

Analysis IV:  
Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Prof. Dr. Harald Garcke

Sommersemester 2010

24. April 2013



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>8</b>
<b>1 Mannigfaltigkeiten</b>	<b>11</b>
1.1 Topologie . . . . .	11
1.2 Jeder metrische Raum ist hausdorffsch . . . . .	12
1.3 Mannigfaltigkeiten . . . . .	12
1.4 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$ . . . . .	13
1.5 Differenzierbare Struktur . . . . .	14
1.6 Differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten . . . . .	14
1.7 Untermannigfaltigkeit . . . . .	14
1.8 Tangentialraum . . . . .	15
1.9 Tangentiale Äquivalenz . . . . .	15
1.10 Tangentiale Äquivalenzklassen . . . . .	16
1.11 Der Tangentialraum als Vektorraum . . . . .	16
1.12 Das Differential . . . . .	17
1.13 Eigenschaften des Differentials . . . . .	18
1.14 Die speziellen Tangentialvektoren . . . . .	19
1.15 Basisdarstellung von Tangentialvektoren . . . . .	20
1.16 Transformationssatz für kanonische Basen . . . . .	20
1.17 Der duale Tangentialraum . . . . .	21
1.18 Die duale kanonische Basis . . . . .	22
1.19 Der duale Kartenwechsel . . . . .	22
1.20 Der metrische Tensor . . . . .	23
1.21 Riemannsche Mannigfaltigkeiten . . . . .	24
1.22 Riemannsche Metriken . . . . .	24
1.23 Projektive oder elliptische Ebene . . . . .	25
1.24 Der Riemannsche Tensor für die zweidimensionale Sphäre . . . . .	26
1.25 Natürliche Metrik in lokalen Koordinaten . . . . .	26
1.26 Die Partition der Eins . . . . .	27
1.27 Existenz der Partition der Eins . . . . .	27
1.28 Die kompakte Ausschöpfung . . . . .	27
1.29 Existenz der kompakten Ausschöpfung . . . . .	28
1.30 Existenz eines „guten Atlas“ . . . . .	28
1.31 Jede $C^2$ -Mannigfaltigkeit ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit . . . . .	29

1.32	Lokale Diffeomorphismen . . . . .	30
1.33	Isometrie . . . . .	30
1.34	Isometrien bezüglich des euklidischen Skalarprodukts . . . . .	31
1.35	Integration auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten . . . . .	31
1.36	Integration mit verschiedenen Karten . . . . .	32
1.37	Integrierbarkeit . . . . .	32
1.38	Integration auf der Einheitssphäre . . . . .	33
1.39	Invarianz des Integrals . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Multilinear- und Differentialformen</b>	<b>37</b>
2.1	Alternierende Formen . . . . .	37
2.2	Äquivalenzen der multilinearen Abbildung . . . . .	37
2.3	Alternierende Formen auf linearen Abbildungen . . . . .	38
2.4	Komponenten einer alternierenden Form . . . . .	39
2.5	Die alternierenden Formen als $\mathbb{R}$ -Vektorraum . . . . .	39
2.6	Dimension der alternierenden Formen . . . . .	40
2.7	Eindeutigkeit der alternierenden Form . . . . .	40
2.8	Determinante als alternierende Form . . . . .	40
2.9	Determinante von Endomorphismen . . . . .	41
2.10	Differentialformen . . . . .	41
2.11	Das Differential von Formen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	42
2.12	Die Einschränkung von 1-Formen auf eine Karte . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Orientierung und Integration</b>	<b>45</b>
3.1	Orientierung in Vektorräumen . . . . .	45
3.2	Orientierung im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	45
3.3	Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	46
3.4	Umkehrung der Orientierung . . . . .	46
3.5	Kriterium für Orientierbarkeit . . . . .	46
3.6	Orientierbarkeit und $n$ -Formen . . . . .	47
3.7	Volumenform . . . . .	48
3.8	Orientierbarkeit über das Einheitsnormalenfeld . . . . .	48
3.9	Das äußere Produkt . . . . .	50
3.10	Integration auf orientierbaren Mannigfaltigkeiten . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Dachprodukt und Cartan-Ableitung</b>	<b>55</b>
4.1	Das Dachprodukt zweier alternierender Formen . . . . .	55
4.2	Eigenschaften des Dachprodukts . . . . .	56
4.3	Distributivgesetz für das Dachprodukt . . . . .	56
4.4	Die Cartansche Ableitung . . . . .	57
4.5	Lokale Darstellung der Cartanschen Ableitung . . . . .	57
4.6	Existenz der Cartanschen Ableitung für ein Kartengebiet . . . . .	58
4.7	Existenz der Cartanschen Ableitung für die ganze Mannigfaltigkeit . . . . .	59
4.8	Natürlichkeit der Cartanschen Ableitung . . . . .	60
4.9	Anwendung der Natürlichkeit der Cartanschen Abbildung . . . . .	61

4.10	Der Gradient in Riemannschen Mannigfaltigkeiten . . . . .	61
4.11	Beispiele für den Gradienten . . . . .	62
4.12	Die kanonische Volumenform . . . . .	63
4.13	Vektorfeld . . . . .	63
4.14	Divergenz . . . . .	64
4.15	Die Volumenform . . . . .	64
4.16	Berechnung mit der Volumenform . . . . .	65
4.17	Berechnung der Divergenz . . . . .	66
4.18	Der Laplace-Beltrami-Operator $\Delta_{\mathcal{M}}$ . . . . .	68
4.19	Produktregeln . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Mannigfaltigkeiten mit Rand und Integralsätze</b>	<b>71</b>
5.1	Differenzierbarkeit mit Rand . . . . .	71
5.2	Existenz einer Fortsetzung . . . . .	71
5.3	Mannigfaltigkeiten mit Rand . . . . .	72
5.4	Der Rand ist unabhängig von den Karten . . . . .	72
5.5	Definition des Randes . . . . .	73
5.6	Konstruktion einer Mannigfaltigkeit mit Rand . . . . .	73
5.7	Tangentialräume am Rand . . . . .	74
5.8	Verträglichkeit des physikalisch definierten Tangentialraumes . . . . .	75
5.9	Neue Definition des Tangentialraums . . . . .	75
5.10	Die Halbräume des Tangentialraums . . . . .	75
5.11	Die äußere Einheitsnormale . . . . .	76
5.12	Der Satz von Gauß . . . . .	76
5.13	Satz von Stokes . . . . .	79
5.14	Greensche Formeln . . . . .	80
5.15	Randwertprobleme . . . . .	80
5.16	Mittelwertgleichung . . . . .	81
5.17	Kurvenintegrale . . . . .	82
5.18	Flächen im Raum . . . . .	83
5.19	Vektoriellcs Flächenelement . . . . .	83
5.20	Klassischer Satz von Stokes . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Untermannigfaltigkeiten des <math>\mathbb{R}^d</math></b>	<b>87</b>
6.1	Der Gradient in Untermannigfaltigkeiten . . . . .	87
6.2	Die kovariante Ableitung . . . . .	88
6.3	Eigenschaften der kovarianten Ableitung . . . . .	88
6.4	Christoffel-Symbole . . . . .	89
6.5	Die kovariante Abbildung mittels Christoffel-Symbole . . . . .	89
6.6	Berechnung der Christoffel-Symbole . . . . .	90
6.7	Die gerichtete kovariante Ableitung . . . . .	91
6.8	Definition der kovarianten Ableitung über Vektorfeldern . . . . .	91
6.9	Rechenregeln für die gerichtete kovariante Ableitung . . . . .	91
6.10	Zweite Kovariante Ableitung . . . . .	92

