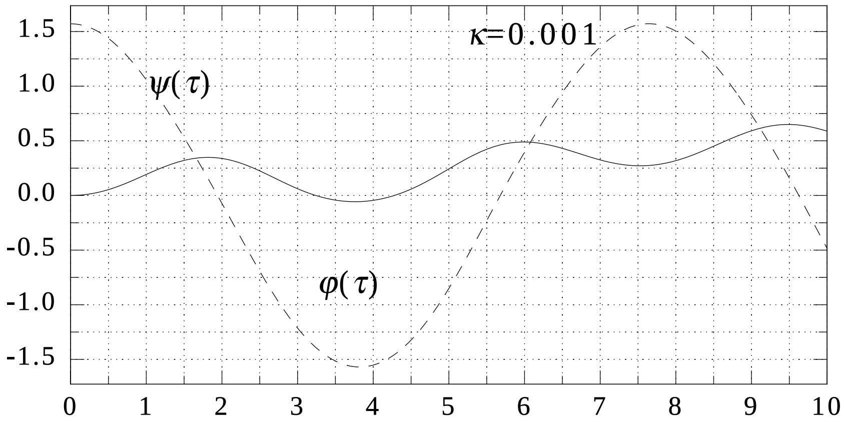
$$f_1 := \frac{(4/3)h_1 + \sin(q_1 - q_2)h_2}{(10/3) - \sin^2(q_1 - q_2)}, \qquad f_2 := \frac{(5/2)h_2 + \sin(q_1 - q_2)h_1}{(10/3) - \sin^2(q_1 - q_2)},$$

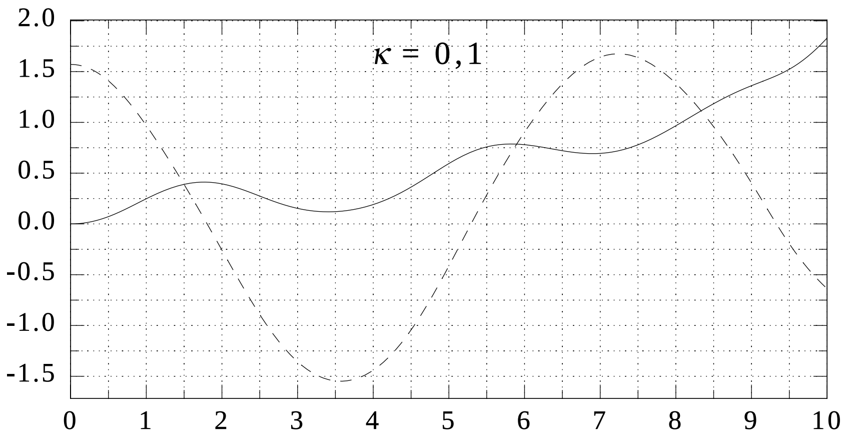
$$h_1 := 1 - q_4{}^2 \cos(q_1 - q_2) - \cos q_1 + \kappa(q_2 - q_1),$$
$$h_2 := q_3{}^2 \cos(q_1 - q_2) - \sin q_2 - \kappa(q_2 - q_1).$$

Als Anfangsbedingungen kann man beispielsweise wählen:

$$q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = \pi/2, \quad q_3(0) = 0, \quad q_4(0) = 0.$$

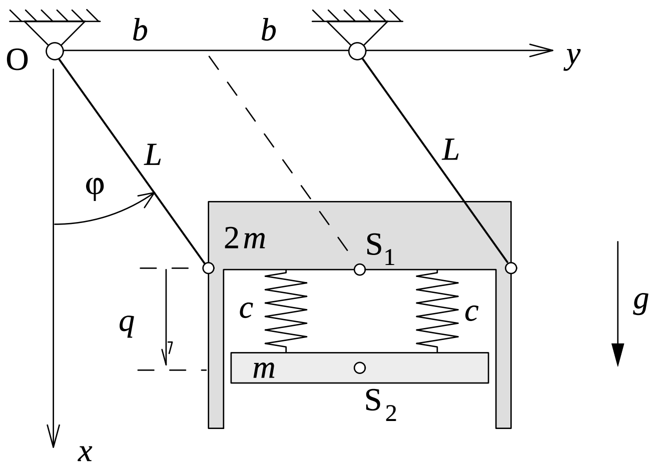
Die folgenden Abbildungen zeigen die Funktionen $q_1(\tau) = \varphi(\tau)$ und $q_2(\tau) = \psi(\tau)$ für verschiedene Werte des Federparameters κ.





Aufgabe 5

Ein starrer Rahmen (Masse $2m$) schwingt an zwei gleich langen Seilen (Länge L) im Schwerkraftfeld in der xy-Ebene. Im Rahmen kann eine Masse m, die an zwei Federn hängt, vertikal reibungsfrei gleiten. Die Federn (Steifigkeit c) sind für $q = L/2$ entspannt. Man bestimme die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten φ und q.



Kinetische Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(2mv_{S_1}^2 + mv_{S_2}^2),$$

$$\vec{r}_{S_1} = \begin{bmatrix} L\cos\varphi \\ L\sin\varphi + b \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_{S_1} = \begin{bmatrix} -L\dot{\varphi}\sin\varphi \\ L\dot{\varphi}\cos\varphi \end{bmatrix}, \qquad v_{S_1}^2 = L^2\dot{\varphi}^2;$$

$$\vec{r}_{S_2} = \begin{bmatrix} L\cos\varphi + q \\ L\sin\varphi + b \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_{S_2} = \begin{bmatrix} -L\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{q} \\ L\dot{\varphi}\cos\varphi \end{bmatrix}, \qquad v_{S_2}^2 = L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{q}^2 - 2L\sin\varphi\dot{\varphi}\dot{q};$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2}(3L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{q}^2 - 2L\sin\varphi\dot{\varphi}\dot{q}).$$

Potentielle Energie des Systems:

$$E_{pot} = -2mgx_{S_1} - mgx_{S_2} + c(q - \frac{L}{2})^2,$$

$$E_{pot} = -3mgL\cos\varphi - mgq + c(q - \frac{L}{2})^2.$$

Terme der LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{\varphi}} = mL(3L\dot{\varphi} - \sin\varphi\dot{q}), \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{q}} = m(\dot{q} - L\sin\varphi\dot{\varphi}),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = mL(3L\ddot{\varphi} - \sin\varphi\ddot{q} - \cos\varphi\dot{\varphi}\dot{q}), \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{q}}\right) = m(\ddot{q} - L\sin\varphi\ddot{\varphi} - L\cos\varphi\dot{\varphi}^2),$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial\varphi} = -mL\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{q}, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi} = 3mgL\sin\varphi; \qquad \frac{\partial E_{pot}}{\partial q} = -mg + 2c(q - \frac{L}{2});$$

LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen:

$$3L\ddot{\varphi} - \sin\varphi\ddot{q} + 3g\sin\varphi = 0,$$

$$\ddot{q} - L\sin\varphi\ddot{\varphi} - L\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + 2\frac{c}{m}(q - \frac{L}{2}) - g = 0.$$

Mit neuen Bezeichnungen erhalten wir eine dimensionslose Darstellung der Bewegungsgleichungen:

$$q =: L\xi, \qquad \frac{g}{L} =: \omega_0^{\,2}, \qquad \frac{c}{m} =: \gamma\omega_0^{\,2}, \qquad \tau := \omega_0 t, \qquad \frac{d()}{dt} = \omega_0 \frac{d()}{d\tau},$$

$$\varphi'' - \frac{1}{3}\sin\varphi\,\xi'' = f_1, \qquad f_1 := -\sin\varphi, \qquad f_2 := \cos\varphi\,\varphi'^2 - 2\gamma\xi + \gamma + 1.$$

$$\xi'' - \sin\varphi\,\varphi'' = f_2,$$

Aufgelöst nach den zweiten Ableitungen ergibt sich die Darstellung der Bewegungsgleichungen, die zur Umwandlung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung führt, das numerisch gelöst werden kann:

$$\varphi'' = h_1, \qquad h_1 := \frac{3f_1 + f_2\sin\varphi}{3 - \sin^2\varphi}, \qquad h_2 := \frac{3f_2 + 3f_1\sin\varphi}{3 - \sin^2\varphi}.$$

$$\xi'' = h_2,$$

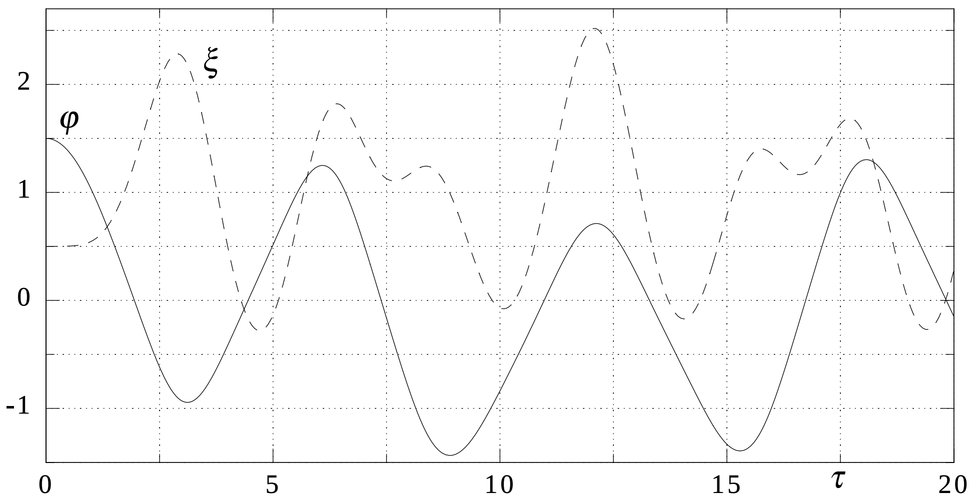
$$q_1 := \varphi, \qquad q_2 := \xi, \qquad q_3 := \varphi', \qquad q_4 := \xi',$$

$$q_1{}' = q_3, \qquad h_1 = \frac{-3\sin(q_1) + \sin(q_1)\{\cos(q_1)q_3{}^2 - 2\gamma q_2 + \gamma + 1\}}{3 - \sin^2(q_1)},$$

$$q_2{}' = q_4,$$

$$q_3{}' = h_1, \qquad h_2 = \frac{3\{\cos(q_1)q_3{}^2 - 2\gamma q_2 + \gamma + 1\} - 3\sin^2(q_1)}{3 - \sin^2(q_1)}.$$

$$q_4{}' = h_2,$$



$$\gamma = 1.0, \quad \varphi(0) = 1.5, \quad \xi(0) = 0.5, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = 0.$$

Wenn $|\varphi| << 1$ bleibt, dürfen wir die Bewegungsgleichungen linearisieren und wir erhalten zwei entkoppelte Schwingungsgleichungen:

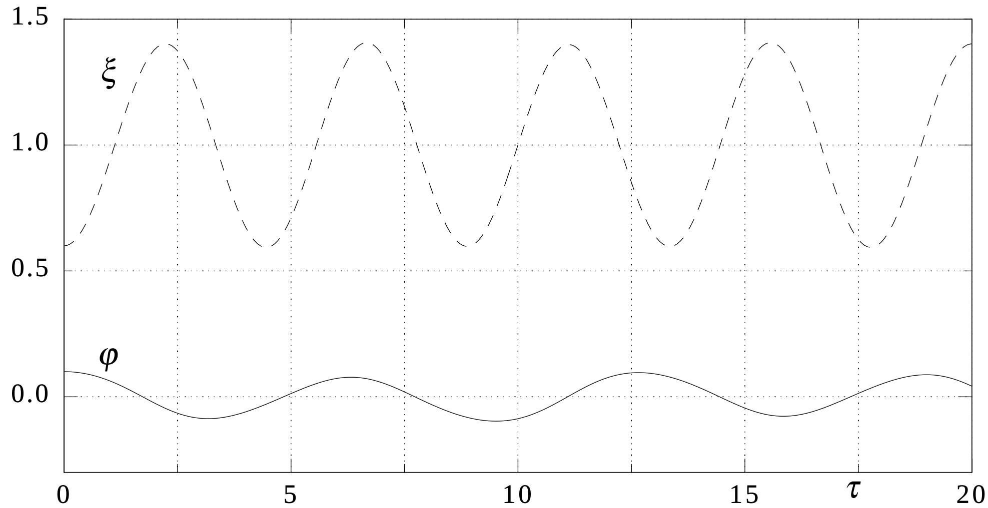
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0,$$

$$\ddot{q} + 2\frac{c}{m}(q - \frac{L}{2}) - g = 0.$$

Wenn wir die nichtlinearen Differentialgleichungen mit den Bedingungen

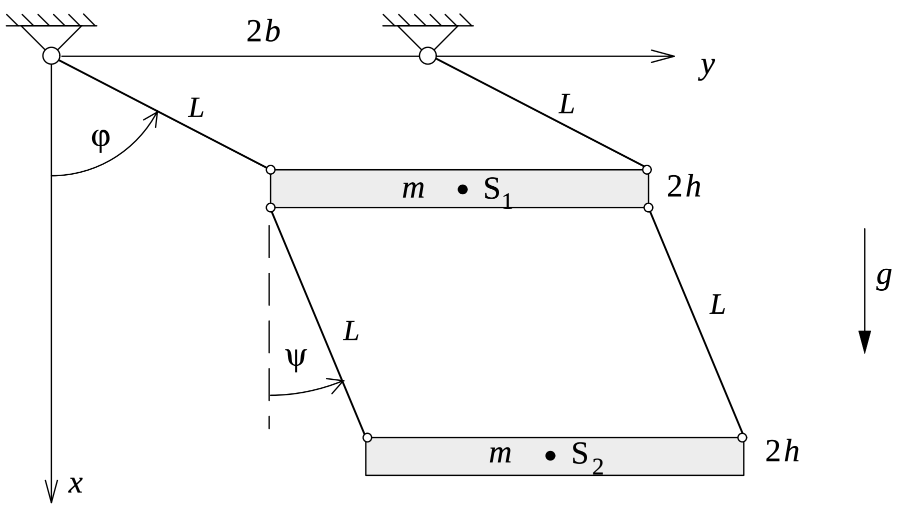
$$\gamma = 1.0, \quad \varphi(0) = 0.1, \quad \xi(0) = 0.6, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = 0,$$

lösen, erhalten wir die in der folgenden Abbildung dargestellten Ergebnisse, denen man die Entkopplung der Schwingungsbewegungen ansieht.



Aufgabe 6

Man bestimme die Bewegungsgleichungen der Doppelschaukel und berechne Lösungen für große und kleine Winkelamplituden.



Ortsvektoren der Schwerpunkte:

$$\vec{r}_{S_1} = (L\cos\varphi + h)\vec{e}_x + (L\sin\varphi + b)\vec{e}_y,$$

$$\vec{r}_{S_2} = (L\cos\varphi + L\cos\psi + 3h)\vec{e}_x + (L\sin\varphi + L\sin\psi + b)\vec{e}_y.$$

Geschwindigkeitsvektoren der Schwerpunkte:

$$\vec{v}_{S_1} = L\dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y),$$

$$\vec{v}_{S_2} = -L(\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\psi)\vec{e}_x + L(\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\psi)\vec{e}_y,$$

$$v_{S_1}^2 = L^2\dot{\varphi}^2, \quad v_{S_2}^2 = L^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi)).$$

Kinetische Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv_{S_1}^2 + \frac{1}{2}mv_{S_2}^2.$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mL^2\{2\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi)\}.$$

Potentielle Energie des Systems:

$$E_{pot} = -m\vec{g}\cdot\vec{r}_{S_1} - m\vec{g}\cdot\vec{r}_{S_2},$$

$$E_{pot} = -mg(2L\cos\varphi + L\cos\psi + 4h).$$

Terme der LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{\varphi}} = mL^2\{2\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos(\varphi - \psi)\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = mL^2\{2\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos(\varphi - \psi) - \dot{\psi}(\dot{\varphi} - \dot{\psi})\sin(\varphi - \psi)\},$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial\varphi} = -mL^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi),$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi} = 2mgL\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{\psi}} = mL^2\{\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos(\varphi - \psi)\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{\psi}}\right) = mL^2\{\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos(\varphi - \psi) - \dot{\varphi}(\dot{\varphi} - \dot{\psi})\sin(\varphi - \psi)\},$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial\psi} = mL^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi),$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial\psi} = mgL\sin\psi;$$

LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen:

$$mL^2\{2\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi)+\dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi)\}+2mgL\sin\varphi=0,$$

$$mL^2\{\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi)+\ddot{\psi}-\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\psi)\}+mgL\sin\psi=0.$$

Umformung in eine dimensionslose Darstellung:

$$\frac{g}{L}=:\omega_0{}^2,\qquad \tau:=\omega_0 t,\qquad \frac{d(...)}{dt}=\omega_0\frac{d(...)}{d\tau}=:\omega_0(...)',$$

$$2\varphi''+\psi''\cos(\varphi-\psi)+\psi'^2\sin(\varphi-\psi)+2\sin\varphi=0,$$

$$\varphi''\cos(\varphi-\psi)+\psi''-\varphi'^2\sin(\varphi-\psi)+\sin\psi=0.$$

Vorbereitung der numerischen Lösung:

$$2\varphi''+\psi''\cos(\varphi-\psi)=f_1,\qquad f_1:=-\psi'^2\sin(\varphi-\psi)-2\sin\varphi,$$

$$\varphi''\cos(\varphi-\psi)+\psi''=f_2,\qquad f_2:=\varphi'^2\sin(\varphi-\psi)-\sin\psi,$$

$$\varphi''=\frac{f_1-f_2\cos(\varphi-\psi)}{2-\cos^2(\varphi-\psi)},\qquad \psi''=\frac{2f_2-f_1\cos(\varphi-\psi)}{2-\cos^2(\varphi-\psi)}.$$

Umwandlung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$q_1:=\varphi,\qquad q_2:=\psi,\qquad q_3:=\varphi',\qquad q_4:=\psi'.$$

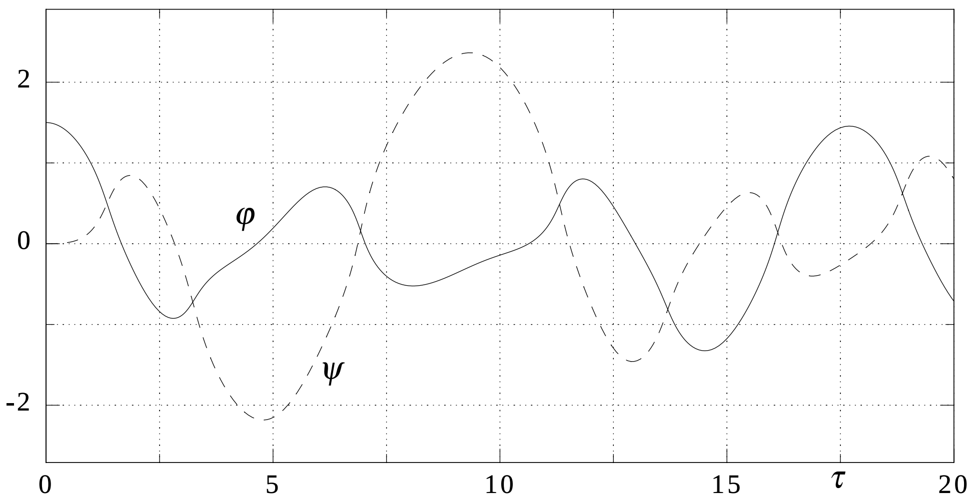
$$q_1'=q_3,\qquad q_2'=q_4,\qquad q_3'=h_1,\qquad q_4'=h_2,$$

$$h_1:=\frac{f_1-f_2\cos(q_1-q_2)}{2-\cos^2(q_1-q_2)},\qquad h_2:=\frac{2f_2-f_1\cos(q_1-q_2)}{2-\cos^2(q_1-q_2)},$$

$$f_1:=-q_4{}^2\sin(q_1-q_2)-2\sin q_1,\qquad f_2:=q_3{}^2\sin(q_1-q_2)-\sin q_2.$$

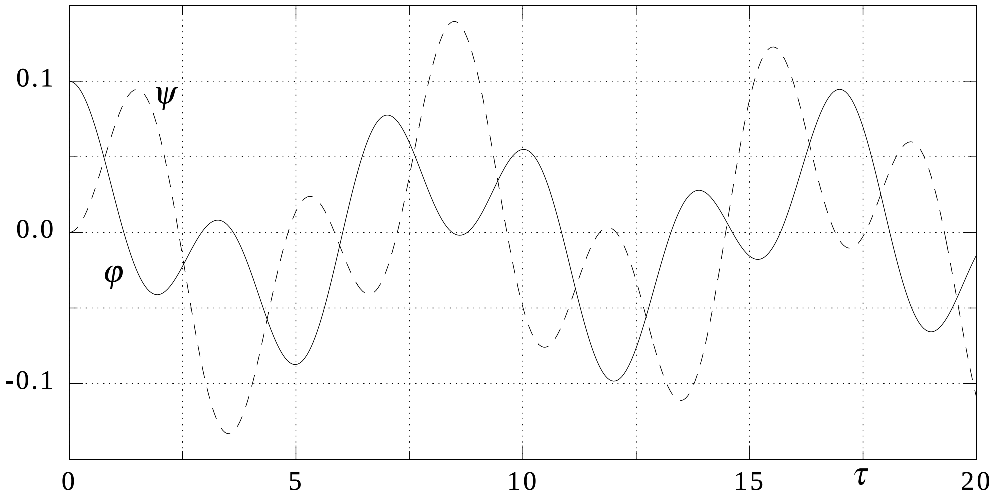
Anfangsbedingungen (Große Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage):

$$\varphi(0)=1{,}5\qquad \psi(0)=0\qquad \dot{\varphi}(0)=0\qquad \dot{\psi}(0)=0$$



Anfangsbedingungen (Kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage):

$$\varphi(0) = 0{,}1 \qquad \psi(0) = 0 \qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \qquad \dot{\psi}(0) = 0$$



Bei kleinen Winkelamplituden dürfen die Bewegungsgleichungen linearisiert werden:

$$2\varphi'' + \psi'' = f_1, \qquad f_1 := -2\varphi,$$
$$\varphi'' + \psi'' = f_2, \qquad f_2 := -\psi,$$

Die Lösungen dieses Differentialgleichungssystems zu den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 0{,}1 \qquad \psi(0) = 0 \qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \qquad \dot{\psi}(0) = 0$$

unterscheiden sich kaum von den oben dargestellten Funktionen, die mit dem nichtlinearen Differentialgleichungssystem berechnet wurden.

Bei Beschränkung auf kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage dürfen die kinetische und die potentielle Energie des Systems vereinfacht werden:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m L^2 (2\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}), \qquad E_{pot} = \frac{1}{2} mgL(2\varphi^2 + \psi^2) + const.$$

Daraus ergeben sich die Massenmatrix $[m]$ und die Federmatrix (Steifigkeitsmatrix) $[c]$:

$$[m] = mL^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [c] = mgL \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die linearen Bewegungsgleichungen

$$mL^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + mgL \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + {\omega_0}^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

werden mit dem Eigenschwingungsansatz

$$\begin{bmatrix}\varphi\\ \psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}A\sin(\omega t+\alpha),\qquad \omega=\lambda\omega_0,$$

gelöst. Das dabei entstehende homogene Gleichungssystem

$$\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\lambda^2\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

besitzt nichttriviale Lösungen, wenn

$$\det\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\lambda^2\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)=0,\quad\rightarrow\quad 2(1-\lambda^2)^2-\lambda^4=0\quad\rightarrow\quad \begin{matrix}\lambda_1{}^2=2-\sqrt{2},\\ \lambda_2{}^2=2+\sqrt{2},\end{matrix}$$

wird. Daraus ergeben sich die beiden Eigenkreisfrequenzen:

$$\omega_1=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0=0{,}7654\,\omega_0,\qquad \omega_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0=1{,}8478\,\omega_0.$$

Die entsprechenden Eigenvektoren (Eigenschwingungsformen) sind Lösungsvektoren des homogenen Gleichungssystems:

$$\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\lambda_\alpha{}^2\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}_\alpha=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}_1=\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}_2=\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

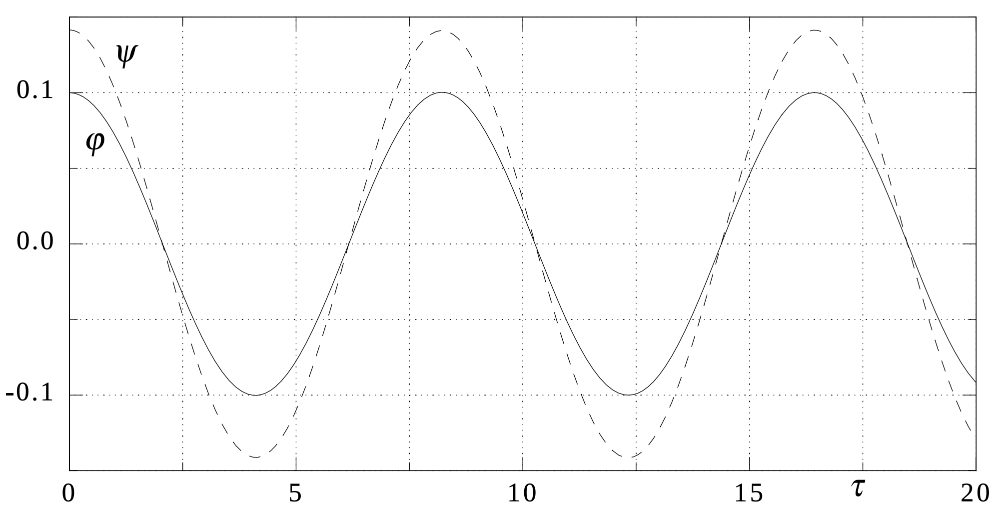
Die allgemeine Lösung der linearisierten Bewegungsgleichungen lautet:

$$\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \psi(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}(C_{1(1)}\cos(\omega_1 t)+C_{2(1)}\sin(\omega_1 t))+\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{bmatrix}(C_{1(2)}\cos(\omega_2 t)+C_{2(2)}\sin(\omega_2 t)).$$

Die folgenden Abbildungen zeigen die beiden Eigenschwingungsbewegungen des Systems bei kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage.

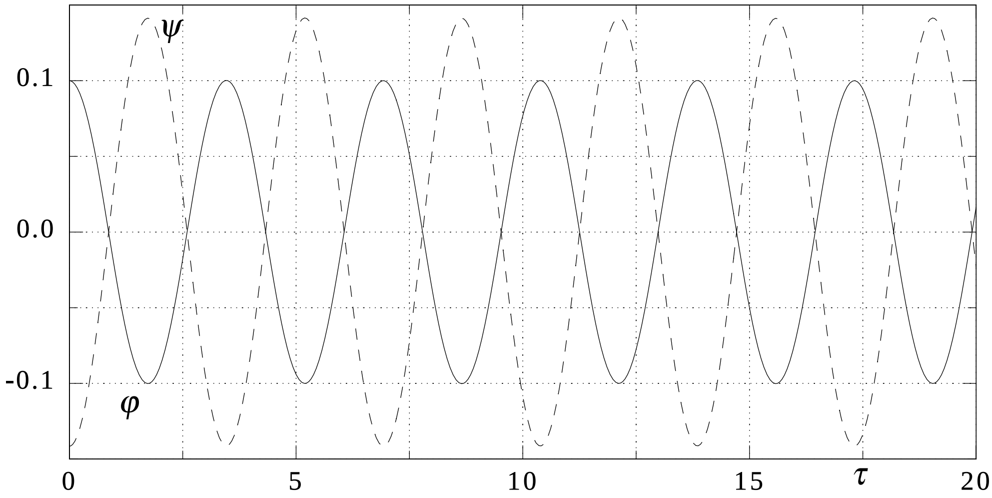
1. Eigenschwingungsbewegung: $(\omega_1=0{,}7654\,\omega_0)$

$$\varphi(0)=0.1\qquad \psi(0)=0.1\sqrt{2},\qquad \dot\varphi(0)=0,\qquad \dot\psi(0)=0$$

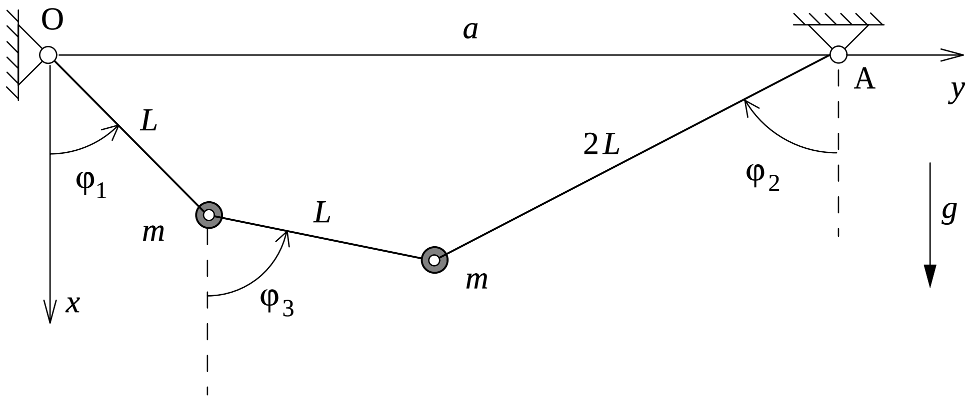


2. Eigenschwingungsbewegung: $(\omega_2 = 1{,}8478\,\omega_0)$

$$\varphi(0) = 0.1 \qquad \psi(0) = -0.1\sqrt{2}, \qquad \dot\varphi(0) = 0, \qquad \dot\psi(0) = 0$$



Aufgabe 7



Zwei Massenpunkte sind über masselose Fäden an die Punkte O und A gebunden. Man bestimme die Bewegungsgleichungen nach der Methode von LAGRANGE. Es sei $a = \alpha L$, $(2 < \alpha < 3)$.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$L\cos\varphi_1 + L\cos\varphi_3 = 2L\cos\varphi_2, \qquad \cos\varphi_1 - 2\cos\varphi_2 = -\cos\varphi_3,$$
$$L\sin\varphi_1 + L\sin\varphi_3 + 2L\sin\varphi_2 = a; \qquad \sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2 - \alpha = -\sin\varphi_3;$$

Elimination von φ_3:

$$(\cos\varphi_1 - 2\cos\varphi_2)^2 + (\sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2 - \alpha)^2 = 1,$$

$$f(\varphi_1,\varphi_2) := 4 + \alpha^2 - 4\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\alpha(\sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = 4\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\alpha\cos\varphi_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = 4\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - 4\alpha\cos\varphi_2.$$

Kinetische und potentielle Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} mL^2 (\dot{\varphi}_1{}^2 + 4\dot{\varphi}_2{}^2), \qquad E_{pot} = -mgL(\cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2).$$

LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen mit LAGRANGEschem Multiplikator λ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi_1} - \lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi_1} = 0, \qquad mL^2\ddot{\varphi}_1 + mgL\sin\varphi_1 - \lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi_2} - \lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi_2} = 0. \qquad 4mL^2\ddot{\varphi}_2 + 2mgL\sin\varphi_2 - \lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi_2} = 0.$$

Außerdem gilt

$$\ddot{f} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi_1}\dot{\varphi}_1 + \frac{\partial f}{\partial\varphi_2}\dot{\varphi}_2\right) = \frac{\partial f}{\partial\varphi_1}\ddot{\varphi}_1 + \frac{\partial f}{\partial\varphi_2}\ddot{\varphi}_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi_1{}^2}\dot{\varphi}_1{}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi_2{}^2}\dot{\varphi}_2{}^2 = 0\,.$$

Wir setzen

$$\omega_0{}^2 := \frac{g}{L}, \qquad \omega_0 t =: \tau, \qquad \frac{d()}{dt} = \omega_0\frac{d()}{d\tau} =: \omega_0()'.$$

Damit erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$\varphi_1'' + \sin\varphi_1 - \bar{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\varphi_1} = 0,$$

$$4\varphi_2'' + 2\sin\varphi_2 - \bar{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\varphi_2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi_1}\varphi_1'' + \frac{\partial f}{\partial\varphi_2}\varphi_2'' = -\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi_1{}^2}\varphi_1'^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}\varphi_1'\varphi_2' - \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi_2{}^2}\varphi_2'^2.$$

Wir eliminieren den LAGRANGEschen Multiplikator $\bar{\lambda}$ und erhalten aus den beiden LAGRANGEschen Gleichungen

$$(\varphi_1'' + \sin\varphi_1)\frac{\partial f}{\partial\varphi_2} - (4\varphi_2'' + 2\sin\varphi_2)\frac{\partial f}{\partial\varphi_1} = 0.$$

Das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi_2}\varphi_1'' - 4\frac{\partial f}{\partial\varphi_1}\varphi_2'' = h_1, \qquad h_1 := 2\sin\varphi_2\frac{\partial f}{\partial\varphi_1} - \sin\varphi_1\frac{\partial f}{\partial\varphi_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi_1}\varphi_1'' + \frac{\partial f}{\partial\varphi_2}\varphi_2'' = h_2, \qquad h_2 := -\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi_1{}^2}\varphi_1'^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}\varphi_1'\varphi_2' - \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi_2{}^2}\varphi_2'^2,$$

kann auch geschrieben werden

$$\varphi_1'' = \frac{1}{h_3}\left(h_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + 4h_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\right), \qquad h_3 := \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\right)^2.$$

$$\varphi_2'' = \frac{1}{h_3}\left(h_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} - h_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\right),$$

Oben wurde schon berechnet

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = 4\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\alpha\cos\varphi_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = 4\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - 4\alpha\cos\varphi_2,$$

und daraus folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^{\,2}} = 4\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + 2\alpha\sin\varphi_1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_2^{\,2}} = 4\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + 4\alpha\sin\varphi_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = 4\cos(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung wird in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung umgeformt und numerisch gelöst.

$$y_1 := \varphi_1, \quad y_2 := \varphi_2, \quad y_3 := \varphi_1', \quad y_4 := \varphi_2';$$

$$y_1' := y_3, \qquad y_2' := y_4, \qquad y_3' := k_1, \qquad y_4' := k_2;$$

$$k_1 := \frac{1}{h_3}\left(h_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + 4h_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\right), \qquad k_2 := \frac{1}{h_3}\left(h_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} - h_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\right).$$

Die Anfangsbedingungen $\varphi_1(0), \varphi_2(0)$ müssen der Zwangsbedingung

$$4 + \alpha^2 - 4\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\alpha(\sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2) = 0$$

genügen.

Ist insbesondere $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1'(0) = 0$ und $\alpha = 2.5$, so folgt aus

$$4 + \alpha^2 - 4\cos\varphi_2 - 4\alpha\sin\varphi_2 = 0$$

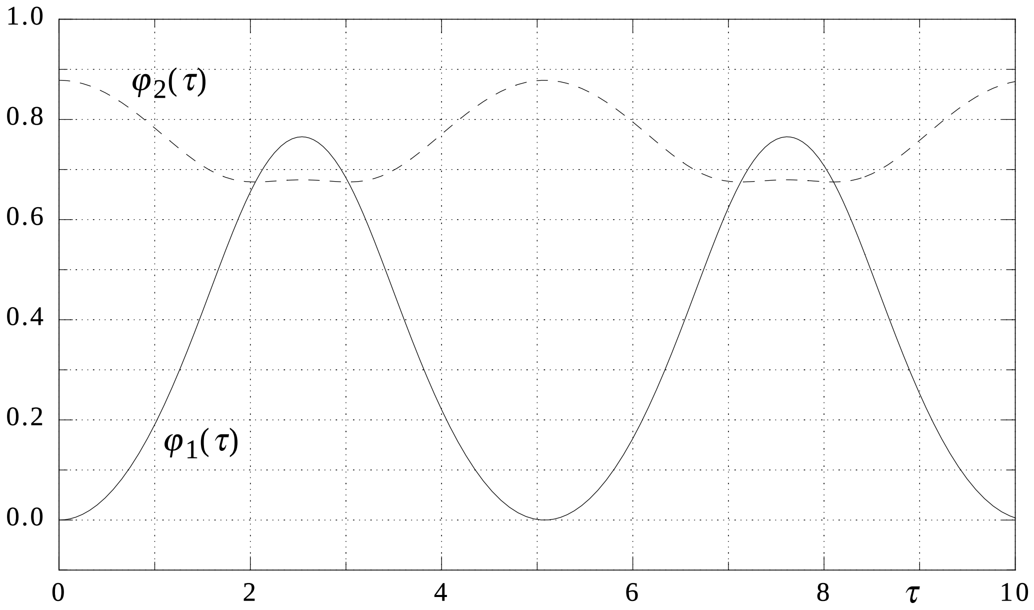
$$\varphi_2(0) = 0.8781826574.$$

Aus der differenzierten Zwangsbedingung

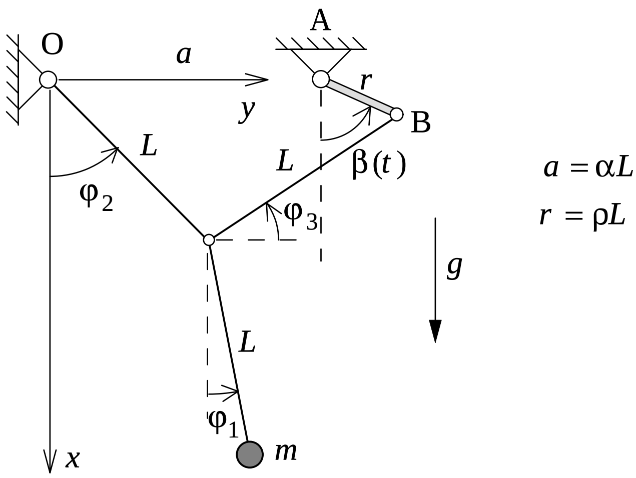
$$f' = \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\varphi_1' + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\varphi_2' = 0$$

folgt $\varphi_2'(0) = 0$ als verträgliche Anfangsbedingung.

Die folgenden Abbildungen zeigen die entsprechenden Lösungsfunktionen $\varphi_1(\tau)$ und $\varphi_2(\tau)$.



Aufgabe 8



Für das dargestellte Pendel bestimme man die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Methode von LAGRANGE, wobei $\beta(t)$ gegeben ist.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$L\cos\varphi_2 - L\sin\varphi_3 = r\cos\beta, \qquad \cos\varphi_2 - \rho\cos\beta = \sin\varphi_3,$$

$$L\sin\varphi_2 + L\cos\varphi_3 - r\sin\beta = a. \qquad \sin\varphi_2 - \rho\sin\beta - \alpha = -\cos\varphi_3.$$

Elimination des Winkels φ_3:

$$(\cos\varphi_2 - \rho\cos\beta)^2 + (\sin\varphi_2 - \rho\sin\beta - \alpha)^2 = 1,$$

$$\frac{\rho^2 + \alpha^2}{2} - \rho\cos(\varphi_2 - \beta) - \alpha(\sin\varphi_2 - \rho\sin\beta) = 0.$$

$$f(\varphi_2, t) := \frac{\rho^2 + \alpha^2}{2} - \rho\cos(\varphi_2 - \beta) - \alpha(\sin\varphi_2 - \rho\sin\beta).$$

Die explizite Zeitabhängigkeit steckt in $\beta(t)$. Deshalb wird

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dot{\varphi}_2 + \frac{\partial f}{\partial \beta}\dot{\beta}, \qquad \ddot{f} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\ddot{\varphi}_2 + \frac{\partial f}{\partial \beta}\ddot{\beta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_2{}^2}\dot{\varphi}_2{}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_2 \partial \beta}\dot{\varphi}_2\dot{\beta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}\dot{\beta}^2.$$

Orts- und Geschwindigkeitsvektor des Massenpunktes:

$$\vec{r} = L\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2\end{bmatrix}, \qquad \vec{v} = L\begin{bmatrix}-\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1 - \sin\varphi_2\dot{\varphi}_2 \\ \cos\varphi_1\dot{\varphi}_1 + \cos\varphi_2\dot{\varphi}_2\end{bmatrix},$$

$$v^2 = L^2\{\dot{\varphi}_1{}^2 + \dot{\varphi}_2{}^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\}.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\{\dot{\varphi}_1{}^2 + \dot{\varphi}_2{}^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\}.$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = -mgL(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2).$$

LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen mit LAGRANGEschem Multiplikator λ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi_1} - \lambda\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi_2} - \lambda\frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Weil die Zwangsbedingung $f(\varphi_2, \beta(t))$ nicht von φ_1 abhängt, wird

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi_1} = 0.$$

Außerdem muß

$$\ddot{f} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\ddot{\varphi}_2 + \frac{\partial f}{\partial \beta}\ddot{\beta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_2{}^2}\dot{\varphi}_2{}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_2 \partial \beta}\dot{\varphi}_2\dot{\beta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}\dot{\beta}^2 = 0$$

berücksichtigt werden. Mit diesen beiden Gleichungen stehen zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung für $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ zur Verfügung.

Die zweite LAGRANGEsche Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi_2} - \lambda\frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = 0$$

kann anschließend zur Berechnung des LAGRANGEschen Multiplikators λ verwendet werden.

LAGRANGEsche Ableitungen:

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}_1} = mL^2\{\dot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = mL^2\{\ddot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - \sin(\varphi_1 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\dot{\varphi}_2\},$$

$$-\frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi_1} = mL^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\},$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi_1} = mgL\sin\varphi_1;$$

Die erste Differentialgleichung lautet somit

$$mL^2\{\ddot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2{}^2\} + mgL\sin\varphi_1 = 0.$$

Wir führen ein

$$\omega_0{}^2 := \frac{g}{L}, \qquad \omega_0 t =: \tau, \qquad \frac{d()}{dt} = \omega_0 \frac{d()}{d\tau} =: \omega_0 ()'.$$

Damit wird

$$\varphi_1'' + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_2'' = -\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_2'^2 - \sin\varphi_1.$$

Aus der zweiten Ableitung der kinematischen Zwangsbedingung $f(\varphi_2, \beta) = 0$ ergibt sich die zweite Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\varphi_2'' = -\frac{\partial f}{\partial \beta}\beta'' - \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_2{}^2}\varphi_2'^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_2 \partial \beta}\varphi_2'\beta' - \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}\beta'^2.$$

Dabei ist

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = \rho\sin(\varphi_2 - \beta) - \alpha\cos\varphi_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial \beta} = -\rho\sin(\varphi_2 - \beta) + \alpha\rho\cos\beta,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_2{}^2} = \rho\cos(\varphi_2 - \beta) + \alpha\sin\varphi_2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = \rho\cos(\varphi_2 - \beta) - \alpha\rho\sin\beta,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_2 \partial \beta} = -\rho\cos(\varphi_2 - \beta).$$

Das Differentialgleichungssystem kann schließlich geschrieben werden

$$\varphi_1'' = h_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'; \tau)$$

$$\varphi_2'' = h_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'; \tau)$$

$$h_1 := -\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_2'^{\,2} - \sin\varphi_1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)h_2,$$

$$h_2 := -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\beta}\beta'' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi_2^{\,2}}\varphi_2'^{\,2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi_2\partial\beta}\varphi_2'\beta' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}\beta'^2}{\dfrac{\partial f}{\partial\varphi_2}},$$

wobei $\beta(\tau)$ als gegebene Funktion einzusetzen ist. Das entsprechende Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, das numerisch als Anfangswertproblem gelöst werden muß, lautet mit

$$y_1 := \varphi_1, \quad y_2 := \varphi_2, \quad y_3 := \varphi_1', \quad y_4 := \varphi_2'$$

$$y_1' := y_3, \qquad y_2' := y_4, \qquad y_3' := h_1, \qquad y_4' := h_2.$$

Die Anfangsbedingungen müssen mit den Zwangsbedingungen verträglich sein, also muß für $t = 0$ gelten:

$$\frac{\rho^2 + \alpha^2}{2} - \rho\cos(\varphi_2 - \beta) - \alpha(\sin\varphi_2 - \rho\sin\beta) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi_2}\varphi_2' + \frac{\partial f}{\partial\beta}\beta' = 0.$$

Wir setzen nun

$$\beta = \Omega t =: \eta\omega_0 t = \eta\tau, \qquad \beta' = \eta, \qquad \beta'' = 0.$$

Dann muß $\varphi_2(0)$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\rho^2 + \alpha^2}{2} - \rho\cos\varphi_2 - \alpha\sin\varphi_2 = 0$$

sein, und $\varphi_2'(0)$ ein Lösung der Gleichung

$$\{\rho\sin\varphi_2 - \alpha\cos\varphi_2\}\varphi_2' - \rho\{\sin\varphi_2 - \alpha\}\eta = 0,$$

also

$$\varphi_2'(0) = \frac{\rho\{\sin\varphi_2 - \alpha\}\eta}{\rho\sin\varphi_2 - \alpha\cos\varphi_2}.$$

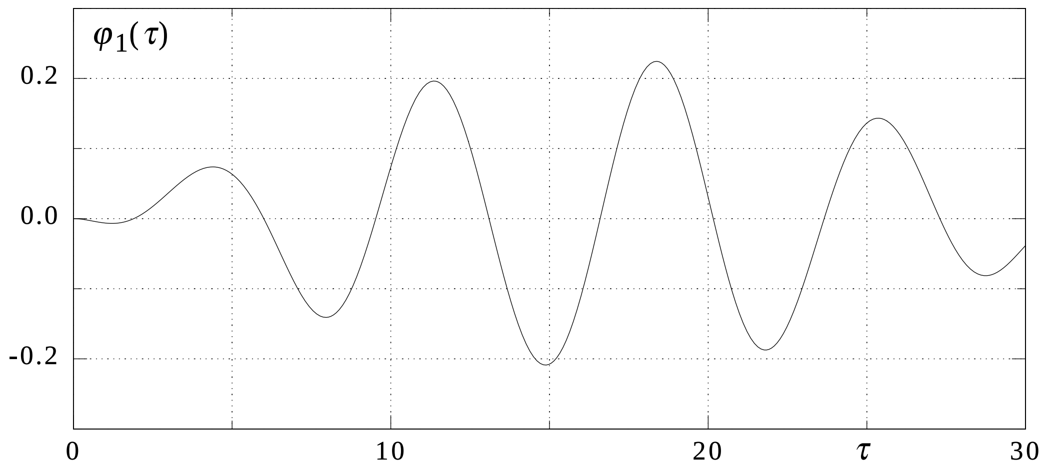
Zu den speziellen Werten

$$\alpha = 1.5 \qquad \rho = 0.1 \qquad \eta = 0.8$$

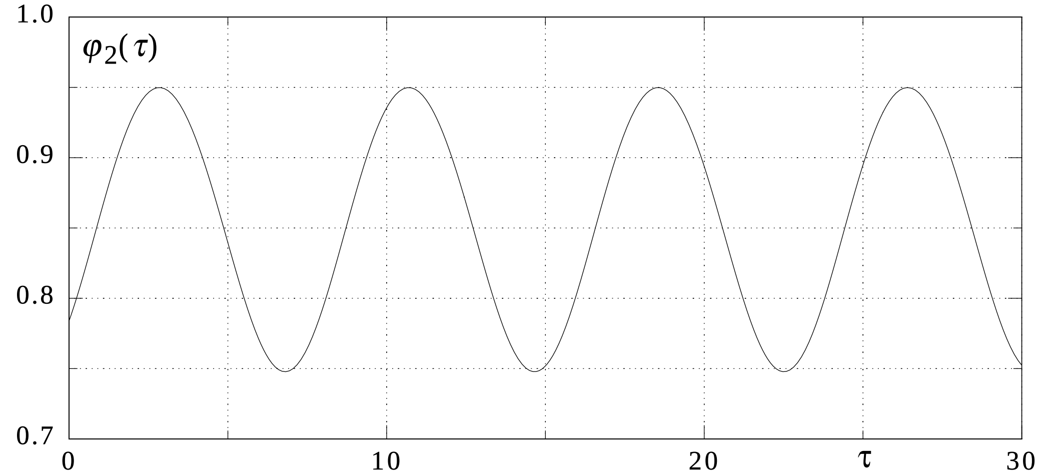
erhalten wir mit $\beta(0) = 0$

$$\varphi_2(0) = 0.7840144895$$

die in den folgenden Bildern dargestellten Lösungen:

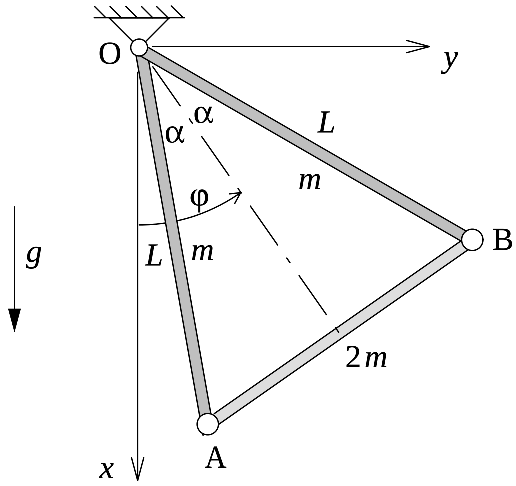


φ1(τ)
0.2
0.0
-0.2
0
10
20
τ
30



1.0
φ2(τ)
0.9
0.8
0.7
0
10
20
τ
30

Aufgabe 1



Ein Pendel (Masse $4m$) besteht aus drei Stangen und ist im Punkt O reibungsfrei aufgehängt. Man bestimme die Bewegungsgleichung und die Schwingungsdauer $T(\alpha)$ für kleine Amplituden $|\varphi| << 1$. Außerdem vergleiche man die Lösungen der nichtlinearen und der linearisierten Form der Bewegungsgleichung.

Abstand des Schwerpunktes vom Punkt O:

$$L_S = \frac{3}{4} L \cos\alpha.$$

Bewegungsgleichung aus dem Momentensatz bezogen auf den Punkt O:

$$\Theta_0 \ddot{\varphi} = -4mgL_S \sin\varphi, \qquad \rightarrow \qquad \ddot{\varphi} + \omega_0{}^2 \sin\varphi = 0, \qquad \omega_0{}^2 := \frac{4mgL_S}{\Theta_0};$$

$$\Theta_0 = 2\frac{mL^2}{3} + \frac{2m}{12}(2L\sin\alpha)^2 + 2m(L\cos\alpha)^2,$$

$$\Theta_0 = (\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)mL^2 = \frac{4}{3}(1+\cos^2\alpha)mL^2,$$

$$\omega_0{}^2 = \frac{9}{4}\frac{\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha}\frac{g}{L}.$$

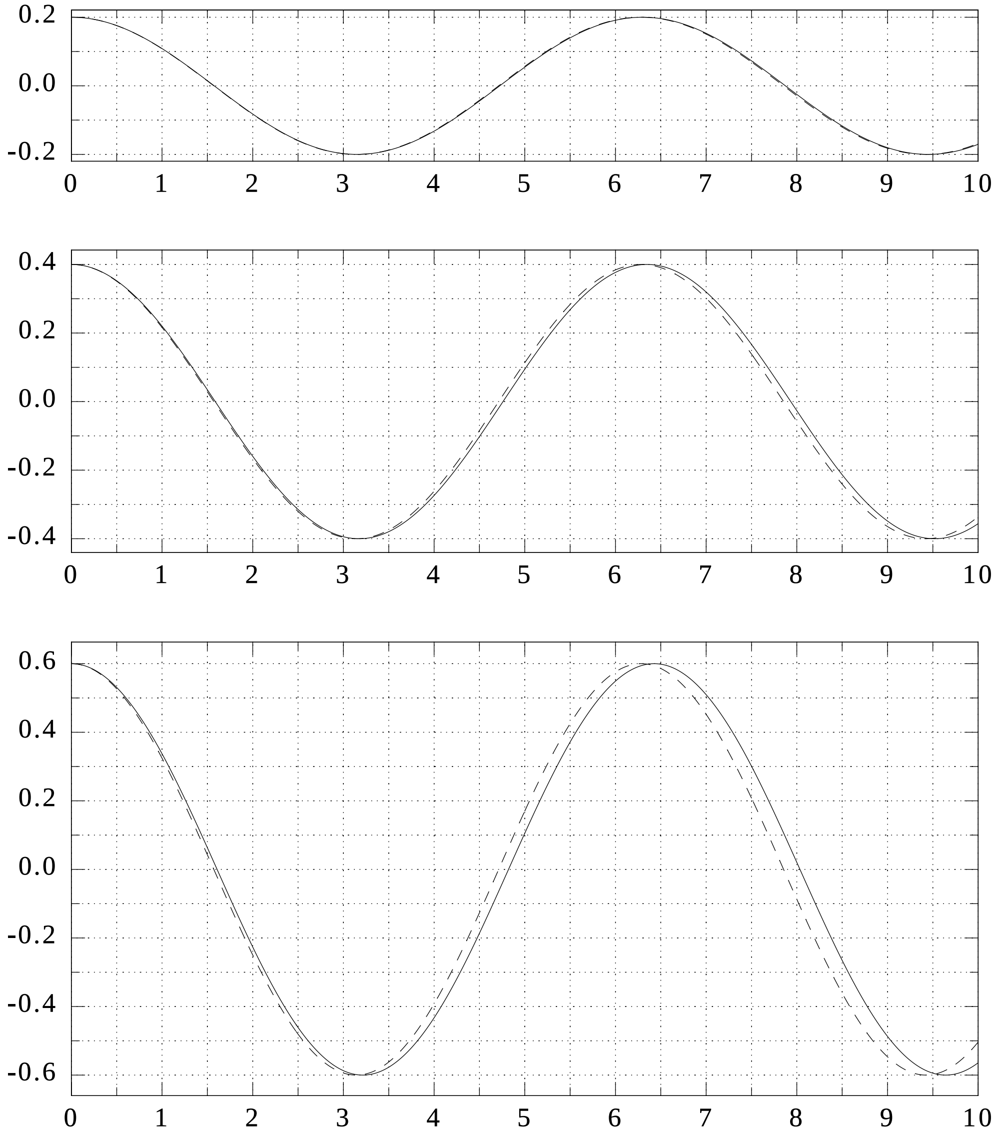
Schwingungsdauer bei kleinen Amplituden (lineare Bewegungsgleichung):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha} + \cos\alpha}.$$

Umwandlung der nichtlinearen Differentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

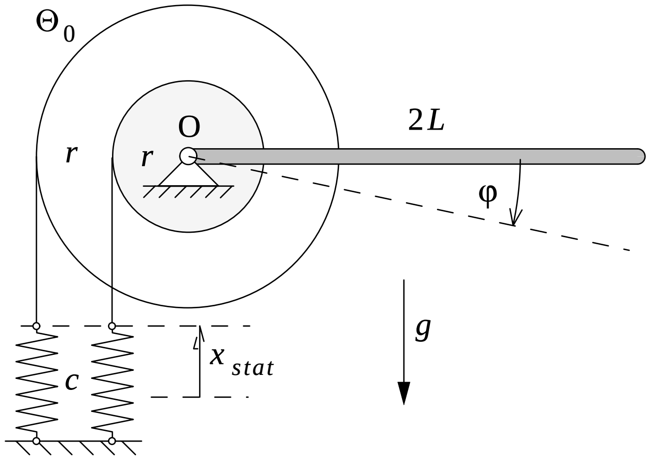
$$q_1 := \varphi, \qquad q_2 := \dot{\varphi} \qquad \begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= -\omega_0{}^2 \sin(q_1); \end{aligned}$$

Lösungen der nichtlinearen (linearen) Differentialgleichung: ausgezogene (gestrichelte) Kurven; Zeitskalen: $\tau := \omega_0 t$.



Aufgabe 2

Eine Stange (Länge $2L$, Masse m) ist mit einer Doppelkreisscheibe (Radien r und $2r$, Massenträgheitsmoment Θ_0) starr verbunden, die in O drehbar gelagert und von zwei Federn der Steifigkeit c in der Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ gehalten wird. Dabei sind die Federn um x_{stat} ausgelenkt. Man berechne die statische Auslenkung x_{stat} und die Schwingungsdauer des Systems für Schwingungen mit kleiner Amplitude um die Gleichgewichtslage.



Gleichgewichtsbedingung:

$$c x_{stat} 2r + c x_{stat} r - mgL = 0, \qquad \to \qquad x_{stat} = \frac{mgL}{3cr}.$$

Momentensatz bezogen auf O:

$$(\Theta_0 + \frac{1}{3} m (2L)^2)\ddot{\varphi} = mgL \cos\varphi - c(x_{stat} + 2r\varphi)2r - c(x_{stat} + r\varphi)r,$$

$$|\varphi| << 1 \qquad \to \qquad \cos\varphi \approx 1$$

$$(\Theta_0 + \frac{4}{3} mL^2)\ddot{\varphi} = mgL - 3c x_{stat} r - 5cr^2\varphi,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{5cr^2}{\Theta_0 + \frac{4}{3} mL^2}\varphi = 0, \qquad \to \qquad \omega_0{}^2 := \frac{5cr^2}{\Theta_0 + \frac{4}{3} mL^2},$$

Schwingungsdauer:

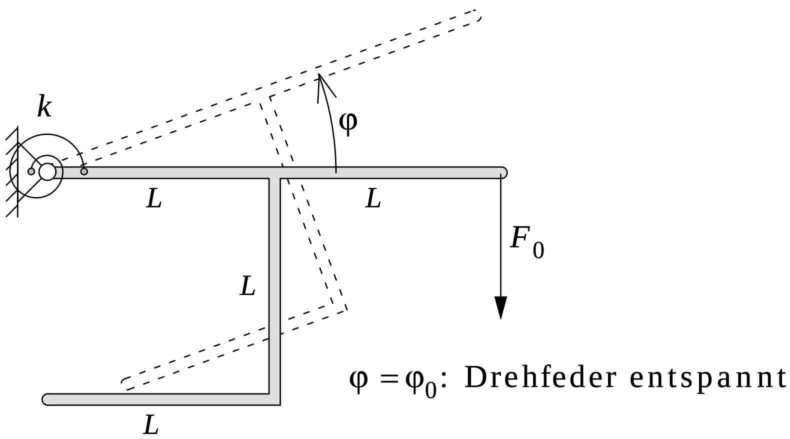
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Aufgabe 3

Ein starrer Rahmen (Masse $4m$) ist an einem Endpunkt A drehbar elastisch gelagert. Wie groß ist die Drehfederkonstante k, wenn die Kraft F_0 den Rahmen in der Lage $\varphi = 0$ halten kann? Man bestimme die Bewegungsgleichung des Rahmens in der Koordinate φ und berechne $\varphi(t)$, wenn ab $t = 0$ die Kraft F_0 nicht mehr wirkt und die Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

gelten.



Drehfederkonstante:

$$k\varphi_0 = F_0 2L \quad \rightarrow \quad k = \frac{2F_0 L}{\varphi_0}.$$

Bewegungsgleichung für $F_0 = 0$:

$$\Theta_A \ddot{\varphi} = -k(\varphi - \varphi_0),$$

$$\Theta_A = \frac{1}{3} 2m(2L)^2 + 2[\frac{1}{12} mL^2 + m(L^2 + \frac{L^2}{4})] = \frac{16}{3} mL^2,$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0{}^2 \varphi = \omega_0{}^2 \varphi_0, \qquad \omega_0{}^2 := \frac{k}{\Theta_A}.$$

Allgemeine Lösung:

$$\varphi = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \varphi_0,$$

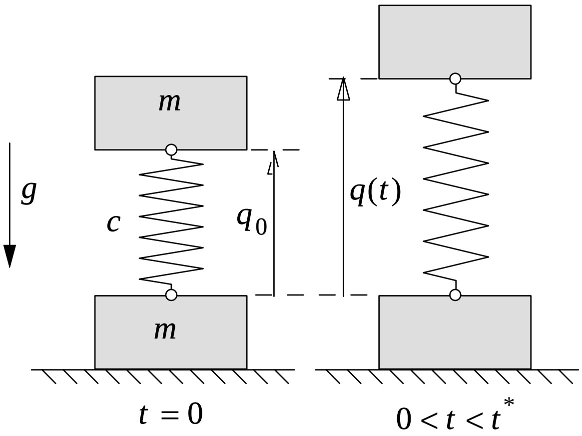
$$\dot{\varphi} = -C_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t),$$

Spezielle Lösung:

$$t = 0: \qquad 0 = C_1 + \varphi_0, \qquad 0 = C_2 \omega_0,$$

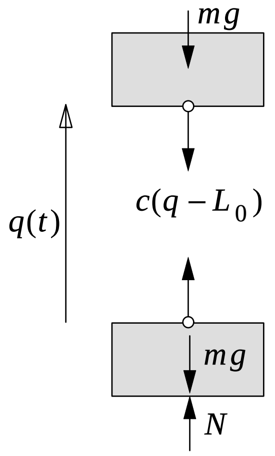
$$\varphi(t) = \varphi_0 [1 - \cos(\omega_0 t)].$$

Aufgabe 4



Zwei Körper der Masse m sind über eine Feder (Federsteifigkeit c, Länge der entspannten Feder L_0) miteinander verbunden; es sei $c = 8mg/L_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Feder auf die Länge $q(0) = q_0 = L_0/8$ zusammengedrückt und die obere Masse wird ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen, so daß sie, angetrieben durch die Federkraft, gegen die Schwerkraft nach oben bewegt wird. Man berechne den Zeitpunkt t^*, zu dem die untere Masse vom Boden abhebt.

$0 < t < t^*$



$$m\ddot{q} = -mg - c(q - L_0)$$

$$N - mg + c(q - L_0) = 0$$

$$\ddot{q} + \omega_0{}^2 q = \omega_0{}^2 (L_0 - \frac{mg}{c}) = \omega_0{}^2 \frac{7}{8} L_0,$$

$$q(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{7}{8} L_0,$$

$$\dot{q}(t) = -C_1\omega_0 \sin(\omega_0 t) + C_2\omega_0 \cos(\omega_0 t),$$

$$t = 0: \qquad \frac{1}{8} L_0 = C_1 + \frac{7}{8} L_0, \qquad 0 = C_2\omega_0,$$

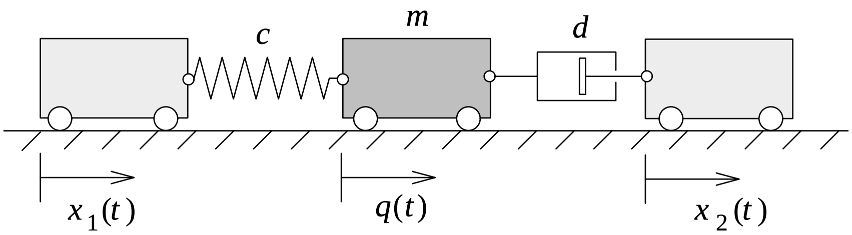
$$q(t) = \frac{L_0}{8}\{7 - 6\cos(\omega_0 t)\}.$$

$$N = mg + cL_0 - \frac{7}{8} cL_0 + \frac{6}{8} cL_0 \cos(\omega_0 t) = 2mg + 6mg\cos(\omega_0 t),$$

$$N(t^*) = 2mg + 6mg\cos(\omega_0 t^*) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \cos(\omega_0 t^*) = -\frac{1}{3},$$

$$t^* = \frac{1}{\omega_0} \arccos(-1/3) = \frac{1.91}{\omega_0}.$$

Aufgabe 5



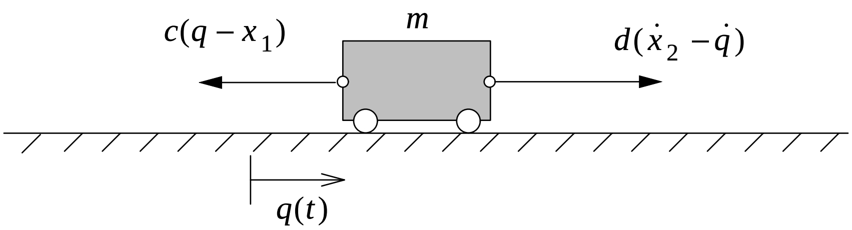
Man berechne im **aperiodischen Grenzfall** das Bewegungsgesetz $q(t)$ des mittleren Wagens unter den Anfangsbedingungen

$$q(0)=0, \qquad \dot{q}(0)=0$$

wenn der linke und der rechte Wagen sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 bewegen

$$x_1(t)=v_0 t, \qquad x_2(t)=v_0 t.$$

Zum Zeitpunkt $t=0$ sei die Feder entspannt.



Schwerpunktsatz:

$$m\ddot{q}=-c(q-x_1)+d(\dot{x}_2-\dot{q}),$$

$$\ddot{q}+2D\omega_0\dot{q}+\omega_0^2 q=\omega_0^2 x_1+2D\omega_0\dot{x}_2, \qquad \frac{c}{m}=:\omega_0^2, \qquad \frac{d}{m}=:2D\omega_0.$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q}+2D\omega_0\dot{q}+\omega_0^2 q=\omega_0^2 f(t), \qquad f(t):=v_0 t+\frac{2D}{\omega_0}v_0.$$

Partikularlösung:

$$\text{Ansatz:} \quad q_{Part}=A+Bt.$$

$$2D\omega_0 B+\omega_0^2(A+Bt)=\omega_0^2 v_0 t+2D\omega_0 v_0, \qquad \to \qquad B=v_o, \qquad A=0.$$

$$q_{Part}=v_0 t.$$

Aperiodischer Grenzfall: (D=1)

Allgemeine Lösung der inhomogenen Bewegungsgleichung:

$$q(t)=e^{-\omega_0 t}(C_1 t+C_2)+v_0 t.$$

Anpassung an die Anfangsbedingungen:

$$\dot{q}(t) = -\omega_0 e^{-\omega_0 t}(C_1 t + C_2) + e^{-\omega_0 t} C_1 + v_0,$$

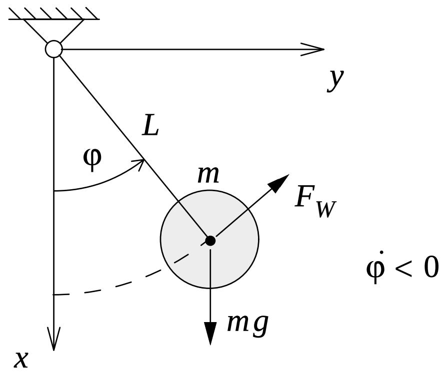
$$q(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0, \qquad \dot{q}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -v_0.$$

Gesuchtes Bewegungsgesetz:

$$q(t) = v_0 t \ (1 - e^{-\omega_0 t}).$$

Aufgabe 6

Man bestimme die Bewegungsgleichung eines Pendels (Kugel an einem Faden) unter Berücksichtigung der Luftreibung und löse die Bewegungsgleichung numerisch.



