Funktionentheorie I

Wintersemester 2009/10

Christoph Schweigert

Universität Hamburg
Department Mathematik
Bereich Algebra und Zahlentheorie

(Stand: 26.02.2010)

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen und holomorphe Funktionen **1**
1.1 Die komplexen Zahlen . . . 1
1.2 Topologie der Gaußschen Zahlenebene . . . 5
1.3 Stetige Funktionen . . . 10
1.4 Holomorphe Funktionen . . . 13
1.5 Möbiustransformationen und die Riemannsche Zahlensphäre . . . 20

2 Analytische Funktionen **24**
2.1 Reihen . . . 24
2.2 Potenzreihen . . . 27
2.3 Differentiation von Potenzreihen und analytischen Funktionen . . . 32
2.4 Analytische Fortsetzung . . . 35
2.5 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen . . . 39
2.6 Der komplexe Logarithmus . . . 42

3 Komplexe Integrationstheorie **45**
3.1 Komplexe Kurvenintegrale . . . 45
3.2 Stammfunktionen analytischer Funktionen . . . 50
3.3 Die Cauchysche Integralformel . . . 52
3.4 Direkte Folgerungen aus den Cauchyschen Integralformeln . . . 58

4 Singularitäten und Residuen **63**
4.1 Laurentzerlegung . . . 63
4.2 Isolierte singuläre Punkte, Pole und Nullstellen . . . 65
4.3 Residuum . . . 71
4.4 Funktionentheoretische Anwendung des Residuensatzes . . . 74
4.5 Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes . . . 77

5 Riemannsche Flächen **80**
5.1 Definition der Riemannschen Fläche . . . 81
5.2 Einfache Eigenschaften holomorpher Abbildungen . . . 87
5.3 Verzweigte und unverzweigte Überlagerungen . . . 92
5.4 Garben und analytische Fortsetzungen . . . 98

Literatur:

Literatur, die ich bei der Vorbereitung häufig herangezogen habe:

- Wolfgang Fischer, Ingo Lieb: Funktionentheorie - Komplexe Analysis in einer Veränderlichen, Vieweg, 2005
- Eberhard Freitag, Rolf Busam: Funktionentheorie, Springer, 2006

Für allgemeine konzeptionelle Aspekte der Analysis, aber für die Theorie anayltischer Funktionen, empfehle ich neben den üblichen Lehrbüchern insbesondere:

- Jean Dieudonné, Grundzüge der modernen Analysis, Band 1, Vieweg 1985.

Im letzten Teil habe ich mich gestützt auf

- Otto Forster, Riemannsche Flächen, Springer, Heidelberger Taschenbücher 184, 1977.

Die aktuelle Version dieses Skriptes finden Sie unter
`http://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/ws09/fskript.pdf`
als pdf-Datei.

Bitte schicken Sie Korrekturen und Bemerkungen an `schweigert@math.uni-hamburg.de`!
Bei den Hamburger Studenten, besonders bei Frau Wallon Pizarro und Frau Ziegenhagen möchte ich mich für zahlreiche Hinweise bedanken.

1 Komplexe Zahlen und holomorphe Funktionen

In diesem Kapitel werden Sie nur weniges kennenlernen, was Sie nicht schon aus der reellen Analysis kennen. Wir werden daher bei der Wiederholung Wert auf eine Darstellung analytische Sachverhalte legen, die an Konzepten orientiert ist. Das wichtigste Ergebniss dieses Kapitels sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichngen, die die komplex differenzierbaren Funktionen charakterisieren.

1.1 Die komplexen Zahlen

Komplexwertige Funktionen einer komplexen Variablen, die im komplexen Sinn differenzierbar sind, sind das Thema dieser Vorlesung. Wir wiederholen die Definition der komplexen Zahlen.

Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen. Der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist insbesondere eine abelsche Gruppe mit Addition

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Wir definieren eine zweite Verknüpfung, Multiplikation genannt, durch

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Man rechnet nach, dass diese Verknüpfung assoziativ und kommutativ ist. Sie hat $(1, 0)$ als neutrales Element. Das Element $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hat das multiplikative Inverse

$$(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2})$$

Schließlich rechnen wir auch noch das Distributivgesetz nach. Insgesamt haben wir gezeigt:

Satz 1.1.1.
Die abelsche Gruppe $(\mathbb{R}^2, +)$ mit der oben beschriebenen Multiplikation bildet einen Körper. Er heißt der Körper der komplexen Zahlen und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Bemerkungen 1.1.2.

1. *Die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\phi(a) = (a, 0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus. Er erlaubt es uns, $\phi(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}$ zu identifizieren, also die reellen Zahlen als Unterkörper der komplexen Zahlen aufzufassen. Wir schreiben a für $(a, 0)$.*

2. *Offenbar bildet die Familie $(1 = (1, 0), (0, 1))$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Wir führen die abkürzende Bezeichnung $\mathrm{i} := (0, 1)$ ein und nennen i auch die imaginäre Einheit. Jede komplexe Zahl lässt sich also schreiben als*

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + \mathrm{i}b$$

3. *Es gilt*

$$\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Der Körper $\mathbb{C}$ enthält also $\mathbb{R}$ und mit $\pm\mathrm{i}$ Lösungen der Gleichung $X^2 + 1 = 0$.

4. *Ist*

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \textit{mit} \quad x, y \in \mathbb{R} \ ,$$

so nennen wir x den Realteil von z und y den Imaginärteil von z:

$$x = \operatorname{Re} z \quad y = \operatorname{Im} z$$

Beispiel 1.1.3.
Mit den Bezeichnungen rechnet sich sehr einfach: ist $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$, so ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2} .$$

Bemerkungen 1.1.4.

1. *Wir stellen $\mathbb{R}^2$ wie üblich als Ebene mit rechtwinkligen Koordinaten dar. Der Punkt (x, y) entspricht dann der komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$. Wir sprechen dann von der komplexen Zahlenebene oder der Gaußschen Zahlenebene. Die Achse $\mathbb{R}(1, 0)$ entspricht dem Unterkörper $\mathbb{R}$ und heißt reelle Achse. Die Achse $\mathbb{R}(0, 1)$ entspricht Zahlen der Form $\mathrm{i}y$, sogenannten rein-imaginären Zahlen. Sie heißt imaginäre Achse.*

2. *Die Addition komplexer Zahlen ist in diesem Bild durch die Parallelogrammregel gegeben.*

3. *Man kann den Körper der komplexen Zahlen nicht anordnen: in einem angeordneten Körper sind die Quadrate von Null verschiedener Zahlen positiv. Also gilt*

$$0 < 1^2 = 1 \text{ und } 0 < \mathrm{i}^2 = -1$$

und somit auch

$$0 < 1 + (-1) = 0 ,$$

was nicht sein kann.

Definition 1.1.5

1. Für jede komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ nennen wir

$$\bar{z} := x - \mathrm{i}y$$

die komplex konjugierte Zahl.

2. Für jede komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ nennen wir die nicht-negative reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2}$$

den Betrag oder Absolutbetrag der komplexen Zahl.

Wir finden also insbesondere

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} .$$

Satz 1.1.6.
Die folgenden Eigenschaften rechnet man elementar nach:

1. *Die komplexe Konjugation ist mit der Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ verträglich,*

$$\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z} \quad \text{und} \quad \overline{wz} = \overline{w} \cdot \overline{z} ,$$

und sie ist bijektiv, also ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$.

2. *Es gilt*

$$\overline{\overline{z}} = z .$$

Die Konjugation ist also eine Involution.

3. *Für $z = x + \mathrm{i}y$ gilt*

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \textit{und} \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}) \,.$$

   Insbesondere ist $\overline{z} = z$ äquivalent zu $z \in \mathbb{R}$.

4. *Es gilt $z\overline{z} = x^2 + y^2$ und somit*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} \,.$$

5. *Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt der komplexe Betrag mit dem in der Analysis definierten reellen Betrag überein.*

6. *Es gelten die Ungleichungen*

$$-|z| \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq |z| \quad \textit{und} \quad -|z| \leq \mathrm{Im}\,(z) \leq |z| \ .$$

   Übung: beschreiben Sie alle komplexen Zahlen, für die jeweils die Gleichheit gilt.

7. *Es ist $|z| \geq 0$ mit Gleichheit genau für $z = 0$.*

8. *Es folgt aus der Dreiecksungleichung im $\mathbb{R}^2$*

$$|w + z| \leq |w| + |z| \ .$$

   Hieraus folgt

$$|w - z| \geq ||z| - |w||$$

   für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Der Abstand zweier Punkte w, z in der komplexen Ebene ist definiert durch

$$\mathrm{dist}(w, z) = |w - z| \ .$$

9. *Aus der Rechnung*

$$|wz|^2 = (wz)\overline{wz} = wz\overline{wz} = w\overline{w}z\overline{z} = |w|^2|z|^2$$

   folgt

$$|wz| = |w||z|$$

   und daraus im Fall $z \neq 0$ für Quotienten

$$|\frac{w}{z}| = \frac{|w|}{|z|}$$

Definition 1.1.7

1. *Wir nennen $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\,(z) \geq 0\}$ die rechte Halbebene und $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}\,(z) \geq 0\}$ die obere Halbebene.*

2. *Wir nennen für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$*

$$D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} || z - z_0| < r\}$$

   die offene Kreisscheibe vom Radius r um z_0.

Betrachtung 1.1.8.

1. *Indem man Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$ betrachtet, kann man alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in der Form*
$$(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$$
mit $r > 0$ und $\phi \in \mathbb{R}$ schreiben. Wir finden also für $z \neq 0$ eine Darstellung
$$z = |z|(\cos \phi + \mathrm{i} \sin \phi)$$
mit $\phi \in \mathbb{R}$. Für $z \neq 0$ ist der Winkel ϕ nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt. Wir nennen jeden solchen Winkel ein <u>Argument</u> von z und schreiben
$$\phi = \arg z\,.$$
Man beachte, dass dies keine *Funktion von z ist. Oft normiert man das Argument durch*
$$0 \leq \phi < 2\pi \quad \text{oder } -\pi < \phi \leq \pi\ .$$
Im ersten Fall spricht man vom <u>Hauptwert des Arguments</u> $\mathrm{Arg}(z)$.

2. *Wir rechnen für $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\phi := \arg(z), \psi := \arg(w)$ unter Verwendung der Additionstheoreme für Sinus- und Kosinusfunktion:*
$$\begin{aligned} wz &= |w||z|(\cos \psi + \mathrm{i} \sin \psi)(\cos \phi + \mathrm{i} \sin \phi) \\ &= |w||z| \left(\cos(\psi + \phi) + \mathrm{i}(\sin(\phi + \psi)\right) \end{aligned}$$
Bei der Multiplikation multiplizieren sich also die Beträge und addieren sich die Argumente. Insbesondere gilt die <u>Regel von de Moivre:</u>
$$z^n = |z|^n \left(\cos(n\phi) + \mathrm{i} \sin(n\phi)\right)$$
für $z = |z|(\cos \phi + \mathrm{i} \sin \phi)$. Durch Potenzenbildung kann man allerdings einen einmal gewählten Standardbereich für das Argument verlassen.

3. *Für festes $w \neq 0$ ist also die lineare Abbildung $z \mapsto w \cdot z$ eine Drehstreckung. Die komplex linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bilden also einen reell zweidimensionalen Untervektorraum des vierdimensionalen Vektorraums der reell-linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der in der Standardbasis durch Matrizen der Form*
$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$
beschrieben wird.

4. *Die multiplikative Gruppe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist insbesondere isomorph zur Gruppe der Drehstreckungen von $\mathbb{R}^2$. Man beachte, dass diese Abbildungen Winkel und Orientierung im $\mathbb{R}^2$ erhalten. Die Menge*
$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$
bildet eine multiplikative Gruppe, die isomorph zur Gruppe der Drehungen des $\mathbb{R}^2$ bezüglich der euklidischen Standardstruktur ist.

1.2 Topologie der Gaußschen Zahlenebene

Von $\mathbb{R}^2$ erbt die komplexe Zahlenebene die Struktur eines topologischen Raums. Damit ist eigentlich auch klar, was stetige komplexwertige Funktionen sind. Insofern ist auch dieses Unterkapitel nur eine Wiederholung von Begriffen und Sachverhalten, die aus der Analysis vertraut sind.

Definition 1.2.1

1. *Ein topologischer Raum ist eine Menge M zusammen mit einem System Ω von Teilmengen von M, das die folgenden Eigenschaften hat:*

   (a) *$M \in \Omega$ und $\emptyset \in \Omega$*

   (b) *Die Vereinigung beliebiger Familien von Elementen von Ω liegt wieder in Ω.*

   (c) *Der Durchschnitt endlicher Familien von Elementen von Ω liegt wieder in Ω.*

2. *Die Elemente von Ω heißen auch offene Mengen, ihre Komplemente abgeschlossene Mengen.*

3. *Sei $p \in N \subset M$. Dann heißt N Umgebung von p, wenn N eine offene Menge $U \in \Omega$ mit $p \in U$ enthält.*

Ein wichtiges Beispiel für topologische Räume sind metrische Räume.

Definition 1.2.2
Ein metrischer Raum M ist eine Menge mit einer Abstandsfunktion

$$\mathrm{dist} : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

für die gilt:

1. *Sie ist symmetrisch, $\mathrm{dist}(m, n) = \mathrm{dist}(n, m)$ für alle $m, n \in M$*

2. *$\mathrm{dist}(m, n) = 0$ genau dann, wenn $m = n$.*

3. *Es gilt die Dreiecksungleichung,*

$$\mathrm{dist}(m, p) \leq \mathrm{dist}(m, n) + \mathrm{dist}(n, p)$$

   für alle $m, n, p \in M$.

Wichtige Beispiele für metrische Räume liefern normierte Vektorräume.

Definition 1.2.3
Ein normierter Vektorraum ist ein reeller oder komplexer Vektorraum V mit einer Normfunktion $\nu : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ für die gilt:

1. *$\nu(\lambda v) = |\lambda| \cdot \nu(v)$*

2. *$\nu(v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.*

3. *$\nu(v + w) \leq \nu(v) + \nu(w)$*

Beispiele für normierte Räume liefern euklidische und unitäre Vektorräume, also insbesondere $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^n$. Ein wichtiges unendlich-dimensionales Beispiel sind die Räume $L^p(M)$ von Klassen reell- oder komplexwertiger Funktionen auf einem Maßraum, für die $\int_M |f|^p < \infty$ gilt mit Norm $\nu_p(f) := \left(\int_M |f|^p\right)^{1/p}$.

Ein normierter Vektorraum wird durch die übliche Abstandsfunktion

$$\mathrm{dist}(p, p') := \nu(p - p')$$

zum metrischen Raum.

Wir definieren für einen metrischen Raum (M, dist) eine offene Kreisscheibe um einen Punkt $p \in M$ mit Radius r wie in Definition 1.1.7 als die Teilmenge

$$D_r(p) = \{m \in M : \ \mathrm{dist}(m, p) < r\}$$

und nennen eine Teilmenge $U \subset M$ offen, wenn es zu jedem $p \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass die offene Kreisscheibe $D_\epsilon(p) \subset U$ in U enthalten ist.

Man überzeuge sich davon, dass diese offenen Mengen eine Topologie auf dem metrischen Raum M bilden. Jeder Mathematiker sollte sich einmal im Leben auch von den beiden folgenden Aussagen überzeugt haben:

Satz 1.2.4.

1. *Zwei Normen ν, ν' auf einem reellen oder komplexen Vektorraum E liefern genau dann die gleiche Topologie, wenn sie äquivalent sind, d.h. wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass für alle $x \in E$ gilt*
$$c_1 \nu'(x) \leq \nu(x) \leq c_2 \nu'(x) \ .$$
2. *Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Im Spezialfall der komplexen Zahlenebene erhalten wir:

Satz 1.2.5.
Eine Teilmenge U von $\mathbb{C}$ ist offen, wenn es zu jedem $z_0 \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass die offene Kreisscheibe $D_\epsilon(z_0) \subset U$ in U enthalten ist. Offene Mengen von $\mathbb{C}$ nennen wir auch Bereiche.

Die folgenden Verallgemeinerungen liegen nahe:

Bemerkungen 1.2.6.

1. *Auch im Fall von $\mathbb{R}$ werden wir von einer Kreisschreibe $D_\epsilon(r)$ sprechen. Es handelt sich dann um das offene Intervall $(r - \epsilon, r + \epsilon)$.*

2. *Im Fall von K^n mit $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist eine für die Funktionentheorie nützliche Verallgemeinerung des Begriffs der Kreisscheibe der Begriff des Polyzylinder. Dieser ist als kartesisches Produkt von Kreisscheiben definiert und durch n Radien $r_n > 0$ charakterisiert. Die wichtigste topologische Eigenschaft von Polyzylindern folgt aus der Dreiecksungleichung: für zwei Polyzylinder P, Q liegt mit $x, y \in P \cap Q$ auch das Verbindungssegment in $P \cap Q$.*

Wir brauchen weitere elementare Begriffsbildungen der mengentheoretischen Topologie:

Definition 1.2.7

1. *Sei M' eine beliebige Teilmenge eines topologischen Raums (M, Ω). Dann definiert die Familie der Durchschnitte $\Omega' := \{M' \cap U\}_{U \in \Omega}$ eine Topologie auf M', die Relativtopologie. Die Elemente $U \in \Omega'$ heißen relativ offene Mengen, ihre Komplemente $M' \setminus (U \cap M')$ relativ abgeschlossene Mengen.*

2. *Für eine Teilmenge M eines topologischen Raums nennen wir die größte offene Teilmenge*

$$\overset{\circ}{M} := \cup\{U : U \subset M, U \text{offen}\}$$

das Innere von M. Die Elemente von $\overset{\circ}{M}$ heißen Innenpunkte von M.

3. *Für eine Teilmenge M eines topologischen Raums nennen wir die kleinste abgeschlossene Obermenge*

$$\overline{M} := \cap\{U : U \supset M, U \text{abgeschlossen}\}$$

den Abschluss von M. Die Elemente von $\overline{M}$ heißen Adhärenzpunkte von M.

4. *Der Rand einer Teilmenge M wird durch*

$$\partial M := \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$$

definiert.

5. *Seien N, N' Teilmengen eines topologischen Raums, für die $N \subset N'$ gilt. Dann heißt N dicht in N', wenn $\overline{N} \supset N'$ gilt, also wenn jede Umgebung eines Punktes von N' die Menge N trifft.*

6. *Eine Teilmenge $M \subset M'$ heißt diskret in M', wenn es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung U von p gibt, so dass $U \cap M$ nur einen Punkt enthält.*

Beispiele 1.2.8.

1. *Offene Intervalle $I \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sind in $\mathbb{R}$ relativ offen, aber nicht offen in $\mathbb{C}$.*

2. *Ist U ein Bereich, so ist $\mathbb{Q}^2 \cap U$ dicht in U und $\mathbb{Z}^2 \cap U$ diskret in U.*

3. *Das Innere der offenen Kreisscheibe $M = D_r(z_0)$ ist M selbst, der Abschluss $\overline{D_r(z_0)} = \{|z - z_0| \leq r\}$ die abgeschlossene Kreisscheibe und der Rand $\partial D_r(z_0) = \{|z - z_0| = r\}$ die Kreislinie.*

4. *Durch Einschränkung wird auch jede Teilmenge eines metrischen Raumes ein metrischer Raum. Man überzeuge sich davon, dass die Einschränkung der Metrik die Relativtopologie definiert.*

Definition 1.2.9

Sei M ein topologischer Raum und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M.

1. *Ein Punkt $z_0 \in M$ heißt Häufungspunkt der Folge, wenn in jeder Umgebung von z_0 unendlich viele Folgenglieder liegen. Ein Punkt $z_0 \in M$ heißt Häufungspunkt einer Teilmenge M', wenn in jeder Umgebung von z_0 unendlich viele Elemente von M' liegen.*

   Übung: Geben Sie ein Beispiel einer Folge in $\mathbb{C}$, die unendlich viele Häufungspunkte hat. Kann die Menge der Häufungspunkte einer Folge ihrerseits wieder einen Häufungspunkt haben?

2. *Ein Punkt $z_0 \in M$ heißt Limes oder Grenzwert der Folge, wenn in jeder Umgebung von z_0 alle bis auf höchstens endlich viele Folgenglieder ("fast alle" Folgenglieder) liegen. Man sagt, die Folge konvergiere gegen z_0 und schreibt*

$$z_n \to z_0 \quad \text{oder} \quad z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n \ .$$

3. *Eine Folge in einem metrischen Raum heißt Cauchy-Folge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ einen Wert $N = N(\epsilon)$ gibt, so dass aus $n, m \geq N$ folgt $\operatorname{dist}(z_n, z_m) < \epsilon$.*

4. *Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.*

5. *Ein vollständiger normierter reeller bzw. komplexer Vektorraum heißt reeller bzw. komplexer Banachraum.*

Bemerkungen 1.2.10.

1. *Man mache sich klar, dass eine Folge in einem metrischen Raum, also insbesondere in $\mathbb{C}$, höchstens einen Grenzwert haben kann. Konstruieren Sie einen topologischen Raum mit einer Folge, die zwei verschiedene Grenzwerte hat.*

2. *Es gilt für Folgen komplexer Zahlen $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$ gilt.*

3. *Man zeige für eine Folge z_n komplexer Zahlen:*
   1. Die Folge ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn die Folgen $\operatorname{Re} z_n$ und $\operatorname{Im} z_n$ der Real- und Imaginärteile Cauchy-Folgen sind.
   2. Es gilt $z_n \to z$ genau dann, wenn $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$ gilt.

4. *Man mache sich klar, dass die normierten Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ vollständig, also Banachräume sind.*

Wenn wir in dieser Vorlesung Sätze in einem Banachraum formulieren, reicht es aus, sich darunter den Raum $\mathbb{C}^n$ im Falle komplexer Banachräume bzw. $\mathbb{R}^n$ im Falle reeller Banachräume vorzustellen.

Lemma 1.2.11.
Es gelte für zwei komplexe Folgen $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann folgt

$$\begin{array}{lcl} a_n \pm b_n & \to & a \pm b \\ a_n \cdot b_n & \to & a \cdot b \\ \overline{a_n} & \to & \overline{a} \\ |a_n| & \to & |a| \end{array}$$

Gilt $a \neq 0$, so sind fast alle Folgenglieder ungleich Null. Wir lassen diese weg. Für die so erhaltene Teilfolge gilt

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a} \,.$$

Definition 1.2.12

1. *Ein topologischer Raum M heißt zusammenhängend , falls aus A, B nicht-leer und offen in M und $A \cup B = M$ folgt, dass $A \cap B \neq \emptyset$.*

2. *Eine Teilmenge U eines topologischen Raumes M heißt zusammenhängend, wenn sie als topologischer Raum mit der Relativtopologie zusammenhängend ist.*

3. *Eine Teilmenge U eines topologischen Raumes M heißt Zusammenhangskomponente von M, wenn U zusammenhängend ist und jede zusammenhängende Obermenge D von U, $U \subset D \subset M$ gleich U ist.*

4. *Eine nicht-leere, offene und zusammenhängende Teilmenge U von $\mathbb{C}$ heißt auch ein Gebiet von $\mathbb{C}$.*

Bemerkungen 1.2.13.

1. *Man überlege sich, dass jeder Punkt eines topologischen Raums M in einer Zusammenhangskomponente von M liegt.*

2. *Verschiedene Zusammenhangskomponenten sind disjunkt. Ein topologischer Raum zerfällt also in seine Zusammenhangskomponenten.*

3. *Ist eine Teilmenge U von $\mathbb{C}$ offen, so ist auch jede Zusammenhangskomponente von U offen.*

4. *Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen, so sind die Zusammenhangskomponenten von U offene Intervalle. Die offenen Mengen in $\mathbb{R}$ sind also Vereinigungen von höchstens abzählbar vielen paarweise disjunkten offenen Intervallen.*

Definition 1.2.14

1. *Eine Teilmenge K eines topologischen Raums M heißt kompakt , wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält. Das heißt: wenn $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen ist mit $K \subset \cup_{i\in I} U_i$, so gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $K \subset \cup_{i\in J} U_i$*

2. *Eine Menge M liegt relativ kompakt in einer offenen Menge U, wenn ihr Abschluss $\overline{M}$ kompakt ist und in U enthalten ist. Wir schreiben dann $M \subset\subset U$.*

Für uns wichtig sind noch die folgenden zwei Sätze, die insbesondere für die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ gelten:

Satz 1.2.15 (Satz von Bolzano-Weierstraß)**.**
Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes M ist genau dann kompakt, wenn jede Folge z_n in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt. Äquivalent dazu ist die Aussage, dass jede Folge in K einen Häufungspunkt in K hat.

Man nennt diese Eigenschaft eines topologischen Raums auch Folgenkompaktheit. Für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und damit auch von $\mathbb{C}^n$ kann man noch mehr sagen:

Satz 1.2.16 (Satz von Heine-Borel)**.**
Eine Teilmenge K des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist. Hierbei heißt K beschränkt, wenn es ein $r > 0$ gibt mit $|z| < r$ für alle $z \in K$.

Man beachte, dass hier eingeht, dass die normierten Vektorräume endliche Dimension haben.
Später werden wir benötigen:

Satz 1.2.17.
Sei $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \ldots$ eine absteigende Folge nichtleerer kompakter Teilmengen eines metrischen Raums, so ist

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset \; .$$

Beweis.
Es sei aus jeder Teilmenge K_n ein Punkt z_n gewählt. Da die Folge in der kompakten Teilmenge K_1 liegt, hat sie mindestens einen Häufungspunkt $z_0 \in K_1$. Wir wählen eine gegen z_0 konvergente Teilfolge, die wir wieder z_n nennen. Aber auch für jedes $m > 0$ ist z_0 der eindeutige Grenzwert der abgeschnittenen Folge $z_m, z_{m+1}, \ldots$, die in der kompakten Menge K_m liegt. Damit folgt aber, dass auch für jedes $m \in \mathbb{N}$ $z_0 \in K_m$ gilt. □

1.3 Stetige Funktionen

Unter einer Funktion verstehen wir von nun an eine Abbildung von einer Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Funktionen werden wie üblich addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert. Auch die Hintereinanderausführung oder Komposition ist wie üblich erklärt.

Wichtige Beispiele für Funktionen sind die polynomialen Funktionen

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 \ ,$$

die wir – konzeptionell etwas unsauber – in dieser Vorlesung auch kurz Polynome nennen, und die <u>rationalen Funktionen</u>

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \ ,$$

wobei p, q Polynome sind. Sie sind dort definiert, wo $q(z) \neq 0$ ist.

Mit einer Funktion f betrachten wir auch die Funktion $\overline{f}$, die man durch Konjugation der Funktionswerte erhält:

$$\overline{f}(z) := \overline{f(z)}$$

sowie die reellwertige Funktion $|f|$, die man durch den Absolutbetrag erhält:

$$|f|(z) := |f(z)| \ .$$

Wir erinnern an die Definition von Stetigkeit und tun dies im angemessenen konzeptionellen Rahmen, nämlich für Abbildungen zwischen topologischen Räumen.

Definition 1.3.1

1. *Seien E, F topologische Räume. Eine Abbildung $f : E \to F$ heißt <u>stetig</u> im Punkt $x_0 \in E$, wenn für jede Umgebung V' von $f(x_0)$ eine Umgebung V von x_0 in E existiert, so dass $f(V) \subset V'$ gilt.*

2. *Eine Abbildung heißt <u>stetig</u> auf E, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in E$ stetig ist.*

Man zeigt leicht wie in der reellen Analysis:

Satz 1.3.2.

1. *Eine Abbildung $f : E \to E'$ von* metrischen *Räumen ist genau dann im Punkt $x_0 \in E$ stetig, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $\mathrm{dist}_E(y, x_0) < \delta$ die Beziehung $\mathrm{dist}_{E'}(f(y), f(x_0)) < \epsilon$ folgt.*

2. *Eine Abbildung $f : E \to E'$ von zwei topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede in E' offene Menge U' das Urbild $f^{-1}(U')$ in E offen ist.*

3. *Eine Abbildung $f : E \to E'$ von zwei metrischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede gegen z_0 konvergente Folge z_n in E auch $f(z_n) \to f(z_0)$ in E' gilt. (Folgenkriterium für Stetigkeit)*

Wir halten auch als einfache Konsequenz aus Satz 1.3.2 (ii) fest:

Satz 1.3.3.
Das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung ist zusammenhängend.

Speziell für komplexwertige Funktionen gilt

Satz 1.3.4.

1. *Summe und Produkt stetiger komplexwertiger Funktionen sind wieder stetig. Ist f in z_0 stetig und $f(z_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{1}{f}$ in z_0 stetig.*

2. *Die Stetigkeit einer komplexwertigen Funktion ist äquivalent zur Stetigkeit von Real- und Imaginärteil sowie zur Stetigkeit von $\overline{f}$.*

Aus den Bemerkungen folgt schon, dass Polynome und rationale Funktionen in ihrem Definitionsbereich stetig sind.

Aus der reellen Analysis übernehmen wir den folgenden Satz:

Satz 1.3.5.

1. *Ist eine Abbildung $f : E \to E'$ zwischen topologischen Räumen auf einer kompakten Teilmenge $K \subset E$ stetig, so ist das Bild $f(K)$ kompakt.*

2. *Nimmt die stetige Abbildung f ihre Werte in den komplexen Zahlen an, so nehmen die reellwertigen Funktionen $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f$ und $|f|$ auf jedem Kompaktum K ihr Maximum und Minimum an. Insbesondere sind alle diese Funktionen beschränkt auf K: es gibt ein $r > 0$ mit $|f(z)| \leq r$.*

Hieraus folgt insbesondere der Satz:

Satz 1.3.6.
Die Funktion f sei auf der kompakten Menge K stetig und ohne Nullstellen. Dann gibt es eine positive Zahl δ, so dass

$$|f(z)| \geq \delta$$

für alle $z \in K$ gilt.

Beweis.
Denn unter den angegebene Voraussetzungen ist $1/f$ auf K stetig und daher ist die Funktion $|1/f|$ beschränkt. □

Wichtige Beispiel stetiger Funktionen sind Wege:

Definition 1.3.7
Sei E ein topologischer Raum und $M \subset E$ eine Teilmenge.

1. *Ein Weg in M ist eine stetige Abbildung γ eines abgeschlossenen Intervals $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nach M. Der Punkt $\gamma(a)$ heißt Anfangspunkt, der Punkt $\gamma(b)$ Endpunkt des Weges γ.*

2. *Zwei Punkte $z_1, z_2 \in M$ heißen in M verbindbar, wenn es einen Weg in M gibt mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2.*

In der Funktionentheorie ist man besonders daran interessiert, über Wege zu integrieren. Man betrachtet daher in $M \subset \mathbb{C}$ diejenigen Wege, für die γ die Stammfunktion einer Regelfunktion ist. Regelfunktionen sind eine für die Integrationstheorie bequeme Klasse von Funktionen.

Definition 1.3.8
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Abschluss $\overline{I} = [a, b]$ und E ein Banachraum. Eine Funktion $f : I \to E$ heißt Regelfunktion, wenn gilt:

1. *Für jeden inneren Punkt $x \in (a, b)$ existiert der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von f.*
2. *Wenn der Anfangspunkt $a \in I$ liegt, so existiert der rechtsseitige Grenzwert $f(a^+)$.*
3. *Wenn der Endpunkt $b \in I$ liegt, so existiert der linksseitige Grenzwert $f(b^-)$.*

Bemerkungen 1.3.9.

1. *Der Raum der Regelfunktionen mit der supremums-Norm bildet einen Banachraum.*
2. *Treppenfunktionen sind Regelfunktionen. Der Untervektorraum der Treppenfunktionen ist dicht bezüglich der supremums-Norm im Raum der Regelfunktionen. In anderen Worten: für jede Regelfunktion kann man eine Folge von Treppenfunktionen finden, die gleichmäßig gegen die Regelfunktion konvergiert.*
3. *Man kann das Integral von Treppenfunktionen auf Regelfunktionen so fortsetzen, dass es mit dem Riemannschen Integral übereinstimmt.*
4. *Stetige Funktionen und monotone reellwertige Funktionen sind Regelfunktionen.*
5. *Existiert das Maximum einer Familie von Regelfunktionen, so ist es eine Regelfunktion.*

Bemerkungen 1.3.10.

1. *Verbindbarkeit ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen verbindbarer Punkte eines topologischen Raumes M heißen Wegkomponenten des topologischen Raumes M.*
2. *In der Funktionentheorie werden oft aus Bequemlichkeit spezielle Wege in $\mathbb{C}$ verwendet: die Verbindungsstrecke zweier Punkte $z, w \in \mathbb{C}$ ist*

$$[z, w] := \{tw + (1 - t)z : 0 \le t \le 1\} ;$$

   ein Streckenzug von $a \in \mathbb{C}$ nach $b \in \mathbb{C}$ besteht aus endlich vielen aneinander gehängten Verbindunsstrecken:

$$S := \bigcup_{k=1}^{n} [z_k, w_k] \quad \text{mit} \quad z_1 = a, z_{k+1} = w_k, w_n = b$$

3. *Man überzeuge sich davon, dass zwei Punkte z, w in einer offenen Menge $M \subset \mathbb{C}$ genau dann verbindbar sind, wenn es einen Streckenzug mit Anfangspunkt z und Endpunkt w gibt.*

4. *Eine Teilmenge M eines topologischen Raums heißt wegzusammenhängend, wenn je zwei Punkte verbindbar sind. Ein Gebiet ist also eine wegzusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

5. *Eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist. Wegzusammenhängende Mengen eines topologischen Raums sind immer zusammenhängend. Die Umkehrung erfordert zusätzliche Bedingungen an den topologischen Raum. Man kann zum Beispiel fordern, dass dieser lokal wegzusammenhängend ist, d.h. dass jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt.*

6. *Eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist also genau dann zusammenhängend, wenn für je zwei Punkte $a, b \in U$ ein Streckenzug in U existiert, der a mit b verbindet. Diese Aussage gilt auch in $\mathbb{R}^n$ für beliebiges endliches n und somit in $\mathbb{C}^n$ für beliebiges endliches n.*

Wir erinnern schließlich noch an den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit:

Definition 1.3.11
Seien E und E' metrische Räume und $U \subset E$. Eine Funktion $f : U \to E'$ heißt gleichmäßig stetig , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $z_1, z_2 \in U$ aus $\operatorname{dist}_E(z_1, z_2) < \delta$ folgt $\operatorname{dist}_{E'}(f(z_1), f(z_2)) < \epsilon$.

Eine wichtige Folge von Kompaktheit ist der folgende

Satz 1.3.12.
Sei $D \subset E$ kompakt und $f : D \to E'$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

1.4 Holomorphe Funktionen

Wir erinnern noch erst einmal ganz allgemein an Differenzierbarkeit. Wir tun dies gleich im angemessenen konzeptionellen Rahmen. Die Grundidee der Ableitung ist es, lokal eine Funktion durch eine affine Funktion zu approximieren. Im einfachsten Fall ist das die Approximation einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt durch ihre Tangente. Linearität ist also essentiell, und deswegen führen wir Differenzierbarkeit für Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen ein, die wir als vollständig voraussetzen.

Seien E, F zwei Banachräume, beide entweder über den reellen oder den komplexen Zahlen. Sei $U \subset E$ offen und $f, g : U \to F$ zwei Funktionen.

Definition 1.4.1
Sei $U \subset E$ offen und $f, g : U \to F$ zwei Funktionen. Wir sagen, f und g berühren einander im Punkt $x_0 \in U$, wenn

$$\lim_{y \to x_0, y \neq x_0} \frac{|f(y) - g(y)|}{|y - x_0|} = 0$$

gilt.

Bemerkungen 1.4.2.

- *Sind die Funktionen f, g im Punkt x_0 stetig, so folgt $f(x_0) = g(x_0)$.*
- *Der Begriff "sich berühren" kann nur für Vektorräume mit einer Norm eingeführt werden. Man mache sich klar, dass die Tatsache, dass zwei Funktionen sich berühren, nicht von der Wahl der Norm, sondern nur von der von der Norm erzeugten Topologie abhängt.*

- *Aus der Ungleichung*

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$

folgt, dass "sich berühren" eine Äquivalenzrelation ist.