6.11	Berechnung der zweiten kovarianten Ableitung . . . . .	92
6.12	Festlegung der zweiten Ableitung . . . . .	94
6.13	Der Riemannsche Krümmungstensor . . . . .	94
6.14	Berechnung des Riemannschen Krümmungstensors . . . . .	94
6.15	Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors . . . . .	95
6.16	Gauß-Abbildung . . . . .	95
6.17	Weingartenabbildung . . . . .	96
6.18	Beispiele zur Weingartenabbildung . . . . .	96
6.19	Die Weingartenabbildung ist selbstadjungiert . . . . .	97
6.20	Die zweite Fundamentalform . . . . .	98
6.21	Die erste Fundamentalform . . . . .	98
6.22	Weingarten-Abbildung und zweite Fundamentalform in lokalen Koordinaten . . . . .	98
6.23	Hauptkrümmungen . . . . .	99
6.24	Krümmung bei umgekehrter Orientierung . . . . .	99
6.25	Klassifizierung von Krümmungspunkten . . . . .	100
6.26	Beispiele zum Krümmungsbegriff . . . . .	100
6.27	Bogenlängenparametrisierung . . . . .	100
6.28	Existenz einer Bogenlängenparametrisierung . . . . .	100
6.29	Krümmung einer ebenen Kurve . . . . .	101
6.30	Frenet-Gleichungen I . . . . .	102
6.31	Raumkrümmung . . . . .	102
6.32	Der Normalenvektor im $\mathbb{R}^d$ . . . . .	102
6.33	Der Binormalenvektor . . . . .	103
6.34	Das begleitende Dreibein . . . . .	103
6.35	Windung . . . . .	103
6.36	Frenet Gleichungen II . . . . .	103
6.37	Normalkrümmung und geodätische Krümmung . . . . .	105
6.38	Satz von Meusnier . . . . .	105
6.39	Verallgemeinerung der Frenet-Gleichungen . . . . .	106
6.40	Gauß-Gleichung . . . . .	106
6.41	Theorema egregium . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Krümmung in Riemannschen Mannigfaltigkeiten</b>	<b>109</b>
7.1	Christoffel-Symbole und kovariante Ableitung . . . . .	109
7.2	Unabhängigkeit von Karten . . . . .	109
7.3	Der Riemannsche Krümmungstensor . . . . .	110
7.4	Der Ricci-Tensor . . . . .	110
7.5	Eigenschaften des Ricci-Tensors . . . . .	110
7.6	Skalarkrümmung . . . . .	111
<b>8</b>	<b>Geodätische</b>	<b>113</b>
8.1	Länge und Energie . . . . .	113
8.2	Energie-Längen-Ungleichung . . . . .	114

8.3	Symmetrie der kovarianten Ableitung . . . . .	114
8.4	Variation der Energie . . . . .	115
8.5	Kurven minimaler Energie . . . . .	115
8.6	Geodätische . . . . .	117
8.7	Geodätische sind proportional zur Bogenlänge parametrisiert . . . . .	117
8.8	Geodätische Krümmung . . . . .	118
<b>9</b>	<b>Krümmung von <math>n</math>-dimensionalen Flächen im <math>\mathbb{R}^d</math> und Satz von Gauß für nicht-tangentiale Vektorfelder</b>	<b>119</b>
9.1	Krümmung einer euklidischen Untermannigfaltigkeit . . . . .	119
9.2	Die zweite Fundamentalform . . . . .	120
9.3	Krümmungsvektor . . . . .	120
9.4	Interpretation von $B_p(X, X)$ . . . . .	121
9.5	Darstellung der Divergenz . . . . .	121
9.6	Ableitung der Determinante . . . . .	122
9.7	Flächen-Divergenz für nicht-tangentiale Vektorfelder . . . . .	123
9.8	Bemerkung zur Divergenz . . . . .	123
9.9	Satz von Gauß für nicht-tangentiale Vektorfelder . . . . .	124
9.10	Variation des Flächeninhalts . . . . .	125
9.11	Mittlere Krümmung bei Flächen mit minimalem Inhalt . . . . .	126
9.12	Minimalflächen . . . . .	126
9.13	Beispiele für Minimalflächen . . . . .	126
<b>10</b>	<b>de Rham-Cohomologie</b>	<b>129</b>
10.1	de Rham Komplex . . . . .	129
10.2	de Rham Komplex von Mannigfaltigkeiten . . . . .	129
10.3	de Rham Cohomologiegruppe . . . . .	129
10.4	Beispiel für Coränder und Cozykel . . . . .	130
10.5	0-Cozykel . . . . .	130
10.6	Cohomologiegruppen von orientierbaren und geschlossenen Mannigfaltigkeiten . . . . .	130
10.7	Differenzierbare Homotopie . . . . .	131
10.8	Kettenhomomorphismus . . . . .	131
10.9	Betti-Zahlen . . . . .	131
10.10	Die 0. Betti-Zahl . . . . .	131
10.11	Kettenhomomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension . . . . .	132
10.12	Abbildungen von $\mathcal{M}$ nach $\partial\mathcal{M}$ . . . . .	132
10.13	Das Dachprodukt auf Cohomologiegruppen . . . . .	132
10.14	Homotopieinvarianz der de Rham Cohomologie . . . . .	133
10.15	Nullhomotope Abbildungen . . . . .	133
10.16	Zusammenziehbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	133
10.17	Positiv dimensionale Cozykel auf zusammenziehbaren Mannigfaltigkeiten . . . . .	133

10.18	Poincaré-Lemma . . . . .	134
10.19	Sternförmige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	134
10.20	Zusammenziehbare Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ . . . . .	136
10.21	Die Betti-Zahlen auf offenen und sternförmigen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ . .	136
<b>11</b>	<b>Coableitung &amp; Laplace-de Rham Operator</b>	<b>137</b>
11.1	Skalarprodukt für alternierende Formen . . . . .	137
11.2	Der $*$ -Operator (Hodge-Operator) . . . . .	137
11.3	Der Hodge-Operator . . . . .	137
11.4	Die Coableitung . . . . .	138
11.5	Definition der Coableitung . . . . .	138
11.6	Skalarprodukt für $k$ -Formen . . . . .	138
11.7	$-\delta$ ist dual (transponiert) zu $d$ . . . . .	139
11.8	Zerlegung von $\Omega^k \mathcal{M}$ . . . . .	140
11.9	Der Laplace-de Rham-Operator . . . . .	140
11.10	Hodge Theorem . . . . .	140
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>140</b>
	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>142</b>



# Vorwort

Dieses Skript basiert auf einer Vorlesung, die ich im Sommersemester 2010 an der Universität Regensburg gehalten habe.

Die Vorlesung gab eine erste Einführung in die Themengebiete differenzierbare und riemannsche Mannigfaltigkeiten, Differentialformen und in die Integralsätze von Gauß und Stokes. Daneben wurden aber auch ausführlich Krümmungsbegriffe eingeführt und die Variation von Länge und Volumen (Fläche) besprochen. Die Begriffe kovariante Ableitung und Riemannscher Krümmungstensor habe ich dabei zunächst für Untermannigfaltigkeiten der  $\mathbb{R}^n$  eingeführt und dann später auf allgemeine riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinert. Dieses Vorgehen scheint mir für ein erstes Kennenlernen dieser abstrakten Begriffe angemessen. Die Vorlesung endete mit Kapiteln zur de Rahm-Cohomologie, der Coableitung, dem de Rham-Operator und dem Hodge-Theorem. Im letzten Kapitel wurden aus Zeitgründen nicht mehr alle Aussagen bewiesen.

Im Wesentlichen umfasst die Ausarbeitung den Tafelanschrieb und einige wenige erläuternde Bemerkungen. Eine detailliertere Fassung, die den Stoff stärker motiviert und kommentiert und weitere Abbildungen enthält, soll später einmal folgen.

Meine Vorlesung vom Sommersemester 2010 wurde von Bastian Altmann in  $\text{\LaTeX}$  gesetzt. Herr Altmann hat auch die Abbildungen angefertigt. Seine erste Fassung wurde unter Verwendung meiner handschriftlichen Notizen von Lars Müller überarbeitet. Die vorliegende Fassung wurde aber nur zum Teil von mir genauer durchgesehen. Etwaige Fehler oder Ungenauigkeiten bitte ich mir per Mail ([Harald.Garcke@mathematik.uni-regensburg.de](mailto:Harald.Garcke@mathematik.uni-regensburg.de)) mitzuteilen.



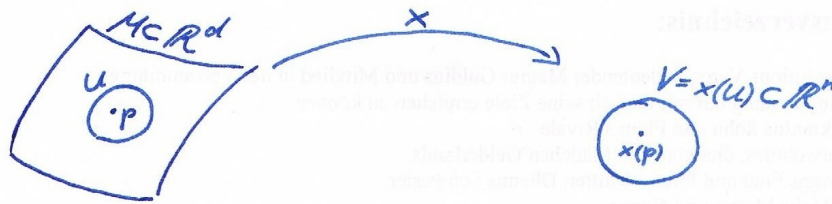
# Kapitel 1

## Mannigfaltigkeiten

**Wdh:** Untermannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  des  $\mathbb{R}^d$  sind in Worten:

Lokal (um Punkt  $p \in \mathcal{M}$ ) sieht  $\mathcal{M}$  wie ein Teil eines euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$  aus.

Dies drücken wir durch lokale Karten  $x : U \rightarrow V$  aus.



Allgemein können wir auch Mannigfaltigkeiten betrachten, die nicht in einen  $\mathbb{R}^d$  „eingebettet“ sind.

Um diese zu definieren brauchen wir etwas Topologie.

### 1.1 Topologie

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine Menge.