Schwerpunktsatz in Richtung der Bahntangente:

$$mL\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi - F_W \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}, \qquad F_W = \frac{1}{2} c_W \rho_{\text{Luft}} A_S (L\dot{\varphi})^2,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\sin\varphi + \frac{1}{2} c_W \frac{\rho_{\text{Luft}} L A_S}{m} |\dot{\varphi}|\dot{\varphi} = 0,$$

$$\omega_0{}^2 := \frac{g}{L}, \qquad \tau =: \omega_0 t, \qquad \frac{d()}{dt} = \omega_0 \frac{d()}{d\tau} =: \omega_0 ()',$$

$$\varphi'' + \sin\varphi + \lambda|\varphi'|\varphi' = 0, \qquad \lambda := \frac{1}{2} c_W \frac{\rho_{\text{Luft}} L A_S}{m}.$$

$$c_W = 0.6 \qquad \rho_{\text{Luft}} = 1.22 \ \text{kgm}^{-3} \qquad L = 1.5\,\text{m} \qquad m = 1.2\,\text{kg}$$

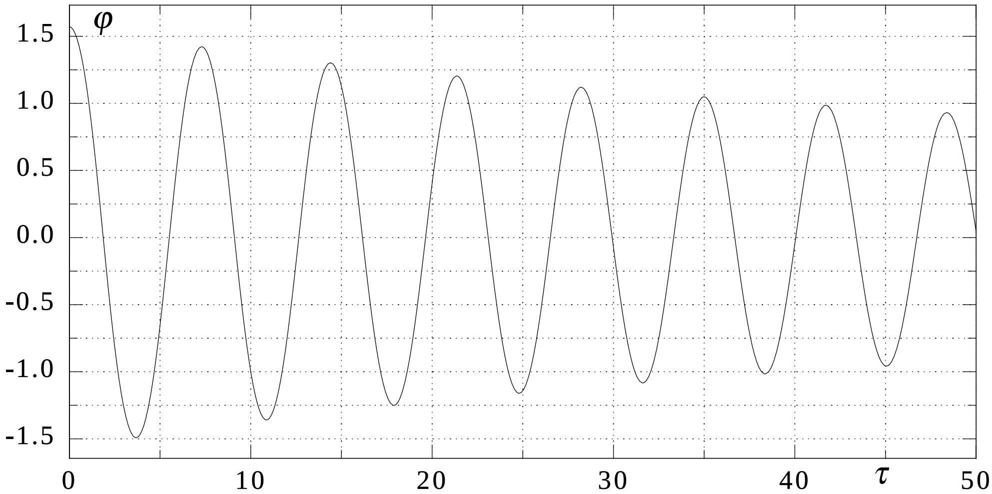
$$\text{Kugelradius } r = 0.12\,\text{m}, \qquad \text{Schattenfläche } A_S = \pi r^2 = 0.045\,\text{m}^2$$

$$\lambda = 0.021$$

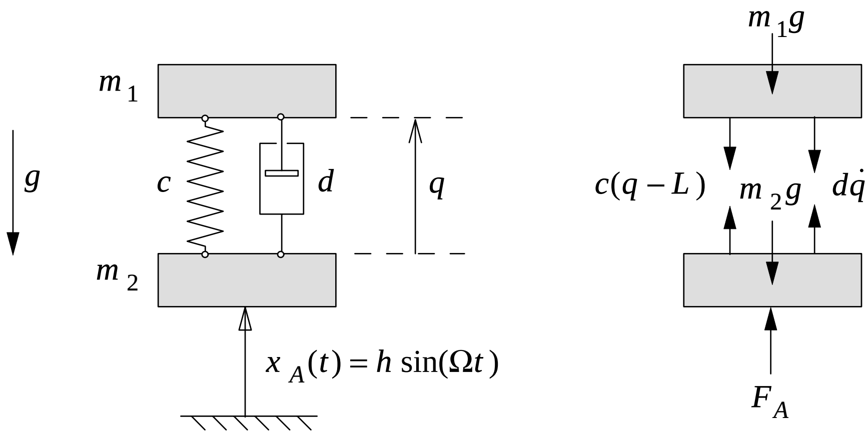
Umformung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für die numerische Lösung mit dem RUNGE-KUTTA-Verfahren:

$$q_1 := \varphi, \qquad q_2 := \varphi'$$

$$q_1{}' = q_2,$$
$$q_2{}' = -\sin q_1 - \lambda |q_2| q_2.$$



Aufgabe 7



$q = L$: Feder entspannt

Eine Plattform (Masse m_2), die über eine Feder und ein geschwindigkeitsproportionales Dämpfungssystem mit einer Masse m_1 verbunden ist, soll die Zwangsbewegung $x_A(t) = h\sin(\Omega t)$ ausführen. Man berechne die dafür erforderliche Antriebskraft $F_A(t)$ im eingeschwungenen Zustand.

$$m_1(\ddot{x}_A + \ddot{q}) = -m_1 g - c(q-L) - d\dot{q},$$
$$m_2 \ddot{x}_A = -m_2 g + c(q-L) + d\dot{q} + F_A;$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q} + 2D\omega_0\dot{q} + \omega_0{}^2 q = \omega_0{}^2\{L - \frac{m_1 g}{c} + \eta^2 h\sin(\Omega t)\},$$

$$\omega_0{}^2 := \frac{c}{m_1}, \qquad 2D\omega_0 := \frac{d}{m_1}, \qquad \eta := \frac{\Omega}{\omega_0},$$

Reaktionskraft:

$$F_A(t) = -m_2\Omega^2 h\sin(\Omega t) + m_2 g + cL - cq - d\dot{q}.$$

Partikularlösung der Bewegungsgleichung (eingeschwungener Zustand):

$$q = q_{\text{partikular}} = L - \frac{m_1 g}{c} + \eta^2 h V(\eta, D)\sin(\Omega t - \varphi(\eta, D)),$$

$$V(\eta, D) := \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}, \qquad \varphi(\eta, D) := \arctan\frac{2D\eta}{1-\eta^2}.$$

Reaktionskraft:

$$F_A(t) = (m_1 + m_2)g - m_2\Omega^2 h\sin(\Omega t) - h\,\eta^2 V\{c\sin(\Omega t - \varphi) + d\Omega\cos(\Omega t - \varphi)\},$$

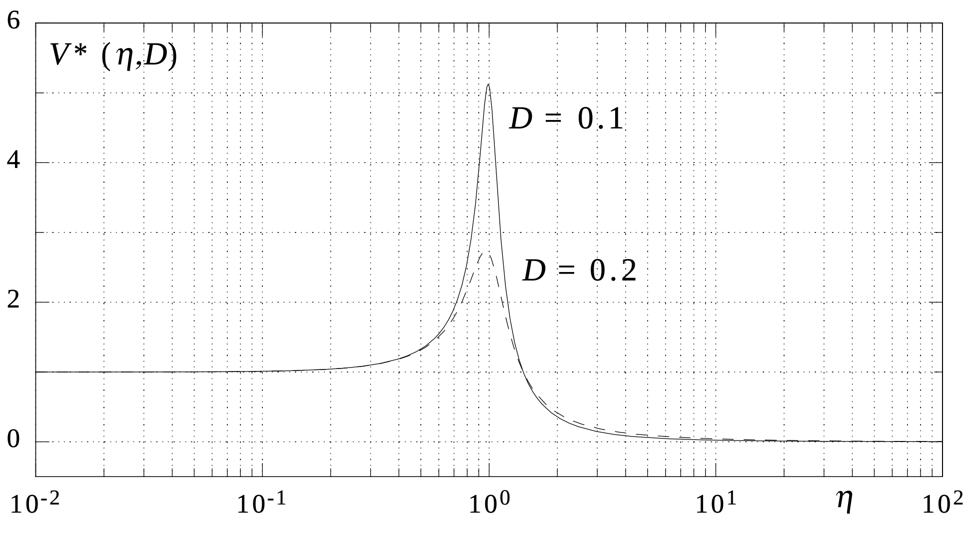
$$F_A(t) = (m_1 + m_2)g - m_2\Omega^2 h\sin(\Omega t) - ch\,\eta^2 V\sqrt{1 + (2D\eta)^2}\sin(\Omega t - \varphi + \psi(\eta, D)),$$

$$\psi(\eta, D) := \arctan(2D\eta),$$

$$F_A(t) = (m_1 + m_2)g - \Omega^2 h\{m_2\sin(\Omega t) + m_1 V^*(\eta, D)\sin(\Omega t - \alpha(\eta, D))\},$$

Amplituden-Frequenzgang in der Reaktionskraft:

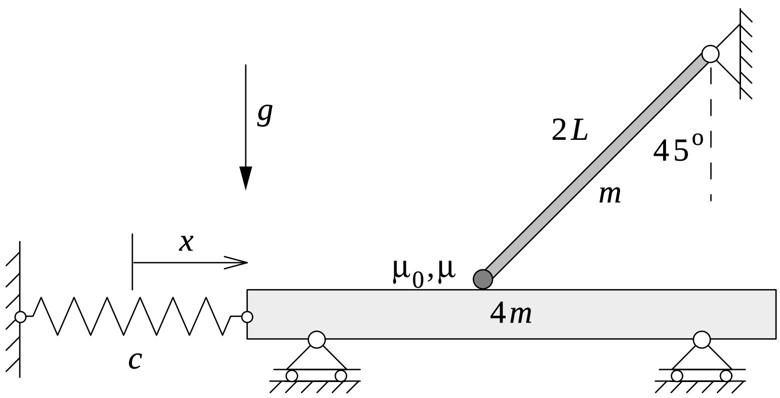
$$V^*(\eta, D) := \frac{\sqrt{1 + (2D\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}},$$



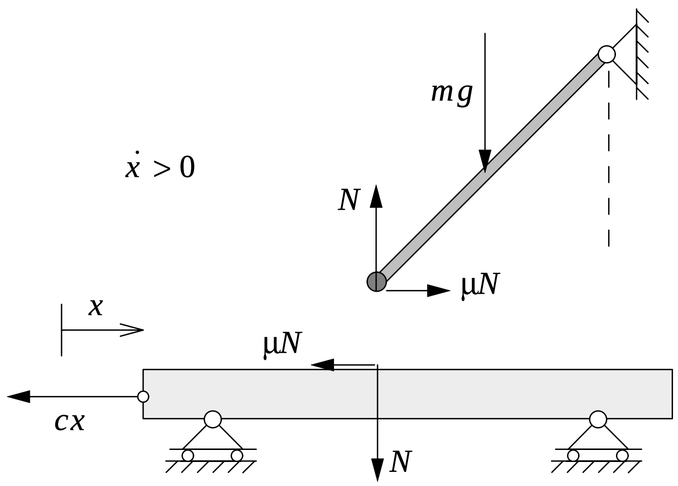
Phasen-Frequenzgang in der Reaktionskraft:

$$\alpha(\eta, D) := \varphi(\eta, D) - \psi(\eta, D) = \arctan\frac{2D\eta}{1-\eta^2} - \arctan(2D\eta).$$

Aufgabe 8



Eine homogene Stange (Masse m, Länge $2L$) liegt unter einem Winkel von 45^o auf einem Wagen (Masse $4m$), der mit einer Feder (Steifigkeit c) verbunden ist, die in der Lage $x=0$ entspannt sein soll. Im Kontaktpunkt der Stange mit dem Wagen wirkt, wenn $\dot{x} \neq 0$ ist, die Gleitreibungskraft. Man bestimme die Bewegungsgleichung des Wagens.
Für den Fall $\mu = \mu_o = 0.5$ und $\dot{x}(t=0)=0$ bestimme man den Bereich für die Anfangsauslenkung $x(t=0)$, in dem anschließend eine Bewegung mit $\dot{x}<0$ möglich wird. Zu den Anfgangsbedingungen $x(0)=mg/c$, $\dot{x}(0)=0$ berechne man das Bewegungsgesetz $x(t)$.



Gleichgewichtsbedingung für die Stange, wenn $\dot{x}>0$ ist:

$$mgL\sin(45^o) + \mu N\,2L\cos(45^o) - N\,2L\sin(45^o) = 0,$$

$$N = \frac{mg}{2(1-\mu)}.$$

Bewegungsgleichung des Wagens, wenn $\dot{x}>0$ ist:

$$4m\ddot{x} = -cx - \mu\frac{mg}{2(1-\mu)}.$$

Wenn $\dot{x} < 0$ ist, dreht sich die Richtung der Gleitreibungskraft um und wir erhalten für die Anpreßkraft den Wert

$$N_- = \frac{mg}{2(1+\mu)}.$$

Die Bewegungsgleichung lautet deshalb für $\dot{x} < 0$:

$$4m\ddot{x} = -cx + \mu \frac{mg}{2(1+\mu)}.$$

Also wird mit

$$h_+ := \frac{\mu mg}{2c(1-\mu)}, \qquad h_- := \frac{\mu mg}{2c(1+\mu)}$$

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = \begin{cases} -\omega_0{}^2 h_+ & \text{wenn } \dot{x} > 0 \\ \omega_0{}^2 h_- & \text{wenn } \dot{x} < 0 \end{cases} \qquad \omega_0{}^2 := \frac{c}{4m}.$$

$$\mu = \mu_o = 0,5 \qquad \rightarrow \qquad h_+ = \frac{mg}{2c}, \quad h_- = \frac{mg}{6c}.$$

Der Maximalwert der Haftreibungskraft für den Grenzfall, daß bei einer Auslenkung $x > 0$ der Feder gerade noch keine Bewegung mit $\dot{x} < 0$ beginnt, ist

$$H = \mu_o \frac{mg}{2(1+\mu_o)} = \frac{mg}{6}.$$

Die Federkraft im Zeitpunkt $t = 0$ muß größer sein als dieser Wert:

$$cx(t=0) > \frac{mg}{6} \qquad \rightarrow \qquad x(t=0) > \frac{mg}{6c}.$$

Für den Fall, daß für $t = 0$ die Anfangsbedingungen

$$x(0) = \frac{mg}{c}, \qquad \dot{x}(0) = 0$$

gelten, beginnt eine Bewegung mit $\dot{x} < 0$, zu der die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = \omega_0{}^2 h_-$$

gehört. In diesem 1. Bewegungsabschnitt wird also

$$x(t) = \frac{mg}{6c}\{1 + 5\cos(\omega_0 t)\}, \qquad \dot{x}(t) = -\frac{5mg}{6c}\omega_0 \sin(\omega_0 t).$$

Wenn $\omega_0 t = \pi$ ist, wird $\dot{x} = 0$ und die Feder ist um

$$x(t = \frac{\pi}{\omega_0}) = -\frac{2mg}{3c}$$

ausgelenkt. Sie übt dann eine nach rechts gerichtete Kraft auf den Wagen aus, und es muß geprüft werden, ob diese ausreicht, die Haftkraft zu überwinden. Aus der Gleichgewichtsbedingung für die Stange ergibt sich als Maximalwert für die Haftkraft

$$H^* = \mu_0 \frac{mg}{2(1-\mu_0)} = \frac{mg}{2}.$$

Zum Ende des 1. Bewegungsabschnitts kann also die Federkraft $2mg/3$ die Haftkraft überwinden, und es beginnt ein 2. Bewegungsabschnitt, zu dem die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = -\omega_o{}^2 h_+$$

mit den Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = \pi/\omega_0$:

$$x(\pi/\omega_0) = -\frac{2mg}{3c}, \qquad \dot{x}(\pi/\omega_0) = 0.$$

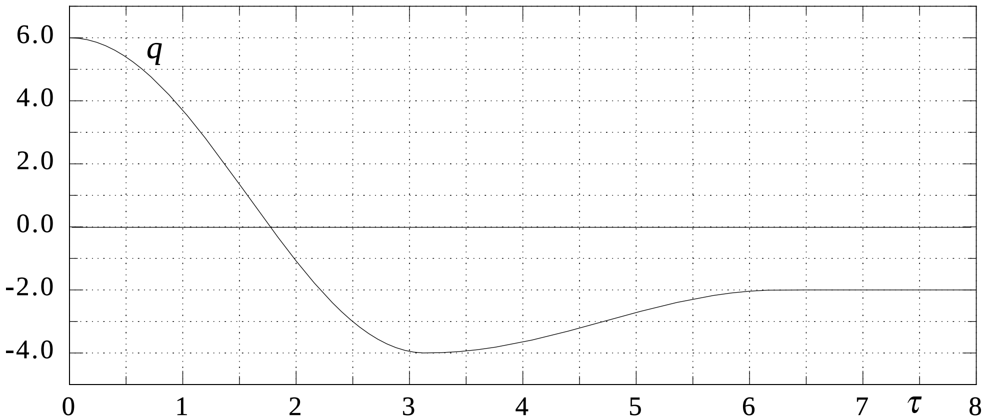
Wir erhalten also für $t > \pi/\omega_0$

$$x(t) = \frac{mg}{6c}\{-3 + \cos(\omega_0 t)\}, \qquad \dot{x}(t) = -\frac{mg}{6c}\omega_0 \sin(\omega_0 t).$$

Für $\omega_0 t = 2\pi$ wird wieder $\dot{x} = 0$ und

$$x(2\pi/\omega_0) = -\frac{mg}{3c}.$$

Die bei dieser Auslenkung nach rechts wirkende Federkraft $mg/3$ ist kleiner als die maximal mögliche Haftkraft $H^* = mg/2$, so daß für $\omega_0 t > 2\pi$ der Wagen abgebremst stehen bleibt.



$$x(t) =: \frac{mg}{6c} q(\tau), \qquad \tau := \omega_0 t.$$

Aus den beiden Bewegungsgleichungen für die Bewegungsabschnitte

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = -\omega_0{}^2 h_+ \quad (\dot{x} > 0), \qquad \ddot{x} + \omega_0{}^2 x = \omega_0{}^2 h_- \quad (\dot{x} < 0),$$

folgt:

$$\ddot{x}\dot{x} + \omega_0{}^2 (x + h_+)\dot{x} = 0 \quad (\dot{x} > 0), \quad \to \quad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0{}^2 (x + h_+)^2\right\} = 0,$$

$$\ddot{x}\dot{x} + \omega_0{}^2 (x - h_-)\dot{x} = 0 \quad (\dot{x} < 0), \quad \to \quad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0{}^2 (x - h_-)^2\right\} = 0.$$

Wir setzen

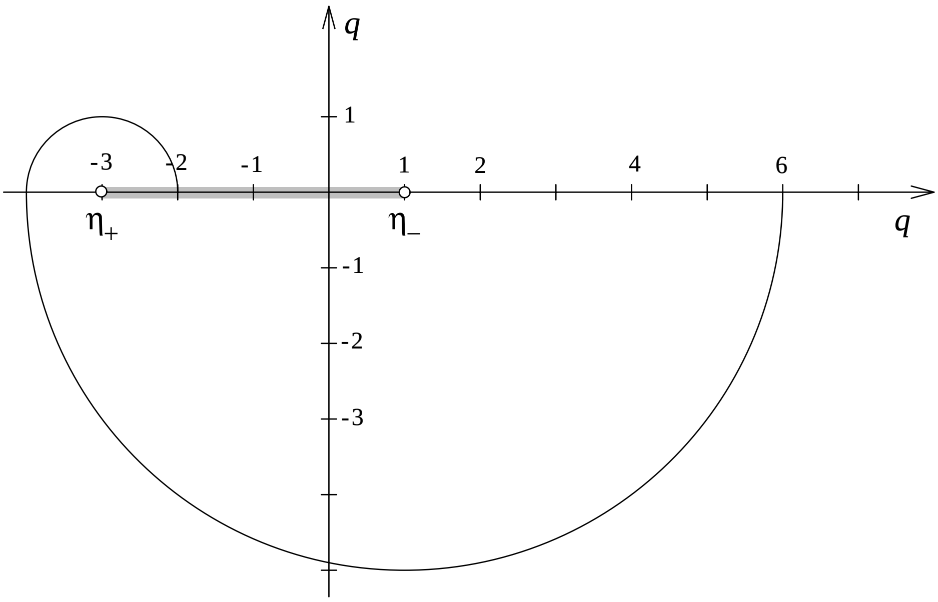
$$x =: \frac{mg}{6c} q, \qquad \dot{x} =: \omega_0 \frac{mg}{6c} q', \qquad h_+ =: \frac{mg}{6c} \eta_+, \qquad h_- =: \frac{mg}{6c} \eta_-,$$

und erhalten die Beziehungen

$$(q')^2 + (q + \eta_+)^2 = C_+{}^2, \qquad (q' > 0), \qquad (q')^2 + (q - \eta_-)^2 = C_-{}^2, \qquad (q' < 0),$$

wobei sich die Konstanten C_+ und C_- aus den Bedingungen zu Beginn eines Bewegungsabschnittes ergeben.

In der q',q-Phasenebene läßt sich die Bewegung durch Halbkreisbögen darstellen: Im Bewegungsabschnitt $q' > 0$ (obere Halbebene) bewegt sich der Zustandspunkt (q,q') auf einem Halbkreis mit dem Radius C_+ um den Punkt $-\eta_+$ auf der q-Achse und im Bewegungsabschnitt $q' < 0$ (untere Halbebene) auf einem Halbkreis mit dem Radius C_- um den Punkt η_- auf der q-Achse. Die Bewegung ist zuende, wenn ein Halbkreisbogen im Intervall $-\eta_+ < q < \eta_-$ aufsetzt.



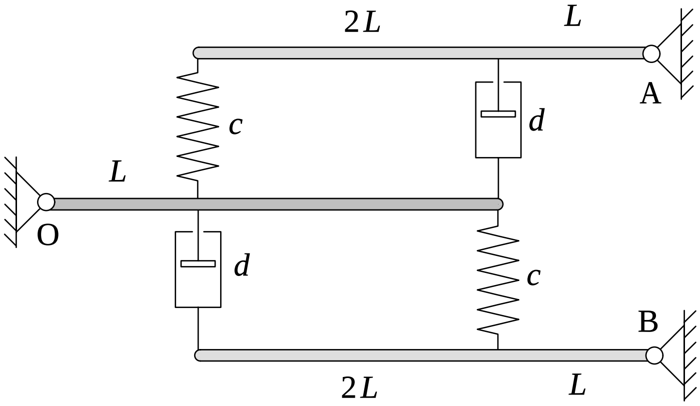
Aufgabe 9

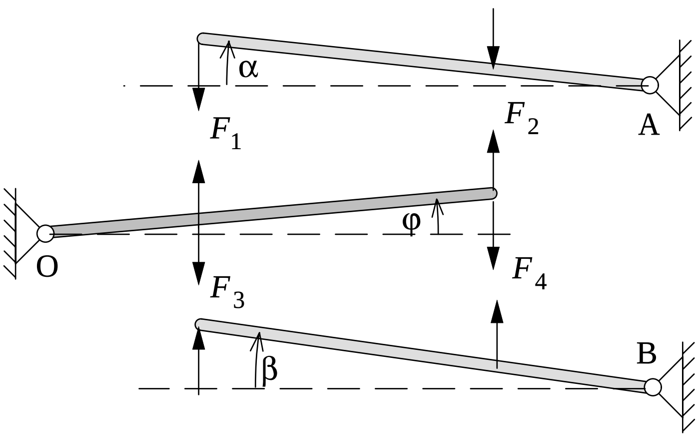
Drei homogene starre Stangen (Länge $3L$, Masse m) sind jeweils in einem Endpunkt gelenkig gelagert und über Federn und geschwindigkeitsproportionale Dämpfer miteinander verbunden. Die in A und B gelagerten Stangen werden nach den Gesetzen

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\Omega_1 t), \quad \beta(t) = \beta_0 \cos(\Omega_2 t)$$

mit kleinen Amplituden α_0 und β_0 bewegt und regen eine Schwingungsbewegung

$\varphi(t)$ der mittleren Stange an. Man berechne diese Bewegung im eingeschwungenen Zustand.





Bewegungsgleichung der in O gelagerten Stange:

$$\Theta_0\ddot{\varphi} = (F_1 - F_3)L + (F_2 - F_4)3L; \qquad \Theta_0 = \frac{1}{3}m(3L)^2 = 3mL^2.$$

$$F_1 = c(3L\alpha - L\varphi), \qquad F_2 = d(L\dot{\alpha} - 3L\dot{\varphi}),$$

$$F_3 = d(L\dot{\varphi} - 3L\dot{\beta}), \qquad F_4 = c(3L\varphi - L\beta).$$

$$(F_1 - F_3)L = cL^2(3\alpha - \varphi) - dL^2(\dot{\varphi} - 3\dot{\beta}),$$

$$(F_2 - F_4)3L = dL^2(3\dot{\alpha} - 9\dot{\varphi}) - cL^2(9\varphi - 3\beta),$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{10d}{3m}\dot{\varphi} + \frac{10c}{3m}\varphi = \frac{1}{m}\{(c\alpha + d\dot{\alpha}) + (c\beta + d\dot{\beta})\},$$

$$\omega_0{}^2 := \frac{10c}{3m}, \qquad 2D\omega_0 := \frac{10d}{3m},$$

$$\ddot{\varphi} + 2D\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0{}^2\varphi = \omega_0{}^2\,\frac{3}{10}\{(\alpha + \frac{2D}{\omega_0}\dot{\alpha}) + (\beta + \frac{2D}{\omega_0}\dot{\beta})\},$$

$$\alpha + \frac{2D}{\omega_0}\dot{\alpha} = \alpha_0\{\cos(\Omega_1 t) - 2D\eta_1 \sin(\Omega_1 t)\} = \alpha_0\sqrt{1+(2D\eta_1)^2}\cos(\Omega_1 t + \gamma_1),$$

$$\beta + \frac{2D}{\omega_0}\dot{\beta} = \beta_0\{\cos(\Omega_2 t) - 2D\eta_2 \sin(\Omega_2 t)\} = \beta_0\sqrt{1+(2D\eta_2)^2}\cos(\Omega_2 t + \gamma_2),$$

$$a_1 := \frac{3}{10}\alpha_0\sqrt{1+(2D\eta_1)^2}, \qquad a_2 := \frac{3}{10}\beta_0\sqrt{1+(2D\eta_2)^2},$$

$$\gamma_1 = \arctan(2D\eta_1), \qquad \gamma_2 = \arctan(2D\eta_2),$$

Bewegungsgleichung in Muster-Form:

$$\ddot{\varphi} + 2D\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0{}^2\varphi = \omega_0{}^2\sum_{i=1}^{2} a_i \cos(\Omega_i t + \gamma_i).$$

Lösung im eingeschwungenen Zustand:

$$\varphi(t) = \varphi_{part}(t) = \sum_{i=1}^{2} a_i V(\eta_i, D)\cos(\Omega_i t + \gamma_i - \varphi(\eta_i, D)).$$

$$V(\eta, D) := \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}, \qquad \varphi = \arctan\frac{2D\eta}{1-\eta^2}.$$

Spezialfall:

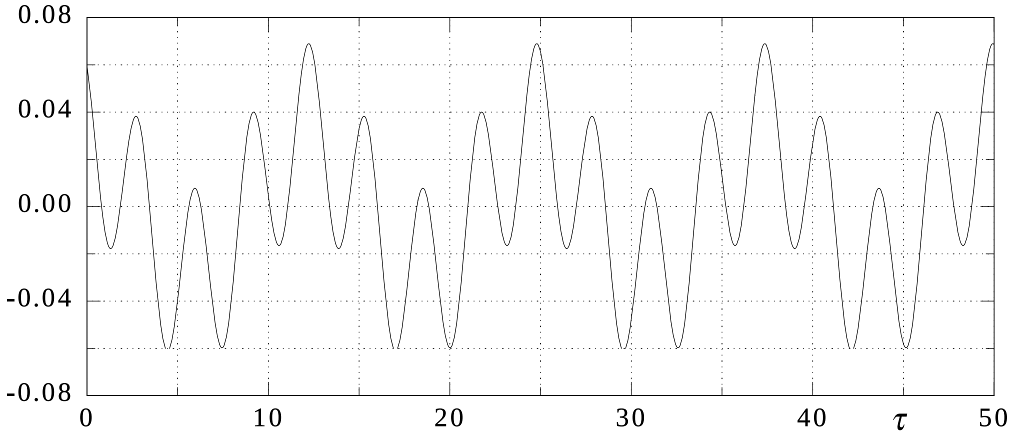
$$\alpha_0 = \beta_0 = 0{,}1 \qquad \Omega_1 = 0{,}5\,\omega_0 \qquad \Omega_2 = 2{,}0\,\omega_0 \qquad D = 0{,}2$$

$$a_1 = 0{,}0306 \qquad a_2 = 0{,}0384 \qquad \gamma_1 = 0{,}1974 \qquad \gamma_2 = 0{,}6747$$

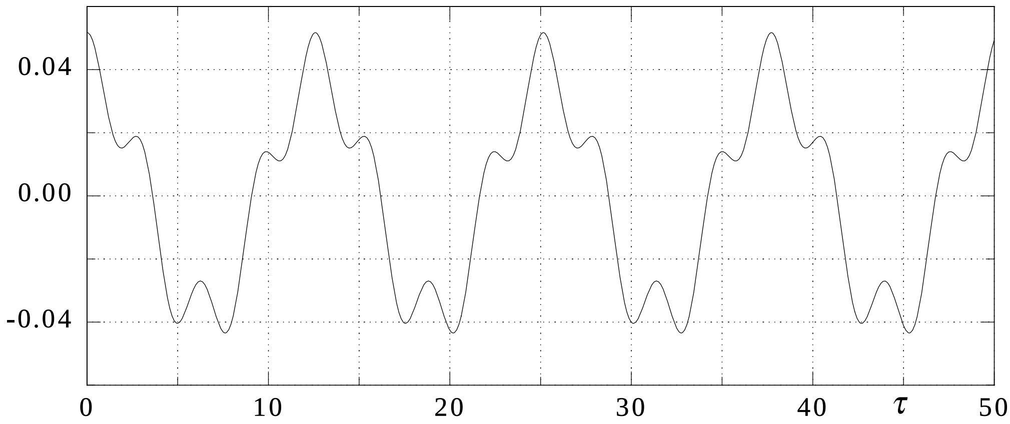
$$V(\eta_1, D) = 1{,}2883 \qquad V(\eta_2, D) = 0{,}3221 \qquad \varphi_1 = 0{,}2606 \qquad \varphi_2 = 2{,}881$$

$$\tau := \omega_0 t\,.$$

Graphische Darstellung der Anregungsfunktion $\sum_{i=1}^{2} a_i \cos(\Omega_i t + \gamma_i)$:

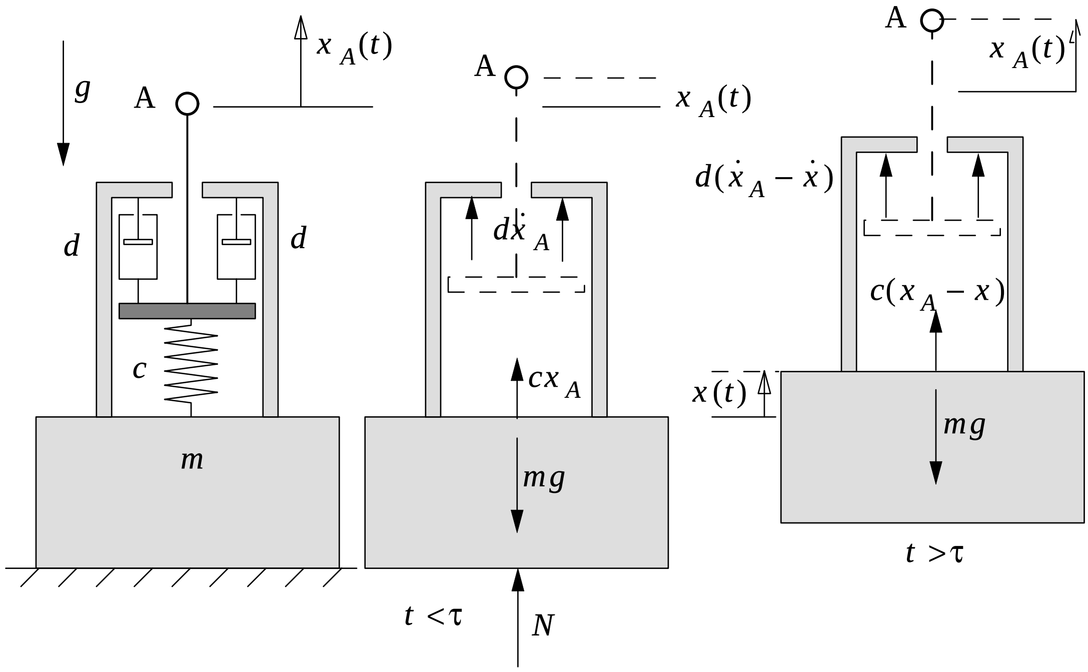


$\varphi(\tau)$ im eingeschwungenen Zustand:



Aufgabe 10

Eine Kiste (Masse m) wird mit einer Hubvorrichtung, die über eine Feder und zwei viskose Dämpfer mit der Kiste verbunden ist, angehoben. Man berechne den Zeitpunkt $t = \tau$, in dem die Kiste vom Boden abhebt und die Bewegung für $t > \tau$ im aperiodischen Grenzfall, wenn $x_A(t) = v_0 t$ ist.



Gleichgewichtsbedingung für $t < \tau$:

$$N - mg + cx_A + 2d\dot{x}_A = 0,$$

$$N(t) = mg - cv_0 t - 2dv_0, \qquad N(\tau) = 0 \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{mg - 2dv_0}{cv_0}.$$

Bewegungsgleichung für $t > \tau$:

$$m\ddot{x} = -mg + 2d(\dot{x}_A - \dot{x}) + c(x_A - x),$$

$$m\ddot{x} + 2d\dot{x} + cx = -mg + 2dv_0 + cv_0 t,$$

$$\omega_0{}^2 := \frac{c}{m}, \qquad 2D\omega_0 := \frac{2d}{m},$$

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0{}^2 x = \omega_0{}^2\{-\frac{g}{\omega_0{}^2} + \frac{2D}{\omega_0}v_0 + v_0 t\}.$$

Partikularlösung:

$$x_{part}(t) = -\frac{g}{\omega_0{}^2} + v_0 t.$$

Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung im aperiodischen Grenzfall:

$$x(t) = e^{-\omega_0 t}\{C_1 t + C_2\} + v_0 t - \frac{g}{\omega_0{}^2}.$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\omega_0 t}\{(1-\omega_0 t)C_1 - \omega_0 C_2\} + v_0.$$

Anfangsbedingungen:

$$x(\tau) = 0, \qquad \dot{x}(\tau) = 0, \qquad \to \qquad \begin{aligned} C_1\tau + C_2 &= (\frac{g}{\omega_0{}^2} - v_0\tau)e^{\omega_0\tau}, \\ (1-\omega_0\tau)C_1 - \omega_0 C_2 &= -v_0 e^{\omega_0\tau}, \end{aligned}$$

$$\frac{g}{\omega_0{}^2} - v_0\tau = \frac{g}{\omega_0{}^2} - \frac{mg - 2dv_0}{c} = \frac{2d}{c}v_0 = \frac{2D\omega_0 m}{c}v_0 = \frac{2v_0}{\omega_0},$$

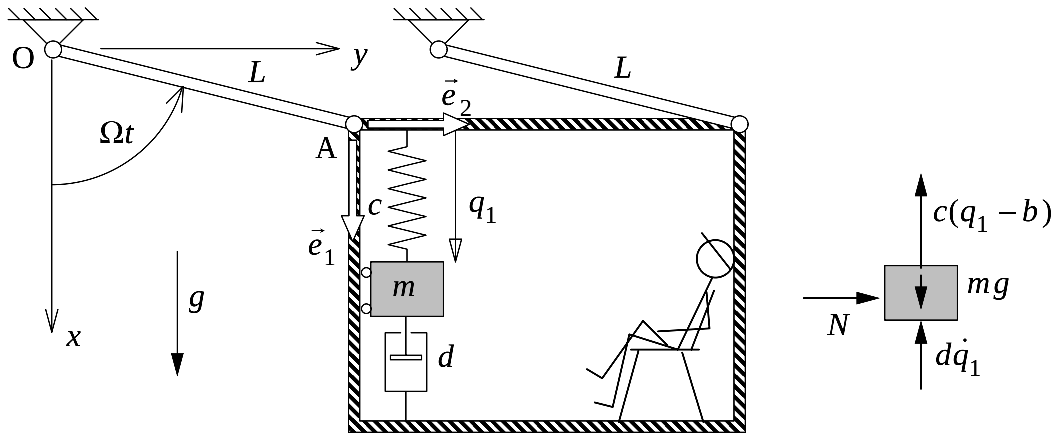
$$\begin{aligned} \omega_0\tau C_1 + \omega_0 C_2 &= 2v_0 e^{\omega_0\tau}, \\ (1-\omega_0\tau)C_1 - \omega_0 C_2 &= -v_0 e^{\omega_0\tau}, \end{aligned} \qquad C_1 = v_0 e^{\omega_0\tau}, \qquad C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}(2-\omega_0\tau)e^{\omega_0\tau}.$$

Für $t \geq \tau$ gilt

$$x(t) = -\frac{g}{\omega_0{}^2} + v_0 t + \{v_0(t-\tau) + \frac{2v_0}{\omega_0}\}e^{-\omega_0(t-\tau)}.$$

Aufgabe 11

Zwei parallele, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω rotierende Stangen (Länge L) führen einen Rahmen, in dem ein viskos gedämpftes Feder-Masse-System vertikal schwingen kann. Die Länge der entspannten Feder sei b. Man bestimme die Bewegungsgleichung der Masse m für den mitbewegten Beobachter.



Absoluter Beschleunigungsvektor des Punktes A:

$$\overrightarrow{OA} = L\cos(\Omega t)\vec{e}_x + L\sin(\Omega t)\vec{e}_y, \qquad \vec{a}_A = -L\Omega^2\{\cos(\Omega t)\vec{e}_x + \sin(\Omega t)\vec{e}_y\}.$$

$$\vec{e}_1(t) = \vec{e}_x, \qquad \vec{e}_2(t) = \vec{e}_y, \qquad \rightarrow \qquad \vec{\omega}_F \equiv \vec{0}.$$

Führungs-, Relativ- und CORIOLISbeschleunigung der Masse m:

$$\vec{a}_F = \vec{a}_A, \qquad \vec{a}_{rel} = \ddot{q}_1\vec{e}_1, \qquad \vec{a}_{Cor} \equiv \vec{0}.$$

Schwerpunktsatz im bewegten Bezugssystem:

$$m\vec{a}_{rel} = -c(q_1 - b)\vec{e}_1 - d\dot{q}_1\vec{e}_1 + mg\vec{e}_1 + N\vec{e}_2 + (-m\vec{a}_F),$$

$$m\ddot{q}_1 = -c(q_1 - b) - d\dot{q}_1 + mg + mL\Omega^2\cos(\Omega t),$$

$$0 = N + mL\Omega^2\sin(\Omega t).$$

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{q}_1 + d\dot{q}_1 + cq_1 = cb + mg + mL\Omega^2\cos(\Omega t),$$

$$\ddot{q}_1 + 2D\omega_0\dot{q}_1 + \omega_0{}^2 q_1 = \omega_0{}^2\{b + \frac{g}{\omega_0{}^2} + L\eta^2\cos(\Omega t)\},$$

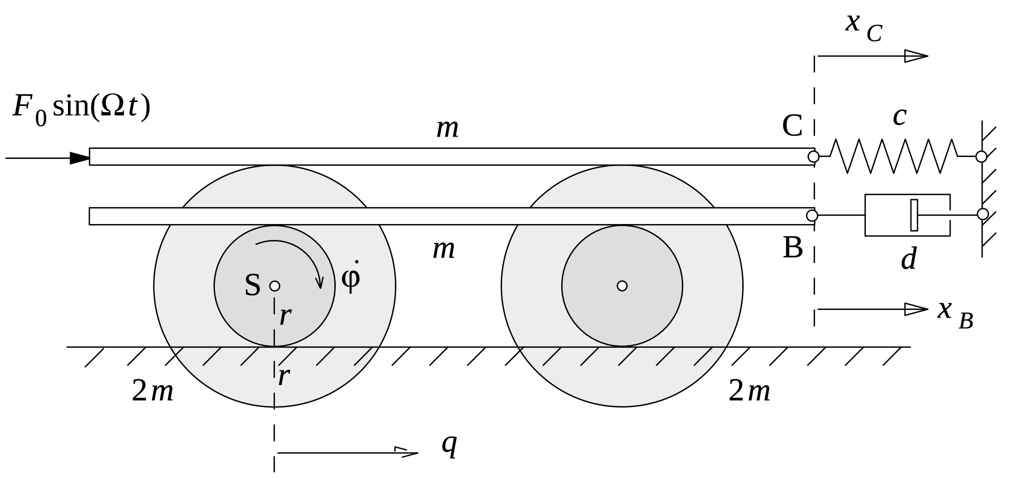
$$\omega_0{}^2 := \frac{c}{m}, \qquad 2D\omega_0 := \frac{d}{m}, \qquad \eta := \frac{\Omega}{\omega_0}.$$

Partikularlösung:

$$q_{1part}(t) = b + \frac{g}{\omega_0{}^2} + L\eta^2 V(\eta,D)\cos(\Omega t - \varphi(\eta,D)),$$

$$V(\eta,D) := \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}, \qquad \varphi(\eta,D) := \arctan\frac{2D\eta}{1-\eta^2}.$$

Aufgabe 12



Auf zwei abgesetzten Kreisscheiben (innere Teilscheibe: Radius r, Masse m; äußere Teilscheibe: Radius $2r$. Masse m) liegen zwei starre Stangen (Masse m). Die beiden Kreisscheiben rollen auf einer horizontalen Bahn und den beiden Stangen. Für $q = 0$ sei die Feder entspannt. Man stelle mit Hilfe des Leistungssatzes die Bewegungsgleichung des Systems in der Koordinate q auf.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{q}}{r}, \qquad x_C = 3q, \qquad x_B = 2q.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \{\Theta_S \dot{\varphi}^2 + 2m v_S{}^2\} + \frac{1}{2} m \dot{x}_B{}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_C{}^2,$$

$$\Theta_S = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{1}{2} m (2r)^2 = \frac{5}{2} m r^2,$$

$$E_{kin} = \frac{5}{2} m \dot{q}^2 + 2m\dot{q}^2 + \frac{1}{2} m\, 4\dot{q}^2 + \frac{1}{2} m\, 9\dot{q}^2 = 11 m \dot{q}^2.$$

Leistung der Kräfte:

$$P = F_0 \sin(\Omega t)\dot{x}_C - c x_C \dot{x}_C - d\dot{x}_B \dot{x}_B = \{3F_0 \sin(\Omega t) - 9cq - 4d\dot{q}\}\dot{q}.$$

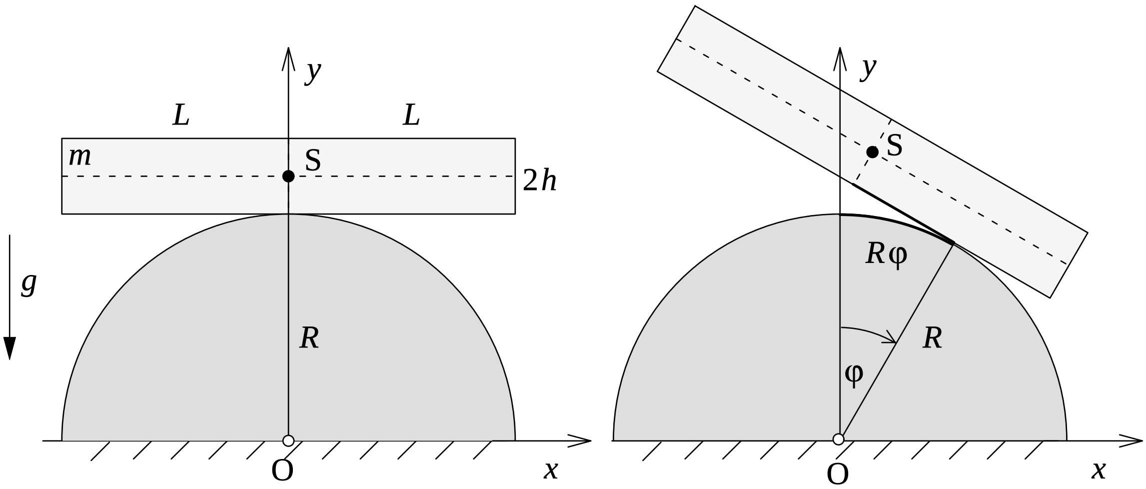
Leistungssatz:

$$\dot{E}_{kin} = P \qquad \rightarrow \qquad 22m\ddot{q}\dot{q} = \{3F_0 \sin(\Omega t) - 9cq - 4d\dot{q}\}\dot{q},$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q} + 2D\omega_0 \dot{q} + \omega_0{}^2 q = \omega_0{}^2 \frac{F_0}{3c} \sin(\Omega t), \qquad \omega_0{}^2 := \frac{9c}{22m}, \quad 2D\omega_0 := \frac{2d}{11m}.$$

Aufgabe 13



Ein starrer Quader (Masse m, Länge $2L$, Höhe $2h$) soll auf einem Kreiszylinder (Radius R) Rollschwingungen ausführen. Man bestimme die Bewegungsgleichung.

Ortsvektor und Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes S:

$$\vec{r}_S = \begin{bmatrix} R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi + h\sin\varphi \\ R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi + h\cos\varphi \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_S = \begin{bmatrix} h\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi \\ -h\sin\varphi + R\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}\dot{\varphi},$$

$$v_S^{\,2} = (h^2 + R^2\varphi^2)\dot{\varphi}^2.$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = -m\vec{g}\cdot\vec{r}_S = mgy_S = mg\{(R+h)\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi\}.$$

$\varphi = 0$ ist eine stabile Gleichgewichtslage, wenn die potentielle Energie in dieser Lage einen Minimalwert hat:

$$\left(\frac{dE_{pot}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0, \qquad \left(\frac{d^2E_{pot}}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0} > 0$$

$$\frac{dE_{pot}}{d\varphi} = mg(-h\sin\varphi + R\varphi\cos\varphi), \qquad \frac{d^2E_{pot}}{d\varphi^2} = mg\{(R-h)\cos\varphi - R\varphi\sin\varphi\},$$

$$\left(\frac{d^2E_{pot}}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0} = mg(R-h) > 0, \qquad \rightarrow \qquad R > h.$$

Eine Gleichgewichtslage für $\varphi = \varphi^* \neq 0$ erhalten wir aus der Gleichung

$$mg(-h\sin\varphi^* + R\varphi^*\cos\varphi^*) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \tan\varphi^* = \frac{R}{h}\varphi^*.$$

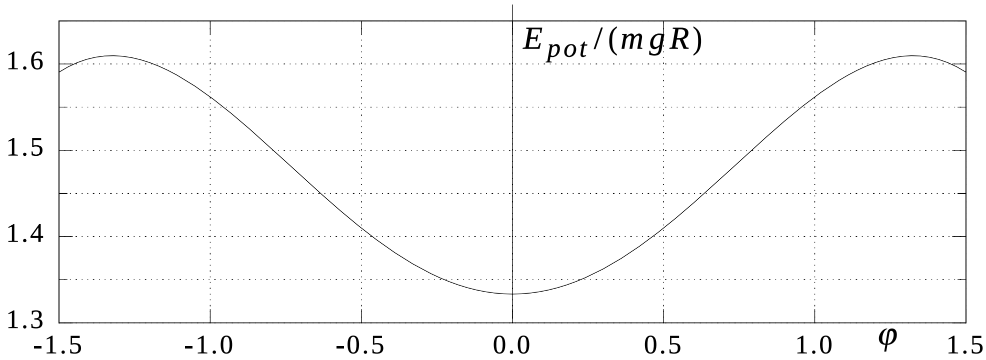
In dieser Lage wird

$$x_S = R\sin\varphi^*,$$

also liegt der Schwerpunkt über dem Kontaktpunkt des Quaders mit dem Kreiszylinder. Ist beispielsweise $h = R/3$, so wird $\varphi^* = 1.32419 = 75.9^\circ$ und

$$\left(\frac{d^2E_{pot}}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi^*} = -1.1214 mgR\,;$$

$\varphi = \varphi^*$ ist eine instabile Gleichgewichtslage.



$h = R/3$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(m{v_S}^2 + \Theta_S\dot{\varphi}^2), \qquad \Theta_S = \frac{m}{3}(L^2 + h^2),$$

$$E_{kin} = \frac{m}{6}(4h^2 + L^2 + 3R^2\varphi^2)\dot{\varphi}^2.$$

Leistungssatz:

$$\dot{E}_{kin} = -\dot{E}_{pot}, \quad \rightarrow \quad \frac{m}{3}(4h^2 + L^2 + 3R^2\varphi^2)\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mR^2\varphi\dot{\varphi}^3 = -mg(-h\sin\varphi + R\varphi\cos\varphi)\dot{\varphi}.$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{1}{3}(4h^2 + L^2 + 3R^2\varphi^2)\ddot{\varphi} + R^2\varphi\dot{\varphi}^2 + g(-h\sin\varphi + R\varphi\cos\varphi) = 0,$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g(h\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi) - 3R^2\varphi\dot{\varphi}^2}{4h^2 + L^2 + 3R^2\varphi^2}.$$

Für $h = R/3$, $L = R$ wird

$$\ddot{\varphi} = \frac{(g/R)(\sin\varphi - 3\varphi\cos\varphi) - 3\varphi\dot{\varphi}^2}{(13/9) + 3\varphi^2}.$$

Mit

$$\omega_0{}^2 := \frac{g}{R}, \qquad \omega_0 t =: \tau, \qquad \frac{d(...)}{dt} = \omega_0\frac{d(...)}{d\tau} = \omega_0(...)',$$

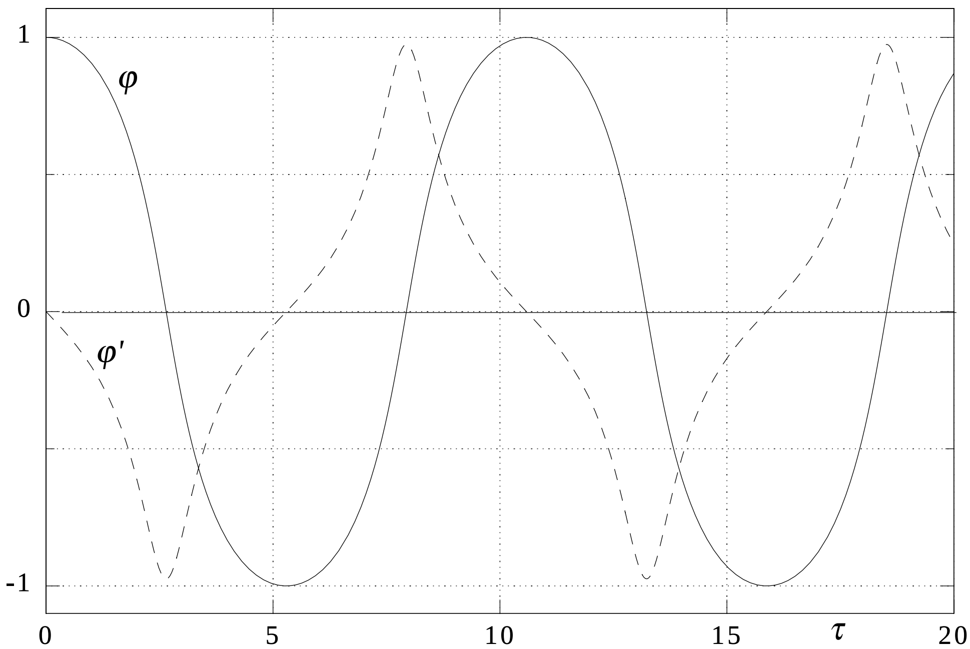
$$q_1 := \varphi, \qquad q_2 := \varphi',$$

erhalten wir das System von nichtlinearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$q_1{}' = q_2,$$

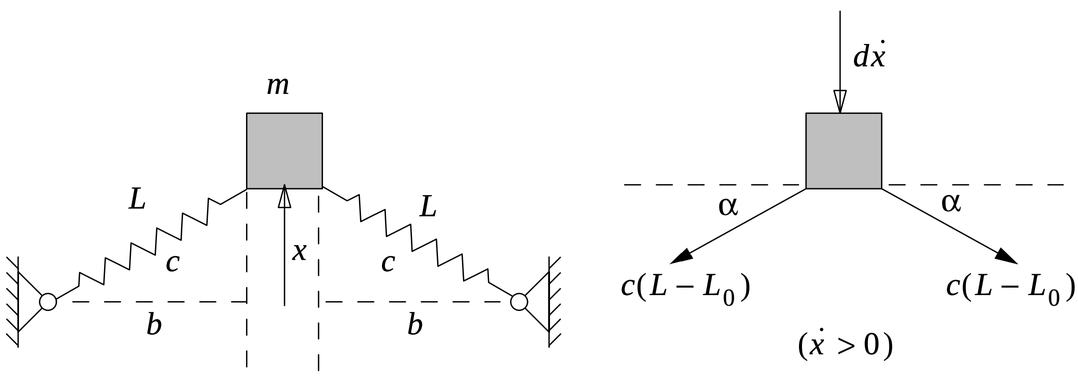
$$q_2{}' = \frac{\sin(q_1) - 3q_1\cos(q_1) - 3q_1 q_2{}^2}{(13/9) + 3q_1{}^2}.$$

Die numerische Lösung zu den Anfangsbedingungen ($q_1(0) = 1.0, \quad q_2(0) = 0$) ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Aufgabe 14

Eine Masse m ist symmetrisch mit zwei Federn (Federsteifigkeit c, entspannte Länge L_0) verbunden und wird bei Bewegung geschwindigkeitsproportional (nicht symbolisch dargestellt) gebremst (Dämpfungskonstante d).



Man bestimme die Bewegungsgleichung und numerisch deren Lösungen für die Fälle $L_0/b = 0.5$ (Feder in der Lage $x = 0$ gedehnt: stabile Gleichgewichtslage) und $L_0/b = 1.5$ (Feder in der Lage $x = 0$ gestaucht: instabile Gleichgewichtslage).

$$L = \sqrt{b^2 + x^2}, \qquad \sin\alpha = \frac{x}{L}.$$

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = -2c(L - L_0)\sin\alpha - d\dot{x} = -2c(1 - \frac{L_0}{L})x - d\dot{x},$$

$$\ddot{x} = -\omega_0{}^2(1 - \frac{L_0/b}{\sqrt{1+(x/b)^2}})x - 2D\omega_0\dot{x}, \qquad \omega_0{}^2 := \frac{2c}{m}, \qquad 2D\omega_0 := \frac{d}{m}.$$

Mit der Variablentransformation

$$\omega_0 t =: \tau, \qquad \frac{d(...)}{dt} = \omega_0 \frac{d(...)}{d\tau} =: \omega_0 (...)',$$

$$y_1 := x/b, \qquad y_2 := x'/b$$

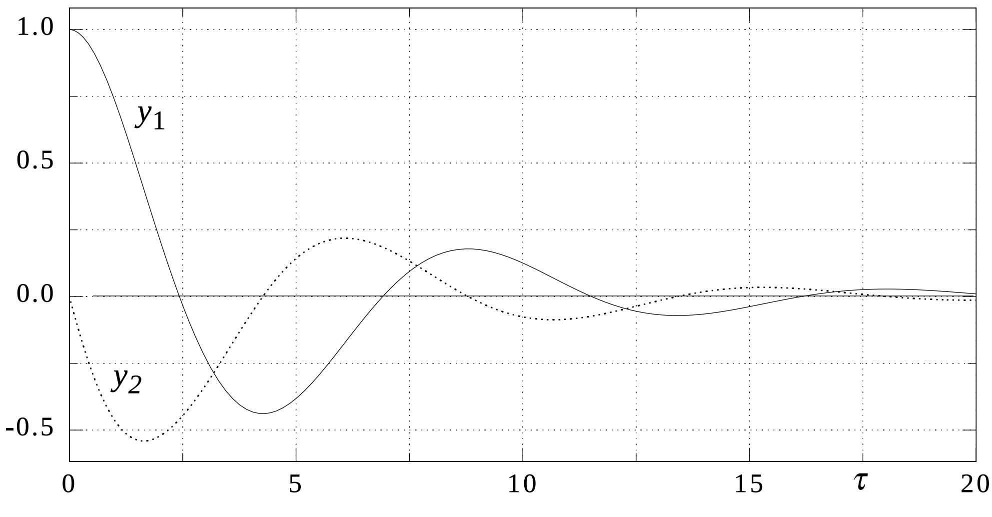
erhalten wir das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

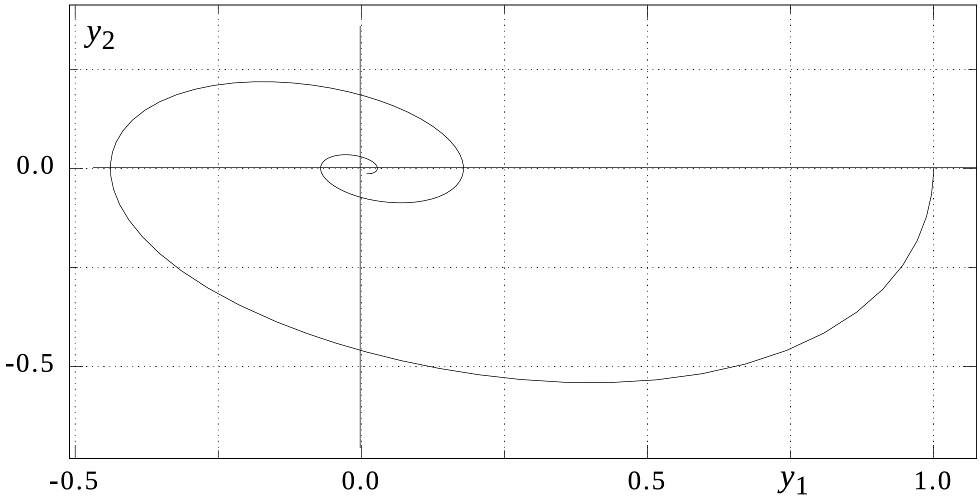
$$y_1{}' = y_2,$$

$$y_2{}' = -(1 - \frac{L_0/b}{\sqrt{1+y_1{}^2}})y_1 - 2Dy_2.$$

Darstellung der numerischen Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichungen für zwei spezielle Fälle:

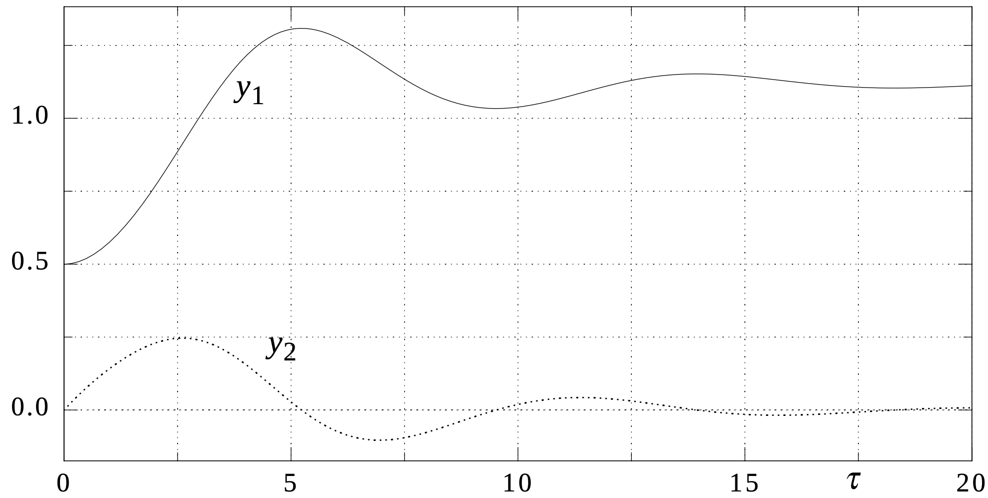
(1): $L_0/b = 0.5$ $\quad D = 0.2$ $\quad y_1(0) = 1$ $\quad y_2(0) = 0$

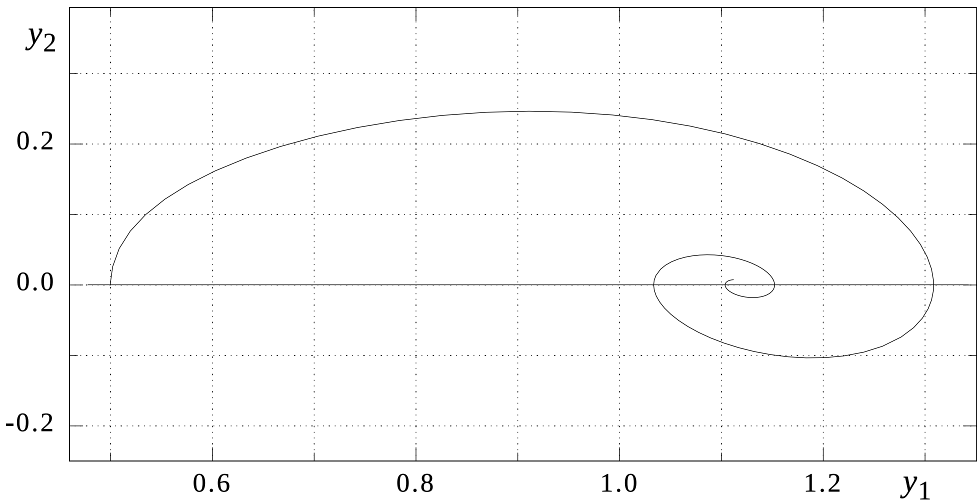




Phasendiagramm

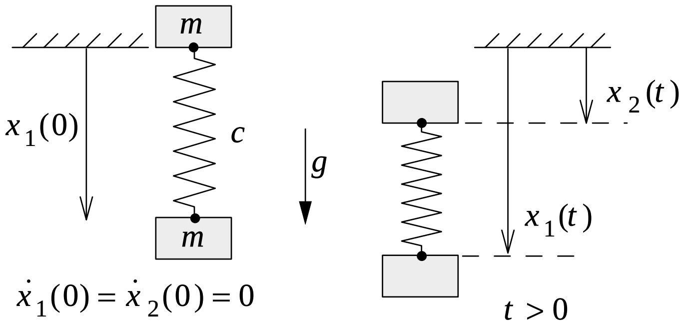
(2): $L_0/b = 1.5$ $D = 0.2$ $y_1(0) = 0.5$ $y_2(0) = 0$



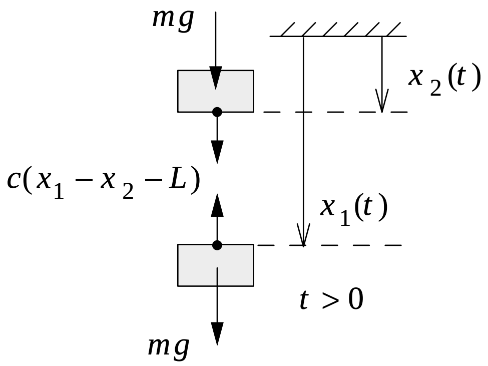


Phasendiagramm

Aufgabe 1



Zwei Körper (Masse m) sind über eine Feder (Federsteifigkeit c, Länge der entspannten Feder L) miteinander verbunden. Bis zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der obere Körper festgehalten und der untere hängt ruhig an der gespannten Feder. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der obere Körper losgelassen, so daß beide im Schwerkraftfeld nach unten fallen. Man berechne $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Es sei $c = 8mg/L$.



$$m\ddot{x}_2 = mg + c(x_1 - x_2 - L)$$

$$m\ddot{x}_1 = mg - c(x_1 - x_2 - L)$$

$$\frac{c}{m} = 8\frac{g}{L} = \omega_0^2, \qquad \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2(x_1 - x_2) &= 9g, \\ \ddot{x}_2 - \omega_0^2(x_1 - x_2) &= -7g; \end{aligned}$$

Entkoppelte Bewegungsgleichungen durch Koordinatentransformation:

$$q_1 := \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad q_2 := x_1 - x_2.$$

$q_1 =$ Koordinate des Massenmittelpunktes $\qquad \ddot{q}_1 = g,$

$q_2 =$ Körperabstand $\qquad \ddot{q}_2 + 2\omega_0^2 q_2 = 2\omega_0^2 L;$

$$q_1(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2,$$

$$q_2(t) = C_3\cos(\omega t) + C_4\sin(\omega t) + L, \qquad \omega := \sqrt{2}\omega_0;$$

Anfangsbedingungen:

$$mg - c(x_1(0) - L) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_1(0) = \frac{mg}{c} + L = \frac{9}{8}L; \qquad x_2(0) = 0;$$

$$q_1(0) = \frac{1}{2}(x_1(0) + x_2(0)) = \frac{9}{16}L, \qquad \dot{q}_1(0) = \frac{1}{2}(\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)) = 0,$$

$$q_2(0) = x_1(0) - x_2(0) = \frac{9}{8}L, \qquad \dot{q}_2(0) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = 0.$$

Angepaßte Lösung:

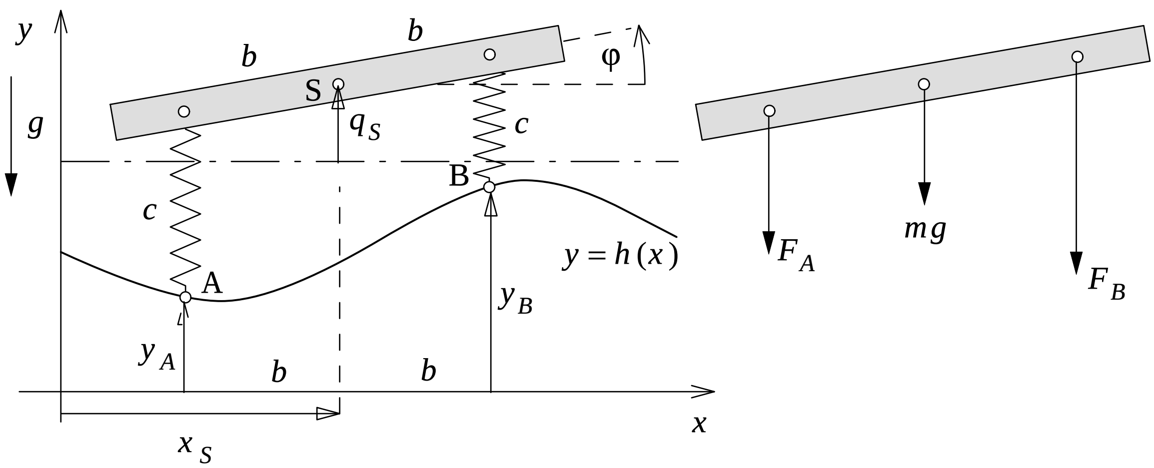
$$q_1(t) = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{9}{16}L, \qquad q_2(t) = \frac{1}{8}L\cos(\omega t) + L;$$

$$x_1(t) = q_1(t) + \frac{1}{2}q_2(t) = \frac{17}{16}L + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{16}L\cos(\omega t),$$

$$x_2(t) = q_1(t) - \frac{1}{2}q_2(t) = \frac{1}{16}L + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{16}L\cos(\omega t).$$

Aufgabe 2

Dargestellt ist das Modell eines Fahrzeugs (Masse m, Massenträgheitsmoment Θ_S), dessen Schwerpunkt S sich nach dem Gesetz $x_S(t) = v_0 t$ in x-Richtung bewegt. Die Endpunkte A und B zweier Federn (Federsteigkeit c) werden auf einer Kurve $y = h(x) = h_0 \sin(2\pi x/L)$ geführt. Die Federn sind entspannt für $q_S = 0$, $\varphi = 0$, $y_A = 0$, $y_B = 0$. Man stelle die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten q_S und φ auf, wobei angenommen werden soll, daß $|\varphi| << 1$ bleibt. Für welche Werte der Geschwindigkeit v_0 treten Resonanzen auf?



Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{q}_S = -mg - F_A - F_B,$$

$$\Theta_S \ddot{\varphi} = -F_B b + F_A b;$$

$$F_A = c[(q_S - b\varphi) - y_A], \qquad F_B = c[(q_S + b\varphi) - y_B],$$

$$m\ddot{q}_S = -mg - 2cq_S + c(y_A + y_B), \qquad \ddot{q}_S + \frac{2c}{m} q_S = -g + \frac{c}{m}(y_A + y_B),$$

$$\Theta_S \ddot{\varphi} = -2cb^2 \varphi + cb(y_B - y_A); \qquad \ddot{\varphi} + \frac{2cb^2}{\Theta_S}\varphi = +\frac{cb}{\Theta_S}(y_B - y_A);$$

$$y_A + y_B = h_0\{\sin(2\pi \frac{v_0 t - b}{\lambda}) + \sin(2\pi \frac{v_0 t + b}{\lambda})\},$$

$$y_B - y_A = h_0\{\sin(2\pi \frac{v_0 t + b}{\lambda}) - \sin(2\pi \frac{v_0 t - b}{\lambda})\};$$

$$\Omega := 2\pi \frac{v_0}{\lambda}, \qquad \beta := 2\pi \frac{b}{\lambda}$$

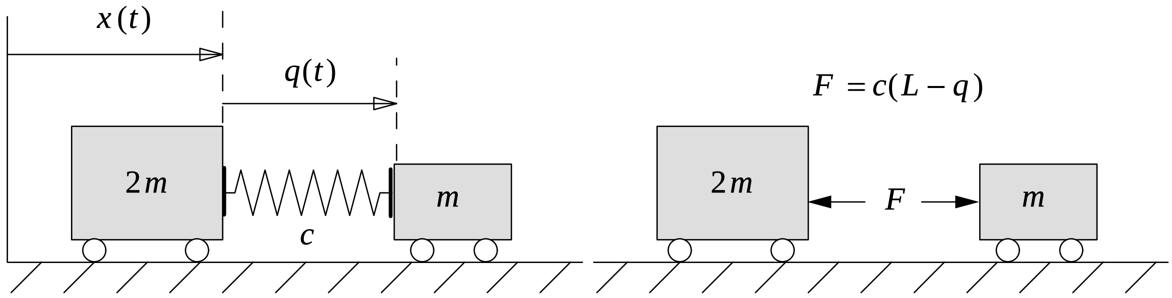
$$y_A + y_B = h_0\{\sin(\Omega t - \beta) + \sin(\Omega t + \beta)\} = 2h_0 \cos\beta \sin(\Omega t),$$

$$y_B - y_A = h_0\{\sin(\Omega t + \beta) - \sin(\Omega t - \beta)\} = 2h_0 \sin\beta \cos(\Omega t).$$

Resonanzfälle:

$$2\pi \frac{v_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{2c}{m}} \quad \rightarrow \quad v_0 = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{2c}{m}}; \qquad 2\pi \frac{v_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{2cb^2}{\Theta_S}} \quad \rightarrow \quad v_0 = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{2cb^2}{\Theta_S}}.$$

Aufgabe 3



Zwischen zwei Fahrzeugen befindet sich eine Feder, die zum Zeitpunkt $t = 0$ auf ein viertel ihrer Länge im entspannten Zustand zusammengedrückt ist. Die Feder schiebt die beiden Fahrzeuge auseinander und löst sich von ihnen, sobald $q = L$ ist. Man stelle die Bewegungsgleichungen der beiden Fahrzeuge auf und berechne $q(t)$ und $x(t)$ bis zum Ende des Federkontaktes mit den Fahrzeugen, wobei $x(0) = L$ sein soll.