- *Unter allen Funktionen, die eine Funktion f in einem Punkt x berühren, gibt es* höchstens *eine affine Funktion der Form*

$$x \mapsto f(x_0) + u(x - x_0) \ ,$$

mit $u: \ E \to F$ einer linearen Abbildung, die f in x_0 berührt.

Berühren nämlich zwei affine Funktionen $y \mapsto f(x_0) + u_i(y - x_0)$ mit $i = 1, 2$ die Funktion f in x_0, so folgt für ihre Differenz $v := u_1 - u_2$

$$\lim_{y \to 0, y \neq 0} \frac{|v(y)|}{|y|} = 0 \quad .$$

Für jedes $\epsilon > 0$ können wir daher ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle y mit $|y| < \delta$ folgt $|v(y)| < \epsilon |y|$. Für beliebiges $x \in E \setminus \{0\}$ betrachten wir das Vielfache $y := \frac{\delta}{2} \frac{x}{|x|}$, dessen Betrag kleiner als δ ist. Hieraus folgt

$$|v(y)| = \frac{\delta}{2} \frac{1}{|x|} |v(x)| < \epsilon |y| = \epsilon \frac{\delta}{2} \frac{1}{|x|} |x| \ ,$$

woraus für beliebiges $x \in E$ die Ungleichung $|v(x)| < \epsilon |x|$ für alle $\epsilon > 0$ folgt. Daher gilt $v = 0$.

Definition 1.4.3

Seien E, F Banachräume und $U \subset E$ offen.

1. Wir sagen, eine Funktion $f : U \to F$ sei im Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $u : E \to F$ existiert, so dass die affine Funktion

$$y \mapsto f(x_0) + u(y - x_0)$$

die Abbildung f im Punkt x_0 berührt. Die lineare Funktion u ist nach Bemerkung 1.4.2 eindeutig; sie heißt Ableitung von f im Punkt x_0 und wird auch mit $\mathrm{d}f(x_0)$ oder $Df(x_0)$ bezeichnet.

2. Sei nun der Banachraum E ein endliches Produkt, also $E = E_1 \times E_2$. Wir nennen eine Funktion $f : E \to F$ im Punkt $(a_1, a_2) \in E$ bezüglich der ersten bzw. zweiten Variablen partiell differenzierbar, falls die partielle Abbildung

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \to & F \\ x_1 & \mapsto & f(x_1, a_2) \end{array}$$

im Punkt a_1 bzw.

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \to & F \\ x_2 & \mapsto & f(a_1, x_2) \end{array}$$

im Punkt a_2 differenzierbar ist. Die Ableitungen dieser Funktionen

$$D_1 f(a_1, a_2) \in L(E_1, F) \quad \text{bzw.} \quad D_2 f(a_1, a_2) \in L(E_2, F)$$

heißen partielle Ableitungen.

Man mache sich klar: um zu untersuchen, ob eine Funktion f in einem Punkt $x_0 \in E$ differenzierbar ist, reicht es aus, dass die Funktion auf einer Umgebung von U definiert ist. Die Ableitung ist dann eine lineare Abbildung, die auf ganz E definiert ist. Man halte also den Definitionsbereich einer Funktion und den ihrer Ableitung in einem Punkt auseinander.

Es gilt der folgende

Satz 1.4.4.
Es sei f eine stetige Abbildung einer offenen Teilmenge U von $E_1 \times E_2$ nach F. Dann ist f genau dann auf U stetig differenzierbar, wenn f in jedem Punkt von U bezüglich der ersten und zweiten Variablen partiell differenzierbar ist und die Abbildungen

$$\begin{array}{lcl} U & \to & L(E_1, F) \\ (x_1, x_2) & \mapsto & D_1 f(x_1, x_2) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lcl} U & \to & L(E_2, F) \\ (x_1, x_2) & \mapsto & D_2 f(x_1, x_2) \end{array}$$

stetig sind. In jedem Punkt $(x_1, x_2) \in U$ gilt dann

$$Df(x_1, x_2)(t_1, t_2) = D_1 f(x_1, x_2) t_1 + D_2 f(x_1, x_2) t_2$$

für alle $t_i \in E_i$.

Für den Beweis verweisen wir auf Kapitel 8.9 des Buchs von Dieudonné.

Bemerkung 1.4.5.
Wir sehen hier schon einen Unterschied zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit: eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ können wir auch als Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen. Komplexe Differenzierbarkeit erfordert die Existenz einer komplex-*linearen Funktion $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass $y \mapsto f(x) + u(y - x)$ die Funktion f in x berührt. Reelle Differenzierbarkeit erfordert dagegen die Existenz einer* reell-*linearen Funktion $\tilde{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der gleichen Berührungseigenschaft. Natürlich liefert jede komplexe Linearform u eine reell-lineare Abbildung $\tilde{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, aber nicht jede reell-lineare Abbildung $\tilde{u}$, die die Berührungseigenschaft hat, kommt von einer komplexen Linearform her. Sie muss dafür nämlich eine Drehstreckung sein, also durch eine Matrix der Form*

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ dargestellt werden. Die Drehstreckungen bilden aber nur einen reell zweidimensionalen Untervektorraum des vierdimensionalen Raums aller reellwertigen 2×2-Matrizen.

Wir formulieren den Begriff der Differenzierbarkeit für $E = \mathbb{C}$ um. Wir könnten die folgenden Betrachtungen gleich für komplexe Funktionen mehrerer Variablen durchführen, sehen aber davon ab, um die Bezeichnungen einfach zu halten.

Satz 1.4.6.
Eine auf einem Bereich $U \subset \mathbb{C}$ erklärte Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist in $z_0 \in U$ genau dann (komplex) differenzierbar, wenn es eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : U \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z)$$

für alle $z \in U$. Die komplexe Zahl $\Delta(z_0)$ heißt der Wert der <u>*Ableitung*</u> *von f in z_0. Wir schreiben*

$$\Delta(z_0) = f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0) .$$

Beweis.
Angenommen, eine Funktion $\Delta(z)$ wie im Satz beschrieben existiert. Aus der Stetigkeit von Δ in $z = z_0$ folgt für $z \neq z_0$

$$\frac{|f(z) - f(z_0) - \Delta(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = |\Delta(z) - \Delta(z_0)| \to 0 \text{ für } z \to z_0 \ .$$

Also berührt die affine Funktion $f(z_0) + \Delta(z_0)(z - z_0)$ die Funktion f im Punkt z_0. Daher ist f in z_0 im Sinne der Definition 1.4.3 differenzierbar.

Sei umgekehrt f in z_0 differenzierbar, werde also durch eine affine Funktion $f(z_0)+a(z-z_0)$ mit $a \in \mathbb{C}$ berührt. Definieren wir $\Delta(z_0) = a$ und für $z \neq z_0$

$$\Delta(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \ ,$$

so folgt daraus

$$\lim_{z\to z_0, z\neq z_0} \left| \frac{f - f(z_0) - a(z - z_0)}{z - z_0} \right| = 0$$

und aus der Berührenseigenschaft

$$\lim_{z\to z_0, z\neq z_0} \Delta(z) = a$$

und somit die Stetigkeit von Δ in z_0. □

Ist f für alle $z \in U$ differenzierbar, so erhalten wir eine Funktion

$$z \mapsto f'(z) \ .$$

Iterativ definiert man die n-te Ableitung $f^{(n)}$. Wir setzen $f^{(0)} := f$.

Definition 1.4.7
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

1. *Eine Funktion heißt im Punkt $z_0 \in U$ holomorph, wenn sie in einer Umgebung von z_0 komplex differenzierbar ist.*

2. *Eine holomorphe Funktion auf einem Bereich U ist eine auf U komplex differenzierbare Funktion f.*

Beispiele 1.4.8.

1. *Konstante Funktionen sind holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Ist $f(z) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so gilt für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$*
$$f(z) = f(z_0) + 0(z - z_0) \ .$$
Es ist also $f'(z_0) = 0$.

2. *Ebenso zeigt man direkt die Holomorphie der Funktion $f(z) = z$.*

3. *Die überall stetige Funktion $f(z) = \overline{z}$ ist nirgendwo komplex differenzierbar. Wäre diese in $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ komplex differenzierbar, so würden wir eine stetige Funktion Δ finden, für die auf komplexen Zahlen der Gestalt $z = x + \mathrm{i}y_0$ mit $x \neq x_0$ gelten muss*

$$f(z) = x - \mathrm{i}y_0 = x_0 - \mathrm{i}y_0 + \Delta(z)(x - x_0) \ ,$$

also $\Delta(z) = 1$ für alle $z = x + \mathrm{i}y_0$ mit $x \neq x_0$. Für komplexe Zahlen der Gestalt $x_0 + \mathrm{i}y$ aber würden wir dagegen finden:

$$x_0 - \mathrm{i}y = x_0 - \mathrm{i}y_0 + \Delta(z)\mathrm{i}(y - y_0) \ ,$$

also $\Delta(z) = -1$ für $y \neq y_0$. Eine solche Funktion $\Delta(z)$ kann aber in (x_0, y_0) nicht stetig fortgesetzt werden.

4. *Man überlege sich, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|^2$ im Punkt $z = 0$ komplex differenzierbar, aber nirgends holomorph ist.*

Die folgenden Sätze kennen wir aus der reellen Analysis. Sie gelten insbesondere für Funktionen $f : \mathbb{C} \to C$.

Satz 1.4.9.
Seien E, F komplexe Banachräume und $U \subset E$ offen. Die Funktionen $f, g, : U \to F$ seien in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Dann gilt

1. *Die Summe $f + g$ ist in z_0 komplex differenzierbar mit*

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

2. *Es gilt die Produktregel: sind E, F, G Banachräume und ist $m : E \times F \to G$ eine stetige bilineare Abbildung. Dann ist diese Abbildung in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in E \times F$ differenzierbar und ihre Ableitung ist die lineare Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} E \times F & \to & G \\ (s,t) & \mapsto & m(x_0, t) + m(s, y_0) \ . \end{array}$$

Denn aus der Bilinearität folgt

$$m(x_0 + s, y_0 + t) - m(x_0, t) - m(s, y_0) - m(x_0, y_0) = m(s, t) \ ,$$

was sich wegen der Stetigkeit von m mit einer positiven Konstante $c > 0$ abschätzen lässt:

$$|m(s, t)| < c \cdot |s| \cdot |t| \ .$$

Hieraus folgt die Berührungseigenschaft.

3. *Es seien E, F, G komplexe Banachräume und $f : U \to V$ und $g : V \to G$ Funktionen auf zwei offenen Teilmengen $U \subset E$ und $V \subset F$. Es sei die Funktion f in z_0 und g in $w_0 := f(z_0)$ komplex differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar und es gilt die <u>Kettenregel</u>*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \circ f'(z_0) \ .$$

4. *Insbesondere gilt für zwei Funktionen $f, g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Das Produkt $f \cdot g$ ist in z_0 komplex differenzierbar und es gilt die <u>Leibniz-Regel</u>*

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

5. *Ist überdies $f(z_0) \neq 0$, so ist die Funktion $1/f$ in einer Umgebung von z_0 definiert und in z_0 komplex differenzierbar mit Ableitung*

$$(\frac{1}{f})'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$$

Aus diesen Sätzen folgt sofort:

Satz 1.4.10.

1. *Polynomiale Funktionen in z, $p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$, mit $a_\nu \in \mathbb{C}$, sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Es ist*
$$p'(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu z^{\nu-1} \ .$$

2. *Rationale Fuktionen sind auf ihrem Definitionsbereich holomorph. Die Ableitung einer rationalen Funktion ist eine rationale Funktion.*

Definition 1.4.11
Eine Abbildung $f : U \to V$ zwischen zwei Bereichen $U, V \subset \mathbb{C}$ heißt biholomorph, wenn sie bijektiv ist und sowohl f als auch die Umkehrfunktion f^{-1} holomorphe Funktionen sind.

Wie in der reellen Analysis zeigt man

Satz 1.4.12.
Die Abbildung $f : U \to V$ ist genau dann biholomorph, wenn f holomorph und bijektiv ist, f^{-1} stetig ist und auf ganz U gilt $f'(z) \neq 0$. Dann ist

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} \qquad \textit{mit } w = f(z) \ .$$

Wir wollen nun die Beziehung zwischen der komplexen Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und der reellen Differenzierbarkeit der zugehörigen Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ untersuchen.

Satz 1.4.13.
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$. Man schreibe $f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ mit $z = x + \mathrm{i}y$, und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sowie $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*

2. *f ist in (x_0, y_0) reell-differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:*
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Beweis.
Sei f in z_0 komplex differenzierbar und $A := f'(z_0) \in \mathbb{C}$. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0) - At}{|t|} \tag{1}$$

gilt. Wir spalten in Real- und Imaginärteil auf:

$$A = \alpha + \mathrm{i}\beta \text{ und } t = h + \mathrm{i}k$$

und somit

$$At = \alpha h - \beta k + \mathrm{i}(\alpha k + \beta h) \ .$$

Da eine komplexwertige Funktion genau dann konvergiert, wenn ihr Real- und Imaginärteil konvergieren, ist (1) äquivalent zu

$$\begin{array}{rcl} \lim_{(h,k)\to 0} \dfrac{u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0,y_0) - (\alpha h - \beta k)}{|(h,k)|} & = & 0 \\ \lim_{(h,k)\to 0} \dfrac{v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0,y_0) - (\alpha k + \beta h)}{|(h,k)|} & = & 0 \end{array} \tag{2}$$

Mit den linearen Abbildungen

$$L_{1,2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ ,$$

die durch

$$L_1(h,k) := \alpha h - \beta k \quad \text{ und } \quad L_2(h,k) := \alpha k + \beta h$$

gegeben sind, folgt aus den Gleichungen (2), dass die Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in (x_0, y_0) differenzierbar sind. Der Vergleich der Koeffizienten von h und k in L_1 und L_2 zeigt, dass komplexe Differenzierbarkeit äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcr} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & = & \alpha & = & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) & = & -\beta & = & -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{array}$$

ist. □

Man beachte, dass wir auch die folgende Identität mitbeweisen haben:

$$f'(z_0) = A = \alpha + \mathrm{i}\beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \ .$$

Als einfache Folgerung haben wir das

Korollar 1.4.14.
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : U \to \mathbb{C}$ auf U holomorph und $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$. Dann ist f auf U konstant.

Beweis.
Nach dem vorangegangenen Satz 1.4.13 ist dann f auf U differenzierbar und es gelten die für $f = u + \mathrm{i}v$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{ und } \quad u_y = -v_x$$

sowie $f' = u_x + \mathrm{i}v_x$. Aus $f' = 0$ folgt somit $u_x = v_x = 0$ und aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen das Verschwinden aller partiellen Ableitungen. Nach einem Satz aus der Analysis folgt auf dem Gebiet U daher, dass die reellen Funktionen u und v und somit auch f auf U konstant sind. □

1.5 Möbiustransformationen und die Riemannsche Zahlensphäre

Wir wollen rationale Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der speziellen Form

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad-bc \neq 0$ untersuchen. Die Bedingung $ad-bc = 0$ garantiert hierbei, dass der Nenner nicht identisch verschwindet und dass auch der Zähler kein konstantes Vielfaches des Nenners ist.

Ist $c = 0$, so ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und bildet $\mathbb{C}$ biholomorph auf sich ab. Für $c \neq 0$ heißt f gebrochen lineare Funktion und ist auf $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ definiert. Für $w \neq \frac{a}{c}$ existiert eine Umkehrfunktion:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ w & \mapsto & \dfrac{dw-b}{-cw+a} \end{array} ,$$

so dass f eine biholomorphe Abbildung von $U := \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ nach $V = \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ vermittelt.

Lemma 1.5.1.

1. *Sei z_ν eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{\nu\to\infty} z_\nu = -\frac{d}{c}$ und $z_\nu \neq -\frac{d}{c}$. Dann gilt $\lim_{\nu\to\infty} |f(z_\nu)| = +\infty$.*

2. *Sei z_ν eine Folge komplexer Zahlen in U mit $\lim_{\nu\to\infty} |z_\nu| = +\infty$ und $z_\nu \neq 0$, so gilt*

$$f(z_\nu) = \frac{a + b/z_\nu}{c + d/z_\nu} \to \frac{a}{c} .$$

Dies legt es nahe, die komplexe Zahlenebene um einen Punkt zu erweitern:

Definition 1.5.2
Wir setzen $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und nennen ∞ den "unendlich fernen Punkt". Wir setzen die Topologie von $\mathbb{C}$ fort, indem wir eine Teilmenge $M \subset \hat{\mathbb{C}}$ eine Umgebung von ∞ nennen, wenn es eine kompakte Teilmenge K von $\mathbb{C}$ gibt, so dass $\mathbb{C} \setminus K \subset M$. Umgebungen von $z \in \mathbb{C}$ sind nach wie vor Mengen, die eine Kreisscheibe um z enthalten. Der topologische Raum $\hat{\mathbb{C}}$ heißt abgeschlossene Ebene oder Riemannsche Zahlensphäre.

Bemerkungen 1.5.3.

1. *Man überzeuge sich, dass dies eine Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$ definiert, deren offene Mengen genau die offenen Mengen in $\mathbb{C}$ und die Komplemente in $\hat{\mathbb{C}}$ von Kompakta in $\mathbb{C}$ sind.*

2. *Der Punkt ∞ ist zu unterscheiden von den Punkten $\pm\infty$, die bei der Vervollständigung der reellen Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}}$ auftreten.*

3. *Die Bezeichnung Riemannsche Zahlensphäre hat ihren Ursprung in der folgenden Konstruktion: identifiziere im $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten x_1, x_2, x_3 die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ mit der (x_1, x_2)-Ebene.*

   Die zwei-dimensionale Standardsphäre

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

projizieren wir vom Nordpol $N = (0,0,1)$ aus stereographisch auf $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S^2 \setminus \{N\} & \to & \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \frac{1}{1-x_3}(x_1 + \mathrm{i}x_2) \ . \end{array}$$

Diese Abbildung ist stetig. Auch die Umkehrabbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1} : \mathbb{C} & \to & S^2 \setminus \{N\} \\ x + \mathrm{i}y & \mapsto & \dfrac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1) \end{array}$$

ist stetig. Durch die Fortsetzung $\hat{\varphi} : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ mit $\hat{\varphi}(N) = \infty$ können wir $\hat{\mathbb{C}}$ als topologischen Raum mit der Sphäre S^2 identifizieren.

4. *Insbesondere ist der topologische Raum $\hat{\mathbb{C}}$ als homöomorphes Bild der beschränkten und abgeschlossenen Menge $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ kompakt.*

5. *Wir setzen nun auch f fort durch*

$$f(-\frac{d}{c}) = \infty \quad \text{und} \quad f(\infty) = \frac{a}{c}$$

zu einer stetigen Bijektion von $\hat{\mathbb{C}}$. Im Falle $c = 0$ setzen wir $f(\infty) = \infty$.

6. *Diese Abbildungen heißen <u>Möbius-Transformationen</u> von $\hat{\mathbb{C}}$.*

7. *Wir betrachten die Abbildung in die Homöomorphismen von $\hat{\mathbb{C}}$:*

$$\begin{array}{rcl} GL(2, \mathbb{C}) & \to & \mathrm{Hom}(\hat{\mathbb{C}}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}) \end{array}$$

Dies ist ein Gruppenhomomorphismus, dessen Kern die nicht-verschwindenden Vielfachen der Einheitsmatrix sind.

8. *Die Möbiustransformationen bilden als Bild eines Gruppenhomomorphismus eine Gruppe.*

9. *Besonders einfache Möbiustransformationen sind die Translationen*

$$z \mapsto z + b \quad \text{mit} \ b \in \mathbb{C}$$

die Drehstreckungen

$$z \mapsto az \quad \text{mit} \ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

und die Inversion

$$z \mapsto \frac{1}{z} \ .$$

Aus diesen lässt sich jede Möbiustransformation zusammensetzen: für $c \neq 0$:

$$z \mapsto z + \frac{d}{c} \mapsto (z + \frac{d}{c})^{-1} \mapsto \frac{bc-ad}{c^2}(z + \frac{d}{c})^{-1} \mapsto \frac{bc-ad}{c^2}(z + \frac{d}{c})^{-1} + \frac{a}{c} = \frac{az+b}{cz+d} \ .$$

Satz 1.5.4.
Jede Möbiustransformation ist durch die Angabe der Bilder dreier verschiedener Punkte aus $\hat{\mathbb{C}}$ eindeutig festgelegt.

Beweis.

1. Dazu überlegen wir uns zunächst, dass jede Möbiustransformation $T \neq \mathrm{id}$ genau einen oder zwei Funkpunkte hat. Für $Tz = az + b$ ganz sind dies ∞ und für $a \neq 1$ der Punkt $z = b/(1-a)$. Für $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$ sind die Fixpunkte genau die Lösungen der quadratischen Gleichung
$$cz^2 + (d-a)z = b \ .$$
2. Gilt $T_1 z_\nu = T_2 z_\nu$ für drei verschiedene Punkte z_1, z_2 und z_3, so hat $T_2^{-1} \circ T_1$ drei Fixpunkte, ist also die Identität.

□

Wir wollen nun zeigen:

Satz 1.5.5.
Sind (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) zwei Tripel paarweise verschiedener Punkte von $\hat{\mathbb{C}}$, so gibt es genau eine Möbiustransformation T mit $Tz_i = w_i$.

Dazu definieren wir

Definition 1.5.6
Für vier paarweise verschiedene Punkte $z, z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ heißt
$$\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$
das Doppelverhältnis der vier Punkte.

Hierbei definieren wir im Fall $z_\nu = \infty$ das Doppelverhältnis durch den Grenzwert für $z_\nu \to \infty$ und erhalten:
$$\begin{aligned}
\mathrm{DV}(\infty, z_1, z_2, z_3) &= \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \\
\mathrm{DV}(z, \infty, z_2, z_3) &= \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} \\
\mathrm{DV}(z, z_1, \infty, z_3) &= \frac{z - z_1}{z - z_3} \\
\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, \infty) &= \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}
\end{aligned}$$

Beweis.
Man beachte, dass
$$z \mapsto \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$$
die Möbiustransformation ist, die z_1, z_2, z_3 auf die Punkte $0, 1, \infty$ abbildet.

$T_1(z) := \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$ bzw. $T_2(z) := \mathrm{DV}(z, w_1, w_2, w_3)$ bilden (z_1, z_2, z_3) bzw. (w_1, w_2, w_3) auf $(0, 1, \infty)$ ab. Also leistet $T_2 \circ T_1^{-1}$ das Gewünschte. □

Es gilt

Satz 1.5.7.
Es seien z_1, z_2, z_3 *drei paarweise verschiedene Punkte in* $\hat{\mathbb{C}}$. *Dann gilt für jede Möbiustransformation* T

$$\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) = \mathrm{DV}(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3) \quad \textit{für alle} \quad z \in \hat{\mathbb{C}} \,.$$

Beweis.
Für gegebene $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} S : \hat{\mathbb{C}} &\to \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \mathrm{DV}(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3) \end{aligned}$$

offenbar eine Möbiustransformation, für die gilt

$$Sz_1 = 0 \,, \quad Sz_2 = 1 \,, \quad Sz_3 = \infty \,.$$

Also ist sie gleich der Möbiustransformation $z \mapsto \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$. □

Indem man Translationen, Drehstreckungen und die Inversion einzeln betrachtet, sieht man leicht:

Satz 1.5.8.
Möbiustransformationen führen Geraden und Kreislinien über in Geraden oder Kreislinien.

Es gilt

Satz 1.5.9.
Durch drei verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ *geht genau eine Kreislinie oder Gerade.*

Beweis.
Wir können die drei Punkte durch eine Möbiustransformation T auf $0, 1, \infty$ abbilden. Durch diese Punkte geht genau eine Gerade, die nach Satz 1.5.8 durch T^{-1} auf einen Kreis oder eine Gerade abgebildet wird. □

Satz 1.5.10.
Ein Gebiet $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ *werde von einer Kreislinie* K *oder einer Geraden (unter Einschluss von* ∞*) berandet. Dann gibt es eine lineare Transformation, die* G *auf die obere Halbebene abbildet.*

Beweis.
Ist T die Möbiustransformation mit $TK = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so muss TG entweder die obere oder die untere komplexe Halbebene sein. Durch Komposition mit der Möbiustransformation $z \mapsto z^{-1}$ kann man im zweiten Fall erreichen, dass das Bild wirklich die obere Halbebene ist. □

Beispiel 1.5.11.
Die Abbildung

$$T : z \mapsto \mathrm{DV}(z, 1, \mathrm{i}, -1) = \mathrm{i}\frac{1-z}{1+z}$$

bildet das Innere des Einheitskreises auf die obere Halbebene ab: wegen $T(1) = 0, T(\mathrm{i}) = 1$ *und* $T(-1) = \infty$ *ist das Bild des Einheitskreises die reelle Achse. Wegen* $T(0) = \mathrm{i}$ *muss das Bild des Inneren des Einheitskreises die obere Halbebene sein.*

2 Analytische Funktionen

2.1 Reihen

Wir werden unendliche Reihen zur Definition von Funktionen verwenden. Hierfür brauchen wir zunächst einige Aussagen, die für reellwertige Reihen aus der Analysis bekannt sind. Diese Aussagen gelten allgemein für Reihen mit Werten in einem Banachraum. In diesem Kapitel sei mit E ein komplexer oder reeller Banachraum bezeichnet. Mit K bezeichnen wir den Körper der reellen oder komplexen Zahlen.

Definition 2.1.1

1. *Unter der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ mit Werten $a_\nu \in E$ versteht man die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $S_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$.*

2. *Ist die Folge der Partialsummen konvergent, so heißt die Reihe konvergent. Ist $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, so schreibt man*
$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \ .$$
Wir werden, etwas unsauber, den Ausdruck $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ sowohl für die Reihe selbst als auch, wenn sie konvergiert, für ihren Grenzwert verwenden.

3. *Ist die reellwertige Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ konvergent, so heißt die banachraumwertige Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent*

Beispiel 2.1.2.
Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Betrachte die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Es gilt
$$S_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \ .$$
Wegen $|z| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$, also folgt
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \ .$$

Wir erinnern an die aus der Analysis bekannten Gesetzmäßigkeiten. Alle Reihen nehmen dabei Werte in einem reellen oder komplexen Banachraum an, soweit nichts anderes vorausgesetzt wird.

Satz 2.1.3.

1. *Ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ konvergent, so ist a_ν eine Nullfolge.*

2. *Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz. (Hierfür ist die Vollständigkeit von E wesentlich.)*

3. *Es gelten die üblichen Konvergenzkriterien:*

   - *Das Majorantenkriterium: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente reellwertige Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und (a_n) eine Folge in E mit $|a_n| \leq c_n$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut. Man nennt dann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

- *Das <u>Wurzelkriterium</u>: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe, für deren Glieder die Abschätzung*

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

gilt, so ist die Reihe absolut konvergent. Dies folgt durch einen Vergleich mit der geometrischen Reihe aus dem Majorantenkriterium.

- *Das <u>Quotientenkriterium</u>: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine banachraumwertige Reihe. Es gebe eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass*

$$|a_{n+1}| \leq \theta |a_n| \qquad \text{für alle } n \geq n_0$$

gilt. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut. Dies folgt wiederum durch Vergleich mit der geometrischen Reihe aus dem Majorantenkriterium.

Der Begriff der absoluten Konvergenz ist deshalb wichtig, weil man nur absolut konvergente Reihen umordnen kann:

Satz 2.1.4 (Kommutativität absolut konvergenter Reihen)**.**
Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente banachraumwertige Reihe und σ eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}_0$ auf sich, so die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $b_n = a_{\sigma(n)}$ ebenfalls absolut konvergent, und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Man kann den Begriff einer absolut summierbaren Familie von Elementen eines Banachraums E einführen: dies sind abzählbare Familien von Elementen von E, für die die durch eine Abzählung gewonnene Reihe absolut summierbar ist. Eine solche Familie ist dann für alle Abzählungen absolut summierbar mit gleichem Grenzwert.

Für solche Familien gilt auch ein Assoziativgesetz:

Satz 2.1.5 (Assoziativiät absolut konvergenter Reihen)**.**
Es sei $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine absolut summierbare Familie von Elementen eines Banachraumes E. Ferner sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht-leerer Teilmengen von A derart, dass $A = \cup_n B_n$ und $B_p \cap B_q = \emptyset$ für $p \neq q$ gilt. Dann sind alle Reihen

$$z_n := \sum_{\alpha \in B_n} x_\alpha$$

absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \ .$$

Schließlich kann man für absolut konvergente Reihen das Cauchy-Produkt einführen:

Satz 2.1.6.
Seien E, F, G Banachräume und $m : E \times F \to G$ eine stetige bilineare Abbildung. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe mit Werten in E und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine absolut konvergente Reihe mit Werten in F. Dann konvergiert auch die Reihe mit Glied

$$c_n := \sum_{k+l=n} m(a_k, b_l)$$

die Werte im Banachraum G annimmt, absolut, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = m\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \ .$$

Wir wollen nun Reihen benutzen, um interessante holomorphe Funktionen einzuführen. Dafür brauchen wir den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz:

Definition 2.1.7

1. *Sei A eine Menge und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen $f_n : A \to M$ mit Werten in einem metrischen Raum M . Dann heißt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent, wenn es eine Abbildung $f : A \to M$ gibt, so dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$\mathrm{dist}(f_n(z), f(z)) < \epsilon$$

für alle $n \geq N$ und alle $z \in A$.

2. *Sei A nun ein topologischer Raum. Eine Folge von Abbildungen $f_n : A \to M$ für $n \in \mathbb{N}$ heißt lokal gleichmäßig konvergent gegen f, wenn jeder Punkt $z_0 \in A$ eine Umgebung $V(z_0) \subset A$ besitzt, auf der (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Wie in der Vorlesung Analysis I beweist man den folgenden Satz

Satz 2.1.8.
Sei A ein topologischer Raum und M ein metrischer Raum. Ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Abbildungen $f_n : A \to M$ auf A lokal gleichmäßig konvergent gegen $f : A \to M$ und sind alle f_n auf A stetig, so ist auch f auf A stetig.

Wir betrachten nun unendliche Folgen und Reihen von Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich und formulieren das Cauchy-Kriterium und das Majorantenkriterium. Sie werden wie in der Vorlesung Analysis I bewiesen.

Lemma 2.1.9 (Cauchy-Kriterium)**.**
Sei E ein vollständiger metrischer Raum. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : A \to E$ ist auf A genau dann gleichmäßig konvergent, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \geq N$ und alle *$z \in A$ gilt*

$$\mathrm{dist}(f_m(z), f_n(z)) < \epsilon \ .$$

Lemma 2.1.10 (Majoranten-Kriterium)**.**
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_\nu : U \to E$ eine Folge banachraumwertiger Funktionen. Es sei die reellwertige Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ eine Majorante der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$, d.h. es gelte für alle $z \in U$ und alle ν die Ungleichung

$$|f_\nu(z)| \leq a_\nu \ .$$

Konvergiert dann die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, so ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ auf U gleichmäßig absolut konvergent, d.h. $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu(z)| < \infty$ und somit ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ auch auf U gleichmäßig konvergent.

Beweis.
Nach dem Majorantenkriterium für Reihen existiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ der Grenzwert

$$f(z) := \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=1}^{N} f_\nu(z) \ ,$$

und die Reihe ist für jedes z absolut konvergent. Wegen

$$|f(z) - \sum_{\nu=1}^{N} f_\nu(z)| = |\sum_{\nu=N+1}^{\infty} f_\nu(z)| \leq \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |f_\nu(z)| \leq \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |a_\nu|$$

kann die Abschätzung des Restglieds der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$ unabhängig von z durch die Abschätzung des Restglieds der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ vorgenommen werden. □

Es folgt also insbesondere, dass die geometrische Reihe auf abgeschlossenen Kreisscheiben vom Radius strikt kleiner als 1 um den Ursprung gleichmäßig absolut konvergent ist.

2.2 Potenzreihen

Wir benutzen in diesem Kapitel Reihen mit Werten in einem Banachraum E, um Funktionen auf $\mathbb{C}^n$ oder $\mathbb{R}^n$ einzuführen. Wir verwenden K für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und beschränken uns meist auf den Fall $n = 1$.

Definition 2.2.1
Eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

mit $a_\nu \in E$ heißt Potenzreihe mit den Koeffizienten a_ν um den Entwicklungspunkt $z_0 \in K$. Die Menge der $z \in K$, für die die Reihe konvergiert, heißt der Konvergenzbereich der Reihe.

Wir wollen untersuchen, wo Potenzreihen konvergieren, ob sie gegen eine holomorphe Funktion konvergieren und was in diesem Fall die Ableitung ist.

Lemma 2.2.2 (Abelsches Lemma)**.**
Es sei E ein Banachraum und $z_0, z_1 \in K$. Die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ sei für $z = z_1$ konvergent. Wir setzen $r_1 := |z_1 - z_0|$. Dann gilt

1. *Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in U_{r_1}(z_0)$.*
2. *Die Reihe konvergiert gleichmäßig absolut auf jeder abgeschlossenen Kreisschreibe $|z - z_0| \leq \rho < r_1$.*

Beweis.
Da die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ für $z = z_1$ konvergiert, bilden ihre Glieder eine Nullfolge, sind also insbesondere beschränkt. Es gibt also ein $c > 0$, so dass

$$|a_\nu| r_1^\nu = |a_\nu (z_1 - z_0)^\nu| \leq c$$

für alle ν. Ohne Einschränkung sei $r_1 > 0$; wir haben also

$$|a_\nu| \leq \frac{c}{r_1^\nu} \quad \text{für alle } \nu \ .$$

Für $|z - z_0| \leq \rho < r_1$ erhalten wir daraus die Abschätzung

$$|a_\nu (z - z_0)^\nu| = |a_\nu||z - z_0|^\nu \leq \frac{c}{r_1^\nu} \rho^\nu = c q^\nu$$

mit $q := \frac{\rho}{r_1}$. Wegen $0 < \rho < r_1$ ist $0 < q < 1$. Also ist die geometrische Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ eine konvergente Majorante für die Potenzreihe und wir wenden Lemma 2.1.10 an. □

Satz 2.2.3.
Zu jeder Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *auf* K *mit Werten in einem Banachraum* E *existiert genau ein* $r \in [0,\infty]$*, der* *Konvergenzradius* *der Potenzreihe, mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *In jedem abgeschlossenen Kreis* $|z-z_0| \leq \rho < r$ *ist die Reihe gleichmäßig absolut konvergent.*

2. *Für* $|z-z_0| > r$ *ist die Reihe divergent.*

3. *Es gilt die Formel von* *Cauchy-Hadamard*

$$r = \left(\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \right)^{-1}$$

Bemerkungen 2.2.4.

1. *Wir erinnern an die Definition des limes superior einer Folge reeller Zahlen als größter Grenzwert aller konvergenten Teilfolgen. Hier haben wir es mit Folgen nicht-negativer reeller Zahlen zu tun, so dass der limes superior genau dann existiert, wenn die Folge nach oben beschränkt ist. Ist sie dies nicht, so setzen wir den limes superior gleich* ∞*. Für konvergente Folgen fallen limes superior und Grenzwert zusammen.*

2. *Ist* $\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 0$ *oder* $= \infty$*, so ist* $r = \infty$ *bzw.* $r = 0$ *zu setzen.*

3. *Die Formel von Cauchy-Hadamard liefert nicht immer einen zweckmäßigen Weg zur Bestimmung des Konvergenzradius.*

Beweis.
Die erste Aussage folgt schon aus Lemma 2.2.2. Sei

$$\tilde{r} := \left(\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \right)^{-1}$$

1. Wir betrachten zunächst den Fall $0 < \tilde{r} \leq \infty$ und wählen ein r_0 mit $0 < r_0 < \tilde{r}$. Es gilt also
$$\frac{1}{\tilde{r}} = \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < \frac{1}{r_0} \ .$$
Daher existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt
$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r_0} \Leftrightarrow |a_n| < \frac{1}{r_0^n} \ .$$
Hieraus folgt die Abschätzung
$$|a_n(z-z_0)^n| < \left(\frac{|z-z_0|}{r_0} \right)^n \ ,$$
woraus für alle z mit $|z-z_0| < r_0$ nach dem Majorantenkriterium durch Vergleich mit der geometrischen Reihe die Konvergenz der Reihe folgt. Da r_0 mit $0 < r_0 < \tilde{r}$ beliebig gewählt war, folgt die Konvergenz der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ für alle z mit $|z-z_0| < \tilde{r}$. Wir haben somit die untere Abschätzung $\tilde{r} \leq r$ an den Konvergenzradius r.