- i) Ein System  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $\mathcal{M}$  heißt *Topologie* auf  $\mathcal{M}$ , falls
  - a)  $\emptyset, \mathcal{M} \in \mathcal{O}$
  - b) Sind  $U, V \in \mathcal{O}$ , so ist  $U \cap V \in \mathcal{O}$
  - c) Es sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $U_i \in \mathcal{O}$  für  $i \in I$ .  
Dann gilt  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$ .
- ii)  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  heißt *topologischer Raum*.
- iii)  $U \subseteq \mathcal{M}$  heißt *offen*, falls  $U \in \mathcal{O}$ .
- iv)  $U$  heißt *Umgebung* von  $x \in \mathcal{M}$ , falls  $x \in U$  und  $U$  offen.
- v) Die Topologie  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  heißt *hausdorffsch*, falls es für je zwei Punkte  $x, y \in \mathcal{M}$ ,  $x \neq y$  offene Umgebungen  $U$  von  $x$  und  $V$  von  $y$  gibt, so dass  $U \cap V = \emptyset$ .

- vi) Eine Mengenfamilie  $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  offener Mengen heißt *Basis* der Topologie, falls jede offene Menge als Vereinigung von Mengen  $G_\lambda$  geschrieben werden kann.
- vii) Wir sagen ein topologischer Raum  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, falls es eine abzählbare Basis der Topologie gibt.

## 1.2 Jeder metrische Raum ist hausdorffsch

**Satz:** Jeder metrischer Raum ist als topologischer Raum hausdorffsch.

**Bew:** Es seien  $x, y \in \mathcal{M}$ . Aus  $x \neq y$  folgt  $d(x, y) > 0$ .

Wähle  $U = B_{\frac{d}{3}}(x)$  und  $V = B_{\frac{d}{3}}(y)$ .

$U, V$  sind offene Umgebungen von  $x$  bzw.  $y$  und nach Dreiecksungleichung ist  $U \cap V = \emptyset$ .

□

**Bsp:** i)  $(\mathcal{M}, \mathcal{O} = \{\emptyset, \mathcal{M}\})$  ist nicht hausdorffsch, falls  $\mathcal{M}$  mehr als ein Element enthält.

ii)  $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht.

iii)  $\mathbb{R}^n$  mit der Standardtopologie aller offenen Teilmengen erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Wähle:  $\Lambda = \{(x, \varrho) \mid x \in \mathbb{Q}^n, \varrho \in \mathbb{Q}^+\}$  (Dies ist abzählbar, da  $\mathbb{Q}$  abzählbar.)

Definiere:  $G_{(x, \varrho)} = B_\varrho(x)$

**Beh:**  $(G_{(x, \varrho)})_{(x, \varrho) \in \Lambda}$  ist Basis der Topologie.

**Bew:** Für alle  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, gilt:

$$\Omega = \bigcup_{\substack{(x, \varrho) \in \Lambda \\ G_{(x, \varrho)} \subseteq \Omega}} G_{(x, \varrho)}$$

„ $\supseteq$ “: Klar.

„ $\subseteq$ “: Es sei  $x \in \Omega$ . Da  $\Omega$  offen ist, gilt:  $B_{2\varepsilon}(x) \subseteq \Omega$  für ein  $\varepsilon > 0$ .

Wähle  $\varrho \in \mathbb{Q}$  mit  $\frac{\varepsilon}{4} < \varrho < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Wähle  $y \in \mathbb{Q}^n \cap B_\varrho(x)$ .

Dann gilt:  $x \in B_{2\varrho}(y) = G_{(y, 2\varrho)}$

□

## Generalvoraussetzung:

Ab jetzt seien alle topologischen Räume  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$  hausdorffsch und separabel.

## 1.3 Mannigfaltigkeiten

- Def:** i) Eine topologische *Mannigfaltigkeit* der Dimension  $n$  ist ein separabler Hausdorffraum  $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ , der lokal homöomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist.  
D.h. zu jedem  $p \in \mathcal{M}$  gibt es eine offene Umgebung  $U \subset \mathcal{M}$  von  $p$ , eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^n$  und einen Homöomorphismus  $x : U \rightarrow V$  (d.h.  $x$  ist bijektiv und  $x, x^{-1}$  sind stetig).  
 $(U, x)$  heißt *Karte* von  $p$ .
- ii) Eine Familie von Karten

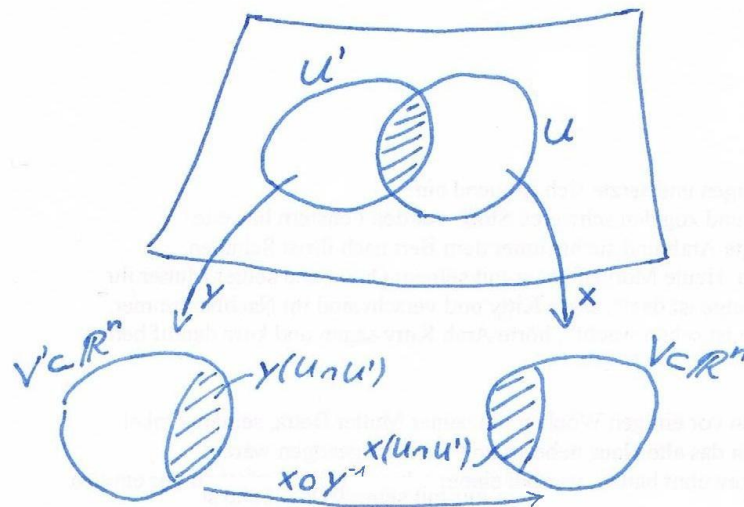
$$\mathcal{A} = \{(U, x) \mid x : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist Karte}\}$$

heißt  $C^l$ -Atlas ( $l \in \mathbb{N}, l \geq 1$ ) falls

- a)  $\{U \mid (U, x) \in \mathcal{A}\}$  ist eine (offene) Überdeckung von  $\mathcal{M}$ .  
b) Sind  $(U, x), (U', y) \in \mathcal{A}$  mit  $U \cap U' \neq \emptyset$ , so ist der Kartenwechsel

$$x \circ y^{-1} : \underbrace{y(U \cap U')}_{\subset V' = y(U') \subset \mathbb{R}^n} \longrightarrow \underbrace{x(U \cap U')}_{\subset V = x(U) \subset \mathbb{R}^n}$$

ein  $C^l$ -Diffeomorphismus. (D.h.  $x, x^{-1}$  sind  $l$ -mal stetig differenzierbar.)

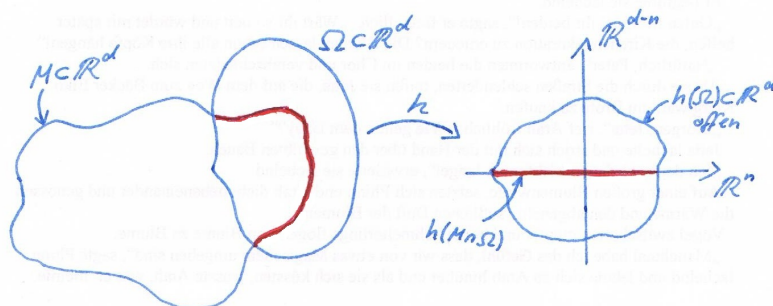


- iii) Es sei  $\mathcal{A}$  ein  $C^l$ -Atlas von  $\mathcal{M}$ .  
Eine Karte  $(U, x)$  heißt mit  $\mathcal{A}$  *verträglich*, falls  $\mathcal{A} \cup \{(U, x)\}$  ebenfalls ein  $C^l$ -Atlas ist.
- iv) Es sei  $\mathcal{A}$  ein  $C^l$ -Atlas von  $\mathcal{M}$ .  
Dann existiert ein maximaler  $C^l$ -Atlas, der  $\mathcal{A}$  enthält.  
Einen solchen maximalen Atlas nennt man  $C^l$ -differenzierbare *Struktur*.
- v)  $\mathcal{M}$  gemeinsam mit einer  $C^l$ -differenzierbaren Struktur nennt man auch *differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse  $C^l$* .

**Bem:** Falls nichts anderes gesagt, setzen wir ab jetzt eine  $C^1$ -Struktur voraus.

## 1.4 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$

- Bsp:** i) Jede  $C^l$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^d$  ist eine Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$  (wobei  $n \leq d$ ) mit  $C^l$ -Struktur.



$$\begin{aligned} pr_n : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \dots, x_n) \\ h(\Omega \cap M) &= h(\Omega) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \\ x : (\Omega \cap M) &\rightarrow \mathbb{R}^n : q \mapsto (pr_n \circ h)(q) \end{aligned}$$

- ii) Ist  $q \in \mathbb{R}^l$  ein regulärer Wert einer stetig differenzierbaren Abbildung  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^l$ , so ist  $f^{-1}(q) \subset \mathbb{R}^d$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $n = d - l$ .