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x} &= -c(L-q), \\ m(\ddot{x} + \ddot{q}) &= c(L-q); \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad 2m\ddot{q} = 3c(L-q),$$

$$\ddot{q} + \omega_0{}^2 q = \omega_0{}^2 L, \qquad \omega_0{}^2 := \frac{3c}{2m}; \qquad q(t) = L + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t),$$

$$q(0) = \frac{L}{4} \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{3}{4}L, \qquad \dot{q}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0,$$

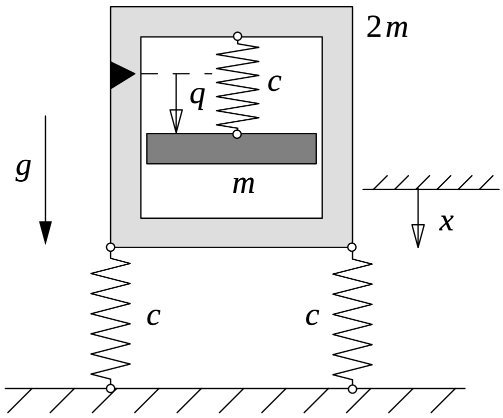
$$q(t) = L\{1 - \frac{3}{4}\cos(\omega_0 t)\}; \quad 0 \le t \le T,$$

$$q(T) = L \quad \rightarrow \quad \omega_0 T = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad T = \frac{\pi}{2\omega_0}.$$

$$2m\ddot{x} = c(q - L) = -c\frac{3}{4}L\cos(\omega_0 t), \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{L}{4}\omega_0{}^2 \cos(\omega_0 t),$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{L}{4}\omega_0 \sin(\omega_0 t), \qquad x(t) = \frac{L}{4}\{3 + \cos(\omega_0 t)\}, \quad 0 \le t \le T.$$

Aufgabe 4



In einem Rahmen (Masse $2m$), der durch zwei Federn gestützt wird, hängt an einer Feder eine Masse m. Alle drei Federn haben die gleiche Federkonstante c und sie sind für $x = q = 0$ entspannt. Man berechne nach der Methode von LAGRANGE die Bewegungsgleichungen für die vertikale Bewegung der beiden Körper im Schwerkraftfeld und die Bewegungsgesetze $x(t)$ und $q(t)$ zu den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0, \quad q(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

Kinetische und potentielle Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\{2m\dot{x}^2 + m(\dot{x} + \dot{q})^2\} = \frac{m}{2}(3\dot{x}^2 + \dot{q}^2 + 2\dot{x}\dot{q}).$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}(cx^2 + cx^2 + cq^2) - 2mgx - mg(x + q) = \frac{c}{2}(2x^2 + q^2) - 3mgx - mgq.$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{x}} = 3m\dot{x} + m\dot{q}, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = 2cx - 3mg,$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}} = m\dot{x} + m\dot{q}, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial E_{pot}}{\partial q} = cq - mg,$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 3m\ddot{x} + m\ddot{q} + 2cx &= 3mg, \\ m\ddot{x} + m\ddot{q} + cq &= mg, \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \omega_0^{\,2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} = g\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \omega_0^{\,2} := \frac{c}{m}.$$

Partikularlösung:

$$\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}_{\text{partikular}} = \frac{g}{\omega_0^{\,2}}\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{mg}{c}\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \omega_0^{\,2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Eigenschwingungsansatz:

$$\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} A\sin(\omega t + \alpha), \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = -\omega^2\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} A\sin(\omega t + \alpha),$$

$$\left(-\omega^2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \omega_0^{\,2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\omega^2 =: \lambda\omega_0^{\,2}, \qquad \begin{bmatrix} 2-3\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \det\begin{bmatrix} 2-3\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

$$(2-3\lambda)(1-\lambda) - \lambda^2 = 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0,$$

Eigenkreisfrequenzen und Eigenschwingungsformen:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = 2; \qquad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{2}\,\omega_0.$$

$$\begin{bmatrix} 2-3\lambda_\beta & -\lambda_\beta \\ -\lambda_\beta & 1-\lambda_\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (\beta = 1,2) \qquad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{2-3\lambda_\beta}{\lambda_\beta};$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}_{\text{homogen}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}(C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t)).$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}_{\text{partikular}} + \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}_{\text{homogen}}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} = \frac{mg}{c}\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}(C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t)).$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \omega_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(-C_1 \sin(\omega_1 t) + C_2 \cos(\omega_1 t)) + \omega_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}(-C_3 \sin(\omega_2 t) + C_4 \cos(\omega_2 t)).$$

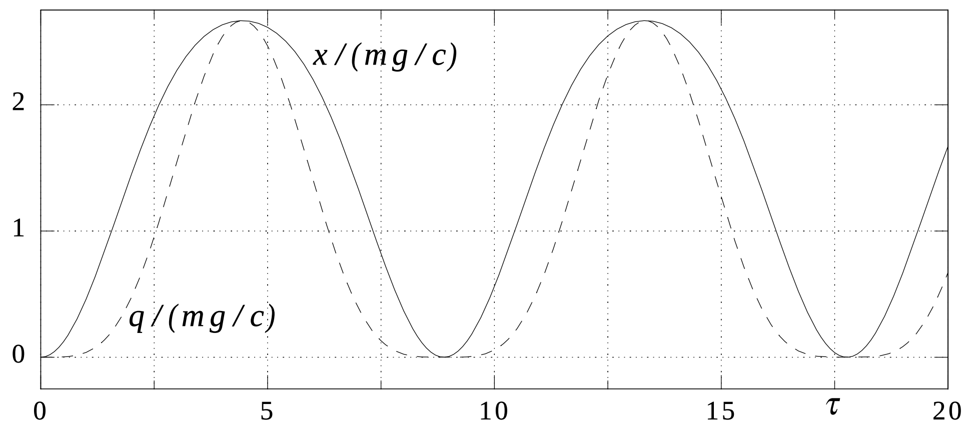
Anpassung an die Anfangsbedingungen:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{mg}{c}\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}C_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}C_3, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \omega_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}C_2 + \omega_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}C_4;$$

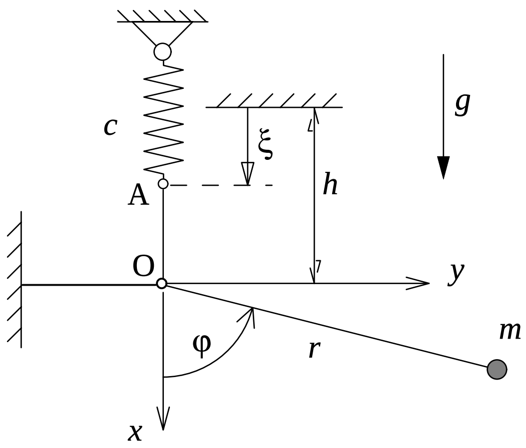
$$C_1 = -\frac{4}{3}\frac{mg}{c}, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = -\frac{1}{6}\frac{mg}{c}, \qquad C_4 = 0.$$

Spezielle Lösung:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = \frac{mg}{c}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{4}{3}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 t) - \frac{1}{6}\cos(\sqrt{2}\omega_0 t) \\ 1 - \frac{4}{3}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cos(\sqrt{2}\omega_0 t) \end{bmatrix}.$$



Aufgabe 5



Im Endpunkt A einer Feder (Federsteifigkeit c) ist über einen Faden der Länge L eine kleine Kugel (Masse m) gehängt, die in der vertikalen xy-Ebene Schwingungsbewegungen ausführen kann. Dabei wird der Faden reibungsfrei durch einen Ring im raumfesten Punkt O geführt. Die Feder ist für $\xi = 0$ entspannt. Man stelle die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen für die Koordinaten r und φ auf.

Kinematische Zwangsbedingung:

$$h - \xi + r = L \qquad \rightarrow \qquad \xi = r + h - L.$$

Kinetische und potentielle Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} c \xi^2 - mgr\cos\varphi = \frac{1}{2} c (r + h - L)^2 - mgr\cos\varphi.$$

Terme in den LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2, \qquad \frac{\partial E_{pot}}{\partial r} = c(r + h - L) - mg\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi} = mgr\sin\varphi;$$

LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + c(r + h - L) - mg\cos\varphi = 0,$$

$$mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mgr\sin\varphi = 0.$$

Dimensionslose Darstellung für die numerische Lösung:

$$\xi := \frac{r}{L}, \qquad \omega_0{}^2 := \frac{c}{m}, \qquad \gamma\omega_0{}^2 := \frac{g}{L}, \qquad \eta := \frac{h}{L}, \qquad \omega_0 t =: \tau,$$

$$\frac{d()}{dt} = \omega_0 \frac{d()}{d\tau} =: \omega_0 ()',$$

$$\xi'' - \xi\varphi'^2 + \xi + \eta - 1 - \gamma\cos\varphi = 0,$$

$$\xi^2\varphi'' + 2\xi\xi'\varphi' + \gamma\xi\sin\varphi = 0.$$

Umformung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

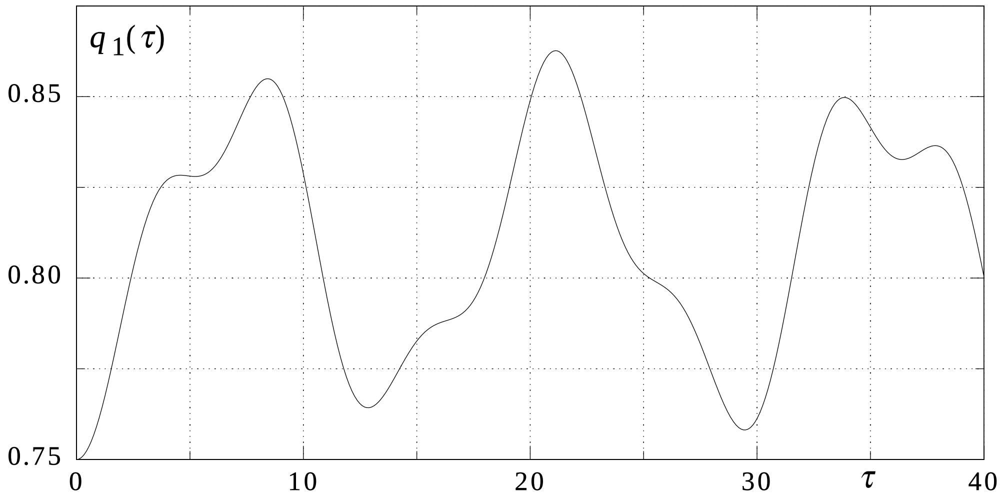
$$q_1 := \xi, \qquad q_2 := \varphi, \qquad q_3 := \xi', \qquad q_4 := \varphi';$$

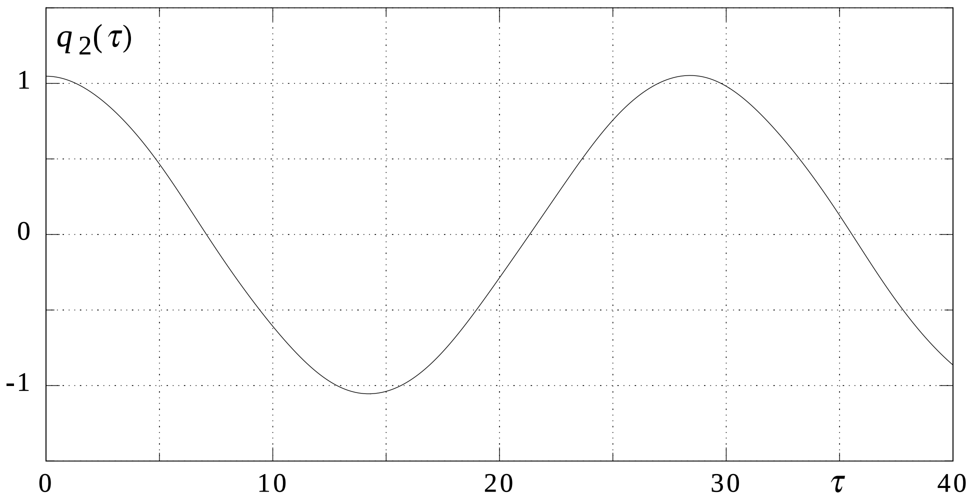
$$q_1' = q_3,$$

$$q_2' = q_4,$$

$$q_3' = q_1 q_4{}^2 - (q_1 + \eta - 1) + \gamma\cos(q_2),$$

$$q_4' = -(2q_3 q_4 + \gamma\sin(q_2)) / q_1.$$





Spezielle Werte und Anfangsbedingungen für die numerische Lösung:

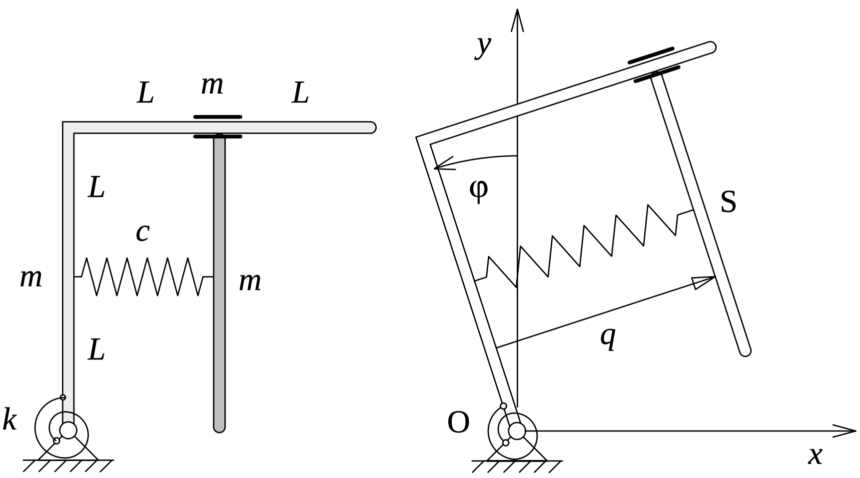
$$L = 2\,\mathrm{m}, \qquad h = 0{,}5\,\mathrm{m}, \qquad c = 100\,\mathrm{N/m}, \qquad m = 1\,\mathrm{kg},$$

$$\eta = \frac{h}{L} = 0{,}25, \qquad \gamma = \frac{mg}{cL} = 0{,}049,$$

$$q_1(0) = 1 - \eta, \qquad q_2(0) = \pi/3, \qquad q_3(0) = 0, \qquad q_4(0) = 0.$$

Aufgabe 6

Für das aus einem starren Rahmen (Masse $2m$) und einem starren Stab (Masse m) bestehende System mit zwei Freiheitsgraden bestimme man die kinetische Energie und die potentielle Energie sowie die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen. Für die numerische Lösung setze man $k = 2cL^2$.



Federn entspannt

Trägheitsmoment des Rahmens:

$$\Theta_0 = \frac{1}{12}m(2L)^2 + mL^2 + \frac{1}{12}m(2L)^2 + m\,5L^2 = \frac{20}{3}mL^2.$$

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_S = -L\sin\varphi + q\cos\varphi, \qquad y_S = L\cos\varphi + q\sin\varphi,$$

$$\dot{x}_S = (-L\dot{\varphi} + \dot{q})\cos\varphi - q\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y}_S = (-L\dot{\varphi} + \dot{q})\sin\varphi + q\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$v_S{}^2 = (-L\dot{\varphi} + \dot{q})^2 + (q\dot{\varphi})^2.$$

Kinetische und potentielle Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_S{}^2 + \frac{1}{2}\Theta_S\dot{\varphi}^2 = \frac{7}{2}mL^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_S{}^2,$$

$$E_{kin} = 4mL^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}mq^2\dot{\varphi}^2 - mL\dot{q}\dot{\varphi}.$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}k\varphi^2 + \frac{1}{2}c(q - L)^2.$$

Terme für die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\varphi}} = 8mL^2\dot{\varphi} + mq^2\dot{\varphi} - mL\dot{q}, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} - mL\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial q} = mq\dot{\varphi}^2,$$

Bewegungsgleichungen:

$$8mL^2\ddot{\varphi} + 2mq\dot{q}\dot{\varphi} + mq^2\ddot{\varphi} - mL\ddot{q} = -k\varphi,$$

$$m\ddot{q} - mL\ddot{\varphi} - mq\dot{\varphi}^2 = -c(q-L).$$

Dimensionslose Darstellung:

$$\frac{k}{mL^2} = 2\omega_0{}^2, \qquad \frac{c}{m} = \omega_0{}^2, \qquad \xi := \frac{q}{L}, \qquad \omega_0 t =: \tau, \qquad \frac{d()}{dt} = \omega_0 \frac{d()}{d\tau} =: \omega_0 ()';$$

$$(8+\xi^2)\varphi'' - \xi'' = -2\varphi - 2\xi\xi'\varphi',$$

$$-\varphi'' + \xi'' = 1 - \xi + \xi\varphi'^2.$$

$$\varphi'' = \frac{1 - 2\varphi - \xi + \xi\varphi'^2 - 2\xi\xi'\varphi'}{7+\xi^2},$$

$$\xi'' = \frac{1 - 2\varphi - \xi + \xi\varphi'^2 - 2\xi\xi'\varphi'}{7+\xi^2} + \xi\varphi'^2 - \xi + 1.$$

Umformung in ein System von vier Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y_1 := \varphi, \qquad y_2 := \xi, \qquad y_3 := \varphi', \qquad y_4 := \xi';$$

$$y_1' = y_3,$$

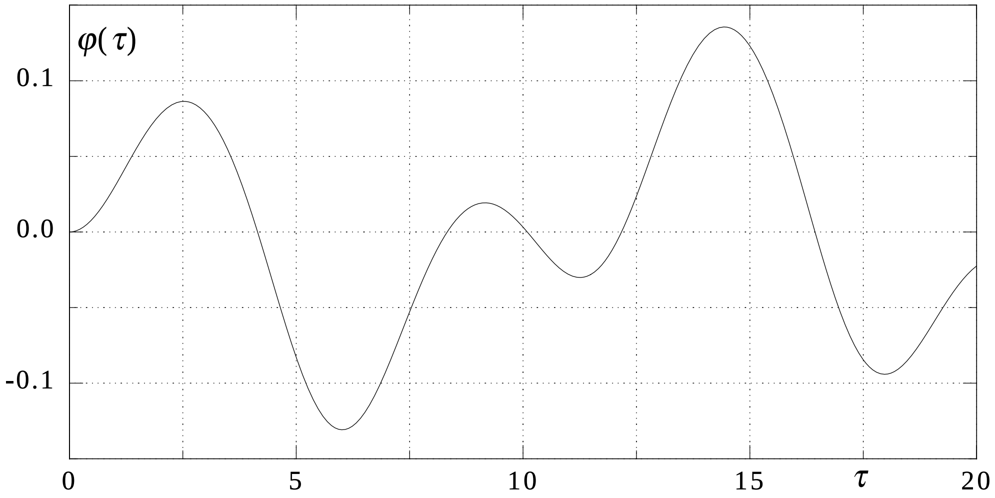
$$y_2' = y_4,$$

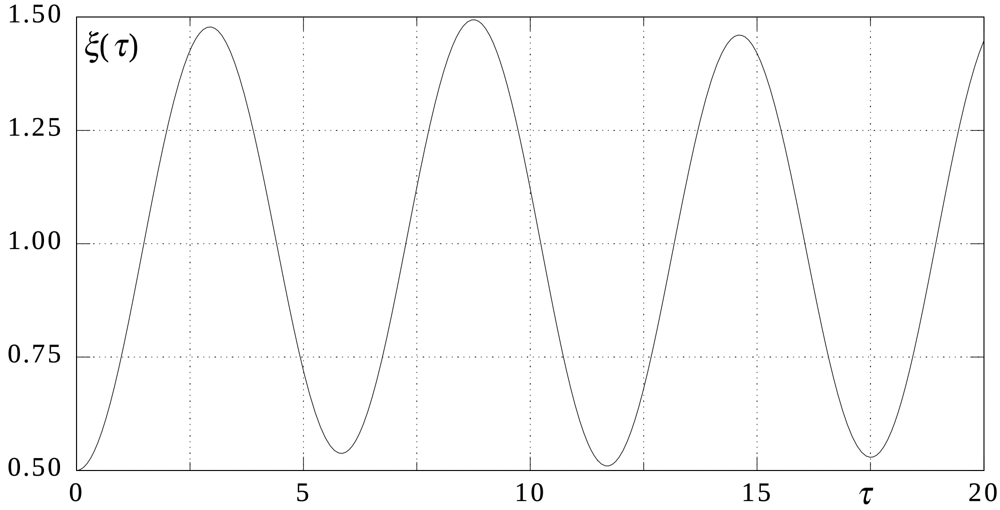
$$y_3' = \frac{1 - 2y_1 - y_2 + y_2 y_3{}^2 - 2y_2 y_4 y_3}{7 + y_2{}^2} =: f(y_i)$$

$$y_4' = f(y_i) + y_2 y_3{}^2 - y_2 + 1.$$

Anfangsbedingungen:

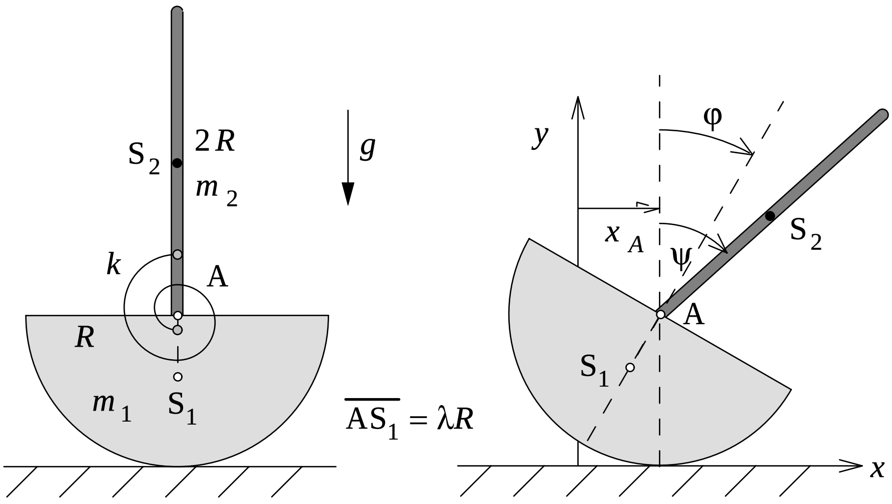
$$y_1 = 0 \qquad y_2 = 0{,}5 \qquad y_3 = 0, \qquad y_4 = 0.$$





Aufgabe 7

Ein Halbkreiszylinder (Masse m_1, Radius R) und ein Stab (Masse m_2, Länge $2R$) sind in A gelenkig über eine Drehfeder (Federkonstante k) verbunden.



Der Halbkreiszylinder kann auf einer horizontalen Bahn (x-Achse) rollen. In der Lage $(\varphi = 0, \psi = 0)$ sei das System in einer stabilen Gleichgewichtslage. Man bestimme die Bewegungsgleichungen des Systems.

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$x_A = R\varphi, \quad y_A = R,$$
$$x_{S_1} = R(\varphi - \lambda \sin\varphi), \qquad y_{S_1} = R(1 - \lambda\cos\varphi),$$
$$x_{S_2} = R(\varphi + \sin\psi), \qquad y_{S_2} = R(1 + \cos\psi).$$

Daraus folgt:

$$\dot{x}_{S_1} = (1 - \lambda\cos\varphi)R\dot{\varphi}, \qquad \dot{y}_{S_1} = \lambda\sin\varphi R\dot{\varphi}, \qquad v_{S_1}^2 = (1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi)R^2\dot{\varphi}^2;$$
$$\dot{x}_{S_2} = R(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\psi), \qquad \dot{y}_{S_2} = -R\dot{\psi}\sin\psi, \qquad v_{S_2}^2 = (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi)R^2.$$

Massengeometrische Größen:

$$\lambda := \frac{4}{3\pi}, \qquad \Theta_{S_1} = \frac{1}{2}m_1R^2 - m_1(\lambda R)^2 = (\frac{1}{2} - \lambda^2)m_1R^2, \qquad \Theta_{S_2} = \frac{1}{3}m_2R^2.$$

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\{m_1v_{S_1}^2 + \Theta_{S_1}\dot{\varphi}^2 + m_2v_{S_2}^2 + \Theta_{S_2}\dot{\psi}^2\},$$
$$m_1 = m, \qquad m_2 = \alpha m,$$
$$E_{kin} = \frac{1}{2}\{(\frac{3}{2} + \alpha - 2\lambda\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{4\alpha}{3}\dot{\psi}^2 + 2\alpha\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi\}mR^2.$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = m_1gy_{S_1} + m_2gy_{S_2} + \frac{1}{2}k(\psi - \varphi)^2,$$
$$k =: \beta mgR,$$
$$E_{pot} = \{1 + \alpha - \lambda\cos\varphi + \alpha\cos\psi + \frac{\beta}{2}(\varphi^2 + \psi^2 - 2\varphi\psi)\}mgR..$$

Für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage gilt

$$E_{pot} \approx \frac{1}{2}\{(\beta + \lambda)\varphi^2 + (\beta - \alpha)\psi^2 - 2\beta\varphi\psi\}mgR + const..$$

Mit

$$c_{11} := \frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\varphi^2} = (\beta + \lambda)mgR, \qquad c_{22} := \frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\psi^2} = (\beta - \alpha)mgR, \qquad c_{12} := \frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\varphi\partial\psi} = -\beta mgR,$$

ist für die Stabilität der Gleichgewichtslage $(\varphi = 0, \psi = 0)$ erforderlich:

$$c_{11} > 0, \qquad c_{22} > 0, \qquad c_{11}c_{22} - {c_{12}}^2 > 0.$$

Daraus ergeben sich für die Parameter α und β die Bedingungen

$$\beta > \alpha, \qquad \frac{\beta\alpha}{\beta - \alpha} < \lambda.$$

Terme der LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot\varphi} = \{(\frac{3}{2} + \alpha - 2\lambda\cos\varphi)\dot\varphi + \alpha\dot\psi\cos\psi\} mR^2, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial \varphi} = \lambda\sin\varphi\dot\varphi^2 mR^2,$$

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot\psi} = \{\frac{4\alpha}{3}\dot\psi + \alpha\dot\varphi\cos\psi\} mR^2, \qquad \frac{\partial E_{kin}}{\partial \psi} = -\alpha\sin\psi\dot\varphi\dot\psi mR^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot\varphi}\right) = \{(\frac{3}{2} + \alpha - 2\lambda\cos\varphi)\ddot\varphi + \alpha\ddot\psi\cos\psi + 2\lambda\sin\varphi\dot\varphi^2 - \alpha\sin\psi\dot\psi^2\} mR^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot\psi}\right) = \{\frac{4\alpha}{3}\ddot\psi + \alpha\ddot\varphi\cos\psi - \alpha\sin\psi\dot\varphi\dot\psi\} mR^2,$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi} = \{\lambda\sin\varphi + \beta\varphi - \beta\psi\} mgR, \qquad \frac{\partial E_{pot}}{\partial \psi} = \{-\alpha\sin\psi + \beta\psi - \beta\varphi\} mgR;$$

Bewegungsgleichungen:

$$(\frac{3}{2} + \alpha - 2\lambda\cos\varphi)\ddot\varphi + \alpha\ddot\psi\cos\psi + \lambda\sin\varphi\dot\varphi^2 - \alpha\sin\psi\dot\psi^2 = -\frac{g}{R}(\lambda\sin\varphi + \beta\varphi - \beta\psi),$$

$$\frac{4\alpha}{3}\ddot\psi + \alpha\ddot\varphi\cos\psi - \alpha\sin\psi\dot\varphi\dot\psi = -\frac{g}{R}(-\alpha\sin\psi + \beta\psi - \beta\varphi).$$

Dimensionslose Darstellung:

$$t =: \sqrt{\frac{R}{g}}\tau, \qquad \frac{d()}{dt} = \sqrt{\frac{g}{R}}\frac{d()}{d\tau} =: \sqrt{\frac{g}{R}}()'.$$

$$a_{11}\varphi'' + a_{12}\psi'' = b_1,$$
$$a_{12}\varphi'' + a_{22}\psi'' = b_2;$$

$$a_{11} := \frac{3}{2} + \alpha - 2\lambda\cos\varphi, \qquad a_{12} := \alpha\cos\psi, \qquad a_{22} := \frac{4\alpha}{3};$$

$$b_1 := -\lambda\sin\varphi\varphi'^2 + \alpha\sin\psi\psi'^2 - \lambda\sin\varphi - \beta\varphi + \beta\psi,$$
$$b_2 := \alpha\sin\psi\varphi'\psi' + \alpha\sin\psi - \beta\psi + \beta\varphi.$$

$$\varphi'' = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{D}, \qquad \psi'' = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{12}}{D}, \qquad D := a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2.$$

Umwandlung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$q_1 := \varphi, \qquad q_2 := \psi, \qquad q_3 := \varphi', \qquad q_4 := \psi';$$

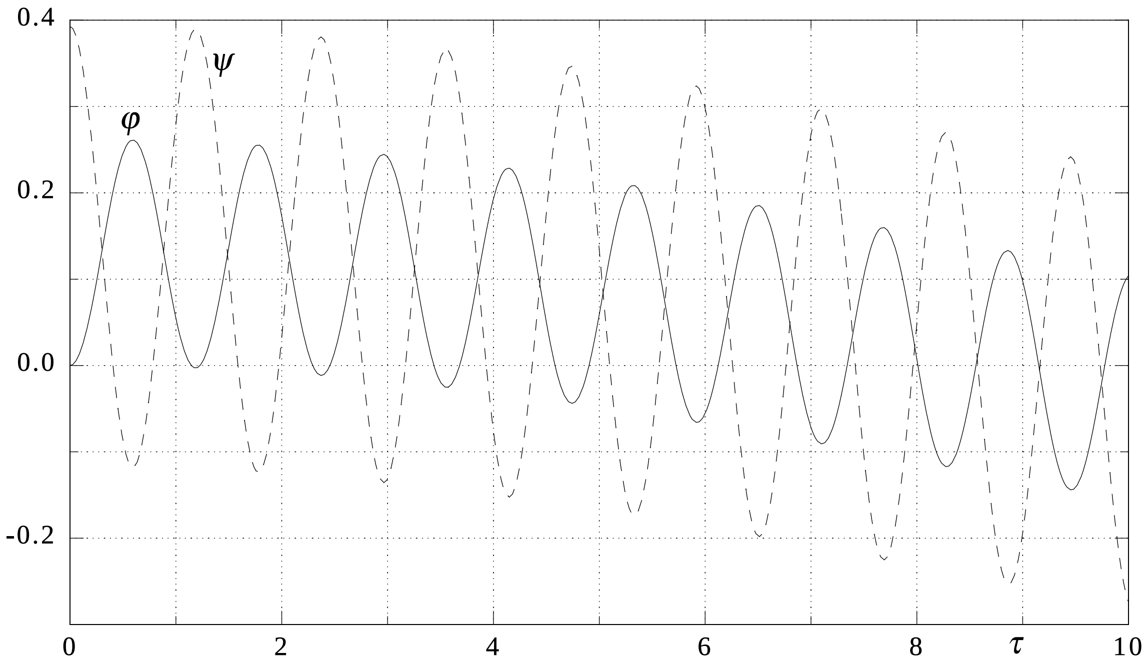
$$q_1' = q_3,$$
$$q_2' = q_4,$$
$$q_3' = (b_1 a_{22} - b_2 a_{12})/D,$$
$$q_4' = (b_2 a_{11} - b_1 a_{12})/D.$$

Zulässige Parameter (beispielsweise):

$$\alpha = 1/4, \qquad \beta = 4.$$

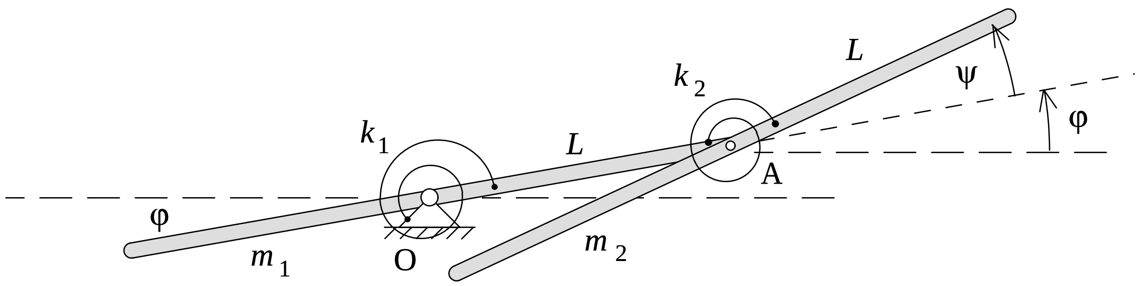
Anfangsbedingungen:

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = \pi/8, \qquad q_3 = 0, \qquad q_4 = 0.$$



Aufgabe 8

Zwei starre Stangen (Längen: $2L$, Massen: m_1, m_2) sind in ihren Schwerpunkten gelenkig gelagert und mit Drehfedern (Federkonstanten: k_1, k_2) verbunden. In der Lage $\varphi = 0, \psi = 0$ sind die Federn entspannt. Man berechne die Eigenschwingungsbewegungen des Systems.



Kinetische Energie und Massenmatrix:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\{\frac{1}{12} m_1 (2L)^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 (L\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{12} m_2 (2L)^2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2\},$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\{(\frac{1}{3} m_1 + \frac{4}{3} m_2) L^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} m_2 L^2 (\dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi})\},$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\frac{m_2 L^2}{3}(\mu\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}), \qquad \mu := 4 + \frac{m_1}{m_2}; \qquad [m] = \frac{m_2 L^2}{3}\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potentielle Energie und Steifigkeitsmatrix:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}(k_1 \varphi^2 + k_2 \psi^2) = \frac{1}{2} k_1 (\varphi^2 + \gamma\psi^2), \qquad \gamma := \frac{k_2}{k_1}; \qquad [c] = k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \omega_0^2 := \frac{3k_1}{m_2 L^2}.$$

Eigenschwingungsansatz:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} A \sin(\omega t + \alpha), \qquad \omega = \sqrt{\lambda}\,\omega_0; \qquad \to \qquad \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 - \mu\lambda & -\lambda \\ -\lambda & \gamma - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \mu\lambda)(\gamma - \lambda) - \lambda^2 = \lambda^2(\mu - 1) - \lambda(1 + \mu\gamma) + \gamma = 0,$$

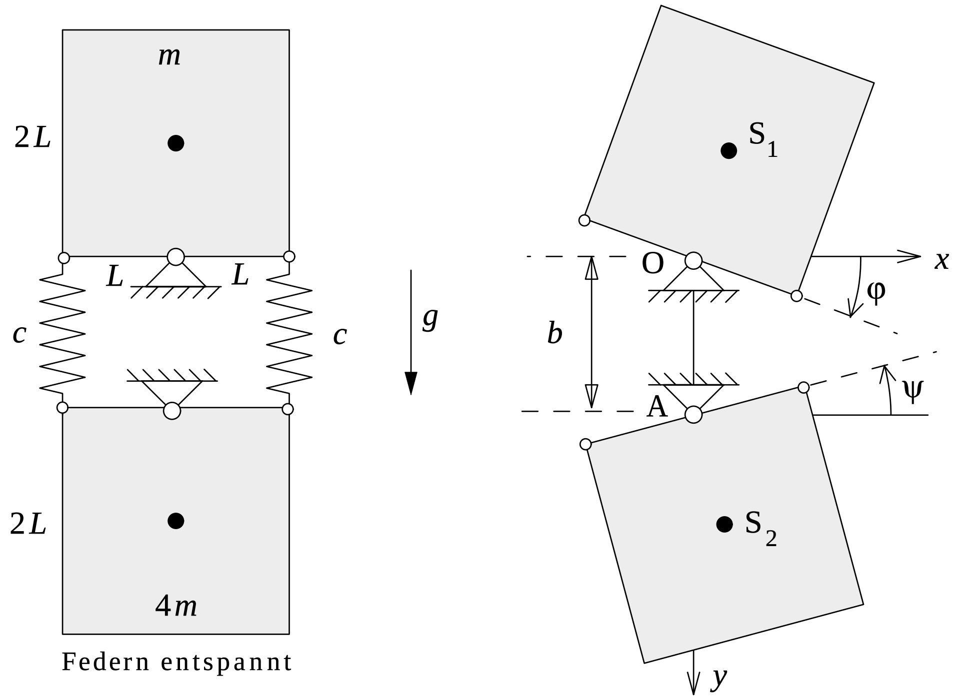
$$\lambda_{1,2} = \frac{(1 + \mu\gamma) \mp \sqrt{(1 - \mu\gamma)^2 + 4\gamma}}{2(\mu - 1)}; \qquad \omega_1 = \sqrt{\lambda_1}\,\omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}\,\omega_0.$$

Eigenschwingungsformen:

$$a_{1\alpha} = 1, \qquad a_{2\alpha} = \frac{\lambda_\alpha}{\gamma - \lambda_\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2.$$

Aufgabe 9

Zwei starre quadratische Platten (Massen $m, 4m$) sind gelenkig gelagert und über ein Federpaar (Federsteifigkeit $c = mg/L$) miteinander verbunden. Man berechne für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage $\varphi = \psi = 0$ die Eigenkreisfrequenzen, die Eigenschwingungsformen und die $[m]$-normierten Eigenvektoren.



Kinetische Energie des Systems und Massenmatrix:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\Theta_A\dot{\psi}^2,$$

$$\Theta_0 = \frac{m}{12}\{(2L)^2 + (2L)^2\} + mL^2 = \frac{5}{3}mL^2, \qquad \Theta_A = \frac{4m}{12}\{(2L)^2 + (2L)^2\} + 4mL^2 = \frac{20}{3}mL^2,$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{5}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{20}{3}\dot{\psi}^2\right), \qquad [m] = \frac{5}{3}mL^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Potentielle Energie des Systems und Steifigkeitsmatrix:

$$E_{pot} = -mgy_{S_1} - 4mgy_{S_2} + \frac{1}{2}c(L\varphi + L\psi)^2 + \frac{1}{2}c(-L\varphi - L\psi)^2,$$

$$y_{S_1} = -L\cos\varphi, \qquad y_{S_2} = b + L\cos\psi,$$

$$E_{pot} = mgL\{\cos\varphi - 4\cos\psi + (\varphi + \psi)^2\} + const.$$

$$c_{11} = \left.\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=\psi=0} = mgL, \quad c_{22} = \left.\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\psi^2}\right|_{\varphi=\psi=0} = 6mgL, \quad c_{12} = \left.\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\varphi\partial\psi}\right|_{\varphi=\psi=0} = 2mgL,$$

$$[c] = mgL\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}.$$

Bewegungsgleichungen und Eigenschwingungsansatz:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}\\\ddot{\psi}\end{bmatrix}+\frac{3g}{5L}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi\\\psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\varphi\\\psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}A\sin(\omega t+\alpha),$$

$$\omega^2 =: \lambda\frac{3g}{5L}, \qquad \begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\2 & 6-4\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=0,$$

Berechnung der Eigenkreisfrequenzen und Eigenschwingungsformen:

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\2 & 6-4\lambda\end{bmatrix}=0, \qquad \lambda^2-\frac{5}{2}\lambda+\frac{1}{2}=0, \qquad \lambda_{1,2}=\frac{5\mp\sqrt{17}}{4},$$

$$\omega_1 = 0{,}36\sqrt{g/L}, \qquad \omega_2 = 1{,}17\sqrt{g/L}.$$

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}_i=\begin{bmatrix}1\\(\lambda_i-1)/2\end{bmatrix}, \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}_1=\begin{bmatrix}1\\-0{,}39\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}_2=\begin{bmatrix}1\\0{,}64\end{bmatrix}.$$

Normierung der Eigenvektoren bezüglich der Massenmatrix:

$$\{\bar{a}\}_i^T[m]\{\bar{a}\}_j=\delta_{ij}, \qquad \{\bar{a}\}_1=\beta_1\begin{bmatrix}1\\-0.39\end{bmatrix}, \qquad \{\bar{a}\}_2=\beta_2\begin{bmatrix}1\\0.64\end{bmatrix},$$

$$\beta_1^2\begin{bmatrix}1 & -0{,}39\end{bmatrix}\frac{5}{3}mL^2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-0.39\end{bmatrix}=1, \qquad \rightarrow \qquad \beta_1^2\,2{,}683mL^2=1,$$

$$\beta_2^2\begin{bmatrix}1 & 0{,}64\end{bmatrix}\frac{5}{3}mL^2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0.64\end{bmatrix}=1, \qquad \rightarrow \qquad \beta_2^2\,4{,}401mL^2=1,$$

$$\{\bar{a}\}_1=\frac{1}{L\sqrt{m}}\begin{bmatrix}0{,}611\\-0{,}238\end{bmatrix}, \qquad \{\bar{a}\}_2=\frac{1}{L\sqrt{m}}\begin{bmatrix}0{,}477\\0{,}305\end{bmatrix}.$$

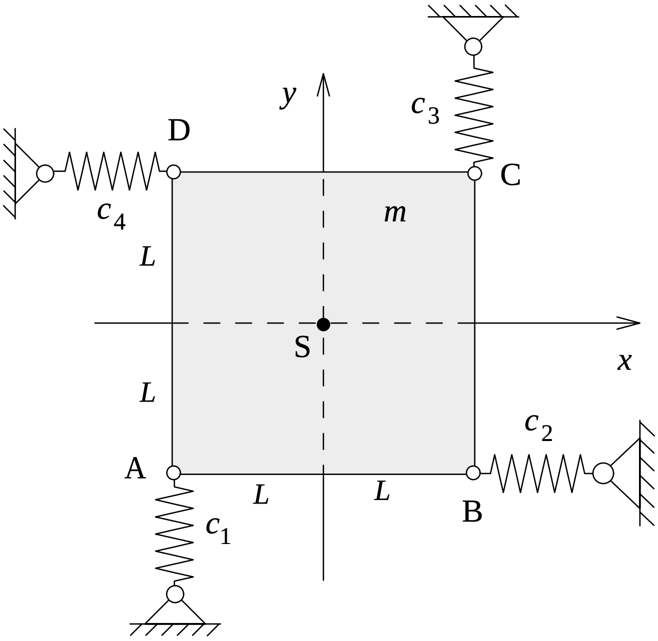
Aufgabe 10

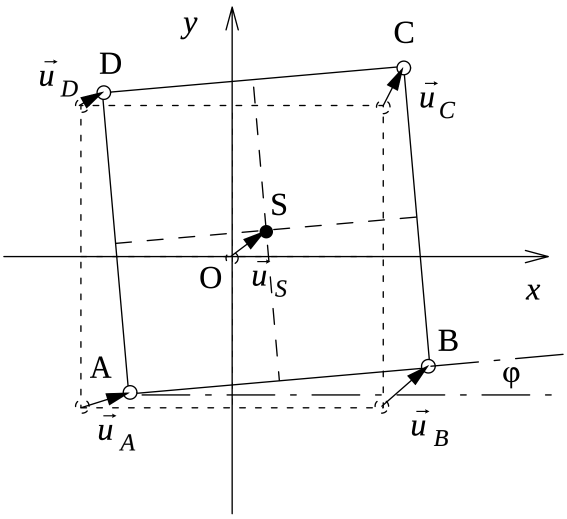
Eine starre quadratische Scheibe (Kantenlänge $2L$, Masse m) ist in den vier Eckpunkten A, B, C und D mit Federn verbunden. Unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen des Schwerpunktes S

$$u_{Sx}=L\xi, \qquad u_{Sy}=L\eta, \qquad |\xi|, |\eta| << 1$$

und kleiner Drehung $|\varphi| << 1$ berechne man die Eigenkreisfrequenzen und Eigenschwingungsformen der Scheibe. In der Lage $\xi=0,\ \eta=0,\ \varphi=0$ sind alle Federn entspannt. Man setze

$$c_2 = 2c_1, \quad c_3 = 3c_1, \quad c_4 = 4c_1.$$





Kinetische Energie und Massenmatrix:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\{m(\dot{u}_{Sx}{}^2 + \dot{u}_{Sy}{}^2) + \Theta_S \dot{\varphi}^2\}, \qquad \Theta_S = \frac{1}{12} m(4L^2 + 4L^2) = \frac{2}{3} mL^2,$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} mL^2 (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \frac{2}{3}\dot{\varphi}^2), \qquad [m] = mL^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

ΔL_P: Auslenkung der Feder im Punkt P, P: A,B,C,D

$$\Delta L_P := \vec{e}_P \cdot \vec{u}_P.$$

$\vec{e}_P$: Richtungsvektor der Feder im Punkt P

Berechnung der Verschiebungsvektoren der Eckpunkte:

$$\vec{r}_P(0) + \vec{u}_P(t) = \vec{r}_P(t) = \vec{u}_S(t) + \overrightarrow{SP}(t), \qquad \to \qquad \vec{u}_P(t) = \vec{u}_S(t) + \overrightarrow{SP}(t) - \vec{r}_P(0),$$

$$\sin\varphi \approx \varphi, \qquad \cos\varphi \approx 1;$$

$$\vec{u}_A = \begin{bmatrix} L\xi \\ L\eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L\sin\varphi - L\cos\varphi \\ -L\cos\varphi - L\sin\varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -L \\ -L \end{bmatrix} \approx L \begin{bmatrix} \xi + \varphi \\ \eta - \varphi \end{bmatrix},$$

$$\vec{u}_B = \begin{bmatrix} L\xi \\ L\eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L\cos\varphi + L\sin\varphi \\ L\sin\varphi - L\cos\varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L \\ -L \end{bmatrix} \approx L \begin{bmatrix} \xi + \varphi \\ \eta + \varphi \end{bmatrix},$$

$$\vec{u}_C = \begin{bmatrix} L\xi \\ L\eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L\cos\varphi - L\sin\varphi \\ L\sin\varphi + L\cos\varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L \\ L \end{bmatrix} \approx L\begin{bmatrix} \xi - \varphi \\ \eta + \varphi \end{bmatrix},$$

$$\vec{u}_D = \begin{bmatrix} L\xi \\ L\eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L\sin\varphi - L\cos\varphi \\ L\cos\varphi - L\sin\varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -L \\ L \end{bmatrix} \approx L\begin{bmatrix} \xi - \varphi \\ \eta - \varphi \end{bmatrix};$$

Berechnung der Federverlängerungen:

$$\Delta L_A = +\vec{e}_y \cdot \vec{u}_A \approx L(\eta - \varphi),$$
$$\Delta L_B = -\vec{e}_x \cdot \vec{u}_B \approx -L(\xi + \varphi),$$
$$\Delta L_C = -\vec{e}_y \cdot \vec{u}_C \approx -L(\eta + \varphi),$$
$$\Delta L_D = +\vec{e}_x \cdot \vec{u}_D \approx L(\xi - \varphi).$$

Potentielle Energie und Federmatrix:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\{c_1(\Delta L_A)^2 + c_2(\Delta L_B)^2 + c_3(\Delta L_C)^2 + c_4(\Delta L_D)^2\},$$

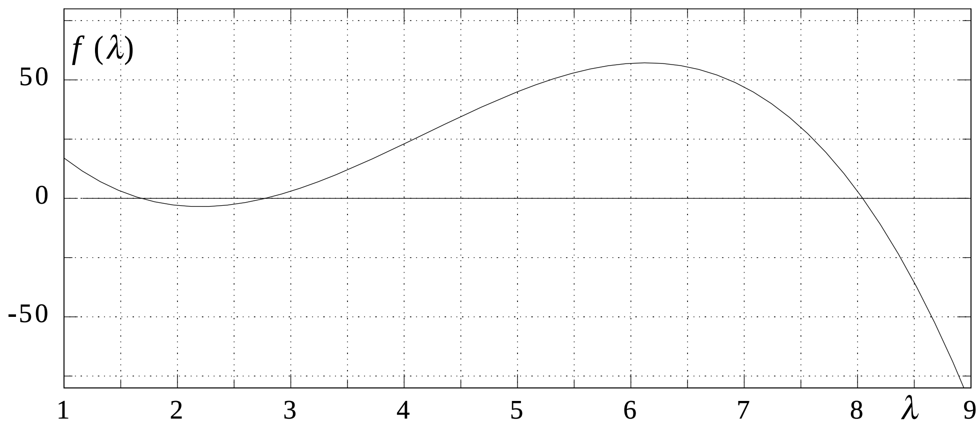
$$E_{pot} = \frac{1}{2}c_1 L^2\{(\eta - \varphi)^2 + 2(\xi + \varphi)^2 + 3(\eta + \varphi)^2 + 4(\xi - \varphi)^2\},$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}c_1 L^2(6\xi^2 + 4\eta^2 + 10\varphi^2 + 4\eta\varphi - 4\xi\varphi), \qquad [c] = 2c_1 L^2\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnung der Eigenkreisfrequenzen:

$$\det([c] - \omega^2[m]) = 0, \qquad \omega^2 =: \lambda\frac{2c_1}{m}, \qquad \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\frac{2}{3}\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

$$f(\lambda) = -2\lambda^3 + 25\lambda^2 - 81\lambda + 75 = 0,$$



$$\lambda_1 = 1.67977, \qquad \lambda_2 = 2.77481, \qquad \lambda_3 = 8.04542,$$

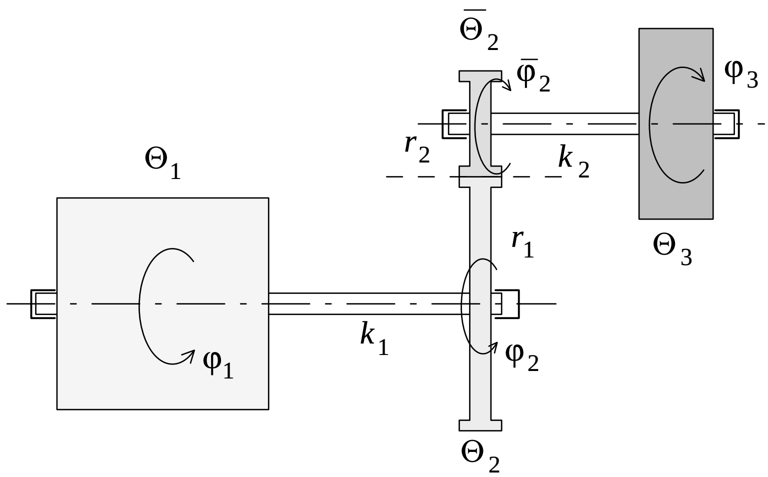
$$\omega_i = \sqrt{2\lambda_i}\sqrt{\frac{c_1}{m}}: \qquad \omega_1 = 1.8329\sqrt{\frac{c_1}{m}}, \qquad \omega_2 = 2.3558\sqrt{\frac{c_1}{m}}, \qquad \omega_3 = 4.0113\sqrt{\frac{c_1}{m}}.$$

Berechnung der Eigenschwingungsformen:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_i & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda_i & 1 \\ -1 & 1 & 5-\frac{2}{3}\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4.1227 \\ 1.3202 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2906 \\ 0.2252 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8346 \\ -5.0454 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 11



Der Rotor eines Motors (Trägheitsmoment Θ_1) ist über zwei Wellen (Torsionsfederkonstanten k_1, k_2) und zwei Zahnräder (Trägheitsmomente $\Theta_2, \bar{\Theta}_2$) mit einem Rotationskörper (Trägheitsmoment Θ_3) verbunden. Man berechne die Eigenkreisfrequenzen und Eigenschwingungsformen dieser Torsionsschwingerkette mit drei Freiheitsgraden.

Kinematische Zwangsbedingung für die Zahnraddrehungen:

$$r_1\varphi_2 = r_2\bar{\varphi}_2 \qquad \rightarrow \qquad \bar{\varphi}_2 = \frac{r_1}{r_2}\varphi_2 =: \alpha\varphi_2.$$

Kinetische Energie des Systems:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\{\Theta_1\dot{\varphi}_1{}^2 + \Theta_2\dot{\varphi}_2{}^2 + \overline{\Theta}_2\dot{\overline{\varphi}}_2{}^2 + \Theta_3\dot{\varphi}_3{}^2\},$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\{\Theta_1\dot{\varphi}_1{}^2 + (\Theta_2 + \alpha^2\overline{\Theta}_2)\dot{\varphi}_2{}^2 + \Theta_3\dot{\varphi}_3{}^2\},$$

$$\Theta_1 =: \vartheta_1 mR^2, \qquad \Theta_2 + \alpha^2\overline{\Theta}_2 =: \vartheta_2 mR^2, \qquad \Theta_3 =: \vartheta_3 mR^2,$$

$$E_{kin} = \frac{mR^2}{2}\{\vartheta_1\dot{\varphi}_1{}^2 + \vartheta_2\dot{\varphi}_2{}^2 + \vartheta_3\dot{\varphi}_3{}^2\}.$$

Potentielle Energie des Systems:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\{k_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + k_2(\varphi_3 - \overline{\varphi}_2)^2\},$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\{k_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + k_2(\varphi_3 - \alpha\varphi_2)^2\},$$

$$k_1 =: \gamma_1 k, \qquad k_2 := \gamma_2 k,$$

$$E_{pot} = \frac{k}{2}\{\gamma_1(\varphi_1{}^2 + \varphi_2{}^2 - 2\varphi_1\varphi_2) + \gamma_2(\alpha^2\varphi_2{}^2 + \varphi_3{}^2 - 2\alpha\varphi_2\varphi_3)\}.$$

Massenmatrix und Federmatrix zum Koordinatenvektor $\{q\}^T = [\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3]$:

$$[m] = mR^2\begin{bmatrix} \vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{bmatrix}, \qquad [c] = k\begin{bmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1 & 0 \\ -\gamma_1 & \gamma_1 + \alpha^2\gamma_2 & -\alpha\gamma_2 \\ 0 & -\alpha\gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Frequenzgleichung und Eigenkreisfrequenzen:

$$\det([c] - \omega^2[m]) = 0, \qquad \omega^2 =: \lambda\frac{k}{mR^2},$$

$$\det\begin{bmatrix} \gamma_1 - \lambda\vartheta_1 & -\gamma_1 & 0 \\ -\gamma_1 & \gamma_1 + \alpha^2\gamma_2 - \lambda\vartheta_2 & -\alpha\gamma_2 \\ 0 & -\alpha\gamma_2 & \gamma_2 - \lambda\vartheta_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - a\,\lambda^2 + b\,\lambda = 0,$$

$$a := \frac{\gamma_1\vartheta_3(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \gamma_2\vartheta_1(\vartheta_2 + \alpha^2\vartheta_3)}{\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3}, \qquad b := \frac{\gamma_1\gamma_2(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \alpha^2\vartheta_3)}{\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3}.$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}), \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}),$$

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}\sqrt{\frac{k}{mR^2}}, \qquad \omega_3 = \sqrt{\lambda_3}\sqrt{\frac{k}{mR^2}}.$$

$\omega_1 = 0$ entspricht einer Starrkörperdrehung der Schwingerkette.

Eigenschwingungsformen:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 - \lambda_\beta \vartheta_1 & -\gamma_1 & 0 \\ -\gamma_1 & \gamma_1 + \alpha^2\gamma_2 - \lambda_\beta \vartheta_2 & -\alpha\gamma_2 \\ 0 & -\alpha\gamma_2 & \gamma_2 - \lambda_\beta \vartheta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{(\beta)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \beta = 1,2,3$$

$$a_{1(\beta)} = 1, \qquad a_{2(\beta)} = \frac{\gamma_1 - \lambda_\beta \vartheta_1}{\gamma_1}, \qquad a_{3(\beta)} = \frac{\alpha\gamma_2 a_{2(\beta)}}{\gamma_2 - \lambda_\beta \vartheta_3}.$$

Für $\lambda_1 = 0$ wird insbesondere

$$\{a\}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \qquad \to \qquad \varphi_2 = \varphi_1, \quad \varphi_3 = \alpha\varphi_1 \quad \text{(starre Drehung)}.$$

Allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{q\} = \{0\}$:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix} (C_{11}t + C_{21}) + \sum_{\beta=2}^{3} \{a\}_{(\beta)} (C_{1\beta}\cos(\omega_\beta t) + C_{2\beta}\sin(\omega_\beta t)).$$

Für die Anpassung dieser Lösung an die insgesamt sechs Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0), \quad \dot{\varphi}_1(0), \quad \varphi_2(0), \quad \dot{\varphi}_2(0), \quad \varphi_3(0), \quad \dot{\varphi}_3(0),$$

stehen sechs Konstanten zur Verfügung.

Wenn auf den Rotor des Motors das Antriebsmoment

$$M(t) = \begin{cases} M_0(1 - t/T) & \text{für} \quad 0 \le t \le T \\ 0 \quad \text{für} & t > T \end{cases}$$

wirkt, lauten die Bewegungsgleichungen des Systems

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{q\} = \{K(t)\}, \qquad \{K(t)\} = \begin{bmatrix} M(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir setzen nun voraus, daß die Eigenvektoren bezüglich der Massenmatrix normiert sind, also die Bedingungen

$$\{a\}_\alpha{}^T[m]\{a\}_\beta = \delta_{\alpha\beta},$$
$$\{a\}_\alpha{}^T[c]\{a\}_\beta = \omega_\alpha{}^2\delta_{\alpha\beta},$$

erfüllen. Mit den Hauptkoordinaten

$$q^*_\alpha := \{a\}_\alpha{}^T[m]\{q\}, \qquad \{q\} = \sum_{\alpha=1}^{n}\{a\}_\alpha q^*_\alpha,$$

lauten dann die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{q}^*_\alpha + \omega_\alpha{}^2 q^*_\alpha = \{a\}_\alpha{}^T\{K(t)\} = K^*_\alpha(t).$$

Bezeichnen wir die jeweils erste Komponente der normierten Eigenvektoren mit $a_{1\alpha}$, so erhalten wir die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{q}^*_1 = a_{11}M_0(1-\frac{t}{T}),$$
$$\ddot{q}^*_2 + \omega_2{}^2 q^*_2 = a_{12}M_0(1-\frac{t}{T}),$$
$$\ddot{q}^*_3 + \omega_3{}^2 q^*_3 = a_{13}M_0(1-\frac{t}{T}).$$

Die allgemeinen Lösungen lauten:

$$q^*_1 = C_1 + C_2 t + a_{11}M_0(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}),$$
$$q^*_2 = C_3\cos(\omega_2 t) + C_4\sin(\omega_2 t) + \frac{a_{12}}{\omega_2{}^2}M_0(1-\frac{t}{T}),$$
$$q^*_3 = C_5\cos(\omega_3 t) + C_6\sin(\omega_3 t) + \frac{a_{13}}{\omega_3{}^2}M_0(1-\frac{t}{T}).$$

Daraus folgt

$$\dot{q}^*_1 = C_2 + a_{11}M_0(t - \frac{t^2}{2T}),$$
$$\dot{q}^*_2 = -C_3\omega_2\sin(\omega_2 t) + C_4\omega_2\cos(\omega_2 t) - \frac{a_{12}}{\omega_2{}^2 T}M_0,$$
$$\dot{q}^*_3 = -C_5\omega_3\sin(\omega_3 t) + C_6\omega_3\cos(\omega_3 t) - \frac{a_{13}}{\omega_3{}^2 T}M_0;$$

$$q^*_1(0) = C_1, \qquad \dot{q}^*_1(0) = C_2,$$
$$q^*_2(0) = C_3 + \frac{a_{12}}{\omega_2{}^2}M_0, \qquad \dot{q}^*_2(0) = C_4\omega_2 - \frac{a_{12}}{\omega_2{}^2 T}M_0,$$
$$q^*_3(0) = C_5 + \frac{a_{13}}{\omega_3{}^2}M_0; \qquad \dot{q}^*_3(0) = C_6\omega_3 - \frac{a_{13}}{\omega_3{}^2 T}M_0.$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_i(0) = 0, \qquad \dot{\varphi}_i(0) = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

erhalten wir für die Hauptkoordinaten die Gleichungen

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \{a\}_\alpha q_\alpha^*(0) = \{0\}, \qquad \sum_{\alpha=1}^{3} \{a\}_\alpha \dot{q}_\alpha^*(0) = \{0\},$$

$$\{a\}_1 C_1 + \{a\}_2 (C_3 + \frac{a_{12}}{\omega_2{}^2} M_0) + \{a\}_3 (C_5 + \frac{a_{13}}{\omega_3{}^2} M_0) = \{0\},$$

$$\{a\}_1 C_2 + \{a\}_2 (C_4 \omega_2 - \frac{a_{12}}{\omega_2{}^2 T} M_0) + \{a\}_3 (C_6 \omega_3 - \frac{a_{13}}{\omega_3{}^2 T} M_0) = \{0\}.$$

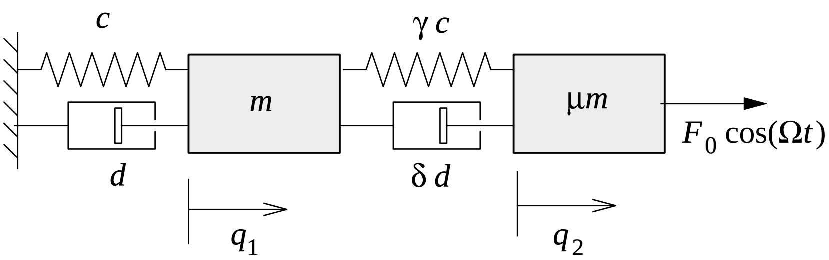
Daraus ergeben sich die Integrationskonstanten

$$C_1 = C_2 = 0,$$

$$C_3 = -\frac{a_{12}}{\omega_2{}^2} M_0, \qquad C_5 = -\frac{a_{13}}{\omega_3{}^2} M_0, \qquad C_4 = \frac{a_{12}}{\omega_2{}^3 T} M_0, \qquad C_6 = \frac{a_{13}}{\omega_3{}^3 T} M_0.$$

Aufgabe 12

Für das viskos gedämpfte System mit zwei Freiheitsgraden berechne man die Eigenschwingungsbewegungen und die Frequenzdiagramme für Amplitude und Phase bei harmonischer Anregung.



Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{q}_1 = -cq_1 - d\dot{q}_1 + \gamma c(q_2 - q_1) + \delta d(\dot{q}_2 - \dot{q}_1),$$
$$\mu m\ddot{q}_2 = -\gamma c(q_2 - q_1) - \delta d(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + F_0 \cos(\Omega t).$$

$$\omega_0{}^2 := \frac{c}{m}, \qquad 2D\omega_0 := \frac{d}{m}, \qquad \omega_0 t =: \tau, \qquad \frac{d()}{dt} = \omega_0 \frac{d()}{d\tau},$$

$$\eta := \frac{\Omega}{\omega_0}, \qquad f_0 := \frac{F_0}{m\,\omega_0{}^2} = \frac{F_0}{c},$$

$$q_1'' = -q_1 - 2Dq_1' + \gamma(q_2 - q_1) + \delta 2D(q_2' - q_1'),$$
$$\mu q_2'' = -\gamma(q_2 - q_1) - \delta 2D(q_2' - q_1') + f_0 \cos(\eta\tau).$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1'' \\ q_2'' \end{bmatrix} + 2D\begin{bmatrix} 1+\delta & -\delta \\ -\delta & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1' \\ q_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+\gamma & -\gamma \\ -\gamma & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_0\cos(\eta\tau) \end{bmatrix}.$$

Lösungsansatz für das *homogene* Differentialgleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{\lambda\tau}, \qquad \to \qquad \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2D(1+\delta)\lambda + \gamma + 1 & -2D\delta\lambda - \gamma \\ -2D\delta\lambda - \gamma & \mu\lambda^2 + 2D\delta\lambda + \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda^2 + 2D(1+\delta)\lambda + \gamma + 1 & -2D\delta\lambda - \gamma \\ -2D\delta\lambda - \gamma & \mu\lambda^2 + 2D\delta\lambda + \gamma \end{bmatrix} = 0,$$

$$\mu\lambda^4 + 2D(\delta + \mu(1+\delta))\lambda^3 + (4D^2\delta + \mu(1+\gamma) + \gamma)\lambda^2 + 2D(\gamma+\delta)\lambda + \gamma = 0.$$

Wenn D klein genug ist, erhalten wir zwei Paare konjugiert komplexer Eigenwerte:

$$\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha(r)} + i\,\lambda_{\alpha(i)} \qquad \to \qquad e^{\lambda_\alpha\tau} = e^{\lambda_{\alpha(r)}\tau}\{\cos(\lambda_{\alpha(i)}\tau) + i\sin(\lambda_{\alpha(i)}\tau)\},$$

$$\lambda_1 = \lambda_{1(r)} + i\,\lambda_{1(i)}, \qquad \lambda_2 = \lambda_{1(r)} - i\,\lambda_{1(i)},$$

$$\lambda_3 = \lambda_{3(r)} + i\,\lambda_{3(i)}, \qquad \lambda_4 = \lambda_{3(r)} - i\,\lambda_{3(i)},$$

Für die entsprechenden Eigenvektoren gilt:

$$a_{1\alpha} = 1, \qquad a_{2\alpha} = \frac{\lambda_\alpha{}^2 + 2D(1+\delta)\lambda_\alpha + \gamma + 1}{2D\delta\lambda + \gamma},$$

$$a_{1\alpha} = 1, \qquad a_{2\alpha} = r_\alpha e^{i\varphi_\alpha}.$$

Damit erhalten wir die folgende komplexwertige allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{4} \overline{C}_\alpha e^{\lambda_{a(r)}\tau}\begin{bmatrix} e^{i\lambda_{\alpha(i)}\tau} \\ r_\alpha e^{i(\lambda_{\alpha(i)}\tau + \varphi_\alpha)} \end{bmatrix}.$$

Der Realteil lautet

$$\begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \end{bmatrix} = e^{\lambda_{1(r)}\tau}\left(C_1\begin{bmatrix} \cos(\lambda_{1(i)}\tau) \\ r_1\cos(\lambda_{1(i)}\tau + \varphi_1) \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} \sin(\lambda_{1(i)}\tau) \\ r_1\sin(\lambda_{1(i)}\tau + \varphi_1) \end{bmatrix}\right) +$$

$$+ e^{\lambda_{3(r)}\tau}\left(C_3\begin{bmatrix} \cos(\lambda_{3(i)}\tau) \\ r_3\cos(\lambda_{3(i)}\tau + \varphi_3) \end{bmatrix} + C_4\begin{bmatrix} \sin(\lambda_{3(i)}\tau) \\ r_3\sin(\lambda_{3(i)}\tau + \varphi_3) \end{bmatrix}\right).$$

Spezielle Werte:

$\mu = \gamma = \delta = 1, \qquad D = 0.1$

$$\lambda^4 + 0,6\lambda^3 + 3.04\lambda^2 + 0,4\lambda + 1 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -3.81966 \cdot 10^{-2} \pm i\,6.168525 \cdot 10^{-1},$$
$$\lambda_{3,4} = -2.618034 \cdot 10^{-1} \pm i\,1.596713,$$

$$r_1 = 1.61803, \quad \varphi_1 = 0,$$
$$r_3 = 0.61803, \quad \varphi_3 = -\pi.$$

$\mu = \gamma = \delta = 1, \qquad D = 0.5$

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$
$$\lambda_{1,2} = -1.909830 \cdot 10^{-1} \pm i\,5.877853 \cdot 10^{-1},$$
$$\lambda_{3,4} = -1.309017 \pm i\,9.510565 \cdot 10^{-1},$$

$$r_1 = 1.736547, \quad \varphi_1 = 7.972062\text{e-}2,$$
$$r_3 = 0.61803, \quad \varphi_3 = -\pi.$$

Für größere Werte des Dämpfungsmaßes D können sich zwei reelle und zwei konjugiert komplexe Eigenwerte ergeben oder aber auch vier reelle Eigenwerte:

$\mu = \gamma = \delta = 1, \qquad D = 1.0$

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0,$$
$$\lambda_{1,2} = -3.819660 \cdot 10^{-1} \pm i\,4.858683 \cdot 10^{-1},$$
$$\lambda_3 = -5.598630 \cdot 10^{-1},$$
$$\lambda_4 = -4.676205,$$

$\mu = \gamma = \delta = 1, \qquad D = 2.0$

$$\lambda^4 + 12\lambda^3 + 19\lambda^2 + 8\lambda + 1 = 0,$$
$$\lambda_1 = -2.562714 \cdot 10^{-1},$$
$$\lambda_2 = -3.149040 \cdot 10^{-1},$$
$$\lambda_3 = -1.212960,$$
$$\lambda_4 = -1.021586 \cdot 10^{1}.$$

Zu reellen Eigenwerten gehören dann exponentiell abklingende Lösungsfunktionen.