2. Sei nun $\tilde{r}$ endlich, $0 \leq \tilde{r} < \infty$ und wähle r_0 mit $\tilde{r} < r_0$. Das heißt aber

$$\frac{1}{r_0} < \frac{1}{\tilde{r}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ .$$

Daher existiert eine Folge natürlicher Zahlen $n_1, n_2, \ldots$, so dass

$$\frac{1}{r_0} < |a_{n_p}|^{\frac{1}{n_p}}$$

für alle $p \in \mathbb{N}$, also

$$\frac{1}{(r_0)^{n_p}} < |a_{n_p}| \ .$$

Für $|z - z_0| > r_0$ folgt daher für alle $p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n_p}(z - z_0)^{n_p}| > 1 \ ,$$

so dass die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu$ schon deswegen nicht konvergent sein kein, weil ihre Glieder keine Nullfolge sind. Da r_0 beliebig mit $r < r_0$ war, folgt die Divergenz der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu$ für alle z mit $|z - z_0| > \tilde{r}$. Wir haben somit die obere Abschätzung $\tilde{r} \geq r$ an den Konvergenzradius r.

□

Beispiele 2.2.5.

1. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ *hat wegen* $\limsup \sqrt[n]{n^n} = \limsup n = \infty$ *den Konvergenzradius* $r = 0$.

2. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *hat wegen des Quotientenkriteriums Konvergenzradius* $r = \infty$.

Satz 2.2.6 (Isoliertheit der Nullstellen)**.**
Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu$ *auf* K *mit Werten in einem Banachraum* E *habe Konvergenzradius* $r > 0$. *Falls nicht alle Koeffizienten* a_ν *gleich Null sind, existiert ein* $r' < r$, *so dass für* $0 < |z - z_0| < r'$ *der Wert* $f(z)$ *von Null verschieden ist.*

Beweis.
Sei h die kleinste natürliche Zahl mit $a_h \neq 0$. Dann schreibe

$$f(z) = (z - z_0)^h(a_h + a_{h+1}(z - z_0) + \ldots) \ ;$$

die Reihe $g(z) = a_h + a_{h+1}(z - z_0) + \ldots$ konvergiert dann auch dort gleichmäßig, wo f konvergiert und definiert eine stetige Funktion. Wegen $g(z_0) \neq 0$ gibt es also ein $r' > 0$, so dass $g(z) \neq 0$ für alle z mit $|z - z_0| < r'$ erfüllt ist. □

Korollar 2.2.7.
Sind zwei Potenzreihen f, g *auf der gleichen Kreisschreibe mit dem Mittelpunkt* z_0 *als Entwicklungspunkt absolut summierbar und stimmen ihre Werte dort überein, so stimmen alle ihre Koeffizienten überein.*

Beweis.
Betrachte $f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)(z - z_0)^n$ und wende Satz 2.2.6 an. $\square$

Eine wichtige Eigenschaft von Potenzreihen ist die Tatsache, dass man sie ineinander einsetzen kann.

Betrachtung 2.2.8.
Sei die Potenzreihe $g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$ mit $b_n \in K$ auf einer offenen Kreisscheibe um $0 \in K$ absolut konvergent. Bezeichne die absolut konvergente Reihe mit

$$G(u) := \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| u^n$$

Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine weitere Potenzreihe mit Werten in einem Banachraum E und Konvergenzradius r um $z = 0$. Ersetzen wir in dem Monom $a_n z^n$ die Variable z durch die Reihe $g(u)$, so erhalten wir formal ein n-faches Produkt von Reihen. Wir führen daher für jedes n-Tupel natürlicher Zahlen $\mu = (\mu_n) \in \mathbb{N}^n$ das Monom

$$t_\mu(u) := a_n \prod_{k=1}^{n} b_{\mu_k} u^{\mu_k}$$

mit Werten in E ein.

Satz 2.2.9.
Sei $s > 0$ gegeben mit $G(s) < r$. Dann ist für jedes $u \in D_s(0)$ die Familie $t_\mu(u)$ absolut summierbar, wobei μ über die Vereinigung $A = \cup_{n \in N} \mathbb{N}^n$ läuft, und die Summe ist gleich $f(g(u))$.

Beweis.
Wenn wir die absolute Konvergenz bewiesen haben, folgt die Gleichheit aus dem Assoziativitätsgesetz 2.1.5 für absolut konvergente Reihen auf die Familie $A_n := \mathbb{N}^n$. Die absolute Konvergenz aber folgt aus der Abschätzung für jede endliche Teilmenge $B \subset A$

$$\sum_{B \cap \mathbb{N}^n} |t_\mu(u)| \leq |a_n| G(s)^n$$

und wegen der Voraussetzung $0 < G(s) < r$ ist die rechte Seite dieser Ungleichung der Summand zum Index n an der Stelle $z = G(s)$ der absolut summierbaren Familie $|a_n| z^n$. $\square$

Korollar 2.2.10.
Gehört $g(0) \in D_r(0)$, so existiert eine kleine Kreisscheibe D in K um 0 derart, dass für $u \in D$ die Potenzreihe g in eine Potenzreihe f mit Konvergenzradius r eingesetzt werden darf.

Beweis.
Nach Definition ist $G(0) = |g(0)|$. Da G im Punkt 0 stetig ist, folgt die Existenz von $s > 0$ mit $G_k(s) < r$ unmittelbar aus der Voraussetzung $G(0) < r$. $\square$

Wir wollen nun den Begriff der Potenzreihe benutzen, um eine wichtige Funktionenklasse einzuführen.

Definition 2.2.11

1. *Sei $U \subset K$ offen. Wir nennen eine Abbildung $f : U \to E$ in einen Banachraum E analytisch, wenn zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine offene Kreisschreibe $D_\epsilon(z_0) \subset U$ existiert, so dass auf $D_\epsilon(z_0)$ der Wert von f gleich einer absolut summierbaren Potenzreihe in der Variablen $z - z_0$ ist.*

   Auf Grund von Korollar 2.2.7 ist diese Potenzreihe eindeutig bestimmt.

2. *Eine Funktion f heißt ganz , wenn sie gleich einer Potenzreihe ist, die auf dem ganzen Raum K absolut summierbar ist.*

Polynomiale Funtionen sind offenbar ganze Funktionen. Es ist hier noch nicht klar, dass absolut summierbare Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius analytische Funktionen liefern. Dies zeigt der folgende

Satz 2.2.12.
Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Werten in einem Banachraum E sei auf einer Kreisscheibe um den Ursprung $0 \in K$ mit Radius r absolut summierbar. Dann ist $f(z)$ auf $D_r(0)$ analytisch.

Genauer gesagt ist $f(z)$ für jeden Punkt $b \in D_r(0)$ gleich der Summe einer auf der Kreisschreibe $D_{r-|b|}(b)$ absolut summierbaren Potenzreihe in $z - b$.

Beweis.
Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.2.9 mit $g(u) = b + u$. Dann ist nämlich $G(u) = |b| + u$, und die Bedingung $G(s) < r$ ist dann äquivalent zu $s < r - |b|$. □

Man überlege sich, dass Linearkombinationen analytischer Funktionen wieder analytisch sind. Der Konvergenzradius von $\sum_a nz^n$ und $\sum b_n z^n$ ist größer oder gleich dem Minimum der Konvergenzradien. Wir ziehen noch eine Folgerungen für analytische Funktionen aus dem Einsetzungsprinzip für Potenzreihen:

Bemerkungen 2.2.13.

1. *Seien $A \subset K$ und $B \subset K$ offen. Sei $g : B \to K$ analytisch und das Bild von g in A enthalten. Dann ist für jede analytische Abbildung $f : A \to E$ die Abbildung $f \circ g : B \to E$ auf B analytisch.*

2. *Die Aussage gilt auch in mehreren Variablen:*
   Seien $A \subset K^p$ und $B \subset K^q$ offen. Sei $g_k : B \to K$ für $1 \leq k \leq p$ eine Familie analytischer Funktionen und das Bild von $(g_1, \ldots g_p)$ in A enthalten. Dann ist für jede analytische Abbildung $f : A \to E$ mit Werten in einem Banachraum E die Abbildung $f(g_1, \ldots g_p) : B \to E$ auf B analytisch.

3. *Insbesondere gilt: ist f auf $A \subset K^p$ analytisch, so ist für jede Familie $(a_{q+1}, a_{q+2}, \ldots a_p)$ von $p - q$ Skalaren die Abbildung*

   $$(z_1, z_2, \ldots, z_q) \mapsto f(z_1, z_2, \ldots, z_q, a_{q+1}, a_{q+2}, \ldots a_p) ,$$

   die man durch Festhalten von Argumenten erhält, auf einer offenen Menge in K^q analytisch.

4. *Es seien $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$ mit reellen $x_k, y_k \in \mathbb{R}$. Ist f analytisch auf $A \subset \mathbb{C}^p$, so ist*

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_p, y_p) \mapsto f(x_1 + \mathrm{i}y_1, \dots, x_p + \mathrm{i}y_p)$$

auf der als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{2p}$ angesehenen Menge A analytisch.

Um dies zu sehen, betrachte auf einer offenen Teilmenge $B \subset \mathbb{C}^{2p}$ das Urbild von f unter der Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{2p} & \to & \mathbb{C}^p \\ (u_1, v_1, \dots, u_p, v_p) & \mapsto & (u_1 + \mathrm{i}v_1, \dots u_p + \mathrm{i}v_p)\ . \end{array}$$

Diese Funktion ist auf $\mathbb{C}^{2p}$ analytisch. Daher ist sie analytisch auf $A = B \cap \mathbb{R}^{2p}$, wobei $A \subset \mathbb{C}^p$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{2p}$ angesehen wird.

Wir wollen abschließend noch kurz erklären, warum das Einsetzungsprinzip so wichtig ist.

Betrachtung 2.2.14.
Sei $U \subset K^n$ offen. Betrachte eine Klasse $\mathcal{F}(U)$ von Funktionen auf U. Das können etwa sein die auf U stetigen, differenzierbaren, holomorphen oder eben die analytischen Funktionen.

Sei nun $V \subset K^n$ ebenfalls offen und

$$f : U \to V$$

eine stetige (bzw. differenzierbare oder holomorphe) Abbildung. Auf Grund der Kettenregel ist dann für jedes $\varphi \in \mathcal{F}(V)$ die Funktion $f^*(\varphi)$ auf V wieder stetig (bzw. differenzierbar oder holomorph). Bei analytischen Funktionen leistet dies gerade das Einsetzungsprinzip. Wir erhalten so eine wohlbestimmte Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f^* : & \mathcal{F}(V) & \to & \mathcal{F}(U) \\ & \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

Man überlege sich, dass für diese Abbildungen gilt $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Man kann also lokal definierte Funktionenräume entlang hinreichend guter Abbildungen zurückziehen. Dies wird wesentlich sein, wenn wir global definierte analytische Funktionen einführen.

2.3 Differentiation von Potenzreihen und analytischen Funktionen

Wir wollen nun Differenzierbarkeitseigenschaften von Potenzreihen untersuchen. Wieder sei $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und E ein komplexer oder reeller Banachraum.

Lemma 2.3.1.
Hat die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ mit Werten in einem Banachraum E Konvergenzradius r, so hat auch die gliedweise abgeleitete Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z - z_0)^{\nu - 1}$$

Konvergenzradius r.

Beweis.

Wegen $\sqrt[\nu]{\nu} \to 1$ für $\nu \to \infty$ hat die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z-z_0)^\nu$ nach der Formel von Cauchy-Hadamard 2.2.3 auch Konvergenzradius r. Wegen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z-z_0)^\nu = (z-z_0)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z-z_0)^{\nu-1}\right)$$

konvergiert die gliedweise abgeleitete Reihe für ein $z \neq z_0$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z-z_0)^\nu$ für dieses z konvergiert. □

Wir wollen nun untersuchen, ob analytische Funktionen differenzierbar sind.

Satz 2.3.2.
Sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ eine absolut summierbare Potenzreihe mit Werten in einem Banachraum E und Konvergenzradius $r > 0$. Die Funktion $f : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu \ .$$

Dann ist $f(z)$ auf $D_r(z_0)$ differenzierbar und es gilt für $z \in D_r(z_0)$

$$f'(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \nu (z-z_0)^{\nu-1}$$

Beweis.
Nach einer Verschiebung können wir ohne Einschränkung $z_0 = 0$ annehmen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ zerlegen wir die Reihe in die Partialsumme der ersten n Summanden und einen Rest:

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & s_n(z) + R_n(z) \\ s_n(z) & := & \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu \\ R_n(z) & := & \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu z^\nu \end{array}$$

Nach Lemma 2.3.1 ist die Potenzreihe

$$f_1(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu z^{\nu-1}$$

für $|z| < r$ konvergent. Nach den Rechenregeln für die Ableitung von Polynomen ist

$$f_1(z) = \lim_{n\to\infty} s_n'(z) \quad \text{für } |z| < r \ .$$

Wir wählen ein beliebiges $z_0 \in K$ mit $|z_0| < r$ und zeigen, dass f in z_0 differenzierbar ist mit Ableitung $f_1(z)$. Dazu wählen wir $\rho \in \mathbb{R}$ mit $|z_0| < \rho < r$ und betrachten $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$, $z \neq z_0$. Wir formen um

$$\begin{array}{rcl} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f_1(z_0) & = & \frac{s_n(z)+R_n(z)-s_n(z_0)-R_n(z_0)}{z-z_0} - f_1(z_0) \\ & = & \frac{s_n(z)-s_n(z_0)}{z-z_0} - s_n'(z_0) + s_n'(z_0) - f_1(z_0) + \frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0} \end{array}$$

Wir schätzen drei Terme getrennt ab:

1. Es gilt
$$\begin{aligned}\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0} &= \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu - z_0^\nu}{z-z_0} \\ &= \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu (z^{\nu-1} + z^{\nu-2} z_0 + \cdots + z z_0^{\nu-2} + z_0^{\nu-1}) \ .\end{aligned}$$
Aus den Annahmen über den Betrag von z und z_0 folgt daher die Abschätzung
$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} |a_\nu| \nu \rho^{\nu-1} \ .$$
Da $\rho < r$ kleiner als der Konvergenzradius r der Potenzreihe f_1 ist, gibt es zu jedem vorgegeben $\epsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_1$ gilt
$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu |a_\nu| \rho^{\nu-1} < \frac{\epsilon}{3} \ .$$
Also gilt für alle $n \geq N_1$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$ und $z \neq z_0$ die Abschätzung
$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{3} \ .$$

2. Da $\lim_{n\to\infty} s_n'(z_0) = f_1(z_0)$ gilt, finden wir zu jedem vorgegebenen $\epsilon > 0$ ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_2$ gilt
$$|s_n'(z_0) - f_1(z_0)| < \frac{\epsilon}{3} \ .$$

3. Sei jetzt ein $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ gewählt. Da das Polynom $s_n(z)$ in z_0 komplex differenzierbar ist, existiert zu jedem gegebenen $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z - z_0| < \delta$ gilt
$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(z_0)}{z - z_0} - s_n'(z_0) \right| < \frac{\epsilon}{3} \ .$$

Wählt man nun $\delta > 0$ so klein, dass aus $|z - z_0| < \delta$ folgt $|z| < \rho$, und wählen wir ein $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, so folgt für alle diese z
$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0) \right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \ .$$
Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung 2.3.3.
Differenziert man f sukzessive, so erhält man durch vollständige Induktion für alle z mit $|z - z_0| < r$:
$$f^{(k)}(z) = k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1}(z - z_0) + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+1}(z - z_0)^2 + \dots \ .$$
Setzt man speziell $z = z_0$, so folgt $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$, d.h. für alle k
$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \ .$$
Daraus folgt eine "Formel von Taylor für Potenzreihen":
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \ .$$

Korollar 2.3.4.

1. *Jede auf einer offenen Teilmenge $U \subset K$ analytische Funktion ist auf U unendlich oft differenzierbar. Ihre sämtlichen Ableitungen sind dann auf U analytisch.*
2. *Im Fall $K = \mathbb{C}$ ergibt sich, dass analytische Funktionen holomorph sind.*

Ein entspechender Satz gilt auch in mehreren Variablen für partielle Differenzierbarkeit. Wir verweisen auf Kapitel 9.3 des Buchs von Dieudonné. Hier behandeln wir noch eine Umkehrung:

Satz 2.3.5.
Es sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf der Kreisscheibe $D_r(0)$ absolut konvergent und definiere eine analytische Funktion $f : D_r(0) \to E$. Dann ist auch die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$$

auf $D_r(0)$ absolut konvergent und liefert eine Stammfunktion für f.

Beweis.
Es bleibt nur die Konvergenz der Reihe zu zeigen, die sich aus der Abschätzung

$$\left| \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1} \right| \leq |a_n| \ \left| z^{n+1} \right|$$

ergibt. □

2.4 Analytische Fortsetzung

Wir wollen nun, im Komplexen wie im Reellen, das Prinzip der analytischen Fortsetzung untersuchen. Sei wieder $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und E ein reeller oder komplexer Banachraum.

Lemma 2.4.1.
Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine in $D_r(z_0)$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-w_0)^n$ eine in $D_{r'}(w_0)$ absolut konvergente Potenzreihe. Gibt es eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset D_r(z_0) \cap D_{r'}(w_0)$ auf der $f(z) = g(z)$ gilt, so stimmen die Funktionen f und g auf dem gesamten Durchschnitt überein.

Beweis.
Entscheidend im Argument ist die konkrete Form des Durchschnitts. Es sei $u \in U$ und $v \in D_r(z_0) \cap D_{r'}(w_0)$ beliebig. Dann liegt das u und v verbindende Segment auch im Durchschnitt $D_r(z_0) \cap D_{r'}(w_0)$. Für *reelles* t setze

$$h(t) := f(u + t(v-u)) - g(u + t(v-u)) \ .$$

Dann ist $h(t)$ auf einer offenen Teilmenge, die das Interval $[0,1]$ enthält, definiert und analytisch. Sei A die abgeschlossene Teilmenge der $t \in [0,1]$, auf der $h(s) = 0$ für alle $0 \leq s \leq t$ gilt. Sicher liegt in A eine offene Umgebung von 0, daher ist die obere Grenze ρ von A strikt positiv. Aus Stetigkeitsgründen ist aber auch $h(\rho) = 0$.

Da h analytisch ist, gibt es eine Potenzreihenentwicklung im Punkt ρ, die für $|t-\rho|$ hinreichend klein gegen h konvergiert. Aus dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 2.2.6 folgt dann aber, dass $h(t)$ für $|t-\rho|$ hinreichend klein gleich Null ist. Für $\rho < 1$ würde dies der Definition von ρ widersprechen; also gilt $\rho = 1$, woraus die Behauptung folgt. □

Wir machen uns als nächstes von der Voraussetzung frei, dass offene Kreisscheiben vorliegen.

Theorem 2.4.2.
Sei $A \subset K$ eine zusammenhängende *offene Menge und f, g zwei auf A analytische Funktionen mit Werten in einem Banachraum E. Falls eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset A$ existiert, so dass $f(x) = g(x)$ auf U gilt, so stimmen die Funktionen auf ganz A überein.*

Beweis.
Das Innere B der Teilmenge von A, auf der f und g übereinstimmen, ist trivialerweise offen und nach Voraussetzung $U \subset B$ nicht leer. Wir zeigen nur noch, dass B auch abgeschlossen in A ist. Aus der Tatsache, dass A zusammenhängend ist, folgt dann $A = B$. Sei $a \in A$ ein Berührungspunkt von B. Finde eine in A enthaltene Kreisscheibe $\tilde{U}$ mit Mittelpunkt a, auf der f und g durch absolut konvergente Potenzreihen beschrieben werden. Nach Definition enthält $\tilde{U} \cap B$ eine Kreisscheibe, auf der $f(x) = g(x)$ gilt. Nach dem vorgehenden Lemma 2.4.1 gilt $f = g$ auf $\tilde{U}$, also $\tilde{U} \subset B$ und daher insbesondere $a \in B$. Also ist A auch abgeschlossen. □

Wir bringen noch eine ähnliche Aussage, bei der die Voraussetzungen leichter handhabbar sind:

Korollar 2.4.3.
Es sei $U \subset K$ eine zusammenhängende *offene Teilmenge von K sowie f und g zwei auf U analytische Funktionen mit Werten in einem Banachraum E. Falls eine kompakte Teilmenge $H \subset U$ existiert, so dass für unendlich viele $x \in H$ gilt $f(x) = g(x)$, so stimmen f und g auf ganz U überein.*

Beweis.
Sei z_n eine Folge paarweise verschiedener Punkte von H, für die $f(z_n) = g(z_n)$ gilt. Da H kompakt ist, hat die Folge einen Häfungspunkt $b \in H$. Jede in U enthaltene Kreisscheibe um b enthält unendlich viele Punkte, auf denen f und g übereinstimmen. Weil f und g analytisch sind, stimmen sie auf einer hinreichend kleinen Kreisscheibe P um b mit absolut konvergenten Potenzreihen in $z - b$ überein. Aus dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 2.2.6 folgt dann aber, dass $f(x) = g(x)$ auf P gilt. Die Behauptung folgt nun aus Theorem 2.4.2. □

Korollar 2.4.4.
Sei $A \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende offene Menge und $f, g : A \to E$ analytische Funktionen in einen komplexen Banachraum E. Ist $U \subset A$ offen, $b \in U$ und gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in U \cap (b + \mathbb{R})$, so gilt $f = g$ auf A.

Beweis.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $b = 0$. Die Differenz $h = f - g$ verschwindet auf $U \cap \mathbb{R}$, wobei U eine Kreisscheibe um $0 \in \mathbb{C}$ ist, auf der h gleich der Summe einer absolut summierbaren Potenzreihe ist. Hieraus folgt mit Hilfe des Prinzips 2.2.6 der Isoliertheit der Nullstellen, dass alle Koeffizienten der Potenzreihe verschwinden. Also ist $h = 0$ auf der Kreisscheibe U um 0 und Theorem 2.4.2 kann angewandt werden. □

Wir fassen zusammen: ist $U \subset K$ offen und *zusammenhängend*, so heißt eine Menge $M \subset U$ eine Eindeutigkeitsmenge, wenn je zwei auf U definierte und analytische Funktionen, die auf M übereinstimmen, auch auf ganz U übereinstimmen. Wir haben also folgende Beispiele von Eindeutigkeitsmengen:

1. Nichtleere offene Teilmengen der zusammenhängenden Menge U, vgl. Theorem 2.4.2. (Dies gilt über $\mathbb{C}$ und über $\mathbb{R}$ und auch in beliebiger endlicher Dimension.)

2. Nichtleere Durchschnitte der Form $\tilde{U} \cap (b+\mathbb{R})$ mit $\tilde{U} \subset U$ offen nach Korollar 2.4.4. (Dies macht nur für $K = \mathbb{C}$ Sinn.)

3. Kompakte unendliche Teilmengen von U nach Korollar 2.4.3. (Dies gilt nur in Dimension 1, aber über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$.)

Insbesondere ist jede auf U analytische Funktion, falls $U \cap \mathbb{R}$ nicht leer ist, durch ihre Einschränkung auf $\mathbb{R}$ definiert. (Diese ist natürlich eine reell analytische Funktion.) Im allgemeinen kann aber nicht jede auf $U \cap \mathbb{R}$ analytische Funktion zu einer auf ganz U analytischen Funktion fortgesetzt werden.

Es gilt aber:

Satz 2.4.5.
Sei E ein komplexer Banachraum, $U \subset \mathbb{R}$ offen und $f : U \to E$ analytisch. Dann gibt es eine offene Menge $B \subset \mathbb{C}$ mit $B \cap \mathbb{R} = U$ und eine analytische Abbildung $g : B \to E$, welche eine Fortsetzung von f ist.

Beweis.
Zu jedem $a \in U$ gibt es in $\mathbb{R}$ eine offene Kreisscheibe, also ein Intervall I_a mit $|x - a| < r_a$, so dass auf I_a der Wert von f gleich der Summe einer absolut summierbaren Potenzreihe ist. Ist D_a die Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ um a mit gleichem Radius r_a, so ist die Reihe auch auf D_a absolut konvergent. Ihre Summe sei $g_a(z)$ für $z \in D_a$.

Sind a, b Punkte von U mit $D_a \cap D_b \neq \emptyset$, so ist auch $I_a \cap I_b = (D_a \cap D_b) \cap \mathbb{R}$ nicht leer und es gilt auf $I_a \cap I_b$ dass $g_a(x) = f(x) = g_b(x)$. Da $D_a \cap D_b$ auch zusammenhängend ist, folgt nach Korollar 2.4.3, dass $g_a(z) = g_b(z)$ auf $D_a \cap D_b$ gilt.

Deswegen kann man die lokal definierten Funktionen g_a zu einer auf ganz $\cup_{a \in U} D_a$ definierten Funktion g zusammenkleben. Da Analytizität eine lokale Eigenschaft ist, ist g analytisch. □

Wir machen zwei allgemeine Bemerkungen:

- Hier geht das wichtige Prinzip ein, dass man aus lokal definierten Funktionen genau dann eine global definierte Funktion erhält, wenn die lokal definierten Funktionen auf Durchschnitten übereinstimmen.

- Wir stellen uns die reelle Achse als Rand der oberen komplexen Halbebene vor. Man kann insbesondere reell-analyische Funktionen als Werte einer komplex-analytischen Funktion auf dem Rand ihres Definitionsbereichs auffassen.

Korollar 2.4.6.
Ist $f : \mathbb{R} \to E$ ganze *Funktion, so kann f zu einer auf $\mathbb{C}$ definierten* ganzen *Funktion ausgedehnt werden. Diese ist eindeutig bestimmt, weil $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ eine Eindeutigkeitsmenge ist.*

Wir wollen nun noch einen weiteren Satz kennenlernen:

Satz 2.4.7 (Prinzip vom Maximum)**.**
Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine komplexe *Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Wenn es ein $r' < r$ gibt, so dass*

$$|f(z)| \leq |f(0)|$$

für alle $|z| < r'$, dann ist f konstant.

Beweis.
Wir können zunächst $a_0 \neq 0$ voraussetzen; denn für $a_0 = 0$ folgt die Aussage aus der Isoliertheit der Nullstellen (Satz 2.2.6) nicht-konstanter analytischer Funktionen.

Angenommen, es gibt Indizes mit $a_m \neq 0$ mit $m > 0$. Wir schreiben dann mit dem kleinsten strikt positiven solchen Index:

$$f(z) = a_0\,(1 + b_m z^m + z^m h(z))$$

mit einer analytischen Funktion h, für die $h(0) = 0$ gilt. Wir wählen nun $r' < r$ so klein, dass

$$|h(z)| \leq \frac{1}{2}|b_m| \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| < r'$$

gilt. Wir finden mit Hilfe der komplexen Wurzelfunktion eine komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$, so dass gilt

$$b_m = |b_m|\alpha^{-m} \ .$$

Dann finden wir für $z = r\alpha$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung $|a+b| \geq |a| - |b|$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |1 + b_m z^m + z^m h(z)| &= |1 + |b_m| r^m + z^m h(z)| \\ &\geq 1 + |b_m| r^m - |z|^m |h(z)| \\ &\geq 1 + |b_m| r^m - r^m \tfrac{1}{2}|b_m| \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}|b_m| r^m \ , \end{aligned}$$

die im Widerspruch zur Voraussetzung $|f(z)| \leq a_0$ steht. □

Bemerkung 2.4.8.
Der Satz gilt offenbar für Potenzreihen auf $\mathbb{R}$ nicht, wie das Gegenbeispiel

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

für $|z| < 1$ zeigt. Er gilt aber im Komplexen auch in höherer Dimension, also für Potenzreihen in mehreren Variablen.

Korollar 2.4.9.
Es sei f eine auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ definierte komplexwertige analytische Funktion, die auf keiner Zusammenhangskomponente von U konstant ist. Dann sind für jede kompakte Teilmenge $H \subset U$ die Punkte $z \in H$, in denen $|f(z)| = \sup_{x \in H} |f(x)|$ angenommen wird, Randpunkte von H.

Beweis.
Das Supremum existiert wegen der Kompaktheit von H und der Stetigkeit von f. Angenommen, das Supremum wird in einem Punkt z_0 im Innern angenommen. Finde dann eine Kreisscheibe $U_\epsilon(z_0)$, auf der $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in U_\epsilon(z_0)$ gilt. Nach dem vorangegangenen Satz 2.4.7 ist dann f auf $U_\epsilon(z_0)$ konstant und wegen des Prinzips 2.4.2 der analytischen Fortsetzung auf einer ganzen Zusammenhangskomponente von H konstant. □

2.5 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Wir wollen nun Beispiele für analytische Funktionen mit komplexen Werten auf Gebieten in $\mathbb{C}$ betrachten. Zunächst überzeugen wir uns davon, dass gebrochen rationale Funktionen auf ihrem Definitionsgebiet analytisch sind. (Dies folgt aus dem Einsetzungsprinzip, hätte also schon vorher geschehen können.)

Satz 2.5.1.
Es seien $f(z), g(z)$ zwei polynomiale Funktionen auf $\mathbb{C}$, wobei g nicht identisch null sein soll. Dann ist die gebrochen rationale Funktion $f(z)/g(z)$ auf der offenen Menge aller Punkte z, für die $g(z) \neq 0$ gilt, analytisch.

Beweis.
Offenbar sind Polynome ganze Funktionen. Da man durch einsetzen nach Korollar 2.2.10 analytische Funktionen erhält, reicht es aus zu zeigen, dass die Funktion $1/z$ für $z \neq 0$ analytisch ist. Für $z_0 \neq 0$ finden wir aber die Entwicklung

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{z} &= \tfrac{1}{z_0(1+\frac{z-z_0}{z_0})} \\ &= \tfrac{1}{z_0} - \tfrac{z-z_0}{z_0^2} + \tfrac{(z-z_0)^2}{z_0^3} + \cdots + (-1)^n \tfrac{(z-z_0)^n}{z_0^{n+1}} + \cdots \end{aligned}$$

wobei die Potenzreihe für $|z - z_0| < |z_0|$ absolut summierbar ist. □

Definition 2.5.2
Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Wir schreiben auch e^z statt $\exp(z)$.

Satz 2.5.3.
Es gelten die folgenden Aussagen:

1. *Die Potenzreihe $\exp(z)$ hat Konvergenzradius $r = \infty$. Sie definiert also eine ganze Funktion, die insbesondere analytisch und somit holomorph ist. Aus Korollar 2.4.6 folgt, dass dies die einzig mögliche analytische Fortsetzung der reellen Exponentialfunktion nach $\mathbb{C}$ ist.*

2. $\exp'(z) = \exp(z)$ *für alle $z \in \mathbb{C}$.*

3. $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w$*, d.h. die Exponentialfunktion ist ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ auf die multiplikative Gruppe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.*

4. *Ist $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ mit $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$ und $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = 1$.*

Beweis.

1. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fest gewählt und $a_n = \frac{z^n}{n!}$. Dann gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z|}{n+1}$$

was für große n kleiner als eine feste reelle Zahl kleiner gleich 1, etwa kleiner als 1/2 ist. Daher konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium für alle z absolut und hat Konvergenzradius $r = \infty$.

2. Nach Satz 2.3.2 darf die Potenzreihe $\exp(z)$ gliedweise differenziert werden. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z^n}{n!} = \frac{nz^{n-1}}{n!} = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \ .$$

Also gilt $\exp'(z) = \exp(z)$.

3. Sei $c \in \mathbb{C}$ fest gewählt. Wir betrachten die Funktion $f(z) := \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{c-z}$, die auf $\mathbb{C}$ holomorph ist. Wegen des vorangegangen Punktes und der elementaren Rechenregeln für Ableitungen gilt

$$f'(z) = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{c-z} + (-1)\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{c-z} = 0 \ .$$

Da $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, muss nach Korollar 1.4.14 die Funktion f konstant sein. Die Gleichung $f(0) = \mathrm{e}^c$ legt die Konstante fest und es folgt

$$\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{c-z} = \mathrm{e}^c \qquad \text{für alle } z, c \in \mathbb{C} \ .$$

Setzt man $c := z + w$, so folgt

$$\mathrm{e}^z \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w} \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C} \ .$$

4. Nach dem vorangegangenen Punkt gilt $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$. Also folgt

$$|\mathrm{e}^z| = |\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = \mathrm{e}^x \cdot |\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| \ .$$

Es ist noch für $y \in \mathbb{R}$ zu zeigen $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = 1$. Aus $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ folgt $\lim_{n\to\infty} \overline{s}_n = \overline{s}$; also ist das komplex konjugierte einer konvergenten Reihe die Reihe mit komplex konjugierten Gliedern. Wir finden

$$\overline{\mathrm{e}^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \mathrm{e}^{\overline{z}} \ .$$

Speziell für $z = \mathrm{i}y$ ist

$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}} = \mathrm{e}^{\overline{\mathrm{i}y}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} \ .$$

Daher ist

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}|^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y-\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^0 = 1 \ .$$

□

Definition 2.5.4

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die komplexen trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus durch

$$\cos(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \qquad \textit{und} \qquad \sin(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \ .$$

Satz 2.5.5.

1. *Es gelten die Reihenentwicklungen für $z \in \mathbb{C}$:*

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \qquad \textit{und} \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \ .$$

   Insbesondere stimmen also $\cos z$ *und* $\sin z$ *für reelle Werte mit der üblichen aus der reellen Analysis bekannten Funktion überein. Wegen Korollar 2.4.6 ist dies die eindeutig bestimme analytische Fortsetzung der trigonometrischen Funktionen ins Komplexe.*

2. *Es gilt die* <u>*Eulersche Formel*</u>

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \ .$$

3. *Es gelten die Identitäten*

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \ , \quad \sin' z = \cos z \quad \textit{und} \quad \cos' z = -\sin z \, .$$

Beweis.

1. Wir rechnen

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (\mathrm{i}^n + (-\mathrm{i})^n) \ .$$

   Für ungerades n ist $\mathrm{i}^n + (-\mathrm{i})^n = \mathrm{i}^n + (-1)^n \mathrm{i}^n = 0$. Für gerades n ist $\mathrm{i}^n + (-\mathrm{i})^n = 2\mathrm{i}^n = 2(\mathrm{i}^2)^{n/2} = 2 \cdot (-1)^{n/2}$. Daher folgt

$$\cos z = \sum_{n \geq 0, n \text{gerade}} (-1)^{n/2} \frac{z^n}{n!}$$

   wie behauptet. Die entsprechende Reihenentwicklung von $\sin z$ folgt analog.

2. Es gilt

$$\cos z + \mathrm{i} \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} + \mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \ .$$

3. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z} - (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z})\right) = 1 \end{aligned}$$

   sowie

$$\sin' z = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - (-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = \cos z$$

   sowie die entsprechende Gleichung für $\cos'(z)$.

□

Bemerkungen 2.5.6.

1. *Wegen* $\cos(z) = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{iz}$ *kann man statt mit trigonometrischen Funktionen manchmal auch mit dem Realteil komplexer Funktionen rechnen. Unter anderem deswegen rechnen Elektroingenieure mit komplexen Zahlen.*

2. *Wie man sofort aus der Gleichung*

$$\cos(\mathrm{i}z) = \frac{\mathrm{e}^{-z} + \mathrm{e}^{z}}{2}$$

mit reellen Werten für z *sieht, sind die komplexe Sinus- und Kosinusfunktion nicht beschränkt.*

3. *Es gilt*

$$\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} = \cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi) = 1.$$

Daher gilt nach dem Additionstheorem

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{z} \ ,$$

d.h. die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit Periode $2\pi\mathrm{i}$*. Umgekehrt ist auch* $\mathrm{e}^z = 1$ *genau für* $z = 2\pi n$ *mit* $n \in \mathbb{Z}$*. Denn wegen* $\mathrm{e}^x = |\mathrm{e}^z| = 1$ *muss der Realteil* x *von* z *verschwinden. Daher folgt*

$$1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$$

woraus $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ *folgt.*

4. *Es ist* $\mathrm{e}^z \neq 0$*, denn* $\mathrm{e}^{-z}\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^0 = 1$*, insbesondere* $\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$*.*

5. *Man rechnet nach*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1\,, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}\,, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}\,, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,.$$

6. *Man kann auch die übrigen trigonometrischen Funktionen definieren, z.B.*

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \textit{für } z \in \mathbb{C}, \cos z \neq 0 \ .$$

Sie sind lokal analytisch.