- Bsp:** i) Für  $q = 0$  und  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|^2 - 1$  erhalten wir die Sphäre

$$S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^d$$

- ii) Jetzt sei  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$  für  $x \in \mathbb{R}^3$ .  
Für  $c \neq 0$  ist  $f^{-1}(c)$  eine zweidimensionale  $C^1$ -Mannigfaltigkeit.  
Für  $c > 0$  ist es ein einschaliges Hyperboloid.  
Für  $c < 0$  ist es ein zweischaliges Hyperboloid.

## 1.5 Differenzierbare Struktur

- Bsp:** i)  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$  ist ein differenzierbarer Atlas.  
Die zugehörige differenzierbare Struktur nennen wir die kanonische differenzierbare Struktur des  $\mathbb{R}^n$ .

- ii) Es gibt verschiedene differenzierbare Strukturen auf  $\mathbb{R}$
- $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \text{id})\}$  definiert die kanonische differenzierbare Struktur.
  - $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, y)\}$  mit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^3$  definiert eine andere differenzierbare Struktur.

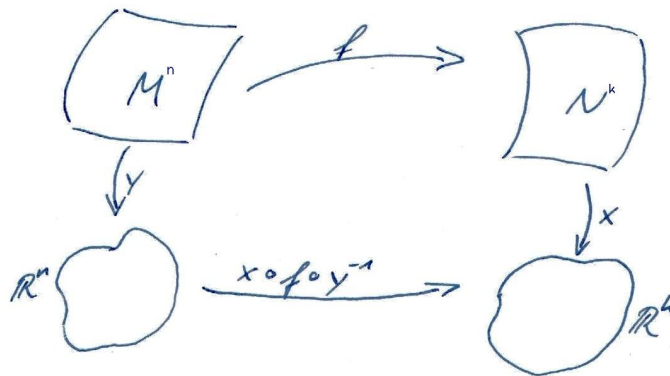
Der Kartenwechsel  $(x \circ y^{-1})(s) = \sqrt[3]{|s|} \text{sgn}(s)$  ist nicht differenzierbar, weshalb die Karten  $(\mathbb{R}, x)$  und  $(\mathbb{R}, y)$  nicht verträglich sind und unterschiedliche differenzierbare Strukturen erzeugen.

Allerdings ist  $x \circ y^{-1}$  ein Homöomorphismus.

## 1.6 Differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

**Def:** Es seien  $\mathcal{M}^n, \mathcal{N}^k$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  bzw.  $k$  und es sei  $\Omega \subseteq \mathcal{M}^n$  offen.

Eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathcal{N}^k$  heißt differenzierbar von der Klasse  $C^l$ , falls für beliebige Karten  $(U, y) \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}^n}$  und  $(V, x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}^k}$  gilt:  $x \circ f \circ y^{-1}$  ist von der Klasse  $C^l$ .



$f$  heißt Diffeomorphismus, falls  $f$  bijektiv und  $f, f^{-1}$  differenzierbar sind.

**Bsp:** Wähle  $\mathcal{M}^1 = \mathbb{R}$  und die kanonisch differenzierbare Struktur.

Wähle  $\mathcal{N}^1 = \mathbb{R}$  mit der differenzierbaren Struktur  $\mathcal{A}_2$  aus Bsp 1.5 ii).

$f : \mathcal{M}^1 \rightarrow \mathcal{N}^1$  mit  $f(t) = t$  ist nicht differenzierbar, da  $x \circ f \circ y^{-1} = \sqrt[3]{|s|} \operatorname{sgn}(s)$  nicht differenzierbar ist.

**Bem:** (i) Ist  $f : \underbrace{\Omega}_{\subseteq \mathcal{M}^n} \rightarrow \mathcal{N}^k$  Diffeomorphismus, so folgt  $n = k$ .

(Da  $x \circ f \circ y^{-1} : \underbrace{U}_{\subseteq \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^k$  invertierbar und differenzierbar  $\xrightarrow{\text{Ana II}} n = k$ .)

(ii) Ab jetzt schreiben wir in einigen Fällen die Dimension der Mannigfaltigkeit als Index.

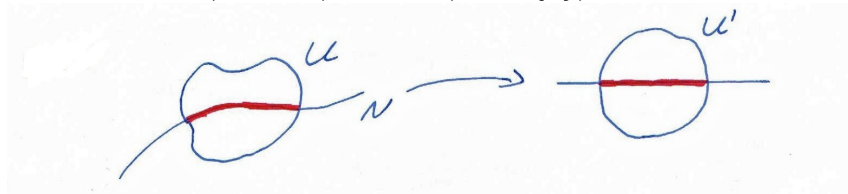
## 1.7 Untermannigfaltigkeit

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}^n$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Eine Teilmenge  $\mathcal{N}^k \subset \mathcal{M}^n$  heißt  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls es um jeden Punkt  $p \in \mathcal{N}^k$  eine differenzierbare Karte von  $\mathcal{M}^n$  der Form

$$x : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$$

gibt, so dass  $x(U \cap \mathcal{N}^k) = U' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$  ist.



**Bem:** Dies stellt eine Verallgemeinerung der Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  dar.

## 1.8 Tangentialraum

Zur Erinnerung: Für Untermannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  des  $\mathbb{R}^d$  galt:

$$T_p \mathcal{M} = \{\alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d \cap \mathcal{M} \text{ differenzierbar mit } \alpha(0) = p\}$$

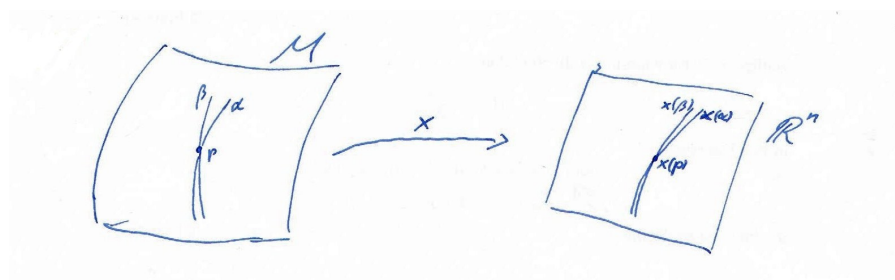
Dies ist aber bei allgemeineren Mannigfaltigkeiten nicht möglich, da  $\alpha'$  nicht gebildet werden kann.

**Def:** i) Es sei  $\mathcal{M}$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $p \in \mathcal{M}$ .  
Dann definieren wir die Menge aller Kurven durch  $\mathcal{M}$  als

$$K_p(\mathcal{M}) := \{\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M} \mid \varepsilon > 0, \alpha(0) = p \text{ und } \alpha \in C^1\}$$

ii) Zwei Kurven  $\alpha, \beta \in K_p(\mathcal{M})$  heißen *tangential äquivalent* (und man schreibt  $\alpha \simeq \beta$ ), falls für eine (und dann jede) Karte  $(U, x)$  um  $p$  gilt:

$$(+)\quad \frac{d}{dt}((x \circ \alpha)(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}((x \circ \beta)(t)) \Big|_{t=0}$$



## 1.9 Tangentiale Äquivalenz

**Bem:** i) Es sei  $v := \frac{d}{dt}((x \circ \alpha)(t)) \Big|_{t=0} \in \mathbb{R}^n$  und es sei  $y$  eine weitere Karte um  $p$ .  
Dann gilt:

$$\begin{aligned} (*) \quad w &= \frac{d}{dt}(y \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(y \circ x^{-1} \circ x \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} \\ &= D(y \circ x^{-1})((x \circ \alpha)(0)) \cdot \frac{d}{dt}(x \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} = \underbrace{D(y \circ x^{-1})}_{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n} \Big|_{x(p)} \cdot v \end{aligned}$$



ii) Die Identität (\*) zeigt auch, dass (+) unabhängig von der Karte gilt.

iii) Es sei  $D(y \circ x^{-1}) =: \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$

Dann schreibt sich die Identität (\*) als:  $w^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} v^j$

Dabei ist  $y \circ x^{-1}$  der Kartenwechsel und

$\left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$  die Jacobi-Matrix der Kartenwechselabbildung.

Summenkonvention: Wie schreiben  $w_i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} v^j$  statt  $w_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} v^j$ , wobei immer über die doppelt auftretenden Indizes summiert wird.