Eine Partikularlösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems bei harmonischer Anregung

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1''\\ q_2''\end{bmatrix}+2D\begin{bmatrix}1+\delta & -\delta\\ -\delta & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1'\\ q_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1+\gamma & -\gamma\\ -\gamma & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}=\mathrm{Re}\begin{bmatrix}0\\ f_0\end{bmatrix}e^{i\eta\tau}$$

erhalten wir mit dem Ansatz

$$\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}_{part}=\mathrm{Re}\begin{bmatrix}\overline{A}_1\\ \overline{A}_2\end{bmatrix}e^{i\eta\tau}.$$

Das führt zu dem linearen Gleichungssystem für die komplexwertigen Konstanten $\overline{A}_1$ und $\overline{A}_2$:

$$\left(-\eta^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}+i2D\eta\begin{bmatrix}1+\delta & -\delta\\ -\delta & \delta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1+\gamma & -\gamma\\ -\gamma & \gamma\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\overline{A}_1\\ \overline{A}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ f_0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\overline{B}_{11} & \overline{B}_{12}\\ \overline{B}_{12} & \overline{B}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{A}_1\\ \overline{A}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ f_0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\overline{B}_{11} & \overline{B}_{12}\\ \overline{B}_{12} & \overline{B}_{22}\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}-\eta^2+1+\gamma+i\,2D\eta(1+\delta) & -\gamma-i\,2D\eta\delta\\ -\gamma-i\,2D\eta\delta & -\mu\eta^2+\gamma-i\,2D\eta\delta\end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_1=-\frac{\overline{B}_{12}}{\overline{B}_{11}\overline{B}_{22}-(\overline{B}_{12})^2}\,f_0,\qquad \overline{A}_2=\frac{\overline{B}_{11}}{\overline{B}_{11}\overline{B}_{22}-(\overline{B}_{12})^2}\,f_0;$$

$$\overline{A}_1=R_1f_0e^{i\Phi_1},\qquad \overline{A}_2=R_2f_0e^{i\Phi_2}.$$

Wir werten nun diese Formeln für den Spezialfall

$$\mu=\gamma=\delta=1,\qquad D=0.1$$

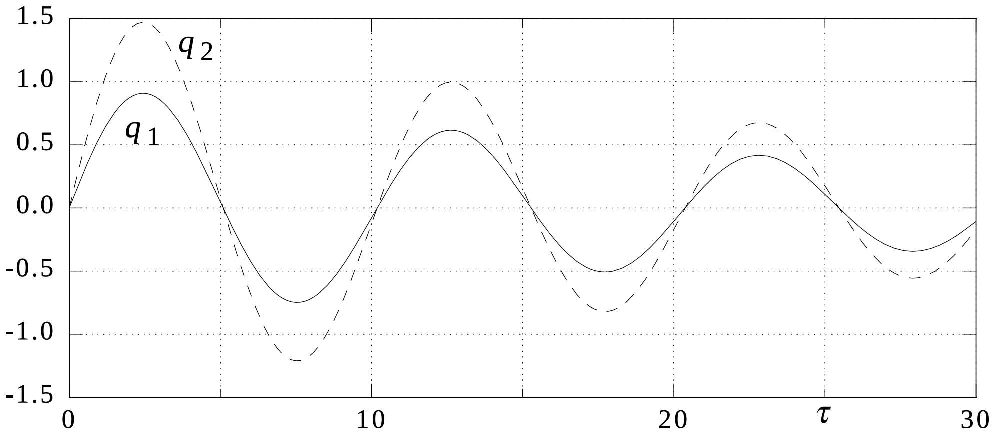
aus, zu dem die Eigenwerte

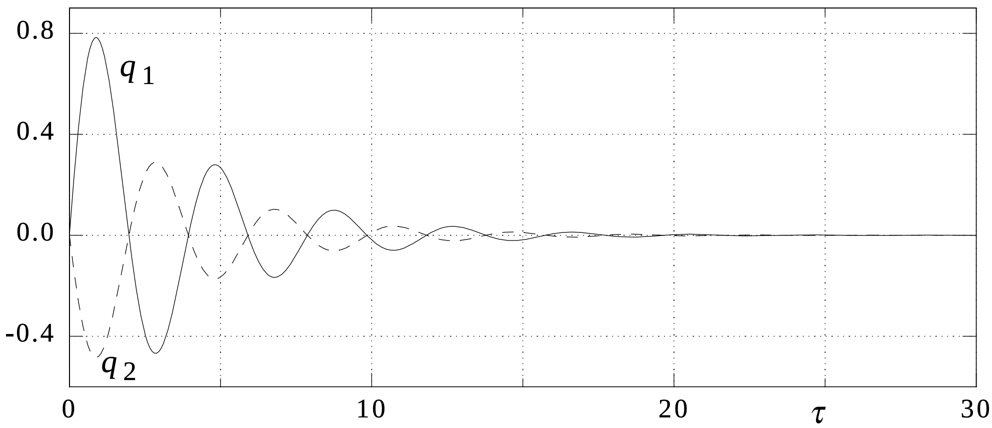
$$\lambda_{1,2}=-3.81966\cdot10^{-2}\pm i\,6.168525\cdot10^{-1},$$

$$\lambda_{3,4}=-2.618034\cdot10^{-1}\pm i1.596713,$$

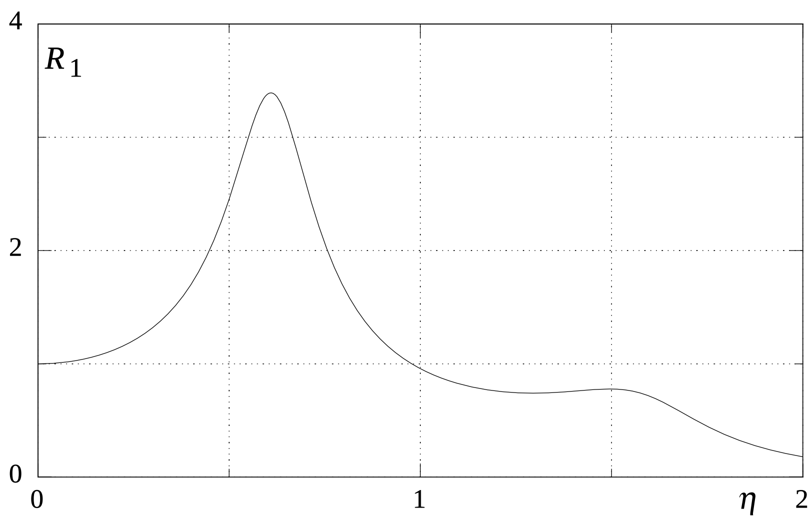
des homogenen Systems gehören.

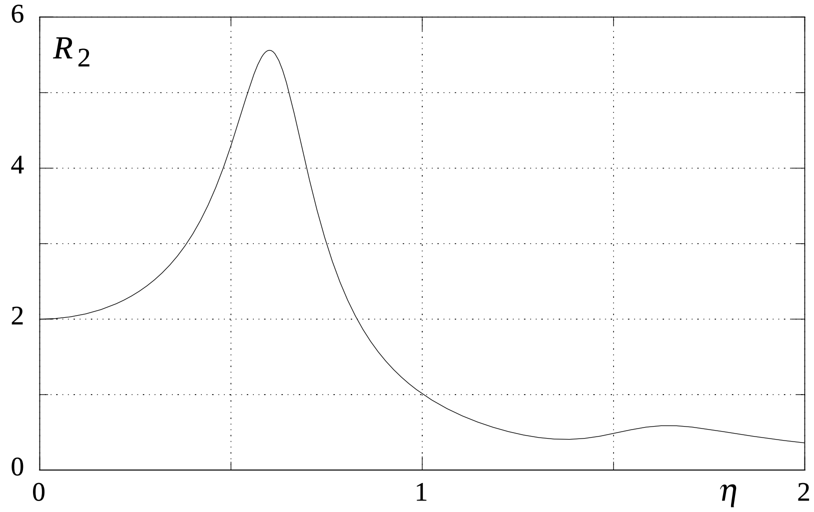
Eigenschwingungsformen:



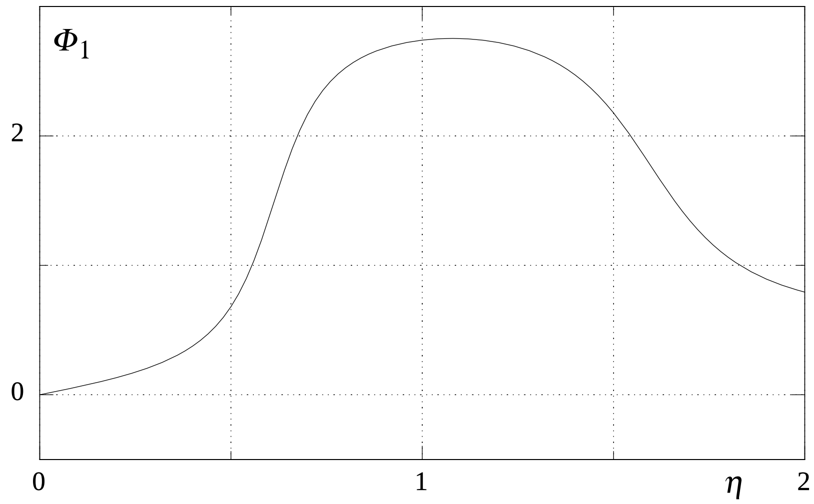


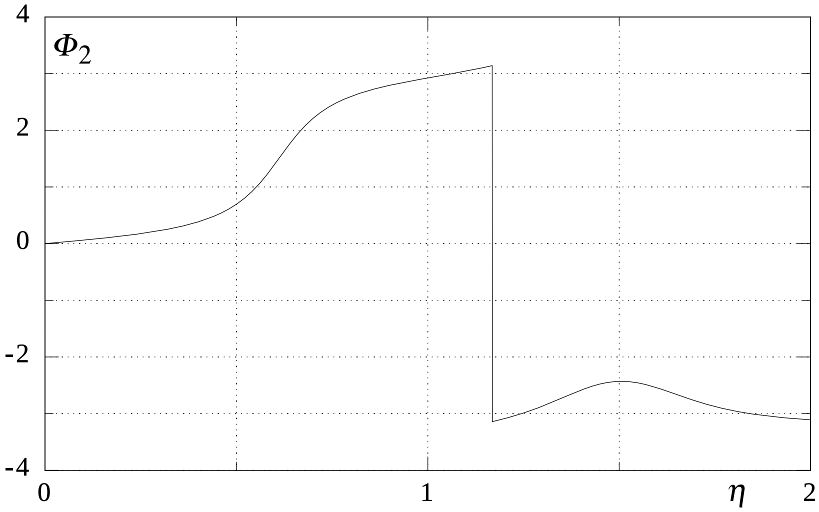
Amplituden-Frequenzdiagramme:



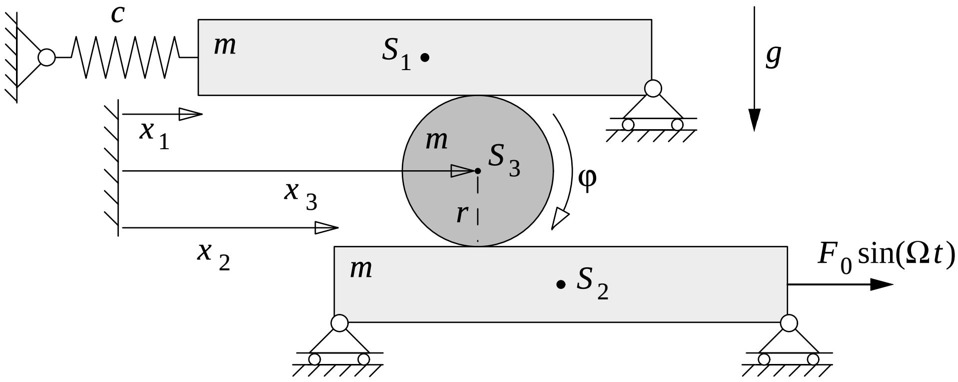


Phasenwinkel-Frequenzdiagramme



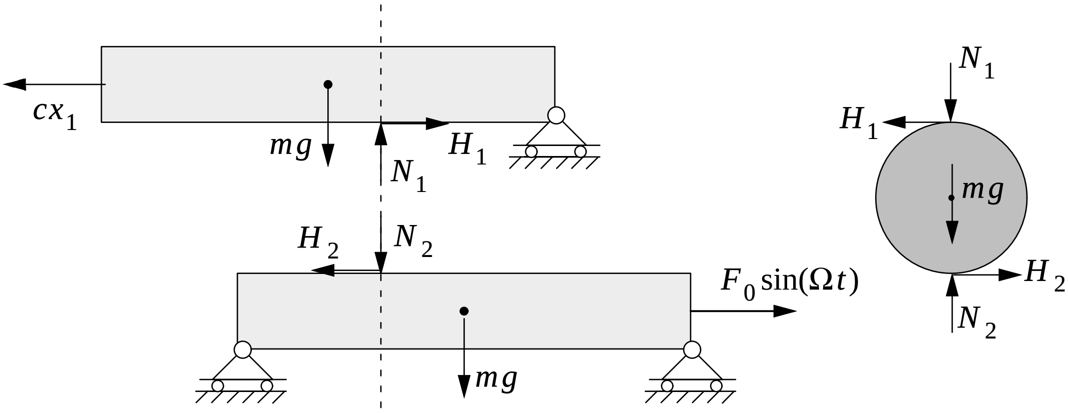


Aufgabe 13



Zwischen zwei horizontal beweglichen Balken kann eine Kreisscheibe rollen. Alle drei Körper haben die gleiche Masse m. Man bestimme die Bewegungsgleichungen mit Hilfe von Schwerpunkt- und Momentensatz und berechne $x_1(t)$ und $x_2(t)$ mit den Anfangsbedingungen $x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0.$

Freikörperbild:



Schwerpunkt- und Momentensatz:

$$m\ddot{x}_1 = -cx_1 + H_1,$$
$$m\ddot{x}_2 = F_0 \sin(\Omega t) - H_2,$$
$$m\ddot{x}_3 = -H_1 + H_2,$$
$$\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\varphi} = -H_1 r - H_2 r.$$

Kinematische Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_3 + r\dot{\varphi}, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_3 - r\dot{\varphi}; \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_3 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2), \qquad r\dot{\varphi} = \frac{1}{2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2).$$

Daraus folgt

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -2H_1 + 2H_2,$$
$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -4H_1 - 4H_2,$$

mit den Reaktionskräften

$$H_1 = m\ddot{x}_1 + cx_1, \qquad H_2 = F_0 \sin(\Omega t) - m\ddot{x}_2.$$

Elimination der Reaktionskräfte ergibt zunächst das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} 3m\ddot{x}_1 + 3m\ddot{x}_2 + 2cx_1 &= 2F_0 \sin(\Omega t), \\ 5m\ddot{x}_1 - 5m\ddot{x}_2 + 4cx_1 &= -4F_0 \sin(\Omega t), \end{aligned}$$

und daraus erhält man durch Elimination zuerst von $\ddot{x}_2$ und dann x_1 die Differentialgleichungen

$$\ddot{x}_1 + \frac{11}{15}\frac{c}{m}x_1 = -\frac{1}{15}\frac{F_0}{m}\sin(\Omega t),$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{1}{11}\ddot{x}_1 + \frac{8}{11}\frac{F_0}{m}\sin(\Omega t).$$

Mit

$$\omega_0{}^2 := \frac{11}{15}\frac{c}{m}, \qquad f_0 := -\frac{1}{11}\frac{F_0}{c},$$

wird

$$\ddot{x}_1 + \omega_0{}^2 x_1 = \omega_0{}^2 f_0 \sin(\Omega t).$$

Berechnung der Partikularlösung:

$$x_{1part} = A\sin(\Omega t), \qquad \ddot{x}_{1part} = -\Omega^2 A\sin(\Omega t), \qquad \to \qquad (-\Omega^2 + \omega_0{}^2)A = \omega_0{}^2 f_0,$$

$$A = \frac{f_0}{1-\eta^2}, \qquad \eta := \frac{\Omega}{\omega_0}, \qquad \Omega \neq \omega_0.$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $x_1(t)$:

$$x_1(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{1-\eta^2}\sin(\Omega t),$$

$$\dot{x}_1(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2\cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{1-\eta^2}\Omega\cos(\Omega t).$$

Anpassung an die Anfangsbedingungen:

$$x_1(0) = 0 \qquad \to \qquad C_1 = 0, \qquad\qquad \dot{x}_1(0) = 0 \qquad \to \qquad C_2 = -\frac{\eta f_0}{1-\eta^2}.$$

Spezielle Lösung $x_1(t)$:

$$x_1(t) = \frac{f_0}{1-\eta^2}\{\sin(\Omega t) - \eta\sin(\omega_0 t)\}.$$

Die zweite Differentialgleichung

$$\ddot{x}_2 = -\frac{1}{11}\ddot{x}_1 + \frac{8}{11}\frac{F_0}{m}\sin(\Omega t),$$

liefert:

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{11}\dot{x}_1 - \frac{8}{11}\frac{F_0}{m\Omega}\cos(\Omega t) + C_3,$$

$$x_2 = -\frac{1}{11}x_1 - \frac{8}{11}\frac{F_0}{m\Omega^2}\sin(\Omega t) + C_3 t + C_4.$$

Die Anfangsbedingungen $x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0$ werden erfüllt, wenn

$$C_3 = \frac{8}{11}\frac{F_0}{m\Omega}, \qquad C_4 = 0$$

gesetzt wird, also ist

$$x_2(t) = -\frac{1}{11}x_1(t) + \frac{8}{11}\frac{F_0}{m\Omega^2}\{-\sin(\Omega t) + \Omega t\}.$$

Für die graphische Darstellung der Lösungen setzen wir

$$L := \frac{F_0}{c}, \qquad \tau := \omega_0 t.$$

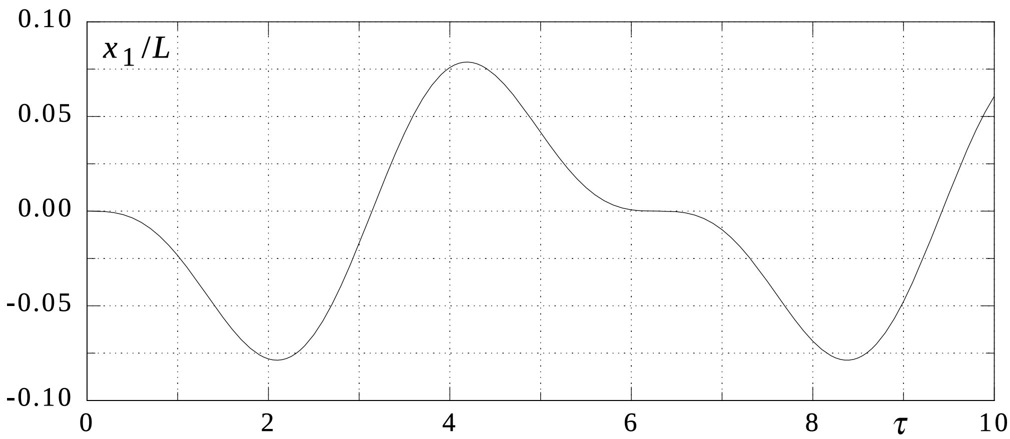
Damit wird

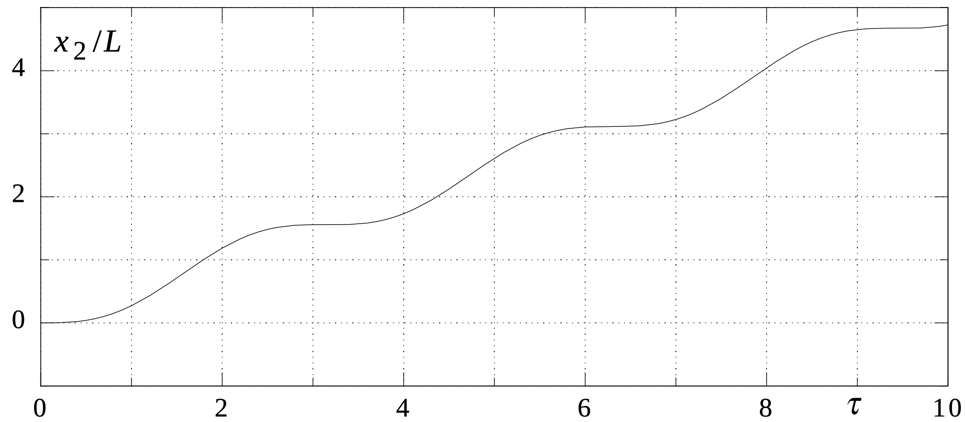
$$x_1(\tau) = \frac{L}{11(1-\eta^2)}\{\eta \sin\tau - \sin(\eta\tau)\},$$

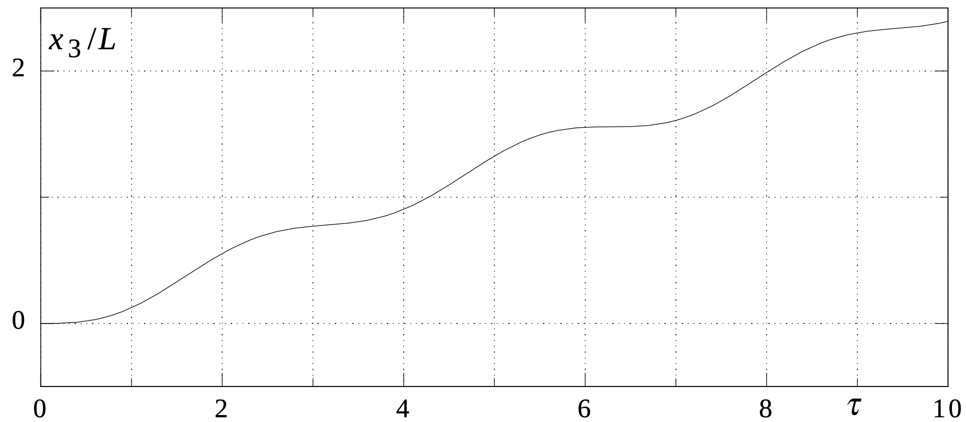
$$x_2(\tau) = \frac{1}{11}\left\{-x_1(\tau) + \frac{120}{11}\frac{L}{\eta^2}[\eta\tau - \sin(\eta\tau)]\right\},$$

$$x_3(\tau) = x_3(0) + \frac{1}{2}(x_1(\tau) + x_2(\tau)).$$

Für den speziellen Wert $\eta = 2$ erhalten wir

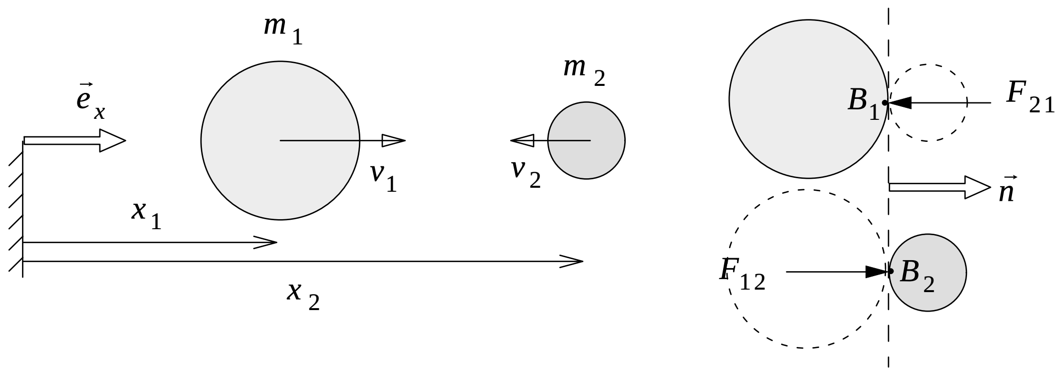



x_2/L
4
2
0
0
2
4
6
8
τ
10


x_3/L
2
0
0
2
4
6
8
τ
10

Aufgabe 1

Zwei Kreisscheiben bewegen sich reibungsfrei auf der xy-Ebene mit konstanten Translationsgeschwindigkeiten auf Kollisionskurs. Zum Zeitpunkt $t = 0$ stoßen sie im Punkt B zusammen. Man berechne mit Hilfe der NEWTONschen Stoßhypothese die Translationsgeschwindigkeiten unmittelbar nach dem Zusammenstoß.



Unmittelbar vor dem Zusammenstoß (Exponentmarke: –) haben die beiden Kreisscheiben die Geschwindigkeiten

$$\dot{x}_1^- = v_1, \qquad \dot{x}_2^- = -v_2.$$

Unbekannt sind die Geschwindigkeiten unmittelbar nach dem Zusammenstoß (Exponentmarke: +): $\dot{x}_1^+$ und $\dot{x}_2^+$.

Während der infinitesimal kurzen Stoßdauer Δt wirken in den Kontaktpunkten B_1 und B_2 die inneren Wechselwirkungskräfte

$$\vec{F}_{12} = K(t)\vec{n}, \qquad \vec{F}_{21} = -K(t)\vec{n},$$

wobei $K(t)$ unbekannt ist. Der Schwerpunktsatz liefert für die beiden Scheiben während der Stoßphase die Gleichungen

$$m_1\ddot{x}_1 = -K, \qquad m_2\ddot{x}_2 = K.$$

Wir integrieren diese Gleichungen über die kurze Stoßdauer Δt und erhalten

$$m_1(\dot{x}_1^+ - \dot{x}_1^-) = -\kappa, \qquad m_2(\dot{x}_2^+ - \dot{x}_2^-) = \kappa, \qquad \kappa := \int_{\Delta t} K(t)dt\,.$$

Das Ergebnis läßt sich als Impulserhaltungssatz formulieren:

$$m_1\dot{x}_1^+ + m_2\dot{x}_2^+ = m_1\dot{x}_1^- + m_2\dot{x}_2^-,$$

$$m_1\dot{x}_1^+ + m_2\dot{x}_2^+ = m_1 v_1 - m_2 v_2,$$

Es reicht aber nicht aus, um die Translationsgeschwindigkeiten $\dot{x}_1^+$ und $\dot{x}_2^+$ zu berechnen, weil der Kraftstoß κ nicht bekannt ist.
Die noch fehlende Gleichung erhalten wir aus der NEWTONschen Stoßhypothese, die pauschal etwas aussagt über die Änderung der Relativgeschwindigkeiten der

Kontaktpunkte senkrecht zur gemeinsamen Tangentialfläche der Körperoberflächen in den Kontaktpunkten:

$$\vec{n}\cdot(\vec{v}_{B_2}^{+}-\vec{v}_{B_1}^{+})=-\varepsilon\vec{n}\cdot(\vec{v}_{B_2}^{-}-\vec{v}_{B_1}^{-}).$$

Dabei ist ε die Stoßziffer $(0\le\varepsilon\le1)$; $\varepsilon=1$ entspricht einem vollkommen elastischen und $\varepsilon=0$ einem vollkommen unelastischen Stoßprozeß.

Hier ist $\vec{n}=\vec{e}_x$ und deshalb wird

$$\dot{x}_2{}^{+}-\dot{x}_1{}^{+}=-\varepsilon(-v_2-v_1).$$

Aus den beiden Gleichungen

$$m_1\dot{x}_1{}^{+}+m_2\dot{x}_2{}^{+}=m_1v_1-m_2v_2,$$
$$\dot{x}_2{}^{+}-\dot{x}_1{}^{+}=\varepsilon(v_2+v_1),$$

folgt nun

$$\dot{x}_1{}^{+}=\frac{v_1(m_1-\varepsilon m_2)-v_2(1+\varepsilon)m_2}{m_1+m_2},$$
$$\dot{x}_2{}^{+}=\frac{v_1(1+\varepsilon)m_1-v_2(m_2-\varepsilon m_1)}{m_1+m_2}.$$

Spezielle Fälle:

a) $m_1=m_2=m,\qquad v_1\ne v_2,\qquad \varepsilon=1$:

Zwei Kreisscheiben gleicher Masse stoßen vollkommen elastisch zusammen.

$$\vec{x}_1{}^{+}=-v_2,\qquad \dot{x}_2{}^{+}=v_1.$$

Die beiden Kreisscheiben tauschen ihre Impulse aus.

b) $m_1=m_2=m,\qquad v_2=0,\qquad \varepsilon=0$:

Eine Kreisscheibe trifft mit der Geschwindigkeit v_1 auf eine ruhende Kreisscheibe gleicher Masse, der Stoß sei vollkommen unelastisch.

$$\vec{x}_1{}^{+}=\dot{x}_2{}^{+}=\frac{v_1}{2}.$$

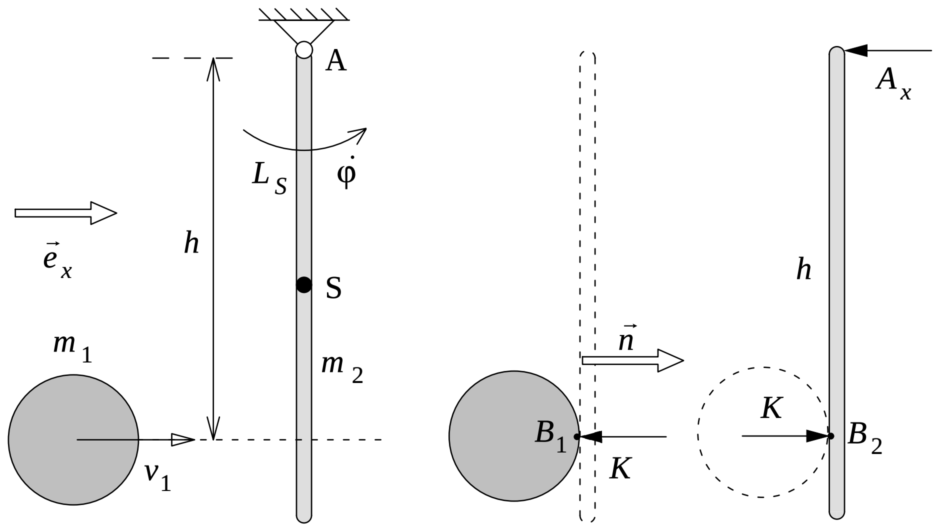
Beide Kreisscheiben bewegen sich nach dem Zusammenstoß mit gleicher Geschwindigkeit.

c) $m_2\to\infty,\qquad v_2=0$:

Eine Kreisscheibe trifft mit der Geschwindigkeit v_1 auf eine ruhende Wand.

$$\vec{x}_1{}^{+}=-\varepsilon v_1.$$

Aufgabe 2



Eine Kugel (Masse m_1) trifft mit der Geschwindigkeit v_1 auf eine in A drehbar gelagerte ruhende Stange (Masse m_2). Man berechne die Geschwindigkeitszustände der beiden Körper unmittelbar nach dem Zusammenstoß.

Für die Stoßphase liefern Schwerpunkt- und Momentensatz die Gleichungen

$$m_1\ddot{x} = -K, \qquad \Theta_A\ddot{\varphi} = Kh.$$

Integration über die infinitesimale Stoßdauer ergibt

$$m_1(\dot{x}^+ - \dot{x}^-) = -\kappa, \qquad \frac{\Theta_A}{h}(\dot{\varphi}^+ - \dot{\varphi}^-) = \kappa, \qquad \kappa := \int_{\Delta t} K(t)dt\,.$$

Mit

$$\dot{x}^- = v_1, \qquad \dot{\varphi}^- = 0$$

erhalten wir die Gleichung

$$m_1(\dot{x}^+ - v_1) + \frac{\Theta_A}{h}\dot{\varphi}^+ = 0,$$

und zusammen mit der NEWTONschen Stoßhypothese

$$\vec{n}\cdot(\vec{v}^{\,+}_{B_2} - \vec{v}^{\,+}_{B_1}) = -\varepsilon\vec{n}\cdot(\vec{v}^{\,-}_{B_2} - \vec{v}^{\,-}_{B_1}),$$

$$h\,\dot{\varphi}^+ - \dot{x}^+ = \varepsilon v_1,$$

ergibt sich das Gleichungssystem

$$m_1\dot{x}^+ + \frac{\Theta_A}{h}\dot{\varphi}^+ = m_1 v_1,$$

$$-\dot{x}^+ + h\,\dot{\varphi}^+ = \varepsilon v_1.$$

Unmittelbar nach dem Zusammenstoß ist

$$\dot{x}^+ = v_1 \frac{h - \varepsilon H}{H + h}, \qquad \dot{\varphi}^+ = v_1 \frac{1+\varepsilon}{H+h}, \qquad H := \frac{\Theta_A}{m_1 h}.$$

Aus dem Schwerpunktsatz für die Stange

$$m_2 L_S \ddot{\varphi} = K - A_x$$

folgt nach Integration über die Stoßdauer Δt für den Kraftstoß im Gelenkpunkt A

$$\kappa_A := \int_{\Delta t} A_x \, dt = \kappa - m_2 L_S \dot{\varphi}^+.$$

Mit dem obigen Ergebnis

$$\kappa = \frac{\Theta_A}{h} \dot{\varphi}^+$$

wird

$$\kappa_A = \left(\frac{\Theta_A}{h} - m_2 L_S\right) \dot{\varphi}^+.$$

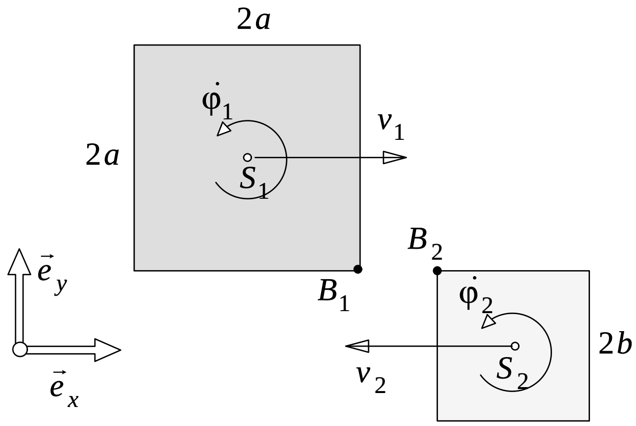
Insbesondere wird der Kraftstoß im Gelenkpunkt A null, wenn die Kugel im Abstand

$$h^* = \frac{\Theta_A}{m_2 L_S} = \frac{m_2 i_A^2}{m_2 L_S} = \frac{i_A^2}{L_S}$$

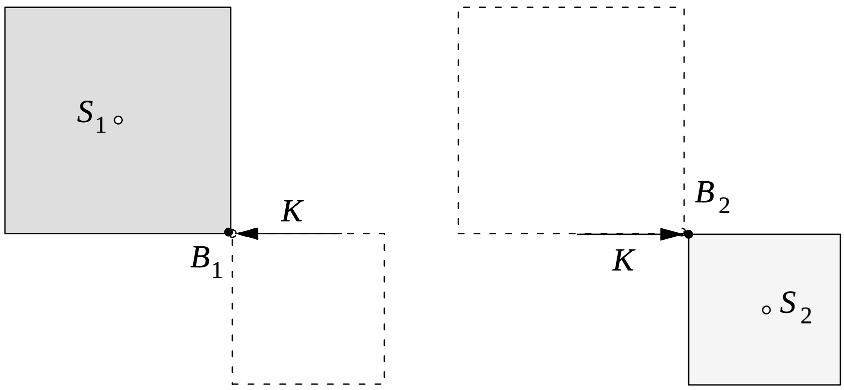
auf die Stange trifft. In diesem Fall nennt man B_2 den Stoßmittelpunkt des Pendels.

Anwendung: Wenn man den Stil eines Hammers im Abstand h^* vom Hammerkopf hält, wird die Hand beim Aufschlag des Hammers nicht geprellt.

Aufgabe 3



Zwei quadratische Scheiben bewegen sich nicht rotierend und reibungsfrei in der xy-Ebene so aufeinander zu, daß sie in den Eckpunkten B_1, B_2 zusammenstoßen, wobei die Stoßnormale $\vec{n} = \vec{e}_x$ sein soll. Man berechne die Geschwindigkeitszustände der Scheiben unmittelbar nach dem Zusammenstoß.



$$\Theta_{S_1} = \frac{m_1}{12}(4a^2 + 4a^2) = \frac{2}{3} m_1 a^2, \qquad \Theta_{S_2} = \frac{m_2}{12}(4b^2 + 4b^2) = \frac{2}{3} m_2 b^2.$$

Kinematischer Zustand unmittelbar vor dem Zusammenstoß:

$$\dot{x}_{S_1}^- = v_1, \qquad \dot{x}_{S_2}^- = -v_2, \qquad \dot{\varphi}_1^- = 0, \qquad \dot{\varphi}_2^- = 0.$$

Gleichungen für Schwerpunkt- und Momentensatz während der Stoßphase:

$$m_1 \ddot{x}_{S_1} = -K, \qquad m_2 \ddot{x}_{S_2} = K,$$

$$\Theta_{S_1} \ddot{\varphi}_1 = -Ka, \qquad \Theta_{S_2} \ddot{\varphi}_2 = -Kb.$$

Integration über die Stoßdauer Δt:

$$m_1(\dot{x}_{S_1}^+ - \dot{x}_{S_1}^-) = -\kappa, \qquad m_2(\dot{x}_{S_2}^+ - \dot{x}_{S_2}^-) = \kappa,$$

$$\frac{2}{3} m_1 a(\dot{\varphi}_1^+ - \dot{\varphi}_1^-) = -\kappa, \qquad \frac{2}{3} m_2 b(\dot{\varphi}_2^+ - \dot{\varphi}_2^-) = -\kappa; \qquad \kappa := \int_{\Delta t} K(t)dt\,.$$

Elimination des Kraftstoßes κ:

$$m_1 \dot{x}_{S_1}^+ + m_2 \dot{x}_{S_2}^+ = m_1 v_1 - m_2 v_2,$$

$$m_1 a\,\dot{\varphi}_1^+ - m_2 b\,\dot{\varphi}_2^+ = 0,$$

$$\frac{2}{3} m_2 b\,\dot{\varphi}_2^+ - m_1 \dot{x}_{S_1}^+ = -m_1 v_1.$$

NEWTONsche Stoßhypothese:

$$\vec{e}_x \cdot (\vec{v}_{B_2}^+ - \vec{v}_{B_1}^+) = -\varepsilon\, \vec{e}_x \cdot (\vec{v}_{B_2}^- - \vec{v}_{B_1}^-);$$

$$\vec{v}_{B_1}^{\pm} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{S_1}^{\pm} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1^{\pm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{S_1}^{\pm} + a\,\dot{\varphi}_1^{\pm} \\ a\,\dot{\varphi}_1^{\pm} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_{B_2}^{\pm} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{S_2}^{\pm} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_2^{\pm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{S_2}^{\pm} - b\,\dot{\varphi}_2^{\pm} \\ -b\,\dot{\varphi}_2^{\pm} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{x}_{S_2}^{+} - b\,\dot{\varphi}_2^{+} - \dot{x}_{S_1}^{+} - a\,\dot{\varphi}_1^{+} = -\varepsilon(-v_2 - v_1).$$

Aus den vier Gleichungen für die vier kinematischen Zustandsgrößen unmittelbar nach dem Stoß

$$m_1\dot{x}_{S_1}^{+} + m_2\dot{x}_{S_2}^{+} = m_1 v_1 - m_2 v_2,$$

$$m_1 a\,\dot{\varphi}_1^{+} - m_2 b\,\dot{\varphi}_2^{+} = 0,$$

$$\frac{2}{3} m_2 b\,\dot{\varphi}_2^{+} - m_1\dot{x}_{S_1}^{+} = -m_1 v_1,$$

$$\dot{x}_{S_2}^{+} - b\,\dot{\varphi}_2^{+} - \dot{x}_{S_1}^{+} - a\,\dot{\varphi}_1^{+} = \varepsilon(v_2 + v_1),$$

folgt zunächst

$$b\,\dot{\varphi}_2^{+} = \frac{3}{2}\frac{m_1}{m_2}(\dot{x}_{S_1}^{+} - v_1), \qquad a\,\dot{\varphi}_1^{+} = \frac{3}{2}(\dot{x}_{S_1}^{+} - v_1), \qquad \dot{x}_{S_2}^{+} = -\frac{m_1}{m_2}(\dot{x}_{S_1}^{+} - v_1) - v_2,$$

und schließlich

$$\dot{x}_{S_1}^{+} = v_1 - \frac{2}{5}(1+\varepsilon)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 + v_2),$$

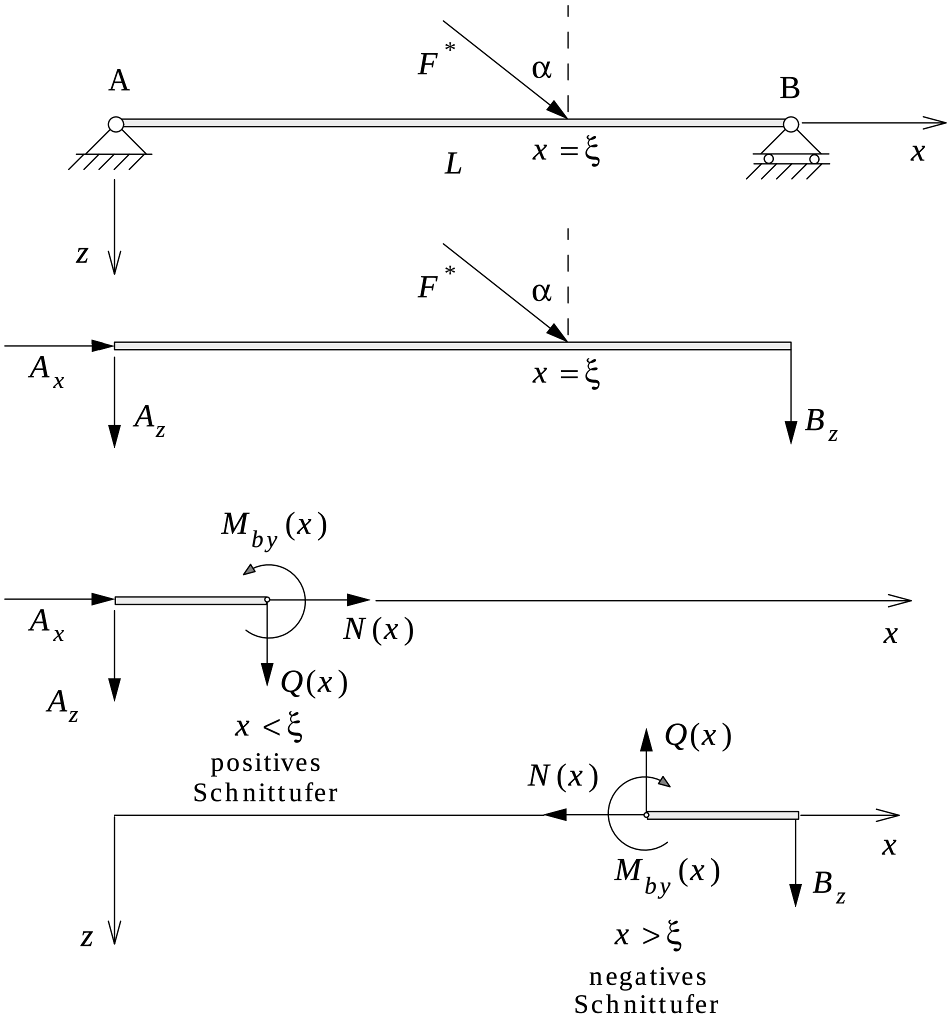
$$\dot{x}_{S_2}^{+} = -v_2 + \frac{2}{5}(1+\varepsilon)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 + v_2),$$

$$a\,\dot{\varphi}_1^{+} = -\frac{3}{5}(1+\varepsilon)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 + v_2),$$

$$b\,\dot{\varphi}_2^{+} = -\frac{3}{5}(1+\varepsilon)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 + v_2).$$

Aufgabe 1

Ein Balken (Länge L) ist in A und B gelenkig gelagert und im Punkt $x = \xi$ durch eine Einzelkraft $\vec{F}^*$ belastet. Man berechne die Schnittlasten.



Berechnung der Auflagerkräfte:

$$A_x + F^* \sin\alpha = 0,$$
$$A_z + B_z + F^* \cos\alpha = 0,$$
$$-B_z L - F^* \xi \cos\alpha = 0;$$

$$A_x = -F^* \sin\alpha, \qquad B_z = -F^* \frac{\xi}{L} \cos\alpha, \qquad A_z = -F^* (1 - \frac{\xi}{L}) \cos\alpha.$$

Schnittlasten im Bereich $0 \le x < \xi$:

$$A_x + N(x) = 0,$$
$$A_z + Q(x) = 0,$$
$$A_z x + M_{by}(x) = 0;$$

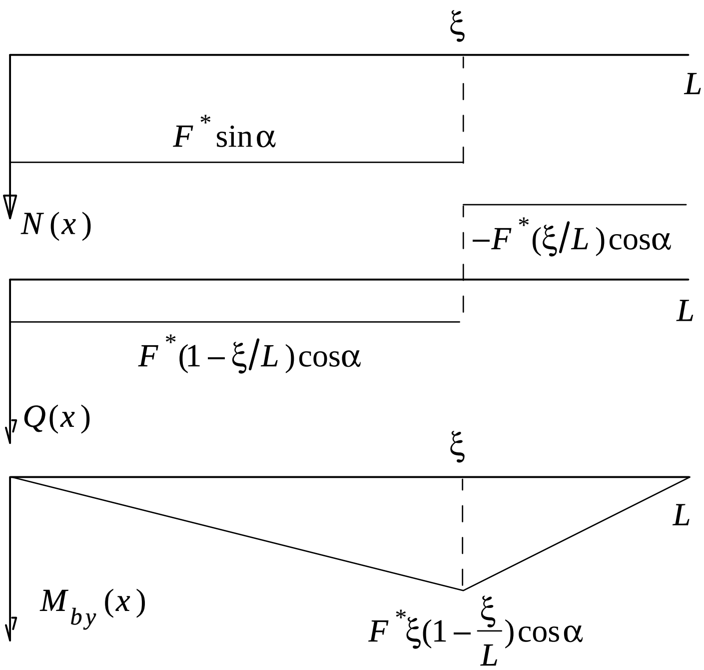
$$N(x) = F^* \sin\alpha, \qquad Q(x) = F^* (1 - \frac{\xi}{L}) \cos\alpha, \qquad M_{by}(x) = F^* x (1 - \frac{\xi}{L}) \cos\alpha.$$

Schnittlasten im Bereich $\xi < x \le L$:

$$-N(x) = 0,$$
$$B_z - Q(x) = 0,$$
$$B_z(L-x) + M_{by}(x) = 0;$$

$$N(x) = 0, \qquad Q(x) = -F^* \frac{\xi}{L}\cos\alpha, \qquad M_{by}(x) = F^*\xi(1-\frac{x}{L})\cos\alpha.$$

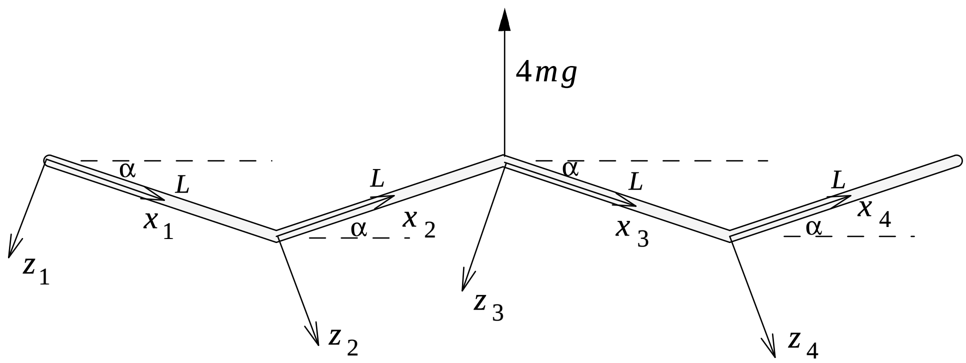
Schnittlastdiagramme:



Es gelten die differentiellen Gleichgewichtsbedingungen

$$N'(x) = 0, \qquad Q'(x) = 0, \qquad M_{by}{}'(x) = Q(x).$$

Aufgabe 2



Für den aus vier homogenen Segmenten (Masse m, Länge L) zusammengesetzten Rahmen berechne man die Biegemomente infolge der Eigengewichtsbelastung.

Streckenlasten senkrecht zur jeweiligen Rahmenachse:

$$q(x_i) = \frac{mg}{L}\cos\alpha.$$

Biegemomente:

$$M_{by}(x_1) = -\frac{mg}{L}\cos\alpha\frac{x_1^2}{2},$$

$$M_{by}(x_2) = -mg(\frac{L}{2} + x_2)\cos\alpha - \frac{mg}{L}\cos\alpha\frac{x_2^2}{2},$$

$$M_{by}(x_3) = -2mg(L + x_3)\cos\alpha + 4mgx_3\cos\alpha - \frac{mg}{L}\cos\alpha\frac{x_3^2}{2},$$

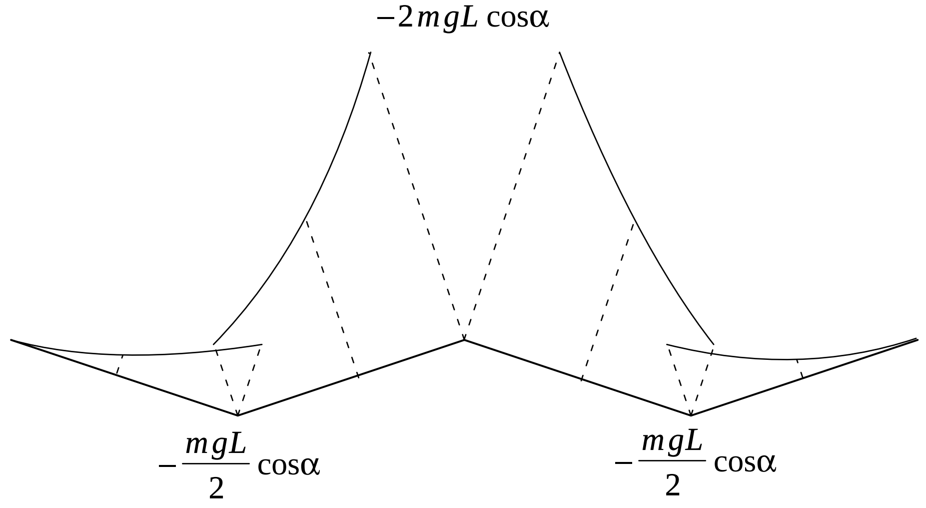
$$M_{by}(x_4) = -3mg(\frac{3}{2}L + x_4)\cos\alpha + 4mg(L + x_4)\cos\alpha - \frac{mg}{L}\cos\alpha\frac{x_4^2}{2},$$

$$M_{by}(x_1) = -\frac{mg\cos\alpha}{L}\frac{x_1^2}{2},$$

$$M_{by}(x_2) = -\frac{mg\cos\alpha}{L}(\frac{x_2^2}{2} + Lx_2 + \frac{L^2}{2}),$$

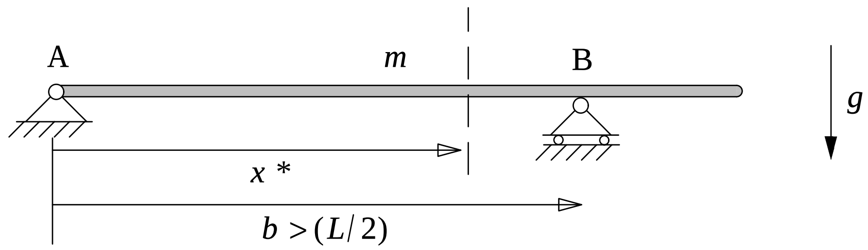
$$M_{by}(x_3) = -\frac{mg\cos\alpha}{L}(\frac{x_3^2}{2} - 2Lx_3 + 2L^2),$$

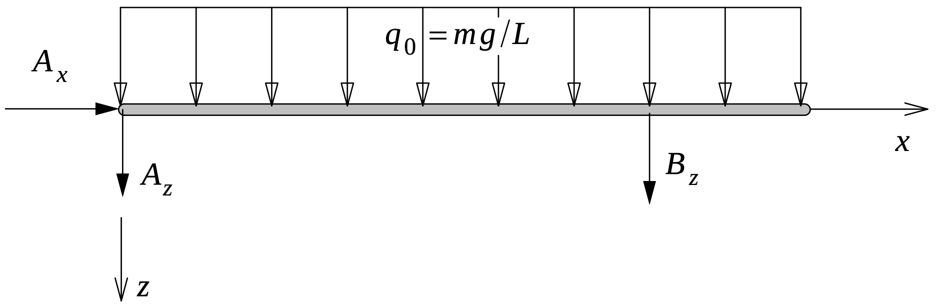
$$M_{by}(x_4) = -\frac{mg\cos\alpha}{L}(\frac{x_4^2}{2} - Lx_4 + \frac{L^2}{2}).$$



Aufgabe 3

Ein Balken (Masse m, Länge L) ist statisch bestimmt gestützt. Er soll an der Stelle $x^* > (L/2)$ durchgesägt werden. Wie muß man den Abstand b für das einwertige Auflager wählen, damit das Biegemoment an der Stelle x^* null wird?





$$A_x = 0,$$
$$A_z + B_z + q_0 L = 0, \qquad B_z = -q_0 \frac{L^2}{2b}, \qquad A_z = q_0 L \left(\frac{L}{2b} - 1\right).$$
$$B_z b + q_0 \frac{L^2}{2} = 0;$$

$0 \le x \le b$:

$$M_{by}(x) = -A_z x - q_o \frac{x^2}{2} = \frac{q_0 L^2}{2}\left(2\xi - \frac{\xi}{\beta} - \xi^2\right), \qquad \left(\xi := \frac{x}{L}, \quad \beta := \frac{b}{L}\right)$$

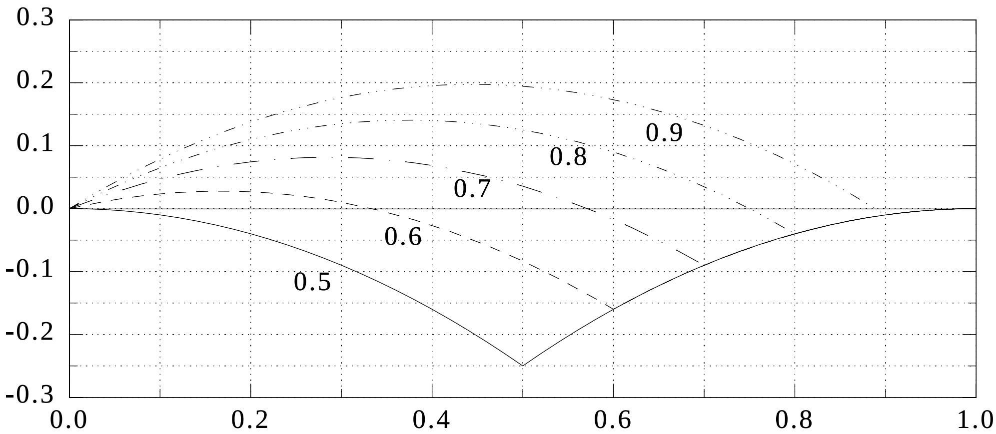
$b \le x \le L$:

$$M_{by}(x) = -q_0 \frac{(L-x)^2}{2} = \frac{q_0 L^2}{2}(-1 + 2\xi - \xi^2).$$

In der folgenden Abbildung sind die Biegemomentfunktionen für verschiedene Werte von β dargestellt.

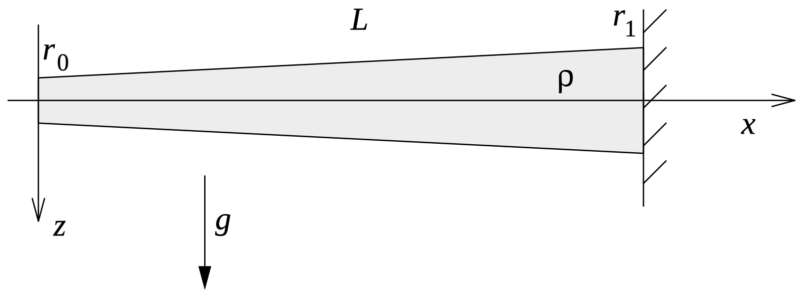
$$M_{by}(x^*) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 2\xi^* - \frac{\xi^*}{\beta} - \xi^{*2} = 0,$$
$$2 - \frac{1}{\beta} - \xi^* = 0, \qquad \rightarrow \qquad \beta = \frac{1}{2 - \xi^*}, \qquad b = \frac{L}{2 - x^*/L}.$$

$$x^* = 0.75L \quad \rightarrow \quad b = 0.8L.$$



Aufgabe 4

Für einen homogenen kreiskegelförmigen Stab der Massendichte ρ berechne man den Querschnittsradius $r(x)$, die Streckenlast $q(x)$ und das Biegemoment $M_b(x)$.



Querschnittsradius:

$$r(x) = r_o + \frac{r_1 - r_o}{L} x =: r_o + \lambda x.$$

Querschnittsfläche:

$$A(x) = \pi(r_o + \lambda x)^2 = \pi(r_o{}^2 + 2\lambda r_o x + \lambda^2 x^2).$$

Streckenlast:

$$q(x) = \rho g\, A(x) = \rho g\, \pi(r_o{}^2 + 2\lambda r_o x + \lambda^2 x^2).$$

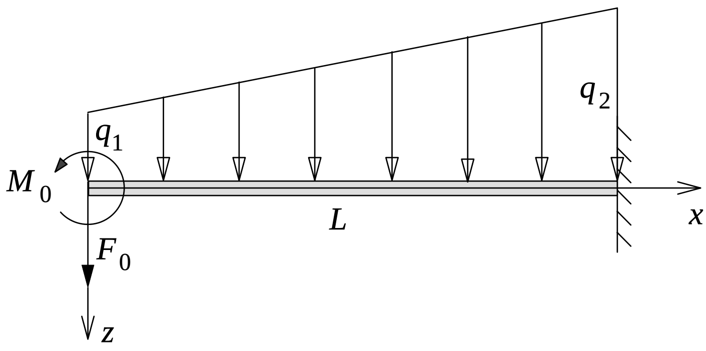
Biegemoment:

$$M_b(x) = -\int_0^x q(\xi)(x-\xi)d\xi = -\rho g\, \pi \int_0^x (r_o{}^2 + 2\lambda r_o \xi + \lambda^2 \xi^2)(x-\xi)d\xi,$$

$$M_b(x) = \rho g\, \pi\{-x\int_0^x (r_o{}^2 + 2\lambda r_o \xi + \lambda^2 \xi^2)d\xi + \int_0^x (r_o{}^2 \xi + 2\lambda r_o \xi^2 + \lambda^2 \xi^3)d\xi\},$$

$$M_b(x) = -\rho g\, \pi(\frac{1}{2} r_o{}^2 x^2 + \frac{1}{3}\lambda r_o x^3 + \frac{1}{12}\lambda^2 x^4).$$

Aufgabe 5



Man berechne mit Hilfe der differentiellen Gleichgewichtsbedingungen

$$Q'(x) = -q(x), \qquad M'_{by}(x) = Q(x)$$

die Querkraft und das Biegemoment.

Streckenlast:

$$q(x) = \frac{q_2 - q_1}{L} x + q_1.$$

Randbedingungen im (negativen) Schnittufer $x = 0$:

$$Q(0) = -F_0, \qquad M_{by}(0) = -M_0.$$

Integration der differentiellen Gleichgewichtsbedingungen:

$$Q'(x) = -\frac{q_2 - q_1}{L} x - q_1,$$

$$M'_{by}(x) = Q(x) = -\frac{q_2 - q_1}{L}\frac{x^2}{2} - q_1 x + C_1,$$

$$M_{by}(x) = -\frac{q_2 - q_1}{L}\frac{x^3}{6} - q_1\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2;$$

Aus den Randbedingungen folgt:

$$C_1 = -F_0, \qquad C_2 = -M_0.$$

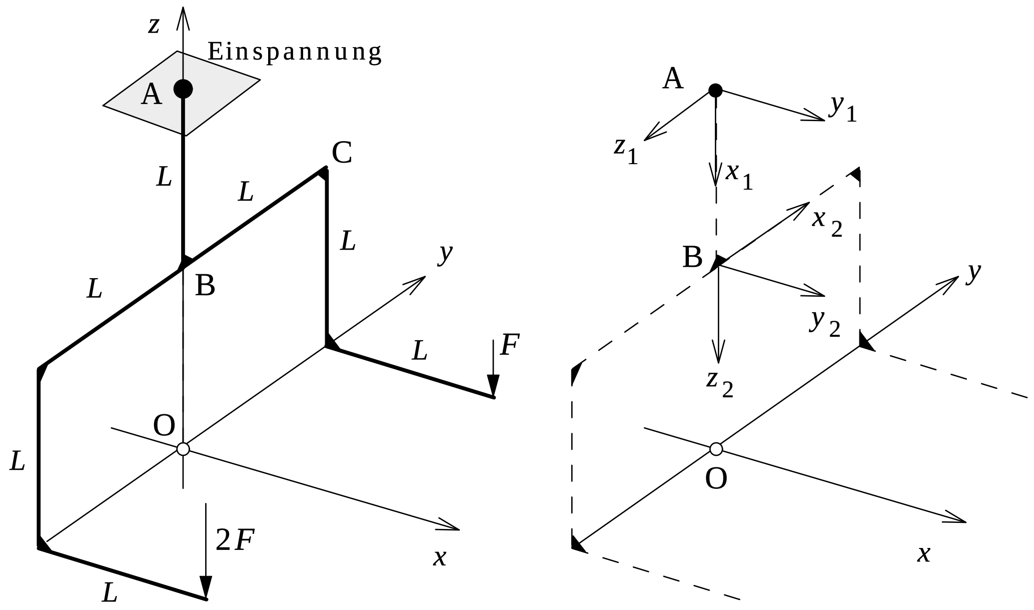
$$Q(x) = -\frac{q_2 - q_1}{L}\frac{x^2}{2} - q_1 x - F_0,$$

$$M_{by}(x) = -\frac{q_2 - q_1}{L}\frac{x^3}{6} - q_1\frac{x^2}{2} - F_0 x - M_0.$$

Schnittlasten im Einspannquerschnitt:

$$Q(L) = -(q_1 + q_2)\frac{L}{2} - F_0, \qquad M_{by}(L) = -q_1\frac{L^2}{3} - q_2\frac{L^2}{6} - F_0 L - M_0.$$

Aufgabe 6



Für den mit zwei Kräften belasteten biegesteifen Rahmen berechne man im x,y,z −System die in der Einspannstelle A auf den Rahmen wirkende Reaktionslast und die Schnittlasten in den Rahmenabschnitten AB und BC in den angegebenen lokalen Koordinatensystemen.

Reaktionslasten in A:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ L \\ -2L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ -L \\ -2L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3F \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -FL \\ -3FL \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Schnittlasten im Abschnitt AB im lokalen Koordinatensystem:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ Q_{y_1} \\ Q_{z_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} M_{t_1} \\ M_{by_1} \\ M_{bz_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -FL \\ 3FL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

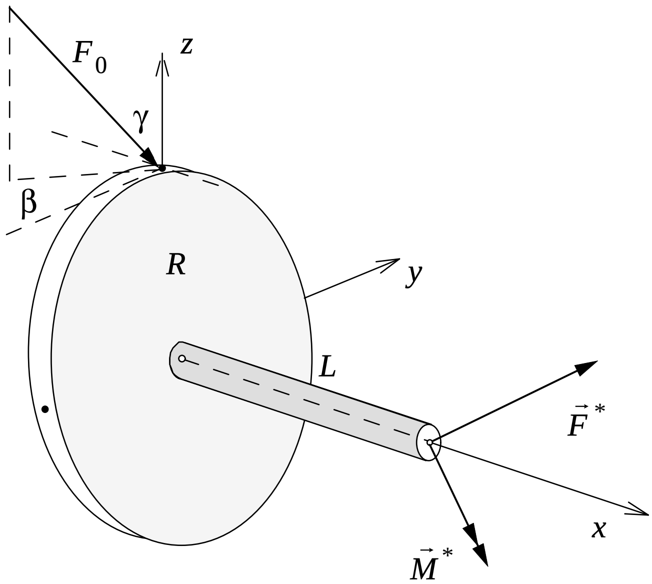
$$\begin{bmatrix} N_1 \\ Q_{y_1} \\ Q_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_{t_1} \\ M_{by_1} \\ M_{bz_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ FL \\ -3FL \end{bmatrix},$$

Schnittlasten im Abschnitt BC im lokalen Koordinatensystem:

$$\begin{bmatrix} -N_2 \\ -Q_{y_2} \\ -Q_{z_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -M_{t_2} \\ -M_{by_2} \\ -M_{bz_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L - x_2 \\ L \\ L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ Q_{y_2} \\ Q_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_{t_2} \\ M_{by_2} \\ M_{bz_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FL \\ -F(L - x_2) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7



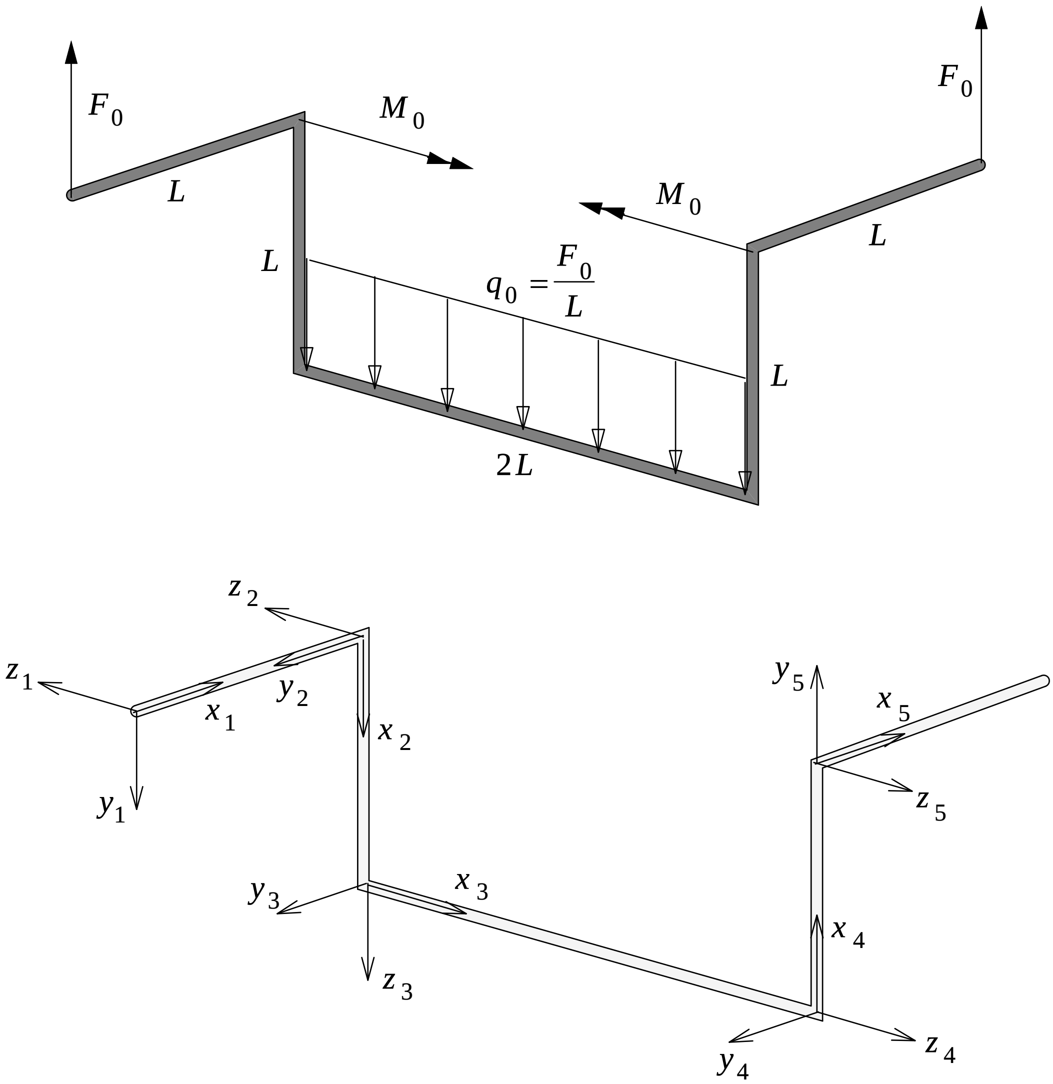
Ein Rad am Ende einer Welle wird durch die Kraft $\vec{F}_o$ belastet. Man berechne die Schnittlastvektoren im Wellenquerschnitt $x = L$.

$$\begin{bmatrix} F_o \sin\gamma \sin\beta \\ F_o \sin\gamma \cos\beta \\ -F_o \cos\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N(L) \\ Q_y(L) \\ Q_z(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_t(L) \\ M_{by}(L) \\ M_{bz}(L) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L \\ 0 \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_o \sin\gamma \sin\beta \\ F_o \sin\gamma \cos\beta \\ -F_o \cos\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} N(L) \\ Q_y(L) \\ Q_z(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_o \sin\gamma \sin\beta \\ -F_o \sin\gamma \cos\beta \\ F_o \cos\gamma \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_t(L) \\ M_{by}(L) \\ M_{bz}(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RF_o \sin\gamma \cos\beta \\ LF_o \cos\gamma - RF_o \sin\gamma \sin\beta \\ LF_o \sin\gamma \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 8

Für den räumlichen Rahmen unter der angegebenen Belastung berechne man die Schnittlasten in den angegebenen lokalen Koordinatensystemen. Die Belastung ist insgesamt ein Gleichgewichtssystem.