2.6 Der komplexe Logarithmus

Definition 2.6.1
Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*. Dann heißt jede Lösung der Gleichung* $\mathrm{e}^z = w$ *ein* <u>Logarithmus</u> *von* w*. Man schreibt hierfür ungenau* $z = \log w$*.*

Satz 2.6.2.
Jedes $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *hat unendlich viele Logarithmen. Schreibt man* w *in Polarkoordinaten* $w = |w|(\cos\Theta + \mathrm{i}\sin\Theta)$*, so ist*

$$\log w = \log|w| + \mathrm{i}\Theta + 2\pi\mathrm{i}n \qquad \textit{mit} \qquad n \in \mathbb{N}$$

wobei $\log|w|$ *der gewöhnliche Logarithmus der positiven reellen Zahl* $|w|$ *ist.*

Etwas ungenau formuliert sagt man, dass der Logarithmus von w gegeben ist durch $\log|w| + \mathrm{i}\arg w$, wobei $\arg w$ *ein* Argument von w ist.

Beweis.
Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\mathrm{e}^{\log|w|+\mathrm{i}\Theta+2\pi i n} = \mathrm{e}^{\log|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\mathrm{e}^{2\pi i n} = |w|(\cos\Theta + \mathrm{i}\sin\Theta)\cdot 1 = w\ .$$

Also sind die angegebenen komplexen Zahlen Logarithmen.

Sei umgekehrt $z = x + \mathrm{i}y$ ein Logarithmus von $w = |w|(\cos\Theta + \mathrm{i}\sin\Theta)$, also $\mathrm{e}^z = w$. Durch Vergleich der Absolutbeträge findet man

$$|\mathrm{e}^z| = |w| = \mathrm{e}^x$$

und somit $x = \log|w|$. Es folgt dann

$$\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^z = |w|(\cos\Theta + \mathrm{i}\sin\Theta)\ ,$$

und daraus $y = \Theta + 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Damit ist aber

$$z = x + \mathrm{i}y = \log|w| + \mathrm{i}(\Theta + 2\pi n)\ .$$

□

Definition 2.6.3
Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann setzt man

$$\mathrm{Log}w := \log|w| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}w\ ,$$

wobei der Wert $\arg w$ des Arguments von w im Interval $-\pi < \arg w \le +\pi$ gewählt sein soll.

Satz 2.6.4.

1. *Sei $A := \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} | -\pi < y \le \pi\}$ ein halboffener horizontaler Streifen in der komplexen Ebene. Dann liefert die Einschränkung $\exp|_A$ der komplexen Exponentialfunktion auf A eine Bijektion von A auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Die Umkehrabbildung wird durch $w \mapsto \mathrm{Log}w$ gegeben.*

2. *Die Funktion $\mathrm{Log}w$ ist unstetig in allen Punkten der negativen reellen Achse.*

Beweis.

1. Um die Injektivität von $\exp|_A$ zu zeigen, suchen wir zunächst Urbilder von 1 in A. Diese Urbilder sind aber von der Form $2\pi i n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Nur das Urbild 0 liegt in A. Seien nun $w, w' \in A$ Urbilder von z. Dann folgt $w' = w + 2\pi i n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Aus der Form des gewählten Streifens in der komplexen Ebene folgt $w = w'$. Schreibt man $w = |w|(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ mit $y = \arg w$, so gilt $w = \mathrm{e}^{\log|w|+\mathrm{i}y}$ und auch die Surjektivität von $\exp|_A$ ist klar.

2. Sei $y_0 < 0$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathrm{Log}(y_0 + \mathrm{i}t) = \log|y_0 + \mathrm{i}t| + \mathrm{i}\arg(y_0 + \mathrm{i}t) \ .$$

Der erste Summand ist wegen der Stetigkeit des reellen Logarithmus stetig. Andererseits ist

$$\lim_{t\to 0, t>0} \arg(y_0 + \mathrm{i}t) = \pi \quad \text{und} \quad \lim_{t\to 0, t<0} \arg(y_0 + \mathrm{i}t) = -\pi \ .$$

Daher kann der Logarithmus in y_0 nicht stetig sein.

□

Bemerkung 2.6.5.
Unter exp *wird das Komplement der Geraden $y = \pi$ in A, also der offene Streifen $-\pi < \mathrm{Im}\,(z) < \pi$ genau auf die längs der negativen reellen Achse geschlitzte komplexe Ebene abgebildet, denn*

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^x(-1) = -\mathrm{e}^x \ .$$

Wir führen daher die Bezeichnung

$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{u \in \mathbb{R} | u \leq 0\}$$

Satz 2.6.6.
Die Funktion $\mathrm{Log} w$ *ist auf* $\mathbb{C}_-$ *holomorph. Es gilt:*

$$\mathrm{Log}' w = \frac{1}{w} \qquad \textit{für alle } w \in \mathbb{C}_- \ .$$

Beweis.
Sei $w_0 \in \mathbb{C}_-$.

1. Den Beweis der Stetigkeit stellen wir als Übungsaufgabe.

2. Die Differenzierbarkeit in $w_0 \in \mathbb{C}$ folgt wie bei Umkehrfunktionen üblich: sei (w_n) eine Folge mit $w_n \in \mathbb{C}_-$, $w_n \to w_0$ mit $w_n \neq w_0$ für alle n. Setze

$$z_n := \mathrm{Log} w_n \qquad \text{und} \qquad z_0 := \mathrm{Log} w_0$$

Wegen der Stetigkeit von Log folgt $z_n \to z_0$. Wir rechnen

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{\mathrm{e}^{z_0}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{z_n} - \mathrm{e}^{z_0}}{z_n - z_0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_0}{\mathrm{e}^{z_n} - \mathrm{e}^{z_0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Log} w_n - \mathrm{Log} w_0}{w_n - w_0} \ .$$

□

Definition 2.6.7
Die holomorphe Funktion $\mathrm{Log} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ *heißt* Hauptzweig *des komplexen Logarithmus.*

3 Komplexe Integrationstheorie

Die komplexe Integration ist das zentrale Instrument, um für komplexe Funktionen Ergebnisse zu erzielen, die wesentlich stärker sind als die der reellen Analysis. Die beiden zentralen Ergebnisse sind der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Formel, aus der wir in Kapitel 4 den Residuensatz herleiten werden. Die Ergebnisse, die wir in diesem Kapitel herleiten, gelten für analytische Funktionen auf $\mathbb{C}^n$, aber nicht mehr auf $\mathbb{R}^n$.

3.1 Komplexe Kurvenintegrale

Definition 3.1.1

1. *Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nicht nur aus einem Punkt bestehendes kompaktes Intervall. Eine Kurve in $\mathbb{C}$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{C}$. Im Falle $\gamma(I) \subset U \subset \mathbb{C}$ nennen wir γ eine Kurve in U.*

2. *Der Punkt $\gamma(a)$ heißt Anfangspunkt, der Punkt $\gamma(b)$ Endpunkt der Kurve. Gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ geschlossene Kurve. Ist γ konstant, so sagen wir, γ reduziere sich auf einen Punkt.*

3. *Mit $\gamma : I := [a, b] \to \mathbb{C}$ ist auch $\gamma^0 : I \to \mathbb{C}$ mit $\gamma^0(t) = \gamma(a + b - t)$ wieder eine Kurve, die zu γ entgegengesetzte Kurve.*

4. *Sei $I_1 = [b, c]$ ein weiteres kompaktes Intervall und $I_2 := I \cup I_1$. Ist dann $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{C}$ eine auf I_1 definierte Kurve mit $\gamma_1(b) = \gamma(b)$, so definieren wir die Aneinanderreihung als die Kurve*
$$(\gamma \vee \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma(t) \text{ für } t \in I \\ \gamma_1(t) \text{ für } t \in I_1 \end{cases},$$
die auf I_2 definiert ist.

5. *Wir sagen, eine auf I definierte Kurve γ ist ein Weg, wenn γ Stammfunktion einer Regelfunktion ist. Gilt überdies $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ geschlossener Weg.*

Lemma 3.1.2.

1. *Die einem Weg entgegengesetzte Kurve ist wiederum ein Weg.*

2. *Die Aneinanderreihung zweier Wege ist wiederum ein Weg.*

Definition 3.1.3

Sind γ_1, γ_2 zwei auf I_1 bzw. I_2 definierte Wege, so nennen wir γ_1 und γ_2 äquivalent, wenn eine monoton wachsende bijektive Abbildung $\varphi : I_1 \to I_2$ existiert, so dass φ und φ^{-1} Stammfunktionen von Regelfunktionen sind und $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ gilt.

Bemerkungen 3.1.4.

1. *Man macht sich leicht klar, dass eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege vorliegt.*

2. *Ist der Weg γ auf dem Intervall $I = [a, b]$ definiert, so gibt es auf jedem anderen Intervall $I_1 := [c, d]$ einen zu γ äquivalenten Weg γ_1: dazu finde eine affine bijektive Abbildung $t \mapsto \varphi(t) = \alpha t + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ von I_1 auf I und betrachte $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$.*

3. *Ist γ ein auf $I=[a,b]$ definierter Weg und f eine stetige Abbildung der kompakten Menge $\gamma(I)$ in einen komplexen Banachraum E, so ist die Funktion $t \mapsto f(\gamma(t))$ stetig und daher das Produkt*
$$t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$$
eine Regelfunktion.

Definition 3.1.5
Sei γ ein auf $I=[a,b]$ definierter Weg und f eine stetige Abbildung der kompakten Menge $\gamma(I)$ in einen komplexen Banachraum E. Das Integral $\int_a^b \mathrm{d}t f(\gamma(t))\gamma'(t) \in E$ wird das Integral von f längs des Wegs oder Wegintegral entlang γ genannt und mit
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$
bezeichnet.

Die folgenden Aussagen sind klar:

Lemma 3.1.6.

1. *Sind die Wege γ und γ_1 äquivalent im Sinne von Definition 3.1.3, so folgt aus der Kettenregel*
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$
2. *Für den dem Weg γ entgegengesetzten Weg γ^0 gilt*
$$\int_{\gamma^0} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$
3. *Ist die Aneinanderreihung zweier Wege γ und γ_1 definiert, so gilt*
$$\int_{\gamma\vee\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$
4. *Sei γ ein* geschlossener *Weg auf $I=[a,b]$. Für beliebiges $c \in I$ betrachte die Abbildung*
$$\begin{aligned} \gamma_c : [c, c+b-a] &\rightarrow \mathbb{C} \\ \gamma_c(t) &:= \begin{cases} \gamma(t) & \text{für} \quad c \le t \le b \\ \gamma(t-b+a) & \text{für} \quad b \le t \le c+b-a \end{cases} \end{aligned}$$
Dann ist γ_c ein geschlossener Weg und es gilt
$$\int_{\gamma_c} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$
für jede stetige Abbildung $f:\gamma(I)\rightarrow E$. Das Integral längs eines geschlossenen Weges ist also nicht vom Anfang des geschlossenen Weges abhängig.

Wir brauchen noch eine Relation zwischen Kurven, die anders gefasst ist:

Definition 3.1.7
Sei seien γ_0, γ_1 zwei auf demselben kompakten Intervall I definierte Kurven und U eine offene Menge in $\mathbb{C}$, die sowohl $\gamma_0(I)$ als auch $\gamma_1(I)$ umfasst.

1. *Eine Homotopie* [1] *von* γ_0 *in* γ_1 *innerhalb von* U *ist eine stetige Abbildung*

$$\varphi : I \times [\alpha, \beta] \to U$$

mit $\alpha < \beta$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *so dass* $\varphi(t, \alpha) = \gamma_0(t)$ *und* $\varphi(t, \beta) = \gamma_1(t)$ *für alle* $t \in I$ *gilt.*

2. *Eine Kurve* γ_0 *heißt homotop zu einer Kurve* γ_1 *in* U, *wenn es eine Homotopie von* γ_0 *in* γ_1 *in* U *gibt.*

3. *Offenbar ist für jedes* $\xi \in [\alpha, \beta]$ *die Abbildung* $t \mapsto \varphi(t, \xi)$ *eine Kurve in* U. *Sind* γ_0 *und* γ_1 *geschlossene Kurven, so nennen wir* φ *eine Konturhomotopie von* γ_0 *in* γ_1 *innerhalb von* U, *falls* $t \mapsto \varphi(t, \xi)$ *für jedes* $\xi \in [\alpha, \beta]$ *eine geschlossene Kurve ist. Sagen wir, zwei* geschlossene *Kurven seien innerhalb* U *homotop, so soll dass immer besagen, dass eine Konturhomotopie (und nicht nur eine Homotopie) existiert.*

Satz 3.1.8.
Sei U *eine offene Teilmenge von* $\mathbb{C}$. *Die Relation "innerhalb von* U *homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation sowohl von Kurven als auch von geschlossenen Kurven.*

Beweis.

1. Die Reflexivität folgt aus der Homotopie $\varphi(t, \xi) = \gamma(t)$ für alle $\xi \in [\alpha, \beta]$.

2. Die Symmetrie folgt aus der Tatsache, dass, wenn $\varphi : I \times [\alpha, \beta] \to U$ eine Homotopie von γ_0 auf γ_1 ist,
$$(t, \xi) \mapsto \varphi(t, \alpha + \beta - \xi)$$
eine Homotopie von γ_1 auf γ_0 in U ist.

3. Die Transivität sieht man folgendermaßen: Ist andererseits $\psi : I \times [\alpha', \beta'] \to U$ eine Homotopie von γ_1 auf γ_2 in U, so können wir eine Homotopie von γ_0 auf γ_2 in U definieren:

$$\begin{aligned} \theta : I \times [\alpha, \beta' + \beta - \alpha'] &\to U \\ \theta(t, \xi) &:= \begin{cases} \varphi(t, \xi) & \text{für} \quad \alpha \le \xi \le \beta \\ \psi(t, \xi + \alpha' - \beta) & \text{für} \quad \beta \le \xi \le \beta' + \beta - \alpha' \end{cases} \end{aligned}$$

Beide Vorschriften liefern die gleiche Funktion für $\xi = \beta$. Man überlegt sich leicht, dass die Vorschrift stetig ist, Werte in U annimmt und dass gilt $\theta(t, \alpha) = \gamma_0(t)$ und $\theta(t, \beta' + \beta - \alpha') = \gamma_2(t)$ für alle $t \in I$.

□

Wir brauchen noch den folgenden Sachverhalt aus der mengentheoretischen Topologie:

Lemma 3.1.9 (Lebesguesche Eigenschaft)**.**
Ist E *ein kompakter metrischer Raum und* $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$ *eine offene Überdeckung von* E, *so existiert ein* $\rho > 0$, *so dass jede offene Kugel vom Radius* ρ *in einem der* U_λ *enthalten ist.*

[1] Eine solche Homotopie wird oft auch freie Homotopie genannt und bei einer Homotopie im engeren Sinne wird gefordert, dass sie Anfangs- und Endpunkte festlässt.

Beweis.
Jeder Punkt $x \in E$ liegt in einer offenen Menge U_λ. Finde eine offene Kugel $D_{r_x}(x) \subset U_\lambda$. Schon die Kugeln $D_{r_x/2}(x)$ bilden eine offene Überdeckung von E. Weil E kompakt ist, finde endlich viele Punkte $x_i \in E$, so dass schon die endlich vielen Kugeln $D_{r_{x_i}/2}(x_i)$ den Raum E überdecken. Setze ρ gleich dem Minimum der $r_{x_i}/2$.

Dann leistet dieses ρ das Gewünschte: jeder Punkt x liegt in einer der Kugeln $D_{r_{x_i}/2}(x_i)$. Wegen $\rho \leq r_{x_i}/2$ gilt für jedes $y \in D_\rho(x)$ wegen $d(x,y) < \rho$ nach der Dreiecksungleichung

$$d(y, x_i) \leq d(x,y) + d(x, x_i) < \rho + r_{x_i}/2 \leq r_{x_i} \ .$$

Daher ist $D_\rho(x) \subset D_{r_{x_i}}(x_i)$. Nach Konstruktion liegt aber $D_{r_{x_i}}(x_i)$ in einem U_λ. □

Wir kommen nun zu einem zentralen Satz der Funktionentheorie

Theorem 3.1.10 (Cauchyscher Integralsatz)**.**
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f eine analytische Abbildung von U in einen komplexen Banachraum E. Sind Γ_1, Γ_2 zwei geschlossene Wege in U, die innerhalb U homotop sind, so gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$$

Damit ist der Wert eines komplexen Wegintegrals als Invariante der Homotopieklasse des Weges identifiziert. Er ist tatsächlich sogar eine Invariante der Homologieklasse, was wir aber in dieser Vorlesung weder herleiten noch benutzen werden.

Beweis.

- Seien Γ_1, Γ_2 auf $I = [a,b]$ definiert und sei φ eine auf $I \times [\alpha, \beta]$ definierte Homotopie von Γ_1 nach Γ_2 in U. Es wird dabei nicht vorausgesetzt, dass für $\xi \neq \alpha, \beta$ die geschlossene Kurve $t \mapsto \varphi(t, \xi)$ ein geschlossener *Weg* ist. Da φ stetig ist, ist $L := \varphi(I \times [\alpha, \beta])$ eine in U enthaltene kompakte Menge. Es existieren daher endlich viele Punkte a_k mit $1 \leq k \leq m$ in L und zu jedem k eine Kreisscheibe $D_{r_k}(a_k) \subset U$, so dass gilt:

  1. Die Kreisscheiben überdecken L.
  2. Auf jeder Kreisscheibe ist $f(z)$ gleich der Summe einer auf dieser Kreisscheibe konvergenten Potenzreihe in $z - a_k$.

- Nun existiert nach der Lebesguesgeschen Eigenschaft 3.1.9 ein $\rho > 0$, so dass für *jedes* $x \in L$ die offene Kreisscheibe um x mit Radius ρ in mindestens einer dieser Kreisscheiben enthalten ist. Nach Satz 2.2.12 folgt, dass die Funktion f auf jeder Kreisscheibe $D_\rho(x)$ gleich der Summe einer konvergenten Potenzreihe in $z - x$ ist.

- Da nach Satz 1.3.12 die stetige Abbildung φ auf dem Kompaktum $I \times [\alpha, \beta]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\epsilon > 0$ derart, dass aus

  $$|t - t'| \leq \epsilon \text{ und } |\xi - \xi'| \leq \epsilon$$

  die Ungleichung $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t', \xi')| \leq \rho/4$ folgt. Wir zerlegen daher die Intervalle durch Zwischenpunkte:
  – finde $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_{r-1} < t_r = b$ mit $t_{i+1} - t_i \leq \epsilon$.
  – finde $\xi_0 = \alpha < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_s = \beta$ mit $\xi_{j+1} - \xi_j \leq \epsilon$.

- Definiere für $1 \leq j \leq s-1$ Streckenzüge durch

$$\gamma_j(t) = \varphi(t_i, \xi_j) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \left(\varphi(t_{i+1}, \xi_j) - \varphi(t_i, \xi_j)\right)$$

für $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ und $0 \leq i \leq r-1$. Ferner sei $\gamma_0 = \Gamma_1$ und $\gamma_s = \Gamma_2$. Dies sind alles geschlossene Wege in U. Wir wollen die Behauptung dadurch zeigen, dass wir zeigen

$$\int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{j+1}} f(z)\mathrm{d}z$$

für alle $0 \leq j \leq s-1$.

- Wir haben die Situation so eingerichtet, dass alle Punkte

$$\gamma_j(t) \text{ und } \gamma_{j+1}(t) \text{ mit } t_i \leq t \leq t_{i+1}$$

in der offenen Kugel $Q_{ij} := D_\rho(\varphi(t_i, \xi_j))$ liegen. Wir finden nach Satz 2.3.5 eine analytische Funktion g_{ij} auf Q_{ij}, für die auf Q_{ij} gilt $g'_{ij}(z) = f(z)$. Da $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$ nicht leer und zusammenhängend ist, ist die Differenz $g_{i-1,j} - g_{i,j}$ auf dem Durchschnitt konstant. Nun ist aber nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{array}{rcl} \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z & = & \sum_{i=0}^{r-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{r-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g'_{ij}(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)\mathrm{d}t \\ & = & \sum_{i=0}^{r-1} \left(g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i))\right) \end{array}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass analytische Funktionen holomorph sind und somit aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und der Bemerkung nach Satz 1.4.13 mit $g = g_1 + \mathrm{i}g_2$ folgt:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(\gamma(t)) & = & \frac{\partial g_1}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\gamma_1')(t) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y}(\gamma_2(t), \gamma_2(t)\gamma_1')(t) \\ & & + \mathrm{i}(\frac{\partial g_2}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\ \gamma_1'(t) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y}(\gamma_2(t), \gamma_2(t)\ \gamma_1'(t)) \\ & = & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial g_2}{\partial x}\right) \cdot (\gamma_1'(t) + \mathrm{i}\gamma_2'(t)) \\ & = & g'(\gamma(t))\ \gamma'(t) \end{array}$$

Wir müssen also nur die Beziehung

$$\sum_{i=0}^{r-1} g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i)) = \sum_{i=0}^{r-1} g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i))$$

oder, was äquivalent ist,

$$\sum_{i=0}^{r-1} \left(g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i)) + g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i))\right) = 0$$

beweisen.

- Nun gehören aber $\gamma_j(t_i)$ und $\gamma_{j+1}(t_i)$ für $1 \leq i \leq r-1$ beide zum Durchschnitt $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$, so dass nach der obigen Bemerkung die Differenzen

$$g_{ij}(\gamma_j(t_i)) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i)) = g_{i-1,j}(\gamma_j(t_i)) - g_{i-1,j}(\gamma_{j+1}(t_i))$$

gleich sind und sich die zu zeigende Gleichheiten auf die Gleichheiten

$$g_{r-1,j}(\gamma_j(t_r)) - g_{r-1,j}(\gamma_{j+1}(t_r)) - g_{0,j}(\gamma_j(t_0)) + g_{0,j}(\gamma_{j+1}(t_0)) = 0$$

reduziert. Da aber die Wege γ_j und γ_{j+1} geschlossen sind, gilt $\gamma_j(t_0) = \gamma_j(t_r)$ und $\gamma_{j+1}(t_0) = \gamma_{j+1}(t_r)$. Beide Punkte gehören zur zusammenhängenden Menge $Q_{0j} \cap Q_{r-1,j}$. Daher ist die Differenz $g_{r-1,j} - g_{0,j}$ auf dieser Menge konstant, was die Behauptung zeigt.

□

Korollar 3.1.11.
Es seien γ_1 und γ_2 zwei Wege in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ mit dem gleichen Anfangspunkt u und dem gleichen Endpunkt v. Es gebe ferne einer Homotopie

$$\varphi : [a,b] \times [\alpha, \beta] \to U$$

von γ_1 in γ_2 innerhalb von U, welche Anfangs- und Endpunkte festlässt, $\varphi(a,\xi) = u$ und $\varphi(b,\xi) = v$ für alle $\xi \in [\alpha,\beta]$. Dann gilt für jede auf U analytische Funktion f die Beziehung

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \ .$$

Beweis.
Der Weg $\gamma_3(t) := \gamma_1^o(t-b+a)$ mit $t \in [b, 2b-a]$ ist zu γ_1^o äquivalent. Offenbar sind die Aneinanderreihungen $\gamma_1 \vee \gamma_3$ und $\gamma_2 \vee \gamma_3$ jeweils geschlossene Wege. Sie sind auch in U homotop:

$$\psi(t,\xi) := \begin{cases} \varphi(t,\xi) \text{ für } a \leq t \leq b \\ \gamma_3(t) \text{ für } b \leq t \leq 2b-a \end{cases}$$

ist ein Konturhomotopie innerhalb von U. Der Cauchysche Integralsatz 3.1.10 liefert

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z$$

und damit die Behauptung. □

3.2 Stammfunktionen analytischer Funktionen

Wir haben schon in Übungsaufgaben gesehen, dass die Gestalt von Gebieten in $\mathbb{C}$ Einfluss auf funktionentheoretische Fragestellungen haben kann.

Definition 3.2.1
Ein <u>einfach zusammenhängendes Gebiet</u> $U \subset \mathbb{C}$ ist eine zusammenhängende offene Menge mit der Eigenschaft, dass jede geschlossene Kurve in U innerhalb von U homotop zu einer geschlossenen Kurve ist, die sich auf einen Punkt reduziert. [2]

Bemerkungen 3.2.2.

1. *Offenbar ist jede zu einer einfach zusammenhängenden Menge homöomorphe offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ wieder ein einfach zusammenhängendes Gebiet.*

2. *Ein Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ heißt in Bezug auf den Punkt $a \in U$ <u>sternförmig</u>, wenn für jedes $z \in U$ das a und z verbindende Segment in U enthalten ist. Eine solche Menge ist offenbar zusammenhängend. Ist γ irgend eine geschlossene Kurve in U, dann ist*

$$\varphi(t,\xi) = a + (1-\xi)\left(\gamma(t) - a\right)$$

für $0 \leq \xi \leq 1$ eine Konturhomotopie von γ in eine auf den Punkt a reduzierte geschlossene Kurve. Also ist ein sternförmiges Gebiet insbesondere einfach zusammenhängend.

[2] Es ist hierbei unerheblich, ob man nur Homotopien im engeren Sinn oder, wie wir es tun, auch freie Homotopien zulässt.

3. *Eine offene Kugel ist in Bezug auf jeden ihrer Punkte sternförmig und daher einfach zusammenhängend.*

4. *Die punktierte komplexe Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist weder sternförmig noch einfach zusammenhängend: man betrachte etwa*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ t & \mapsto & \exp(int) \end{array}$$

   mit $n \neq 0$.

Wir brauchen noch ein kleines topologisches Lemma:

Lemma 3.2.3.
Zu je zwei Punkten u, v einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ existiert ein Weg in U mit Anfangspunkt u und Endpunkt v.

Beweis.
Betrachte die Teilmenge $B \subset U$ von Endpunkten von Wegen in U mit Anfangspunkt u. Betrachte den Weg, der sich auf u reduziert: es folgt $u \in B$ und B ist daher nicht leer. Wir zeigen, dass die Menge B sowohl offen als auch abgeschlossen in U ist. Da U als zusammenhängend vorausgesetzt wurde, folgt daraus, dass $B = U$ gilt und somit die Behauptung.

Ist $x \in U \cap \overline{B}$, so gibt es eine in U enthaltene Kreisscheibe K mit Mittelpunkt x. Nach Voraussetzung enthält K das Ende v eines Weges $\gamma : [a, b] \to U$ in U mit Anfangspunkt u. Das Segment $\overline{vx}$ ist in K enthalten. Der Weg

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 : [a, b+1] & \to & U \\ \gamma_1(t) & := & \begin{cases} \gamma(t) \text{ für } t \in [a, b] \\ v + (t-b)(x-v) \text{ für } t \in [b, b+1] \end{cases} \end{array}$$

hat Anfangspunkt u und Endpunkt x und liegt in U. Also ist $x \in B$ und B somit abgeschlossen.

Um zu sehen, dass B offen ist, betrachte für $y \in B$ eine in U enthaltene Kugel K mit Mittelpunkt y. Für jedes $v \in K$ ist das Segment $\overline{yv}$ in K enthalten, und wir definieren in gleicher Weise einen Weg in U mit Anfangspunkt u und Endpunkt v. Daher gilt $K \subset B$ und B ist auch offen. □

Wir können nun ein weiteres zentrales Resultat der Funktionentheorie festhalten:

Theorem 3.2.4.
Ist $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so hat jede auf U analytische Funktion f eine auf dem ganzen Gebiet U definierte analytische Stammfunktion.

Beweis.

- Sind a, z zwei Punkte aus U und γ_1, γ_2 zwei Wege in U mit Anfangspunkt a und Endpunkt z, so können wir, nachdem wir gegebenenfalls γ_2 durch einen äquivalenten Weg ersetzen, die Wege γ_1^0 und γ_2 verketten und erhalten einen geschlossenen Weg $\gamma := \gamma_1^0 \vee \gamma_2$ in U. Weil U als einfach zusammenhängend vorausgesetzt wurde, ist dieser Weg zu einem Punkt in U homotop. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt $\int_\gamma f(x)\mathrm{d}x = 0$. Daher gilt

$$\int_{\gamma_1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\gamma_2} f(x)\mathrm{d}x \ .$$

- Wir können demnach auf ganz U eine Funktion $g(z)$ definieren, indem wir einen Punkt $a \in U$ wählen und für jeden Punkt $z \in U$ nach Lemma 3.2.3 einen beliebigen Weg γ_z von a nach z. Dann setzen wir $g(z) = \int_{\gamma_z} f(x)\mathrm{d}x$. Es bleibt zu zeigen, dass diese Funktion eine komplexe Stammfunktion von f ist.

- Weil f als analytisch vorausgesetzt wurde, gibt es zu jedem $z_0 \in U$ eine offene Kreisscheibe $K \subset U$ mit Mittelpunkt z_0, auf der $f(z)$ gleich der Summe einer konvergenten Potenzreihe in $z - z_0$ ist. Nach Satz 2.3.5 gibt es eine Stammfunktion h_K von f auf K, die analytisch ist und der Bedingung $h_K(z_0) = g(z_0)$ gehorcht. Daraus folgt für alle $z \in K$

  $$h_K(z) - h_K(z_0) = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_K(z_0 + t(z - z_0)) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)\mathrm{d}t \ .$$

  Die rechte Seite ist aber gerade das Wegintegral $\int_\sigma f(x)\mathrm{d}x$ für das Segment

  $$\begin{array}{rcl} \sigma : [0,1] & \to & K \\ t & \mapsto & z_0 + t(z - z_0) \ . \end{array}$$

  Da dieser Weg in $K \subset U$ liegt, folgt aus der Definition von g auch

  $$g(z) - g(z_0) = \int_\sigma f(x)\mathrm{d}x \ .$$

  Also folgt $g(z) = h_K(z)$ für alle $z \in K$, und g ist somit eine auf ganz U definierte Stammfunktion von f.

□

Man kann umgekehrt zeigen: hat auf einem Gebiet jede analytische Funktion eine Stammfunktion, so ist das Gebiet einfach zusammenhängend.

3.3 Die Cauchysche Integralformel

Wir beginnen mit einem vorbereitenden Lemma:

Lemma 3.3.1.
Für jeden Punkt $a \in \mathbb{C}$ und jeden in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ enthaltenen geschlossenen Weg γ nimmt das Integral $\int_\gamma \mathrm{d}z/(z - a)$ Werte in $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ an.

Beweis.
Der Weg γ sei auf dem Intervall $I = [b, c]$ definiert. Betrachte auf I die Funktion

$$h(t) := \int_b^t \frac{\gamma'(s)\mathrm{d}s}{\gamma(s) - a} \ .$$

Diese Funktion hat auf I die Ableitung

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} \ ,$$

mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Teilmenge. Für die Funktion

$$g(t) := \mathrm{e}^{-h(t)} (\gamma(t) - a)$$

folgt somit

$$g'(t) = \mathrm{e}^{-h(t)} \left(-\gamma'(t) + \gamma'(t)\right) = 0 \ .$$

Daher ist $g(t)$ konstant und wir finden mit $h(b) = 0$ die Gleichung $g(b) = \gamma(b) - a$, also

$$\mathrm{e}^{h(t)} = \frac{\gamma(t) - a}{\gamma(b) - a} \ .$$

Nun ist aber der Weg geschlossen, $\gamma(b) = \gamma(c)$, und daher $\exp(h(c)) = 1$. Damit ist $h(c) \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.
□

Definition 3.3.2
Die ganze Zahl

$$j(a;\gamma) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \mathrm{d}z/(z-a) \in \mathbb{Z}$$

heißt der Index des Punktes a in Bezug auf den Weg γ oder auch der Index des Weges γ in Bezug auf den Punkt a.

Aus dem Cauchyschen Integralsatz 3.1.10 folgt sofort, dass zwei geschlossene Wege in $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, die in dieser Menge homotop sind, den gleichen Index in Bezug auf a haben.

Halten wir umgekehrt den Weg fest, so finden wir:

Lemma 3.3.3.
Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Der Index $j(a;\gamma)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente des Komplements $A := \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ der kompakten Menge $\gamma(I)$ konstant.

Beweis.
Sei B eine in der offenen Menge A enthaltene Kreisscheibe mit Mittelpunkt x und Radius r. Wähle $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < r$. Dann gehört $x + h$ nicht zu $\gamma(I)$; daher erhalten wir durch eine Verschiebung um $-h$

$$j(x+h;\gamma) = j(x;\gamma_1)$$

mit $\gamma_1 : t \to \gamma(t) - h$. Dann ist aber

$$\begin{array}{rcl} \varphi : I \times [0,1] & \to & \mathbb{C} \setminus \{x\} \\ (t,\xi) & \mapsto & \gamma(t) - \xi h \end{array}$$

eine Konturhomotopie von γ in γ_1 innerhalb $\mathbb{C}\setminus\{x\}$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz 3.1.10 ist daher $j(x;\gamma) = j(x,\gamma_1) = j(x+h;\gamma)$ und der Index ist lokal konstant im ersten Argument. □

Beispiel 3.3.4.

- *Wir betrachten den geschlossenen Weg*

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_n : I = [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{int} \ , \end{array}$$

  dessen Bild der Einheitskreis $U(1) := \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ ist. Der Weg ϵ_n heißt der n-fach durchlaufene Einheitskreis.

- *Die Menge* $\mathbb{C} \setminus U(1)$ *hat offenbar zwei Zusammenhangskomponenten:*

$$B := \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\} \quad \text{und} \quad E := \{z \in \mathbb{C} | |z| > 1\}$$

  Denn als sternförmiges Gebiet ist B *zusammenhängend.* E *ist zusammenhängend als Bild von* $(1, +\infty) \times [0, 2\pi]$ *unter der stetigen Abbildung* $(x, t) \mapsto x\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. *Beide Mengen sind in* $\mathbb{C} \setminus U(1)$ *sowohl offen als auch abgeschlossen.*

- *Aus der Definition folgt sofort*

$$j(0; \epsilon_n) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}} \mathrm{d}t = n$$

  Also ist nach Lemma 3.3.3 $j(z; \epsilon_n) = n$ *für jedes* $z \in B$.

- *Die Aussage* $j(z; \epsilon_n) = 0$ *für alle* $z \in E$ *folgt aus dem folgenden allgemeineren Lemma.*

Lemma 3.3.5.
Ist ein geschlossener Weg γ *in einer abgeschlossenen Kugel* $D := \{w \in \mathbb{C} | |w - a| \leq r\}$ *enthalten, so ist* $j(z; \gamma) = 0$ *für jedes* z *mit* $|z - a| > r$.