## 1.10 Tangentiale Äquivalenzklassen

**Def:** i)  $[\alpha] := \{\beta \in K_p(\mathcal{M}) \mid \alpha \simeq \beta\}$

ii)  $T_p\mathcal{M} = \{[\alpha] \mid \alpha \in K_p\mathcal{M}\} (= K_p\mathcal{M}/\simeq)$

## 1.11 Der Tangentialraum als Vektorraum

**Satz:** Der Tangentialraum  $T_p\mathcal{M}$  ist ein reeller Vektorraum mit der Operation:

$$\lambda_1[\alpha_1] + \lambda_2[\alpha_2] := [x^{-1}(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2))]$$

für  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und  $[\alpha_1], [\alpha_2] \in T_p\mathcal{M}$ .

Dabei ist  $(U, x)$  eine Karte um  $p$  mit  $x(p) = 0$  (o.B.d.A. ist diese Wahl möglich).

**Bew:** Die Kurve  $x^{-1}(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2))$  ist Kurve durch  $p$ , da

$$\begin{aligned} x^{-1}(\lambda_1(x \circ \alpha_1)(0) + \lambda_2(x \circ \alpha_2)(0)) &= x^{-1}(\lambda_1 x(p) + \lambda_2 x(p)) \\ &= x^{-1}(0) = p \end{aligned}$$

**Beh:** Die Definition ist unabhängig von den Vertretern  $\alpha_i \in [\alpha_i]$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

**Bew:** Seien also  $\alpha_1 \simeq \tilde{\alpha}_1$  und  $\alpha_2 \simeq \tilde{\alpha}_2$ . Dann gilt:

$x^{-1}(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2)) \simeq x^{-1}(\lambda_1(x \circ \tilde{\alpha}_1) + \lambda_2(x \circ \tilde{\alpha}_2))$ , denn:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2)) \Big|_{t=0} &= \lambda_1 \frac{d}{dt}(x \circ \alpha_1) \Big|_{t=0} + \lambda_2 \frac{d}{dt}(x \circ \alpha_2) \Big|_{t=0} \\ &= \lambda_1 \frac{d}{dt}(x \circ \tilde{\alpha}_1) \Big|_{t=0} + \lambda_2 \frac{d}{dt}(x \circ \tilde{\alpha}_2) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\lambda_1(x \circ \tilde{\alpha}_1) + \lambda_2(x \circ \tilde{\alpha}_2)) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Außerdem ist die Definition unabhängig von der gewählten Karte.  
Ist  $(V, y)$  eine weitere Karte und  $y(p) = 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (x \circ y^{-1}(\lambda_1(y \circ \alpha_1) + \lambda_2(y \circ \alpha_2)))'(0) \\ &= \lambda_1 D(x \circ y^{-1})(0) \cdot (y \circ \alpha_1)'(0) + \lambda_2 D(x \circ y^{-1})(0) \cdot (y \circ \alpha_2)'(0) \\ &= \lambda_1 (x \circ \alpha_1)'(0) + \lambda_2 (x \circ \alpha_2)'(0) \\ &= (x \circ x^{-1}(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2)))'(0) \end{aligned}$$

Das zeigt

$$x^{-1}(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2)) \simeq y^{-1}(\lambda_1(y \circ \alpha_1) + \lambda_2(y \circ \alpha_2))$$

□

**Bem:** i) Ist  $\mathcal{M}^n \subseteq \mathbb{R}^d$  eine Untermannigfaltigkeit, so ist die Abbildung

$$[\alpha] \mapsto \alpha'(0) \in \mathbb{R}^d$$

ein linearer Isomorphismus zwischen dem Tangentialraum als Mannigfaltigkeit und als Untermannigfaltigkeit.

ii) Es sei  $(U, x)$  Karte von  $\mathcal{M}^n$  um  $p$ .

Die Abbildung

$$T_p \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n : \quad [\alpha] \mapsto (x \circ \alpha)'(0)$$

ist ein linearer Isomorphismus.

**Bew:**  $x^{-1}(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2)) \in \lambda_1[\alpha_1] + \lambda_2[\alpha_2]$ , denn:

$$(x(x^{-1}(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2))))'(0) = \lambda_1(x \circ \alpha_1)'(0) + \lambda_2(x \circ \alpha_2)'(0)$$

Damit folgt die Linearität.

Ist  $(x \circ \alpha)'(0) = 0$ , so folgt  $x \circ \alpha \in [p]$  (was der konstanten Kurve mit  $\tilde{\alpha}(t) = p$  und  $(x \circ \tilde{\alpha})'(0) = 0$  entspricht). Also ist die Abbildung injektiv.

Für die Surjektivität betrachte man für ein beliebiges  $v \in \mathbb{R}^n$  die Kurve  $\alpha(t) := x^{-1}(x(p) + tv)$ . □

**Bem:** *Vereinbarung:*

Für Untermannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}^n \subseteq \mathbb{R}^d$  benutzen wir die Realisierung

$$T_p \mathcal{M} = T_p^{\text{UMF}} \mathcal{M} := \{\alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}, \alpha(0) = p\}.$$

Auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten benutzen wir die formale Bezeichnung

$$\alpha'(0) := [\alpha].$$

Aber Achtung: Im Allgemeinen ist  $\alpha'(0)$  für abstrakte Mannigfaltigkeiten keine Ableitung!

## 1.12 Das Differential

**Def:** Es sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  eine  $C^1$ -Abbildung und  $p \in \mathcal{M}$ .  
Die Abbildung

$$df_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N} : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha] \quad (\text{oder } \alpha'(0) \mapsto (f \circ \alpha)'(0))$$

heißt *Differential* von  $f$  in  $p$ .

Es sei  $v \in T_p\mathcal{M}$ , dann heißt  $v(f) := df_p(v)$  die *Richtungsableitung* von  $f$  in  $p$  in Richtung  $v$ .

**Bem:** i)  $df_p$  ist wohldefiniert, d.h. aus  $\alpha_1 \simeq \alpha_2$  in  $p$  folgt  $f \circ \alpha_1 \simeq f \circ \alpha_2$  in  $f(p)$ .  
Denn seien  $(U, x)$  Karte um  $p$  und  $(V, y)$  Karte um  $f(p)$ , so gilt:

$$\begin{aligned} (y \circ f \circ \alpha_1)'(0) &= (y \circ f \circ x^{-1} \circ x \circ \alpha_1)'(0) \\ &= d(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} (x \circ \alpha_1)'(0) \\ &= d(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} (x \circ \alpha_2)'(0) \\ &= (y \circ f \circ x^{-1} \circ x \circ \alpha_2)'(0) = (y \circ f \circ \alpha_2)'(0) \end{aligned}$$

ii) Es sei  $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$  eine Untermannigfaltigkeit und  $F : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{N}$  eine  $C^1$ -Abbildung.

Dann ist  $f := F|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  eine  $C^1$ -Abbildung und es gilt:

$$df_p = dF_p|_{T_p\mathcal{M}} \quad \forall p \in \mathcal{M}$$

## 1.13 Eigenschaften des Differential

**Satz:** Es gilt:

i) Kettenregel: Seien  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  und  $h : \mathcal{N} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$   $C^1$ -Abbildungen, so gilt:

$$d(h \circ f)_p = dh_{f(p)} \circ df_p$$

ii) Ist  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  eine differenzierbare Funktion, so ist

$$df_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$$

eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen  $T_p\mathcal{M}$  und  $T_{f(p)}\mathcal{N}$ .