In den x_1-, x_2- und x_3-Bereichen werden die Gleichgewichtsbedingungen für die Rahmenteile zwischen dem Querschnitt $x_1 = 0$ und dem betreffenden Querschnitt im Schnittlasten-Koordinatensystem aufgestellt. Für die x_4- und x_5-Bereiche werden die Gleichgewichtsbedingungen für die Rahmenteile zwischen dem betreffenden Querschnitt und dem Endquerschnitt $x_5 = L$ aufgestellt.

Bereich $0 \le x_1 < L$:

$$\begin{bmatrix} N(x_1) \\ Q_y(x_1) \\ Q_z(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -F_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_t(x_1) \\ M_{by}(x_1) \\ M_{bz}(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -F_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} N(x_1) \\ Q_y(x_1) \\ Q_z(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_t(x_1) \\ M_{by}(x_1) \\ M_{bz}(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_0 x_1 \end{bmatrix}.$$

Bereich $0 \le x_2 < L$:

$$\begin{bmatrix} N(x_2) \\ Q_y(x_2) \\ Q_z(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_t(x_2) \\ M_{by}(x_2) \\ M_{bz}(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -F_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} N(x_2) \\ Q_y(x_2) \\ Q_z(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_t(x_2) \\ M_{by}(x_2) \\ M_{bz}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 - F_0 L \end{bmatrix}.$$

Bereich $0 \le x_3 < 2L$:

$$\begin{bmatrix} N(x_3) \\ Q_y(x_3) \\ Q_z(x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_0 + q_0 x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_t(x_3) \\ M_{by}(x_3) \\ M_{bz}(x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_3 \\ L \\ -L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_0 x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} N(x_3) \\ Q_y(x_3) \\ Q_z(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0(1 - x_3/L) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_t(x_3) \\ M_{by}(x_3) \\ M_{bz}(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 L - M_0 \\ F_0(x_3 - x_3^2/(2L)) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bereich $0 \le x_4 < L$:

$$-\begin{bmatrix} N(x_4) \\ Q_y(x_4) \\ Q_z(x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad -\begin{bmatrix} M_t(x_4) \\ M_{by}(x_4) \\ M_{bz}(x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L - x_4 \\ -L \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} N(x_4) \\ Q_y(x_4) \\ Q_z(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_t(x_4) \\ M_{by}(x_4) \\ M_{bz}(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_0 + F_0 L \end{bmatrix}.$$

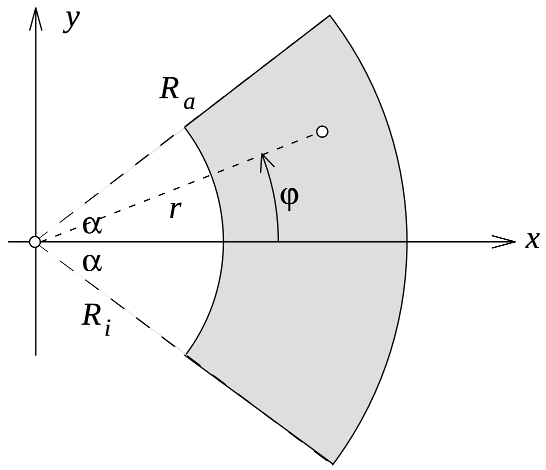
Bereich $0 \le x_5 \le L$:

$$-\begin{bmatrix} N(x_5) \\ Q_y(x_5) \\ Q_z(x_5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad -\begin{bmatrix} M_t(x_5) \\ M_{by}(x_5) \\ M_{bz}(x_5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L - x_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} N(x_5) \\ Q_y(x_5) \\ Q_z(x_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} M_t(x_5) \\ M_{by}(x_5) \\ M_{bz}(x_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0(L - x_5) \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 1

Man berechne die Lage des Schwerpunktes einer symmetrisch zur x-Achse liegenden Kreisringsektorfläche.

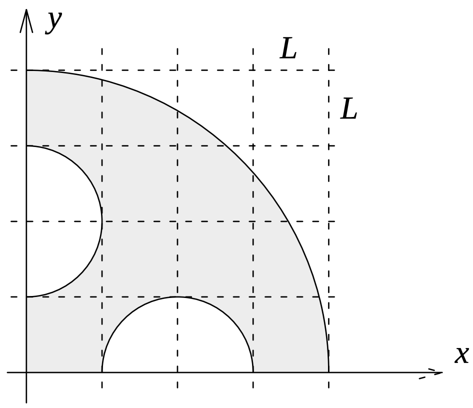


$$A = (R_a{}^2 - R_i{}^2)\alpha,$$

$$x_S := \frac{1}{A}\int_A x\,dA = \frac{1}{A}\int_{R_i}^{R_a}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\varphi\, r\,d\varphi\right)dr, \qquad x_S = \frac{1}{A}\frac{R_a{}^3 - R_i{}^3}{3}2\sin\alpha,$$

$$x_S = \frac{2}{3}\frac{R_a{}^3 - R_i{}^3}{R_a{}^2 - R_i{}^2}\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Aufgabe 2



Man berechne die Koordinaten des Schwerpunktes der dargestellten Fläche.

Fläche:

$$A = \frac{\pi}{4}(4L)^2 - 2\frac{\pi}{2}L^2 = 3\pi L^2.$$

Schwerpunktkoordinaten der Teilflächen:

Viertelkreis:

$$A_{VK} = 4\pi L^2 = \frac{4}{3}A, \qquad x_{SVK} = y_{SVK} = \frac{2}{3}4L\frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{16}{3\pi}L,$$

rechter Halbkreis:

$$A_{HKR} = \frac{\pi}{2}L^2 = \frac{A}{6}, \qquad x_{SHKR} = 2L, \qquad y_{SHKR} = \frac{4}{3\pi}L,$$

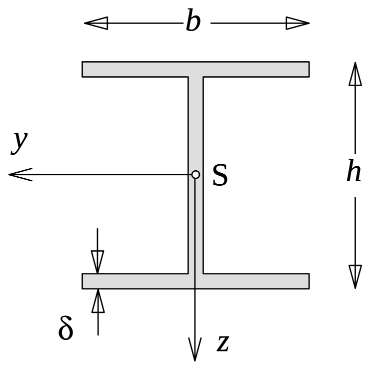
linker Halbkreis:

$$A_{HKL} = \frac{\pi}{2}L^2 = \frac{A}{6}, \qquad x_{SHKL} = \frac{4}{3\pi}L, \qquad y_{SHKL} = 2L.$$

$$x_S = y_S = \frac{1}{A}\left(\frac{4}{3}A\frac{16}{3\pi}L - \frac{A}{6}2L - \frac{A}{6}\frac{4}{3\pi}L\right) = \left(\frac{62}{9\pi} - \frac{1}{3}\right)L = 1{,}859\,L.$$

Aufgabe 3

Man berechne die beiden Flächenträgheitsmomente und die beiden Widerstandsmomente des I-Querschnitts mit konstanter Profilbreite δ.



Flächenträgheitsmomente:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} - 2\frac{(b-\delta)}{2}\frac{(h-2\delta)^3}{12} = \frac{1}{12}[bh^3 - (b-\delta)(h-2\delta)^3],$$

$$I_z = \frac{(h-2\delta)\delta^3}{12} + 2\delta\frac{b^3}{12} = \frac{1}{12}[2\delta b^3 + \delta^3(h-2\delta)].$$

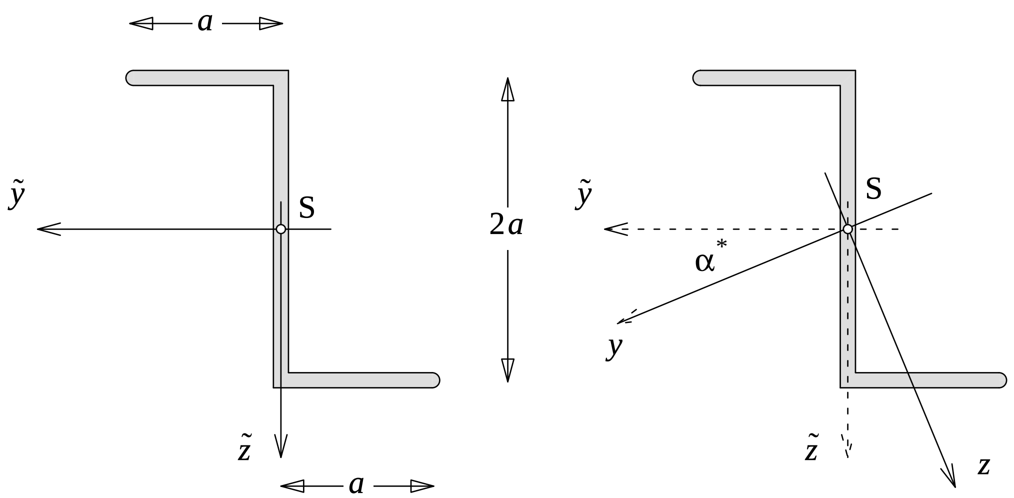
Widerstandsmomente:

$$W_y := \frac{I_y}{h/2} = \frac{1}{6h}[bh^3 - (b-\delta)(h-2\delta)^3],$$

$$W_z := \frac{I_z}{b/2} = \frac{1}{6b}[2\delta b^3 + \delta^3(h-2\delta)].$$

Aufgabe 4

Man berechne für den dünnwandigen Querschnitt (Wandstärke $\delta << a$) eines Stabes die Hauptflächenträgheitsmomente und die Hauptachsenorientierungen.



Hinweis:

In den Integralen für die Flächenmomente zweiter Ordnung setze man auf den Flächenteilen, die parallel zur $\tilde{y}$-Achse sind, $dA = \delta\, d\tilde{y}$ und auf dem Flächenteil parallel zur $\tilde{z}$-Achse $dA = \delta\, d\tilde{z}$.

$$I_{\tilde{y}} = \int_A \tilde{z}^2 dA, \qquad I_{\tilde{z}} = \int_A \tilde{y}^2 dA, \qquad I_{\tilde{y}\tilde{z}} = -\int_A \tilde{y}\tilde{z}\, dA,$$

$$I_{\tilde{y}} = \int_0^a (-a)^2 \delta\, d\tilde{y} + \int_{-a}^a \tilde{z}^2 \delta\, d\tilde{z} + \int_{-a}^0 (a)^2 \delta\, d\tilde{y} = a^3\delta + \frac{2}{3} a^3\delta + a^3\delta = \frac{8}{3} a^3\delta,$$

$$I_{\tilde{z}} = \int_0^a \tilde{y}^2 \delta\, d\tilde{y} + \int_{-a}^a (0)^2 \delta\, d\tilde{z} + \int_{-a}^0 \tilde{y}^2 \delta\, d\tilde{y} = \frac{1}{3} a^3\delta + 0 + \frac{1}{3} a^3\delta = \frac{2}{3} a^3\delta,$$

$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} = -\int_0^a \tilde{y}(-a)\delta\, d\tilde{y} - \int_{-a}^a (0)\tilde{z}\delta\, d\tilde{z} - \int_{-a}^0 \tilde{y}(a)\delta\, d\tilde{y} = \frac{1}{2} a^3\delta - 0 + \frac{1}{2} a^3\delta = a^3\delta.$$

Hauptachsenrichtungen:

$$\alpha^* = \frac{1}{2}\arctan\frac{2I_{\tilde{y}\tilde{z}}}{I_{\tilde{y}} - I_{\tilde{z}}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2a^3\delta}{\frac{8}{3}a^3\delta - \frac{2}{3}a^3\delta} = \frac{1}{2}\arctan(1) = \frac{\pi}{8}.$$

Hauptträgheitsmomente:

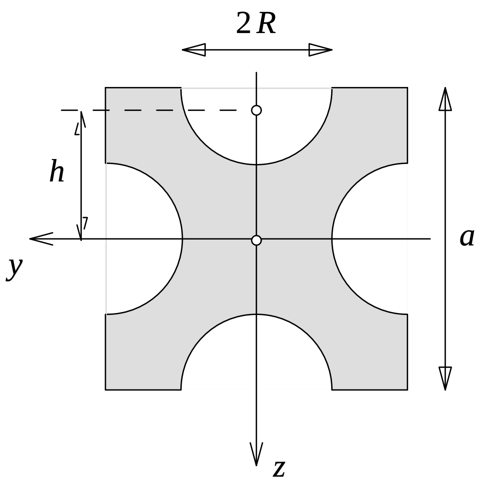
$$I_y = \frac{1}{2}(I_{\tilde{y}} + I_{\tilde{z}}) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_{\tilde{y}} - I_{\tilde{z}})^2 + 4I_{\tilde{y}\tilde{z}}^{\ 2}} = (\frac{5}{3} + \sqrt{2})a^3\delta,$$

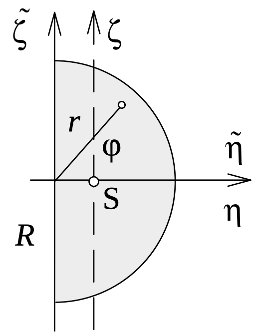
$$I_z = \frac{1}{2}(I_{\tilde{y}} + I_{\tilde{z}}) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_{\tilde{y}} - I_{\tilde{z}})^2 + 4I_{\tilde{y}\tilde{z}}^{\ 2}} = (\frac{5}{3} - \sqrt{2})a^3\delta,$$

$$I_y = 3{,}081 a^3\delta, \qquad I_z = 0{,}252 a^3\delta.$$

Aufgabe 5

Der Querschnitt eines Stabes hat die Form eines Quadrats (Kantenlänge a) mit vier symmetrisch angeordneten, halbkreisförmigen Einschnitten (Radius R). Man berechne die Flächenträgheitsmomente $I_y = I_z$.





$$\tilde{\eta}_S = \frac{4}{3\pi}R, \quad \tilde{\zeta}_S = 0.$$

Flächenträgheitsmomente des Halbkreises im $\tilde{\eta}\tilde{\zeta}$ –Bezugssystem:

$$I_{\tilde{\eta}} = \int_A \tilde{\zeta}^2 dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^R r^2 \sin^2\varphi r dr d\varphi = \frac{\pi}{8}R^4, \qquad I_{\tilde{\zeta}} = \int_A \tilde{\eta}^2 dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^R r^2 \cos^2\varphi r dr d\varphi = \frac{\pi}{8}R^4;$$

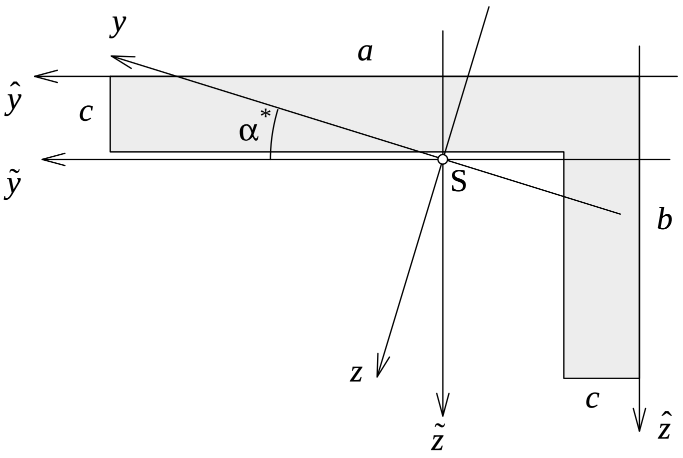
und im dazu parallelen $\eta\zeta$ –Hauptachsensystem durch S:

$$I_\eta = I_{\tilde{\eta}}, \qquad I_\zeta = I_{\tilde{\zeta}} - A\tilde{\eta}_S^{\ 2} = \frac{\pi}{8}R^4 - \frac{\pi}{2}R^2(\frac{4}{3\pi}R)^2 = (\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi})R^4.$$

Flächenträgheitsmomente des Querschnitts:

$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12} - 2\{\frac{\pi}{8}R^4 + (\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi})R^4 + \frac{\pi}{2}R^2(\frac{a}{2} - \frac{4}{3\pi}R)^2\}.$$

Aufgabe 6



Man berechne für den dargestellten Querschnitt die Hauptflächenträgheitsmomente und die Orientierung α^* des Hauptachsensystems.

Querschnittsfläche:

$$A = ac + c(b-c).$$

Schwerpunktskoordinaten:

$$\hat{y}_S = \frac{1}{A}\int_A \hat{y}\,dA = \frac{1}{A}\left\{\int_0^c\left(\int_0^a \hat{y}\,d\hat{y}\right)d\hat{z} + \int_c^b\left(\int_0^c \hat{y}\,d\hat{y}\right)d\hat{z}\right\} = \frac{1}{A}\left\{\frac{1}{2}a^2c + \frac{1}{2}c^2(b-c)\right\} = \frac{a^2+bc-c^2}{2(a+b-c)},$$

$$\hat{z}_S = \frac{1}{A}\int_A \hat{z}\,dA = \frac{1}{A}\left\{\int_0^c\left(\int_0^a \hat{z}\,d\hat{y}\right)d\hat{z} + \int_c^b\left(\int_0^c \hat{z}\,d\hat{y}\right)d\hat{z}\right\} = \frac{1}{A}\left\{\frac{1}{2}c^2a + \frac{1}{2}c(b^2-c^2)\right\} = \frac{b^2+ac-c^2}{2(a+b-c)},$$

Flächenmomente 2. Ordnung im $\hat{y}\hat{z}$-Koordinatensystem:

$$I_{\hat{y}} = \int_A \hat{z}^2 dA = \left\{\int_0^c\left(\int_0^a \hat{z}^2 d\hat{y}\right)d\hat{z} + \int_c^b\left(\int_0^c \hat{z}^2 d\hat{y}\right)d\hat{z}\right\} = \frac{1}{3}c^3a + \frac{1}{3}c(b^3-c^3),$$

$$I_{\hat{z}} = \int_A \hat{y}^2 dA = \left\{\int_0^c\left(\int_0^a \hat{y}^2 d\hat{y}\right)d\hat{z} + \int_c^b\left(\int_0^c \hat{y}^2 d\hat{y}\right)d\hat{z}\right\} = \frac{1}{3}a^3c + \frac{1}{3}c^3(b-c),$$

$$I_{\hat{y}\hat{z}} = -\int_A \hat{y}\hat{z}\,dA = -\left\{\int_0^c\left(\int_0^a \hat{y}\hat{z}\,d\hat{y}\right)d\hat{z} + \int_c^b\left(\int_0^c \hat{y}\hat{z}\,d\hat{y}\right)d\hat{z}\right\} = -\frac{1}{4}a^2c^2 - \frac{1}{4}c^2(b^2-c^2).$$

Flächenmomente 2. Ordnung im $\tilde{y}\tilde{z}$-Koordinatensystem:
(STEINERscher Satz)

$$I_{\tilde{y}} = I_{\hat{y}} - A\hat{z}_S^{\,2}, \qquad I_{\tilde{z}} = I_{\hat{z}} - A\hat{y}_S^{\,2}, \qquad I_{\tilde{y}\tilde{z}} = I_{\hat{y}\hat{z}} + A\hat{y}_S\hat{z}_S.$$

Orientierung des Hauptachsensystems:

$$\alpha^* = \frac{1}{2}\arctan\frac{2I_{\tilde{y}\tilde{z}}}{I_{\tilde{y}} - I_{\tilde{z}}}.$$

Hauptträgheitsmomente:

$$I_y = \frac{I_{\tilde{y}} + I_{\tilde{z}}}{2} + \frac{I_{\tilde{y}} - I_{\tilde{z}}}{2}\cos(2\alpha^*) + I_{\tilde{y}\tilde{z}}\sin(2\alpha^*),$$

$$I_z = \frac{I_{\tilde{y}} + I_{\tilde{z}}}{2} - \frac{I_{\tilde{y}} - I_{\tilde{z}}}{2}\cos(2\alpha^*) - I_{\tilde{y}\tilde{z}}\sin(2\alpha^*).$$

Spezielle Werte:

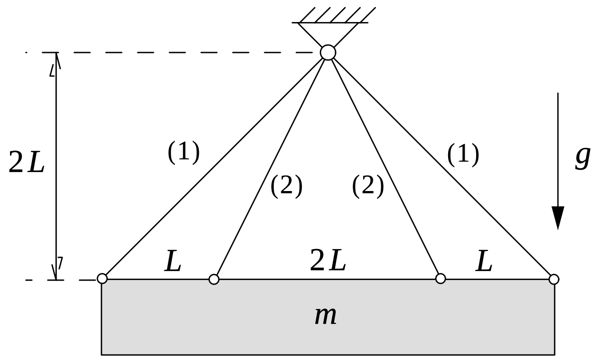
$$a = 7\,\text{cm}, \qquad b = 4\,\text{cm}, \qquad c = 1\,\text{cm}.$$

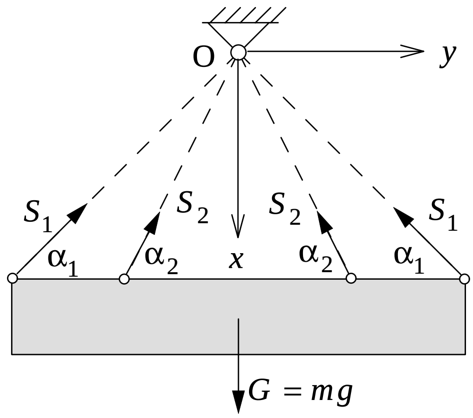
$$\hat{y}_S = 2{,}6\,\text{cm} \qquad \hat{z}_S = 1{,}1\,\text{cm};$$

$$\alpha^* = -17{,}3^\circ, \qquad I_y = 7{,}31\,\text{cm}^4, \qquad I_z = 51{,}66\,\text{cm}^4.$$

Aufgabe 1

Eine homogene starre Platte (Masse m) wird an vier symmetrisch angeordneten Seilen im Schwerkraftfeld aufgehängt. Alle Seile haben die gleiche Dehnsteifigkeit EA; die angegebenen Abmessungen gelten für den unbelasteten Zustand. Unter der Voraussetzung, daß die Vertikalverschiebung u der Platte sehr klein ist im Vergleich mit den Längen der unbelasteten Seile, berechne man u und die Seilkräfte.





Wegen der vorliegenden Symmetrie bezüglich der x-Achse genügt es, wenn wir die geometrischen Beziehungen nur für die rechte Seite formulieren.

Längen der unbelasteten Seile:

$$L_1 = 2\sqrt{2}L, \qquad L_2 = \sqrt{5}L.$$

Richtungsvektoren der unbelasteten Seile:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{L_1}(2L\vec{e}_x + 2L\vec{e}_y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y = \sin\alpha_1\vec{e}_x + \cos\alpha_1\vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{L_2}(2L\vec{e}_x + L\vec{e}_y) = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y = \sin\alpha_2\vec{e}_x + \cos\alpha_2\vec{e}_y.$$

Längenänderungen der Seile, wenn die Platte um u in x-Richtung verschoben wird und $u \ll L_i$ gilt:

$$\Delta L_1 = u\vec{e}_x \cdot \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}u, \qquad \Delta L_2 = u\vec{e}_x \cdot \vec{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}u.$$

Dehnungen der Seile und Seilkräfte:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L_1}{L_1} = \frac{1}{4}\frac{u}{L}, \qquad S_1 = \sigma_1 A = EA\varepsilon_1 = \frac{1}{4}\frac{EA}{L}u,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L_2}{L_2} = \frac{2}{5}\frac{u}{L}; \qquad S_2 = \sigma_2 A = EA\varepsilon_2 = \frac{2}{5}\frac{EA}{L}u.$$

Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

$$G - 2S_1 \sin\alpha_1 - 2S_2 \sin\alpha_2 = 0, \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{2}S_1 + \frac{4}{\sqrt{5}} S_2 = G.$$

Berechnung der Vertikalverschiebung u aus der Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{EA}{L}u + \frac{8}{5\sqrt{5}}\frac{EA}{L}u = G, \qquad \rightarrow \qquad u = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{8}{5\sqrt{5}}}\frac{GL}{EA} = 0.935\frac{GL}{EA}.$$

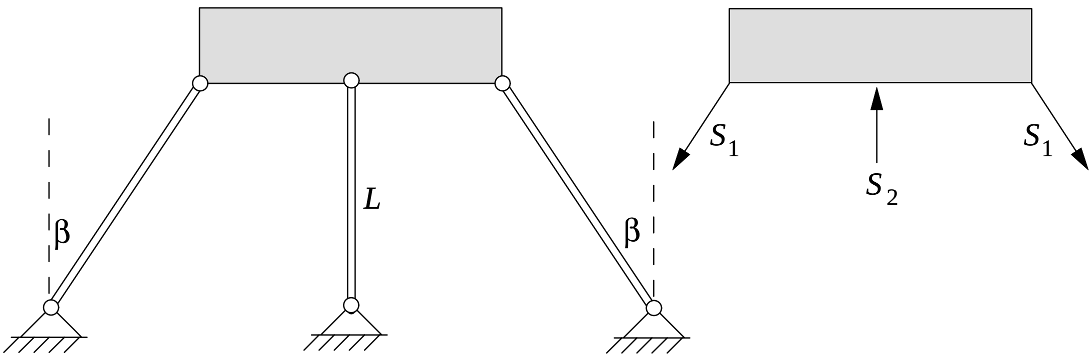
Berechnung der Seilkräfte:

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{32}{5\sqrt{5}}} G = 0.234G, \qquad S_2 = \frac{2}{\frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{8}{\sqrt{5}}} G = 0.374G.$$

Hinweis: Bei Annahme starrer Seile ist das System statisch unbestimmt.

Aufgabe 2

Eine starre Platte ist mit drei Stäben aus gleichem Material verbunden. Wie groß sind die Stabkräfte, wenn der mittlere Stab um ΔT erwärmt wird?



Die Außenstäbe werden auf Zug, der mittlere auf Druck beansprucht.

Kräftegleichgewicht:

$$S_2 - 2S_1 \cos\beta = 0.$$

Wenn sich der mittlere Stab um ΔL verlängert, ändert sich die Länge der Seitenstäbe um

$$\Delta L_1 = \Delta L \cos\beta.$$

Aus dem Stoffgesetz für die Stäbe

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\Delta T$$

folgt:

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{S_2}{EA} + \alpha\Delta T, \qquad \frac{\Delta L_1}{L_1} = \frac{S_1}{EA}; \qquad (L_1 = L/\cos\beta)$$

$$S_2 = -EA\frac{\Delta L}{L} + \alpha EA\,\Delta T, \qquad S_1 = EA\cos^2\beta\frac{\Delta L}{L}.$$

Mit Hilfe der obigen Gleichgewichtsbedingung läßt sich nun ΔL berechnen:

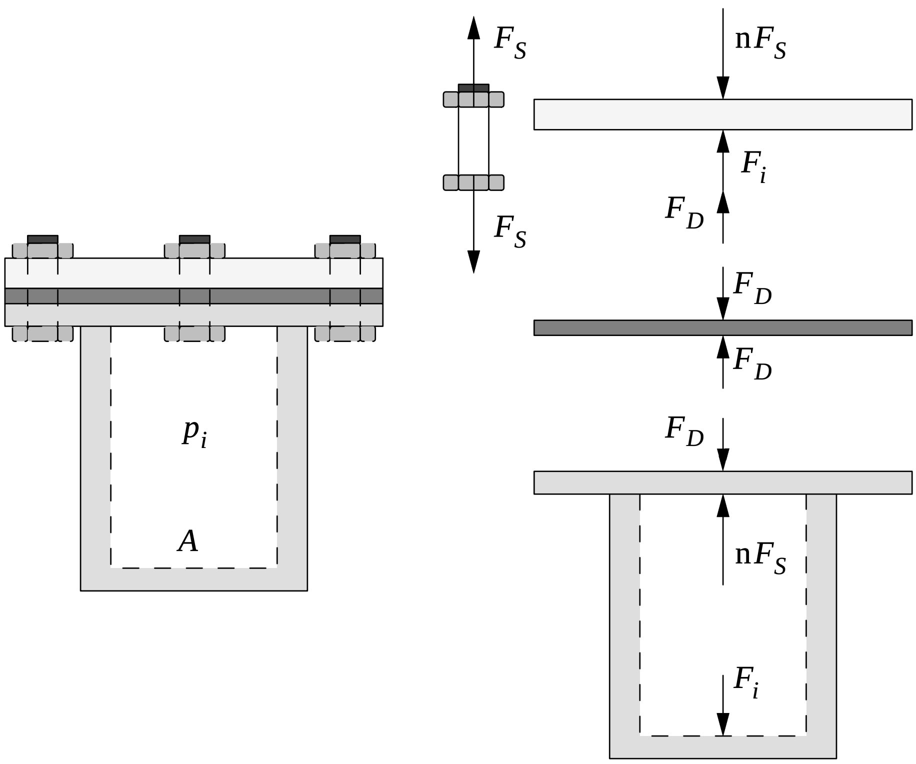
$$\Delta L = \frac{L\alpha\Delta T}{1+2\cos^3\beta}.$$

Damit erhalten wir schließlich die Stabkräfte:

$$S_2 = \alpha EA(1-\frac{1}{1+2\cos^3\beta})\Delta T, \qquad S_1 = \alpha EA\frac{\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}\Delta T.$$

Aufgabe 3

Der Deckel eines kreiszylindrischen Behälters (Innenquerschnitt A) wird mit n gleichmäßig verteilten Dehnschrauben (Ganghöhe h, Federsteifigkeit c_S) befestigt. Zwischen Deckel und Behälter liegt eine Dichtung (Federsteifigkeit c_D). Der Deckel und der Behälter werden als starr angenommen. Man berechne die auf die Dehnschrauben und die Dichtung wirkenden Kräfte, wenn die Schraubenmuttern um den Winkel α angezogen werden und der Behälter unter dem Innendruck p_i steht.



Bezeichnungen:

F_S: Zugkraft in einer angezogenen Dehnschraube,

F_i: Druckkraft auf den Deckel und den Boden des Behälters,

$$F_i = p_i A.$$

F_D: Druckraft auf den Dichtungsring.

Kräftegleichgewichtsbedingungen für den Deckel und den Behälter:

$$-\mathrm{n}F_S + F_D + F_i = 0, \qquad \mathrm{n}F_S - F_D - F_i = 0,$$

$$\rightarrow \qquad F_D = \mathrm{n}F_S - F_i.$$

Kinematische Bedingung für die Längenänderung ΔL_S der Schraube und die Dikkenänderung Δd_D der Dichtung, wenn die Muttern der Dehnschrauben um den Winkel α angezogen werden:

$$\Delta d_D = \frac{h}{2\pi}\alpha - \Delta L_S.$$

Mit den Federgesetzen

$$\Delta d_D = \frac{F_D}{c_D}, \qquad \Delta L_S = \frac{F_S}{c_S},$$

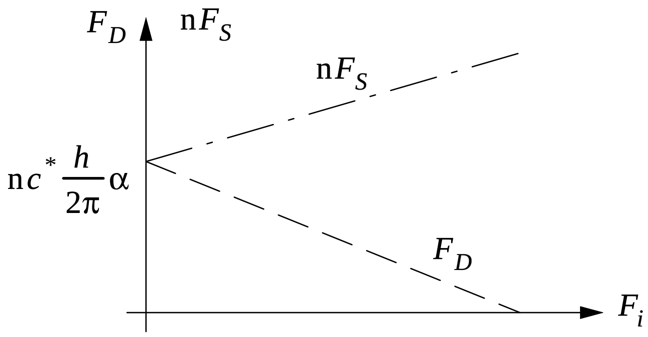
gilt dann

$$\frac{F_D}{c_D} + \frac{F_S}{c_S} = \frac{h}{2\pi}\alpha, \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{n}F_S - F_i}{c_D} + \frac{F_S}{c_S} = \frac{h}{2\pi}\alpha,$$

$$F_S = c^*\left(\frac{h}{2\pi}\alpha + \frac{F_i}{c_D}\right), \qquad c^* = \frac{c_D c_S}{c_D + \mathrm{n}c_S}.$$

Auf die Dichtung wirkt dann die Druckkraft

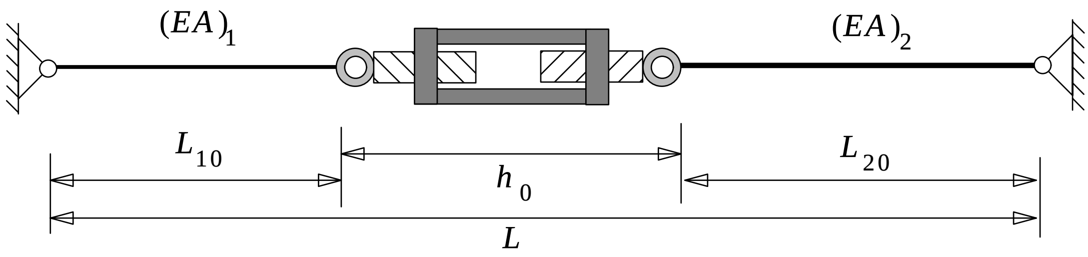
$$F_D = \mathrm{n}F_S - F_i = \mathrm{n}c^*\left(\frac{h}{2\pi}\alpha - \frac{F_i}{\mathrm{n}c_S}\right).$$



Die Dichtung funktioniert für

$$F_i < \mathrm{n}c_S \frac{h}{2\pi}\alpha.$$

Aufgabe 4



Zwischen zwei Drähten (Elastizitätsmodul E_i, Querschnittsfläche A_i, Länge im unbelasteten Zustand L_{i0}) ($i=1{,}2$) ist ein Spannschloss angebracht, das im unbelasteten Ausgangszustand die Länge h_0 hat. Wird es um den Winkel α gedreht, so erhält es die Länge

$$h(\alpha) = h_0 - 2\frac{\Delta h}{2\pi}\alpha = h_0 - \frac{\Delta h}{\pi}\alpha,$$

wenn Δh die Ganghöhe der beiden Spannschrauben ist. Man berechne die Verlängerungen $\Delta L_i(\alpha)$ der beiden Drähte und die in den Drähten wirkende Zugkraft $S(\alpha)$.

Für die Zugkraft gilt

$$S(\alpha) = \sigma_1 A_1 = \varepsilon_1 (EA)_1 = \frac{\Delta L_1}{L_{10}}(EA)_1, \qquad S(\alpha) = \sigma_2 A_2 = \varepsilon_2 (EA)_2 = \frac{\Delta L_2}{L_{20}}(EA)_2,$$

und mit den Federkonstanten der beiden Drähte

$$c_i := \frac{(EA)_i}{L_{i0}}$$

erhalten wir

$$\Delta L_1 c_1 - \Delta L_2 c_2 = 0.$$

Die zweite Gleichung für die Verlängerungen $\Delta L_i(\alpha)$ ergibt sich aus der kinematischen Zwangsbedingung

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = \frac{\Delta h}{\pi}\alpha.$$

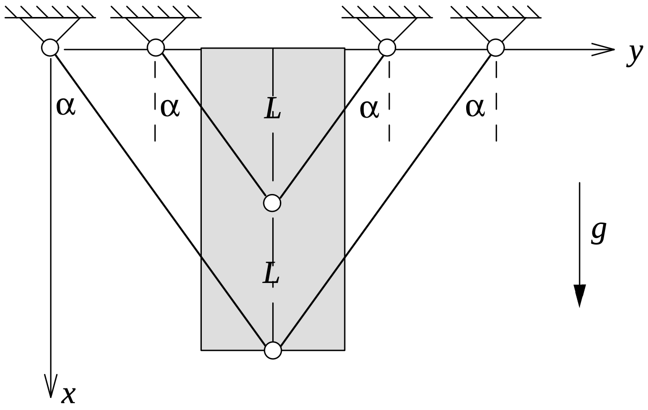
Es wird also

$$\Delta L_1(\alpha) = \frac{\Delta h}{\pi}\alpha\frac{c_2}{c_1 + c_2}, \qquad \Delta L_2(\alpha) = \frac{\Delta h}{\pi}\alpha\frac{c_1}{c_1 + c_2},$$

$$S(\alpha) = \frac{\Delta h}{\pi}\alpha\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

Aufgabe 5

Ein starrer Körper der Masse m hängt im Schwerkraftfeld an vier symmetrisch angeordneten elastischen Seilen (Querschnitt A, Elastizitätsmodul E). Man berechne die vertikale Verschiebung u des starren Körpers und die Seilkräfte.

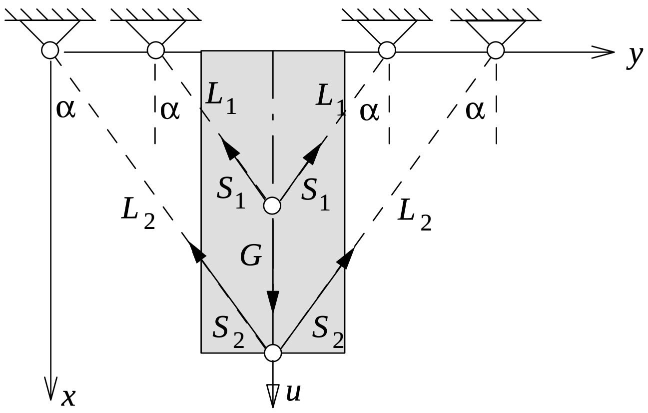


Richtungsvektor der linken Seile:

$$\vec{e} = \cos\alpha\, \vec{e}_x + \sin\alpha\, \vec{e}_y .$$

Seillängen:

$$L_1 = \frac{L}{\cos\alpha}, \quad L_2 = \frac{2L}{\cos\alpha}.$$



Seildehnungen und Seilkräfte:

$$\varepsilon_1 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{e}}{L_1} = \frac{u\cos\alpha}{L_1} = \frac{u}{L}\cos^2\alpha, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{e}}{L_2} = \frac{u\cos\alpha}{L_2} = \frac{u}{2L}\cos^2\alpha,$$

$$S_1 = EA\varepsilon_1, \qquad S_2 = EA\varepsilon_2.$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$2S_1\cos\alpha + 2S_2\cos\alpha - G = 0, \qquad \to \qquad S_1 + S_2 = \frac{G}{2\cos\alpha};$$

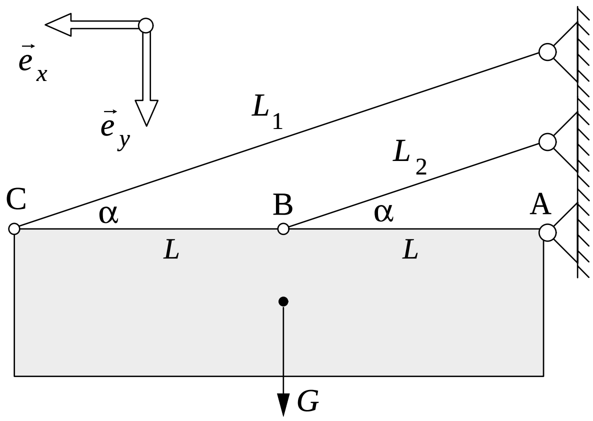
Berechnung der Verschiebung u:

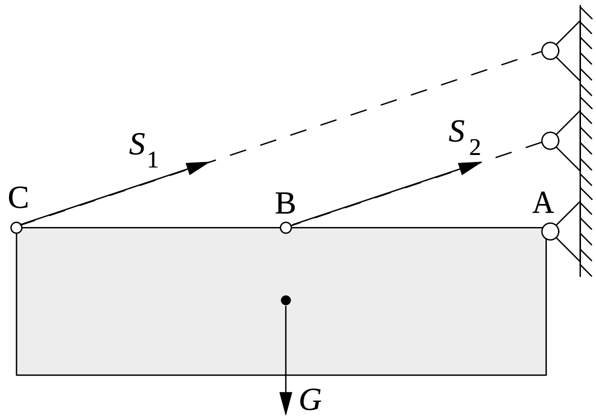
$$EA\frac{u}{L}\cos^2\alpha + EA\frac{u}{2L}\cos^2\alpha = \frac{G}{2\cos\alpha}, \qquad \rightarrow \qquad u = \frac{1}{3}\frac{GL}{EA\cos^3\alpha}.$$

$$S_1 = \frac{1}{3}\frac{G}{\cos\alpha}, \qquad S_2 = \frac{1}{6}\frac{G}{\cos\alpha}.$$

Aufgabe 6

Ein Schild (Gewichtskraft G) ist in A gelenkig gelagert und an zwei parallelen elastischen Seilen (Dehnsteifigkeit EA) aufgehängt. Man berechne den kleinen Drehwinkel $\varphi \ll 1$ des Schildes um den Punkt A und die beiden Seilkräfte.





Momentengleichgewicht bezogen auf den Punkt A (näherungsweise bei noch nicht gedrehtem Schild):

$$GL - S_1\sin\alpha\, 2L - S_2\sin\alpha\, L = 0, \qquad \rightarrow \qquad 2S_1 + S_2 = \frac{G}{\sin\alpha}.$$

Verschiebungen der Punkte B und C in vertikaler Richtung infolge der Drehung des Schildes um den Winkel φ:

$$\vec{u}_C = 2L\,\varphi\vec{e}_y, \qquad \vec{u}_B = L\,\varphi\vec{e}_y; \qquad\qquad (\sin\varphi \approx \varphi)$$

Richtungsvektor der Seile und Verschiebungen der Punkte B und C in Seilrichtung:

$$\vec{e} = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y, \qquad \begin{aligned} u_1 &= \vec{u}_C\cdot\vec{e} = 2L\,\varphi\sin\alpha, \\ u_2 &= \vec{u}_B\cdot\vec{e} = L\,\varphi\sin\alpha. \end{aligned}$$

Längen der unbelasteten Seile und Seildehnungen:

$$L_1 = \frac{2L}{\cos\alpha}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{u_1}{L_1} = \varphi\sin\alpha\cos\alpha, \qquad L_2 = \frac{L}{\cos\alpha}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{u_2}{L_2} = \varphi\sin\alpha\cos\alpha.$$

Seilkräfte:

$$S_1 = EA\varepsilon_1 = EA\varphi \sin\alpha \cos\alpha, \qquad S_2 = EA\varepsilon_2 = EA\varphi \sin\alpha \cos\alpha.$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung erhalten wir eine Gleichung für den Drehwinkel φ:

$$2S_1 + S_2 = \frac{G}{\sin\alpha}, \qquad \rightarrow \qquad 3EA\varphi \sin\alpha \cos\alpha = \frac{G}{\sin\alpha},$$

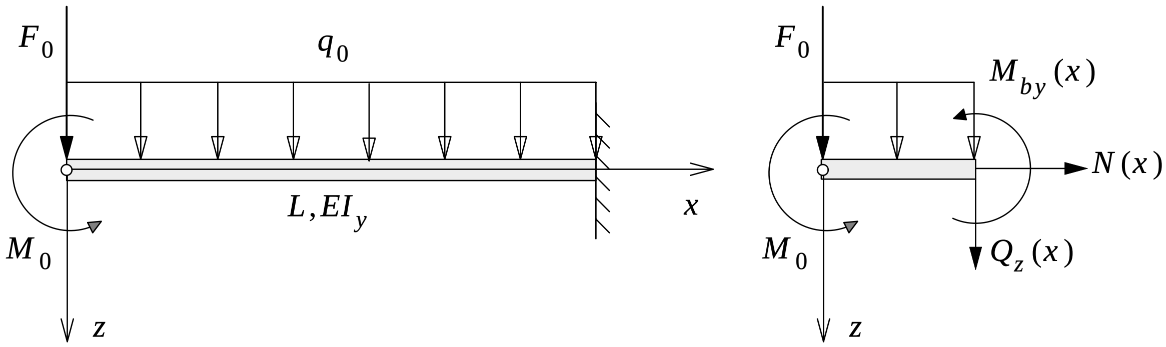
$$\varphi = \frac{G}{3EA\sin^2\alpha \cos\alpha}.$$

Seilkräfte:

$$S_1 = S_2 = \frac{G}{3\sin\alpha}.$$

Aufgabe 1

Für den einseitig eingespannten Balken (Länge L, Biegesteifigkeit EI_y) der durch eine konstante Streckenlast q_0 und im Querschnitt $x=0$ durch eine Kraft F_0 und ein Moment M_0 belastet ist, berechne man die Biegelinie.



Schnittlasten:

$$N(x) = 0,$$
$$Q_z(x) = -F_0 - q_0 x,$$
$$M_{by}(x) = -M_0 - F_0 x - \frac{1}{2} q_0 x^2.$$

Differentialgleichung für die Biegelinie und Randbedingungen:

$$EI_y w''(x) = M_0 + F_0 x + \frac{1}{2} q_0 x^2, \qquad w'(L) = 0, \qquad w(L) = 0.$$

Berechnung der Biegelinie:

$$EI_y w'(x) = M_0 x + \frac{1}{2} F_0 x^2 + \frac{1}{6} q_0 x^3 + C_1,$$
$$EI_y w(x) = \frac{1}{2} M_0 x^2 + \frac{1}{6} F_0 x^3 + \frac{1}{24} q_0 x^4 + C_1 x + C_2;$$

$$C_1 = -M_0 L - \frac{1}{2} F_0 L^2 - \frac{1}{6} q_0 L^3,$$

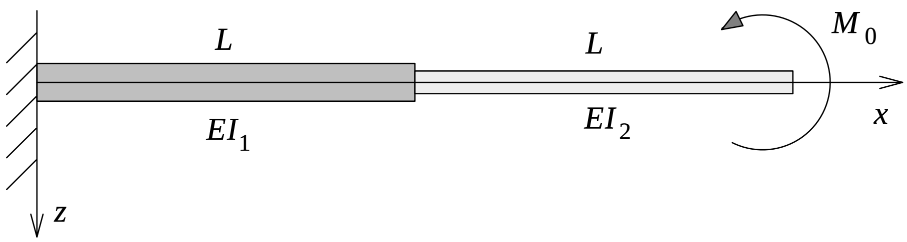
$$C_2 = -\frac{1}{2} M_0 L^2 - \frac{1}{6} F_0 L^3 - \frac{1}{24} q_0 L^4 - C_1 L = \frac{1}{2} M_0 L^2 + \frac{1}{3} F_0 L^3 + \frac{1}{8} q_0 L^4.$$

$$w(x) = \frac{1}{EI_y} \left\{ M_0 \left(\frac{x^2}{2} - Lx + \frac{L^2}{2} \right) + F_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{L^2 x}{2} + \frac{L^3}{3} \right) + q_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{L^3 x}{6} + \frac{L^4}{8} \right) \right\}.$$

Durchbiegung im Querschnitt $x = 0$:

$$w(0) = \frac{1}{EI_y} \left\{ M_0 \frac{L^2}{2} + F_0 \frac{L^3}{3} + q_0 \frac{L^4}{8} \right\}.$$

Aufgabe 2



Für den aus zwei Abschnitten mit unterschiedlicher Biegesteifigkeit bestehenden Balken berechne man die Biegelinie bei der angegebenen Momentenbelastung im Querschnitt $x = 2L$.

Biegemoment:

$$M_{by}(x) = M_0, \qquad 0 \le x \le 2L.$$

Differentialgleichungen für die Biegelinie:

$$w_1''(x) = -\frac{M_0}{EI_1}, \qquad 0 \le x < L,$$

$$w_2''(x) = -\frac{M_0}{EI_2}, \qquad L \le x \le 2L.$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$w_1(0) = 0, \qquad w_1'(0) = 0, \qquad w_1(L) = w_2(L), \qquad w_1'(L) = w_2'(L).$$

Lösungen der Differentialgleichungen:

$$w_1'(x) = -\frac{M_0}{EI_1}x + C_1, \qquad w_1(x) = -\frac{M_0}{2EI_1}x^2 + C_1 x + C_2,$$

$$w_2'(x) = -\frac{M_0}{EI_2}x + C_3, \qquad w_2(x) = -\frac{M_0}{2EI_2}x^2 + C_3 x + C_4.$$

Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$w_1'(0) = 0, \qquad \rightarrow \quad C_1 = 0,$$

$$w_1(0) = 0, \qquad \rightarrow \quad C_2 = 0,$$

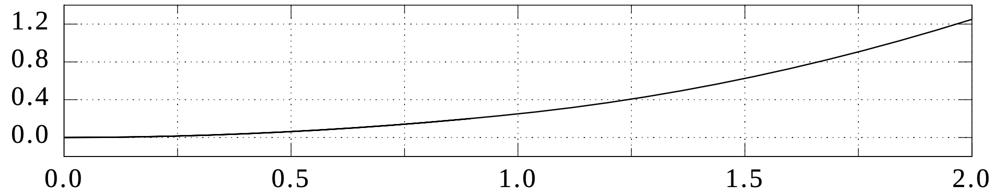
$$w_1'(L) = w_2'(L), \qquad \rightarrow \quad -\frac{M_0}{EI_1}L = -\frac{M_0}{EI_2}L + C_3,$$

$$w_1(L) = w_2(L), \qquad \rightarrow \quad -\frac{M_0}{2EI_1}L^2 = -\frac{M_0}{2EI_2}L^2 + C_3 L + C_4;$$

$$C_3 = \frac{M_0 L}{E}\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right), \qquad C_4 = \frac{M_0 L^2}{2E}\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right).$$

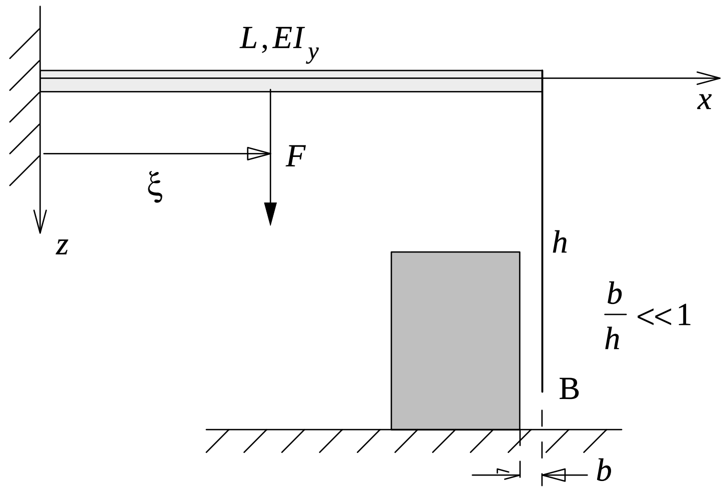
$$w(x)=\begin{cases} -\dfrac{M_0}{2EI_1}x^2 & 0 \le x < L \\ -\dfrac{M_0}{2EI_2}x^2+C_3x+C_4 & L \le x \le 2L. \end{cases}$$

$$I_1 = 2I_2, \qquad \to \qquad C_3 = \frac{1}{2}\frac{M_0 L}{EI_2}, \qquad C_4 = -\frac{1}{4}\frac{M_0 L^2}{EI_2},$$



Biegelinie

Aufgabe 3



Ein Balken (Länge L, Biegesteifigkeit EI_y) wird durch eine Kraft im Abstand ξ vom Einspannquerschnitt belastet. Im Endquerschnitt $x = L$ ist ein starrer Zeiger (Länge h) mit dem Balken verbunden. Für welchen Wert von ξ berührt der Zeigerendpunkt B gerade die senkrechte Wand, wenn er im unbelasteten Zustand den Abstand b hat?

Für den Neigungswinkel α der Biegelinie ab der Lastangriffsstelle gilt

$$\alpha = w'(\xi) \qquad \text{für} \quad \xi \le x \le L,$$

und es muß

$$h\alpha = b$$

werden. Im Bereich $0 \le x \le \xi$ gilt:

$$M_{by}(x) = -F(\xi - x),$$

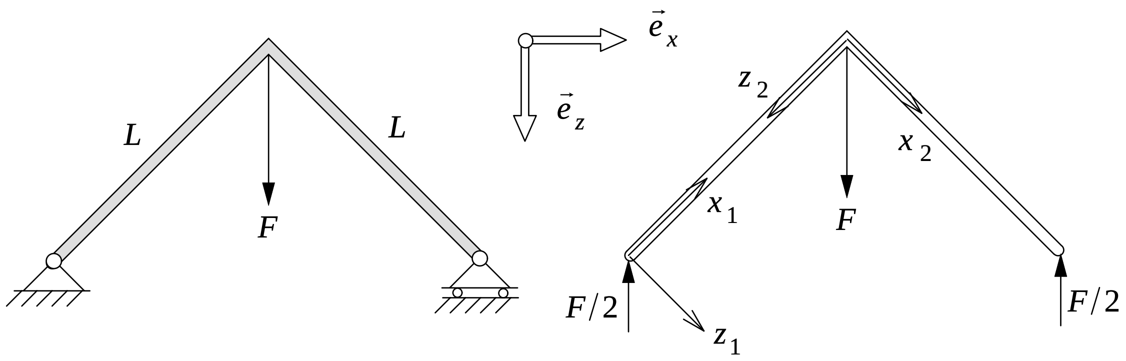
$$EI_y w''(x) = F(\xi - x),$$

$$EI_y w'(x) = F(\xi x - \frac{x^2}{2}) \quad \to \quad w'(\xi) = \frac{F\xi^2}{2EI_y}.$$

$$\frac{b}{h} = \frac{F\xi^2}{2EI_y} \quad \to \quad \xi = \sqrt{\frac{2bEI_y}{hF}}.$$

Aufgabe 4

Für den rechtwinkligen biegesteifen Rahmen berechne man die Verschiebungen längs der Rahmenachse.



$$\vec{e}_{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z), \qquad \vec{e}_{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_x + \vec{e}_z).$$

Schnittlasten:

$$N(x_1) = -\frac{F}{2\sqrt{2}} =: -F^*, \qquad N(x_2) = -F^*,$$

$$M_{by}(x_1) = F^* x_1; \qquad M_{by}(x_2) = F^*(L - x_2).$$

Differentialgleichungen für die Verschiebungen längs und quer zur Rahmenachse:

$$EAu_1' = -F^*, \qquad EIw_1'' = -F^* x_1,$$

$$EAu_1 = -F^* x_1 + C_1; \qquad EIw_1' = -\frac{F^*}{2} x_1^2 + C_2,$$

$$EIw_1 = -\frac{F^*}{6} x_1^3 + C_2 x_1 + C_3;$$

$$EAu_2' = -F^*, \qquad EIw_2'' = F^* x_2 - F^* L,$$

$$EAu_2 = -F^* x_2 + C_4; \qquad EIw_2' = \frac{F^*}{2} x_2^2 - F^* L x_2 + C_5,$$

$$EIw_2 = \frac{F^*}{6} x_2^3 - \frac{F^*}{2} L x_2^2 + C_5 x_2 + C_6.$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$u_1(0)=0,$$
$$w_1(0)=0,$$
$$w_1'(L)=w_2'(0),$$
$$u_1(L)\vec{e}_{x_1}+w_1(L)\vec{e}_{z_1}=u_2(0)\vec{e}_{x_2}+w_2(0)\vec{e}_{z_2}, \quad\rightarrow\quad \begin{cases} u_1(L)=-w_2(0), \\ w_1(L)=u_2(0), \end{cases}$$
$$\{u_2(L)\vec{e}_{x_2}+w_2(L)\vec{e}_{z_2}\}\cdot\vec{e}_z=0 \qquad\rightarrow\qquad u_2(L)+w_2(L)=0.$$

Mit dem Trägheitsradius des Querschnitts

$$i:=\sqrt{I/A}$$

wird:

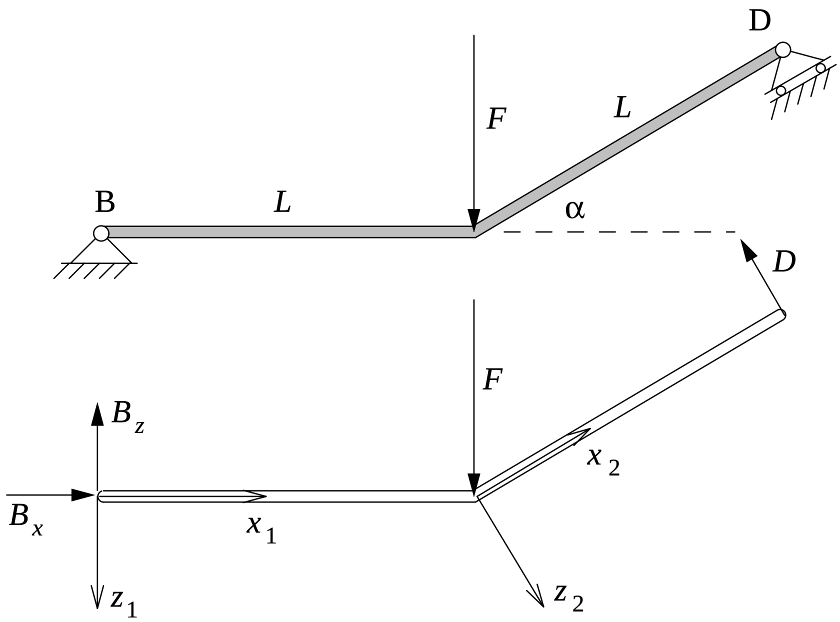
$$C_1=0,\quad C_2=\frac{F^*L^2}{2},\quad C_3=0,\quad C_4=\frac{F^*L^3}{3i^2},\quad C_5=0,\quad C_6=F^*Li^2.$$

Verschiebung des einwertigen Auflagers in x-Richtung:

$$f=\vec{e}_x\cdot(u_2(L)\vec{e}_{x_2}+w_2(L)\vec{e}_{z_2})=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_2(L)-w_2(L)).$$

Aufgabe 5

Für den biegesteifen Rahmen (Dehnsteifigkeit EA, Biegesteifigkeit EI) berechne man die Biegelinie.



Auflagerkräfte:

$$B_x - D\sin\alpha = 0,$$
$$B_z - F + D\cos\alpha = 0, \qquad B_z = D = \frac{F}{1+\cos\alpha}, \qquad B_x = \frac{F\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$
$$B_z L - DL = 0;$$

Schnittlasten:

$$N(x_1) = -B_x, \qquad N(x_2) = 0,$$
$$M_{by}(x_1) = B_z x_1, \qquad M_{by}(x_2) = D(L - x_2).$$

Differentialgleichungen für die Verschiebungen längs und quer zur Rahmenachse:

$$EAu_1'(x_1) = -B_x, \qquad EI_y w_1''(x_1) = -B_z x_1,$$
$$EAu_1(x_1) = -B_x x_1 + C_1, \qquad EI_y w_1'(x_1) = -\frac{1}{2} B_z {x_1}^2 + C_2,$$
$$EI_y w_1(x_1) = -\frac{1}{6} B_z {x_1}^3 + C_2 x_1 + C_3,$$

$$EAu_2'(x_2) = 0, \qquad EI_y w_2''(x_2) = D(x_2 - L),$$
$$EAu_2(x_2) = C_4, \qquad EI_y w_2'(x_2) = D(\frac{1}{2} {x_2}^2 - Lx_2) + C_5,$$
$$EI_y w_2(x_2) = D(\frac{1}{6} {x_2}^3 - \frac{1}{2} L{x_2}^2) + C_5 x_2 + C_6.$$

Randbedingungen:

$$u_1(0) = 0, \qquad w_1(0) = 0, \qquad w_2(L) = 0;$$

Übergangsbedingungen für die biegesteife Ecke:

Gleiche Querschnittsdrehungen:

$$w_1'(L) = w_2'(0),$$

gleiche Schwerpunktsverschiebungen:

$$u_1(L)\vec{e}_{x_1} + w_1(L)\vec{e}_{z_1} = u_1(0)\vec{e}_{x_2} + w_2(0)\vec{e}_{z_2},$$

Mit

$$\vec{e}_{x_2} = \cos\alpha\,\vec{e}_{x_1} - \sin\alpha\,\vec{e}_{z_1}, \qquad \vec{e}_{z_2} = \sin\alpha\,\vec{e}_{x_1} + \cos\alpha\,\vec{e}_{z_1},$$

entstehen aus der vektoriellen Stetigkeitsbedingung für die Verschiebungen die beiden Bedingungen

$$u_1(L) = u_2(0)\cos\alpha + w_2(0)\sin\alpha,$$
$$w_1(L) = -u_2(0)\sin\alpha + w_2(0)\cos\alpha.$$

Zur Bestimmung der sechs Integrationskonstanten $C_1, C_2, ..., C_6$ stehen nun sechs

Gleichungen zur Verfügung:

$$C_1 = 0,$$
$$C_3 = 0,$$
$$-D\frac{1}{3}L^3 + C_5 L + C_6 = 0,$$
$$-\frac{1}{2}B_z L^2 + C_2 = C_5,$$
$$-\frac{1}{EA}B_x L = \frac{\cos\alpha}{EA}C_4 + \frac{\sin\alpha}{EI_y}C_6,$$
$$\frac{1}{EI_y}(-\frac{1}{6}B_z L^3 + C_2 L) = -\frac{\sin\alpha}{EA}C_4 + \frac{\cos\alpha}{EI_y}C_6.$$

Wir definieren den Trägheitsradius des Querschnitts bezogen auf die zur y-Achse parallele Trägheitshauptachse:

$$i_y := \sqrt{I_y / A}, \qquad I_y =: A i_y{}^2$$

Mit $D = B_z$ erhalten wir dann für die noch nicht bestimmten Konstanten das folgende Gleichungssystem

$$C_5 L + C_6 = B_z \frac{1}{3}L^3,$$
$$C_2 - C_5 = B_z \frac{1}{2}L^2,$$
$$C_4 i_y{}^2 \cos\alpha + C_6 \sin\alpha = -B_x i_y{}^2 L,$$
$$C_2 L + C_4 i_y{}^2 \sin\alpha - C_6 \cos\alpha = B_z \frac{1}{6}L^3.$$

Wir eliminieren zunächst C_5 und C_4 und erhalten die Gleichungen

$$C_2 L + C_6 = B_z \frac{5}{6}L^3,$$
$$-C_2 L\cos\alpha + C_6 = -B_x i_y{}^2 L\sin\alpha - B_z \frac{1}{6}L^3\cos\alpha,$$

mit den Lösungen

$$C_2 = \frac{B_x i_y{}^2 \sin\alpha + B_z(5+\cos\alpha)\frac{1}{6}L^2}{1+\cos\alpha},$$

$$C_6 = B_z \frac{5}{6}L^3 - C_2 L,$$

und dann wird

$$C_5 = C_2 - B_z \frac{1}{2} L^2,$$

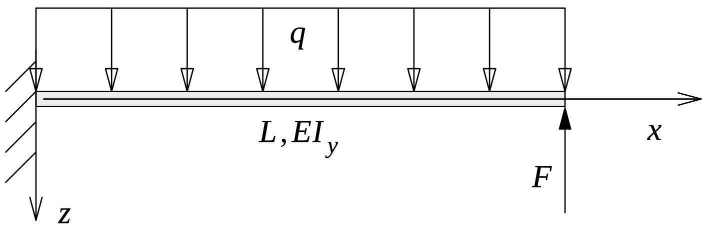
$$C_4 = \frac{1}{i_y^{\,2}}(-C_2 L \sin\alpha - B_x i_y^{\,2} L \cos\alpha + B_z \frac{1}{6} L^3 \sin\alpha).$$

Der Verschiebungsvektor des Lastangriffspunktes lautet

$$\vec{u} = u_2(0)\vec{e}_{x_2} + w_2(0)\vec{e}_{z_2} = \frac{C_4}{EA}\vec{e}_{x_2} + \frac{C_6}{EI_y}\vec{e}_{z_2}.$$

Aufgabe 6

Für den in $x = 0$ eingespannten Balken (Länge L, Biegesteifigkeit EI) berechne man die konstante Streckenlast q und die in $x = L$ wirkende Kraft F so, daß sich der Querschnitt $x = L$ um d verschiebt und dabei nicht dreht.



Berechnung des Biegemoments aus der Gleichgewichtsbedingung am rechten Balkenabschnitt $x \le \xi \le L$:

$$M_{by}(x) + \int_x^L (\xi - x) q \, d\xi - F(L - x) = 0,$$

$$M_{by}(x) = -q \frac{(L-x)^2}{2} + F(L - x).$$

Differentialgleichung für die Biegelinie:

$$EI_y w''(x) = q \frac{(x-L)^2}{2} + F(x - L),$$

$$EI_y w'(x) = q \frac{(x-L)^3}{6} + F \frac{(x-L)^2}{2} + C_1,$$

$$EI_y w(x) = q \frac{(x-L)^4}{24} + F \frac{(x-L)^3}{6} + C_1(x - L) + C_2.$$

Randbedingungen:

$$w'(x = L) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0,$$

$$w(x = L) = d \quad \rightarrow \quad C_2 = EI_y d,$$

$$w'(x=0)=0 \quad \rightarrow \quad -q\frac{L^3}{6}+F\frac{L^2}{2}=0 \quad \rightarrow \quad F=\frac{qL}{3},$$

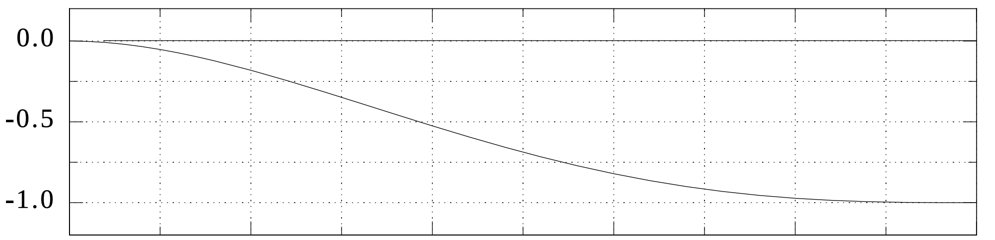
$$w(x=0)=0 \quad \rightarrow \quad q\frac{L^4}{24}-F\frac{L^3}{6}+C_2=0 \quad \rightarrow \quad C_2=\frac{qL^4}{72},$$

Erforderliche Belastung:

$$EI_y d=\frac{qL^4}{72} \quad \rightarrow \quad q=72\frac{EI_y d}{L^4}, \quad F=24\frac{EI_y d}{L^3}.$$

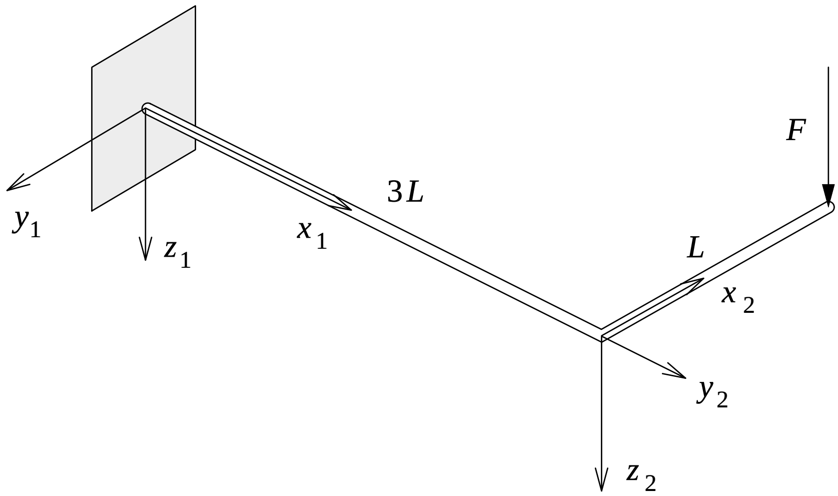
Biegelinie:

$$w(x)=d\{3(\frac{x}{L}-1)^4+4(\frac{x}{L}-1)^3+1\}.$$



Biegelinie

Aufgabe 7



Für den im Querschnitt $x_1=0$ eingespannten räumlichen Rahmen mit Vollkreisquerschnitt berechne man die Biegelinie und die Durchbiegung unter der Last F. Gegeben sind:

$$F=1\text{N}, \qquad L=100\,\text{mm}, \qquad R=4\,\text{mm}$$

$$E=2{,}1\cdot 10^5\,\text{N}/\text{mm}^2, \qquad G=\frac{3E}{8}.$$

Flächenträgheitsmomente:

$$I_p = \frac{\pi}{2} R^4 = 2I = 4{,}021 \cdot 10^2 \,\mathrm{mm}^4,$$

Biege- und Torsionssteifigkeit:

$$EI = 4{,}222 \cdot 10^7 \,\mathrm{Nmm}^2, \qquad GI_p = 3{,}167 \cdot 10^7 \,\mathrm{Nmm}^2$$

Schnittlasten:

$$N(x_1) = 0, \qquad N(x_2) = 0,$$
$$M_{by}(x_1) = -F(3L - x_1), \qquad M_{by}(x_2) = -F(L - x_2),$$
$$M_t(x_1) = -FL; \qquad M_t(x_2) = 0.$$

Differentialgleichungen für die Verschiebungen in z-Richtung und die Drehwinkel um die Rahmenachse (Stoffgesetze):

$$EIw_1'' = F(3L - x_1), \qquad EIw_2'' = F(L - x_2),$$
$$GI_p \vartheta_1' = -FL, \qquad GI_p \vartheta_2' = 0.$$

$$w_1' = \frac{F}{EI}(3Lx_1 - \frac{x_1^{\,2}}{2}) + C_1, \qquad w_2' = \frac{F}{EI}(Lx_2 - \frac{x_2^{\,2}}{2}) + C_4,$$
$$w_1 = \frac{F}{EI}(\frac{3Lx_1^{\,2}}{2} - \frac{x_1^{\,3}}{6}) + C_1 x_1 + C_2; \qquad w_2 = \frac{F}{EI}(\frac{Lx_2^{\,2}}{2} - \frac{x_2^{\,3}}{6}) + C_4 x_2 + C_5;$$

$$\vartheta_1 = -\frac{FL}{GI_p} x_1 + C_3, \qquad \vartheta_2 = C_6.$$

Randbedingungen in der Einspannung:

$$w_1(0) = 0, \qquad w_1'(0) = 0, \qquad \vartheta_1(0) = 0;$$

Übergangsbedingungen:

$$w_1(3L) = w_2(0), \qquad \vartheta_1(3L) = -w_2'(0), \qquad w_1'(3L) = \vartheta_2(0).$$

Daraus folgt:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = 0.$$
$$\frac{9FL^3}{EI} = C_5, \qquad \frac{3FL^2}{GI_p} = C_4, \qquad \frac{9FL^2}{2EI} = C_6.$$

Mit den oben angegebenen speziellen Werten für die Material- und Querschnittsdaten erhalten wir:

$$\vartheta_1(3L) = -\frac{3FL^2}{GI_p} = -9,474\cdot 10^{-4}, \qquad \vartheta_2(L) = \frac{9FL^2}{2EI} = 1,066\cdot 10^{-3},$$

$$w_1(3L) = \frac{9FL^3}{EI} = 2,132\cdot 10^{-1}\,\mathrm{mm}, \qquad w_2(L) = \frac{40FL^3}{3EI} = 3,158\cdot 10^{-1}\,\mathrm{mm}.$$

Größte Normalspannung im Rahmen (im Querschnitt $x_1 = 0$):

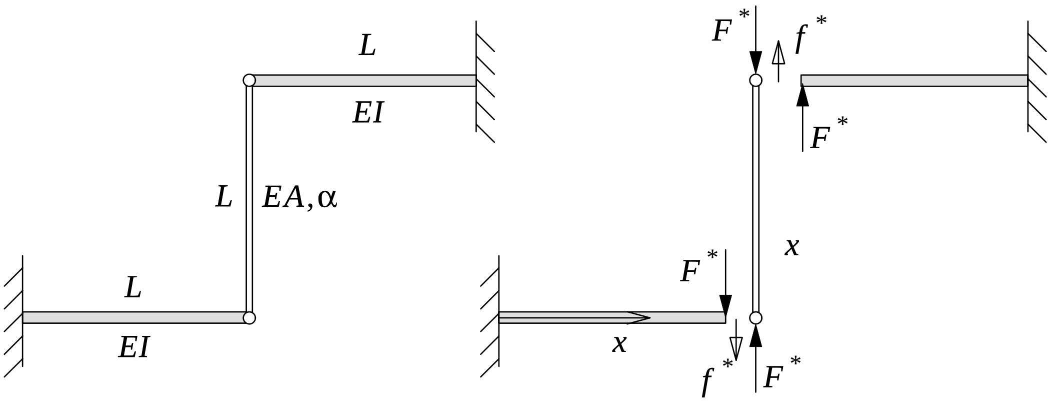
$$\sigma_{xx\,\max} = \frac{12FL}{\pi R^3} = 5,97\,\mathrm{N/mm^2}.$$

Größte Schubspannung im Rahmen (in allen Querschnitten $x_1 = const$):

$$\sigma_{x\varphi\max} = \frac{2FL}{\pi R^3} = 9,947\cdot 10^{-1}\,\mathrm{N/mm^2}.$$

Aufgabe 8

Ein Stab BC (Länge L, Dehnsteifigkeit EA, Wärmeausdehnungskoeffizient α) ist in B und C mit zwei eingespannten Balken (Länge L, Biegesteifigkeit EI) gelenkig verbunden. Bei Raumtemperatur sei das System spannungsfrei. Man berechne die Biegemomente in den Einspannquerschnitten, wenn der Stab um ΔT erwärmt wird.