Beweis.
Es sei $\gamma : I = [b, c] \to \mathbb{C}$ und $|\gamma'(t)| \leq M$ auf diesem Intervall. Nach Definition ist

$$2\pi\mathrm{i} j(z; \gamma) = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}x}{x - z} = \int_b^c \frac{\gamma'(t)\mathrm{d}t}{\gamma(t) - z} .$$

Wegen $|\gamma(t) - a| \leq r$ und $|z - a| > r$ gilt aber

$$|\gamma(t) - z| = |\gamma(t) - a + a - z| \geq \big| |\gamma(t) - a| - |z - a| \big| \geq |z - a| - r$$

für alle $t \in I$. Nach dem Mittelwertsatz ist also

$$2\pi |j(z; \gamma)| \leq \frac{M(c - b)}{|z - a| - r} .$$

Für hinreichend großes $|z - a|$ ist aber die rechte Seite strikt kleiner als 2π. Weil $j(z; \gamma)$ eine ganze Zahl ist, muss $j(z; \gamma) = 0$ gelten. Da die Menge $\{z \in \mathbb{C} | |z - a| \geq r\}$ zusammenhängend ist, muss nach Lemma 3.3.3 der Index auf der ganzen Menge verschwinden. □

Wir haben eine einfache Folgerung:

Korollar 3.3.6.
Für jeden auf I *definierten geschlossenen Weg* γ *in* $\mathbb{C}$ *ist die Menge der Punkte* $x \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, *für welche* $j(x; \gamma) \neq 0$ *ist, in* $\mathbb{C}$ *relativ kompakt.*

Beweis.
Diese Menge ist nämlich nach dem vorangegangenen Lemma 3.3.5 in jeder die kompakte Menge $\gamma(I)$ umfassenden abgeschlossenen Kugel enthalten. □

Wir halten schließlich noch fest:

Satz 3.3.7.
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes *Gebiet und $\gamma : I \to U$ ein geschlossener Weg in U. Dann gilt für jeden Punkt $x \in \mathbb{C} \setminus U$ die Beziehung $j(x;\gamma) = 0$.*

Beweis.
Nach Voraussetzung gibt es ein kompaktes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und eine Konturhomotopie $\varphi : I \times J \to U$ von γ auf einen sich auf einen Punkt reduzierenden geschlossenen Weg γ_0. Wegen $x \notin \varphi(I \times J)$ folgt nach dem Cauchyschen Integralsatz 3.1.10 die Beziehung

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-x} = \int_{\gamma_0} \frac{\mathrm{d}z}{z-x} = 0 \ .$$

□

Wir kommen nun zu einem weiteren zentralen Satz der Funktionentheorie:

Theorem 3.3.8 (Cauchysche Integralformel)**.**
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und E ein komplexer Banachraum. Sei ferner $f : U \to E$ eine analytische *Abbildung. Dann gilt für jeden auf einem kompakten Intervall I definierten geschlossenen Weg γ in U und jedes $x \in U \setminus \gamma(I)$ die Beziehung*

$$j(x;\gamma) f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-x} \ .$$

Eine analytische Funktion ist also insbesondere auf einer Kreisscheibe durch ihre Werte auf dem Rand der Kreisscheibe festgelegt.

Beweis.

- Zum Beweis betrachten wir die auf U folgendermaßen definierte Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \text{ für } z \neq x \\ f'(x) \text{ für } z = x \end{cases}$$

- Wir überlegen uns jetzt, dass die Funktion g auf U analytisch ist. Da auf $U \setminus \{x\}$ die Funktion g durch Einsetzen der analytischen Funktion f in eine rationale Funktion konstruiert wird, ist die Funktion sicher analytisch auf $U \setminus \{x\}$. Andererseits existiert eine Kugel $D_r(x)$ so dass für $z \in D_r(x)$ die Reihenentwicklung

$$f(z) = f(x) + (z-x)f'(x) + \ldots + (z-x)^n f^{(n)}(x)/n! + \ldots$$

  gilt. Damit ist klar, dass $g(z)$ für jedes $z \in D_r(x)$ gleich der Summe der konvergenten Reihe

$$f'(x) + \frac{1}{2}(z-x)f''(x) + \ldots + \frac{1}{n!}(z-x)^{n-1} f^{(n)}(x) + \ldots$$

  und somit auch im Punkt x analytisch ist.

- Nach dem Cauchyschen Integralsatz 3.1.10 gilt $\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = 0$. Schreiben wir

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-x} - f(x)\frac{1}{z-x}$$

  so folgt die Behauptung aus der Definition des Index.

$\square$

Es gilt auch eine Umkehrung, für die wir aber noch ein kleines Lemma benötigen:

Lemma 3.3.9.
Sei eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ von auf einem kompakten Intervall $I = [\alpha, \beta]$ definierten banachraumwertigen Regelfunktionen u_n normal konvergent gegen eine Funktion u, d.h. auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|_{\sup,I}$ aus den Supremumsnormen der Funktionen auf I ist konvergent. Dann ist auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(\xi) \mathrm{d}\xi$$

absolut konvergent und es gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(\xi) \mathrm{d}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(\xi) \mathrm{d}\xi \ .$$

Beweis.
Es reicht aus zu bemerken, dass aus dem Mittelwertsatz die absolute Konvergenz der Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|(\beta - \alpha)$ der Reihe auf der rechten Seite folgt. Dann dürfen wir Integral und Summe vertauschen. $\square$

Theorem 3.3.10.
Sei $\gamma : I = [b, c] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und g eine stetige Abbildung von $\gamma(I)$ in einen komplexen Banachraum E. Dann ist die Funktion

$$f(z) := \int_{\gamma} \frac{g(x)\mathrm{d}x}{x - z}$$

auf dem Komplement von $\gamma(I)$ definiert und analytisch.

Genauer gesagt setzen wir für jeden Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$

$$c_k := \int_{\gamma} \frac{g(x)\mathrm{d}x}{(x - a)^{k+1}} \ .$$

Dann ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ konvergent auf jeder offenen Kreisscheibe $D_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ und ihre Summe ist gleich $f(z)$.

Beweis.
Sei

$$\delta := d(a, \gamma(I)) = \min_{t \in I} d(a, \gamma(t)) \ .$$

Gilt für $z \in \mathbb{C}$ die Ungleichung $|z - a| \leq q \cdot \delta$ mit einer reellen Zahl $0 < q < 1$, so gilt für jedes $x \in \gamma(I)$ die Beziehung

$$\frac{1}{x - z} = \frac{1}{(x - a)\left(1 - \frac{z-a}{x-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(x - a)^{n+1}}$$

mit

$$\left| \frac{(z - a)^n}{(x - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{\delta} q^n \ .$$

Die Funktion g soll stetig sein und $\gamma(I)$ ist kompakt. Daher existiert $M > 0$ mit $|g(x)| \leq M$ für alle $x \in \gamma(I)$. Ferner gibt es $m > 0$ mit $|\gamma'(t)| \leq m$ auf I. Daher gilt für jedes $t \in I$ die Ungleichung

$$\left| \frac{\gamma'(t)g(\gamma(t))(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{Mm}{\delta} q^n \ .$$

Daher ist die Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$\frac{\gamma'(t)g(\gamma(t))(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}$$

auf I normal konvergent. Aus dem vorangegangenen Lemma 3.3.9 folgt dann, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ auf der Kreisscheibe $|z-a| \leq q\delta$ konvergiert und Summe f besitzt. Die Funktion f ist analytisch, da sie die angebene Potenzreihenentwicklung besitzt. □

Korollar 3.3.11 (Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel)**.**
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und E ein komplexer Banachraum. Sei ferner $f : U \to E$ eine analytische Abbildung. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg $\gamma : I \to U$ und jedes $z \in U \setminus \gamma(I)$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$j(z;\gamma)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(x)\mathrm{d}x}{(x-z)^{k+1}}$$

Beweis.
Sei $z_0 \in U \setminus \gamma(I)$. Da f analytisch ist, gibt es $\delta > 0$, so dass für alle z mit $|z - z_0| < \delta$ nach Bemerkung 2.3.3 die Reihe

$$j(z,\gamma)f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} j(z;\gamma)\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

konvergiert. Andererseits rechnen wir mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned} 2\pi \mathrm{i} j(z,\gamma)f(z) &= \int_\gamma \tfrac{f(x)\mathrm{d}x}{x-z} = \int_\gamma \tfrac{f(x)\mathrm{d}x}{(x-z_0)-(z-z_0)} \\ &= \int_\gamma \tfrac{f(x)\mathrm{d}x}{(x-z_0)(1-\frac{z-z_0}{x-z_0})} \\ &= \int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \tfrac{(z-z_0)^k}{(x-z_0)^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_\gamma \tfrac{f(x)\mathrm{d}x}{(x-z_0)^{k+1}} \right)(z-z_0)^k \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die absolute Konvergenz aus Theorem 3.3.10 angewendet haben, um Summe und Integral zu vertauschen. Wegen des Eindeutigkeitssatzes Korollar 2.2.7 stimmen die Koeffizienten der Potenzreihen überein, was die gewünschte Gleichheit liefert. □

Wir ziehen daraus noch eine Folgerung:

Korollar 3.3.12 (Cauchysche Ungleichungen)**.**
Sei E ein komplexer Banachraum, $U_r(z_0) \subset \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe und $f : U_r(z_0) \to E$ eine analytische Funktion. Ferner gebe es eine Schranke $M > 0$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in U_r(z_0)$. Dann können wir auch alle Ableitungen von f beschränken:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq M\frac{n!}{r^n} \ .$$

Beweis.
Wir wählen $0 < \rho < r$ und betrachten den Weg

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \; [0,1] & \to & U_r(z_0) \\ t & \mapsto & z_0 + \rho \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} \end{array} .$$

Wir wenden die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel 3.3.11 auf diesen Weg an und schließen mit $j(z_0;\gamma) = 1$

$$\begin{array}{rcl} \left| f^{(n)}(z_0) \right| & = & \left| \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-z_0)^{n+1}} \right| \\ & = & \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^1 \frac{f(z_0+\rho \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t})\rho 2\pi \mathrm{i} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}\mathrm{d}t}{(\rho \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t})^{n+1}} \right| \\ & = & \le \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{\rho^n} 2\pi = M \frac{n!}{\rho^n} \end{array}$$

Da dies für alle $\rho < r$ gilt, folgt die Behauptung. □

3.4 Direkte Folgerungen aus den Cauchyschen Integralformeln

Wir können nun eine wichtige Folgerung aus Theorem 3.3.10 ziehen:

Theorem 3.4.1.

1. *Jede stetig komplex differenzierbare Abbildung f von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ in einen komplexen Banachraum E ist analytisch.*

2. *Sei $z_0 \in U$ und*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Potenzreihenentwicklung um z_0. Dann konvergiert diese Entwicklung mindestens auf jeder Kreisscheibe $D_R(z_0)$, die in U liegt, lokal gleichmäßig gegen f.

Diese Aussage gilt auch für komplex differenzierbare Abbildungen offener Teilmengen des $\mathbb{C}^p$ in komplexe Banachräume. Die Aussage ist (fast) die Umkehrung von Korollar 2.3.4, das besagt, dass analytische Funktionen auf $\mathbb{C}$ holomorph sind.

Beweis.

- Wir wollen beweisen, dass f in einem beliebigen Punkt $z_0 \in U$ analytisch ist. Nach einer Verschiebung können wir $z_0 = 0$ annehmen. Nach einer Homothetie können wir annehmen, dass die offene Menge U die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $\overline{D}_1(0)$ enthält.

- Für jedes $z \in D_1(0)$, jedes $0 \le \lambda \le 1$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung

$$|(1-\lambda)z + \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| \le 1 - \lambda + \lambda = 1 \; .$$

  Betrachte die Funktion

$$\begin{array}{rcl} g : \; [0,1] & \to & E \\ \lambda & \mapsto & \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z)) - f(z)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t \end{array} .$$

- Nach den üblichen Sätzen für Integrale ist die Funktion g auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ stetig und weil der Integrand stetig nach λ differenzierbar ist, hat in jedem Punkt des offenen Intervalls $(0,1)$ die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} g(\lambda) = \int_0^{2\pi} f'(z + \lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z))\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t \ .$$

- Nun ist aber für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$t \mapsto \mathrm{i}\lambda f'(z + \lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z))\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

auf $(0, 2\pi)$ die Ableitung der Funktion

$$t \mapsto f(z + \lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z)) \ .$$

Daher ist $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\lambda}$ für $\lambda \neq 0$ das Integral über eine Ableitung und somit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} g(\lambda) = 0$ für $\lambda \neq 0$. Somit ist g als stetige Funktion auf ganz $[0,1]$ konstant. Aus $g(0) = 0$ folgt somit, dass g verschwindet.

- Insbesondere folgt für $\lambda = 1$, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\epsilon_1} \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x - z}$$

für jedes $z \in D_1(0)$. Die Behauptung folgt nun aus Theorem 3.3.10.

- Die zweite Aussage folgt aus der letzten Aussage von Theorem 3.3.10, zusammen mit der Cauchyschen Integralformel 3.3.8 für analytische Funktionen. Insbesondere konvergiert die Potenzreihenentwicklung einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion für alle Werte von z. Auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen sind also ganze Funktionen.

□

Nun haben wir bei holomorphen Funktionen *nicht* gefordert, dass die Ableitung stetig ist. Tatsächlich ist das aber automatisch der Fall, so dass alle holomorphen Funktionen analytisch sind. Wir kennen leider dafür kein elementare Argument, skizzieren aber ein Argument dazu im Anhang. Da holomorphe Funktionen analytisch sind, gelten die für analytische Funktionen bewiesenen Sätze auch für holomorphe Funktionen.

Korollar 3.4.2.
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, E ein komplexer Banachraum und $f: U \to E$ eine holomorphe Funktion. Wir fassen zusammen:

1. *Es gilt die Taylor-Entwicklung aus Bemerkung 2.3.3.*

2. *Es existieren stets lokale komplexe Stammfunktionen, siehe Satz 2.3.5.*

3. *Wir haben Eindeutigkeitssätze. Aus Korollar 2.4.4 folgt sofort: sind $f, g: U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei z_n eine Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen, die gegen z_0 konvergiert. Dann folgt aus $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $f(z) = g(z)$ für alle $z \in U$ gilt.*

4. *Aus dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen analytischer Funktionen 2.2.6 folgt, dass die Nullstellenmenge einer nicht konstanten holomorphen Funktion diskret ist.*

5. *Es gilt das Maximumsprinzip: holomorphe Funktionen nehmen ihr Maximum auf dem Rand an, vgl. Satz 2.4.7.*

6. *Es gilt der Cauchysche Integralsatz, Theorem 3.1.10.*

7. *Auf einfach zusammenhängenden Gebieten existiert eine globale komplexe Stammfunktion, siehe Theorem 3.3.4.*

8. *Es gilt die Cauchysche Integralformel 3.3.8 einschließlich ihrer Verallgemeinerung 3.3.11.*

9. *Es gelten die Cauchyschen Ungleichungen aus Satz 3.3.12.*

Korollar 3.4.3 (Satz von Liouville).
Sei $f : \mathbb{C} \to E$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ *definierte holomorphe Funktion mit Werten in einem komplexen Banachraum E. Es existiere eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}_0$ und eine Konstante $a \geq 0$, so dass*

$$|f(z)| \leq a(1 + |z|)^N$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Dann ist f eine polynomiale Funktion höchstens N-ten Grades.

Mit $N = 0$ folgt insbesondere, dass jede beschränkte ganze Funktion notwendigerweise konstant ist.

Beweis.
Schreibe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$. Aus der Cauchyschen Ungleichung 3.3.12, angewandt auf die Kreisscheibe $D_r(0)$, folgt

$$|c_n| \leq a \frac{(r+1)^N}{r^n} .$$

Da r bei einer ganzen Funktion beliebig groß gewählt werden kann, folgt $c_n = 0$ außer für $n \leq N$. □

Korollar 3.4.4 (Fundamentalsatz der Algebra).
Sei $p(z)$ ein nicht-konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann hat $p(z)$ eine komplexe Nullstelle.

Beweis.
Sei

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$$

mit $a_n \neq 0$. Angenommen, es wäre $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $1/p(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph und somit eine ganze Funktion. Sei eine reelle Zahl r so gewählt, dass für $0 \leq k \leq n-1$ die Ungleichung

$$r^{n-k} \geq (n+1) |\frac{a_k}{a_n}|$$

gilt. Wir schätzen damit ab für $|z| \geq r$

$$|p(z)| = |a_n z^n| \cdot \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \geq |a_n z^n| \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) \geq |a_n| \frac{r^n}{n+1}$$

so dass die Funktion $1/p$ für $|z| \geq r$ beschränkt ist. Als stetige Funktion ist aber p auf der kompakten Menge $|z| \leq r$ ohnehin beschränkt, so dass $1/p$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt und somit nach dem Satz von Liouville 3.4.3 konstant wäre. Dies widerspricht aber der Voraussetzung. $\square$

Wir untersuchen auch die Verhältnisse auf einer Kreisscheibe:

Satz 3.4.5 (Lemma von Schwarz)**.**

1. *Sei $f : D_1(0) \to D_1(0)$ eine holomorphe Selbstabbildung der offenen Einheitskreisscheibe mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D_1(0)$ und $|f'(0)| \leq 1$.*

2. *Gibt es überdies ein $z_0 \in D_1(0) \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$, so existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$, so dass $f(z) = cz$ gilt. Die Selbstabbildung f ist also eine Drehung der Kreisscheibe um den Ursprung.*

Beweis.

1. Wir schreiben wegen $f(0) = 0$ die Funktion in der Form

$$f(z) = zg(z)$$

mit einer auf $D_1(0)$ holomorphen Funktion g. Diese nimmt auf jeder Kreisscheibe $D_r(0)$ mit $0 < r < 1$ ihr Maximum auf dem Rand an. Für den Rand $|z| = r$ gilt aber

$$|g(z)| = |\frac{f(z)}{z}| = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r} \ .$$

(Man beachte, dass f eine Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe ist und daher $|f(z)| \leq 1$ gilt.) Da dies für alle $r < 1$ gilt, haben wir die Abschätzung

$$|g(z)| \leq 1 \quad \text{für } z \in D_1(0)$$

und somit $|f(z)| \leq |z|$.

2. Es gebe ein $z_0 \in D_1(0) \setminus \{0\}$ im Innern der Kreisscheibe mit $|f(z_0)| = |z_0|$, also $|g(z_0)| = 1$. Also nimmt g in z_0 ein lokales Betragsmaximum an und muss daher nach dem Maximumsprinzip Satz 2.4.7 auf der Kreisscheibe $D_1(0)$ konstant sein, $g(z) = c$. Setzt man $z = z_0$ ein, so folgt $|c| = 1$. Daraus folgt die Behauptung.

$\square$

Aus dem Schwarzschen Lemma kann man die Gruppe biholomorpher Automorphismen von $D_1(0)$ bestimmen. (Übungsaufgabe)

Satz 3.4.6 (Satz von Weierstraß)**.**
Sei (f_n) eine Folge analytischer Abbildungen von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ in einen komplexen Banachraum E. Für jedes $z \in U$ konvergiere die Folge $(f_n(z))$ gegen einen Grenzwert $g(z) \in E$. Diese Konvergenz sei gleichmäßig *auf jeder kompakten Teilmenge von U.*

Dann ist die Grenzfunktion g auf U analytisch und für jedes k konvergiert die Folge $f_n^{(k)}$ der n-ten Ableitungen gleichmäßig auf Kompakta gegen $g^{(k)}$.

Beweis.
Wir zeigen zunächst, dass die Grenzfunktion g analytisch ist. Für $z_0 \in U$ wählen wir r so klein, dass der geschlossene Weg $\gamma : t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ in der offenen Menge U enthalten ist. Dann gilt für jedes $z \in D_r(z_0)$ nach der Cauchyschen Integralformel 3.3.8 für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f_n(x)\mathrm{d}x}{x - z} \; .$$

Nach Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakte konvergiert für alle x mit $|x - z_0| = r$ die Folge $f_n(x)$ gleichmäßig gegen $g(x)$. Für $z \in D_r(z_0)$ haben wir die Abschätzung

$$r = |x - z_0| \leq |x - z| + |z - z_0|$$

und daher $|x - z| \geq r - |z - z_0|$, so dass für festes z die Folge $f_n(x)/x - z$ für $|x - z_0| = r$ gleichmäßig gegen $g(x)/x - z$ konvergiert. Daher können wir limes und Integral vertauschen und es gilt

$$g(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g(x)\mathrm{d}x}{x - z}$$

und wegen Theorem 3.3.10 ist g auf $D_r(z_0)$ analytisch.

Nach der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel Korollar 3.3.11 gilt auch

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f_n(x)\mathrm{d}x}{(x - z)^2} \; ,$$

so dass wir in gleicher Weise für die Ableitung auf Konvergenz gegen eine Grenzfunktion schließen können. Nach dem Mittelwertsatz haben wir schließlich

$$|g'(z_0) - f_n'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \sup_{|x-z|=r} |g(x) - f_n(x)| \; ,$$

woraus die Konvergenz gegen g' folgt. Nun schließt man induktiv weiter. □

Bemerkungen 3.4.7.

1. *Der Satz gilt* nicht *für analytische Funktionen reeller Variablen. Eine Folge von reellen Polynomen kann nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz gegen eine beliebige stetige Funktion konvergieren, die nicht unbedingt differenzierbar ist.*

2. *Der Satz von Weierstraß 3.4.6 hat auch wichtige Konsequenzen für die Topologie von Räumen holomorpher Funktionen. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und E ein komplexer Banachraum. Wir betrachten zunächst den Raum $C^k(U, E)$ aller auf U mindestens k-mal stetig reell differenzierbaren Funktionen mit Werten in E. Hierbei ist $k = \infty$ für die glatten Funktionen zugelassen. Für jedes Kompaktum $K \subset U$ und jedes $m \leq k$ haben wir eine Norm durch partielle Ableitungen deren Ordnung $|p|$ höchstens m ist,*

$$|f|_{m,K} := \sup_{|p| \leq m} \left(\sup_{x \in K} |\frac{\partial^p f}{\partial x^p})| \right) \; ,$$

die den unendlich-dimensionalen Vektorraum mit der Struktur eines (metrisierbaren, Hausdorff) lokal-konvexen Vektorraums versieht.

Aus Satz von Weierstraß 3.4.6 folgt sofort, dass, wenn wir daher den Raum $H(U, E)$ der holomorphen Funktionen als Unterraum von $C^k(U, E)$ sehen, alle Relativtopologien übereinstimmen. Insbesondere ist $H(U, E)$ als abgeschlossener Unterraum des Fréchetraums $C^\infty(U, E)$ ein Fréchetraum (und sogar ein Banachraum).

4 Singularitäten und Residuen

In dem vorgehenden Kapitel hatten wir analytische und somit holomorphe Funktionen studiert. In diesem Kapitel wollen wir mit ähnlichen Methoden holomorphe Funktionen am Rand ihres Definitionsbereichs studieren, wo dann auch Singularitäten auftreten können.

4.1 Laurentzerlegung

Hatten wir vorher insbesondere einfach zusammenhängende Gebiete, insbesondere Kreisscheiben betrachtet, so führen wir nun ähnliche Betrachtungen auf ringförmigen Gebieten durch.

Lemma 4.1.1.
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $0 < r_0 < r_1$ reelle Zahlen. Der offene Ring oder das Ringgebiet

$$S_{r_0 r_1} := \{z \in \mathbb{C} | r_0 < |z| < r_1\}$$

sei so gewählt, dass sein Abschluss $\overline{S}_{r_0 r_1}$ in U enthalten ist. Dann gilt für jede analytische Abbildung $f : U \to E$ in einen komplexen Banachraum E für jedes $x \in S_{r_0 r_1}$ die Beziehung

$$f(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z - x} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_0} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z - x} ,$$

mit geschlossenen Wegen

$$\gamma_0(t) = r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \quad \text{und} \quad \gamma_1(t) = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

wobei $0 \leq t \leq 2\pi$.

Beweis.
Wie beim Beweis der Cauchyschen Integralformel 3.3.8 bemerken wir, dass die durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \text{ für } z \neq x \\ f'(x) \text{ für } z = x \end{cases}$$

auf U definierte Funktion g auf dem Ringgebiet $S_{r_0 r_1}$ analytisch ist. Nun ist

$$\varphi(t, \xi) := \xi r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + (1 - \xi) r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

für $0 \leq t \leq 2\pi$ und $0 \leq \xi \leq 1$ eine Konturhomotopie von γ_0 in γ_1 innerhalb U. Nach dem Cauchyschen Integralsatz 3.1.10 ist also

$$\int_{\gamma_0} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} g(z)\mathrm{d}z .$$

Für $r_0 < |x| < r_1$ ist aber $j(x; \gamma_0) = 0$ nach Lemma 3.3.5 und $j(x; \gamma_1) = 1$ nach Beispiel 3.3.4. Aus

$$\int_{\gamma_0} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z - x} - f(x) \int_{\gamma_0} \frac{\mathrm{d}z}{z - x} = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z - x} - f(x) \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z - x}$$

folgt die Behauptung. □

Satz 4.1.2.

1. *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 4.1.1 existieren eine für* $|z| < r_1$ *konvergente Potenzreihe* $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *und eine für* $|z| > r_0$ *konvergente Potenzreihe* $g_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}$ *in* $1/z$ *ohne konstantes Glied derart, dass auf dem Ringgebiet* $S_{r_0 r_1}$ *die Beziehung*
$$f(z) = g_1(z) + g_2(z)$$
gilt.

2. *Die Potenzreihen mit diesen Eigenschaften sind eindeutig bestimmt.*

3. *Für jeden geschlossenen Weg* γ *in* $\overline{S}_{r_0 r_1}$ *gelten die Beziehungen*
$$j(0;\gamma)c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x^{n+1}} \qquad \textit{und} \qquad j(0;\gamma)d_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma x^{n-1} f(x)\mathrm{d}x$$

Beweis.

- Nach Theorem 3.3.10 gilt für $|z| < r_1$
$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$
mit
$$c_n := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x^{n+1}} \ ,$$
wobei die Reihe für $|z| < r_1$ konvergiert.
Andererseits gilt für $|z| > r_0$ und $|x| = r_0$ die Beziehung
$$\frac{1}{z-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{z^n} \ ,$$
wobei die rechte Seite für alle x mit $|x| = r_0$ für festes z normal konvergiert. Nach Lemma 3.3.9 dürfen wir Integral und Summe vertauschen und erhalten
$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_0} \frac{f(x)\mathrm{d}x}{z-x} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}$$
mit
$$d_n := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_0} x^{n-1} f(x)\mathrm{d}x \ ,$$
wobei die Reihe für $|z| > r_0$ konvergiert. Damit ist der erste Teil der Aussage bewiesen.

- Nun sei auf dem Ringgebiet $S_{r_0 r_1}$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \ ,$$
wobei beide Reihen auf dem Ringgebiet konvergieren. Zunächst sei γ ein auf einem kompakten Intervall I definierter geschlossener Weg im Innern des Ringgebiets $S_{r_0 r_1}$. Es gibt dann Werte $t, t' \in I$ mit
$$|\gamma(t)| = \inf_{s \in I} |\gamma(s)| =: r \quad \text{und} \quad |\gamma(t')| = \sup_{s \in I} |\gamma(s)| =: r'$$

Daher gilt
$$r_0 < r \le |\gamma(s)| \le r' < r_1$$
für jedes $s \in I$. Für $r \le |z| \le r'$ sind die beiden Reihen nach dem abelschen Lemma 2.2.2 gleichmäßig absolut summierbar. Daher gilt nach Lemma 3.3.9 für jede ganze Zahl m die Beziehung

$$\int_\gamma z^{m-1} f(z) \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma z^{n+m-1} \mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_\gamma z^{m-n-1} \mathrm{d}z \ .$$

- Da $\frac{z^{k+1}}{k+1}$ für $k \neq -1$ eine komplexe Stammfunktion von z^k ist, gilt $\int_\sigma z^k \mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Weg σ. Die weiteren Gleichungen folgen damit aus der Definition des Index.
- Liegt der Weg γ im Abschluss $\overline{S_{r_0 r_1}}$ des Ringgebiets, so gibt es einen etwas größeren offenen Ring $S_{(1-\epsilon)r_0,(1+\epsilon)r_1}$, der in U enthalten ist und wir können die eben erlangten Ergebnisse auf dieses Ringgebiet anwenden.

□

Dies führt uns zu der folgenden

Definition 4.1.3

1. *Unter einer unendlichen Reihe der Form* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ *versteht man das Paar von Reihen*
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \right) \ .$$
Eine solche Reihe heißt konvergent, wenn die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ *konvergieren. Dann heißt ihre Summe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ *der Grenzwert von* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$.
2. *Analog führt man die Begriffe der absoluten und der gleichmäßigen Konvergenz für solche Reihen ein.*
3. *Eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt* $z_0 \in \mathbb{C}$ *und Werten in einem komplexen Banachraum* E *ist eine Reihe der Form*
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{mit } a_n \in E$$

4.2 Isolierte singuläre Punkte, Pole und Nullstellen

Unsere Ergebnisse liefern uns sofort:

Satz 4.2.1.
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* a *ein isolierter Punkt von* $\mathbb{C} \setminus U$, *d.h. es gibt eine Umgebung* V *in* $\mathbb{C}$ *von* a, *so dass* $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$ *gilt. Ferner sei* $r > 0$ *so gewählt, dass alle Punkte der abgeschlossenen Kreisscheibe mit* $|z-a| \le r$ *mit Ausnahme von* a *in* U *liegen.*

Sei E ein komplexer Banachraum und $f : U \to E$ eine analytische Abbildung. Dann gilt für alle z mit $0 < |z-a| < r$ die <u>*Laurentzerlegung*</u>

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z-a)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit $d_{-n} = c_n$ für $n \geq 1$. Dabei konvergieren beide Reihen für $0 < |z-a| < r$ und es ist

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(x)\mathrm{d}x}{(x-a)^{n+1}} \qquad d_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (x-a)^{n-1} f(x)\mathrm{d}x \ ,$$

wobei γ der geschlossene Weg $t \mapsto a + r\mathrm{e}^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$ ist.

Beweis.
Dies folgt sofort, indem man Satz 4.1.2 auf den Ring $\rho < |z-a| < r$ mit beliebig kleinem ρ anwendet. $\square$

Bemerkungen 4.2.2.

1. *Wir werden sehen, dass die Reihe*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$$

eine ganze *Funktion mit $u(0) = 0$ definiert.*

2. *Ist $u = 0$, so stimmt f auf der offenen Menge $U := \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-a| < r\}$ mit der Funktion*

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

überein. Die Funktion g ist auf $D_r(a)$ analytisch.

3. *Ist umgekehrt f die Einschränkung einer auf der Kreisscheibe $D_r(a)$ definierten analytischen Funktion f_1 auf U, so gilt nach Satz 4.2.1 $f_1 = g$ und somit $u = 0$.*

Definition 4.2.3
In der eben beschriebenen Situation mit den eben eingeführten Bezeichnungen definieren wir:

1. *Die Funktion $u(1/(z-a))$ heißt* <u>*Hauptteil*</u> *der Funktion f in der Umgebung von a oder in a. Die Funktion $g(z)$ heißt* <u>*Nebenteil*</u> *von f. Die Zerlegung*

$$f(z) = g(z) + u(1/(z-a))$$

heißt <u>*Laurentzerlegung*</u> *der Funktion. Sie ist nach Satz 4.2.1 eindeutig.*

2. *Ist der Hauptteil $u \neq 0$, so sagen wir a sei ein* <u>*isolierter singulärer Punkt*</u> *von f.*

3. *Ist der Hauptteil u ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, so nennen wir a einen* <u>*Pol*</u> *von f der* <u>*Ordnung*</u> *n oder auch der* <u>*Polstellenordnung*</u> *n.*

4. *Andernfalls, d.h. wenn es unendlich viele Werte von m mit $d_m \neq 0$ gibt, nennen wir a einen wesentlich singulären Punkt oder eine wesentliche Singularität von f.*

5. *Allgemein definieren wir die Ordnung $\omega(a; f)$ von f im Punkt a wie folgt:*

   - *$\omega(a; f) = -\infty$, wenn a eine wesentliche Singularität von f ist.*
   - *$\omega(a; f) = -n$, wenn a ein Pol der Ordnung $n \geq 1$ ist. (Man beachte das Vorzeichen!)*
   - *$\omega(a; f) = m$, wenn $f \neq 0$ und $u = 0$ ist und in der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, die für $0 < |z-a| < r$ gleich $f(z)$ ist, m die kleinste ganze Zahl mit $c_m \neq 0$ ist. Ist $m > 0$, so nennen wir auch a eine Nullstelle der Ordnung m von f.*
   - *Schließlich setzen wir noch $\omega(a; 0) = \infty$ für die konstante Funktion 0.*

Beispiele 4.2.4.

1. *Die Funktion $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert ist, hat in $z = 0$ einen Pol der Ordnung 2.*

2. *Die gebrochen rationale Funktion*

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$$

ist auf $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$ definiert. Wir können sie schreiben als

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3} \ .$$

Wir suchen die Laurententwicklung von f auf dem Ringgebiet $S_{1,3}$. Für $|z| > 1$ gilt

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

Für $|z| < 3$ gilt dagegen

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{3})^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Somit gilt auf dem Ringgebiet $S_{1,3}$ die Zerlegung $f(z) = g(z) + h(1/z)$ mit Hauptteil (konvergent für $|z| < 1$)

$$h(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

und Nebenteil (konvergent für $|z| < 3$)

$$g(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \ .$$

Es folgt sofort:

Lemma 4.2.5.

1. *Sind sowohl f als auch g auf der offenen punktierten Kreisscheibe $U := \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-a| < r\}$ definierte analytische Funktionen mit Werten in demselben Banachraum, so ist*
$$\omega(a; f+g) \geq \min(\omega(a; f), \omega(a; g)) \ .$$
2. *Ist eine der Funktionen komplexwertig, so ist $\omega(a; fg) = \omega(a; f) + \omega(a; g)$, falls beide Zahlen $\omega(a; f)$ und $\omega(a; g)$ endlich sind.*
3. *Jede auf U analytische Funktion f, die in a endliche Ordnung n hat, kann eindeutig in der Gestalt*
$$f(z) = (z-a)^n f_1(z)$$
geschrieben werden, wobei n positiv oder negativ sein kann und f_1 auf U analytisch ist und im Punkt a Ordnung 0 hat, $f_1(a) \neq 0$.
4. *Ist f auf U analytisch, komplexwertig und von der endlichen Ordnung m, so folgt aus dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 2.2.6 und dem Einsetzungsprinzip 2.2.9, dass ein r' mit $0 < r' < r$ existiert, so dass $1/f$ auf der offenen punktierten Kreisscheibe $0 < |z-a| < r'$ analytisch ist. Dann gilt*
$$\omega(a; 1/f) = -\omega(a; f) \ .$$

Es gilt:

Satz 4.2.6.
Ist eine Funktion f mit Werten in einem komplexen Banachraum E auf der offenen punktierten Kreisscheibe $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$ analytisch, so gilt genau dann $\omega(a; f) \geq n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, wenn eine Umgebung V von a in $\mathbb{C}$ existiert, so dass $(z-a)^{-n} f(z)$ auf $V \cap U$ beschränkt ist.

Beweis.

- Gelte $\omega(a; f) \geq n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Dann hat die Funktion $(z-a)^{-n} f(z)$ im Punkt a nichtnegative Ordnung und ist daher die Einschränkung auf U einer auf der ganzen Kreisscheibe $D_r(a)$ definierten analytischen Funktion. Sie ist daher lokal beschränkt.
- Sei umgekehrt $(z-a)^{-n} f(z)$ auf $V \cap U$ beschränkt. Wir untersuchen nur den Fall $n = 0$ und wenden dann das Ergebnis auf die Funktion $\tilde{f}(z) := (z-a)^{-n} f(z)$ an.

  Dann folgt aus Satz 4.2.1 und dem Mittelwertsatz, dass für $|f(z)| \leq M$ auf U für jedes $0 < \rho < r$ die Ungleichung $d_m \leq M \rho^m$ für jedes $m \geq 1$ erfüllt ist. Da ρ beliebig gewählt ist, muss $d_m = 0$ für jedes $m \geq 1$ sein.

□

Definition 4.2.7
Sei eine Funktion f mit Werten in einem komplexen Banachraum E auf der offenen punktierten Kreisscheibe $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$ analytisch und a eine Singularität von f. Dann heißt a hebbar , falls sich f holomorph auf die offene Menge $U \cup \{a\}$ fortsetzen lässt, d.h. wenn es eine analytische Funktion $\tilde{f} : U \cup \{a\} \to E$ gibt mit $\tilde{f}|_U = f$.