**Bew:** i) Aus

$$T_p\mathcal{M} \xrightarrow{df_p} T_{f(p)}\mathcal{N} \xrightarrow{dh_{f(p)}} T_{h(f(p))}\widetilde{\mathcal{M}}$$

ergibt sich:

$$d(h \circ f)_p([\alpha]) = [(h \circ f) \circ \alpha] = [h \circ (f \circ \alpha)] = dh_{f(p)}([f \circ \alpha]) = (dh_{f(p)} \circ df_p)([\alpha])$$

ii) Z.z. ist, dass für  $[\alpha_1], [\alpha_2] \in T_p\mathcal{M}$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  gilt:

$$df_p(\lambda_1[\alpha_1] + \lambda_2[\alpha_2]) = \lambda_1 df_p([\alpha_1]) + \lambda_2 df_p([\alpha_2]).$$

Es sei  $(U, x)$  eine Karte um  $p$  mit  $x(p) = 0$  und  $(V, y)$  eine Karte um  $f(p)$  mit  $y(f(p)) = 0$ .

$$\begin{aligned} df_p(\lambda_1[\alpha_1] + \lambda_2[\alpha_2]) &= df_p([x^{-1}(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2))]) \\ &= [f \circ x^{-1}(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2))] \\ &= [y^{-1} \circ y \circ f \circ x^{-1}(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2))] \\ &\stackrel{(\sim)}{=} [y^{-1}(\lambda_1(y \circ f \circ \alpha_1) + \lambda_2(y \circ f \circ \alpha_2))] \\ &= \lambda_1[f \circ \alpha_1] + \lambda_2[f \circ \alpha_2] \\ &= \lambda_1 df_p([\alpha_1]) + \lambda_2 df_p([\alpha_2]) \end{aligned}$$

Dabei gilt  $(\sim)$ , denn:

$$\begin{aligned} &((y \circ y^{-1} \circ y \circ f \circ x^{-1})(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2)))'(0) \\ &= ((y \circ f \circ x^{-1})(\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2)))'(0) \\ &= D(y \circ f \circ x^{-1})|_0 (\lambda_1(x \circ \alpha_1) + \lambda_2(x \circ \alpha_2))'(0) \\ &= \lambda_1 D(y \circ f \circ x^{-1})|_0 (x \circ \alpha_1)'(0) + \lambda_2 D(y \circ f \circ x^{-1})|_0 (x \circ \alpha_2)'(0) \\ &= \lambda_1 (y \circ f \circ \alpha_1)'(0) + \lambda_2 (y \circ f \circ \alpha_2)'(0) \\ &= ((y \circ y^{-1})(\lambda_1(y \circ f \circ \alpha_1) + \lambda_2(y \circ f \circ \alpha_2)))'(0) \end{aligned}$$

□

**Folgerung:** Ist  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Diffeomorphismus und  $p \in \mathcal{M}$ , so ist  $df_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$  ein linearer Isomorphismus.

**Bew:** Übungsaufgabe 3(i)

□

## 1.14 Die speziellen Tangentialvektoren

**Def:** Definiere spezielle Tangentialvektoren  $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$  durch

$$\partial_{x^i} := [x^{-1}(x(p) + te_i)], \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

**Bem:** Die Vektoren  $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$  bilden eine Basis von  $T_p\mathcal{M}$  (vgl. Übungsaufgabe 3). Diese Basis heißt kanonische Basis in  $T_p\mathcal{M}$  bezüglich der Karte  $(U, x)$ .

**Bsp:** Es sei  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ .

Bestimme kanonische Basisvektoren bezüglich den euklidischen und den Polar-Koordinaten.

Es sei  $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Karte  $x(p_1, p_2) = (p_1, p_2)$  der euklidischen Koordinaten.

Für diese Karte gilt:  $\partial_{x^i}(p) = [p + te_i] = (p + te_i)'(0) = e_i$  für jeden Punkt  $p = (p_1, p_2) \in \mathcal{M}$ .

Die Polarkoordinaten auf  $\mathbb{R}^2$  sind gegeben durch:

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{R}, z \geq 0\} : (r, v) \mapsto (r \cos v, r \sin v)$$

D.h.  $(U, \Phi^{-1})$  ist in diesem Fall die Karte und für  $p = (r \cos v, r \sin v)$  gilt:

$$\begin{aligned} \partial_r(p) &= (\Phi(\Phi^{-1}(p) + te_1))'(0) = \text{grad } \Phi(\Phi^{-1}(p)) \cdot e_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, v) \\ &= (\cos v, \sin v) = \frac{1}{r}(p_1, p_2) \\ \partial_v(p) &= (\Phi(\Phi^{-1}(p) + te_2))'(0) = \text{grad } \Phi(\Phi^{-1}(p)) \cdot e_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(r, v) \\ &= (-r \sin v, r \cos v) = (-p_2, p_1) \end{aligned}$$

## 1.15 Basisdarstellung von Tangentialvektoren

**Satz:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $p \in \mathcal{M}$ .

Es sei  $v \in T_p \mathcal{M}$  und  $v = \sum_{i=1}^n \xi^i \partial_{x^i}$  mit  $\xi^i \in \mathbb{R}$  dessen Basisdarstellung.

Weiter sei  $v = [\alpha]$  und  $(x \circ \alpha)(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(t) e_i$ .

Dann gilt:  $\xi^i = \gamma_i'(0)$ .

**Bew:** Aus der Linearität des Differentials folgt:

$$\begin{aligned} dx_p(v) &= dx_p \left( \sum_{i=1}^n \xi^i \partial_{x^i} \right) = \sum_{i=1}^n \xi^i dx_p(\partial_{x^i}) = \sum_{i=1}^n \xi^i [x(x^{-1}(x(p) + te_i))] \\ &= \sum_{i=1}^n \xi^i [x(p) + te_i] = \sum_{i=1}^n \xi^i (x(p) + te_i)'(0) = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \end{aligned}$$

Andererseits gilt aber auch:

$$dx_p(v) = [x \circ \alpha] = (x \circ \alpha)'(0) = \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i(t) e_i \right)'(0) = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(0) e_i$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung. □

## 1.16 Transformationssatz für kanonische Basen

**Satz:** i) Es seien  $(U, x)$  und  $(V, y)$  zwei zulässige Karten um  $p \in \mathcal{M}$ .

Dann transformieren sich die kanonischen Basisvektoren wie folgt:

$$\partial_{x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (y \circ x^{-1})^j}{\partial x^i} \partial_{y^j}$$

ii) Es sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  eine  $C^1$ -Abbildung,  $(U, x)$  sei eine zulässige Karte um  $p \in \mathcal{M}$  und  $(V, y)$  eine zulässige Karte um  $f(p) \in \mathcal{N}$ .

Dann gilt:

$$df_p(\partial_{x^i}(p)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(y \circ f \circ x^{-1})^j}{\partial x^i} \partial_{y^j}(f(p))$$

**Bew:** i) Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y \circ x^{-1})(x(p) + te_i) \Big|_{t=0} &= D(y \circ x^{-1}) \Big|_{x(p)} \cdot e_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y \circ x^{-1})^j}{\partial x^i}(x(p)) e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y \circ x^{-1})^j}{\partial x^i}(x(p)) \frac{d}{dt}(y(p) + te_j) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Dies zeigt die tangentielle Äquivalenz von

$$\begin{aligned} \partial_{x^i} &= [x^{-1}(x(p) + te_i)] = [(y^{-1} \circ y \circ x^{-1})(x(p) + te_i)] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y \circ x^{-1})^j}{\partial x^i}(x(p)) [y^{-1}(y(p) + te_j)] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y \circ x^{-1})^j}{\partial x^i}(x(p)) \partial_{y^j} \end{aligned}$$

ii) Analog gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y \circ f \circ x^{-1})(x(p) + te_i) \Big|_{t=0} &= D(y \circ f \circ x^{-1}) \Big|_{x(p)} \cdot e_i \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y \circ f \circ x^{-1})^j}{\partial x^i}(x(p)) e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y \circ f \circ x^{-1})^j}{\partial x^i}(x(p)) \frac{d}{dt}(y(f(p)) + te_j) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Dies zeigt die wiederum tangentielle Äquivalenz von:

$$\begin{aligned} df_p(\partial_{x^i}(p)) &= [f \circ x^{-1}(x(p) + te_i)] = [(y^{-1} \circ y \circ f \circ x^{-1})(x(p) + te_i)] \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial(y \circ f \circ x^{-1})^j}{\partial x^i}(x(p)) [y^{-1}(y(f(p)) + te_j)] \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial(y \circ f \circ x^{-1})^j}{\partial x^i}(x(p)) \partial_{y^j}(f(p)) \end{aligned}$$

□

**Bem:** Für  $\frac{\partial(y \circ x^{-1})^j}{\partial x^i}$  schreiben wir ab jetzt kürzer  $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ .

## 1.17 Der duale Tangentialraum

**Def:** Der *duale Tangentialraum* in  $p \in \mathcal{M}$  ist definiert als

$$T_p^* \mathcal{M} := \{L : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid L \text{ ist linear}\}.$$

**Bem:** Es sei  $(U, x)$  eine Karte um  $p \in \mathcal{M}$ .  
Betrachte

$$x^i : U \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto x^i(y) := x(y)_i \quad (i\text{-te Komponente von } x(y))$$

Es gilt:

$$(dx^i)_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{x^i(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

ist linear, d.h.  $(dx^i)_p \in T_p^* \mathcal{M}$ .

## 1.18 Die duale kanonische Basis

**Satz:** Die Linearformen  $(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p$  bilden eine Basis von  $T_p^* \mathcal{M}$ , die dual zur kanonischen Basis  $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$  von  $T_p \mathcal{M}$  ist.