Biegemoment im Balken:

$$M_{by} = -F^*(L - x).$$

Berechnung der Biegelinie:

$$EIw'' = F^*(L - x), \qquad w' = \frac{F^*}{EI}(Lx - \frac{1}{2}x^2), \qquad w = \frac{F^*}{EI}(\frac{1}{2}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3);$$

$$f^* := w(L) = \frac{F^* L^3}{3EI}.$$

Dehnung des Stabes:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\,\Delta T, \qquad \rightarrow \qquad \frac{2f^*}{L} = -\frac{F^*}{EA} + \alpha\,\Delta T.$$

Verträglichkeit der Verschiebungen:

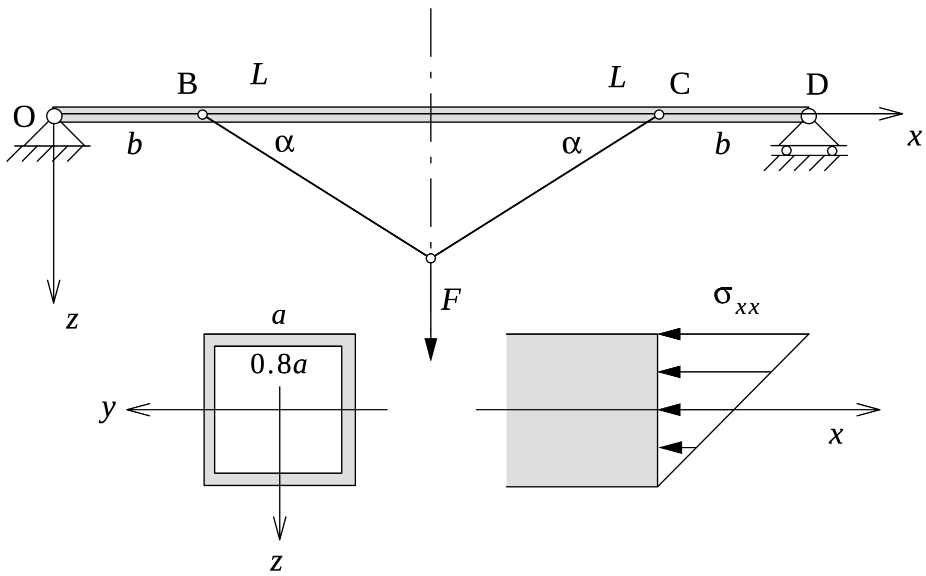
$$\frac{2}{L}\frac{F^* L^3}{3EI} = -\frac{F^*}{EA} + \alpha\,\Delta T, \qquad \rightarrow \qquad F^* = \frac{\alpha\,\Delta T}{\dfrac{2L^2}{3EI} + \dfrac{1}{EA}} = \frac{EA\,\alpha\,\Delta T}{1 + \dfrac{2AL^2}{3I}}.$$

Biegemoment in der Einspannung:

$$M_{by}(L) = -\frac{EAL\,\alpha\,\Delta T}{1 + \dfrac{2AL^2}{3I}}.$$

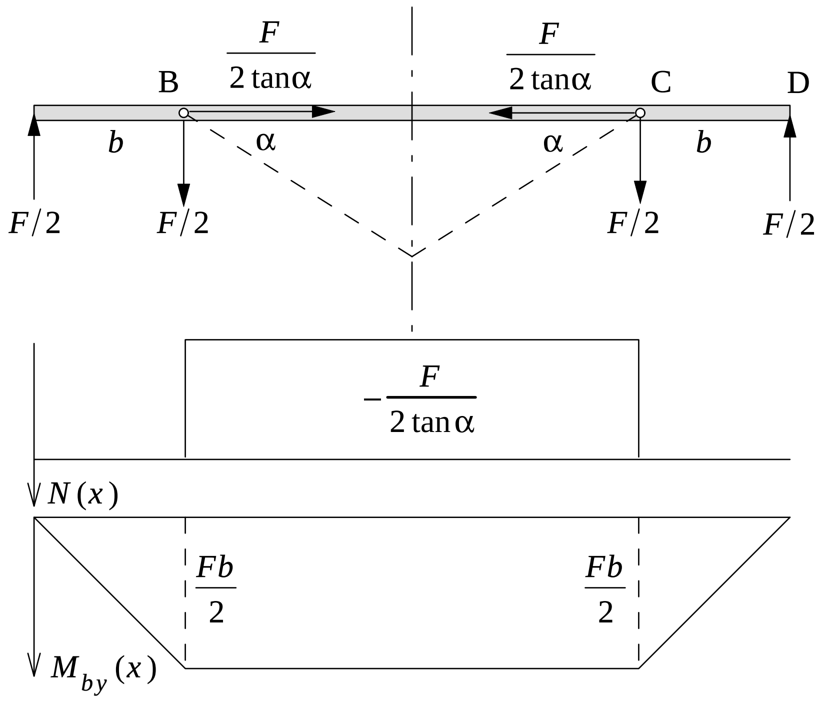
Aufgabe 9

Ein Balken (Länge $2L$, quadratischer Hohlquerschnitt) ist in den Punkten O und D statisch bestimmt gestützt und wird über zwei symmetrisch angeordnete Seile durch eine Einzelkraft F belastet. Welche Bedingung muß der Winkel α erfüllen, damit die Normalspannungen in den Querschnitten zwischen den Punkten B und C wie angegeben verteilt sind?



Seilkräfte:

$$2T\sin\alpha = F \qquad \rightarrow \qquad T = \frac{F}{2\sin\alpha}.$$



Spannungsverteilung im Bereich BC:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{by}}{I_y} z + \frac{N}{A} = \frac{Fb}{2I_y} z - \frac{F}{2A\tan\alpha}.$$

$$\frac{Fb}{2I_y}\frac{a}{2} - \frac{F}{2A\tan\alpha} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \tan\alpha = \frac{2I_y}{abA}$$

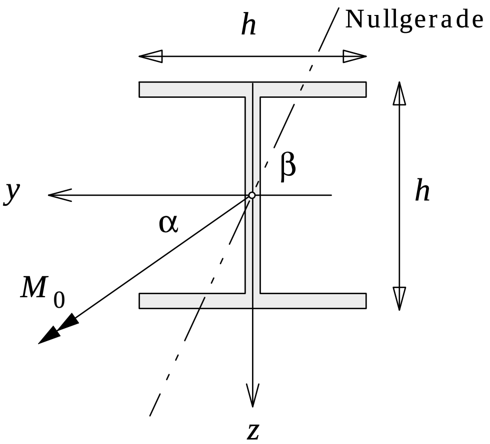
$$I_y = a^4 \frac{1-0{,}8^4}{12} = 0{,}049\,a^4, \qquad A = a^2(1-0{,}8^2) = 0{,}36\,a^2$$

$$\tan\alpha = 0{,}272\frac{a}{b}.$$

Aufgabe 10

Der I-Querschnitt mit der Wanddicke $\delta \ll h$ ist mit dem Biegemoment M_0 beansprucht. Man berechne die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z, den Neigungswinkel der Nullgeraden und die größte Zugspannung im Querschnitt.

Hinweis: Bei der Berechnung der Flächenträgheitsmomente sollen Terme der Größenordnung $h\delta^3$ vernachlässigt werden.



Flächenträgheitsmomente:

$$I_y = \frac{1}{12}\delta h^3 + 2\delta h\,\frac{h^2}{4} = \frac{7}{12}\delta h^3, \qquad I_z = \frac{2}{12}\delta h^3.$$

Normalspannungen:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_0 \cos\alpha}{I_y} z - \frac{M_0 \sin\alpha}{I_z} y = \frac{12 M_0}{\delta h^3}\left(\frac{\cos\alpha}{7} z - \frac{\sin\alpha}{2} y\right),$$

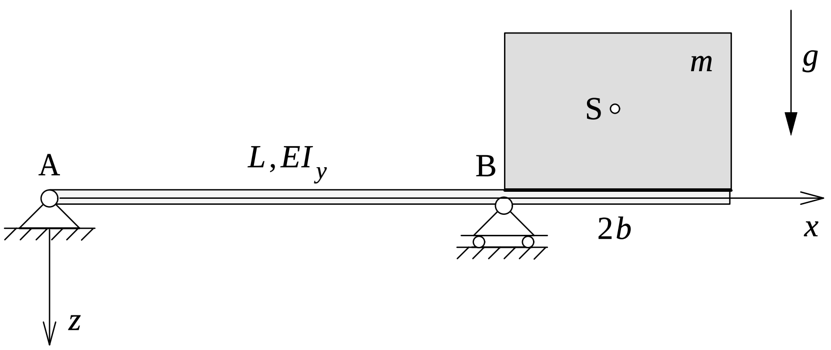
$$\text{Nullgerade: } z = \frac{7}{2}\tan\alpha\, y = \tan\beta\, y$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{7}{2}\tan\alpha\right).$$

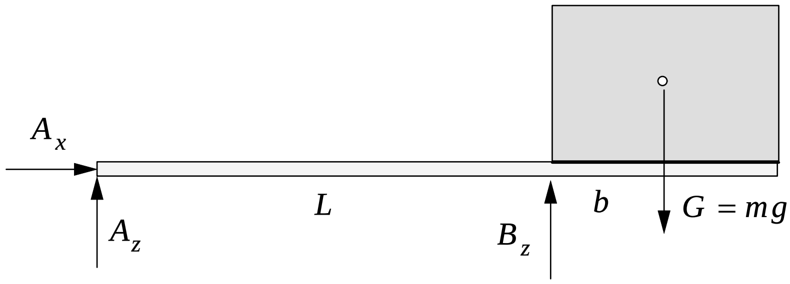
größte Zugspannung:

$$\sigma_{xx}\Big|_{(y=-\frac{h}{2},\ z=\frac{h}{2})} = \frac{6 M_o}{\delta h^2}\left(\frac{\cos\alpha}{7} + \frac{\sin\alpha}{2}\right).$$

Aufgabe 11



Ein Balken (Länge $L+2b$, Biegesteifigkeit EI_y) liegt statisch bestimmt auf zwei Stützen (Abstand L) und ist im überhängenden Teil *fest* mit einem *starren* Körper (Masse m) verbunden. Man berechne die Biegelinie und den Neigungswinkel $\alpha = w'(L)$ des starren Körpers in der Gleichgewichtslage.



Gleichgewichtsbedingungen in der undeformierten Lage (Theorie 1. Ordnung):

$$A_x = 0, \qquad A_z + B_z - G = 0, \qquad B_z L - G(L+b) = 0;$$

$$B_z = G(1+\frac{b}{L}), \quad A_z = -G\frac{b}{L}.$$

Berechnung der Biegelinie im Bereich $0 \le x \le L$:

$$EI_y w''(x) = -M_{by}(x), \qquad M_{by}(x) = A_z x,$$

$$EI_y w'(x) = -A_z \frac{x^2}{2} + C_1, \qquad EI_y w(x) = -A_z \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

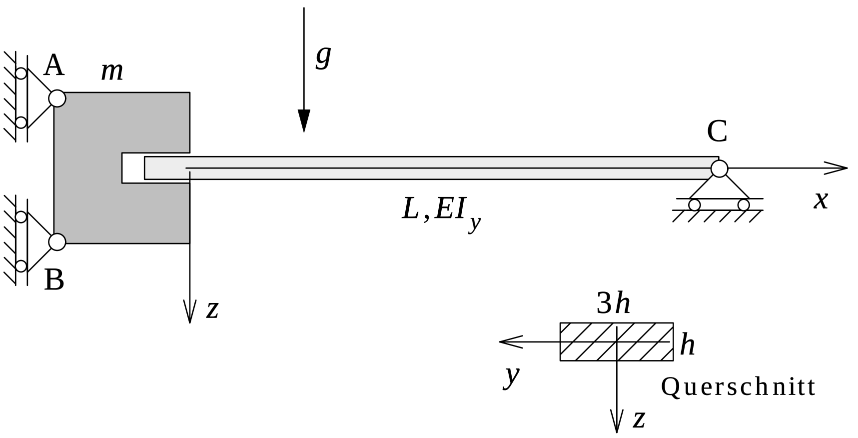
Randbedingungen:

$$w(0) = 0, \qquad w(L) = 0.$$

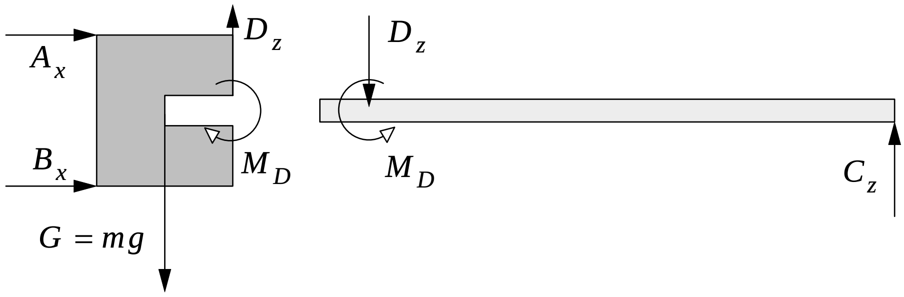
$$w(0) = 0 \quad \to \quad C_2 = 0, \qquad w(L) = 0 \quad \to \quad C_1 = A_z \frac{L^2}{6}.$$

$$w(x) = \frac{Gb}{6EI_y L}(x^3 - L^2 x), \qquad w'(x) = \frac{Gb}{6EI_y L}(3x^2 - L^2), \qquad \alpha = w'(L) = \frac{GbL}{3EI_y}.$$

Aufgabe 12



Ein starrer Körper (Masse m) wird an einer vertikalen Wand geführt und durch einen elastischen Stab (Länge L) gestützt. Man berechne die Biegelinie und die erforderliche Höhe h des Rechteckquerschnitts, damit die Spannung σ_{xx} im Stab die zulässige Spannung σ_{zul} nicht überschreitet.



Gleichgewichtsbedingungen:

$$A_x + B_x = 0, \qquad D_z - G = 0, \qquad -D_z + C_z = 0, \qquad M_D + C_z L = 0.$$

Biegemoment:

$$M_{By}(x) = C_z(L - x).$$

Biegelinie:

$$EI_y w''(x) = G(x - L),$$

$$EI_y w'(x) = G(\frac{x^2}{2} - Lx + C_1),$$

$$EI_y w(x) = G(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2);$$

Randbedingungen:

$$w(L) = 0, \qquad w'(0) = 0;$$

$$w'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0, \qquad w(L) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{3}L^3;$$

$$w(x) = \frac{G}{EI_y}(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2} + \frac{L^3}{3}), \qquad w(0) = \frac{GL^3}{3EI_y}, \qquad w'(L) = -\frac{GL^2}{2EI_y}.$$

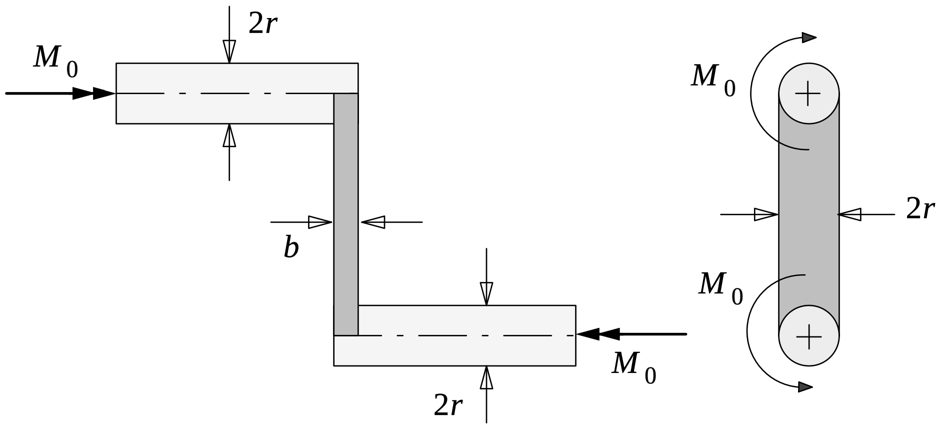
Spannungen σ_{xx} im Querschnitt $x = 0$ mit dem größten Biegemoment:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{by}(0)}{I_y} z = \frac{4GL}{h^4} z.$$

$$\sigma_{xx}\big|_{\max} < \sigma_{zul} \quad \rightarrow \quad \frac{M_{by}(0)}{I_y}\frac{h}{2} < \sigma_{zul} \quad \rightarrow \quad h > \sqrt[3]{2GL/\sigma_{zul}}.$$

Aufgabe 13

Zwei kreiszylindrische parallele Stäbe sind durch einen Stab mit Rechteckquerschnitt miteinander verbunden. Wie groß muß bei der angegebenen Belastung die Querschnittsbreite b gewählt werden, wenn nach der GE-Hypothese alle drei Teile gleich hoch beansprucht sein sollen?



In jedem Stab ist die Stabachse die lokale x-Achse. In den kreiszylindrischen Stäben wirkt nur ein Torsionsmoment und im Verbindungsstab nur ein Biegemoment; alle Schnittmomente haben den Wert M_0.

Größte Schubspannung in den beiden Torsionsstäben:

$$\sigma_{x\varphi} = \frac{M_0}{I_p} r, \qquad I_p = \frac{\pi}{2} r^4, \qquad \sigma_{x\varphi} = \frac{2M_0}{\pi r^3};$$

Vergleichsspannung nach der GE-Hypothese:

$$\sigma_{V(GE)}^{(T)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{6\sigma_{x\varphi}^{\ 2}} = \sqrt{3}\sigma_{x\varphi} = \frac{2\sqrt{3}M_0}{\pi r^3}.$$

Größte Normalspannung im Verbindungsstab:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_0}{I_y} z_{\max}, \qquad I_y = \frac{b(2r)^3}{12}, \qquad \sigma_{xx} = \frac{3M_0}{2br^2};$$

Vergleichsspannung nach der GE-Hypothese:

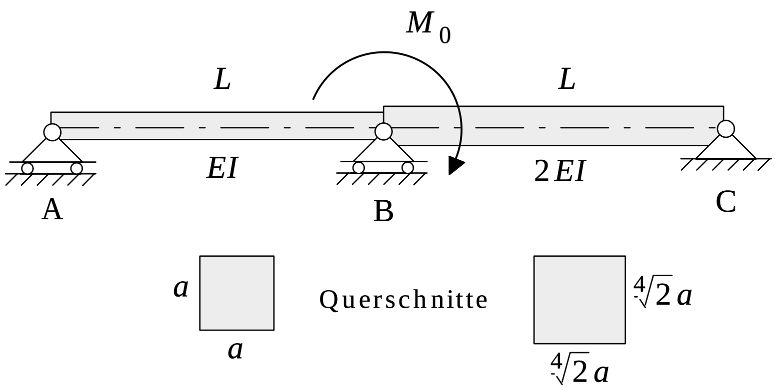
$$\sigma_{V(GE)}^{(B)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma_{xx}^{\ 2}} = \sigma_{xx} = \frac{3M_0}{2br^2}.$$

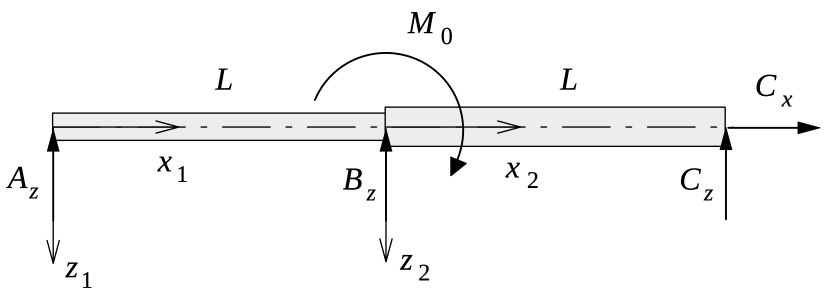
Gleiche Maximalbeanspruchung der Bauteile:

$$\sigma_{V(GE)}^{(T)} = \sigma_{V(GE)}^{(B)} \quad \to \quad \frac{2\sqrt{3}M_0}{\pi r^3} = \frac{3M_0}{2br^2} \quad \to \quad b = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} r = 1{,}36 r.$$

Aufgabe 14

Ein durch drei Auflager gestützer Balken mit abschnittsweise konstanter Biegesteifigkeit (quadratischer Querschnitt) wird über dem mittleren Auflager durch ein Moment M_0 belastet. Man berechne die Gleichung der Biegelinie und die maximale Größe des Lastmomentes, wenn die zulässige Spannung σ_{zul} nicht überschritten werden soll.





Momentengleichgewichtsbedingungen bezogen auf C:

$$A_z 2L + B_z L + M_0 = 0, \qquad B_z = -\frac{M_0}{L} - 2A_z.$$

Biegemomente in den Bereichen $0 \le x_1 < L$ und $0 \le x_2 \le L$:

$$M_{by}(x_1) = A_z x_1, \qquad M_{by}(x_2) = A_z(L + x_2) + B_z x_2 + M_0 = (A_z + \frac{M_0}{L})(L - x_2).$$

Berechnung der Biegelinie des einfach statisch unbestimmten Systems:

$$EIw_1''(x_1) = -A_z x_1,$$

$$EIw_1'(x_1) = -A_z \frac{x_1^2}{2} + C_1, \qquad w_1(0) = 0, \quad C_2 = 0,$$

$$EIw_1(x_1) = -A_z \frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + C_2, \qquad w_1(L) = 0, \quad C_1 = A_z \frac{L^2}{6};$$

$$2EIw_2''(x_2) = (A_z + \frac{M_0}{L})(x_2 - L),$$

$$2EIw_2'(x_2) = (A_z + \frac{M_0}{L})(\frac{x_2^2}{2} - Lx_2) + C_3, \qquad w_2(0) = 0, \quad C_4 = 0,$$

$$2EIw_2(x_2) = (A_z + \frac{M_0}{L})(\frac{x_2^3}{6} - L\frac{x_2^2}{2}) + C_3 x_2 + C_4; \qquad w_2(L) = 0; \quad C_3 = (A_z + \frac{M_0}{L})\frac{L^2}{3};$$

$$w_1'(L) = w_2'(0) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{EI}(-A_z \frac{L^2}{2} + C_1) = \frac{1}{2EI} C_3 \quad \rightarrow \quad A_z = -\frac{M_0}{3L}.$$

Weitere Auflagerkräfte:

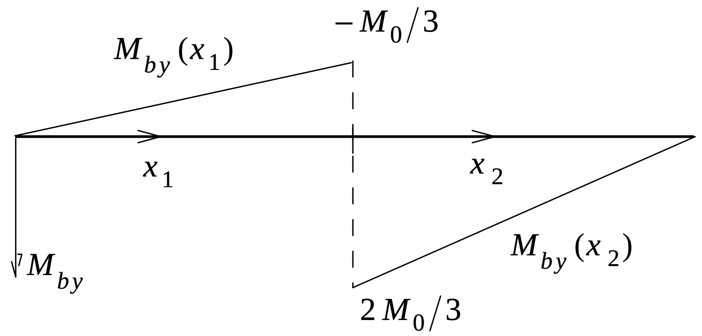
$$B_z = -\frac{M_0}{3L}, \qquad C_z = -A_z - B_z = \frac{2M_0}{3L}.$$

Biegelinienfunktionen:

$$w_1(x_1) = \frac{M_0}{18EIL}(x_1^{\,3} - L^2 x_1), \qquad w_2(x_2) = \frac{M_0}{18EIL}(x_2^{\,3} - 3Lx_2^{\,2} + 2L^2 x_2).$$

Biegemomentdiagramm:

$$M_{by}(x_1) = -\frac{M_0}{3L} x_1, \qquad M_{by}(x_2) = \frac{2M_0}{3L}(L - x_2).$$



Normalspannungen in den Querschnitten $x = const$:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{by}(x_i)}{I_{y(i)}} z, \qquad I_{y(1)} = \frac{a^4}{12}, \qquad I_{y(2)} = \frac{(\sqrt[4]{2}a)^4}{12} = \frac{a^4}{6},$$

Maximale Spannung im linken Bereich:

$$\sigma_{xx(\max)} = \frac{(-\frac{1}{3}M_0)}{a^4/12}(-\frac{a}{2}) = 2\frac{M_0}{a^3}.$$

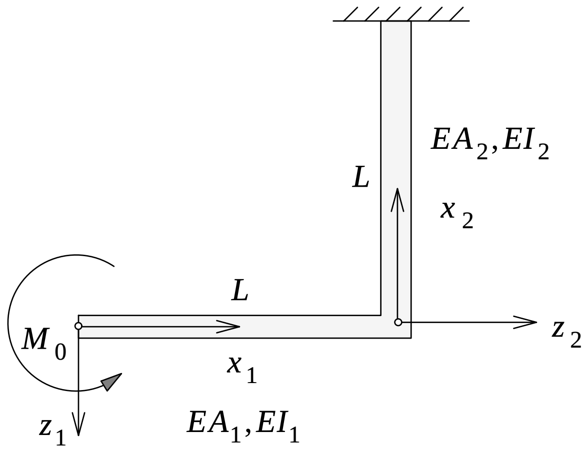
Maximale Spannung im rechten Bereich:

$$\sigma_{xx(\max)} = \frac{\frac{2}{3}M_0}{a^4/6}(\frac{\sqrt[4]{2}a}{2}) = 2{,}38\frac{M_0}{a^3}.$$

$$2{,}38\frac{M_0}{a^3} < \sigma_{zul} \quad \rightarrow \quad M_0 < 0{,}42\sigma_{zul} a^3.$$

Aufgabe 15

Für den inhomogenen ebenen Rahmen, der durch ein Moment M_0 belastet ist, berechne man die Verschiebung des Querschnitts $x_1 = 0$:



Schnittlasten in den beiden Rahmenteilen:

$$N(x_1) = 0, \quad M_b(x_1) = -M_0; \qquad N(x_2) = 0, \quad M_b(x_2) = -M_0.$$

Differentialgleichungen für die Längs- und die Querverschiebungen in den beiden Rahmenteilen:

$$EA_1 u_1'(x_1) = 0, \qquad EA_2 u_2'(x_2) = 0,$$
$$EI_1 w_1''(x_1) = M_0; \qquad EI_2 w_2''(x_2) = M_0.$$

Integration der Differentialgleichungen:

$$EA_1 u_1(x_1) = C_1, \qquad EA_2 u_2(x_2) = C_4,$$
$$EI_1 w_1'(x_1) = M_0 x_1 + C_2, \qquad EI_2 w_2'(x_2) = M_0 x_2 + C_5,$$
$$EI_1 w_1(x_1) = \tfrac{1}{2} M_0 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3; \qquad EI_2 w_2(x_2) = \tfrac{1}{2} M_0 x_2^2 + C_5 x_2 + C_6.$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$u_2(L) = 0, \quad w_2'(L) = 0, \quad w_2(L) = 0;$$

$$u_1(L) = w_2(0), \quad w_1(L) = -u_2(0), \quad w_1'(L) = w_2'(0).$$

Integrationskonstanten:

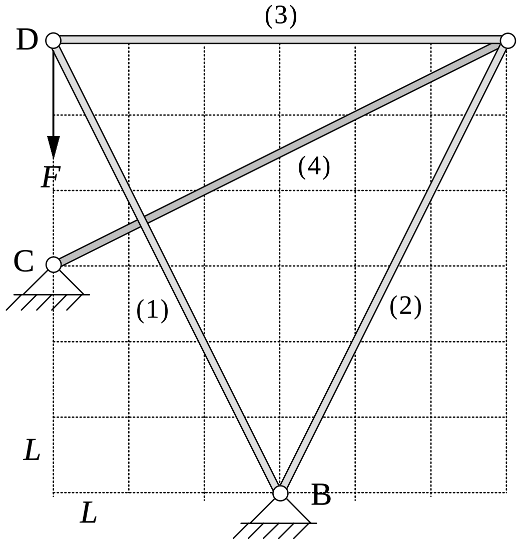
$$C_1 = \frac{A_1}{I_2} \tfrac{1}{2} M_0 L^2, \quad C_2 = -(1 + \frac{I_1}{I_2}) M_0 L, \quad C_3 = (\tfrac{1}{2} + \frac{I_1}{I_2}) M_0 L^2;$$

$$C_4 = 0, \quad C_5 = -M_0 L, \quad C_6 = \tfrac{1}{2} M_0 L^2,$$

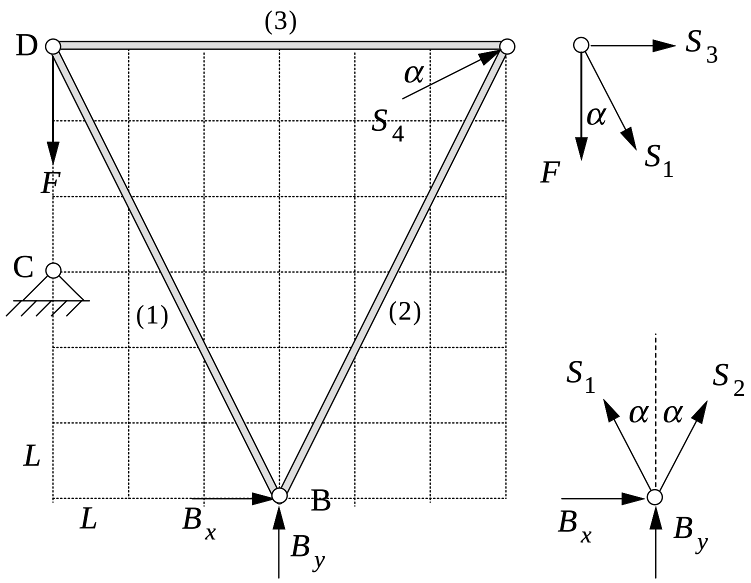
Verschiebungen des Lastangriffspunktes:

$$u_1(0) = \frac{M_0 L^2}{2EI_2}, \qquad w_1(0) = \frac{1}{EI_1} (\tfrac{1}{2} + \frac{I_1}{I_2}) M_0 L^2.$$

Aufgabe 1



Für das System aus elastischen Stäben mit gleicher Dehnsteifigkeit EA berechne man mit Hilfe des Satzes von CASTIGLIANO die Verschiebung f des Lastangriffspunktes D in Richtung der Kraft F.



Berechnung der Auflagerkräfte und der Stabkräfte:

$$B_x + S_4 \cos\alpha = 0,$$

$$B_y + S_4 \sin\alpha - F = 0, \qquad \rightarrow \qquad 2F - 2S_4 \cos\alpha - F + S_4 \sin\alpha = 0,$$

$$F\,6L + B_x\,6L - B_y\,3L = 0;$$

$$S_4 = \frac{F}{2\cos\alpha - \sin\alpha},$$

$$B_x = -\frac{F\cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha}, \qquad B_y = F - \frac{F\sin\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha};$$

$$\sin\alpha = \frac{3L}{\sqrt{45}L} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\alpha = \frac{6L}{\sqrt{45}L} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$S_4 = \frac{\sqrt{5}}{3}F, \qquad B_x = -\frac{2}{3}F, \qquad B_y = \frac{2}{3}F;$$

$$\begin{aligned} -S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\alpha + B_x &= 0, \\ S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\alpha + B_y &= 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -S_1 + S_2 &= \frac{2\sqrt{5}}{3}F, \\ S_1 + S_2 &= -\frac{\sqrt{5}}{3}F; \end{aligned} \qquad S_2 = \frac{\sqrt{5}}{6}F, \qquad S_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}F;$$

$$S_3 + S_1 \sin\alpha = 0, \qquad S_3 = \frac{F}{2}.$$

Elastische Energie des Fachwerks:

$$U = \frac{1}{2EA}\left\{(S_1^2 + S_2^2 + S_4^2)\sqrt{45}L + S_3^2 6L\right\} = \frac{LF^2}{2EA}\left\{\frac{35}{6}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\right\} = 7{,}27\frac{LF^2}{EA}.$$

Verschiebung des Lastangriffspunktes D:

$$f = \frac{\partial U}{\partial F} = 14{,}54\frac{LF}{EA}.$$

Hilfsmittel

Bei der Anwendung des Satzes von CASTIGLIANO sind häufig Integrale der folgenden Form zu berechnen

$$\int_0^L \bar{f}_i(x) f_j(x) dx =: L\ \varphi_{ij},$$

wobei die Funktionen $\bar{f}_i(x)$ und $f_j(x)$ im Integranden vorwiegend lineare Funktionen der Balkenachsenkoordinate x sind, nämlich auf Kräfte bezogene Längskräfte und Biegemomente. Es ist deshalb zweckmäßig, die Integrationsergebnisse anhand einer Tabelle zu ermitteln, in der die am häufigsten auftretenden Funktionskombinationen erfaßt sind.

So ist beispielsweise

$$\int_0^L \bar{f}_3(x) f_2(x) dx = \int_0^L \bar{c}(1 - \frac{x}{L})b\frac{x}{L}dx = \bar{c}b\int_0^L (\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2})dx,$$

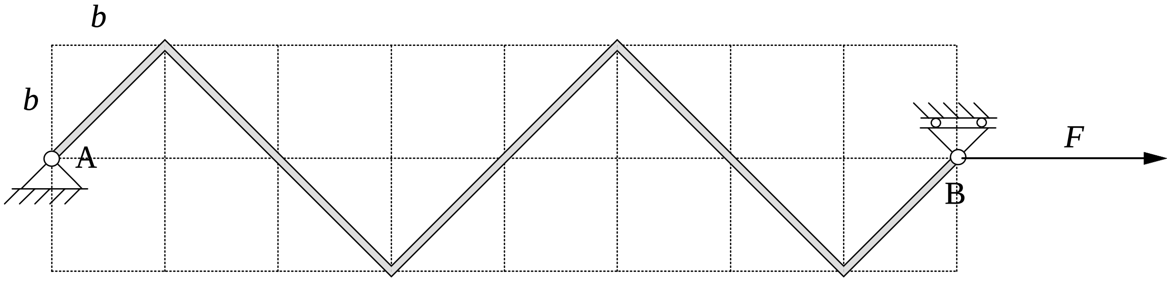
$$\int_0^L \bar{f}_3(x) f_2(x) dx = \bar{c}b(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}) = \frac{1}{6}\bar{c}bL =: \varphi_{32}L,$$

$$\varphi_{32} := \frac{1}{6}\bar{c}b.$$

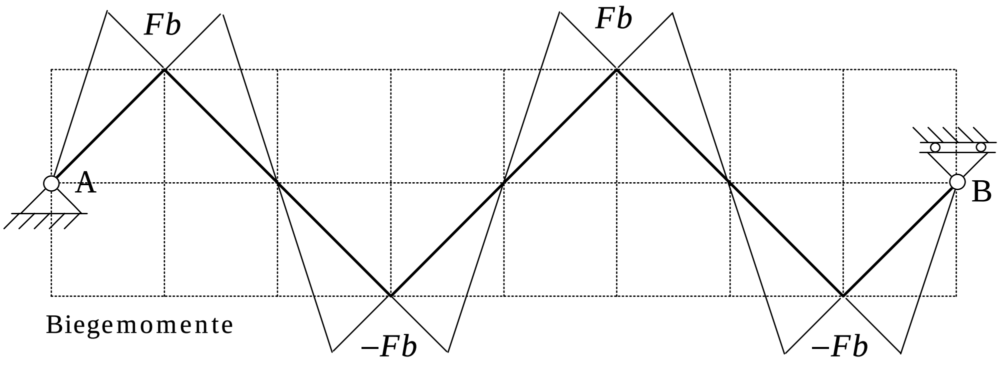
	$f_1 = a$	$f_2 = b\,x/L$	$f_3 = c(1-x/L)$	$f_4 = d_0 + (d_1 - d_0)x/L$
$\bar f_1 = \bar a$	$\bar a\, a$	$\frac{1}{2}\bar a\, b$	$\frac{1}{2}\bar a\, c$	$\frac{1}{2}\bar a\,(d_0 + d_1)$
$\bar f_2 = \bar b\, x/L$	$\frac{1}{2}\bar b\, a$	$\frac{1}{3}\bar b\, b$	$\frac{1}{6}\bar b\, c$	$\bar b(\frac{1}{6}d_0 + \frac{1}{3}d_1)$
$\bar f_3 = \bar c(1 - x/L)$	$\frac{1}{2}\bar c\, a$	$\frac{1}{6}\bar c\, b$	$\frac{1}{3}\bar c\, c$	$\bar c(\frac{1}{3}d_0 + \frac{1}{6}d_1)$
$\bar f_4 = \bar d_0 + (\bar d_1 - \bar d_0)x/L$	$\frac{1}{2}(\bar d_0 + \bar d_1)a$	$(\frac{1}{6}\bar d_0 + \frac{1}{3}\bar d_1)b$	$(\frac{1}{3}\bar d_0 + \frac{1}{6}\bar d_1)c$	$\frac{1}{6}(\bar d_0 d_1 + \bar d_1 d_0) + \frac{1}{3}(\bar d_0 d_0 + \bar d_1 d_1)$

Tabelle der Faktoren φ_{ij}

Aufgabe 2



Für den aus fünf Balkensegmenten bestehenden biegesteifen Rahmen (Biegesteifigkeit EI) berechne man mit Hilfe des Satzes von CASTIGLIANO die Ersatzfederkonstante bezogen auf die Verschiebung des Punktes B in Richtung der Kraft F.



Elastische Energie des Rahmens mit Hilfe der obigen Tabelle berechnet unter

Berücksichtigung des Biegemomentverlaufs:

$$U = \frac{8}{2EI}\frac{b\sqrt{2}}{3}(Fb)^2 = \frac{4\sqrt{2}b^3}{3EI}F^2.$$

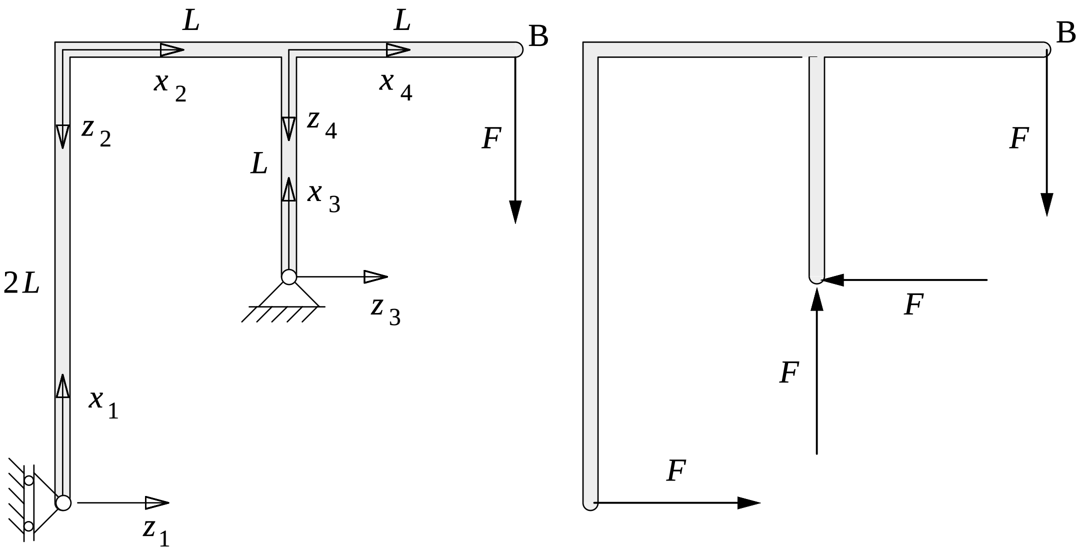
Verschiebung des Kraftangriffspunktes B:

$$f = \frac{dU(F)}{dF} = \frac{8\sqrt{2}b^3}{3EI}F =: \frac{F}{c},$$

Federkonstante:

$$c = \frac{3EI}{8\sqrt{2}b^3} = 0{,}26\frac{EI}{b^3}.$$

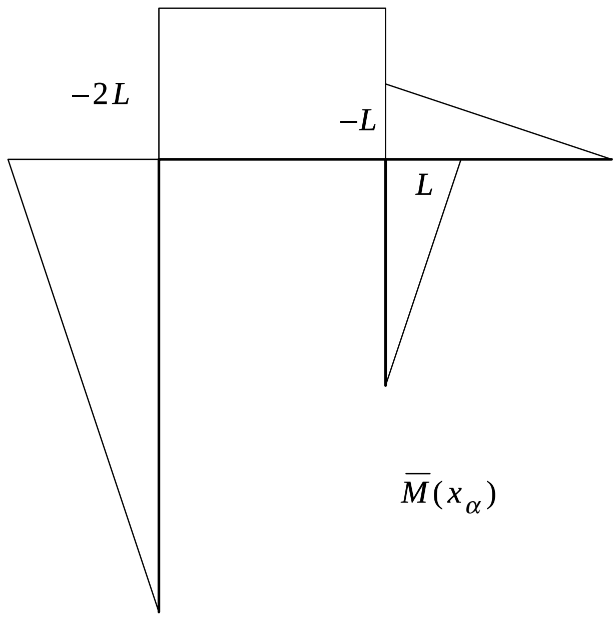
Aufgabe 3



Der dargestellte statisch bestimmt gestützte biegesteife Rahmen mit konstanter Biegesteifigkeit EI ist im Punkt B mit einer Einzelkraft F belastet. Man zeichne über der Rahmenachse die auf F bezogenen Biegemomentlinien $\overline{M}(x_\alpha)$ $\alpha = 1,\dots,4$ und berechne die erforderliche Kraft F, wenn der Punkt B in Richtung der Kraft F um 3% der Länge L verschoben werden soll.

$$M(x_\alpha) =: F\,\overline{M}(x_\alpha).$$

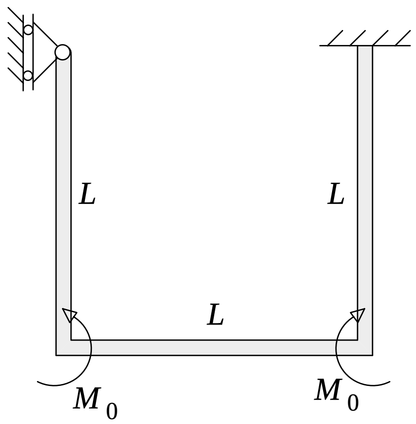
$$U = \frac{1}{2EI}\sum_\alpha \int_0^{L_\alpha} M^2(x_\alpha)dx_\alpha \quad \rightarrow \quad f = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{F}{EI}\sum_\alpha \int_0^{L_\alpha} \overline{M}^2(x_\alpha)dx_\alpha$$



Mit der obigen Tabelle ergibt sich aus diesem Biegemomentverlauf:

$$f = \frac{F}{EI}\left\{2L\,\frac{(-2L)^2}{3} + L(-2L)^2 + L\,\frac{L^2}{3} + L\,\frac{(-L)^2}{3}\right\} = \frac{22}{3}\frac{FL^3}{EI}, \qquad F = \frac{0{,}09}{22}\frac{EI}{L^2}.$$

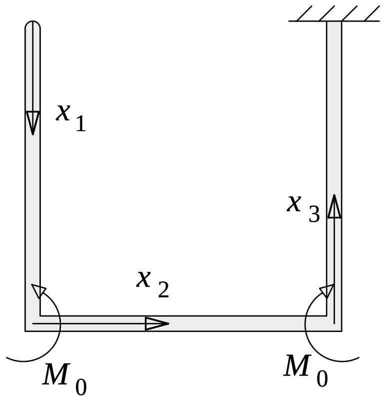
Aufgabe 4

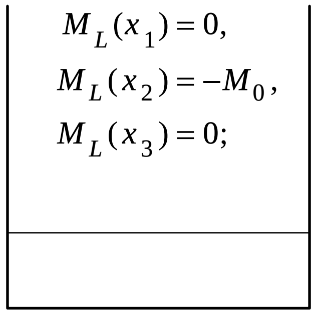


Man berechne die Biegemomente im einfach statisch unbestimmt gestützten Rahmen.

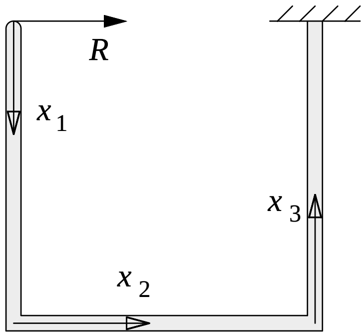
Es muß zunächst ein statisch bestimmtes Ersatzsystem (nur drei Auflagerreaktionen) definiert werden. Wir entfernen das einwertige Auflager und erhalten den eingespannten Rahmen als statisch bestimmtes Ersatzsystem, bei dem wir außer den Momentenlasten (Lastfall 1) eine unbekannte Reaktionskraft R an der Stelle des einwertigen Auflagers (Lastfall 2) einführen. Beiden Lastfälle werden anschließend überlagert.

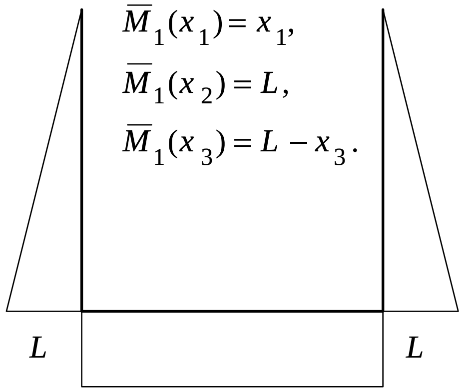
statisch bestimmtes Ersatzsystem





statisch bestimmtes Ersatzsystem





$$M(x_i) = M_L(x_i) + R\overline{M}_1(x_i)$$

$$U = \frac{1}{2EI_y}\sum_{i=1}^{3}\int_0^L M^2(x_i)dx_i \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{EI_y}\sum_{i=1}^{3}\int_0^L M(x_i)\overline{M}_1(x_i)dx_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\int_0^L M_L(x_i)\overline{M}_1(x_i)dx_i + R\sum_{i=1}^{3}\int_0^L \overline{M}_1^{\,2}(x_i)dx_i = 0,$$

Reaktionskraft im einwertigen Auflager:

$$R = -\frac{\sum_{i=1}^{3}\int_0^L M_L(x_i)\overline{M}_1(x_i)dx_i}{\sum_{i=1}^{3}\int_0^L \overline{M}_1^{\,2}(x_i)dx_i}. \qquad R = \frac{M_o L^2}{\frac{1}{3}L^3 + L^3 + \frac{1}{3}L^3} = \frac{3}{5}\frac{M_o}{L}.$$

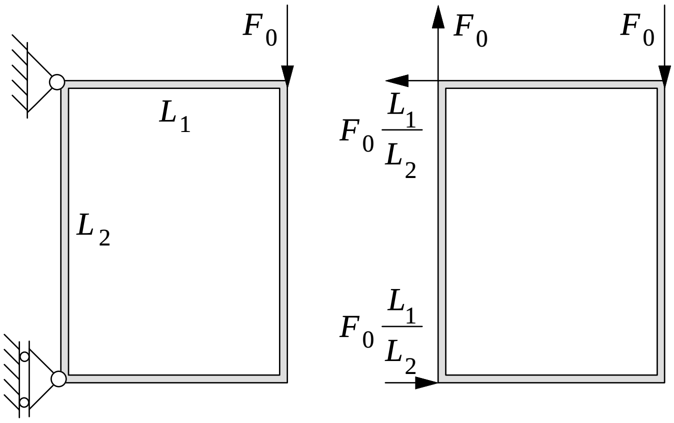
Biegemomente insgesamt:

$$M_{by}(x_1) = \frac{3}{5}\frac{M_o}{L}x_1, \qquad M_{by}(x_2) = -\frac{2}{5}M_o, \qquad M_{by}(x_3) = \frac{3}{5}\frac{M_o}{L}(L - x_3).$$

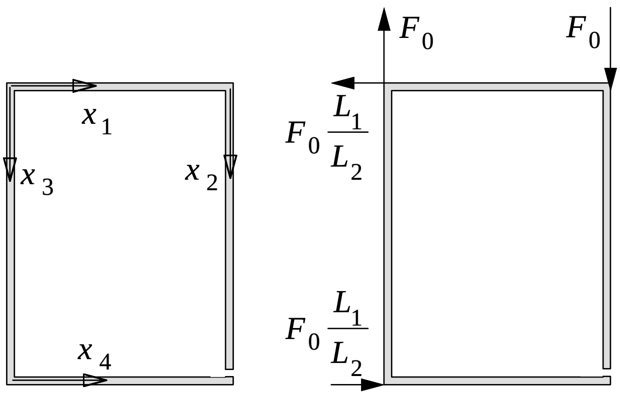
Aufgabe 5

Ein geschlossener, statisch bestimmt gestützter biegesteifer Rechteckrahmen mit konstanter Biegesteifigkeit EI und konstanter Dehnsteifigkeit EA ist mit einer Kraft F_0 belastet. Man berechne mit Hilfe des Satzes von CASTIGLIANO die Längskräfte und die Biegemomente im Rahmen.

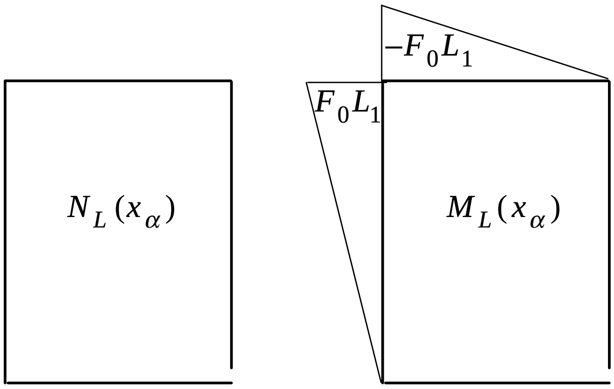
Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Rahmen ergeben sich die im rechten Bild eingetragenen Auflagerkräfte:

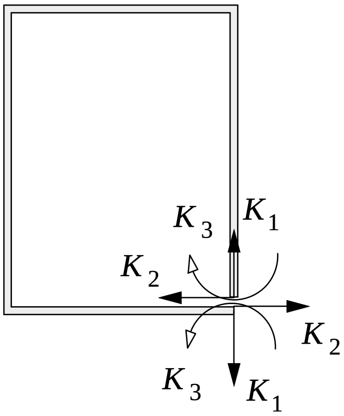


Der geschlossene Rahmen wird an einer zweckmäßig ausgewählten Stelle aufgeschnitten, so daß ein offener Rahmen entsteht.



In dem (in der rechten unteren Ecke) aufgeschnittenen Rahmen werden nun die Schnittlasten infolge der äußeren Last- und Auflagerkräfte berechnet und in Schnittlastdiagrammen dargestellt.





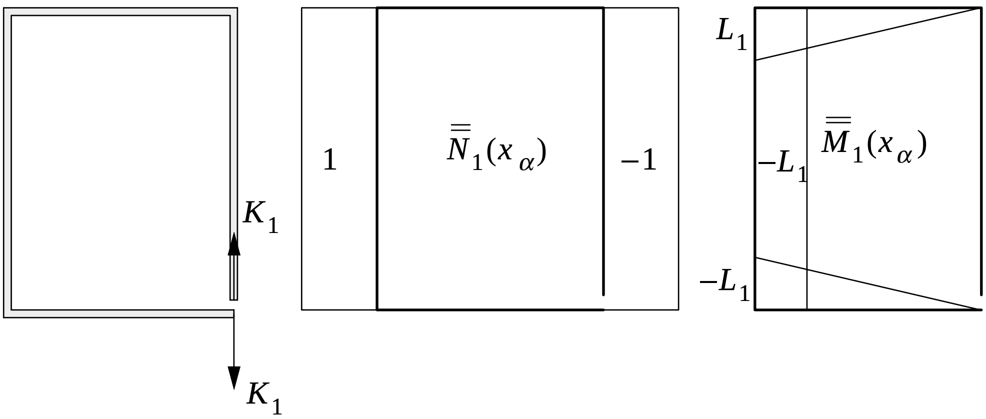
In der willkürlich ausgewählten Schnittstelle werden dem Prinzip „actio = reactio“ genügende innere Schnittlasten eingeführt, also Kräfte K_1, K_2 und das Moment K_3, die für den Zusammenhalt an der fiktiven Schnittstelle zu sorgen haben.

Im offenen Rahmen können nun die Schnittlasten geschrieben werden:

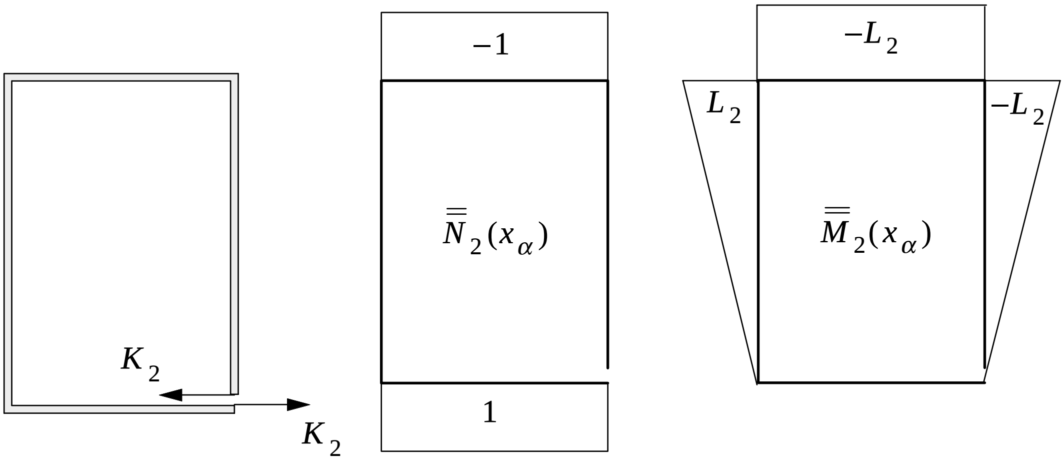
$$N(x_\alpha) = N_L(x_\alpha) + \sum_{j=1}^{3} K_j \bar{\bar{N}}_j(x_\alpha),$$

$$M(x_\alpha) = M_L(x_\alpha) + \sum_{j=1}^{3} K_j \bar{\bar{M}}_j(x_\alpha).$$

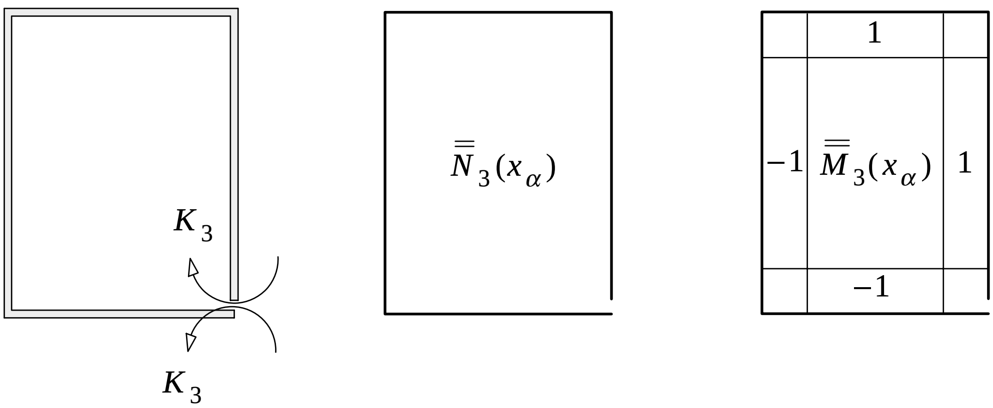
Auf die innere Schnittkraft K_1 bezogene Längskräfte und Biegemomente im offenen Rahmen:



Auf die innere Schnittkraft K_2 bezogene Längskräfte und Biegemomente im offenen Rahmen:



Auf das innere Schnittmoment K_3 bezogene Längskräfte und Biegemomente im offenen Rahmen:



Elastische Energie des Rahmens:

$$U = \sum_{\alpha=1}^{4} \int_0^{L_\alpha} \{\frac{N^2(x_\alpha)}{2EA} + \frac{M^2(x_\alpha)}{2EI}\} dx_\alpha$$

Weil der Rahmen an der fiktiv aufgeschnittenen Stelle den Zusammenhang bewahren muß, gelten für die inneren Schnittlasten K_i, $i = 1,2,3$ die Bedingungen:

$$\frac{\partial U}{\partial K_i} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} \int_0^{L_\alpha} \{\frac{N\overline{\overline{N}}_i}{EA} + \frac{M\overline{\overline{M}}_i}{EI}\} dx_\alpha = 0 \qquad i = 1,2,3.$$

Mit den Abkürzungen

$$D_i := \sum_{\alpha=1}^{4} \int_0^{L_\alpha} \{\frac{N_L\overline{\overline{N}}_i}{EA} + \frac{M_L\overline{\overline{M}}_i}{EI}\} dx_\alpha, \qquad C_{ij} := \sum_{\alpha=1}^{4} \int_0^{L_\alpha} \{\frac{\overline{\overline{N}}_j\overline{\overline{N}}_i}{EA} + \frac{\overline{\overline{M}}_j\overline{\overline{M}}_i}{EI}\} dx_\alpha,$$

$$D_1 = \frac{1}{EI}\{\frac{L_1}{3}(-F_o L_1)L_1 + \frac{L_2}{2}F_o L_1(-L_1)\} = -\frac{F_o L_1^{\ 2}}{6EI}(2L_1 + 3L_2),$$

$$D_2 = \frac{1}{EI}\{\frac{L_1}{2}(-F_o L_1)(-L_2) + \frac{L_2}{3}F_o L_1 L_2\} = \frac{F_o L_1 L_2}{6EI}(3L_1 + 2L_2),$$

$$D_3 = \frac{1}{EI}\{\frac{L_1}{2}(-F_o L_1) + \frac{L_2}{2}F_o L_1(-1)\} = -\frac{F_o L_1}{2EI}(L_1 + L_2),$$

$$I =: Ai^2, \qquad i << L_1, L_2$$

$$C_{11} = \frac{1}{EA}\{L_2 + L_2\} + \frac{1}{EI}\{\frac{L_1}{3}L_1^{\ 2} + L_2 L_1^{\ 2} + \frac{L_1}{3}L_1^{\ 2}\} =$$
$$= \frac{L_1^{\ 2}}{3EI}\{6L_2\frac{i^2}{L_1^{\ 2}} + 2L_1 + 3L_2\} \approx \frac{L_1^{\ 2}}{3EI}\{2L_1 + 3L_2\},$$

$$C_{12} = \frac{1}{EI}\{\frac{L_1}{2}L_1(-L_2) + \frac{L_2}{2}(-L_1)L_2\} = -\frac{L_1 L_2}{2EI}(L_1 + L_2),$$

$$C_{13} = \frac{1}{EI}\{\frac{L_1}{2}L_1 + L_2(-L_1)(-1) + \frac{L_1}{2}(-L_1)(-1)\} = \frac{L_1}{EI}(L_1 + L_2),$$

$$C_{22} = \frac{1}{EA}\{L_1 + L_1\} + \frac{1}{EI}\{L_1(-L_2)^2 + \frac{L_2}{3}L_2^{\ 2} + \frac{L_2}{3}L_2^{\ 2}\}$$
$$= \frac{L_2^{\ 2}}{3EI}\{6L_1\frac{i^2}{L_2^{\ 2}} + 3L_1 + 2L_2\} \approx \frac{L_2^{\ 2}}{3EI}(3L_1 + 2L_2),$$

$$C_{23} = \frac{1}{EI}\{L_1(-L_2) + \frac{L_2}{2}L_2(-1) + \frac{L_2}{2}(-L_2)\} = -\frac{L_2}{EI}(L_1 + L_2),$$

$$C_{33} = \frac{1}{EI}\{L_1 + L_2 + L_2 + L_1\} = \frac{2}{EI}(L_1 + L_2),$$

erhalten wir das lineare Gleichungssystem für die inneren Reaktionskräfte K_1, K_2 und K_3:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}.$$

Zahlenbeispiel:

Quadratischer Hohlquerschnitt (10 mm außen, 9 mm innen):

$$A = 19\,\mathrm{mm}^2, \qquad I = \frac{10^4 - 9^4}{12}\,\mathrm{mm}^4 = 287\,\mathrm{mm}^4$$

$$E = 2{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm}^2, \qquad EI = 6{,}018 \cdot 10^7\,\mathrm{Nmm}^2$$

$$L_1 = 400\,\mathrm{mm}, \qquad L_2 = 700\,\mathrm{mm},$$

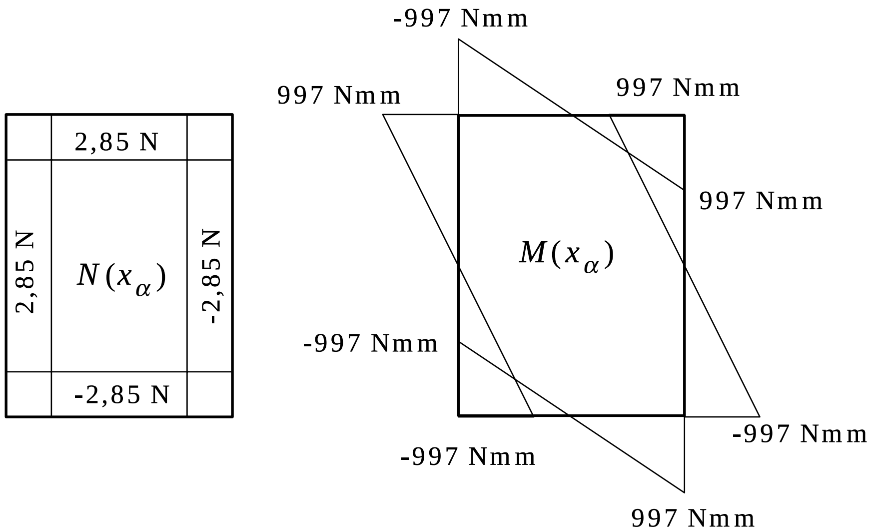
$$F_o = 10\,\mathrm{N}$$

$$D_1 = -1{,}285 \cdot 10^1\,\mathrm{mm}$$
$$D_2 = 2{,}016 \cdot 10^1\,\mathrm{mm}$$
$$D_3 = -3{,}656 \cdot 10^{-2}$$

$$C_{11} = 2{,}570\ N^{-1}mm$$
$$C_{12} = C_{21} = -2{,}559\ N^{-1}mm$$
$$C_{13} = C_{31} = 7{,}311 \cdot 10^{-3}\ N^{-1}$$
$$C_{22} = 7{,}056\ \mathrm{N}^{-1}\mathrm{mm}$$
$$C_{23} = C_{32} = -1{,}279 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}^{-1}$$
$$C_{33} = 3{,}656 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}^{-1}\mathrm{mm}^{-1}$$

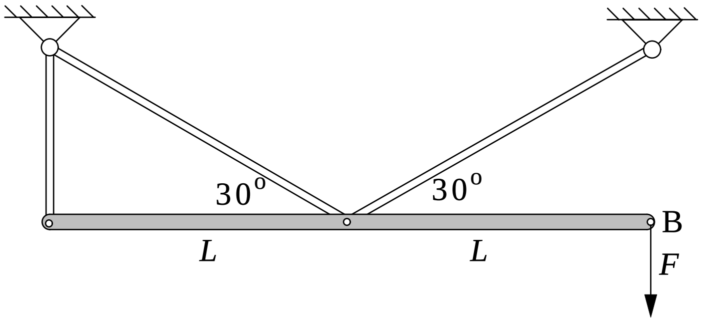
$$K_1 = 4{,}996\ \mathrm{N}$$
$$K_2 = -2{,}852\ \mathrm{N}$$
$$K_3 = -9{,}968 \cdot 10^2\ \mathrm{Nmm}$$

Längskraft und Biegemoment im Rahmen:

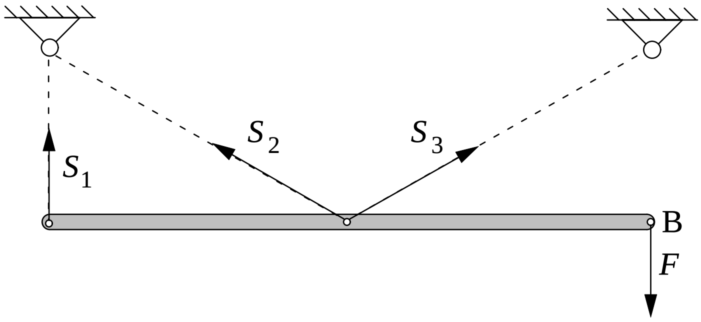


Aufgabe 6

Ein Balken (Länge $2L$, Biegesteifigkeit EI) ist mit drei Stäben (Dehnsteifigkeit EA) statisch bestimmt gestützt. Man berechne mit Hilfe des Satzes von CASTIGLIANO die Verschiebung des Punktes B in Richtung der Kraft F.