Beispiel 4.2.8.
Die Funktion $\sin(z)/z$ *für* $z \neq 0$ *hat in* $z = 0$ *eine hebbare Singularität, denn wir können sie mit Wert* 1 *fortsetzen.*

Wir erhalten als Spezialfall aus Satz 4.2.6 für $n = 0$ das

Korollar 4.2.9 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.**
Sei eine Funktion f *mit Werten in einem komplexen Banachraum* E *auf der offenen punktierten Kreisscheibe* $U := \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-a| < r\}$ *analytisch und* a *eine Singularität von* a*. Dann ist die Singularität* a *genau dann hebbar, wenn die Funktion* f *auf einer Umgebung von* a *beschränkt ist.*

Lemma 4.2.10.
Sei $U \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet,* a *ein isolierter Punkt von* $\mathbb{C} \setminus U$ *und* $f : U \to E$ *eine analytische Abbildung in einen komplexen Banachraum* E*. Dann ist der Hauptteil von* f *in* a *ein ganze Funktion.*

Beweis.
Wir setzen zur Vereinfachung $a = 0$. Wir haben dann die Darstellung

$$u(z) = \frac{-1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|w|=r_0} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w - \frac{1}{z}}$$

für alle $|z| < \frac{1}{r_0}$ und $z \neq 0$. Weil auch $z \mapsto \frac{1}{z}$ für $z \neq 0$ holomorph ist, ist nach Theorem 3.3.10 diese Funktion auf $D_{1/r_0}(0) \setminus \{0\}$ holomorph. Wir müssen noch zeigen, dass sich u durch $u(0) = 0$ holomorph fortsetzen lässt. Für $|w| = r_0$ und $|z| < \frac{1}{r_0}$ gilt

$$|w - \frac{1}{z}| = |\frac{1}{z} - w| \geq |\frac{1}{z}| - |w| = |\frac{1}{z}| - r_0 > 0 \ .$$

Mit $M := \max_{|w|=r_0} |f(w)|$ folgt daher

$$|u(z)| \leq \frac{1}{2\pi} M \frac{1}{|\frac{1}{z}| - r_0} \cdot 2\pi r_0 \to 0 \qquad \text{für } z \to 0$$

Insbesondere ist der Hauptteil u in einer Umgebung von 0 beschränkt, hat also nach dem Hebbarkeitssatz 4.2.9 eine hebbare Singularität bei $z = 0$. Also ist u auf der ganzen Kreisscheibe $D_{1/r_0}(0)$ holomorph. Der innere Ringradius r_0 kann aber beliebig klein gewählt werden, so dass die Aussage für beliebig größe Kreisscheiben gilt. Daher ist die Funktion ganz. □

Wir halten noch einmal explizit fest:

Satz 4.2.11.
Sei eine Funktion f *mit Werten in einem Banachraum* E *auf der offenen Menge* $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$ *analytisch und* a *eine Singularität von* f*. Dann besitzt* f *eine Laurententwicklung* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *und es gilt*

1. *a ist genau dann hebbare Singularität, wenn* $c_n = 0$ *für alle* $n < 0$*.*
2. *a ist Polstelle der Ordnung* $m \geq 1$*, wenn* $c_{-m} \neq 0$ *gilt, aber* $c_n = 0$ *für alle* $n < -m$*.*
3. *a ist eine wesentliche Singularität, wenn unendlich viele* $n < 0$ *existieren mit* $c_n \neq 0$*.*

Beweis.
Übungsaufgabe □

Wir wollen noch im Falle komplexwertiger Funktionen die Situation an wesentlichen Singularitäten beschreiben:

Satz 4.2.12 (Satz von Casorati-Weierstraß)**.**
Sei eine komplexwertige Funktion f auf der offenen Menge $U := \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-a| < r\}$ analytisch und a eine wesentliche Singularität von f.

Dann existiert für jede Umgebung V von a, für jeden Wert $b \in \mathbb{C}$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $z \in V \cap U$ mit $|f(z) - b| < \epsilon$.

Das Bilder jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität liegt also dicht in $\mathbb{C}$. Man sagt auch, die komplexwertige Funktion f komme in jeder noch so kleinen punktierten Umgebung $V \cap U$ der wesentlichen Singularität a jedem Wert $b \in \mathbb{C}$ beliebig nahe. Die komplexwertige Funktion f ist also "extrem nervös" in der Nähe einer wesentlichen Singularität. Als Beispiel betrachte man die Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ um den Punkt $a = 0$.

Beweis.

- Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, es gibt eine Umgebung V, ein $b \in \mathbb{C}$ und eine Schranke $d > 0$, so dass $|f(z) - b| \geq d$ für alle $z \in V \cap U$. Dann ist
$$g(z) := \frac{1}{f(z) - b}$$
auf $V \cap U$ analytisch und beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 4.2.9 lässt sich g holomorph auf $(V \cap U) \cup \{a\}$ fortsetzen.

- Wir betrachten zunächst den Fall $g(a) \neq 0$. Dann gilt auf $U \cap V$
$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$$
und f ist auf $(U \cap V) \cup \{a\}$ holomorph, so dass a eine hebbare Singularität von f wäre, im Widerspruch zur vorausgesetzten wesentlichen Singularität.

- Also muss $g(a) = 0$ gelten. Da g nicht identisch Null auf $(V \cap U) \cup \{a\}$ ist, folgt aus dem Prinzip der Isolierheit der Nullstellen 2.2.6, dass
$$g(z) = (z-a)^m h(z)$$
gilt mit einer natürlichen Zahl $m \geq 1$ und einer holomorphen Funktion h mit $h(a) \neq 0$. Für $z \in U \cap V$ folgt daher
$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + b = \frac{1/h(z)}{(z-a)^m} + b = \frac{G(z)}{(z-a)^m}$$
mit $G(z) := \frac{1}{h(z)} + b(z-a)^m$. Es ist $G(a) = \frac{1}{h(a)} \neq 0$. Also hat f in a einen Pol endlicher Ordnung, im Widerspruch zur vorausgesetzten wesentlichen Singularität.

$\square$

Es gibt noch eine Aussage, die stärker als der Satz von Casorati-Weierstraß ist.

Theorem 4.2.13 (Satz von Picard).
Sei $a \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität der analytischen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Dann sind nur zwei Fälle möglich: Für jede punktierte Umgebung $\dot{U}$ von a gilt $f(\dot{U}) = \mathbb{C}$ oder es gilt $f(\dot{U}) = \mathbb{C} \setminus \{c\}$ für genau eine $c \in \mathbb{C}$.

Mit anderen Worten: die eine analytische Funktion nimmt also in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität a jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme an.

Die für den Beweis dieser Aussage nötigen Methoden können wir allerdings in dieser Vorlesung nicht bereit stellen. Wir verweisen auf Kapitel 10.4 von
Reinhold Remmert und Georg Schumacher: Funktionentheorie 2. Dritte, neu bearbeitete Auflage, Springer 2007.

4.3 Residuum

Definition 4.3.1
Sei eine Funktion f mit Werten in einem Banachraum E auf der offenen Menge $U := \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-a| < r\}$ analytisch und a eine Singularität von f. Der Koeffizient $d_1 \in E$ im Hauptteil von f wird das Residuum von f im Punkt a genannt. Wir schreiben

$$d_1 = \mathrm{res}_{z=a} f \ .$$

Bemerkungen 4.3.2.

1. *Nach der Koeffizientenformel aus Satz 4.1.2 3. für Laurentreihen ist*

$$\mathrm{res}_{z=a} f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} f(z) \mathrm{d}z$$

für ρ klein genug.

2. *Ist die Singularität a hebbar, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz 3.3.10* $\mathrm{res}_{z=a} f = 0$.

3. *Eine analytische Funktion $f(z)$ habe einen Pol der Ordnung m an der Stelle z_0, so dass wir als Laurentreihe finden*

$$f(z) \ = a_{-m}(z-z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \dots \ .$$

Dann hat die Funktion

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots$$

eine hebbare Singularität in z_0. Wir setzen sie holomorph fort. Dann gilt

$$\mathrm{res}_{z=z_0}(f) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}|_{z=z_0} \left((z-z_0)^m f(z)\right) \ .$$

Beispiele 4.3.3.

1. *Betrachte für $z \neq 0$ die Funktion $f(z) = \frac{\cos z}{z}$. Aus der Reihenentwicklung der cosinus-Funktion*

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} \pm \dots$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt $\mathrm{res}_{z=0} f = 1$.

2. *Betrachte für $z \neq 0$ die Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$. Wegen*

$$\mathrm{e}^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

für $z \neq 0$ folgt $\mathrm{res}_{z=0} \mathrm{e}^{1/z} = 1$.

3. *Betrachte für $z \neq 0$ die Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{1/z^2}$. Aus der gleichen Reihenentwicklung für $z \neq 0$ folgt* $\mathrm{res}_{z=0} \mathrm{e}^{1/z^2} = 0$.

Wir können nun einen weiteren klassischen Satz der Funktionentheorie formulieren:

Theorem 4.3.4 (Residuensatz).
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, (a_n) eine endliche oder unendliche Folge verschiedener Punkte von U und S die Menge der Punkte dieser Folge. Alle Punkte von S seien in U isolierte Punkte.

Ist nun f eine analytische Abbildung von $U \setminus S$ in einen komplexen Banachraum E und γ ein geschlossener Weg in $U \setminus S$, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_n j(a_n; \gamma)\mathrm{res}_{a_n}(f) \ .$$

Dabei gibt es auf der rechten Seite nur endliche viele von Null verschiedene Glieder.

Beweis.

1. Wir können die holomorphe Funktion f auf alle hebbaren singulären Punkte in S analytisch ausdehnen. Wegen $\mathrm{res}_{a_n}(f) = 0$ für hebbar singuläre oder nicht-singuläre Punkte tragen solche a_n zur Summe auf der rechten Seite nicht bei. Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass jedes a_n ein nicht hebbarer singulärer Punkt für f ist.

2. Als Nächstes wollen wir uns überlegen, dass für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ der Schnitt $K \cap S$ höchstens endlich viele Elemente enthält. Denn $U \setminus S$ ist nach Annahme offen in $\mathbb{C}$, also ist $K \cap S$ abgeschlossen. Somit ist $K \cap S$ auch kompakte und als kompakte diskrete Menge $K \cap S$ endlich.

3. Es sei I das Intervall, auf dem der Weg γ definiert ist. Sei

$$P := \{z \in U | j(z; \gamma) \neq 0\}$$

die Menge der Punkte, die in Bezug auf den Weg γ nicht-verschwindenen Index haben. Nach Korollar 3.3.6 ist der Abschluss $\overline{P}$ von P beschränkt und somit in $\mathbb{C}$ kompakt.

Wir beschreiben diesen Abschluss noch etwas genauer: Da die Menge der Punkte in $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, in denen der Index einen gegebenen Wert annimmt, nach Lemma 3.3.3 offen ist, liegen die Punkte des Abschluss $\overline{P}$ entweder auf dem Weg $\gamma(I)$ oder in der offenen Menge P.

4. Wir überlegen uns schließlich, dass die abgeschlossene Menge $\overline{P}$ in der offenen Menge U enthalten ist. Andernfalls gäbe es in $\overline{P}$ einen Randpunkt von U. Dieser müsste nach dem letzten Resultat in Punkt 3 entweder auf der Kurve $\gamma(I)$ liegen, was nach Voraussetzung über γ nicht sein kann, oder einen von Null verschiedenen Index in Bezug auf die Kurve γ haben, was nach Satz 3.3.7 nicht sein kann, da der Randpunkt nicht in der offenen Menge U liegen kann. Also enthält der Abschluss $\overline{P}$ keinen Randpunkt von U und es gilt $\overline{P} \subset U$.

   Dies beendet unsere Diskussion der Topologie der Situation.

5. Da U als einfach zusammenhängend vorausgesetzt wurde, finden wir eine Konturhomotopie $\varphi(t,\xi)$ mit $t \in I$ und $\xi \in J$ mit J einem kompakten Intervall von γ innerhalb U in einen einpunktigen Weg.

   Wegen der Stetigkeit von φ ist das Bild $M := \varphi(I \times J)$ der Konturhomotopie eine kompakte Teilmenge von U. Man kann sich M als die Teilmenge von U vorstellen, die durch die Kurven der Konturhomotopie überstrichen wird.

   Auch die endliche Vereinigung $M \cup \overline{P}$ ist kompakt. Es sei $H \subset \mathbb{N}$ die Menge natürlicher Zahlen, für die $a_n \in M \cup \overline{P}$ gilt. Sie ist nach 2. endlich. Dies sind also die Indizes der Singularitäten von f, die im Bild der Konturhomotopie liegen oder deren Index in Bezug auf γ nicht verschwindet.

   Für jedes $n \in H$ sei $u_n(\frac{1}{z-a_n})$ der Hauptteil von f im Punkte a_n. Man beachte, dass wegen Bemerkung 4.2.2 1 der Hauptteil $u_n(\frac{1}{z-a_n})$ auf $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}$ holomorph ist.

6. Mit B bezeichnen wir
$$B := U \setminus \cup_{n \notin H} \{a_n\} \ .$$
   Jede in U enthaltene kompakte Umgebung eines beliebigen Punktes $x \in B$ hat wegen 2. einen endlichen Durchschnitt mit S. Daher ist eine hinreichend kleine Umgebung von $x \in B$ in B enthalten; die Menge B ist somit offen.

7. Da H nach 5. endlich ist, ist die Menge $B \setminus \cup_{n \in H} \{a_n\}$ offen. Wir betrachten auf ihr die Funktion
$$g(z) := f(z) - \sum_{n \in H} u_n(\frac{1}{z-a_n})$$
   Die Pole von f in U liegen in $S = \cup_{n \notin H} \{a_n\} \dot\cup \cup_{n \in H} \{a_n\}$. Die erste Teilmenge liegt nicht in B, nach Definition von B. An den endlich vielen Punkten der zweiten Teilmenge hebt sich der Hauptteil von f gegen einen der Summanden weg. Daher lässt sich die Funktion g zu einer auf ganz B holomorphen Funktion fortsetzen.

   Nach Definition von B gilt für das Bild M der Homotopie $M \subset B$, denn wir hatten nur die a_n entfernt, die nicht in M liegen. Daher ist γ sogar innerhalb der offenen Menge B zu einem einpunktigen Weg homotop. Nach dem Cauchyschen Integralsatz 3.1.10 gilt $\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = 0$, also
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n \in H} \int_\gamma u_n(\frac{1}{z-a_n})\mathrm{d}z \ .$$

8. Betrachte nun jede der endlich vielen Funktionen $u_n(\frac{1}{z-a_n})$ in einem offenen Ring um a_n, der $\gamma(I)$ enthält, so ergibt sich die Behauptung aus
$$\begin{aligned} \int_\gamma u_n(\tfrac{1}{z-a_n})\mathrm{d}z &= \int_\gamma \left(\textstyle\sum_{j=-1}^{-\infty} u_{n,j}(z-a_n)^j \right) \mathrm{d}z \\ &= \textstyle\sum_{j=-1}^{-\infty} \left(u_{n,j} \int_\gamma (z-a_n)^j \right) \mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i} \cdot u_{n,-1} \cdot j(a_n;\gamma) = 2\pi\mathrm{i} \cdot j(a_n;\gamma) \cdot \mathrm{res}_{a_n}(f) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir zuächst ausgenützt, dass auf der kompakten Menge $\gamma(I)$ die Laurent-Entwicklung gleichmäßig konvergiert, so dass wir Integration und Summation vertauschen dürfen. Das Integral $\int_\gamma (z-a_n)^j \mathrm{d}z$ verschwindet für $j \neq -1$, da dann der Integrand die komplexe Stammfunktion $(z-a_n)^{j+1}/(j+1)$ hat.

$\square$

4.4 Funktionentheoretische Anwendung des Residuensatzes

Wir setzen wie in Abschnitt 1.5 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definition 4.4.1

1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und a ein Pol von f. Dann setzen wir $f(a) := \infty$, was wegen $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$ sinnvoll ist.*

2. *Sei nun $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ eine Abbildung. Dann heißt f eine meromorphe Funktion auf U, wenn gilt*

   (a) $S(f) := f^{-1}(\{\infty\})$ ist diskret in U, d.h. $S(f)$ hat keinen Häufungspunkt.

   (b) Die Einschränkung $f|_{U\setminus S(f)}$ ist analytisch.

   (c) Alle Punkte aus $S(f)$ sind Polstellen von f.

Satz 4.4.2 (Null- und Polstellen zählendes Integral)**.**
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine auf U meromorphe Funktion mit endlich vielen Nullstellen und Polstellen. Seien diese Null- und Polstellen mit $a_1, \ldots a_n$ bezeichnet. Sei $\gamma : I \to U$ ein geschlossener Weg mit $a_j \notin \gamma(I)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} j(a_\nu;\gamma)\omega(f;a_\nu)$$

Man beachte, dass hier die Nullstellen und Pole gewichtet wird Ihrer Ordnung und ihrem Index bezüglich γ gezählt werden. Ein Beitrag kann also durchaus auch negativ sein, so dass die traditionelle Bezeichnung “Null- und Polstellen zählendes Integral” nicht im Sinne eines reinen Zählens verstanden werden darf.

Beweis.
Die Funktion $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ist holomorph auf $U \setminus \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$. Nach dem Residuensatz gilt daher

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} j(a_\nu;\gamma) \mathrm{res}_{z=a_\nu} \frac{f'}{f} \ ,$$

so dass es nur noch darauf ankommt, zu zeigen, dass für eine Nullstelle oder einen Pol a von f gilt

$$\mathrm{res}_{z=a_\nu} \frac{f'}{f} = \omega(f;a_\nu) \ .$$

Dazu schreiben wir auf einem Kreisring S um a

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$

mit $m = \omega(f; a_\nu)$ und $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $g(a) \neq 0$. Dann gilt

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1}g(z) + (z-a)^m g'(z)$$

und daher

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-a)^{m-1}g(z) + (z-a)^m g'(z)}{(z-a)^m g(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

und somit $\mathrm{res}_{z=a}\frac{f'}{f} = m$, denn der Quotient g'/g ist wegen $g(a) \neq 0$ holomorph. □

Wir reformulieren einen Spezialfall:

Korollar 4.4.3 (Argumentprinzip).
Es gelten die gleichen Voraussetzungen. Seien $a_1, a_2, \ldots a_r$ die Nullstellen von f und $a_{r+1}, \ldots a_n$ die Polstellen. Setze

$$N(0) := \sum_{\nu=1}^{r} \omega(f; a_\nu)$$

die (mit der Vielfachheit gewichtete) Gesamtzahl der Nullstellen und

$$N(\infty) := -\sum_{\nu=r+1}^{n} \omega(f; a_\nu)$$

die mit der Vielfachheit gewichtete) Gesamtzahl der Polstellen. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = N(0) - N(\infty)$$

für jeden Weg γ, der jeden der Punkte a_ν genau einmal im positiven Sinne umläuft.

Wir zeigen nun

Satz 4.4.4 (Satz von Hurwitz).
Sei U ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$, welche auf jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert.

Es gelte $f_n(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist entweder die Grenzfunktion f identisch Null auf U oder gilt auch für die Grenzfunktion $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U$.

Beweis.

- Nach dem Satz von Weierstraß 3.4.6 ist die Grenzfunktion f auf dem Gebiet U holomorph. Wir nehmen an, dass f nicht identisch Null auf U ist. Nach dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 2.2.6 ist die Nullstellenmenge von f diskret.

- Sei $a \in U$ fest gewählt. Wir müssen $f(a) \neq 0$ zeigen. Nach dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 2.2.6 ist die Nullstellenmenge von f diskret. Es gibt daher $r > 0$, so dass $\overline{U_r(a)} \subset U$ und so dass f auf $\overline{U_r(a)} \setminus \{a\}$ nicht Null ist. Setze

$$M := \min_{|z-a|=r} |f(z)| > 0 \ .$$

- Da die Funktionenfolge (f_n) auf dem kompakten Kreis $|z-a|=r$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$ gilt

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{M}{2} \quad \text{für alle} \quad |z-a| = r\ .$$

Für alle $n > N$ und z auf dem Kreis folgt dann

$$|f_n(z)| = |f(z) - (f(z) - f_n(z))| \geq |f(z)| - |f(z) - f_n(z)| \geq M - \frac{M}{2} = \frac{M}{2}\ .$$

Hieraus erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)} \right| = \frac{|f(z) - f_n(z)|}{|f_n(z)| \cdot |f(z)|} \leq \frac{2}{M} \cdot \frac{1}{M} |f_n(z) - f(z)|\ .$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f auf dem Kreis $|z-a|=r$ folgt somit aber auch die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $(\frac{1}{f_n})$ gegen die Grenzfunktion $\frac{1}{f}$.

- Aus dem Satz von Weierstraß 3.4.6 wissen wir aber auch, dass die Ableitungen (f_n') auf dem Kreis gleichmäßig gegen f' konvergieren. Somit konvergiert auch $\frac{f_n'}{f_n}$ gleichmäßig auf dem Kreis gegen $\frac{f'}{f}$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=r} \frac{f_n'}{f_n} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=r} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n'}{f_n} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=r} \frac{f'}{f} \mathrm{d}z\ .$$

Da $f_n \neq 0$ auf U für alle n, ist nach Korollar 4.4.3 die linke Seite für alle n gleich Null, also auch die rechte Seite. Wiederum aus Korollar 4.4.3 folgt jetzt $f(z) \neq 0$ für alle z mit $|z-a| < r$. Daher ist insbesondere $f(a) \neq 0$. Da dies für alle $a \in U$ gilt, ist die Behauptung gezeigt.

□

Korollar 4.4.5.
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von injektiven holomorphen Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$, die auf jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist die Grenzfunktion f entweder konstant oder auch injektiv.

Beweis.
Wir nehmen an, dass f nicht konstant ist. Wähle ein $a \in U$; dann sind die Funktionen $f_n(z) - f_n(a)$ nullstellenfrei auf dem Gebiet $U \setminus \{a\}$. Nach dem vorangegangenen Satz 4.4.4 von Hurwitz ist dann $f(z) - f(a)$ auf $U \setminus \{a\}$ entweder identisch Null oder niemals Null. Der erste Fall ist nach Voraussetzung ausgeschlossen, also folgt $f(z) \neq f(a)$ für alle $z \in U \setminus \{a\}$. So können wir für jedes $a \in U$ schließen und finden, dass f injektiv ist. □

4.5 Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes

Der Residuensatz erlaubt es, explizit bestimmte Integrale auszurechnen, die zum Teil im Rahmen der reellen Analysis nicht elementar zugänglich sind. Wir diskutieren zwei Beispielklassen.

Satz 4.5.1.
Seien $p(x,y)$ und $q(x,y)$ Polynome mit reellen bzw. komplexen Koeffizienten in zwei Unbestimmten. Sei $q(x,y) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$.

Setze

$$R(x,y) := \frac{p(x,y)}{q(x,y)} .$$

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) \mathrm{d}t = 2\pi \sum_{a \in D_1(0)} \mathrm{res}_{z=a}(f) ,$$

wobei f die rationale Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z} R(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \frac{1}{z}))$$

ist. Man beachte, dass in der Summe wieder tatsächlich nur endlich viele Terme beitragen.

Beweis.

- Für $|z| = 1$ ist $\overline{z} = \frac{1}{z}$ und daher

$$\begin{array}{rclcl} \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) & = & \frac{1}{2}(z + \overline{z}) & = & \mathrm{Re}\, z \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \frac{1}{z}) & = & \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}) & = & \mathrm{Im}\, z \end{array}$$

  reell. Wegen $(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 = 1$ ist $q(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z) \neq 0$ für alle z auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene, also hat f auf dem Einheitskreis keine Pole.

- Nach dem Residuensatz ist daher

$$\begin{array}{rcl} 2\pi \sum_{a \in D_1(0)} \mathrm{res}_{z=a}(f) & = & \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{|z|=1} f(z) \mathrm{d}z \\ & = & \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{|z|=1} R(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \frac{1}{z})) \frac{1}{z} \mathrm{d}z \\ & = & \frac{1}{\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} R(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}), \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}))\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \mathrm{i} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t \\ & = & \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) \mathrm{d}t\, . \end{array}$$

□

Beispiel 4.5.2.
Wir berechnen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \cos t}$$

für $a \in \mathbb{R}$ und $a > 1$. Es ist $R(x,y) = \frac{1}{a+x}$, also

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{2}{z^2 + 2az + 1} .$$

Es gilt $z^2 + 2az + 1 = (z-\alpha)(z-\beta)$ *mit*

$$\alpha = -a + \sqrt{a^2-1} \quad \beta = -a - \sqrt{a^2-1} \ .$$

Wegen der Voraussetzung $a > 1$ *sind beide Wurzeln reell. Man rechnet leicht nach, dass aus* $a > 1$ *folgt* $|\alpha| < 1$ *und wegen* $\alpha \cdot \beta = 1$ $|\beta| > 1$. *Wir finden somit nach Satz 4.5.1*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\cos t} \quad = \quad 2\pi \mathrm{res}_{z=\alpha} \frac{2}{z^2+2za+1} = 4\pi \mathrm{res}_{z=\alpha} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = 4\pi \frac{1}{\alpha-\beta} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \quad .$$

Bemerkung 4.5.3.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann heißt* f *integrierbar über* $\mathbb{R}$, *wenn die beiden Grenzwerte* $\lim_{A\to\infty} \int_0^A f(x)\mathrm{d}x$ *und* $\lim_{B\to\infty} \int_{-B}^0 f(x)\mathrm{d}x$ *existieren. Man schreibt dann*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{A\to\infty} \int_0^A f(x)\mathrm{d}x + \lim_{B\to\infty} \int_{-B}^0 f(x)\mathrm{d}x \ .$$

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt absolut integrierbar, falls* $|f|$ *integrierbar ist. Man zeigt leicht, dass aus absoluter Integrierbarkeit Integrierbarkeit folgt.*

Wir kommen nun zu einer zweiten Klasse von Integralen, die man mit Hilfe des Residuensatzes ausrechnen kann.

Satz 4.5.4.
Seien $p(x)$ *und* $q(x)$ *zwei polynomiale Funktionen mit reellen Koeffizienten. Es gelte*

$$\mathrm{grad} q \geq \mathrm{grad} p + 2$$

und $q(x) \neq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Betrachte die rationale Funktion*

$$R(x) := \frac{p(x)}{q(x)} \ ,$$

die keine Pole auf der reellen Achse hat. Dann gilt:

1. *Die Funktion* $R(x)$ *ist absolut integrierbar über* $\mathbb{R}$.

2. *Das Integral ergibt sich zu*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{res}_{z=a_j} R(z) \ ,$$

wobei $a_1, a_2, \ldots a_k$ *die Polstellen von* $R(z)$ *in der komplexen oberen Halbebene* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ *sind.*

Mit Hilfe der analytischen Fortsetzung einer auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion auf die obere Halbebene kann man also reelle Integrale berechnen.

Beweis.

- Wegen der Annahme über das Nennerpolynom ist die rationale Funktion R stetig auf $\mathbb{R}$. Sei

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu z^\nu \quad \text{und} \quad q(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu$$

mit $n - m \geq 2$ und $c_n \neq 0$. Für $z \neq 0$ finde

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = z^{m-n} \frac{\frac{b_0}{z^m} + \ldots + b_m}{\frac{c_0}{z^n} + \ldots + c_n} \; .$$

Für $|z| \to \infty$ strebt der zweite Faktor gegen b_m/c_n, ist also insbesondere beschränkt. Also existiert $M > 0$ und $c > 0$, so dass

$$|R(z)| \leq |z^{m-n}| \cdot M \quad \text{für alle} \quad |z| > c$$

gilt. Wegen $n - m \geq 2$ folgt

$$|R(z)| \leq \frac{1}{|z|^2} \cdot M \quad \text{für alle} \quad |z| > c \; . \tag{3}$$

Insbesondere gilt für $z = x$ reell und für $0 < c < A$

$$\begin{array}{rcll} \int_0^A |R(x)|\mathrm{d}x &=& \int_0^c |R(x)|\mathrm{d}x + \int_c^A |R(x)|\mathrm{d}x & \\ &\leq& \int_0^c |R(x)|\mathrm{d}x + M \cdot \int_c^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2} & \text{wegen (3)} \\ &=& \int_0^c |R(x)|\mathrm{d}x + M(-\frac{1}{A} + \frac{1}{c}) & \\ &\leq& \int_0^c |R(x)|\mathrm{d}x + \frac{M}{c} < \infty & \end{array}$$

Das Integral $\int_0^A |R(x)|\mathrm{d}x$ mit nicht-negativem Integranden ist offenbar monoton wachsend als Funktion von A und gleichmäßig in A beschränkt. Es folgt, dass der Grenzwert

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A |R(x)|\mathrm{d}x$$

existiert und einen endlichen Wert hat. Gleichermaßen schließt man für

$$\lim_{B \to \infty} \int_{-B}^0 |R(x)|\mathrm{d}x \; .$$

- Wir betrachten für jedes $r > 0$ den geschlossenen Weg γ_r mit

$$\gamma(t) := \begin{cases} t & \text{für } -r \leq t \leq r \\ r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-r)} & \text{für } r \leq t \leq r + \pi \end{cases}$$

Die Kurve ist also die Aneinanderhängung des Intervalls $[-r, r]$ auf der reellen Achse mit einem Halbkreis α_r in der oberen Halbebene vom Radius r. Da q ein Polynom ist, hat R höchstens endlich viele Polstellen in der oberen Halbebene. Wir wählen der Radius r des Halbkreises α_r so groß, dass der Halbkreis alle Polstellen der rationalen Funktion R in der oberen Halbebene umfasst. Dann gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\alpha_r} R(z)\mathrm{d}z + \int_{-r}^{r} R(x)\mathrm{d}x = \int_{\gamma_r} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{res}_{z=a_j} R(z) \; .$$

Wir schätzen das erste Integral über den Halbkreis α_r ab:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\alpha_r} R(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^\pi R(re^{\mathrm{i}t})r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t\right| \le r\int_0^\pi |R(re^{\mathrm{i}t})|\mathrm{d}t \\ &\le r\tfrac{M}{r^2}\pi = \tfrac{M\pi}{r}\end{aligned}$$

wobei wir wieder die Abschätzung (3) benutzt haben. Dieser Beitrag geht für $r \to \infty$ gegen Null. Da außerdem gilt

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} R(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x\ ,$$

folgt die Behauptung.

□

Beispiel 4.5.5.

1. *Wir zeigen*
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \pi\,.$$
Es gilt $z^2+1=(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$, also hat $\frac{1}{z^2+1}$ genau eine Polstelle in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$, nämlich $+\mathrm{i}$. Es gilt
$$\mathrm{res}_{z=\mathrm{i}}\frac{1}{z^2+1} = \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\ .$$
Mit dem vorangegangenen Satz 4.5.4 folgt
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2\mathrm{i}} = \pi\,.$$

2. *Auf ähnliche Weise kann man Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x$ und somit auch der Form $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\mathrm{d}x$ und $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\mathrm{d}x$ berechnen. Man zeigt wie oben*
$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_a \mathrm{res}_{z=a}R(z)e^{\mathrm{i}z}\ ,$$
wobei die Summe über alle Pole in der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H}$ geht.

5 Riemannsche Flächen

Wir haben schon gesehen, dass sich wichtige Funktionen wie die Quadratwurzel oder der Logarithmus nicht auf der ganzen komplexe Ebene $\mathbb{C}$ definieren lassen. Es ist unbefriedigend, aus $\mathbb{C}$ ad hoc eine Teilmenge wie die negative reelle Halbchase herauszunehmen. In beiden Fällen würde man gerne Funktionen betrachten, die mehrere Werte annehmen, etwa $\pm\sqrt{z}$ oder $\log|z| + \mathrm{Arg}(z) + 2\pi in$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Da dies aber nicht widerspruchsfrei möglich ist, werden wir die Funktionen auf einer mehrblättrigen Fläche über der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ definieren, die für jeden gewünschten Funktionswert ein Blatt hat. Hierbei machen wir uns gleich von der Voraussetzung frei, über der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ zu arbeiten und betrachten allgemeinere Flächen.

5.1 Definition der Riemannschen Fläche

Definition 5.1.1

1. *Eine n-dimensionale (reelle) Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorffscher* [3] *topologischer Raum X mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist.*

2. *Sei X eine zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine komplexe Karte ist ein Homöomorphismus, also eine bijektive stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung, $\varphi : U \to V$ einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{C}$. Zwei komplexe Karten heißen biholomorph verträglich, falls die Abbildung*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

   von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ biholomorph ist.

3. *Ein komplexer Atlas auf X ist ein System $\mathfrak{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i, i \in I\}$ paarweise biholomorph verträglicher Karten, die X überdecken, d.h. $\cup_{i\in I} U_i = X$.*

4. *Zwei komplexe Atlanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ heißen biholomorph verträglich, falls jede Karte von $\mathfrak{A}$ mit jeder Karte von $\mathfrak{A}'$ biholomorph verträglich ist.*

Bemerkungen 5.1.2.

1. *Ist $\varphi : U \to V$ eine komplexe Karte, $U_1 \subset U$ offen und $V_1 := \varphi(U_1)$, so ist $\varphi|_{U_1} : U_1 \to V_1$ eine mit $\varphi : U \to V$ biholomorph verträgliche Karte.*

2. *Da die Verkettung biholomorpher Funktionen wieder biholomorph ist, folgt, dass die biholomorphe Verträglichkeit zwischen komplexen Atlanten eine Äquivalenzrelation ist.*

Definition 5.1.3

Unter einer komplexen Struktur Σ auf einer zwei-dimensionalen Mannigfaltigkeit X versteht man eine Äquivalenzklasse biholomorph verträglicher Atlanten auf X.

[3] Ein topologischer Raum M heißt Hausdorffsch, wenn es für je zwei verschiedene Punkte $p, q \in M$ Umgebungen U_p von p und U_q von q gibt, die disjunkt sind, $U_q \cap U_q = \emptyset$.

Bemerkungen 5.1.4.

1. *Jede komplexe Struktur Σ auf X kann also durch die Angabe eines komplexen Atlas definiert werden.*

2. *Jede komplexe Struktur Σ auf X enthält einen eindeutig bestimmten maximalen Atlas $\mathfrak{A}^*$: ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Atlas aus Σ, so besteht $\mathfrak{A}^*$ aus allen komplexen Karten auf X, die mit jeder Karte von $\mathfrak{A}$ biholomorph verträglich sind.*

Definition 5.1.5
Eine <u>Riemannsche Fläche</u> ist ein Paar (X, Σ), bestehend aus einer zusammenhängenden zweidimensionalen Mannigfaltigkeit X und einer komplexen Struktur Σ auf X.

Bemerkungen 5.1.6.

1. *Man schreibt meist nur X, wenn klar ist, welche komplexe Struktur Σ gemeint ist. Manchmal schreibt man auch $(X, \mathfrak{A})$, wenn der Atlas $\mathfrak{A}$ ein Repräsentant der komplexen Struktur Σ ist.*

2. *Ist X eine Riemannsche Fläche, so verstehen wir unter einer Karte auf X immer eine* komplexe *Karte des maximalen Atlas zur komplexen Struktur auf X.*

3. *Ist ein Punkt $x \in X$ in mehreren Karten enthalten, so ist keine Karte vor der anderen ausgezeichnet. Deshalb können wir nur die Begriffe der Funktionentheorie auf Riemannsche Flächen übertragen, die invariant unter biholomorphen Abbildungen sind.*

Beispiele 5.1.7.

1. *Die Gauß'sche Zahlenebene $\mathbb{C}$ ist eine Riemannsche Fläche. Ihre komplexe Struktur wird definiert durch den Atlas, dessen einzige Karte die Identität $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist.*

2. *Gebiete sind Riemannsche Flächen. Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset X$ ein Gebiet, d.h. eine offene und zusammenhängende Teilmenge. Eine natürliche komplexe Struktur wird durch den Atlas definiert, der aus allen komplexen Karten $\varphi : U \to V$ des maximalen Atlas $\mathfrak{A}^*$ auf X besteht, für die $U \subset Y$ gilt.*

   Insbesondere ist jedes Gebiet $Y \subset \mathbb{C}$ eine Riemannsche Fläche.