**Bew:** Z.z.  $(dx^i)_p(\partial_{x^j}(p)) = \delta_{ij}$ .  
O.B.d.A. sei wieder  $x(p) = 0$ .  
Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} (dx^i)_p(\partial_{x^j}(p)) &= (dx^i)_p([x^{-1}(x(p) + te_j)]) = [(x^i \circ x^{-1})(x(p) + te_j)] \\ &= ((x^i \circ x^{-1})(x(p) + te_j))'(0) = D(x^i \circ x^{-1})|_{x(p)}(x(p) + te_j)'(0) \\ &= D(P_i)|_{x(p)} \cdot e_j = (e_j)_i = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Dabei ist  $P_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$  die Projektion auf die  $i$ -te Komponente. □

## 1.19 Der duale Kartenwechsel

**Satz:** Es seien  $(U, x), (V, y)$  zulässige Karten um  $p \in \mathcal{M}$ .  
Dann gilt:

$$(dy^i)_p = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) (dx^j)_p$$

**Bew:** Über die Kettenregel folgt:

$$(dy^i)_p = d(y^i \circ x^{-1} \circ x)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} (dx^j)_p$$

□

**Bem:** • Es gilt natürlich entsprechend

$$(dx^i)_p = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) (dy^j)_p \quad .$$

• Vergleicht man die Indizes der Matrizen beim Basiswechsel

$$\partial_{x^i} \longrightarrow \partial_{y^j} \quad \text{bzw.} \quad dx^i \longrightarrow dy^j$$

so bemerkt man, dass die Transformationsmatrix der Dualbasen genau die Transponiert-Inverse der Transformationsmatrix der kanonischen Basis ist.

Um den Punkt  $p \in \mathcal{M}$  seien zwei Karten  $x, y$  gegeben. Weiter sei  $v \in T_p \mathcal{M}$  mit  $v = \sum_{i=1}^n v_x^i \partial_{x^i}$  und  $v = \sum_{j=1}^n v_y^j \partial_{y^j}$ . Dann folgt mit Hilfe des Satzes 1.16:

$$v = \sum_{i=1}^n v_x^i \partial_{x^i} = \sum_{i=1}^n v_x^i \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \partial_{y^j} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} v_x^i \right) \partial_{y^j} \quad .$$

Damit folgt

$$v_y^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} v_x^i \quad . \quad (1.1)$$

In der Physik versteht man unter einem *kontravarianten Vektorfeld* eine Abbildung die jedem Punkt  $p \in \mathcal{M}$  bzgl. jeder Karte  $(U, x)$  einen Vektor  $v_x \in \mathbb{R}^n$  zuordnet. Es wird verlangt, dass sich die Vektoren bei Basiswechsel wie in (1.1) transformieren. Das Transformationsverhalten (1.1) wird als kontravariant bezeichnet.

Für ein Element  $\omega$  des dualen Tangentialraums  $T_p^* \mathcal{M}$  mit den Basisdarstellungen  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_{x,i} dx^i$  und  $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_{y,j} dy^j$  berechnen wir mit Hilfe der Überlegungen aus Abschnitt 1.17:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_{x,i} dx^i = \sum_{i=1}^n \omega_{x,i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \omega_{x,i} \right) dy^j \quad .$$

Also gilt

$$\omega_{y,j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \omega_{x,i} \quad . \quad (1.2)$$

Wird einem Punkt  $p \in \mathcal{M}$  bzgl. jeder Karte  $(U, x)$  ein Vektor  $\omega_x = (\omega_{x,i})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  zugeordnet, sodass das Transformationsverhalten durch (1.2) gegeben ist, so spricht man von einem *kovarianten Vektorfeld* und das Transformationsverhalten wird als kovariant bezeichnet.



## 1.20 Der metrische Tensor

Bisher können wir keine Längen und Winkel messen.

Bei  $n$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^d$  geht das wie folgt:  
 $T_p\mathcal{M}$  kann als  $n$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{R}^d$  aufgefasst werden.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^d}$$

Schreiben wir  $v, w \in T_p\mathcal{M}$  in lokalen Koordinaten,

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_{x^i} \quad \text{und} \quad w = \sum_{j=1}^n w^j \partial_{x^j}$$

so ergibt sich

$$\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{i,j=1}^n v^i w^j \underbrace{\langle \partial_{x^i}, \partial_{x^j} \rangle_{\mathbb{R}^d}}_{=: g_{ij}}$$

Zusammengefasst:

$$\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v^i w^j$$

Achtung: Die  $g_{ij}$  sind nicht konstant!

$(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  heißt *metrischer Tensor*.

## 1.21 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

- Def:**
- i) Eine *semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit* ist ein Paar  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bestehend aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  und einer Familie  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \{ \langle \cdot, \cdot \rangle_p \}_{p \in \mathcal{M}}$  von symmetrischen Bilinearformen  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  auf  $T_p\mathcal{M}$ , welche differenzierbar von  $p$  abhängen.
  - ii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  hängt differenzierbar von  $p$  ab, falls für alle Karten  $(U, x)$  von  $\mathcal{M}$  die Funktionen  $g_{ij} : x(U) \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \langle \partial_{x^i}, \partial_{x^j} \rangle_{x^{-1}(y)}$  differenzierbar sind.
  - iii) Falls  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  positiv definit ist, nennt man  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*.
  - iv) Im Fall iii) heißt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  *Riemannsche Metrik*.

- Bem:**
- i) Oft lassen wir den Index  $p$  bei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  weg.
  - ii) Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^d$  sind Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit dem Skalarprodukt aus 1.20. (Verlange, dass die Fläche  $C^2$  ist.)

Frage: Wie transformieren sich die Größen  $g_{ij}$  bei Kartenwechsel?

$$\text{Es galt:} \quad \partial_{x^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \partial_{y^k}$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} g_{ij}^x &= \langle \partial_{x^i}, \partial_{x^j} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \partial_{y^k}, \sum_{l=1}^n \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \partial_{y^l} \right\rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \langle \partial_{y^k}, \partial_{y^l} \rangle = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} g_{kl}^y \quad (*) \end{aligned}$$

Ab jetzt sei  $\mathcal{M}$  stets differenzierbare Mannigfaltigkeit mit  $C^2$ -Struktur.

Dann gilt: Falls alle Kartenwechsel  $y \circ x^{-1} \in C^2$  sind, so ist die Eigenschaft „ $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  hängt differenzierbar von  $p$  ab“ wegen (\*) unabhängig von der Wahl der Karte.

## 1.22 Riemannsche Metriken

**Bsp:** Ein und dieselbe differenzierbare Mannigfaltigkeit kann mit verschiedenen Riemannschen Metriken versehen werden.

Die Halbebene  $\mathcal{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  ist als offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ihr Tangentialraum kann in jedem Punkt kanonisch mit  $\mathbb{R}^2$  identifiziert werden.

Die Riemannsche Metrik auf  $\mathcal{H}^2$  ist gegeben durch das übliche Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$ . Aber es gibt auch viele andere Möglichkeiten. Die verwendete Karte von  $\mathcal{H}^2$  sei stets die Identität.

Möglichkeit 1: Wähle das euklidische Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ .

$$\begin{aligned} \langle \partial_x, \partial_x \rangle_E &= \langle e_1, e_1 \rangle_E = 1 = \langle \partial_y, \partial_y \rangle_E \\ \langle \partial_x, \partial_y \rangle_E &= \langle \partial_y, \partial_x \rangle_E = 0 \end{aligned}$$

Möglichkeit 2: Führe die *hyperbolische* Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H,(x,y)}$  auf  $T_{(x,y)}\mathcal{H}^2$  wie folgt ein:

$$\begin{aligned} \langle \partial_x, \partial_x \rangle_{H,(x,y)} &= \langle \partial_y, \partial_y \rangle_{H,(x,y)} := \frac{1}{y^2} \\ \langle \partial_x, \partial_y \rangle_{H,(x,y)} &:= 0 \end{aligned}$$

Das bewirkt, dass „Längen“ nahe der  $x$ -Achse stärker gewichtet werden. Die obere Halbebene  $\mathcal{H}^2$  mit der hyperbolischen Metrik heißt *hyperbolische Ebene*.

## 1.23 Projektive oder elliptische Ebene

Wir wollen eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, die sich nicht als Fläche im  $\mathbb{R}^3$  auffassen lässt, kennen lernen.

**Bsp:** Identifiziere auf  $S^2$  die Punkte  $x$  und  $-x$ , d.h.  $x \sim y \Leftrightarrow x = -y$  oder  $x = y$ .

**Def:** Die *projektive (oder elliptische) Ebene*  $\mathbb{P}^2$  ist durch

$$\mathbb{P}^2 := S^2 / \sim = \{[x] \mid x \in S^2\}$$

gegeben, wobei  $[x] = \{x, -x\}$ .