Berechnung der Stabkräfte:

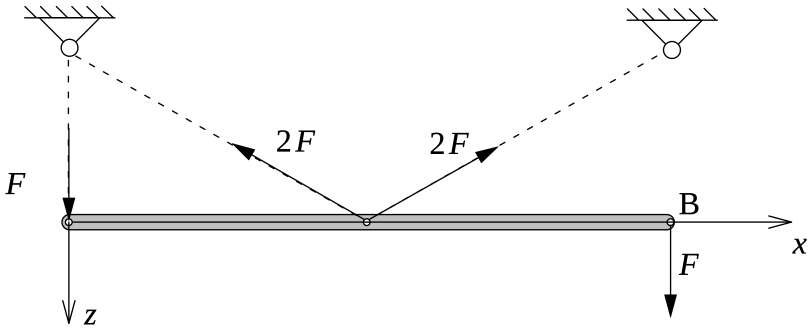


$$.-S_2\frac{\sqrt{3}}{2}+S_3\frac{\sqrt{3}}{2}=0,$$

$$S_1+S_2\frac{1}{2}+S_3\frac{1}{2}-F=0, \qquad S_1=-F, \qquad S_2=S_3=2F.$$

$$-S_1L-FL=0;$$

Biegemomente im Balken:



$$M_{by}(x)=\begin{cases}-Fx & 0\le x<L,\\ F(x-2L) & L<x\le 2L.\end{cases}$$

Elastische Energie des Systems:

$$U = \frac{1}{2}\left\{\frac{S_1^{\,2}}{EA}\frac{L}{\sqrt{3}} + \frac{S_2^{\,2}}{EA}\frac{2L}{\sqrt{3}} + \frac{S_3^{\,2}}{EA}\frac{2L}{\sqrt{3}} + \frac{1}{EI}\int_0^{2L} M_{by}^{\;2}(x)dx\right\},$$

$$U = \frac{1}{2}\left\{\frac{F^2L}{EA}\frac{17}{\sqrt{3}} + \frac{F^2}{EI}\left(\int_0^L x^2dx + \int_L^{2L}(x-2L)^2\,dx\right)\right\},$$

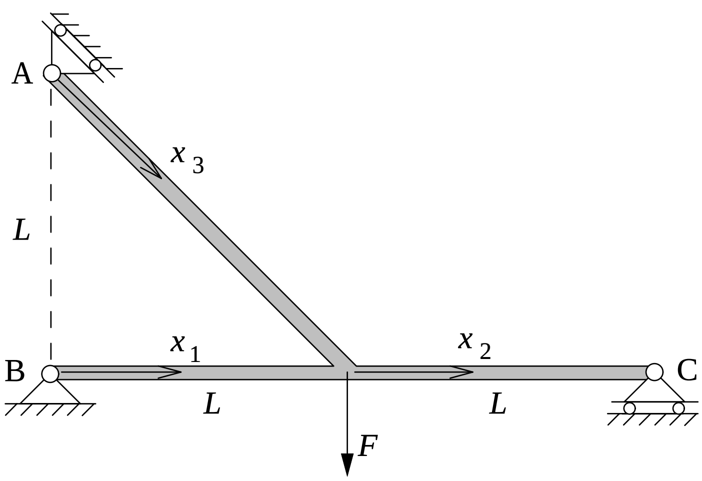
$$U = \frac{1}{2}\left\{\frac{F^2L}{EA}\frac{17}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\frac{F^2L^3}{EI}\right\}.$$

Verschiebung des Punktes B:

$$f_B = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{17}{\sqrt{3}}\frac{FL}{EA} + \frac{2}{3}\frac{FL^3}{EI}.$$

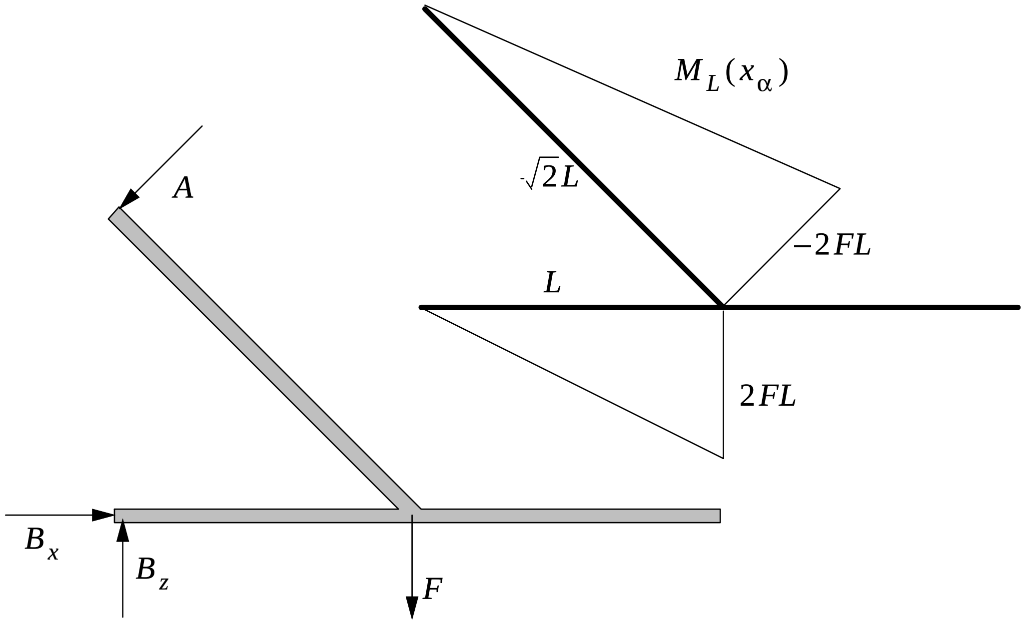
Aufgabe 7

Für den einfach statisch unbestimmt gestützten ebenen Rahmen (Biegesteifigkeit EI) berechne man mit Hilfe des Satzes von CASTIGLIANO die Auflagerkräfte.



Als statisch bestimmtes Ersatzsystem wählen wir den Rahmen ohne das einwertige Auflager C.

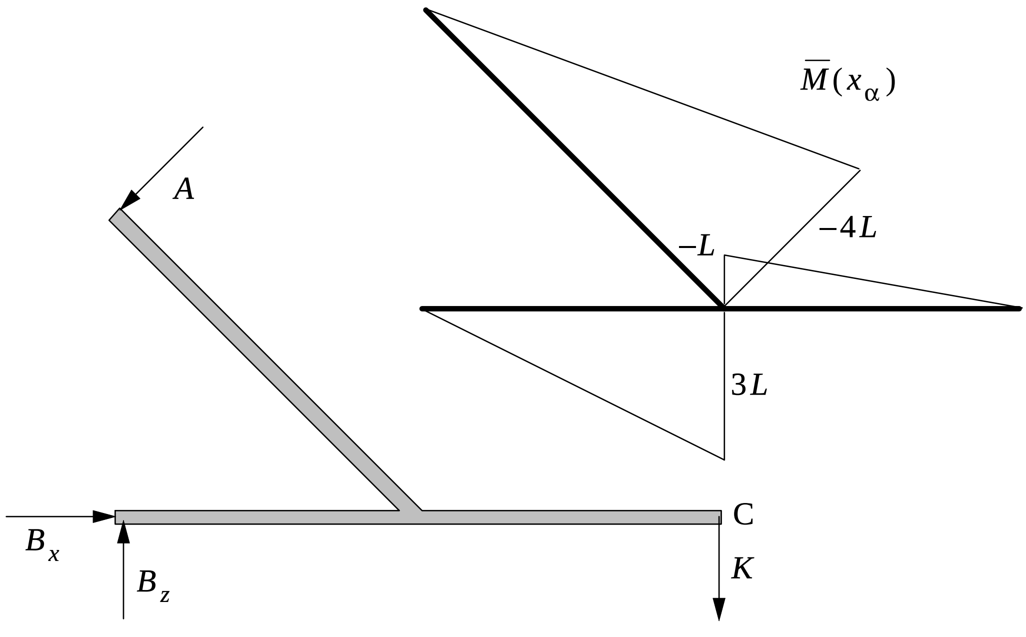
Auflagerkräfte und Biegemomente des Lastsystems:



$$-A\frac{\sqrt{2}}{2}+B_x=0,\qquad -A\frac{\sqrt{2}}{2}+B_z-F=0,\qquad B_xL-FL=0;$$

$$B_x=F,\qquad A=\sqrt{2}F,\qquad B_z=2F.$$

Auflagerkräfte und auf die Reaktionskraft K bezogene Biegemomente:



$$-A\frac{\sqrt{2}}{2}+B_x=0,\qquad -A\frac{\sqrt{2}}{2}+B_z-K=0,\qquad B_xL-K2L=0;$$

$$B_x=2K,\qquad A=2\sqrt{2}K,\qquad B_z=3K.$$

Elastische Energie:

$$U = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2} \int_0^{L_\alpha} \frac{M_{by}{}^2(x_\alpha)}{EI} dx_\alpha, \qquad M_{by}(x_\alpha) := M_L(x_\alpha) + K\overline{M}(x_\alpha).$$

Nach dem Satz von CASTIGLIANO muß gelten:

$$\frac{\partial U}{\partial K} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sum_{\alpha=1}^{3} \int_0^{L_\alpha} \frac{\{M_L(x_\alpha) + K\overline{M}(x_\alpha)\}\overline{M}(x_\alpha)}{EI} dx_\alpha = 0,$$

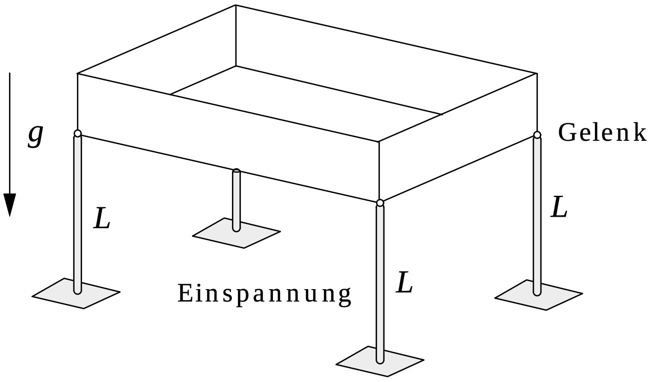
$$K = -\frac{\sum_{\alpha=1}^{3} \int_0^{L_\alpha} M_L(x_\alpha)\overline{M}(x_\alpha) dx_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{3} \int_0^{L_\alpha} \overline{M}(x_\alpha)\overline{M}(x_\alpha) dx_\alpha},$$

$$K = -\frac{(1/3)(2FL)(3L)L + (1/3)(-2FL)(-4L)\sqrt{2}L}{(1/3)(3L)^2 L + (1/3)(-L)^2 L + (1/3)(-4L)^2 \sqrt{2}L},$$

$$K = -\frac{3 + 4\sqrt{2}}{5 + 8\sqrt{2}} F = -0{,}53F.$$

Aufgabe 1

Ein Wasserbehälter (Masse leer 3600 kg, Abmessungen $2 \times 4 \times 1{,}5\,\mathrm{m}^3$) steht auf vier Stahlstützen der Länge $L = 3.5\,\mathrm{m}$. Man bestimme das erforderliche IPB-Profil bei 5-facher Sicherheit gegen Knicken.



Gesamtmasse:

$$m_{ges} = 3600\,\mathrm{kg} + 12 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} = 15{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$$

Druckkraft auf eine Stütze:

$$F^* = \frac{1}{4} m_{ges} g = \frac{9{,}81 \cdot 15{,}6 \cdot 10^3}{4}\,\mathrm{N} = 3{,}83 \cdot 10^4\,\mathrm{N}.$$

2. EULERfall:

$$F_{krit} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{L^2}. \qquad L_{red} = 2L$$

Bedingung für das auszuwählende Profil:

$$F^* < \frac{1}{5} F_{krit} \qquad \rightarrow \qquad I > \frac{20 L^2 F^*}{\pi^2 E}$$

$$I > \frac{20 \cdot (3{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{mm})^2 \cdot 3{,}83 \cdot 10^4\,\mathrm{N}}{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm^2}} = 4{,}52 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^4$$

Tabellenwert:

$$IPB140: \qquad I = 5{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^4, \qquad A = 4{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{mm}^2.$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{5{,}5 \cdot 10^6}{4{,}3 \cdot 10^3}}\,\mathrm{mm} = 35{,}76\,\mathrm{mm}$$

Schlankheitsgrad:

$$s = \frac{L_{red}}{i} = \frac{7 \cdot 10^3}{35{,}76} = 195{,}7.$$

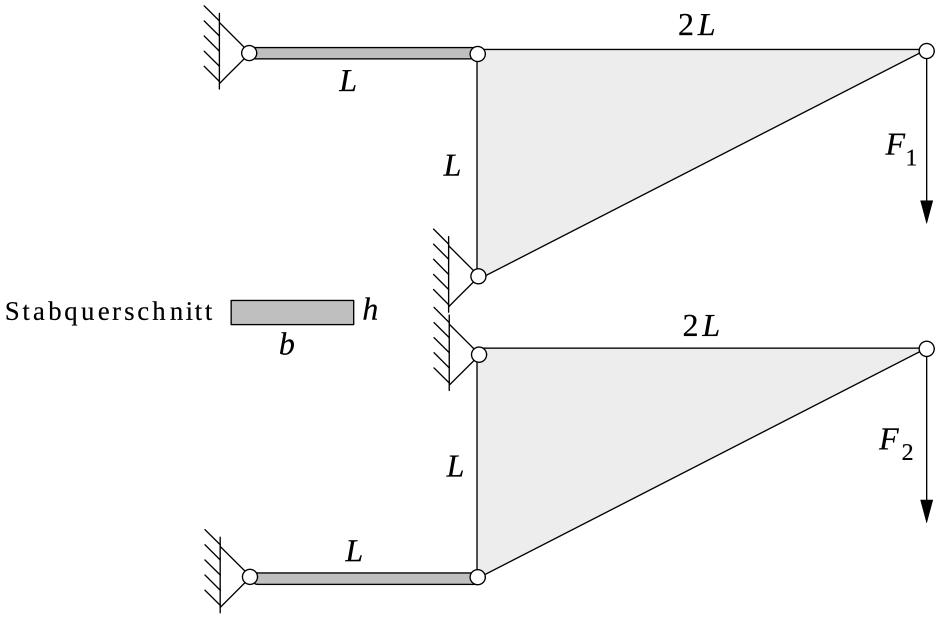
$s > s_G$: EULER-Theorie erlaubt, IPB 140 geeignetes Profil.

Aufgabe 2

Für die beiden unterschiedlich gelagerten Dreieckscheiben berechne man die zulässigen Lastkräfte F_1 und F_2, wenn

$$L = 300\,\mathrm{mm}, \quad b = 10\,\mathrm{mm}, \quad h = 2\,\mathrm{mm},$$
$$E = 2{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm^2}, \quad \sigma_{zul} = 250\,\mathrm{N/mm^2},$$

gegeben ist.



Im ersten Fall ist der Stab mit der Zugkraft $2F_1$ belastet. Aus

$$2F_1 < \sigma_{zul} A$$

folgt

$$F_1 < \frac{\sigma_{zul} A}{2} = \frac{250\,\mathrm{N/mm^2} \cdot 10\,\mathrm{mm} \cdot 2\,\mathrm{mm}}{2} = 2500\,\mathrm{N}.$$

Im zweiten Fall ist der Stab mit $2F_2$ druckbelastet. Die Stablagerung entspricht dem 1. EULERfall, deshalb muß

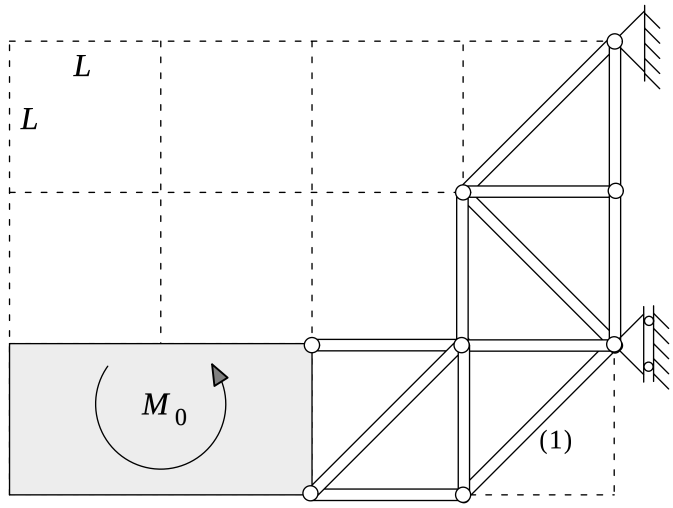
$$2F_2 < \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

gelten:

$$F_2 < \pi^2 \frac{EI}{2L^2} = \pi^2 \frac{2{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm^2}\, 10 \cdot 2^3\,\mathrm{mm^4}}{2 \cdot 300^2\,\mathrm{mm^2} \cdot 12} = 76{,}8\,\mathrm{N}.$$

Aufgabe 3

Eine starre Platte ist an einem ebenen Fachwerkrahmen befestigt und durch ein Moment M_0 belastet. Wie groß darf das M_0 höchstens sein, damit der Stab 1 nicht knickt? Für den Fall, daß der Stab 1 ein Kreisrohr ist (Außenradius r_a, Innenradius r_i), berechne man seinen Schlankheitsgrad s.



$$M_o - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} L = 0, \qquad \to \quad S_1 = \sqrt{2}\,\frac{M_o}{L};$$

$$S_{1(krit)} = \pi^2 \frac{EI_y}{(\sqrt{2}\,L)^2}, \qquad M_{0(krit)} = \pi^2 \frac{EI_y}{2\sqrt{2}\,L} = 3,49\,\frac{EI_y}{L}.$$

$$I_y = \frac{\pi}{4}(r_a{}^4 - r_i{}^4), \qquad A = \pi(r_a{}^2 - r_i{}^2), \qquad i := \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \frac{1}{2}\sqrt{r_a{}^2 + r_i{}^2},$$

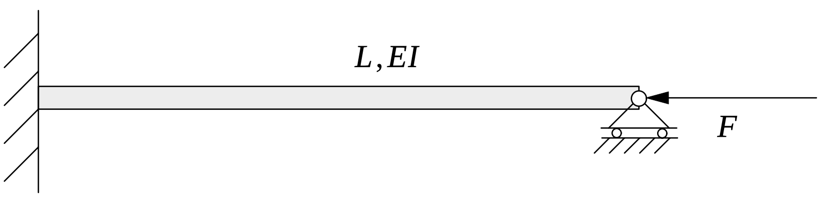
$$s = \frac{i}{L_{red}} = \frac{i}{\sqrt{2}\,L} = \frac{\sqrt{r_a{}^2 + r_i{}^2}}{2\sqrt{2}\,L}.$$

Aufgabe 4

Wie groß muß L mindestens sein, wenn die EULERsche Knicktheorie anwendbar sein soll?

Gegeben: $E = 7{,}2 \cdot 10^4 \mathrm{N/mm^2}$, $R_{pd} = 1{,}5 \cdot 10^2 \mathrm{N/mm^2}$,

Kreisrohrquerschnitt: $r_i = 9\,\mathrm{mm}$, $r_a = 10\,\mathrm{mm}$.



Grenzschlankheitsgrad:

$$s_G = \pi \sqrt{\frac{E}{R_{pd}}} = 68{,}83.$$

Trägheitsradius:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{10^4 - 9^4}{4(10^2 - 9^2)}}\,\mathrm{mm} = 6{,}727\,\mathrm{mm}.$$

Reduzierte Knicklänge: (4. EULERfall)

$$L_{red} = 0{,}7\,L.$$

Schlankheitsgrad:

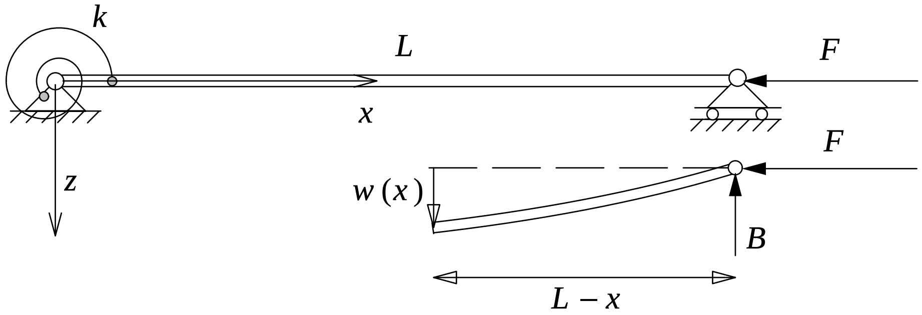
$$s := \frac{L_{red}}{i} = \frac{0{,}7\,L}{6{,}727\,\mathrm{mm}} = 0{,}104\,\frac{L}{\mathrm{mm}}.$$

Forderung:

$$s > s_G \quad \rightarrow \quad 0{,}104\,\frac{L}{\mathrm{mm}} > 68{,}83 \quad \rightarrow \quad L > 662\,\mathrm{mm}.$$

Aufgabe 5

Für den Stab (Länge L, Biegesteifigkeit $EI_y < EI_z$), der beidseitig gelenkig gelagert ist und am linken Gelenk mit einer Drehfeder (Drehfederkonstante k) verbunden ist, berechne man die Knicklasten für die Fälle $kL = nEI_y$, $\quad n = 1, 2, 3.$



Das Biegemoment im Querschnitt $x = const$ lautet nach der Theorie 2. Ordnung

$$M_{by}(x) = F w(x) + B(L - x).$$

Zur Differentialgleichung für die Biegelinie

$$EI_y w''(x) = -M_{by}(x) \qquad \rightarrow \qquad w''(x) + \lambda^2 w(x) = \frac{B}{EI_y}(x - L), \qquad \lambda^2 := \frac{F}{EI_y},$$

gehören die drei Randbedingungen:

$$w(0) = 0, \qquad w(L) = 0, \qquad M_{by}(0) = -k\,w'(0).$$

denen die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$w(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + \frac{B}{\lambda^2 EI_y}(x - L)$$

angepaßt werden muß. Mit

$$w(0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_1 - \frac{BL}{\lambda^2 EI_y} = 0,$$

erhalten wir zunächst

$$w(x) = C_1\{\cos(\lambda x) + \frac{x}{L} - 1\} + C_2 \sin(\lambda x).$$

Die Ableitungen

$$w'(x) = C_1\{-\lambda \sin(\lambda x) + \frac{1}{L}\} + C_2 \lambda \cos(\lambda x), \qquad w''(x) = -\lambda^2 C_1 \cos(\lambda x) - C_2 \lambda^2 \sin(\lambda x),$$

führen in der dynamischen Randbedingung

$$M_{by}(0) = -k\,w'(0) \quad \rightarrow \quad EI_y\, w''(0) = k\,w'(0)$$

zu der Gleichung

$$-EI_y \lambda^2 C_1 = k(\frac{C_1}{L} + C_2 \lambda).$$

Die Randbedingung im Punkt $x = L$ liefert die dritte Gleichung

$$w(L) = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_1 \cos(\lambda L) + C_2 \sin(\lambda L) = 0.$$

Das homogene Gleichungssystem für die Konstanten C_1 und C_2

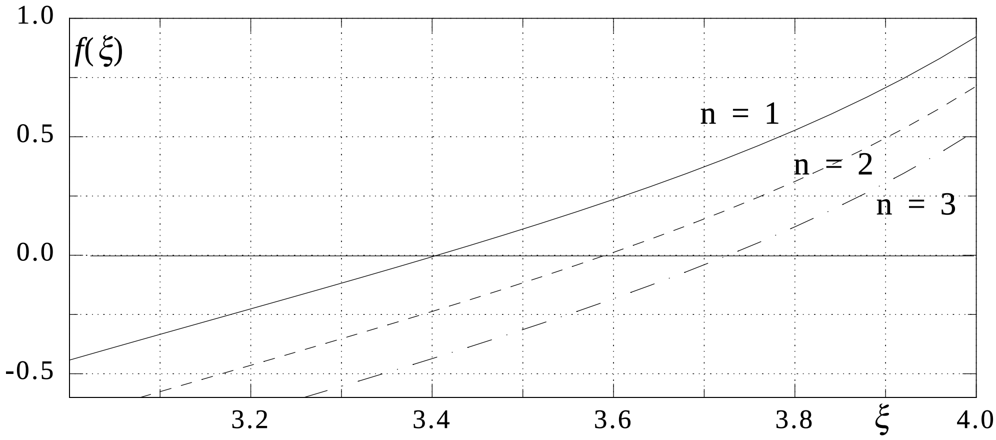
$$\cos(\lambda L) C_1 + \sin(\lambda L) C_2 = 0,$$

$$(\frac{k}{L} + EI_y \lambda^2) C_1 + k\lambda C_2 = 0,$$

hat nicht-triviale Lösungen dann und nur dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix null ist:

$$\det\begin{bmatrix} \cos(\lambda L) & \sin(\lambda L) \\ \frac{k}{L} + EI_y \lambda^2 & k\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad \rightarrow \qquad k\lambda \cos(\lambda L) - (\frac{k}{L} + EI_y \lambda^2) \sin(\lambda L) = 0,$$

$$f(\xi) := \tan\xi - \frac{n\xi}{n + \xi^2} = 0, \qquad \xi := \lambda L.$$



Die Nullstellen der Funktion $f(\xi)$ sind die Eigenwerte des Randwertproblems. Aus den kleinsten Werten für jedes n ergeben sich die entsprechenden Knicklasten F_{krit}.

Knicklasten:

n	$\xi = \lambda L$	$F_{krit} L^2 / (EI_y)$
1	3,4056	11,6
2	3,5909	12,9
3	3,7264	13,9

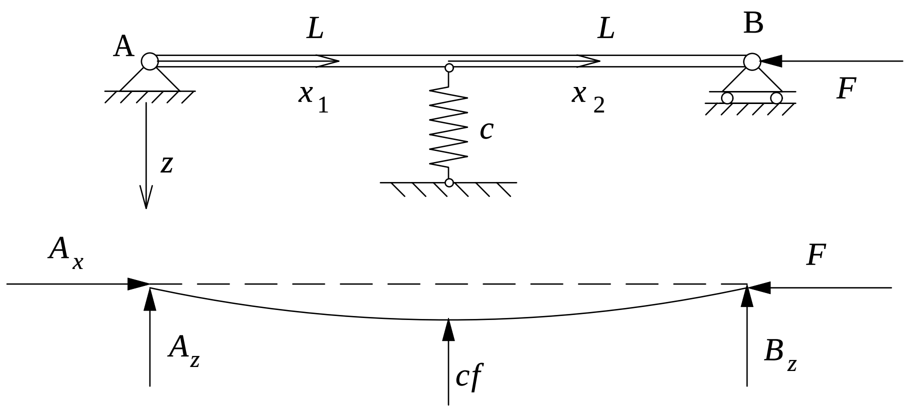
Aufgabe 6

Ein beidseitig gelenkig gelagerter Stab (Länge $2L$, Biegesteifigkeit $EI_y < EI_z$) wird in der Mitte zusätzlich durch eine Feder (Federsteifigkeit c) abgestützt. Man berechne die Knicklast mit

$$c = 5\,\mathrm{N/mm}, \quad L = 500\,\mathrm{mm}, \quad E = 2{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm^2},$$

Werkstoff ST37, Quadratischer Hohlquerschnitt (20mm, 18mm):

$$I_y = 4{,}5853 \cdot 10^3\,\mathrm{mm}^4$$



$$f := w_1(L) = w_2(0)$$

Momentengleichgewichtsbedingung:

$$2LB_z + Lcf = 0 \quad \to \quad B_z = -\frac{1}{2}cf.$$

Biegemomente nach der Theorie 2. Ordnung:

$$M_{by}(x_1) = Fw_1(x_1) + B_z(2L - x_1) + cf(L - x_1) = Fw_1(x_1) - \frac{cf}{2}x_1,$$

$$M_{by}(x_2) = Fw_2(x_2) + B_z(L - x_2) = Fw_2(x_2) + \frac{cf}{2}x_2 - \frac{cf}{2}L.$$

Differentialgleichungen für die Biegelinien:

$$EI_y w_1''(x_1) = -F w_1(x_1) + \frac{cf}{2} x_1, \qquad EI_y w_2''(x_2) = -F w_2(x_2) - \frac{cf}{2} x_2 + \frac{cf}{2} L,$$

$$\lambda^2 := \frac{F}{EI_y}, \qquad \gamma := \frac{c}{EI_y},$$

$$w_1''(x_1) + \lambda^2 w_1(x_1) = \frac{\gamma f}{2} x_1, \qquad w_2''(x_2) + \lambda^2 w_2(x_2) = \frac{\gamma f}{2}(L - x_2).$$

Allgemeine Lösungen der inhomogenen Differentialgleichungen:

$$w_1(x_1) = C_1 \cos(\lambda x_1) + C_2 \sin(\lambda x_1) + \frac{\gamma f}{2\lambda^2} x_1,$$

$$w_2(x_2) = C_3 \cos(\lambda x_2) + C_4 \sin(\lambda x_2) + \frac{\gamma f}{2\lambda^2}(L - x_2).$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$\begin{array}{ll}
w_1(0) = 0 & C_1 = 0, \\
w_1(L) = f & C_2 \lambda \sin(\lambda L) + \dfrac{\gamma f}{2\lambda^2} L = f, \\
w_2(0) = f & C_3 + \dfrac{\gamma f}{2\lambda^2} L = f, \\
w_2(L) = 0 & C_3 \cos(\lambda L) + C_4 \sin(\lambda L) = 0, \\
w_1'(L) = w_2'(0) & C_2 \lambda \cos(\lambda L) + \dfrac{\gamma f}{2\lambda^2} = C_4 \lambda - \dfrac{\gamma f}{2\lambda^2}.
\end{array}$$

Elimination der Verschiebung f liefert das homogene Gleichungssystem für C_2 und C_4:

$$C_2 \sin(\lambda L)\cos(\lambda L) + C_4 \sin(\lambda L) = 0,$$

$$C_2 \{\lambda \cos(\lambda L) + \frac{2\gamma}{2\lambda^2 - \gamma L} \sin(\lambda L)\} - C_4 \lambda = 0.$$

Lösungsbedingung:

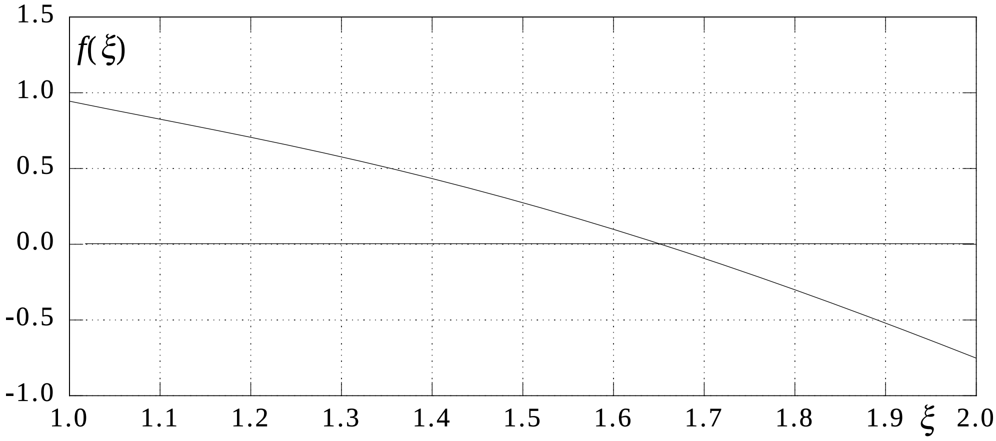
$$\det \begin{bmatrix} \sin(\lambda L)\cos(\lambda L) & \sin(\lambda L) \\ \lambda \cos(\lambda L) + \dfrac{2\gamma}{2\lambda^2 - \gamma L} \sin(\lambda L) & -\lambda \end{bmatrix} = 0, \qquad \xi := \lambda L,$$

$$2 \sin\xi \left(\xi \cos\xi + \frac{\gamma L^3}{2\xi^2 - \gamma L^3} \sin\xi \right) = 0,$$

$$\gamma L^3 = \frac{cL^3}{EI_y} = \frac{5\,\mathrm{N/mm} \cdot 500^3\,\mathrm{mm}^3}{2{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm^2} \cdot 4{,}5853 \cdot 10^3\,\mathrm{mm}^4} = 0{,}6491.$$

$$\sin\xi = 0 \qquad \rightarrow \qquad \xi = \pi$$

$$f(\xi) := \xi\cos\xi + \frac{\gamma L^3}{2\xi^2 - \gamma L^3}\sin\xi = 0$$



$$\xi = 1{,}652$$

Dieser Wert für λL ist kleiner als π, also wird

$$F_{krit} = (1{,}652)^2 \frac{EI_y}{L^2} = 1{,}05 \cdot 10^4\,\mathrm{N}.$$

Mit der reduzierten Knicklänge

$$F_{krit} = \pi^2 \frac{EI_y}{{L_{red}}^2}, \qquad \rightarrow \qquad L_{red} = \frac{\pi}{1{,}652} L = 951\,\mathrm{mm}$$

und dem Trägheitsradius

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{4{,}585 \cdot 10^3}{76}}\,\mathrm{mm} = 7{,}77\,\mathrm{mm}$$

ergibt sich der Schlankheitsgrad

$$s = \frac{L_{red}}{i_y} = 122,$$

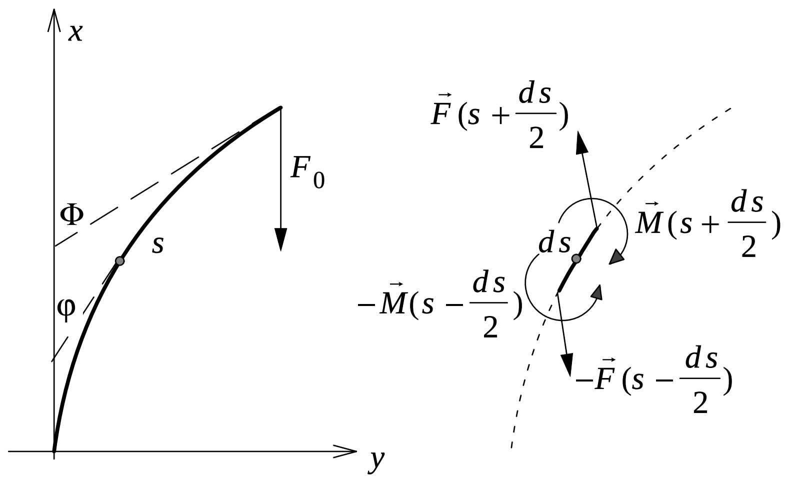
der über dem Grenzschlankheitsgrad für ST37 (=104) liegt; die nach der EULERschen Knicktheorie berechnete Knicklast ist also gültig.

Aufgabe 7

Ein eingespannter Stab mit geringer Biegesteifigkeit (Blattfeder) ist am freien Ende im ausgelenkten Zustand durch eine richtungstreue Kraft F_0 parallel zur ursprünglichen Stabachse belastet. Man berechne die Biegelinie bei großer Auslenkung.

Für die Tangenteneinheitsvektoren $\vec{e}_s(s)$, Hauptnormaleneinheitsvektoren $\vec{e}_n(s)$ und Krümmumgsradien $R(s)$ der zu berechnenden Biegelinie $\vec{r}(s)$ gilt

$$\vec{e}_s(s) = \frac{dr(s)}{ds}, \qquad \vec{e}_n(s) = R(s)\frac{d\vec{e}_s(s)}{ds} \; .$$



Auf ein Stabelement der Länge ds wirken Schnittkräfte und Schnittmomente, für die die folgenden Gleichgewichtsbedingungen gelten:

$$\vec{F}(s+\frac{ds}{2}) - \vec{F}(s-\frac{ds}{2}) = \vec{0},$$

$$\vec{M}(s+\frac{ds}{2}) - \vec{M}(s-\frac{ds}{2}) + \frac{ds}{2}\vec{e}_s(s)\times\vec{F}(s+\frac{ds}{2}) + \left(-\frac{ds}{2}\vec{e}_s(s)\right)\times\left(-\vec{F}(s-\frac{ds}{2})\right) = \vec{0}.$$

Mit den Zuwachsformeln

$$\vec{F}(s\pm\frac{ds}{2}) = \vec{F}(s) \pm \frac{d\vec{F}(s)}{ds}\frac{ds}{2}, \qquad \vec{M}(s\pm\frac{ds}{2}) = \vec{M}(s) \pm \frac{d\vec{M}(s)}{ds}\frac{ds}{2},$$

erhalten wir die differentiellen Gleichgewichtsbedingungen für die Schnittlasten

$$\frac{d\vec{F}(s)}{ds} = \vec{0}, \qquad \frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \vec{e}_s(s)\times\vec{F}(s) = \vec{0}.$$

Das Stoffgesetz lautet

$$M(s)\vec{e}_z = \frac{EI_z}{R(s)}\vec{e}_z = \frac{EI_z}{R(s)}\vec{e}_s(s)\times\vec{e}_n(s) = EI_z\vec{e}_s(s)\times\frac{d\vec{e}_s(s)}{ds}.$$

Aus der Kräfte-Gleichgewichtsbedingung folgt

$$\vec{F}(s) = const \qquad \rightarrow \qquad \vec{F}(s) = \vec{F}_0 = -F_0\vec{e}_x,$$

und aus der Momenten-Gleichgewichtsbedingung

$$EI_z\vec{e}_s(s)\times\frac{d^2\vec{e}_s(s)}{ds^2} + \vec{e}_s(s)\times\vec{F}_0 = \vec{0}.$$

Ist $\varphi(s)$ der Winkel des Tangenteneinheitsvektors mit der x-Achse, so gilt

$$\vec{e}_s = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{d\vec{e}_s}{ds} = \begin{bmatrix} -\varphi'\sin\varphi \\ \varphi'\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{d^2\vec{e}_s}{ds^2} = \begin{bmatrix} -\varphi''\sin\varphi - \varphi'^2\cos\varphi \\ \varphi''\cos\varphi - \varphi'^2\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$EI_z \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\varphi''\sin\varphi - \varphi'^2\cos\varphi \\ \varphi''\cos\varphi - \varphi'^2\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -F_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$EI_z\varphi'' + F_0\sin\varphi = 0.$$

Mit den Randbedingungen

$$\varphi(0) = 0, \qquad M(L)\vec{e}_z = EI_z\,\vec{e}_s \times \left.\frac{d\vec{e}_s}{ds}\right|_{s=L} = EI_z\varphi'(L) = 0$$

ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\varphi'' + \lambda^2\sin\varphi = 0, \qquad \lambda^2 := \frac{F_0}{EI_z}$$

zu berechnen. Weil

$$\{\varphi'' + \lambda^2\sin\varphi\}\varphi' = \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{2}\varphi'^2 - \lambda^2\cos\varphi\right\} = 0$$

gilt, erhalten wir zunächst mit $\varphi(L) = \Phi$

$$\varphi'^2 = 2\lambda^2(\cos\varphi - \cos\Phi).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d\varphi}{\lambda\sqrt{2}\sqrt{\cos\varphi - \cos\Phi}} = ds \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}\int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\Phi}} = L.$$

Im Integral setzen wir

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2(\varphi/2), \qquad \cos\Phi = 1 - 2\sin^2(\Phi/2),$$

dann wird

$$\int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\Phi/2) - \sin^2(\varphi/2)}} = 2\lambda L.$$

Mit

$$\sin(\Phi/2) =: k, \qquad \sin(\varphi/2) =: k\sin u, \qquad d\varphi = \frac{2k\cos u}{\cos(\varphi/2)}du = \frac{2k\cos u}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}du,$$

$$\varphi = 0 \;\rightarrow\; u = 0; \qquad \varphi = \Phi \;\rightarrow\; \sin u = 1 \;\rightarrow\; u = \pi/2,$$

erhalten wir schließlich

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = \lambda L.$$

Das Integral ist eine vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung und steht ausgewertet in Formelsammlungen zur Verfügung.

Zu einem Wert von λL muß der Parameter k bestimmt werden und daraus der Neigungswinkel Φ am Stabende.

Ist insbesondere $k = 0$, also auch $\Phi = 0$, so wird $\lambda L = \pi/2$ und

$$(\lambda L)^2 = \frac{\pi^2}{4} \qquad \to \qquad F_0 = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI_z}{L^2} = \text{EULERsche Knicklast}$$

Ist der Winkel Φ bekannt, so lautet mit

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = \sin\varphi,$$

und

$$\frac{d\varphi}{ds} = \varphi' = \lambda\sqrt{2}\sqrt{\cos\varphi - \cos\Phi}$$

das Differentialgleichungssystem für die Biegelinie

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\lambda\sqrt{2}\sqrt{\cos\varphi - \cos\Phi}}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\lambda\sqrt{2}\sqrt{\cos\varphi - \cos\Phi}}.$$

Ist beispielsweise

$$\lambda L = 2.08744 \qquad \to \qquad F_0 = (\lambda L)^2 \frac{EI_z}{L^2} = 4.3574 \frac{EI_z}{L^2},$$

so wird

$$\Phi = 2$$

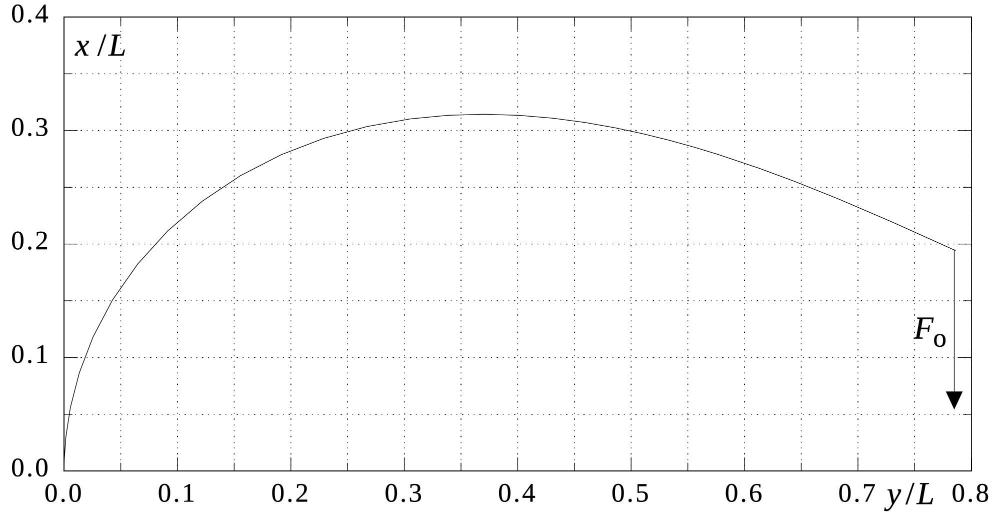
und mit

$$\xi := x/L, \qquad \eta := x/L,$$

lautet das Differentialgleichungssystem

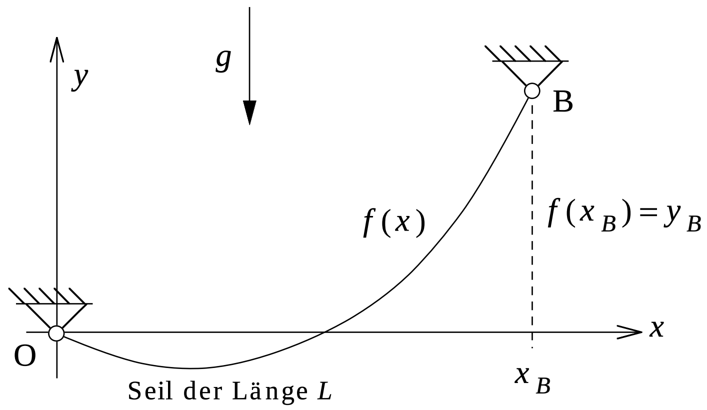
$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\lambda L\sqrt{2}\sqrt{\cos\varphi - \cos 2}}, \qquad \frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\lambda L\sqrt{2}\sqrt{\cos\varphi - \cos 2}}.$$

Die Anfangsbedingungen lauten $\xi(0) = \eta(0) = 0$, und integriert werden muß von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2$. So ergibt sich die in der folgenden Abbildung dargestellte Biegelinie, die man Elastika nennt und die schon von EULER berechnet wurde.



0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
x /L
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
y/L
0.8
F_o

Aufgabe 1



Ein homogenes, biegeweiches Seil der Masse m und der konstanten Länge L ist in den Punkten O und B aufgehängt und nimmt im Schwerkraftfeld, das in negativer y-Richtung wirken soll, eine Gleichgewichtskonfiguration in der vertikalen xy-Ebene an, die durch die Funktion $y = f(x)$, die Seillinie, beschrieben wird. $f(x)$ soll berechnet werden.

An der Stelle x hat die Seillinie eine Tangente mit dem Neigungswinkel α gegen die x-Achse. Es gilt

$$\frac{df(x)}{dx} =: f'(x) = \tan\alpha.$$

Im Seil wirkt an der Stelle x die tangentiale Seilkraft

$$\vec{S}(x) = S_x(x)\vec{e}_x + S_y(x)\vec{e}_y.$$

Mit den beiden Komponenten des Seilkraft können wir also schreiben

$$\frac{S_y(x)}{S_x(x)} = \tan\alpha = f'(x), \qquad \rightarrow \qquad S_y(x) = f'(x)S_x(x).$$

Ein infinitesimales Seilelement über dem Intervall $[(x - dx/2),(x + dx/2)]$ auf der x-Achse hat die Länge ds und die Masse

$$dm = \frac{m}{L}ds.$$

Mit dem Satz von PYTHAGORAS erhalten wir

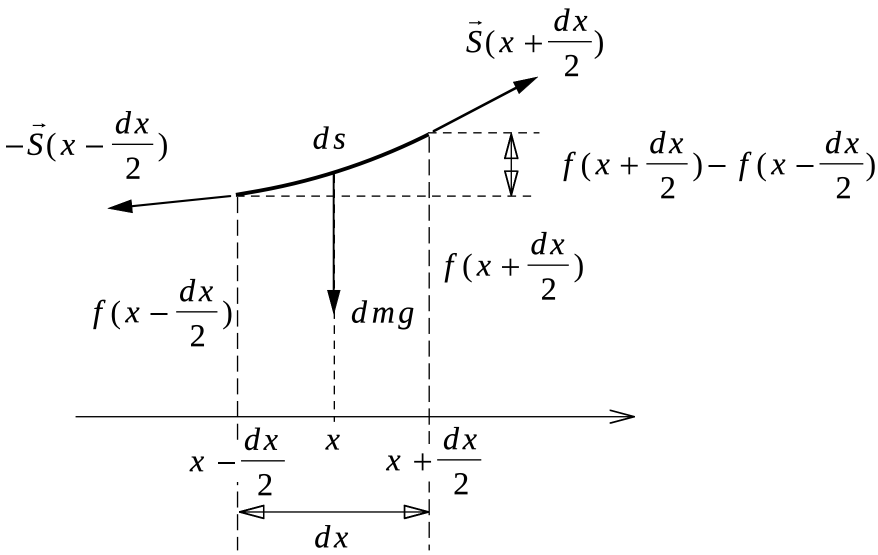
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + \{f(x + \frac{dx}{2}) - f(x - \frac{dx}{2})\}^2},$$

und mit den Zuwachsformeln

$$f(x + \frac{dx}{2}) = f(x) + f'(x)\frac{dx}{2}, \qquad f(x - \frac{dx}{2}) = f(x) - f'(x)\frac{dx}{2},$$

wird

$$ds = \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx.$$



Die Seillänge L muß sich ergeben, wenn wir die Längen aller Seilelemente addieren:

$$\int_0^{x_B} \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = L.$$

Auf das Seilelement wirken drei Kräfte: Die Gewichtskraft $-dmg\vec{e}_y$ und die beiden Seilkräfte

$$\vec{S}(x+\frac{dx}{2}) = \vec{S}(x) + \frac{d\vec{S}(x)}{dx}\frac{dx}{2}, \qquad -\vec{S}(x-\frac{dx}{2}) = -\{\vec{S}(x) - \frac{d\vec{S}(x)}{dx}\frac{dx}{2}\}.$$

Das Seilelement befindet sich im Gleichgewichtszustand, wenn die Summe aller Kraftvektoren null ist:

$$\vec{S}(x+\frac{dx}{2}) + \{-\vec{S}(x-\frac{dx}{2})\} - dmg\,\vec{e}_y = \vec{0}.$$

Daraus ergibt sich mit den Zuwachsformeln für die Seilkraft und

$$dm = \frac{m}{L}ds = \frac{m}{L}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

die differentielle vektorielle Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d\vec{S}(x)}{dx} - \frac{mg}{L}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,\vec{e}_y = \vec{0},$$

in der sich zwei skalare Gleichgewichtsbedingungen verbergen:

$$\frac{dS_x(x)}{dx} = 0,$$

$$\frac{dS_y(x)}{dx} - \frac{mg}{L}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = 0.$$

Aus der ersten Differentialgleichung folgt, daß die horizontale x-Komponente der Seilkraft konstant ist,

$$S_x = H_0 = const.$$

Wegen der zur Seillinie tangentialen Orientierung der Seilkraft konnten wir oben die Beziehung

$$S_y(x) = f'(x) S_x(x)$$

ableiten, und somit wird

$$S_y(x) = H_0 f'(x).$$

Dieses Zwischenergebnis setzen wir nun in die Differentialgleichung für die Seilkraftkomponente S_y ein und erhalten schließlich eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Seillinie $f(x)$

$$f''(x) - \lambda\sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = 0, \qquad \lambda := \frac{mg}{LH_0}.$$

Wir setzen vorübergehend

$$v(x) := f'(x),$$

so daß sich für $v(x)$ die Differentialgleichung erster Ordnung

$$v'(x) = \lambda\sqrt{1+\{v(x)\}^2}$$

ergibt. Aus

$$\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\frac{dv}{dx} = \lambda \qquad \to \qquad \frac{d\,\operatorname{arsinh} v}{dv}\frac{dv}{dx} = \lambda \qquad \to \qquad \frac{d\,\operatorname{arsinh} v(x)}{dx} = \lambda,$$

folgt

$$\operatorname{arsinh} v(x) = \lambda x + C_1 \qquad \to \qquad v(x) = \sinh(\lambda x + C_1).$$

Nun kehren wir wieder zur Darstellung mit der Funktion $f(x)$ zurück und erhalten:

$$f'(x) = \sinh(\lambda x + C_1) \qquad \to \qquad f(x) = \frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda x + C_1) + C_2.$$

Mit der Randbedingung im Befestigungspunkt O

$$f(x=0) = 0 \qquad \to \qquad \frac{1}{\lambda}\cosh(C_1) + C_2 = 0$$

ergibt sich

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\{\cosh(\lambda x + C_1) - \cosh(C_1)\}.$$

Für die Hyperbelfunktionen gilt das Additionstheorem

$$\cosh a - \cosh b = 2\sinh\frac{a+b}{2}\sinh\frac{a-b}{2},$$

also können wir auch schreiben

$$f(x) = \frac{2}{\lambda}\sinh\frac{\lambda x + 2C_1}{2}\sinh\frac{\lambda x}{2}.$$

Noch sind die in

$$\lambda := \frac{mg}{LH_0}$$

enthaltene horizontale Kraftkomponente H_0 und die Konstante C_1 unbekannt. Also werden noch zwei Bedingungen benötigt: Die Randbedingung für den Befestigungspunkt B

$$f(x = x_B) = y_B,$$

liefert die Beziehung

$$\frac{2}{\lambda}\sinh\frac{\lambda x_B + 2C_1}{2}\sinh\frac{\lambda x_B}{2} = y_B$$

und die Gleichung für die Seillinie muß der gegebenen Seillänge L angepaßt werden:

$$\int_0^{x_B}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = L \qquad \to \qquad \int_0^{x_B}\underbrace{\sqrt{1+\sinh^2(\lambda x + C_1)}}_{\cosh(\lambda x + C_1\}}dx = L,$$

$$\frac{1}{\lambda}\{\sinh(\lambda x_B + C_1) - \sinh C_1\} = L.$$

Das Additionstheorem

$$\sinh a - \sinh b = 2\sinh\frac{a-b}{2}\cosh\frac{a+b}{2},$$

erlaubt für die Seillängenbedingung die Darstellung

$$\frac{2}{\lambda}\sinh\frac{\lambda x_B}{2}\cosh\frac{\lambda x_B + 2C_1}{2} = L.$$

Aus den beiden nun zur Verfügung stehenden Gleichungen

$$\frac{2}{\lambda}\sinh\frac{\lambda x_B + 2C_1}{2}\sinh\frac{\lambda x_B}{2} = y_B,$$

$$\frac{2}{\lambda}\sinh\frac{\lambda x_B}{2}\cosh\frac{\lambda x_B + 2C_1}{2} = L,$$

folgt wegen

$$\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$$

$$L^2 - y_B{}^2 = \frac{4}{\lambda^2}\sinh^2\left(\frac{\lambda x_B}{2}\right), \qquad \to \qquad \frac{L^2 - y_B{}^2}{x_B{}^2} = \left(\frac{2}{\lambda x_B}\right)^2 \sinh^2\left(\frac{\lambda x_B}{2}\right),$$

und mit

$$\delta := \frac{\lambda x_B}{2}$$

erhalten wir die nichtlineare Gleichung für den Parameter δ

$$\frac{\sinh\delta}{\delta} = \frac{\sqrt{L^2 - y_B{}^2}}{x_B}.$$

Aus den bekannten Werten x_B, y_B und L bestimmt man zuerst δ und danach

$$H_0 = \frac{mg}{L\lambda} = \frac{mgx_B}{2L\delta}.$$

Für die Konstante C_1 folgt aus den beiden Gleichungen

$$\frac{2}{\lambda}\sinh(\delta + C_1)\sinh(\delta) = y_B,$$

$$\frac{2}{\lambda}\sinh(\delta)\cosh(\delta + C_1) = L,$$

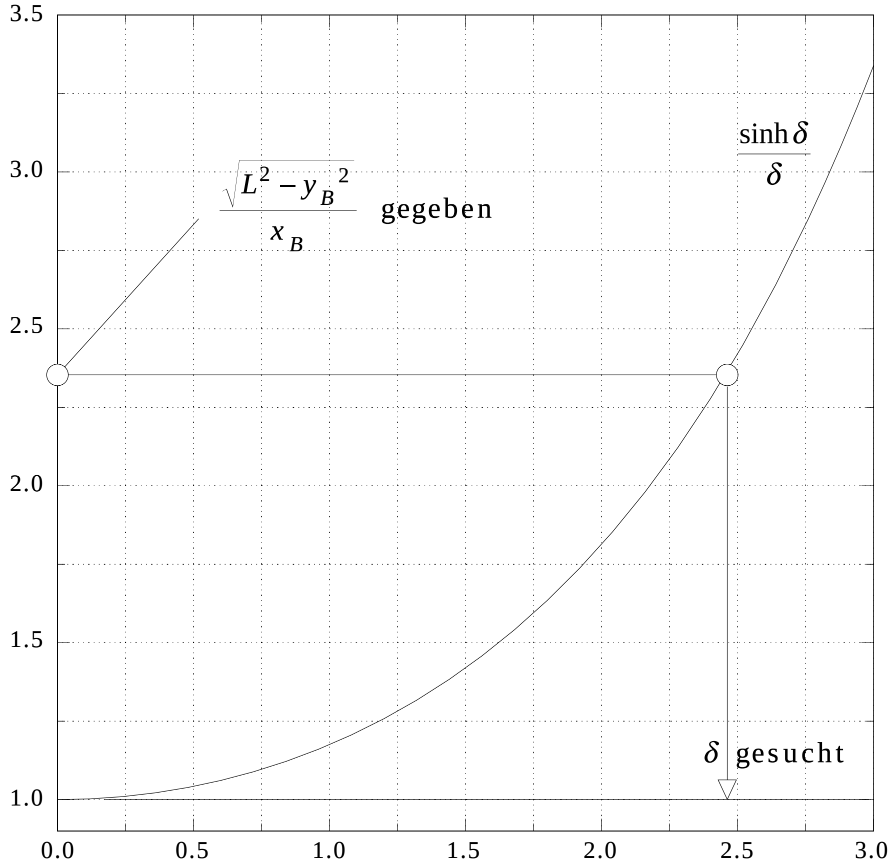
durch Division

$$\tanh(\delta + C_1) = \frac{y_B}{L} \qquad \to \qquad C_1 = \operatorname{artanh}\left(\frac{y_B}{L}\right) - \delta.$$

Die Gleichung für die Seillinie lautet schließlich

$$f(x) = \frac{x_B}{2\delta}\left\{\cosh\left(2\delta\frac{x}{x_B} + C_1\right) - \cosh(C_1)\right\}.$$

Mit Hilfe der folgenden Abbildung der Funktion $(\sinh\delta)/\delta$ kann man einen zu $\sqrt{L^2 - y_B{}^2}\,/x_B$ gehörenden Näherungswert für δ ermitteln und dann nach dem NEWTONschen Näherungsverfahren verbessern. Anschließend wird die Konstante C_1 bestimmt.



Ist beispielsweise $L = 10\,\text{m}$, $x_{\text{B}} = 4\,\text{m}$, $y_{\text{B}} = 3\,\text{m}$, so wird

$$\frac{\sqrt{L^2 - y_B^{\,2}}}{x_B} = 2.38485, \qquad \delta = 2.47604, \qquad C_1 = -2.16652.$$

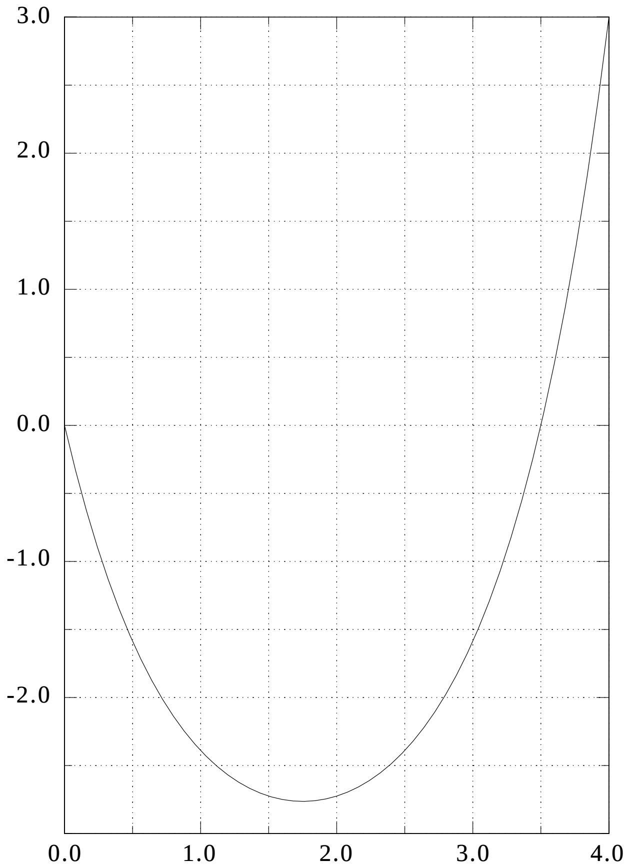
$$H_0 = mg\frac{x_B}{2L\delta} = 0.0808mg.$$

Die Seillinie ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

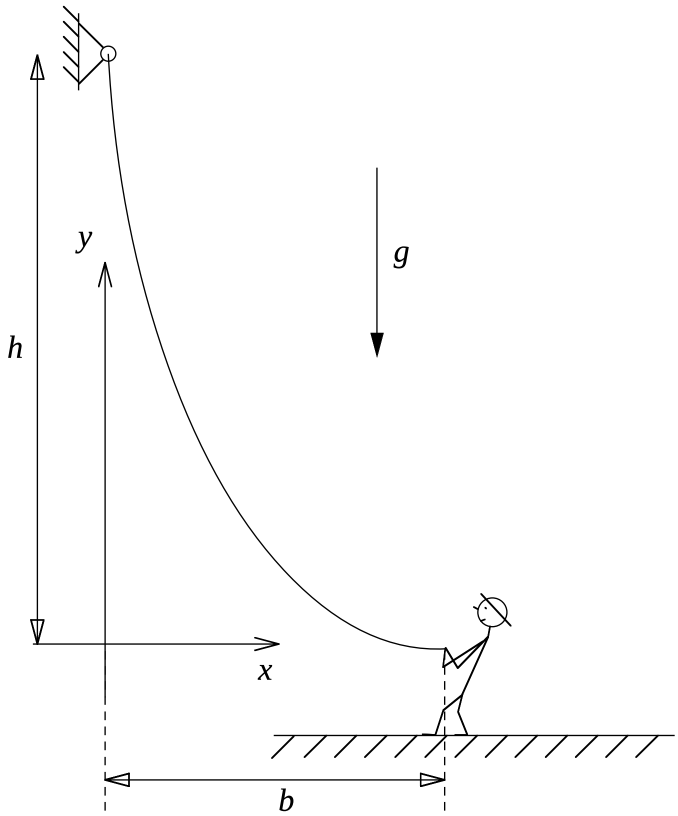
Mit H_0 ist auch die y-Komponente der Seilkraft bekannt:

$$S_y(x) = H_0 f'(x) = H_0 \sinh(\lambda x + C_1) = H_0 \sinh(2\delta\frac{x}{x_B} + C_1).$$

Im tiefsten Seilpunkt ist $f'(x) = 0$ und die Seilkraft nimmt dort den kleinsten Wert H_0 an.



Aufgabe 2



Ein schweres Seil ist im Punkte $(0,h)$ aufgehängt und wird im Punkt $(b,0)$ so gehalten, daß es dort eine horizontale Tangente besitzt. Man berechne für $h = 2b$ die erforderliche Horizontalkraft H im Punkte $(b,0)$.

Seilliniengleichung:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda x + C_1) + C_2, \qquad \lambda := \frac{\gamma}{H}$$

(γ: Gewichtskraft des Seiles pro Längeneinheit)

Randbedingungen:

$$f(0) = h, \qquad f'(b) = 0.$$

$$f(0) = h, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\lambda}\cosh(C_1) + C_2 = h,$$

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\left[\cosh(\lambda x + C_1) - \cosh(C_1)\right] + h,$$

$$f'(x) = \sinh(\lambda x + C_1);$$

$$f'(b) = 0, \quad \rightarrow \quad \sinh(\lambda b + C_1) = 0, \quad \rightarrow \quad C_1 = -\lambda b,$$

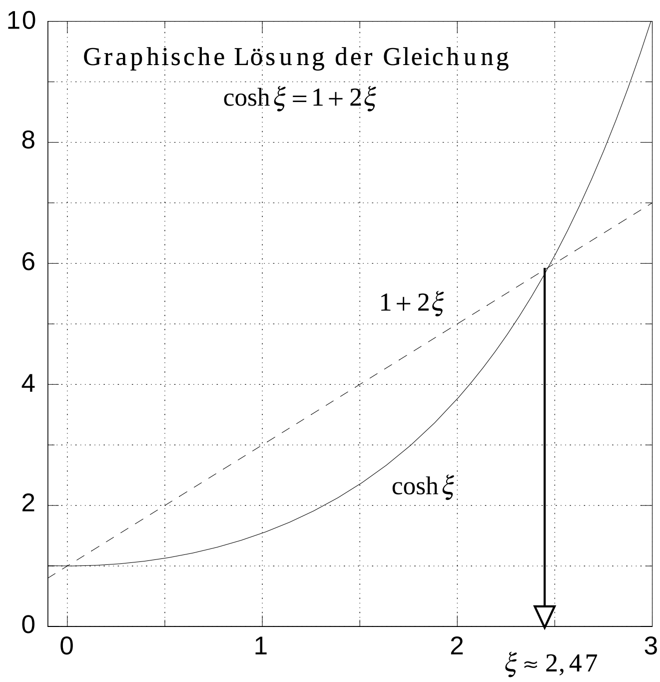
$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\left[\cosh(\lambda x - \lambda b) - \cosh(\lambda b)\right] + h.$$

Im Punkt $(b,0)$ gilt außerdem

$$f(b) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\lambda}\left[1 - \cosh(\lambda b)\right] + h = 0 \quad \rightarrow \quad \cosh(\lambda b) = 1 + \lambda h.$$

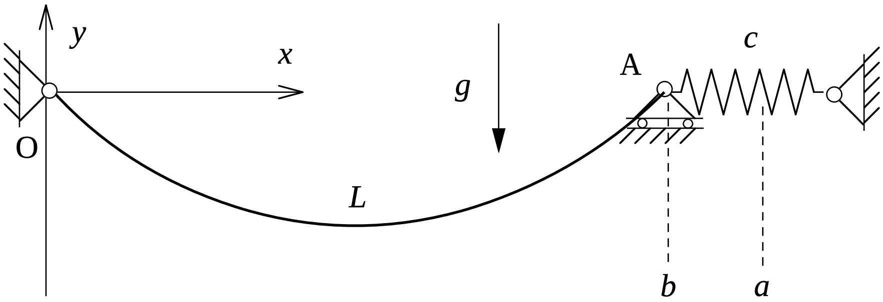
Ist insbesondere $h = 2b$, so wird mit $\lambda b =: \xi$

$$\cosh\xi = 1 + 2\xi \quad \rightarrow \quad \xi \approx 2,47$$



$$\lambda = \frac{\xi}{b}, \qquad H = \frac{\gamma}{\lambda} = \frac{\gamma b}{\xi} = 0,4\,\gamma b.$$

Aufgabe 3



Ein schweres Seil (Gewicht pro Längeneinheit des Seils: γ) ist in den Punkten O und A aufgehängt. Der Punkt A ist mit einer Feder (Federsteifigkeit c) verbunden und wird auf der x-Achse geführt. Wenn die Feder entspannt ist, befindet sich der Punkt A an der Stelle $x = a$.
Man berechne $x = b$ für $L = 5a$ und $2c/\gamma = 0{,}5$.

Gleichung der Seillinie:

$$f(x) = \frac{2}{\lambda}\sinh(\frac{\lambda x}{2} + C_1)\sinh(\frac{\lambda x}{2}), \qquad \lambda := \frac{\gamma}{H_0}.$$

Randbedingungen:

$$f(b) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{\lambda}\sinh(\frac{\lambda b}{2} + C_1)\sinh(\frac{\lambda b}{2}) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{\lambda b}{2}.$$

Im Punkt A ist die konstante horizontale Komponente H_0 der Seilkraft gleich der Federkraft:

$$H_0 = c(a-b) \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\gamma}{c(a-b)}.$$

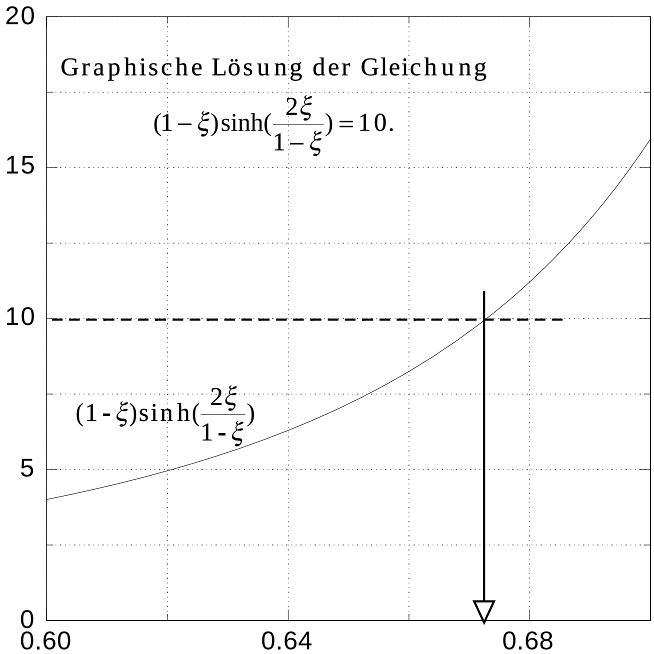
Aus der Bedingung für die Seillänge

$$\frac{2}{\lambda}\cosh(\frac{\lambda b}{2} + C_1)\sinh(\frac{\lambda b}{2}) = L \quad \rightarrow \quad \frac{2c(a-b)}{\gamma}\sinh(\frac{\gamma}{2c}\frac{b}{a-b}) = L,$$

$$\mu := \frac{2c}{\gamma}, \qquad \xi := \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \mu(1-\xi)\sinh(\frac{1}{\mu}\frac{\xi}{1-\xi}) = \frac{L}{a},$$

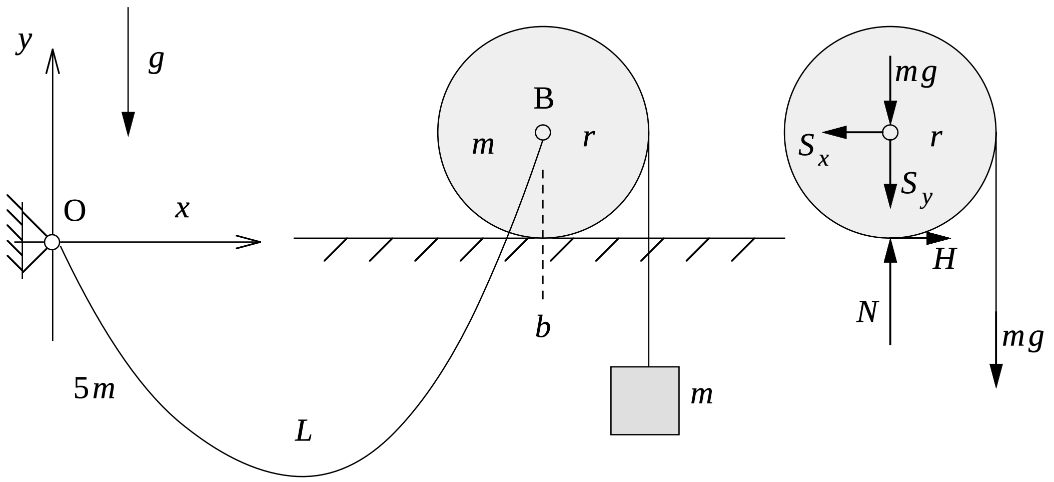
erhalten wir mit den speziellen Werten $L = 5a$ und $2c/\gamma = 0{,}5$ die Gleichung

$$(1-\xi)\sinh(\frac{2\xi}{1-\xi}) = 10.$$



$$\xi = 0{,}673, \qquad b = 0{,}673a.$$

Aufgabe 4



Ein Seil (Länge $L = 10r$, Masse $5m$) hängt im Schwerkraftfeld zwischen einem raumfesten Punkt O und dem Schwerpunkt B einer Kreisscheibe (Radius r, Masse m). Auf die Kreisscheibe ist ein Faden gewickelt, an dem eine Masse m aufgehängt ist.