3. *Die Riemannsche Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}_1$. (Die Bezeichnung kommt daher, dass man $\mathbb{P}_1$ als den eindimensionalen projektiven Raum über dem Körper der komplexen Zahlen ansehen kann.)*

   Wir hatten schon in Abschnitt 1.5 gesehen, dass $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}_1$ ein kompakter Hausdorff-Raum ist, der als topologischer Raum isomorph zur Sphäre S^2 ist. Wir betrachten die offenen Mengen
   $$U_1 := \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \quad \textit{und} \quad U_2 := \mathbb{P}_1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \; .$$
   Die Abbildung $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ sei die identische Abbildung,
   $$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \begin{cases} 1/z & \textit{für } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \textit{für } z = \infty \end{cases} \end{aligned}$$
   Da dies Homöomorphismen sind, ist $\mathbb{P}_1$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Da die Definitionsgebiete U_1 und U_2 der Karten (weg-)zusammenhängend sind und nicht-leeren Durchschnitt haben, ist auch $\mathbb{P}_1$ (weg-)zusammenhängend.

Die komplexe Struktur auf $\mathbb{P}_1$ definieren wir durch den Atlas aus diesen beiden Karten. In der Tat sind diese Karten biholomorph verträglich: es ist $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$, und

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$$

ist als rationale Funktion auf dem angegebenen Gebiet eine biholomorphe Abbildung.

4. *Wir beschreiben Tori: Seien ω_1, ω_2 zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige komplexe Zahlen. Dann heißt die Untergruppe von der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$*

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

das von ω_1, ω_2 aufgespannte Gitter.

Zwei komplexe Zahlen $z, z' \in \mathbb{C}$ heißen äquivalent modulo Γ, falls $z - z' \in \Gamma$. Die Menge aller Äquivalenzklassen wird mit $\mathbb{C}/\Gamma$ bezeichnet. Es sei $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Projektion auf Äquivalenzklassen.

Wir versehen $\mathbb{C}/\Gamma$ mit der Quotiententopologie: eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}/\Gamma$ heißt genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ in $\mathbb{C}$ offen ist. Dadurch wird $\mathbb{C}/\Gamma$ zu einem Hausdorff-Raum und die Projektion π zu einer stetigen Abbildung. Da $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist, ist auch $\mathbb{C}/\Gamma$ als stetiges Bild zusammenhängend. Der Quotient ist kompakt als Bild des kompakten Parallelogramms

$$P := \{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \mid \lambda, \mu \in [0, 1]\}$$

Die Abbildung π ist auch offen, d.h. für jede offene Menge $V \subset \mathbb{C}$ ist das Bild $\pi(V) \subset \mathbb{C}/\Gamma$ offen. Nach Definition der offenen Mengen in $\mathbb{C}/\Gamma$ ist dafür zu zeigen, dass das Urbild $\hat{V} := \pi^{-1}\pi(V)$ von $\pi(V)$ in $\mathbb{C}$ offen ist. Es gilt

$$\hat{V} = \cup_{\omega \in \Gamma}(\omega + V) .$$

Jede Teilmenge $\omega + V$ ist offen, also ist auch $\hat{V}$ als Vereinigung offener Mengen offen.

Wir wollen noch eine komplexe Struktur auf $\mathbb{C}/\Gamma$ einführen: sei $V \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, die kein Paar modulo Γ äquivalenter Punkte enthält. $U := \pi(V)$ ist offen und $\pi|_V : V \to U$ ist ein Homöomorphismus. Seine Umkehrabbildung $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}$ ist eine komplexe Karte auf $\mathbb{C}/\Gamma$. Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller Karten, die sich so erhalten lassen. Wir zeigen jetzt, dass je zwei solche Karten $\varphi_i : U_i \to V_i$ aus $\mathfrak{A}$ biholomorph verträglich sind. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) .$$

Für jedes $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ folgt aus $(\pi \circ \varphi_i)|_{U_1 \cap U_2} = \mathrm{id}|_{U_1 \cap U_2}$ die Identität $\pi \circ \psi(z) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z)$, also $\psi(z) - z \in \Gamma$. Da Γ diskret und ψ stetig ist, folgt, dass $\psi(z) - z$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ konstant ist. Also ist ψ auf jeder Zusammenhangskomponente eine Verschiebung, so dass ψ und ebenso ψ^{-1} holomorph sind.

Ordnet man schließlich dem durch $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ repräsentierten Punkt von $\mathbb{C}/\Gamma$ den Punkt

$$(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\lambda}, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\mu}) \in S^1 \times S^1$$

zu, so erhält man einen Homöomorphismus von $\mathbb{C}/\Gamma$ auf den Torus $S^1 \times S^1$.

Definition 5.1.8
Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset X$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : Y \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn für jede Karte $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}$ auf X die Funktion

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$$

im Sinne von Definition 1.4.7 auf der offenen Menge $\varphi(U \cap Y) \subset \mathbb{C}$ holomorph ist. Die Menge aller auf Y holomorphen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(Y)$.

Bemerkungen 5.1.9.

1. *Summe und Produkt holomorpher Funktionen sind wieder holomorph. Konstante Funktionen sind holomorph. Für jede offene Menge $Y \subset X$ wird dadurch $\mathcal{O}(Y)$ zu einer (kommutativen) $\mathbb{C}$-Algebra.*

2. *Es reicht aus, die in der Definition gestellte Bedingung nur für eine Familie von Karten nachzurechnen, die Y überdeckt. Dann gilt sie für alle anderen biholomorph verträglichen Karten automatisch.*

3. *Ist $\varphi : U \to V$ eine Karte auf X, so ist φ insbesondere eine komplexwertige Funktion auf U. Sie ist trivialerweise holomorph. Man nennt φ auch eine lokale Koordinate, lokale Koorinatenfunktion oder Ortsuniformisierende und (U, φ) eine Koordinatenumgebung jedes Punktes in U. In diesem Zusammenhang verwendet man statt des Buchstabens φ auch oft den Buchstaben z.*

Der folgende Satz folgt unmittelbar aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 4.2.9:

Satz 5.1.10 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.**
Sei U eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche und $a \in U$. Die Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ sei in einer gewissen Umgebung von a beschränkt. Dann lässt sich f eindeutig zu einer Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ fortsetzen.

Wir wollen nun Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen auszeichnen:

Definition 5.1.11
Seien X und Y Riemannsche Flächen.

1. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt holomorph, wenn für jedes Paar von Karten $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ auf X und $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ auf Y mit $f(U_1) \subset U_2$ die Abbildung*

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V_2$$

   von Teilmengen von $\mathbb{C}$ holomorph im Sinne von Definition 1.4.7 ist.

2. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt biholomorph, wenn sie bijektiv ist und sowohl $f : X \to Y$ als auch $f^{-1} : Y \to X$ holomorph sind.*

3. *Zwei Riemannsche Flächen X und Y heißen isomorph, wenn es eine biholomorphe Abbildung $f : X \to Y$ gibt.*

Bemerkungen 5.1.12.

1. *Im Spezialfall $Y = \mathbb{C}$ sind offenbar holomorphe Abbildungen $f : X \to Y$ das gleiche wie holomorphe Funktionen auf X.*

2. *Sind X, Y, Z Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ holomorphe Abbildungen, so ist auch die Komposition $g \circ f : X \to Z$ holomorph.*

3. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei Riemannschen Flächen ist genau dann holomorph, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ und jede holomorphe Funktion $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ die "zurückgezogene Funktion"*

$$\varphi \circ f : f^{-1}(V) \to \mathbb{C}$$

in $\mathcal{O}(f^{-1}(V))$ liegt. Dies folgt aus den Definitionen und der vorangegangenen Bemerkung.

Eine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ induziert deshalb eine Abbildung

$$f^* : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(f^{-1}(V)) \ .$$

Man prüft leicht nach, dass dies ein Ringhomomorphismus ist.

Ist $g : Y \to Z$ eine weitere holomorphe Abbildung, $W \subset Z$ offen, $V := g^{-1}(W)$ und $U := f^{-1}(V)$, so ist $(g \circ f)^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(U)$ die Zusammensetzung der Abbildungen $g^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V)$ und $f^* : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$, also

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \ .$$

Satz 5.1.13 (Identitätssatz).
Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f_1, f_2 : X \to Y$ zwei holomorphe Abbildungen, die auf einer Teilmenge $A \subset X$ mit unendlichen vielen Elementen übereinstimmen, die einen Häufungspunkt $a \in X$ besitzt. Dann sind die holomorphen Abbildungen f_1 und f_2 identisch.

Beweis.
Sei G die Menge aller Punkte $x \in X$, die eine Umgebung W besitzen mit $f_1|_W = f_2|_W$. Nach Definition ist G offen. Wir zeigen zunächst, dass G auch abgeschlossen ist. Ist G leer, so ist nichts zu zeigen, wir nehmen daher $G \neq \emptyset$ an.

Sei dazu b ein Randpunkt von G. Aus der Stetigkeit von f_1 und f_2 in b folgt $f_1(b) = f_2(b)$. Es gibt daher Karten $\varphi : U \to V$ auf X und $\varphi' : U' \to V'$ auf Y mit $b \in U$ und $f_i(U) \subset U'$. Indem wir uns auf die Zusammenhangskomponente von U beschränken, die b enthält, dürfen wir annehmen, dass U zusammenhängt.

Die Abbildungen

$$g_i := \varphi' \circ f_i \circ \varphi^{-1} : V \to V' \subset \mathbb{C}$$

sind holomorphe Funktionen auf dem Gebiet $V \subset \mathbb{C}$. Da $U \cap G \neq \emptyset$ stimmen g_1 und g_1 nach dem Identitätssatz Theorem 2.4.2 für analytische Funktionen auf dem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ überein. Deshalb gilt $f_1|_U = f_2|_U$. Daraus folgt aber insbesondere $b \in G$, so dass G auch abgeschlossen ist.

Da X zusammenhängend ist, folgt $G = \emptyset$ oder $G = X$. Der erste Fall kann aber nicht eintreten, da nach Korollar 2.4.3 sicher $a \in G$ gilt. Also stimmen f_1 und f_2 auf ganz X überein. □

Definition 5.1.14
Sei X eine Riemannsche Fläche und Y eine offene Teilmenge von X. Unter einer meromorphen Funktion auf Y versteht man eine auf einer offenen Teilmenge $Y' \subset Y$ definierte holomorphe Funktion $f : Y' \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Die Menge $Y \setminus Y'$ besteht nur aus isolierten Punkten.*

2. *Für jeden Punkt $p \in Y \setminus Y'$ gilt*
$$\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty$$

Die Punkte von $Y \setminus Y'$ heißen <u>*Polstellen*</u> *von f. Die Menge aller auf Y meromorphen Funktionen werde mit $\mathcal{M}(Y)$ bezeichnet.*

Bemerkungen 5.1.15.

1. *Die Definition 5.1.14 verallgemeinert Definition 4.4.1 von Gebieten in $\mathbb{C}$ auf offene Teilmengen Riemannscher Flächen.*

2. *Sei (U, z) eine Koordinatenumgebung einer Polstelle p einer meromorphen Funktion f mit $z(p) = 0$. Dann lässt sich f in einer Umgebung von p in eine Laurentreihe der Form*
$$f = \sum_{\nu=-k}^{\infty} c_\nu z^\nu \quad \textit{mit} \quad c_\nu \in \mathbb{C}$$
entwickeln.

3. *Die Menge $\mathcal{M}(Y)$ der auf Y meromorphen Funktionen ist in natürlicher Weise eine $\mathbb{C}$-Algebra. Die Summe bzw. das Produkt zweier meromorpher Funktionen $f, g \in \mathcal{M}(Y)$ ist zunächst als holomorphe Funktion dort definiert, wo f und g gemeinsam holomorph sind. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 5.1.10 wird dann $f + g$ bzw. $f \cdot g$ über eventuell hebbare Singularitäten fortgesetzt.*

Beispiel 5.1.16.
Sei $n \geq 1$ und
$$F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n \quad \textit{mit} \quad c_k \in \mathbb{C}$$
ein normiertes Polynom. Dann definiert F eine holomorphe Abbildung $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Fasst man $\mathbb{C}$ als Teilmenge von $\mathbb{P}_1$ auf, so erhält man eine Funktion, die auf dem Komplement $\mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\}$ der diskreten Teilmenge $\{\infty\}$ holomorph ist. Es gilt für $z \neq 0$
$$F(z) = z^n \left(1 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_n}{z^n}\right) ,$$
wobei der zweite Faktor für $z \to \infty$ konvergent ist. Daraus folgt $\lim_{z \to \infty} |F(z)| = \infty$. Also ist $F \in \mathcal{M}(\mathbb{P}_1)$.

Wir werden nun allgemeiner meromorphe Funktionen als holomorphe Funktionen in die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}_1$ interpretieren.

Satz 5.1.17.

1. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $f \in \mathcal{M}(X)$. Für eine Polstelle p von f definiere man $f(p) = \infty$. Dann erhält man eine holomorphe Abbildung $f : X \to \mathbb{P}_1$.*

2. *Ist umgekehrt $f : X \to \mathbb{P}$ eine holomorphe Abbildung, so ist entweder f konstant gleich ∞ oder $f^{-1}(\infty)$ besteht nur aus isolierten Punkten und $f : X \setminus f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ ist eine meromorphe Funktion auf X.*

Wir werden von nun ab eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit der ihr zugeordneten holomorphe Abbildung $f : X \to \mathbb{P}_1$ identifizieren.

Beweis.

- Sei $f \in \mathcal{M}(X)$ und P die Polstellenmenge von f. Die durch f definierte Abbildung $f : X \to \mathbb{P}_1$ ist jedenfalls stetig. Seien $\varphi : U \to V$ und $\varphi' : U' \to V'$ beliebige Karten auf X bzw. auf $\mathbb{P}_1$ mit $f(U) \subset U'$. Wir haben zu zeigen, dass

$$g := \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to V'$$

  holomorph ist. Da f auf $X \setminus P$ holomorph ist, folgt, dass g auf $V \setminus \varphi(P)$ holomorph ist. Außerdem ist die Abbildung g stetig und daher lokal beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz Korollar 5.1.10 ist daher g auf ganz V holomorph.

- Für die Umkehrung müssen wir uns nur überlegen, dass $f^{-1}(\infty)$ nur aus isolierten Punkten besteht. Dies folgt aber aus dem Identitätssatz 5.1.13. Nach Definition ist dann f auf dem Komplement eine holomorphe Funktion mit Werten in $\mathbb{C}$. Die zweite Eigenschaft meromorpher Funktionen in Definition 5.1.14 folgt aus der Stetigkeit von f.

□

Bemerkung 5.1.18.
Sei X eine Riemannsche Fläche. Aus dem vorangegangenen Satz 5.1.17 folgt, dass der Identitätssatz 5.1.13 für holomorphe Funktionen $f : X \to \mathbb{P}_1$ einen Identitätssatz für meromorphe Funktionen auf X impliziert. Insbesondere hat eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$, die nicht identisch Null ist, nur isolierte Nullstellen. Damit ist aber $1/f$ für f nicht identitisch Null auch eine meromorphe Funktion und die $\mathbb{C}$-Algebra $\mathcal{M}(X)$ sogar ein Körper, der $\mathbb{C}$ enthält.

5.2 Einfache Eigenschaften holomorpher Abbildungen

Wir werden einige elementare Eigenschaften holomorpher Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen beweisen und zeigen, wie daraus uns schon bekannte Sätze der Funktionentheorie wie der Satz von Liouville 3.4.3 und der Fundamentalsatz der Algebra 3.4.4 einfach folgen.

Wir beschreiben die lokale Gestalt holomorpher Abbildungen.

Satz 5.2.1.
Seien X, Y Riemannsche Flächen, $f : X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung. Sei $a \in X$ und $b := f(a) \in Y$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 1$ und Karten $\varphi : U \to V$ auf X beziehungsweise $\varphi' : U' \to V'$ auf Y mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Die Karten sind zentriert: $a \in U$, $\varphi(a) = 0$ sowie $b \in U'$, $\varphi'(b) = 0$.*

2. *$f(U) \subset U'$*

3. *Für die Abbildung der offenen Menge $V \subset \mathbb{C}$*

$$F : \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to V' \subset \mathbb{C}$$

   gilt $F(z) = z^k$ für alle $z \in V \subset \mathbb{C}$.

Man beachte, dass hier f auf einer ganzen Umgebung von a auf eine einfache Form gebracht wird.

Beweis.

- Zunächst finden wir Karten $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ auf X und $\varphi' : U' \to V'$ auf Y, so dass die Eigenschaften 1. und 2. beide erfüllt sind. Nach dem Identitätssatz 5.1.13 ist die Funktion
$$f_1 := \varphi' \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V' \subset \mathbb{C}$$
nicht konstant und es gilt $f_1(0) = 0$.

- Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass
$$f_1(z) = z^k g(z)$$
gilt, wobei g eine in V_1 holomorphe Funktion mit $g(0) \neq 0$ ist. In einer Umgebung von $g(0)$ ist daher die Argumentsfunktion eine holomorphe Funktion. Wir können daher konsistent eine n-te Wurzel auf dieser Umgebung festlegen, indem wir $1/n$-tel des Arguments betrachten. In einer gewissen Umgebung von $0 \in V_1$ gibt es deshalb eine holomorphe Abbildung h mit $h^k = g$. Die Zuordnung
$$z \mapsto zh(z)$$
liefert eine Abbildung, die wegen
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z \cdot h(z))|_{z=0} = (zh'(z) + h(z))\,|_{z=0} = h(0) \neq 0$$
auf einer offenen Umgebung $V_2 \subset V_1$ der Null eine biholmorphe Abbildung
$$\alpha : V_2 \to V \quad ,$$
auf eine offene Umgebung V der Null liefert. Wir schließen aus $\alpha(w) = wh(w)$, dass gilt
$$\alpha(w)^k = \ w^k g(w) \ .$$
Setzen wir $w = \alpha^{-1}(z)$, so finden wir
$$z^k = \ \alpha^{-1}(z)^k g(\alpha^{-1}(z)) \ .$$

- Sei $U := \varphi_1^{-1}(V_2)$. Wir ersetzen nun die Karte $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ durch die verbesserte Karte $\varphi : U \to V$ mit $\varphi := \alpha \circ \varphi_1|_U$. Für die Abbildung $F := \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ gilt dann nach Konstruktion
$$F(z) = \varphi' \circ f \circ \varphi_1^{-1} \circ \alpha^{-1}(z) = f_1 \circ \alpha^{-1}(z) = (\alpha^{-1}(z))^k g(\alpha^{-1}(z)) = z^k \ .$$

$\square$

Bemerkung 5.2.2.
Wir wissen, dass die ganze Funktion $z \mapsto z^k$ für jedes $w \neq 0$ genau k Urbilder mit $z^j = w$ hat. Die Zahl k in Satz 5.2.1 kann daher folgendermaßen charakterisiert werden: zu jeder Umgebung U_0 von a gibt es Umgebungen $U \subset U_0$ von a und W von $b = f(a)$, so dass für jeden Punkt $y \in W \setminus \{b\}$ die Menge $f^{-1}(y) \cap U$ genau k verschiedene Elemente hat. Man nennt k die Vielfachheit, mit der die Abbildung f den Wert b im Punkt a annimmt.

Beispiel 5.2.3.
Sei

$$f(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \ldots + c_k$$

ein Polynom k-ten Grades. Dann kann f nach Beispiel 5.1.16 als holomorphe Abbildung $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ mit $f(\infty) = \infty$ angesehen werden. Durch Benutzung der Karte

$$\varphi(z) = 1/z \text{ für } z \neq 0, \infty \qquad \text{und} \quad \varphi(\infty) = 0$$

um ∞ findet man

$$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \frac{1}{z^{-k} + c_1 z^{-k+1} + \ldots + c_k} = z^k \cdot \left(1 + c_1 z + \ldots + c_k z^k\right)^{-1} .$$

Der zweite Faktor ist offenbar eine Funktion, die in einer Umgebung von 0 holomorph ist und die in Null nicht den Wert Null annimmt. Es folgt, dass der Wert ∞ an der Stelle mit der Vielfachheit k angenommen wird.

Korollar 5.2.4.
Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann ist f offen, d.h. das Bild jeder offenen Menge ist offen.

Beweis.
Aus Satz 5.2.1 folgt unmittelbar: ist U Umgebung eines Punktes $a \in X$, so ist $f(U)$ Umgebung des Punktes $f(a)$. Daraus ergibt sich die Offenheit der Abbildung. □

Korollar 5.2.5.
Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine injektive holomorphe Abbildung. Dann liefert f eine biholomorphe Abbildung von X auf $f(X)$.

Beweis.
Ist f injektiv, so muss in der lokalen Beschreibung von Satz 5.2.1 für alle Punkte $k = 1$ sein. In lokalen Koordinaten ist f also die Identität. Deshalb ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(X) \to X$ auch holomorph. □

Korollar 5.2.6 (Maximumsprinzip)**.**
Sei X eine Riemannsche Fläche und $f : X \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Dann nimmt f das Maximum seines Betrags nicht an.

Beweis.
Angenommen, es gebe einen Punkt $a \in X$ mit

$$|f(a)| = \sup\{|f(x)| : x \in X\} =: R$$

Es gilt dann

$$f(X) \subset \overline{D_R(0)}$$

Da $f(X)$ nach Korollar 5.2.4 offen ist, liegt $f(X)$ ganz im Innern der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_R(0)}$. Dies ist im Widerspruch zu $f(a) \in \partial D_R(0)$. □

Satz 5.2.7.
Seien X, Y Riemannsche Flächen, X sei kompakt *und $f : X \to Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann ist Y kompakt und f surjektiv.*

Beweis.
Nach Korollar 5.2.4 ist $f(X)$ offen. Da X kompakt sein soll und f insbesondere stetig ist, ist $f(X)$ kompakt und somit insbesondere abgeschlossen. Da in einem zusammenhängenden Raum die einzigen offenen und abgeschlossenen Mengen die leere Menge und der gesamte Raum sind, folgt $f(X) = Y$. Also ist f surjektiv und Y kompakt als stetiges Bild eines Kompaktums. □

Korollar 5.2.8.
Auf einer kompakten *Riemannschen Fläche ist jede holomorphe Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ konstant.*

Beweis.
Dies folgt aus Satz 5.2.7, weil $\mathbb{C}$ nicht kompakt ist. □

Auf kompakten Riemannschen Flächen gibt es also nur wenige global definierte holomorphe Funktionen. Wir untersuchen nun im speziellen Fall der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}_1$ die Situation für meromorphe Funktionen, bei denen wir Pole zulassen:

Korollar 5.2.9.
Jede meromorphe Funktion f auf $\mathbb{P}_1$ ist eine rationale Funktion, d.h. Quotient zweier polynomialer Funktionen.

Beweis.
Die Funktion f hat nur endlich viele Pole. Denn andernfalls hätten die Polstellen wegen der Kompaktheit von $\mathbb{P}_1$ einen Häufungspunkt, und f müsste nach dem Identitätssatz 5.1.13 konstant gleich ∞ sein. Wir wollen zunächst annehmen, dass in ∞ kein Pol von f liegt.

Seien also $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{C}$ die Polstellen von f und

$$h_\nu(z) := \sum_{j=-k_\nu}^{-1} c_{\nu j}(z - a_\nu)^j$$

für $\nu = 1, \ldots n$ der Hauptteil von f in a_ν. Die Funktionen h_ν sind außerhalb eines Kreisrings um a_ν holomorph. Daher ist die Funktion

$$g := f - (h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$$

auf ganz $\mathbb{P}_1$ holomorph, also nach Korollar 5.2.8 konstant. Daraus folgt durch Auflösen nach f, dass f rational ist.

Hat f einen Pol an der Stelle ∞, gilt also $\omega(f; \infty) < 0$, so hat die Funktion $1/f$ an der Stelle ∞ eine Nullstelle, da $\omega(1/f; \infty) = -\omega(f; \infty) > 0$ gilt. Wir finden daher, dass $1/f$ eine rationale Funktion ist; somit ist auch f eine rationale Funktion. □

Wir bringen noch einmal einen Beweis des Satzes von Liouville 3.4.3

Satz 5.2.10 (Satz von Liouville)**.**
Jede beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.

Beweis.
Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 5.1.10 lässt sich f zu einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{C}$ fortsetzen, die nach Korollar 5.2.8 konstant ist. $\square$

Wir beweisen auch noch einmal den Fundamentalsatz der Algebra 3.4.4:

Satz 5.2.11 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Sei $n \geq 1$ *und*

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$$

ein Polynom mit Koeffizienten $c_\nu \in \mathbb{C}$*. Dann gibt es wenigstens ein* $a \in \mathbb{C}$ *mit* $f(a) = 0$*.*

Beweis.
Das Polynom f lässt sich nach Beispiel 5.1.16 als meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}_1$ und somit nach Satz 5.1.17 als holomorphe Abbildung $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ mit $f(\infty) = \infty$ auffassen. Nach Satz 5.2.7 ist diese Abbildung surjektiv, also ist $0 \in f(\mathbb{C})$. $\square$

Definition 5.2.12
Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ *über* $\mathbb{R}$ *linear unabhängige Vektoren und* $\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ *das von ihnen aufgespannte Gitter in der komplexen Ebene. Eine meromorphe Funktion* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ *heisst doppeltperiodisch bezüglich* Γ*, falls*

$$f(z) = f(z + \omega) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \ \text{ und } \ \omega \in \Gamma$$

gilt.

Satz 5.2.13.

1. *Jede doppeltperiodische* holomorphe *Funktion* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist konstant.*
2. *Jede nichtkonstante doppeltperiodische* meromorphe *Funktion* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ *nimmt jeden Wert* $c \in \mathbb{P}_1$ *an.*

Beweis.

- Sei $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Quotientenabbildung aus Beispiel 5.1.7 4. Dann induziert die doppeltperiodische meromorphe Funktion f eine Funktion

$$F : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}_1$$

  mit $f = F \circ \pi$. Aus der Definition der komplexen Struktur von $\mathbb{C}/\Gamma$ in Beispiel 5.1.7 4. folgt unmittelbar, dass F eine meromorphe Funktion auf dem Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ ist.

- Geht man umgekehrt von einer meromorphen Funktion $F : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}_1$ aus, so ist die Komposition $f = F \circ \pi : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ eine bezüglich dem Gitter Γ doppeltperiodische meromorphe Funktion. Die meromorphen Funktionen auf dem Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den bezüglich Γ doppeltperiodischen meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$.

- Da $\mathbb{C}/\Gamma$ kompakt ist, folgt der erste Teil des Satzes aus Korollar 5.2.8 und der zweite Teil, da meromorphe Funktionen nach Satz 5.1.17 holomorphe Funktionen $\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}_1$ sind, aus der Surjektivitätsaussage in Satz 5.2.7

$\square$

5.3 Verzweigte und unverzweigte Überlagerungen

Die nicht-konstanten holomorphen Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen sind sehr spezielle Abbildungen der zu Grunde liegenden topologischen Räume.

Definition 5.3.1

1. *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p : Y \to X$ heißt diskret, wenn das Urbild $p^{-1}(x)$ jedes Punktes $x \in X$ eine diskrete Teilmenge von Y ist.*

2. *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p : Y \to X$ heißt Überlagerung(sabbildung) falls sie stetig, offen und diskret ist.*

3. *Ist $y \in Y$ und $x := p(y)$, so sagen wir, der Punkt y liege über x und der Punkt x sei der Grundpunkt oder Spurpunkt von y.*

4. *Sind $p : Y \to X$ und $q : Z \to X$ zwei Überlagerungen von X, so nennt man eine Abbildung $f : Y \to Z$ spurtreu , wenn $p = q \circ f$ gilt. Das bedeutet gerade, dass ein Punkt $y \in Y$, der über $x \in X$ liegt, auf einen Punkt $z \in Z$ abgebildet wird, der ebenfalls über x liegt.*

Satz 5.3.2.
Seien X und Y Riemannsche Flächen und $p : Y \to X$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann ist p eine Überlagerungsabbildung.

Beweis.
Die Abbildung p ist natürlich stetig und nach Korollar 5.2.4 auch offen. Wäre das Urbild eines Punktes $a \in X$ nicht diskret, so müsste p nach dem Identitätssatz 5.1.13 konstant gleich a sein. $\square$

Wir führen folgende Sprechweisen ein:

Definition 5.3.3

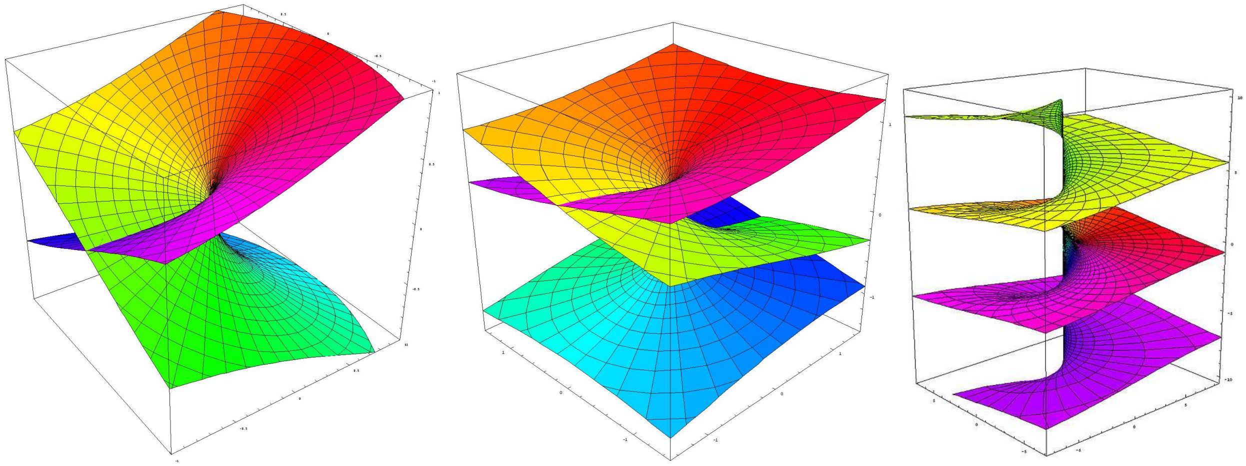
1. *Ist $p : Y \to X$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung, so nennt man Y ein Gebiet über X.*

2. *Eine holomorphe (bzw. meromorphe) Funktion $f : Y \to \mathbb{C}$ (bzw. $f : Y \to \mathbb{P}_1$) bezeichnet man als mehrdeutige holomorphe (meromorphe) Funktion auf X. Ist $x \in X$ und $p^{-1}(x) = \{y_j \mid j \in J\}$, so sind $f(y_j)$ die verschiedenen Werte dieser mehrdeutigen Funktion über dem Punkt x.*

Beispiel 5.3.4.
Sei etwa $Y = \mathbb{C}$ und $X = \mathbb{C}^*$ und $p = \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Dann entspricht der identischen Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der mehrdeutige Logarithmus auf $\mathbb{C}^*$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^* \arrow[ur, dashed, "\log"'] & \end{tikzcd}$$

Denn für $b \in \mathbb{C}^*$ besteht die Menge $\exp^{-1}(b)$ genau aus den verschiedenen Werten des Logarithmus von b. In Bildern: wir zeigen die Überlagerungsflächen für $z \mapsto z^2$, $z \mapsto z^2$ und $z \mapsto \exp(z)$



Definition 5.3.5
Seien X, Y topologische Räume und $p : Y \to X$ eine Überlagerung.

1. Ein Punkt $y \in Y$ heißt Verzweigungspunkt von p, wenn es keine Umgebung V von y gibt, so dass $p|_V$ injektiv ist.

2. Eine Abbildung p heißt unverzweigt , falls sie keine Verzweigungspunkte besitzt.

Satz 5.3.6.
Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p : Y \to X$ ist genau dann eine unverzweigte Überlagerung, wenn p lokal topologisch ist, d.h. wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung besitzt, die durch p homöomorph auf eine offene Teilmenge U von X abgebildet wird.

Beispiele 5.3.7.
1. *Sei k eine natürliche Zahl ≥ 2 und die holomorphe Überlagerungsabbildung $p_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $p_k(z) = z^k$ definiert. Dann ist 0 der einzige Verzweigungspunkt von p_k. Die Abbildung $p_k|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ist unverzweigt.*

2. *Sei $p : Y \to X$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung, $y \in Y$ und $x := p(y)$. Dann ist y Verzweigungspunkt von p genau dann, wenn die Abbildung p den Wert x in y mit einer Vielfachheit $k \geq 2$ annimmt. Denn nach Satz 5.2.1 verhält sich dann p lokal um y wie die Abbildung p_k um den Nullpunkt.*

Satz 5.3.8.
Sei X eine Riemannsche Fläche, Y ein Hausdorff-Raum und $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerungsabbildung. Dann gibt es genau eine komplexe Struktur auf Y, so dass p holomorph wird.

Beweis.
Dazu setzen wir geeignet gewählte komplexe Karten $\varphi : U \to V$ von X mittels eines lokalen Hömömorphismus $p_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ zu einer Karte $\varphi \circ p$ von Y mit Definitionsgebiet $\tilde{U} \subset Y$ fort und erhalten so einen komplexen Atlas von Y. □

Definition 5.3.9
Seien X, Y, Z topologische Räume, $p : Y \to X$ eine Überlagerung und $f : Z \to X$ eine stetige Abbildung. Unter einer <u>*Liftung*</u> *von f bezüglich p versteht man eine stetige Abbildung $g : Z \to Y$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Die folgenden Sätze sind für uns wesentlich:

Satz 5.3.10.
1. *(Eindeutigkeit der Liftung)*
   Seien X, Y Hausdorff-Räume und $p : Y \to X$ eine unverzweigte *Überlagerung. Sei Z ein zusammenhängender topologischer Raum und $f : Z \to X$ eine stetige Abbildung. Sind dann $g_1, g_2 : Z \to Y$ zwei Liftungen von f und gilt $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ für einen Punkt $z_0 \in Z$, so ist $g_1 = g_2$.*

2. *(Holomorphie der Liftung)*
   Seien X, Y, Z Riemannsche Flächen und $p : Y \to X$ eine holomorphe unverzweigte *Überlagerung. Sei $f : Z \to X$ eine holomorphe Abbildung. Dann ist jede Liftung $g : Z \to Y$ von f holomorph.*

   Insbesondere sind spurtreue stetige Abbildungen $f : Y \to Z$ zwischen unverzweigten holomorphen Überlagerungen $p : Y \to X$ und $q : Z \to X$ holomorph. Denn f ist eine Liftung von p bezüglich q:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

Besonders wichtig für uns ist die Liftung von Kurven $\gamma : [0, 1] \to X$. Es ist nach Satz 5.3.10.1 klar, dass eine solche Liftung, wenn sie existiert, eindeutig durch die Liftung des Anfangspunktes bestimmt ist.

Satz 5.3.11 (Liftung homotoper Kurven)**.**
Seien X, Y Hausdorff-Räume und $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerung. Seien $a, b \in X$ und $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to X$ zwei Kurven mit Anfangspunkt a und Endpunkt b. Sei

$$\varphi : [0, 1] \times J \to X$$

eine Homotopie von γ_0 nach γ_1, die den Anfangs- und Endpunkt festlässt.

Sei $\hat{a} \in Y$ mit $p(\hat{a}) = a$. Jede Kurve $\varphi(-, s) : [0, 1] \to X$ in X lasse sich zu einer Kurve $\hat{\varphi}(-, s) : [0, 1] \to Y$ in Y mit Anfangspunkt $\hat{a}$ liften.

Dann haben die Kurven $\hat{\gamma}_0 = \hat{\varphi}(-, 0)$ und $\hat{\gamma}_1 = \hat{\varphi}(-, 1)$ denselben Endpunkt und sind homotop.

Definition 5.3.12
Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p : Y \to X$ heißt <u>*unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung*</u>*, wenn gilt:*
Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung U, so dass sich das Urbild $p^{-1}(U)$ darstellen lässt als Vereinigung

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

paarweise disjunkter offener Teilmengen von Y, wobei alle Abbildungen $p|_{V_j} : V_j \to U$ Homöomorphismen sind.

Bemerkungen 5.3.13.

1. *Es ist klar, dass dann p insbesondere lokal topologisch, also nach Satz 5.3.6 unverzweigt im Sinne von Definition 5.3.5.2 ist.*

   Die kanonische Einbettung $D_1(0) \hookrightarrow \mathbb{C}$ der offenen Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ist unverzweigt, aber nicht unbegrenzt: für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ existiert keine offene Umgebung mit der geforderten Eigenschaft.

2. *In der Topologie versteht man unter einer Überlagerung meist das, was wir hier als unverzweigte unbegrenzte Überlagerung bezeichnen. In der Funktionentheorie (und auch in der Zahlentheorie) sind insbesondere verzweigte Überlagerungen jedoch unabdingbar.*

Die Bedeutung des Begriffs macht der folgende Satz deutlich:

Satz 5.3.14.
Jede unverzweigte, unbegrenzte Überlagerungsabbildung $p : Y \to X$ topologischer Räume X, Y besitzt die sogenannte Kurvenliftungseigenschaft: zu jeder Kurve $\gamma : [0,1] \to X$ in X und jedem Punkt $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = \gamma(0)$ gibt es einen Lift $\hat{\gamma} : [0,1] \to Y$ von γ mit $\hat{\gamma}(0) = y_0$.

Satz 5.3.15.
Seien X, Y Hausdorff-Räume, X wegzusammenhängend und $p : Y \to X$ eine unverzweigte, unbegrenzte Überlagerung. Dann sind für je zwei Punkte $x_0 \in X$ und $x_1 \in X$ die Mengen $p^{-1}(x_0)$ und $p^{-1}(x_1)$ gleichmächtig.

Man bezeichnet die Mächtigkeit von $p^{-1}(x)$ für $x \in X$ als die <u>Blätterzahl</u> der Überlagerung. Sie kann endlich oder unendlich sein.

Beweis.
Wir konstruieren folgendermaßen eine Bijektion $\phi : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$: Weil X wegzusammenhängend sein soll, wählen wir eine Kurve $\gamma : [0,1] \to X$, die x_0 und x_1 verbindet. Für jede Liftung $\hat{\gamma}_y$ von γ mit Anfangspunkt $y \in p^{-1}(x_0)$ erhalten wir einen Endpunkt $\hat{\gamma}(1) \in p^{-1}(x_1)$. Wir setzen dann $\varphi(y) = \hat{\gamma}_y(1)$. Aus der Eindeutigkeit der Liftung folgt leicht die Bijektivität von ϕ. □

Satz 5.3.16.
Ist X überdies eine Mannigfaltigkeit, Y ein Hausdorff-Raum und $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerung mit der Kurvenliftungseigenschaft. Dann ist p unbegrenzt.

Wir spezialisieren nun unsere Betrachtung auf Situationen, wo uns durch Kompaktheitsargumente zusätzliche Hilfsmittel zur Verfügung stehen.

Definition 5.3.17

1. *Ein lokal-kompakter topologischer Raum ist ein Hausdorff-Raum, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.*

2. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei lokal-kompakten Räumen heißt eigentlich, wenn das Urbild jeder kompakten Menge kompakt ist.*

Bemerkungen 5.3.18.

1. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei lokal kompakten topologischen Räumen. Ist X kompakt, so ist f stets eigentlich.*

2. *In einem lokal-kompakten Raum ist eine Teilmenge genau dann abgeschlossen, wenn ihr Durchschnitt mit jeder kompakten Menge kompakt ist.*

3. *Hieraus schließt man leicht, dass jede eigentliche Abbildung auch abgeschlossen ist: das Bild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.*

Lemma 5.3.19.
Seien X, Y lokal-kompakte Räume und $p : X \to Y$ eine eigentliche Überlagerungsabbildung. Dann gilt:

1. *Für jeden Punkt $x \in X$ ist die Menge $p^{-1}(x)$ endlich.*

2. *Sei $x \in X$ und V eine Umgebung der Menge $p^{-1}(x)$. Dann existiert eine Umgebung U von x mit $p^{-1}(U) \subset V$.*

3. *Sei X zusammenhängend und Y nicht-leer. Dann ist p surjektiv.*

Beweis.

1. Die Menge $p^{-1}(x)$ ist eine kompakte und diskrete Teilmenge von Y und somit endlich.

2. Nachdem wir gegebenenfalls V verkleinert haben, dürfen wir annehmen, dass V offen, also $Y \setminus V$ abgeschlossen ist. Da p als eigentliche Abbildung abgeschlossen ist, ist auch $p(Y \setminus V) =: A$ in X abgeschlossen und es gilt $x \notin A$. Daher ist $U := X \setminus A$ eine offene Umgebung von x mit $p^{-1}(U) \subset V$.

3. Die Menge $p(Y)$ ist offen und abgeschlossen sowie nicht leer. Da X zusammenhängend ist, folgt $p(Y) = X$.

□

Hieraus folgt mit Methoden der mengentheoretischen Topologie:

Satz 5.3.20.
Seien X, Y lokal-kompakte Räume und $p : Y \to X$ eine eigentliche, unverzweigte Überlagerungsabbildung. Dann ist p eine unbegrenzte Überlagerung.

Betrachtung 5.3.21.

1. *Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine eigentliche, nicht-konstante holomorphe Abbildung. Aus Satz 5.2.1 folgt, dass die Menge $A \subset X$ der Verzweigungspunkte abgeschlossen und diskret ist. Da f eigentlich ist, ist auch $B := f(A)$ abgeschlossen und diskret. Man nennt B die Menge der kritischen Werte von f.*

2. *Wir nehmen nun diese Menge aus der Betrachtung heraus. Sei $Y' := Y \setminus B$ und $X' := X \setminus f^{-1}(B)$. Dann ist die Einschränkung $f|_{X'} : X' \to Y'$ eine eigentliche unverzweigte holomorphe Überlagerung. Sie ist nach Satz 5.3.16 unbegrenzt. Daher ist nach Satz 5.3.15 die Blätterzahl konstant und nach Lemma 5.3.19.1 endlich.*

3. *Dies bedeutet, dass jeder Wert $c \in Y'$ genau n-mal angenommen wird. Um diese Aussage auch auf die kritischen Werte $b \in B$ ausdehnen zu können, müssen wir die Vielfachheit im Sinne von Bemerkung 5.2.2 berücksichtigen.*

   Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $v(f,x)$ die Vielfachheit mit der f in x den Wert $f(x)$ annimmt. Wir sagen, dass f auf der Riemannschen Fläche X den Wert $c \in Y$ mit Vielfachheit gerechnet m-mal annimmt, falls

$$m = \sum_{x \in p^{-1}(c)} v(f,x)$$

   gilt.

Satz 5.3.22.
Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine eigentliche, nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, so dass f jeden *Wert $c \in Y$ mit Vielfachheit gerechnet n-mal annimmt.*

Beweis.
Sei n die Blätterzahl der unverzweigten Überlagerung $f|_{X'} : X' \to Y'$. Sei $b \in B$ ein kritischer Wert,

$$p^{-1}(b) = \{x_1, x_2, \ldots x_r\}$$

und $k_j := v(f, x_j)$ die Vielfachheit von f in x_j. Nach Satz 5.2.1 finden wir disjunkte Umgebungen U_j von x_j und V_j von b, so dass für jedes $c \in V_j \setminus \{b\}$ die Menge $p^{-1}(c) \cap U_j$ aus genau k_j Punkten besteht.

Nach Lemma 5.3.19. 2 können wir eine Umgebung $V \subset V_1 \cap \ldots \cap V_r$ von b mit $p^{-1}(V) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_r$ finden. Für jeden Punkt $c \in V \cap Y'$ besteht dann $p^{-1}(c)$ aus $k_1 + k_2 + \ldots + k_r$ Punkten. Andererseits ist für $c \in Y'$ die Mächtigkeit $|p^{-1}(c)| = n$. Daraus folgt $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$. □

Korollar 5.3.23.
Auf einer kompakten Riemannschen Fläche X hat jede nicht-konstante meromorphe Funktion $f : X \to \mathbb{P}_1$ ebenso viele Nullstellen wie Pole, jeweils mit Vielfachheit gerechnet.

Beweis.
Wegen der Kompaktheit von X ist f eigentlich, so dass die Aussage aus Satz 5.3.22 folgt. □

Korollar 5.3.24.
Ein Polynom n-ten Grades

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n \in \mathbb{C}[z]$$

hat mit Vielfachheit gerechnet genau n Nullstellen.

Beweis.
Wir fassen wie in Beispiel 5.2.3 die Abbildung als eine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ auf, die den Wert in ∞ mit Vielfachheit n annimmt. □

5.4 Garben und analytische Fortsetzungen

In der Funktionentheorie hat man es häufig mit Funktionen mit wechselnden Definitionsbereichen zu tun. Um diese Situation zu behandeln, führen wir die folgenden Begriffe ein:

Definition 5.4.1
Sei X ein topologischer Raum und Ω das System seiner offenen Teilmengen.

1. *Eine Prägarbe abelscher Gruppen auf X ist ein Paar $(\mathcal{F}, \rho)$ bestehend aus*

   (a) *Einer Familie $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \Omega}$ abelscher Gruppen.*

   (b) *Einer Familie von Gruppenhomomorphismen: für $V \subset U$, mit U und V offen in M haben wir einen Gruppenhomomorphismus*

   $$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

   mit den beiden Eigenschaften

   i. *$\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ für alle $U \in \Omega$*

   ii. *Für $W \subset V \subset U$ gilt*

   $$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U \ .$$

   Wir schreiben auch $f|_V = \rho_V^U(f)$ für $f \in \mathcal{F}(U)$ und nennen die Gruppenhomomorphismen ρ_V^U Beschränkungshomomorphismen.

2. *Eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X heißt Garbe, wenn für jede offene Menge $U \subset X$ und jede Familie offener Teilmengen $U_i \subset U$, $i \in I$, mit $U = \cup_{i \in I}$ die beiden Garbenaxiome erfüllt sind:*

   (a) *Für $f, g \in \mathcal{F}(U)$ folgt aus $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ für alle $i \in I$ die Gleichheit $f = g$.*

   (b) *Seien Elemente $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ für alle $i \in I$ vorgegeben mit*

   $$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{für alle Paare } i, j \in I \ .$$

   Dann existiert ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$.

Beispiele 5.4.2.

1. *Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Für eine offene Teilmenge $U \subset X$ sei $\mathcal{C}(U)$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ und ρ_V^U die gewöhnliche Beschränkungsabbildung. Dann ist $(\mathcal{C}, \rho)$ eine Garbe von komplexen Vektorräumen auf X.*

2. *Sei X Riemannsche Fläche und $\mathcal{O}(U)$ der Ring der auf einer offenen Teilmenge U holomorphen Funktionen. Diese Ringe bilden, wiederum mit der gewöhnlichen Beschränkungsabbildung, eine Ringgarbe $\mathcal{O}$ auf X. Ähnlich definiert man die Garbe $\mathcal{M}$ der meromorphen Funktionen auf X.*

Definition 5.4.3

1. *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von Mengen auf einem topologischen Raum X und $a \in X$ ein Punkt. Auf der disjunkten Vereinigung*
$$\bigsqcup_{U \ni a} \mathcal{F}(U)$$
über alle offenen Umgebungen U von a führen wir die folgende Äquivalenzrelation $\sim_a$ ein. Für $f \in \mathcal{F}(U)$ und $g \in \mathcal{F}(V)$ setzen wir $f \sim_a g$ genau dann, wenn eine offene Menge W mit $a \in W \subset U \cap V$ existiert, so dass $f|_W = g|_W$. Man prüft leicht nach, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt.

2. *Die Menge $\mathcal{F}_a$ aller Äquivalenzklassen, der sogenannte induktive Limes,*
$$\mathcal{F}_a := \lim_{U \ni a} \mathcal{F}(U) = \bigsqcup_{U \ni a} \mathcal{F}(U) / \sim_a$$
heißt der Halm von $\mathcal{F}$ im Punkt a. Ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen (Vektorräumen, Ringen,...), so wird auch der Halm $\mathcal{F}_a$ für jedes $a \in X$ durch repräsentantenweise Verknüpfung eine abelsche Gruppe (ein Vektorraum, ein Ring,...).

3. *Für eine offene Umgebung U von a sei*
$$\rho_a : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_a$$
die Abbildung, die $f \in \mathcal{F}(U)$ seine Äquivalenzklasse $\rho(f)$ zuordnet. Diese heißt der Keim von f in a.

Beispiel 5.4.4.
Als Beispiel betrachten wir die Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionen auf einem Gebiet $X \subset \mathbb{C}$. Sei $a \in X$. Ein holomorpher Funktionskeim $\varphi \in \mathcal{O}_a$ wird durch eine holomorphe Funktion in einer offenen Umgebung von a repräsentiert, lässt sich also in einer Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$ mit positivem Konvergenzradius entwickeln.

Zwei Funktionen in Umgebungen stimmen nach dem Eindeutigkeitssatz Korollar 2.2.7 genau dann überein, wenn sie dieselbe Potenzreihenentwicklung um a besitzen. Jede lokale Koordinate z liefert daher einen (nicht-kanonischen) Ringisomorphismus zwischen dem Halm $\mathcal{O}_a$ und dem Ring $\mathbb{C}\{z-a\}$ aller konvergenten Potenzreihen in $z-a$ mit komplexen Koeffizienten. Analog ist der Ring $\mathcal{M}_a$ der meromorphen Funktionskeime in a isomorph zum Ring aller konvergenten Laurent-Reihen
$$\sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu \ ,$$
$k \in \mathbb{Z}$ und $c_\nu \in \mathbb{C}$, mit endlichem Hauptteil.

Für einen Funktionskeim $\varphi \in \mathcal{O}_a$ ist der Funktionswert $\varphi(a)$ wohldefiniert, erlaubt aber natürlich nicht, den Funktionskeim festzulegen.

Lemma 5.4.5.
Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum X und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Ein Element $f \in \mathcal{F}(U)$ ist genau dann gleich Null, wenn alle Keime $\rho_x(f) \in \mathcal{F}_x$ für alle $x \in U$ verschwinden.

Beweis.
Dies folgt unmittelbar aus dem ersten Garbenaxiom. □

Definition 5.4.6
Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Sei

$$|\mathcal{F}| := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

die disjunkte Vereinigung aller Halme der Garbe $\mathcal{F}$. Mit

$$p : |\mathcal{F}| \to X$$

bezeichnen wir die Abbildung, die einem Element $\varphi \in \mathcal{F}_x$ den Punkt x zuordnet. Wir machen $|\mathcal{F}|$ zum topologischen Raum, indem wir für jede offene Teilmenge $U \subset X$ und jedes $f \in \mathcal{F}(U)$ die Menge

$$[U, f] := \{\rho_x(f) \mid x \in U\} \subset |\mathcal{F}|$$

als Basis einer Topologie erklären. Diese Mengen haben in der Tat die beiden definierenden Eigenschaften einer Basis:

1. *Jedes Element $\varphi \in |\mathcal{F}|$ ist in wenigstens einem $[U, f]$ enthalten. Dies ist aber eine triviale Folge der Definition eines Funktionskeims: wir erhalten U und f durch die Wahl eines Repräsentanten von φ.*

2. *Sei $\varphi \in [U, f] \cap [V, g]$, so müssen wir zeigen, dass ein $[W, h]$ in der Basis existiert mit $\varphi \in [W, h] \subset [U, f] \cap [V, g]$.*

   Dazu sei $p(\varphi) =: x$. Dann ist $x \in U \cap V$ und $\varphi = \rho_x(f) = \rho_x(g)$. Nach der Definition der Äquivalenzrelation für Keime existiert eine offene Umgebung $W \subset U \cap V$ von x mit $f|_W = g|_W =: h$. Daraus folgt $\varphi \in [W, h] \subset [U, f] \cap [V, g]$.

Wir definieren die Topologie auf $|\mathcal{F}|$ dadurch, dass die offenen Mengen genau die Vereinigungen von Mengen aus der Basis sind. Der topologische Raum $|\mathcal{F}|$ heißt der einer Prägarbe zugeordnete Überlagerungsraum.

Bemerkungen 5.4.7.

1. *Die Projektion $p : |\mathcal{F}| \to X$ ist lokal topologisch, d.h. eine unverzweigte Überlagerung.*

2. *Man sagt, eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X genüge dem Identitätssatz, wenn gilt: ist $Y \subset X$ ein Gebiet und sind $f, g \in \mathcal{F}(Y)$ Elemente, deren Keime $\rho_a(f)$ und $\rho_a(g)$ in einem Punkt $a \in Y$ übereinstimmen, so gilt $f = g$.*

   Dies gilt für die Garben $\mathcal{O}$ der holomorphen bzw. $\mathcal{M}$ der meromorphen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche X nach Satz 5.1.13 bzw. Bemerkung 5.1.18.

3. *Sei X ein lokal zusammenhängender Hausdorffraum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X, die dem Identitätssatz genügt. Dann ist der topologische Raum $|\mathcal{F}|$ Hausdorffsch.*

Wir kommen jetzt zur Konstruktion der Riemannschen Flächen von Funktionen, die durch analytische Fortsetzung eines Funktionskeims entstehen.

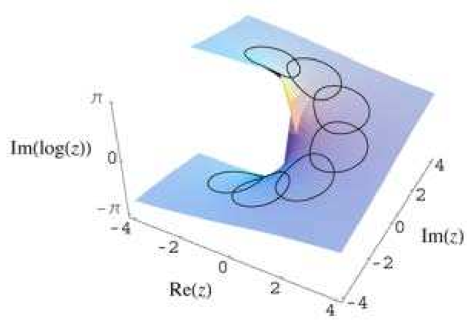
Definition 5.4.8
Sei X eine Riemannsche Fläche, $\gamma : [0,1] \to X$ eine Kurve mit Anfangspunkt $a = \gamma(0)$ und Endpunkt $b = \gamma(1)$. Man sagt, ein holomorpher Funktionskeim $\psi \in \mathcal{O}_b$ gehe durch analytische Fortsetzung längs der Kurve γ aus dem holomorphen Funktionskeim $\varphi \in \mathcal{O}_a$ hervor, falls gilt:

Es gibt eine Familie von Funktionskeimen $\varphi_t \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ mit $t \in [0,1]$ mit $\varphi_0 = \varphi$ und $\varphi_1 = \psi$, mit der Eigenschaft: zu jedem $\tau \in [0,1]$ existiert eine Umgebung $T \subset [0,1]$ von τ, eine offene Menge $U \subset X$ mit $\gamma(T) \subset U$ und eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$\rho_{\gamma(t)}(f) = \varphi_t \quad \text{für alle} \quad t \in T \ .$$

Dabei ist natürlich $\rho_{\gamma(t)}(f)$ der Keim von f im Punkt $\gamma(t)$.

Wir schauen uns das im Bild die analytische Fortsetzung des Logarithmus an:



Bemerkung 5.4.9.
Wegen der Kompaktheit von $[0,1]$ ist die Bedingung in Definition 5.4.8 äquivalent zu der folgenden Bedingung: es gibt eine Unterteilung $= t_0 < t_1 < \ldots t_{n-1} < t_n = 1$ des Intervalls, Gebiete $U_i \subset X$ mit $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$ und holomorphe Funktionen $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ mit $i = 1, \ldots n$, so dass gilt:

1. *φ ist der Keim von f_1 im Anfangspunkt a und ψ ist der Keim von f_n im Endpunkt b.*
2. *$f_i|_{V_i} = f_{i+1}|_{V_i}$ für $i = 1, \ldots n-1$. Dabei ist V_i die Zusammenhangskomponente von $U_i \cap U_{i+1}$, die den Punkt $\gamma(t_i)$ enthält.*

Die Punkte des Überlagerungsraums $|\mathcal{O}|$ sind ja gerade holomorphe Funktionskeime. Wir interpretieren daher die analytische Fortsetzung längs der Kurve mit Hilfe der aus der Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionen konstruierten Überlagerung $p : |\mathcal{O}| \to X$.

Lemma 5.4.10.
Sei X eine Riemannsche Fläche und $\gamma : [0,1] \to X$ eine Kurve mit Anfangspunkt $a = \gamma(0)$ und Endpunkt $b = \gamma(1)$. Dann ist der Funktionskeim $\psi \in \mathcal{O}_b$ genau dann eine analytische Fortsetzung eines Funktionskeims $\varphi \in \mathcal{O}_a$ längs γ, wenn es eine Liftung $\hat\gamma : [0,1] \to |\mathcal{O}|$ der Kurve γ gibt mit $\hat\gamma(0) = \varphi$ und $\hat\gamma(1) = \psi$.

Wegen der Eindeutigkeit der Liftung aus Satz 5.3.10.1 folgt aus Lemma 5.4.10, dass die analytische Fortsetzung eines Funktionskeims längs einer Kurve, falls sie existiert, eindeutig bestimmt ist. Eine weitere Folgerung ist

Satz 5.4.11 (Monodromie-Satz).
Sei X eine Riemannsche Fläche und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ zwei homotope Kurven von a nach b. Wir nehmen zusätzlich an, dass es eine Homotopie $\varphi : [0,1] \times J \to X$ und einen Funktionskeim $\psi \in \mathcal{O}_a$ gibt, der sich längs jeder Kurve $\gamma(-,s)$ fortsetzen lässt. Dann ergeben die analytischen Fortsetzungen längs γ_0 und γ_1 denselben Funktionskeim $\psi' \in \mathcal{O}_b$.

Beweis.
Wir wenden Satz 5.3.11 über die Liftung homotoper Kurven auf die Überlagerung $|\mathcal{O}| \to X$ an, die nach Bemerkung 5.4.7 3. Hausdorffsch ist. □

Korollar 5.4.12.
Sei X eine einfach zusammenhängende *Riemannsche Fläche, $a \in X$ und $\varphi \in \mathcal{O}_a$ ein Funktionskeim, der sich in X unbegrenzt, d.h. längs jeder von a ausgehenden Kurve, analytisch fortsetzen lässt. Dann gibt es eine auf ganz X holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $\rho_a(f) = \varphi$. Die Funktion f ist wegen des Identitätssatzes 5.1.13 eindeutig bestimmt.*

Beweis.
Für $x \in X$ sei ψ_x der Funktionskeim, der man aus φ durch analytische Fortsetzung entlang irgend einer Kurve erhält. Da X einfach zusammenhängend ist, ist ψ_x wegen des Monodromiesatzes 5.4.11 unabhängig davon, welche Kurve man wählt. Man setze $f(x) := \psi_x(x)$. Dann ist f eine auf X holomorphe Funktion mit $\rho_a(f) = \varphi$. □

Im allgemeinen aber entstehen durch analytische Fortsetzung entlang verschiedener Kurven verschiedene Funktionskeime. Will man daher *alle* analytischen Fortsetzungen zusammenfassen, kommt man auf "mehrdeutige Funktionen", d.h. Funktionen auf Überlagerungsflächen.

Genauer: Seien X und Y Riemannsche Flächen mit ihren Garben $\mathcal{O}_X$ bzw. $\mathcal{O}_Y$ holomorpher Funktionen und $p : Y \to X$ eine holomorphe unverzweigte Überlagerungsabbildung. Für $y \in Y$ induziert die Abbildung p, da sie lokal biholomorph ist, einen Isomorphismus

$$p^* : \mathcal{O}_{X,p(y)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Y,y} \ .$$

Es sei

$$p_* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,p(y)}$$

die Umkehrabbildung von p^*.

Definition 5.4.13
Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$ und $\varphi \in \mathcal{O}_a$ ein Funktionskeim.

1. *Ein Quadrupel (Y, p, f, b) heißt* analytische Fortsetzung *von φ, wenn gilt*
   (a) *Y ist eine Riemannsche Fläche und $p : Y \to X$ eine holomorphe unverzweigte Überlagerung.*
   (b) *f ist eine auf Y holomorphe Funktion.*
   (c) *b ist ein Punkt von Y mit $p(b) = a$, d.h. $b \in Y$ ist ein Punkt über $a \in X$, und für die Funktionskeime gilt*
   $$p_*(\rho_b(f)) = \varphi \ .$$

2. *Eine analytische Fortsetzung heißt* <u>maximal</u>*, wenn sie die folgende universelle Eigenschaft hat: ist (Z, q, g, c) eine andere analytische Fortsetzung von φ, so gibt es eine spurtreue holomorphe Abbildung $F : Z \to Y$ mit $F(c) = b$ und $F^*(f) = g$.*

Lemma 5.4.14.
Eine maximale analytische Fortsetzung ist bis auf Isomorphie eindeutig. Die Eigenschaft in Definition 5.4.13.2. ist wirklich universell.

Beweis.
Ist nämlich neben (Y, p, f, b) auch (Z, q, g, c) eine maximale analytische Fortsetzung des Funktionskeims φ, so gibt es eine spurtreue holomorphe Abbildung $G : Y \to Z$ mit $G(b) = c$ und $G^*(g) = f$. Die Zusammensetzung $F \circ G$ ist eine spurtreue holomorphe Abbildung von Y auf sich, die den Punkt b festlässt. Nach Satz 5.3.10 über die Eindeutigkeit der Liftung ist daher $F \circ G = \mathrm{id}_Y$. Ebenso zeigt man $G \circ F = \mathrm{id}_Z$. Daraus folgt, dass $G : Y \to Z$ biholomorph ist. $\square$

Satz 5.4.15.
Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$ und $\varphi \in \mathcal{O}_a$ ein holomorpher Funktionskeim im Punkt a. Dann existiert eine maximale analytische Fortsetzung (Y, p, f, b) von φ.

Man kann die Argumente dieses Abschnitts auch auf meromorphe Funktionen anwenden, wobei man dann die Überlagerung $|\mathcal{M}| \to X$ benutzt. Wir haben hier die Situation dadurch stark vereinfacht, dass wir Verzweigungsstellen außer Betracht gelassen haben.

A Der Cauchysche Integralsatz für holomorphe Funktionen

Definition A.0.1

1. *Es seien* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. *Dann bezeichnen wir die von* z_1, z_2 *und* z_3 *aufgespannte abgeschlossene Dreiecksfläche mit*

$$\Delta_{z_1,z_2,z_3} := \{z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 \mid t_1, t_2, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\} \ .$$

   Wir wollen annehmen, dass solche Dreiecke nie ausgeartet sind.

2. *Wir bezeichnen mit* C_{z_1,z_2,z_3} *den Rand von* Δ_{z_1,z_2,z_3} *genau einmal durchlaufen, angefangen bei* z_1, *weiter nach* z_2 *und über* z_3 *zurück nach* z_1. *Offenbar ist dies ein geschlossener Weg.*

Satz A.0.2 (Cauchy, Goursat)**.**
Sei E *ein komplexer Banachraum. Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f : U \to E$ *holomorph. Seien* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ *derart, dass die abgeschlossene Dreiecksfläche* Δ_{z_1,z_2,z_3} *ganz in* U *enthalten ist. Dann ist*

$$\int_{C_{z_1,z_2,z_3}} f(z)\mathrm{d}z = 0 \ .$$

Beweis.

- Wir setzen $\Delta := \Delta_{z_1,z_2,z_3}$ und $C := C_{z_1,z_2,z_3}$. Wir verbinden die Mittelpunkte der Kanten von Δ mit Strecken und zerlegen so das Dreieck in vier Dreiecke Δ_i mit Rändern C_i, wobei $i \in \{I, II, III, IV\}$. Offenbar gilt dann

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_I} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_{II}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_{III}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_{IV}} f(z)\mathrm{d}z \ ,$$

  da die inneren Strecken zweimal mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen werden und sich daher die entsprechenden Terme wegheben. Daraus folgt

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq 4 \left|\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \ ,$$

  wobei wir mit C_1 dasjenige der vier Dreiecke bezeichnen, für das das Integral den größten Absolutbetrag hat.

- Indem man das Dreieck C_1 wieder in vier Dreiecke zerlegt, findet man ähnlich ein Unterdreieck Δ_2 von Δ_1. So fährt man induktiv fort und findet geschachtelte Dreiecke $\Delta_i \supset \Delta_{i+1} \supset \ldots$. Es gilt

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq 4^n \left|\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z\right| \ . \tag{4}$$

- Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert $z_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Insbesondere gilt $z_0 \in U$. Für jedes $r > 0$ gibt es überdies $N = N(r)$, so dass

$$\Delta_n \subset U_r(z_0) \quad \text{für alle } n \geq N \ .$$

- Wegen $z_0 \in U$ ist f in z_0 komplex differenzierbar. Es existiert also eine auf U stetige Funktion $\varphi : U \to E$, so dass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z) \quad \text{mit} \quad \varphi(z_0) = f'(z_0)$$

Wegen der Stetigkeit von φ in z_0 existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|\varphi(z) - f'(z_0)| < \epsilon \quad \text{für} \quad |z - z_0| < \delta \ .$$

- Wir wählen nun n so groß, dass $\Delta_n \subset U_\delta(z_0)$ und zerlegen

$$\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_n} f(z_0)\mathrm{d}z + \int_{C_n} f'(z_0)(z - z_0)\mathrm{d}z + \int_{C_n} (\varphi(z) - f'(z_0))\,(z - z_0)\mathrm{d}z \ .$$

Die ersten beiden Terme sind Null, da für die konstante Funktion und für die Funktion $z \mapsto z - z_0$ holomorphe Stammfunktionen existieren.

Wir schätzen den dritten Term ab, indem wir bemerken, dass aus $C_n \subset U_\delta(z_0)$ folgt $|\varphi(z) - f'(z_0)| < \epsilon$. Für zwei Punkte $z, z_0 \in C_n$ folgt elementar $|z - z_0| \leq l(C_n)$, wobei $l(C_n)$ die Länge des Dreieckszugs ist. Daher ist

$$\left| \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \epsilon l(C_n)^2 \ .$$

Ebenso sieht man elementar $l(C_{n+1}) = \frac{1}{2} l(C_n)$. Daher folgt

$$\left| \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \epsilon \frac{1}{4^n} l(C)^2 \ .$$

Zusammen mit Gleichung (4) folgt

$$\left| \int_{C} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \epsilon l(C)^2 \ .$$

Dies gilt für jedes $\epsilon > 0$, woraus die Behauptung folgt.

□

Ausgehend von diesem Satz schließt man, dass eine Version der Cauchysche Integralformel für holomorphe Funktionen gilt:

Satz A.0.3 (Cauchysche Integralformel).
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und E ein komplexer Banachraum. Sei ferner $f : U \to E$ eine holomorphe *Abbildung. Dann gilt für jeden Dreiecksweg γ in U und jedes $x \in U \setminus \gamma(I)$ die Beziehung*

$$j(x;\gamma) f(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z - x} \ .$$

Die Beweisidee ist hierbei dieselbe wie im Beweis von Theorem 3.3.8. Aus der Integraldarstellung folgt sofort, dass holomorphe Funktionen stetig differenzierbar sind. Daraus folgt dann mit Theorem 3.4.1, dass die Funktionen analytisch sind, womit wir uns dann von Dreieckswegen in den Integralformeln frei machen können.

Index

Überlagerung, 92
Überlagerungsabbildung, 92

Abelsches Lemma, 27
abgeschlossene Menge, 5
Ableitung, 14
Abschluss einer Menge, 7
absolut integrierbare Funktion, 78
absolut konvergente Reihe, 24
Absolutbetrag einer komplexen Zahl, 2
Adhärenzpunkte, 7
analytische Fortsetzung, 101, 102
analytische Funktion, 31
Aneinanderreihung von Kurven, 45
Anfangspunkt, 45
Argument einer komplexen Zahl, 4
Argumentprinzip, 75

Banachraum, 8
Bereich, 6
Beschränkungshomomorphismen, 98
Betrag einer komplexen Zahl, 2
biholomorphe Abbildng, 18
biholomorphe Abbildung Riemannscher Flächen, 84
Blätterzahl, 95
Bolzano-Weierstraß, Satz von, 9

Cauchy-Folge, 8
Cauchy-Hadamard, Formel von, 28
Cauchy-Kriterium, 26
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen, 18
Cauchysche Integralformel, 55, 105
Cauchysche Ungleichungen, 57
Cauchyscher Integralsatz, 48

de Moivre, Regel von, 4
dichte Teilmenge, 7
differenzierbare Funktion, 14
diskrete Abbildung, 92
diskrete Teilmenge, 7
doppeltperiodische Funktion, 91
Doppelverhältnis, 22

eigentliche Abbildung, 96
Eindeutigkeitsmenge, 36
einfach zusammenhängendes Gebiet, 50
Endpunkt, 45
entgegengesetzte Kurve, 45
Eulersche Formel, 41

Folgenkriterium, 11
Fundamentalsatz der Algebra, 60, 91

ganze Funktion, 31
Garbe, 98
Gauß'sche Zahlenebene, 82
Gaußsche Zahlenebene, 2
Gebiet, 9, 13, 82, 92
gebrochen lineare Funktion, 20
geometrische Reihe, 24
geschlossene Kurve, 45
Gitter, 83
gleichmäßig konvergente Folge, 26
gleichmäßige Stetigkeit, 13
Grenzwert, 7
Grundpunkt, 92

Häufungspunkt, 7
Halm, 99
Hauptteil einer Funktion, 66
Hauptwert des Arguments, 4
hebbare Singularität, 68
Heine-Borel, Satz von, 9
holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen, 84
holomorphe Funktion, 16
holomorpher Funktionskeim, 99
Homotopie, 47

Identitätssatz, 85
imaginäre Achse, 2
imaginäre Einheit, 1
Imaginärteil, 1
Index eines Wegs, 53
Innenpunkt, 7
Innere einer Menge, 7
integrierbare Funktion, 78
isolierter singulärer Punkt, 66

Körper der komplexen Zahlen, 1
Keim, 99
Kettenregel, 17
kompakte Teilmenge, 9
komplex konjugierte Zahl, 2

komplexe Karte, 81
komplexe Struktur, 81
komplexe Zahlenebene, 2
komplexer Atlas, 81
Konturhomotopie, 47
konvergente Reihe, 24
Konvergenz, 7
Konvergenzbereich, 27
Konvergenzradius, 28
Koordinatenumgebung, 84
Kreisscheibe, 3, 6
kritischer Wert, 96
Kurve, 45

Laurentreihe, 65
Laurentzerlegung, 66
Lebesguesche Eigenschaft, 47
Leibniz-Regel, 17
Lemma von Schwarz, 61
Liftung, 94
Limes, 7
Logarithmus, 42
lokal gleichmäßig konvergente Folge, 26
lokal-kompakter topologischer Raum, 96
lokale Koordinate, 84

Möbius-Transformationen, 21
Majoranten-Kriterium, 26
Majorantenkriterium, 24
Mannigfaltigkeit, 81
Maximumsprinzip, 89
mehrdeutige Funktion, 92
meromorphe Funktion, 74, 85
meromorpher Funktionskeim, 99
metrischer Raum, 5
Monodromie-Satz, 102

Nebenteil einer Funktion, 66
normierter Vektorraum, 5
Nullstelle, 67

obere Halbebene, 3
offene Menge, 5
Ordnung eines Pols, 66
Ortsuniformisierende, 84

Partialsumme, 24
partiell differenzierbare Funktion, 14
partielle Ableitung, 14
Pol, 66
Polstelle, 86
Polstellenordnung, 66
Polyzylinder, 6
Potenzreihe, 27
Prägarbe, 98

Quotientenkriterium, 25
Quotiententopologie, 83

Rand, 7
rationale Funktion, 10
Realteil, 1
rechte Halbebene, 3
reelle Achse, 2
Regelfunktion, 12
rein-imaginäre Zahl, 2
relativ kompakte Teilmenge, 9
relativ offene Menge, 6
Relativtopologie, 6
Residuensatz, 72
Residuum, 71
Riemannsche Fläche, 82
Riemannsche Zahlenkugel, 82
Riemannsche Zahlensphäre, 20
Riemannscher Hebbarkeitssatz, 69, 84
Ringgebiet, 63

Satz von Casorati-Weierstraß, 70
Satz von Hurwitz, 75
Satz von Liouville, 60, 90
Satz von Weierstraß, 61
Spurpunkt, 92
spurtreue Abbildung, 92
sternförmiges Gebiet, 50
stetige Abbildung, 10
Streckenzug, 12

topologischer Raum, 5
Tori, 83

Umgebung, 5
unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung, 95
unendliche Reihe, 24
unverzweigte Uberlagerung, 93

Verbindungsstrecke, 12
Verzweigungspunkt, 93
Vielfachheit einer Abbildung, 88
vollständiger metrischer Raum, 8

Weg, 11, 45
Wegintegral, 46
Wegkomponenten, 12

wesentlich singulärer Punkt, 67
wesentliche Singularität, 67
Wurzelkriterium, 25

zusammenhängender topologischer Raum, 8
Zusammenhangskomponente, 8