Man berechne die Gleichgewichtslage $x_B = b$ des Punktes B, die Koordinate x^* des tiefsten Seilpunktes und die Seilkraftkomponenten im Punkt B.

Gleichgewichtsbedingungen für die Kreisscheibe:

$$H - S_x = 0,$$
$$N - S_y - mg - mg = 0, \quad \rightarrow \quad H = mg, \quad S_x = mg.$$
$$Hr - mgr = 0;$$

S_x ist die konstante horizontale Seilkraftkomponente.

Gewichtskraft pro Längeneinheit des Seils:

$$\gamma = \frac{5mg}{10r} = 0,5\frac{mg}{r}.$$

Gleichung der Seillinie:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda x + C_1) + C_2, \qquad \lambda := \frac{\gamma}{S_x} = \frac{0,5}{r}.$$

$$f(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{\lambda}\cosh C_1,$$

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\{\cosh(\lambda x + C_1) - \cosh C_1\} = \frac{2}{\lambda}\sinh(\frac{\lambda x}{2} + C_1)\sinh(\frac{\lambda x}{2}).$$

Randbedingung in B:

$$f(b) = r \quad \rightarrow \quad \frac{2}{\lambda}\sinh(\frac{\lambda b}{2} + C_1)\sinh(\frac{\lambda b}{2}) = r.$$

Berechnung der Seillänge:

$$L = \int_0^b \cosh((\lambda x + C_1)dx = \frac{1}{\lambda}\{\sinh(\lambda b + C_1) - \sinh C_1\},$$

$$\frac{2}{\lambda}\sinh(\frac{\lambda b}{2})\cosh(\frac{\lambda b}{2} + C_1) = L.$$

Damit stehen zur Bestimmung von b und C_1 zwei Gleichungen zur Verfügung.

$$\frac{4}{\lambda^2}\sinh^2(\frac{\lambda b}{2})\sinh^2(\frac{\lambda b}{2} + C_1) = r^2,$$
$$\frac{4}{\lambda^2}\sinh^2(\frac{\lambda b}{2})\cosh^2(\frac{\lambda b}{2} + C_1) = L^2,$$

$$\frac{4}{\lambda^2}\sinh^2(\frac{\lambda b}{2}) = L^2 - r^2 \quad \rightarrow \quad \sinh(\frac{\lambda b}{2}) = \frac{\lambda}{2}\sqrt{L^2 - r^2},$$

$$b = \frac{2}{\lambda}\,\mathrm{ar\,sinh}(\frac{\lambda}{2}\sqrt{L^2 - r^2}) = 4r\,\mathrm{ar\,sinh}(\frac{\sqrt{99}}{4}) = 6{,}57r.$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{\lambda}\sinh(\frac{\lambda b}{2} + C_1)\sinh(\frac{\lambda b}{2}) = r,\\ &\frac{2}{\lambda}\sinh(\frac{\lambda b}{2})\cosh(\frac{\lambda b}{2} + C_1) = L, \end{aligned}\right. \quad \to \quad \tanh(\frac{\lambda b}{2} + C_1) = \frac{r}{L} \quad \to \quad C_1 = -1{,}5423.$$

Im Punkt x^* hat die Seillinie eine horizontale Tangente:

$$f'(x^*) = 0 \quad \to \quad \sinh(\lambda x^* + C_1) = 0 \quad \to \quad x^* = -\frac{C_1}{\lambda} = 3{,}08r.$$

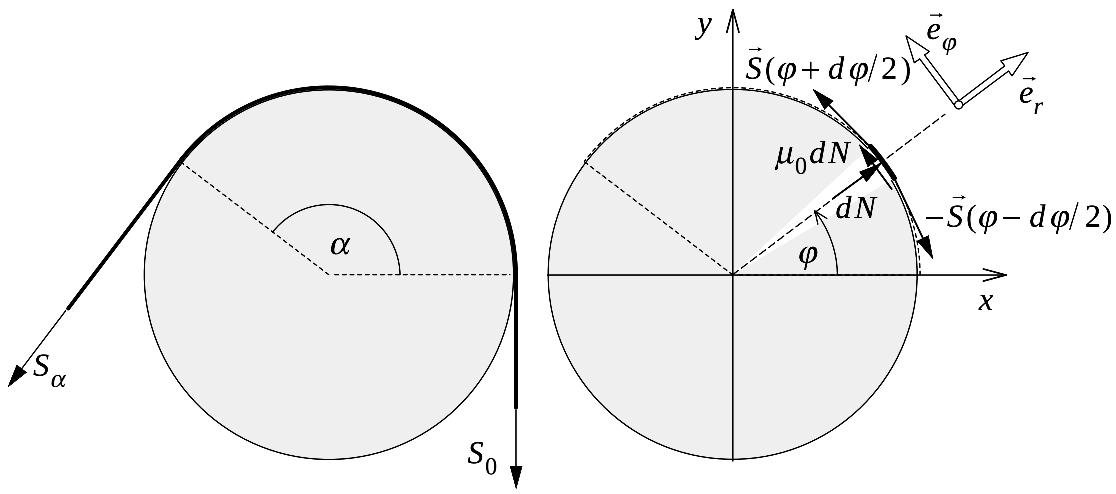
Die Seilneigung im Punkt $x = b$ hat den Wert

$$\tan\beta = f'(b) = \sinh(\lambda b + C_1) = 2{,}769.$$

Für die vertikale Seilkraftkomponente in B gilt

$$S_y = \tan\beta S_x = mg\tan\beta = 2{,}77mg.$$

Aufgabe 5



Ein unausdehnbares, ideal biegeweiches Seil sei um einen starren Kreiszylinder gewickelt. Den Umschlingungswinkel bezeichnen wir mit α und den Haftreibungskoeffizienten für die Reibungsverhältnisse zwischen dem Seil und der Zylinderwand mit μ_0. An den beiden Seilenden sollen die Kräfte S_0 und S_α angreifen und das Seil straff gespannt im Gleichgewicht halten. Berechnet werden soll, für welche Werte von S_α bei gegebener Seilkraft S_0 das Seil gerade noch nicht im Uhrzeigersinn über den Kreiszylinder rutscht.

In einem Schnitt $\varphi = const$ wirkt die Seilkraft $\vec{S}(\varphi) = S(\varphi)\,\vec{e}_\varphi(\varphi)$. Die Summe der an einem Seilelement der Länge $rd\varphi$ angreifenden Kräfte muß null werden.

$$\vec{S}(\varphi + \frac{d\varphi}{2}) - \vec{S}(\varphi - \frac{d\varphi}{2}) + dN(\varphi)\vec{e}_r(\varphi) + \mu_o dN(\varphi)\vec{e}_\varphi(\varphi) = \vec{0},$$

$$\frac{d\vec{S}(\varphi)}{d\varphi} d\varphi + dN(\varphi)\vec{e}_r(\varphi) + \mu_o dN(\varphi)\vec{e}_\varphi(\varphi) = \vec{0}.$$

Mit

$$\frac{d\vec{S}}{d\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}\vec{e}_\varphi + S\,\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}\vec{e}_\varphi - S\,\vec{e}_r$$

erhalten wir die vektorielle Differentialgleichung

$$\{-S(\varphi) + \frac{dN(\varphi)}{d\varphi}\}\vec{e}_r + \{\frac{dS(\varphi)}{d\varphi} + \mu_o\,\frac{dN(\varphi)}{d\varphi}\}\vec{e}_\varphi = \vec{0},$$

aus der sich die Differentialgleichung für die Seilkraft $S(\varphi)$ ergibt:

$$\frac{dS(\varphi)}{d\varphi} + \mu_o S(\varphi) = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung

$$S(\varphi) = C\,e^{-\mu_o \varphi}$$

muß der Randbedingung

$$S(0) = S_o$$

angepaßt werden. Deshalb wird

$$S(\varphi) = S_o e^{-\mu_o \varphi},$$

und

$$S_\alpha = S_o e^{-\mu_o \alpha}.$$

Diese Formel für die Seilkraft nennt man **EYTELWEINsche Formel**.

Für den Fall, daß das Seil gerade noch nicht im Gegenuhrzeigersinn über den Kreiszylinder rutscht, ändert sich im Freikörperbild für das Seilelement nur die Richtung der Haftreibungskraft:

$$\mu_o dN\vec{e}_\varphi \quad \rightarrow \quad -\mu_o dN\vec{e}_\varphi.$$

Dementsprechend wird

$$S_\alpha = S_o e^{\mu_o \alpha}.$$

Das um den Kreiszylinder geschlungene Seil befindet sich also in einem

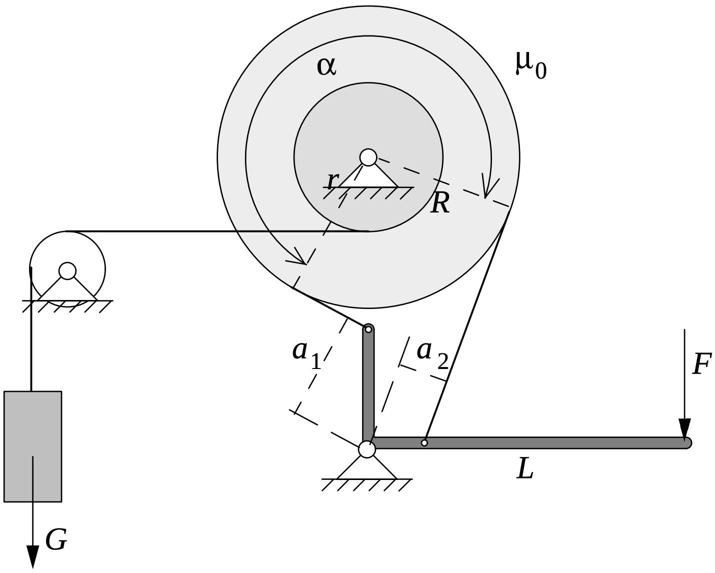
Gleichgewichtszustand, wenn

$$S_o e^{-\mu_o \alpha} \le S_\alpha \le S_o e^{\mu_o \alpha}$$

gilt.

Ist beispielsweise $\alpha = \pi$, $\mu_0 = 0{,}3$, so kann S_α einen Wert zwischen $0{,}389\,S_0$ und $2{,}566\,S_0$ annehmen, ohne daß das Seil rutscht.

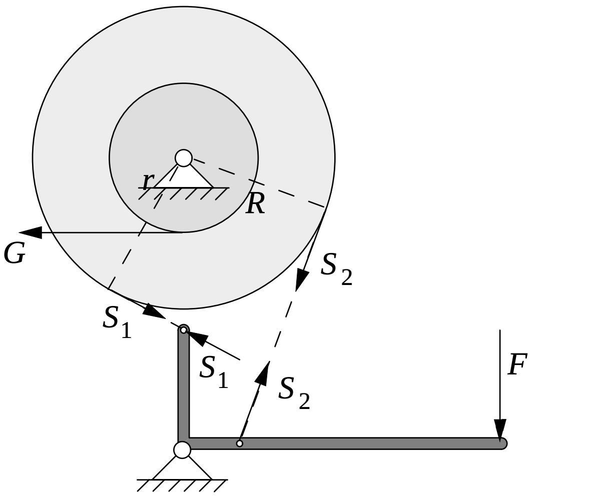
Aufgabe 6



Eine Seilwinde (Radius r) ist fest mit einer Bandbremse (Trommelradius R) verbunden. An einem aufgewickelten Seil hängt ein Körper, der auf das S die Gewichtskraft G überträgt. Man berechne die Kraft F, die ein Absenk des Körpers gerade noch verhindert.

Wenn sich die Seilscheibe gerade noch nicht im Uhrzeigersinn dreht, muß das vom Hebel auf die Bremsscheibe wirkende Moment in entgegengesetzter Richtung wirken. Also ist die am kurzen Hebelarm angreifende Seilkraft S_1 größer als die am langen Hebelarm angreifende Kraft S_2. Mit dem Umschlingungswinkel α wird im Grenzfall des Gleichgewichts

$$S_1 = S_2 e^{\mu_0 \alpha}.$$



Momentengleichgewichtsbedingungen für Hebel und Scheibe:

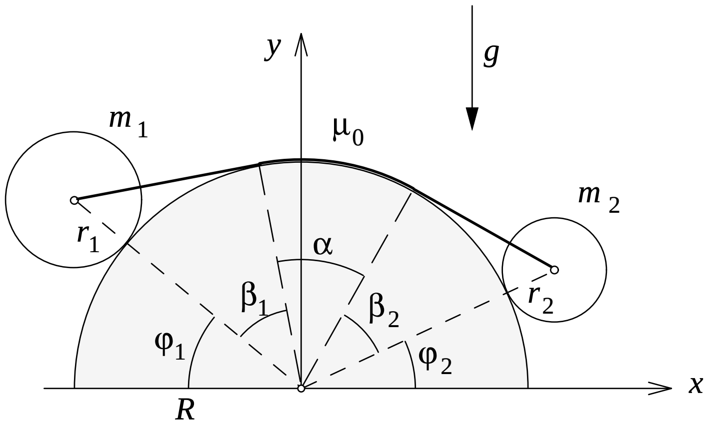
$$S_1 a_1 + S_2 a_2 - FL = 0,$$
$$S_1 R - S_2 R - Gr = 0;$$

$$S_2 (e^{\mu_0 \alpha} - 1) = \frac{r}{R} G, \qquad S_2 (a_1 e^{\mu_0 \alpha} + a_2) = FL,$$

$$S_2 = \frac{1}{e^{\mu_0 \alpha} - 1} \frac{r}{R} G, \qquad S_1 = \frac{e^{\mu_0 \alpha}}{e^{\mu_0 \alpha} - 1} \frac{r}{R} G,$$

$$F = \frac{a_1 e^{\mu_0 \alpha} + a_2}{(e^{\mu_0 \alpha} - 1) L} \frac{r}{R} G.$$

Aufgabe 7

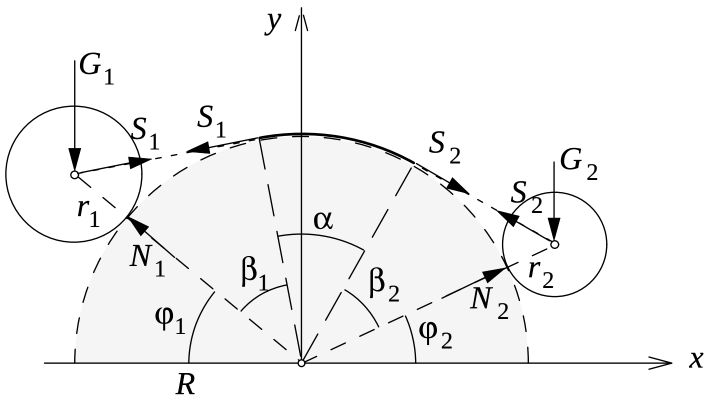


Zwei Kreisscheiben sind mit einem Seil verbunden und sollen auf einem Kreiszylinder (Radius R) im Gleichgewichtzustand sein, wobei das Seil über dem Winkel α auf dem Kreiszylinder aufliegt und durch Haftreibung am

Gleichgewichtszustand beteiligt ist. Man berechne die Bedingung für die Winkel φ_1 und φ_2, damit Gleichgewicht möglich ist.

Geometrische Bedingungen:

$$(R+r_i)\cos\varphi_i = R, \qquad \rightarrow \qquad \beta_i = \arccos\frac{R}{R+r_i}, \qquad (i=1,2)$$



Gleichgewichtsbedingungen für die zentralen Kräftesysteme in den Schwerpunkten der Kreisscheiben:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -G_1 \end{bmatrix} + N_1 \begin{bmatrix} -\cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} + S_1 \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1+\beta_1) \\ \cos(\varphi_1+\beta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -G_2 \end{bmatrix} + N_2 \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{bmatrix} + S_2 \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_2+\beta_2) \\ \cos(\varphi_2+\beta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = S_1\frac{\sin(\varphi_1+\beta_1)}{\cos\varphi_1}, \qquad S_1 = G_1\frac{\cos\varphi_1}{\cos\beta_1}; \qquad N_2 = S_2\frac{\sin(\varphi_2+\beta_2)}{\cos\varphi_2}, \qquad S_2 = G_2\frac{\cos\varphi_2}{\cos\beta_2}.$$

Das Seil rutscht nicht nach rechts, wenn

$$S_2 < S_1 e^{\mu_0\alpha}$$

ist, und es rutscht nicht nach links, wenn

$$S_1 < S_2 e^{\mu_0\alpha}$$

ist. Daraus folgt für eine Gleichgewichtslage die Bedingung:

$$S_1 e^{-\mu_0\alpha} < S_2 < S_1 e^{\mu_0\alpha},$$

$$e^{-\mu_0\alpha} < \frac{S_2}{S_1} < e^{\mu_0\alpha} \qquad \rightarrow \qquad e^{-\mu_0\alpha} < \frac{G_2\cos\varphi_2\cos\beta_1}{G_1\cos\varphi_1\cos\beta_2} < e^{\mu_0\alpha}.$$

Aufgabe 1

Für das ebene Verschiebungsvektorfeld

$$\vec{u}(x,y) = (ax + by)\vec{e}_x + (cx + dy)\vec{e}_y, \qquad (a,b,c,d << 1)$$

eines deformierbaren Körpers berechne man die Hauptdehnungen.

Ableitungen der Verschiebungsvektorkomponenten:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = c, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = d,$$

Gradienten- und Deformationstensor:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}(b+c) & 0 \\ \frac{1}{2}(b+c) & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Charakteristische Gleichung:

$$\det(\varepsilon - \varepsilon_H \boldsymbol{1}) = \det \begin{bmatrix} a - \varepsilon_H & \frac{1}{2}(b+c) & 0 \\ \frac{1}{2}(b+c) & d - \varepsilon_H & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_H \end{bmatrix} = -\varepsilon_H \{(a - \varepsilon_H)(d - \varepsilon_H) - \tfrac{1}{4}(b+c)^2\} = 0,$$

$$-\varepsilon_H \{\varepsilon_H{}^2 - \varepsilon_H(a+d) + ad - \tfrac{1}{4}(b+c)^2\} = 0,$$

Hauptdehnungen:

$$\varepsilon_{III} = 0,$$

$$\varepsilon_{I,II} = \tfrac{1}{2}(a+d) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(b+c)^2 - ad + \tfrac{1}{4}(a+d)^2} = \tfrac{1}{2}(a+d) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2 + (a-d)^2}.$$

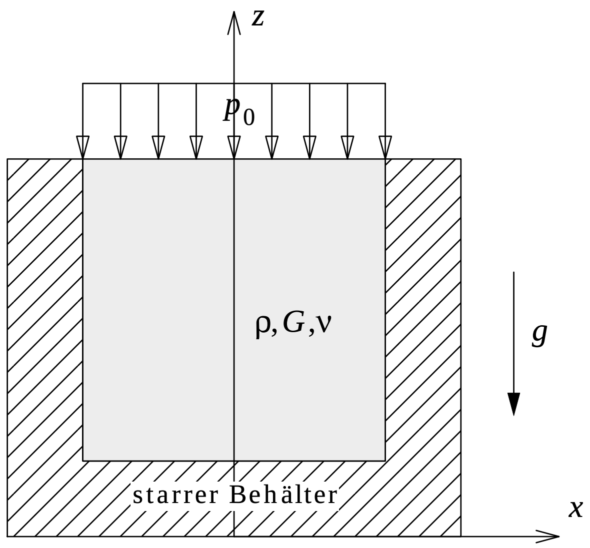
Aufgabe 2

Ein Würfel (Kantenlänge L) aus linear-elastischem Material (Elastizitätsmodul E, Querkontraktionszahl ν, Massendichte ρ) paßt im unbelasteten Zustand in einen starren Behälter mit quadratischem Querschnitt (Kantenlänge L) und ideal glatten Wänden. Der Würfel ist durch das Eigengewicht und auf der Würfeloberfläche $z = a$ durch eine konstante Druckspannung p_0 belastet.

Da die Wandkontakte reibungsfrei sein sollen, darf man für das Verschiebungsvektorfeld des Würfels den Ansatz

$$\vec{u} = u(z)\vec{e}_z$$

wählen.



Man formuliere den entsprechenden Deformationszustand des Würfels, die drei Spannungsvektoren $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y$ und $\vec{\sigma}_z$, die Volumenkraft $\vec{k}$ und aus der Gleichgewichtsbedingung für den Spannungszustand

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} = -\vec{k}$$

die Differentialgleichung für die Verschiebungen $u(z)$. Man löse diese Differentialgleichung und bestimme die Integrationskonstanten mit Hilfe der beiden Randbedingungen:

$$u(0) = 0, \qquad \sigma_{zz}(a) = -p_0.$$

Aus dem Verschiebungsvektorfeld

$$\vec{u} = u(z)\vec{e}_z$$

ergibt sich das Deformationstensorfeld

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u' \end{bmatrix}.$$

Mit dem HOOKEschen Gesetz erhalten wir den entsprechenden Spannungszustand

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G\{\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} e\mathbf{1}\} = 2G\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u' \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-2\nu} u' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\},$$

und somit die Spannungsvektoren

$$\vec{\sigma}_x = 2G\frac{\nu}{1-2\nu}u'\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \vec{\sigma}_y = 2G\frac{\nu}{1-2\nu}u'\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \vec{\sigma}_z = 2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}u'\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Die Volumenkraft lautet

$$\vec{k} = -\rho g \vec{e}_z$$

und weil die Spannungsvektoren nur von z abhängen, ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} = -\vec{k}$$

die Differentialgleichung

$$2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}u'' = \rho g$$

für die Verschiebungen $u(z)$. Daraus folgt

$$u' = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\rho g z + C_1,$$

$$u = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\rho g\frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2.$$

Aus der Randbedingungen $u(0) = 0$ folgt

$$C_2 = 0$$

und aus der Randbedingung $\sigma_{zz}(a) = -p_0$

$$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\{\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\rho g a + C_1\} = -p_0,$$

$$C_1 = -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}(p_0 + \rho g a).$$

Aufgabe 3

Auf der Oberfläche eines unbelasteten elastischen Körpers wird ein kleiner Kreis mit dem Radius r um den Punkt O gezeichnet. Anschließend wird der Körper belastet und festgestellt, daß aus dem Kreis eine Ellipse geworden ist mit den Halbachsen $a = r + 2\delta$, $b = r - \delta$, wobei die große Halbachse einen Winkel $\alpha = 30^{\circ}$ mit der x-Achse bildet. Die Oberfläche $z = 0$ sei spannungsfrei.

Man berechne die Spannung σ_{xx} in der Umgebung des Punktes O, wenn das Material den Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl $\nu = 1/3$ besitzt.

Im Hauptachsensystem wird:

$$\varepsilon_I = \frac{2\delta}{r}, \qquad \varepsilon_{II} = -\frac{\delta}{r}.$$

Direkt unter der Oberfläche herrscht ein ebener Spannungszustand:

$$\sigma_I = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_I + \nu\varepsilon_{II}) = \frac{9E}{8}\left(\frac{2\delta}{r} - \frac{1}{3}\frac{\delta}{r}\right) = \frac{15E\delta}{8r},$$

$$\sigma_{II} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{II} + \nu\varepsilon_I) = \frac{9E}{8}\left(-\frac{\delta}{r} + \frac{2}{3}\frac{\delta}{r}\right) = -\frac{3E\delta}{8r},$$

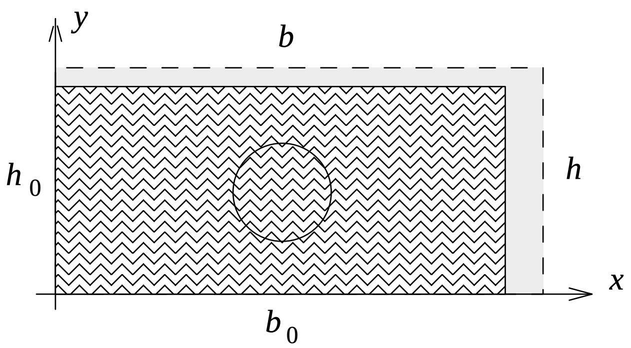
Im Hauptachsensystem hat der Richtungsvektor $\vec{e}_x$ die Darstellung

$$\vec{e}_x = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{bmatrix}.$$

$$\sigma_{xx} = \vec{e}_x \cdot (\boldsymbol{\sigma}\vec{e}_x) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{3E\delta}{8r}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{bmatrix}\right) = \frac{3E\delta}{8r}(5\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

$$\sigma_{xx} = \frac{21E\delta}{16r}.$$

Aufgabe 4



Eine linear-elastische Folie der Breite b_0 und der Höhe h_0 soll homogen in x und y-Richtung so gedehnt werden, daß sie die Fläche bh überdeckt. Man berechne die erforderlichen Spannungen σ_{xx} und σ_{yy} sowie die elastische Energiedichte U_s in der Folie, wenn das Folienmaterial den Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν besitzt. Welche Kurve wird aus dem Kreis vom Radius r, der auf die ungedehnte Folie gezeichnet ist?

$$\varepsilon_{xx} = \frac{b - b_o}{b_o}, \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{h - h_o}{h_o},$$

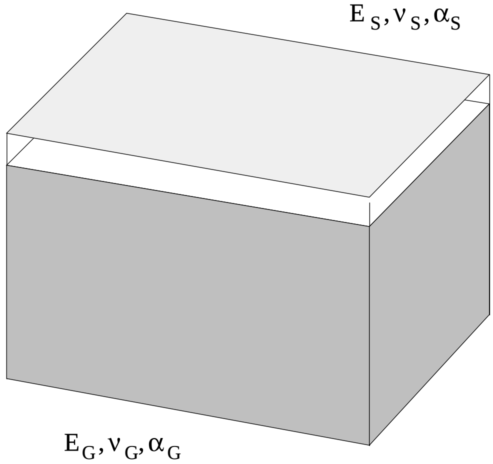
$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \qquad \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}),$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}); \qquad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx});$$

$$U_s = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy})$$

Aus dem Kreis wird eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a_x = r(1+\varepsilon_{xx}), \qquad a_y = r(1+\varepsilon_{yy}).$$

Aufgabe 5



Auf einen Grundkörper (Materialkonstanten E_G, ν_G, α_G) wird bei der Temperatur T_2 eine dünne Schicht eines anderen Materials (Materialkonstanten E_S, ν_S, α_S) aufgebracht. Der Grundkörper ist bei diesem Prozeß parallel zur Schicht spannungsfrei gedehnt um $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \alpha_G(T_2 - T_o)$ Die Schicht ist ebenfalls spannungsfrei und in diesem Zustand noch ungedehnt.

Man berechne den ebenen Spannungszustand in der dünnen Schicht, wenn der Werkstoffverbund auf die Temperatur T_1 abgekühlt und dabei die spannungsfreie Dehnungsänderung des Grundkörpers der Schicht aufgezwungen wird. In der Schicht gelte das HOOKEsche Gesetz.

Der Dehnungszustand des Grundkörpers ändert sich bei der Abkühlung von der Temperatur T_2 auf die Temperatur T_1 um

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \Delta\varepsilon_{yy} = -\alpha_G(T_2 - T_1).$$

Dem Material in der Schicht wird diese Dehnung aufgezwungen, so daß nach dem HOOKEschen Gesetz gilt

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_S}(\sigma_{xx} - \nu_S \sigma_{yy}) - \alpha_S (T_2 - T_1),$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E_S}(\sigma_{yy} - \nu_S \sigma_{xx}) - \alpha_S (T_2 - T_1).$$

Daraus folgt:

$$(\alpha_S - \alpha_G)(T_2 - T_1) = \frac{1}{E_S}(\sigma_{xx} - \nu_S \sigma_{yy}),$$

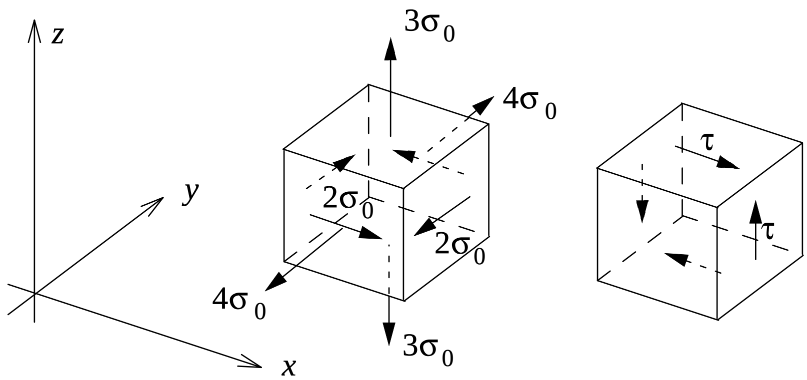
$$(\alpha_S - \alpha_G)(T_2 - T_1) = \frac{1}{E_S}(\sigma_{yy} - \nu_S \sigma_{xx}).$$

$$(1+\nu_S)(\alpha_S - \alpha_G)(T_2 - T_1) = \frac{1}{E_S}(1-\nu_S{}^2)\sigma_{xx},$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E_S(\alpha_S - \alpha_G)}{1-\nu_S}(T_2 - T_1).$$

Aufgabe 6

In zwei Volumenelementen eines Körpers, deren Kanten parallel zu den kartesischen Koordinatenachsen orientiert sind, herrschen die angegebenen Spannungszustände.



Wie groß muß τ nach der GE-Hypothese und der Schubspannungshypothese sein, wenn beide Volumenelemente gleich beansprucht sein sollen?

Spannungszustände:

$$a)\quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -2\sigma_0 & 0 \\ -2\sigma_0 & 4\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sigma_0 \end{bmatrix}, \qquad b)\quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vergleichsspannungen nach der GE-Hypothese:

$$\sigma_V^{(GE)} := \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2+6(\sigma_{xy}{}^2+\sigma_{yz}{}^2+\sigma_{zx}{}^2)}.$$

$$a)\qquad \sigma_V^{(GE)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{16\sigma_0{}^2+\sigma_0{}^2+9\sigma_0{}^2+24\sigma_0{}^2} = 5\sigma_0,$$

$$b)\qquad \sigma_V^{(GE)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{6\tau^2} = \sqrt{3}\tau.$$

Gleiche Beanspruchung nach der GE-Hypothese:

$$\sqrt{3}\tau = 5\sigma_0 \qquad \rightarrow \qquad \tau = \frac{5}{\sqrt{3}}\sigma_0 = 2,89\sigma_0.$$

Hauptspannungen des Spannungszustandes a)

$$\det\begin{bmatrix} -\sigma_H & -2\sigma_0 & 0 \\ -2\sigma_0 & 4\sigma_0-\sigma_H & 0 \\ 0 & 0 & 3\sigma_0-\sigma_H \end{bmatrix} = 0 \qquad \rightarrow \qquad (3\sigma_0-\sigma_H)(\sigma_H{}^2-4\sigma_H\sigma_0-4\sigma_0{}^2)=0,$$

$$\sigma_I = 2(1-\sqrt{2})\sigma_0, \qquad \sigma_{II} = 2(1+\sqrt{2})\sigma_0, \qquad \sigma_{III} = 3\sigma_0.$$

Extemwerte der Schubspannungen:

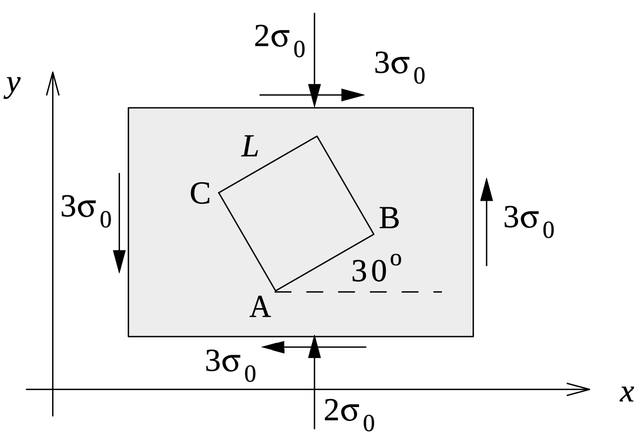
$$\frac{1}{2}(\sigma_I-\sigma_{II}) = -2,83\sigma_0, \qquad \frac{1}{2}(\sigma_{II}-\sigma_{III}) = 0,91\sigma_0, \qquad \frac{1}{2}(\sigma_{III}-\sigma_I) = 1,91\sigma_0.$$

Gleiche Beanspruchung nach der Schubspannungshypothese:

$$\tau = \frac{1}{2}\left|\sigma_I-\sigma_{II}\right| = 2,83\sigma_0.$$

Aufgabe 7

Auf eine dünne elastische Scheibe (Elastizitätsmodul E, Querkontraktionszahl $\nu = 1/3$) ist ein Quadrat der Kantenlänge L gezeichnet.



Welche Länge L^* bekommt die Seite AB, wenn die Scheibe durch die angegebenen konstanten Randspannungen belastet wird und wie groß ist dann der ursprünglich rechte Winkel in A?

In der Scheibe herrscht der homogene ebene Spannungszustand

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = -2\sigma_0, \quad \sigma_{xy} = 3\sigma_0.$$

Aus dem HOOKEschen Gesetz

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{1+\nu} s\,\mathbf{1}),$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\left(\begin{bmatrix} 0 & 3\sigma_0 & 0 \\ 3\sigma_0 & -2\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\nu}{1+\nu}\begin{bmatrix} -2\sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sigma_0 \end{bmatrix}\right)$$

folgt mit $\nu = 1/3$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{3E}\begin{bmatrix} 2 & 12 & 0 \\ 12 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Einheitsvektoren in die Richtungen A→B und A→C lauten

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Für die Dehnung der Strecke AB gilt

$$\varepsilon_{11} = \vec{e}_1 \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}\vec{e}_1) = \frac{\sigma_0}{12E}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 12 & 0 \\ 12 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\sqrt{3}\,\frac{\sigma_0}{E}.$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{L^* - L}{L}, \qquad \rightarrow \qquad L^* = L(1+\varepsilon_{11}) = L(1 + 2\sqrt{3}\,\frac{\sigma_0}{E}).$$

Berechnung des eingeschlossenen Winkels α zwischen den ursprünglich orthogonalen Linien AB und AC:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12}, \qquad \gamma_{12} := 2\vec{e}_1 \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}\vec{e}_2).$$

$$\gamma_{12} = \frac{\sigma_0}{6E}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 12 & 0\\12 & -6 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\\sqrt{3}\\0\end{bmatrix} = \frac{24-8\sqrt{3}}{6}\frac{\sigma_0}{E} = 1{,}69\frac{\sigma_0}{E},$$

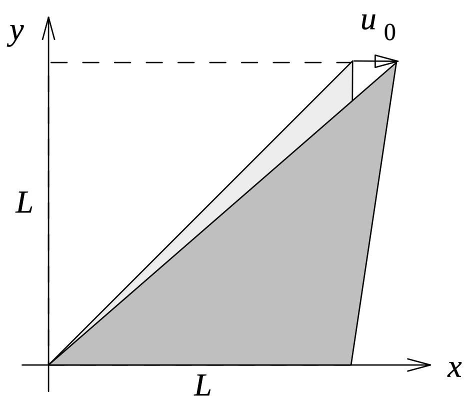
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 1{,}69\frac{\sigma_0}{E}.$$

Aufgabe 8

Man berechne die Konstanten a_0, a_1, a_2 in dem Ansatz für das Verschiebungsvektorfeld

$$\vec{u} = (a_0 + a_1 x + a_2 y)\vec{e}_x$$

so, daß es die dargestellte Deformation des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks beschreibt.



Welche Normal- und Schubspannungen müssen auf den Rändern der Dreieckscheibe wirken, wenn das Scheibenmaterial den Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν besitzt?

Anpassung des Verschiebungszustandes an die Verschiebungen der Eckpunkte des Dreiecks:

$$\vec{u}(0,0) = a_0\vec{e}_x = \vec{0}, \qquad \vec{u}(L,0) = (a_0 + a_1 L)\vec{e}_x = \vec{0}, \qquad \vec{u}(L,L) = (a_0 + a_1 L + a_2 L)\vec{e}_x = u_0\vec{e}_x,$$

$$a_0 = a_1 = 0, \qquad a_2 = \frac{u_0}{L}.$$

Berechnung des Deformationszustandes:

$$\vec{u} = \frac{u_0}{L}\begin{bmatrix}y\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{G} = \frac{u_0}{L}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{u_0}{2L}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

HOOKEsches Gesetz:

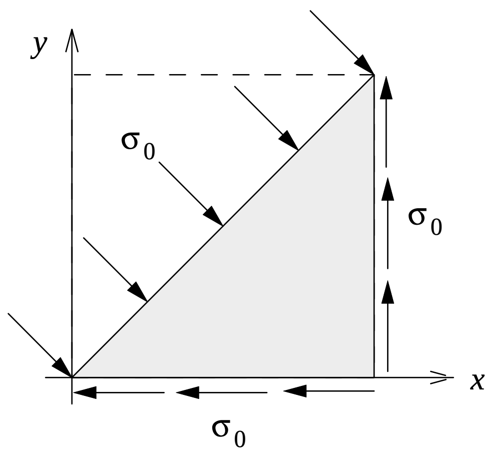
$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} e\, \mathbf{1}) = \sigma_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_0 := \frac{E u_0}{2(1+\nu)L}.$$

Berechnung der Spannungsvektoren auf den Dreiecksrändern:

$$\vec{n}_1 = -\vec{e}_y: \qquad \vec{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}\vec{n}_1 = \sigma_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

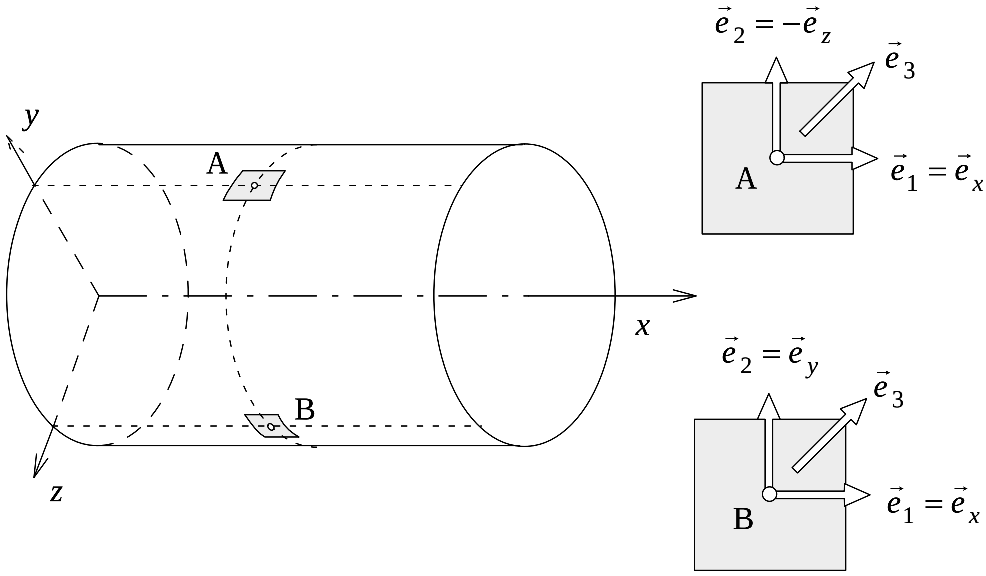
$$\vec{n}_2 = \vec{e}_x: \qquad \vec{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}\vec{n}_2 = \sigma_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{n}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y: \qquad \vec{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}\vec{n}_3 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\sigma_0 \vec{n}_3.$$



Aufgabe 9

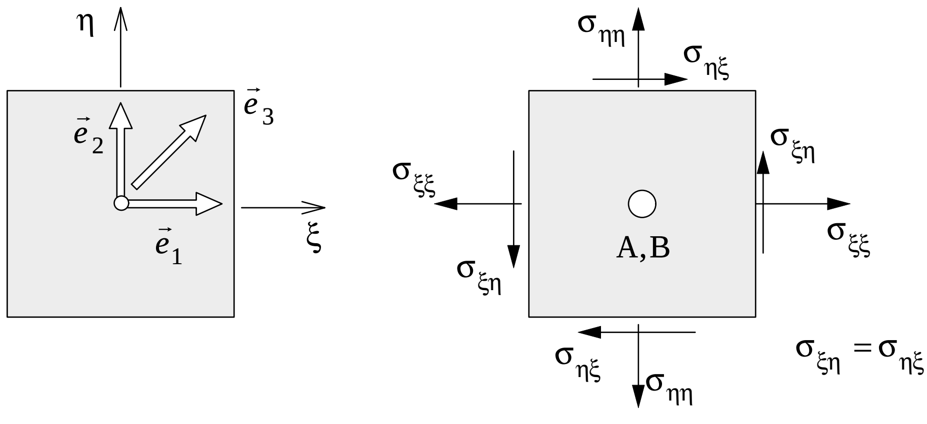
Der Kreisquerschnitt (Radius R) x =const eines Stabes ist durch die Biegemomente M_{by} und M_{bz} sowie durch das Torsionsmoment M_t belastet. In den Punkten A und B auf einem unbelasteten Teil der Mantelfläche sind Dehnungsmeßstreifen aufgebracht, mit denen man jeweils lokal die Dehnungen in tangentialen Richtungen $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ messen kann. Man bestimme die Formeln, mit denen sich aus den gemessenen Dehnungen die beiden Biegemomente und das Torsionsmoment berechnen lassen.



Im Querschnitt $x = \text{const}$ lautet der Spannungszustand

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{by}}{I_y} z - \frac{M_{bz}}{I_z} y, \qquad \sigma_{x\varphi} = \frac{M_t}{I_p} r, \qquad (I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi}{4} R^4)$$

wobei die Torsionsschubspannungen in Zylinderkoordinaten dargestellt sind.



In den Meßpunkten führen wir lokale ξ,η,ζ-Koordinaten ein, wobei die ζ-Koordinate jeweils orthogonal zur Mantelfläche orientiert sein soll. Der lokale Spannungszustand im Stab läßt sich durch einen Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & 0 \\ \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

beschreiben, weil die im unbelasteten Flächenelement der Mantelfläche wirkenden Spannungen $\sigma_{\zeta\zeta}, \sigma_{\zeta\xi}, \sigma_{\zeta\eta}$ null sind.

Die Dehnungsmessungen erfolgen jeweils in die Richtungen

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\xi, \qquad \vec{e}_2 = \vec{e}_\eta, \qquad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\xi + \vec{e}_\eta).$$

Dann folgt aus der Darstellung des Deformationsstandes im lokalen Koordinatensystem

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} & \varepsilon_{\xi\eta} & \varepsilon_{\xi\eta} \\ \varepsilon_{\xi\eta} & \varepsilon_{\eta\eta} & \varepsilon_{\xi\eta} \\ \varepsilon_{\xi\eta} & \varepsilon_{\xi\eta} & \varepsilon_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_{(\vec{e}_1)} &= \vec{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\vec{e}_1 = \varepsilon_{\xi\xi}, \\ \varepsilon_{(\vec{e}_2)} &= \vec{e}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\vec{e}_2 = \varepsilon_{\eta\eta}, \\ \varepsilon_{(\vec{e}_3)} &= \vec{e}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\vec{e}_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\xi\xi} + 2\varepsilon_{\xi\eta} + \varepsilon_{\eta\eta}). \end{aligned}$$

Also gilt für die Berechnung der Deformationsmaße aus den Meßwerten:

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{(\vec{e}_1)}, \qquad \varepsilon_{\eta\eta} = \varepsilon_{(\vec{e}_2)}, \qquad 2\varepsilon_{\xi\eta} = 2\varepsilon_{(\vec{e}_3)} - \varepsilon_{(\vec{e}_1)} - \varepsilon_{(\vec{e}_2)}.$$

Für den lokalen ebenen Spannungszustand lautet das HOOKEsche Gesetz

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\xi\xi} + \nu\varepsilon_{\eta\eta}), \\ \sigma_{\eta\eta} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\eta\eta} + \nu\varepsilon_{\xi\xi}), \\ \sigma_{\xi\eta} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{\xi\eta}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Formeln für die Berechnung der lokalen Spannungen aus den Meßwerten:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{(\vec{e}_1)} + \nu\varepsilon_{(\vec{e}_2)}), \\ \sigma_{\eta\eta} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{(\vec{e}_2)} + \nu\varepsilon_{(\vec{e}_1)}), \\ \sigma_{\xi\eta} &= \frac{E}{2(1+\nu)}(2\varepsilon_{(\vec{e}_3)} - \varepsilon_{(\vec{e}_1)} - \varepsilon_{(\vec{e}_2)}). \end{aligned}$$

Im Meßpunkt A: $(x = x_A, y = R, z = 0)$ wird

$$\sigma_{\xi\xi} = -\frac{M_{bz}}{I_z}R, \qquad \sigma_{\eta\eta} = 0, \qquad \sigma_{\xi\eta} = -\frac{M_t}{I_p}R,$$

und im Meßpunkt B: $(x = x_B = x_A, y = 0, z = R)$

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{M_{by}}{I_y}R, \qquad \sigma_{\eta\eta} = 0, \qquad \sigma_{\xi\eta} = -\frac{M_t}{I_p}R.$$

Daraus ergeben sich die drei gesuchten Gleichungen:

$$M_{by} = \frac{\pi E R^3}{4(1-\nu^2)}(\varepsilon_{(\vec{e}_1;B)} + \nu\varepsilon_{(\vec{e}_2;B)}),$$

$$M_{Bz} = -\frac{\pi E R^3}{4(1-\nu^2)}(\varepsilon_{(\vec{e}_1;A)} + \nu\varepsilon_{(\vec{e}_2;A)}),$$

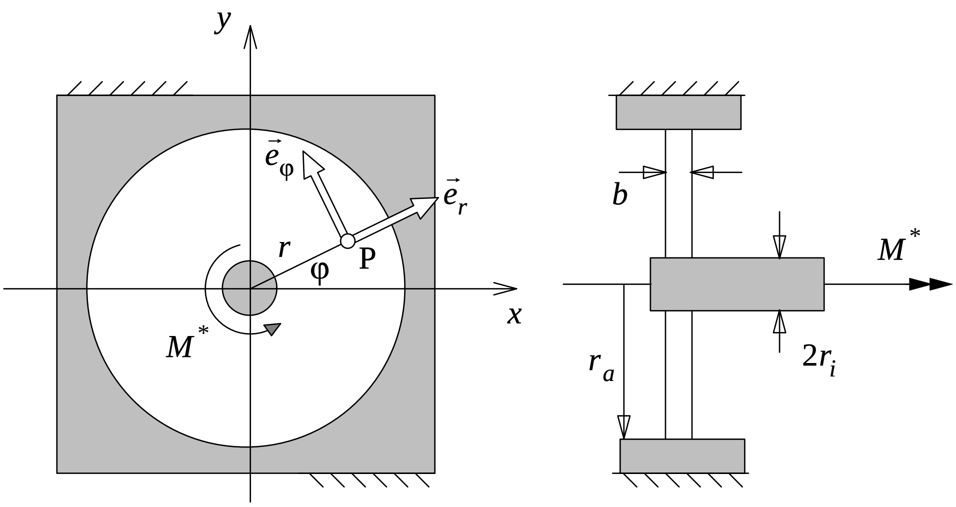
$$M_t = -\frac{\pi E R^3}{4(1+\nu)}(2\varepsilon_{(\vec{e}_3,A)} - \varepsilon_{(\vec{e}_1,A)} - \varepsilon_{(\vec{e}_2,A)}).$$

Aufgabe 10

Eine Kreisringscheibe (Innenradius r_i, Außenradius r_a) der Dicke b ist am Außenrand fest eingespannt und im Loch mit einem kreiszylindrischen Stab fest verbunden, der durch ein Torsionsmoment M^* belastet ist. In der Kreisscheibe entsteht dann ein Spannungszustand, der in Polarkoordinaten die Darstellung

$$\sigma_{rr} = 0, \qquad \sigma_{\varphi\varphi} = 0, \qquad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \frac{K}{r^2}$$

besitzt. Man berechne den Faktor K als Funktion von M^* sowie die Hauptspannungen und Hauptspannungsrichtungen im Punkt P.



Spannungsvektoren im positiven Schnittufer $r = r_i$:

$$\vec{\sigma}_r = \frac{K}{r_i^2}\vec{e}_\varphi.$$

Momentengleichgewicht am kreiszylindrischen Stab:

$$\int_0^{2\pi} r_i \sigma_{r\varphi}(r_i) b r_i \, d\varphi + M^* = 0, \qquad \rightarrow \qquad \frac{K}{r_i^2} b r_i^2 2\pi + M^* = 0,$$

$$K = -\frac{M^*}{2\pi b} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{r\varphi} = -\frac{M^*}{2\pi b r^2}.$$

Spannungsmatrix im Punkt P in der lokalen Polarkoordinatenbasis:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} & 0 \end{bmatrix}.$$

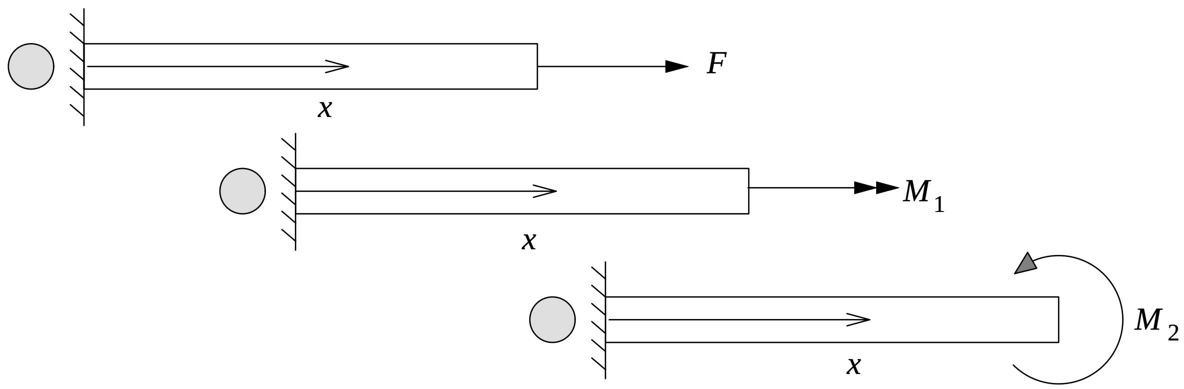
Hauptachsentransformation:

$$\det\begin{bmatrix} -\sigma_H & \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} & -\sigma_H \end{bmatrix} = \sigma_H{}^2 - \sigma_{r\varphi}{}^2 = 0, \qquad \begin{aligned} \sigma_I &= +\sigma_{r\varphi}, \\ \sigma_{II} &= -\sigma_{r\varphi}. \end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_H \mathbf{1})\vec{e}_H = \vec{0}, \qquad \begin{aligned} \vec{e}_I &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_r - \vec{e}_\varphi), \\ \vec{e}_{II} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_r + \vec{e}_\varphi). \end{aligned}$$

Aufgabe 11

Drei Stäbe mit Kreisquerschnitt (Radius r) und aus gleichem Material sind a) mit einer Längskraft F, b) mit einem Torsionsmoment M_1 und c) mit einem Biegemoment M_2 belastet.



Wie groß sind die beiden Momente, wenn nach der GE-Hypothese der Werkstoff in allen drei Stäben in den jeweils am höchsten beanspruchten Volumenelementen die gleiche Vergleichsspannung erreicht wird.

Vergleichsspannung nach der GE-Hypothese:

In kartesischen Koordinaten:

$$\sigma_V^{(GE)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}{}^2 + \sigma_{yz}{}^2 + \sigma_{zx}{}^2)},$$

in Zylinderkoordinaten (x-Achse = Zylinderachse):

$$\sigma_V^{(GE)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{rr})^2 + 6(\sigma_{r\varphi}{}^2 + \sigma_{\varphi x}{}^2 + \sigma_{xr}{}^2)}.$$

a) Spannungszustand in kartesischen Koordinaten:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_V^{(GE)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma_{xx}{}^2} = \sigma_{xx} = \frac{F}{\pi r^2}.$$

b) Spannungszustand in Zylinderkoordinaten auf dem Kreisrand:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{x\varphi} & 0 \\ \sigma_{x\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_V^{(GE)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{6\sigma_{x\varphi}{}^2} = \sqrt{3}\sigma_{x\varphi} = \sqrt{3}\,\frac{M_1}{I_p} r = \sqrt{3}\,\frac{2M_1}{\pi r^4} r = 2\sqrt{3}\,\frac{M_1}{\pi r^3}.$$

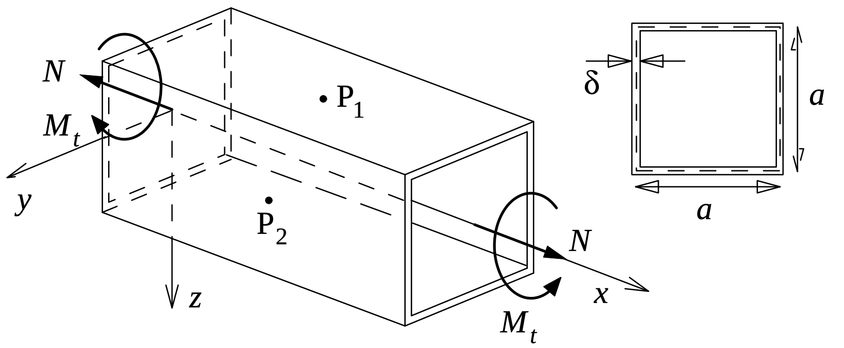
c) Spannungszustand auf dem Kreisrand in Punkten mit $y = r$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_V^{(GE)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma_{xx}{}^2} = \sigma_{xx} = \frac{M_2}{I_y} r = \frac{4M_2}{\pi r^4} r = 4\,\frac{M_2}{\pi r^3}.$$

Bedingungen für gleiche Materialbeanspruchungen:

$$2\sqrt{3}\,\frac{M_1}{\pi r^3} = \frac{F}{\pi r^2} \quad \rightarrow \quad M_1 = 0{,}29\,Fr, \qquad 4\,\frac{M_2}{\pi r^3} = \frac{F}{\pi r^2} \quad \rightarrow \quad M_2 = 0{,}25\,Fr.$$

Aufgabe 12



Ein dünnwandiges Rohr mit quadratischem Querschnitt ist durch eine Längskraft N und ein Torsionsmoment M_t belastet. Man beschreibe die Spannungszustände in den Punkten P_1 und P_2.

Querschnittsfläche A und von der Mittellinie berandete Fläche A_m:

$$A = 4a\delta, \qquad A_m = a^2.$$

Normalspannung:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} =: \sigma_0.$$

Schubspannung tangential zur Mittellinie:

$$\sigma_{xs} = \frac{M_t}{2A_m\delta} =: \tau_0.$$

Spannungszustände in den Punkten $\mathrm{P}_1:(x,0,-a)$ und $\mathrm{P}_2:(x,a,0)$:

$$\boldsymbol{\sigma}(P_1) = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \tau_0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}(P_2) = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & \tau_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hauptspannungen:

$$\det\begin{bmatrix} \sigma_0 - \sigma_H & \tau_0 & 0 \\ \tau_0 & -\sigma_H & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_H \end{bmatrix} = -\sigma_H\{-\sigma_H(\sigma_0 - \sigma_H) - \tau_0{}^2\} = -\sigma_H(\sigma_H{}^2 - \sigma_H\sigma_0 - \tau_0{}^2) = 0\,,$$

$$\det\begin{bmatrix} \sigma_0 - \sigma_H & 0 & \tau_0 \\ 0 & -\sigma_H & 0 \\ \tau_0 & 0 & -\sigma_H \end{bmatrix} = -\sigma_H\{-\sigma_H(\sigma_0 - \sigma_H) - \tau_0{}^2\} = -\sigma_H(\sigma_H{}^2 - \sigma_H\sigma_0 - \tau_0{}^2) = 0\,,$$

$$\sigma_{I,II} = \frac{1}{2}(\sigma_0 \mp \sqrt{\sigma_0{}^2 + 4\tau_0{}^2}), \qquad \sigma_{III} = 0.$$

Aufgabe 13

Ein homogener Spannungszustand sei in seinem Hauptachsensystem $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ gegeben:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{(D)} := \boldsymbol{\sigma} - \frac{s}{3}\,\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - s/3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - s/3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - s/3 \end{bmatrix},$$

$$s := \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Man berechne die Normalspannung und die Schubspannung in einer Schnittfläche mit dem Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3).$$

Spannungsvektor:

$$\vec{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Normalspannung:

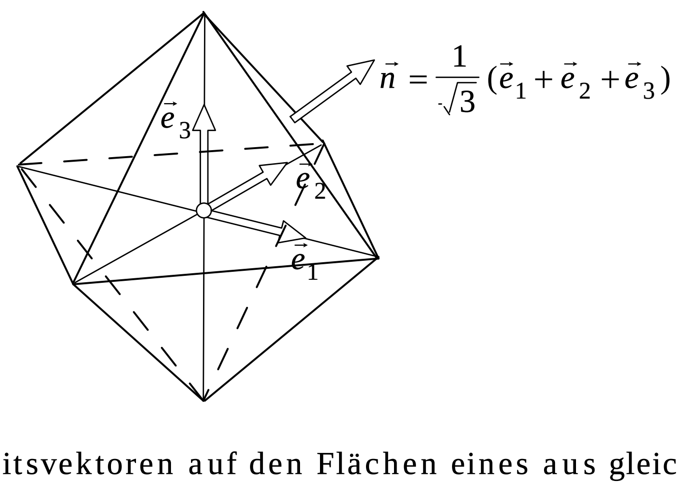
$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} Spur(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{s}{3}.$$

Schubspannungsvektor und Schubspannungsbetrag:

$$\vec{\tau} = \vec{\sigma}_n - \sigma_{nn}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} - \frac{s}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sigma_1 - s\ 3 \\ \sigma_2 - s/3 \\ \sigma_3 - s/3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}^{(D)}\vec{n},$$

$$\tau := |\vec{\tau}| = \sqrt{\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}} = \sqrt{\vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_n - \sigma_{nn}{}^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2) - s^2},$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{s^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \frac{s}{3}\mathbf{1}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \frac{s}{3}\mathbf{1})} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^{(D)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(D)}}.$$

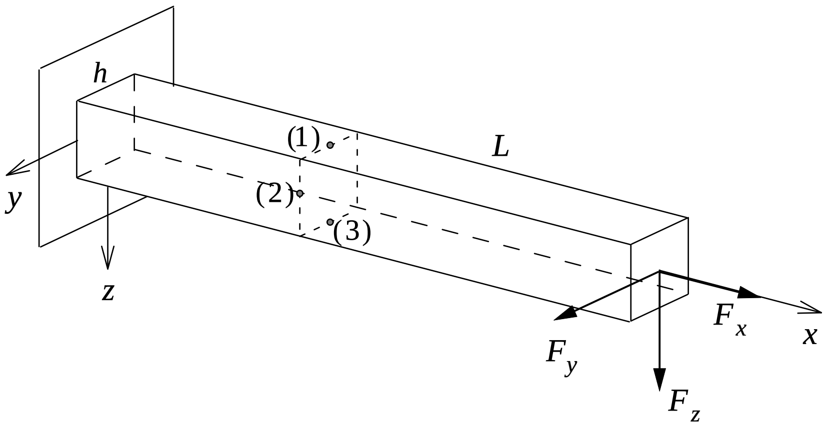


Die Normaleneinheitsvektoren auf den Flächen eines aus gleichseitigen Dreiecken gebildeten Oktaeders mit den Eckpunkten auf orthogonalen Achsen in Richtung der Hauptachsen des Spannungstensors unterscheiden sich nur in den Vorzeichen der Komponenten vom obigen Vektor $\vec{n}$. In allen Schnittflächen parallel zu diesen Oktaederflächen erhalten wir deshalb die gleiche Normalspannung und die gleiche Schubspannung

$$\sigma_{nn} = \frac{s}{3}, \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_1^{(D)})^2 + (\sigma_2^{(D)})^2 + (\sigma_3^{(D)})^2}.$$

Deshalb nennt man diese Spannungen auch Oktaeder-Normalspannung und Oktader-Schubspannung.

Aufgabe 14



In einem Querschnitt $x = const$ im Abstand L vom belasteten Endquerschnitt eines einseitig eingespannten Stabes mit quadratischem Querschnitt (Seitenlänge h) werden in den Punkten (1), (2) und (3) auf den Symmetrieachsen des Querschnitts die Dehnungen von materiellen Linienelementen parallel zur x-Achse gemessen. Man berechne aus den gemessenen Dehnungswerten die Lastkraftkomponenten. E sei der Elastizitätsmodul des Stabmaterials.

Stoffgesetz:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} = \frac{1}{E}\{\frac{N(x)}{A} + \frac{M_{by}(x)}{I_y}z - \frac{M_{bz}(x)}{I_z}y\},$$

$$A = h^2, \qquad I_y = I_z = \frac{h^4}{12}.$$

Im Querschnitt mit den Meßstellen ist

$$N = F_x, \qquad M_{by} = -LF_z, \qquad M_{bz} = LF_y,$$

$$\varepsilon_{xx(1)} = \frac{1}{E}\{\frac{N}{A} - \frac{M_{by}}{I_y}\frac{h}{2}\}, \qquad \varepsilon_{xx(2)} = \frac{1}{E}\{\frac{N}{A} - \frac{M_{bz}}{I_z}\frac{h}{2}\}, \qquad \varepsilon_{xx(3)} = \frac{1}{E}\{\frac{N}{A} + \frac{M_{by}}{I_y}\frac{h}{2}\},$$

$$Eh^2\varepsilon_{xx(1)} = F_x + \frac{6L}{h}F_z, \qquad Eh^2\varepsilon_{xx(2)} = F_x - \frac{6L}{h}F_y, \qquad Eh^2\varepsilon_{xx(3)} = F_x - \frac{6L}{h}F_z.$$

Daraus ergibt sich

$$F_x = \frac{Eh^2}{2}(\varepsilon_{xx(1)} + \varepsilon_{xx(3)}),$$

$$F_y = \frac{Eh^3}{12L}(\varepsilon_{xx(1)} - 2\varepsilon_{xx(2)} + \varepsilon_{xx(3)}),$$

$$F_z = \frac{Eh^3}{12L}(\varepsilon_{xx(1)} - \varepsilon_{xx(3)}).$$

1. MAPLE-Programme:

Lösung der Differentialgleichung in Aufgabe A-7

```
> with(DEtools):
> with(plots):
> dgl:=diff(s(x),x)=sqrt(1+(2*Pi*alfa*cos(2*Pi*x))^2):
> alfa:=1.0:
> ab:=s(0)=0:
> lsg:=dsolve({dgl,ab},{s(x)},type=numeric,method=rkf45):
> p1:=plots[odeplot](lsg,[x,s(x)],0..1,numpoints=100,linestyle=1):
> plots[display]([p1]);
```

Lösung der Differentialgleichungen in Aufgabe B-4.1-1

```
> with(DEtools):
> with(plots):
> dgl1:=diff(y1(t),t)=y3(t):
> dgl2:=diff(y2(t),t)=y4(t):
> dgl3:=diff(y3(t),t)=-lambda*sqrt((y3(t))^2+(y4(t))^2)*y3(t):
> dgl4:=diff(y4(t),t)=-g-lambda*sqrt((y3(t))^2+(y4(t))^2)*y4(t):
> lambda:=0.023:
> g:=9.81:
> ab:=y1(0)=0,y2(0)=0,y3(0)=5,y4(0)=8.6603:
> lsg:=dsolve({dgl1,dgl2,dgl3,dgl4,ab},{y1(t),y2(t),y3(t),y4(t)},
  type=numeric,method=rkf45):
> p1:=plots[odeplot](lsg,[y1(t),y2(t)],0..2,numpoints=100,
  linestyle=2):
> plots[display]([p1]);
```

Lösung der Differentialgleichungen in Aufgabe B-4.7-14

```
> with(DEtools):
> with(plots):
> dgl1:=diff(y1(t),t)=y2(t):
> dgl2:=diff(y2(t),t)=-(1-L0b/sqrt(1+y1(t)*y1(t)))*y1(t)-2*dd*y2(t):
> L0b:=0.5:
> dd:=0.2:
> ab:=y1(0)=1,y2(0)=0:
> lsg:=dsolve({dgl1,dgl2,ab},{y1(t),y2(t)},type=numeric,
  method=rkf45):
> p1:=plots[odeplot](lsg,[t,y1(t)],0..20,numpoints=200,linestyle=1):
> p2:=plots[odeplot](lsg,[t,y2(t)],0..20,numpoints=200,linestyle=2):
> plots[display]([p1,p2]);
```

2. pro Fit-Programme (Macintosh):

pro Fit ist ein sehr leistungsfähiges und leicht zu bedienendes Programm, mit dem Daten und Funktionen analysiert und graphisch dargestellt werden können. Es wurde von der Firma

Quantum Soft, Zürich (http://www.quansoft.com)

entwickelt.

Speziell zur Lösung von Differentialgleichungssystemen wurde am Lehrstuhl für Mechanik auf der Basis von Prozeduren, die in dem Buch

Press, Teukolsky, Vetterling, Flannery:
„Numerical Recipes in C“,
Cambridge University Press - 1992,

beschrieben sind, ein Modul erstellt, mit dem die entsprechenden Lösungsfunktionen im Rahmen von pro Fit tabellarisch und graphisch dargestellt werden können.

ODE Module v1.1
1998 D. Fröhling & S. Kessel, LS Mechanik UniDO
http://www.mech.mb.uni-dortmund.de

Die Bilder von Funktionen in dieser Aufgabensammlung wurden mit pro Fit 5.1 erzeugt. Zur Lösung der Differentialgleichungssysteme erster Ordnung werden diese mit Pascal-Funktionen beschrieben, die von ODE Module aufgerufen werden.

Beispiele:

Lösung der Differentialgleichung in Aufgabe A-7

```
function derivs(t,y1,dydt1:extended);

var alfa,zwpi,h,fs: extended;

procedure Initialize;
begin
     alfa:=0.75;
     zwpi:=2.0*pi;
     SetFunctionParam('',2,0);
end;

begin
     h:=zwpi*alfa*cos(zwpi*t);
     dydt1:=sqrt(1+sqr(h));
     SetFunctionParam('',3,dydt1);
end;
```

Lösung der Differentialgleichung in Aufgabe B-4.1-1

```
function derivs(t,y1,y2,y3,y4,dydt1,dydt2,dydt3,dydt4:extended);
{
geeigneter Lambda-Wert = 0.023
Testwerte: alfa = 60 Grad, v0 = 10 m/s,  Rechenzeit 2 Sekunden
}

var g,Lam,alf,v0,v0x,v0y,h: extended;

procedure Initialize;
begin
     SetBoxTitle('Startwerte');
     Input('Lambda',Lam,'Winkel in Grad',alf,'Geschwindigkeit in
m/s',v0);
     g:=9.81;
     alf:=alf*pi/180.0;
     v0x:=v0*cos(alf);
     v0y:=v0*sin(alf);
     SetFunctionParam('',2,0.0);
     SetFunctionParam('',3,0.0);
     SetFunctionParam('',4,v0x);
     SetFunctionParam('',5,v0y);
end;

begin
     h:=Lam*sqrt(sqr(y3)+sqr(y4));
     dydt1:=y3;
     dydt2:=y4;
     dydt3:=-h*y3;
     dydt4:=-g-h*y4;
     SetFunctionParam('',6,dydt1);
     SetFunctionParam('',7,dydt2);
     SetFunctionParam('',8,dydt3);
     SetFunctionParam('',9,dydt4);
end;
```

Lösung der Differentialgleichung in Aufgabe B-4.7-14

```
function derivs(t,y1,y2,dydt1,dydt2:extended);

var
y0,yp0,D,lam: extended;

procedure Initialize;
begin
     D:=0.2;
     lam:=1.5;       {L0/b}
     SetFunctionParam('',2,0.5);
     SetFunctionParam('',3,0.0);
end;
```

```
begin
     dydt1:=y2;
     dydt2:=-(1.0-lam/sqrt(1.0+sqr(y1)))*y1-2.0*D*y2;
     SetFunctionParam('',4,dydt1);
     SetFunctionParam('',5,dydt2);
end;
```