Betrachte die Abbildung  $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 : x \mapsto [x]$  unter der jeder Punkt aus  $\mathbb{P}^2$  genau zwei Urbilder hat.

Ist  $V \subset S^2$  in einer offenen Halbsphäre enthalten, so ist  $\pi|_V$  injektiv.

Jetzt überdecke die Sphäre  $S^2$  durch derartige Mengen  $V_1, \dots, V_k$  und wähle Karten  $z_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2$  für  $\alpha \in \{1, \dots, k\}$ .

Dann bildet  $(\pi(V_\alpha), z_\alpha \circ (\pi|_{V_\alpha})^{-1})_{\alpha \in \{1, \dots, k\}}$  einen Atlas für  $\mathbb{P}^2$ .

Somit ist  $\mathbb{P}^2$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, denn der Kartenwechsel

$$(z_\alpha \circ (\pi|_{V_\alpha})^{-1}) \circ (z_\beta \circ (\pi|_{V_\beta})^{-1})^{-1} = z_\alpha \circ (\pi|_{V_\alpha})^{-1} \circ \pi|_{V_\beta} \circ z_\beta^{-1} = z_\alpha \circ (\pm z_\beta^{-1})$$

ist differenzierbar auf  $z_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$ .

Jetzt wollen wir die kanonische Metrik der Sphäre  $S^2$  benutzen um  $\mathbb{P}^2$  mit einer Riemannschen Metrik zu versehen.

Für  $v, w \in T_z \mathbb{P}^2$  mit  $z \in \pi(V_\alpha)$  und  $d\pi_1 := d(\pi|_{V_\alpha})$  sei

$$\langle v, w \rangle_z := \langle d\pi_1^{-1}(v), d\pi_1^{-1}(w) \rangle_{S^2}$$

Da ein Kartenwechsel das Skalarprodukt nicht ändert, ist diese Definition unabhängig von der Karte  $\pi(V_\alpha)$ .

## 1.24 Der Riemannsche Tensor für die zweidimensionale Sphäre

**Bsp:** Betrachte  $S^2 \in \mathbb{R}^3$ , d.h.  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ .

Wähle Polarkoordinaten:

$$f : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 : (\vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$U := \text{im}(f)$  ist eine offene Teilmenge von  $S^2$ .

Mit  $x := f^{-1}$  ist  $(U, x)$  Karte von  $S^2$ .

Unser Ziel ist es nun den metrischen (Riemannschen) Tensor  $(g_{ij})_{i,j=1}^2$  bezüglich der Karte  $x$  zu bestimmen.

$$\partial_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \partial_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle \partial_\vartheta, \partial_\vartheta \rangle = \cos^2 \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \sin^2 \vartheta = 1 \\
g_{12} &= \langle \partial_\vartheta, \partial_\varphi \rangle = 0 \\
g_{22} &= \langle \partial_\varphi, \partial_\varphi \rangle = \sin^2 \vartheta \\
(g_{ij})_{i,j=1}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(Dabei ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$ .)

## 1.25 Natürliche Metrik in lokalen Koordinaten

**Bem:** Es sei  $(U, x)$  eine Karte einer  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ .

Für  $v, w \in T_p \mathcal{M}$  und  $p \in U$  mit

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_{x^i} \quad \text{und} \quad w = \sum_{i=1}^n w^i \partial_{x^i}$$

definiere das Skalarprodukt:

$$\langle v, w \rangle_p := \sum_{i=1}^n v^i w^i$$

*Frage:* Wie kann ich diese lokalen Definitionen zu einer Metrik (d.h. zu Skalarprodukten) auf ganz  $\mathcal{M}$  zusammensetzen?

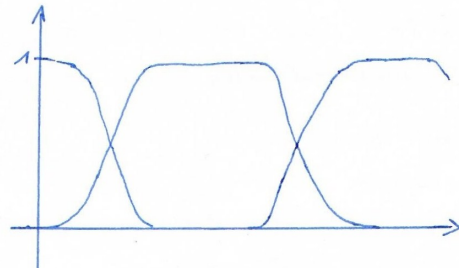
Dazu benötigen wir die „Partition der Eins“.

## 1.26 Die Partition der Eins

**Def:** Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine offene Überdeckung von  $X$  (d.h. die  $U_\lambda$  sind offen und  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$ ).

Eine der Überdeckung  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  untergeordnete *Zerlegung der Eins* (*Partition der Eins* oder auch *Teilung der Eins*) ist eine Familie  $(\varphi_\nu)_{\nu \in L}$  von Funktionen  $\varphi_\nu : X \rightarrow [0, 1]$  mit den Eigenschaften:

- i) Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine offene Umgebung  $V$ , sodass  $\varphi_\nu|_V = 0$  für alle bis auf endlich viele  $\nu \in L$ . (Man sagt  $(\varphi_\nu)_{\nu \in L}$  ist lokal endlich.)
- ii)  $\sum_{\nu \in L} \varphi_\nu(x) = 1$  (Dabei ist die Summe eigentlich eine endliche Summe!)
- iii)  $\forall \nu \in L \exists \lambda \in \Lambda$  sodass  $\text{supp } \varphi_\nu := \overline{\{x \in X \mid \varphi_\nu(x) \neq 0\}} \subset U_\lambda$



Sind die  $\varphi_\nu$  stetig oder glatt, so heißt die Partition der Eins stetig oder glatt. Ist  $L$  abzählbar, so heißt die Partition der Eins abzählbar.

## 1.27 Existenz der Partition der Eins

Wir wollen folgendes beweisen:

**Theorem:** Auf einer  $C^k$ -Mannigfaltigkeit gibt es zu jeder offenen Überdeckung eine abzählbare Partition der Eins mit  $C^k$ -Funktionen.

Dazu benötigen wir einige Hilfsresultate.

## 1.28 Die kompakte Ausschöpfung

**Def:** Eine *kompakte Ausschöpfung* von  $\mathcal{M}$  ist eine Folge von kompakten Mengen  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , sodass  $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$  und  $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \mathcal{M}$ .

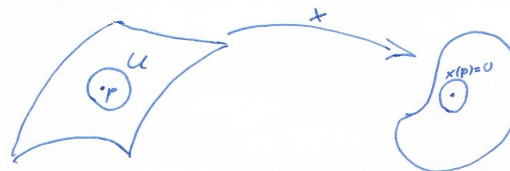
## 1.29 Existenz der kompakten Ausschöpfung

**Satz:** Jede topologische Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  besitzt eine kompakte Ausschöpfung.

**Bew:** Erinnerung:  $\mathcal{M}$  ist nach Definition separabel.

Um jeden Punkt  $p \in \mathcal{M}$  gibt es eine Karte  $(U, x)$  mit  $x(p) = 0$ .

Wähle  $\Omega_p = x^{-1}(B_\varepsilon(0))$  wobei  $\varepsilon = \varepsilon(p)$  so klein ist, dass  $B_\varepsilon(0) \subset x(U)$ .



Die  $(\Omega_p)_{p \in \mathcal{M}}$  sind offene Überdeckungen von  $\mathcal{M}$  und  $\overline{\Omega_p}$  ist kompakt (da  $\overline{B_{\varepsilon(p)}(0)}$  kompakt und  $x$  ein Homöomorphismus ist).

Da  $\mathcal{M}$  separabel ist, gibt es eine abzählbare Basis der offenen Mengen.

Also gibt es  $(U_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  mit

a) Jedes  $U_\nu$  ist in einem der  $\Omega_p$  enthalten.

$$b) \Omega_p = \bigcup_{\substack{\nu \in \mathbb{N} \\ U_\nu \subseteq \Omega_p}} U_\nu$$

Wegen a) gilt:  $\overline{U_\nu}$  ist kompakt.

Wegen b) bilden die  $(U_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  eine offene Überdeckung von  $\mathcal{M}$ .

Die  $(U_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  bilden eine offene Überdeckung von  $K_1 := \overline{U_1}$ .

Da  $K_1$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $K_1 \subset U_1 \cup \dots \cup U_{\nu_1}$ .

Setze  $K_2 := \overline{U_1 \cup \dots \cup U_{\nu_1}}$ , so gilt wegen der Kompaktheit von  $K_2$ :

$$K_2 \subset U_1 \cup \dots \cup U_{\nu_2}.$$

Der Rest folgt induktiv. □

### 1.30 Existenz eines „guten Atlas“

Wir sagen eine Familie von Teilmengen  $(V_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  heißt lokal endlich, wenn um jeden Punkt  $p \in \mathcal{M}$  eine Umgebung  $U$  existiert, sodass  $U \cap V_\nu$  nur für endlich viele  $\nu$  ungleich der leeren Menge ist.

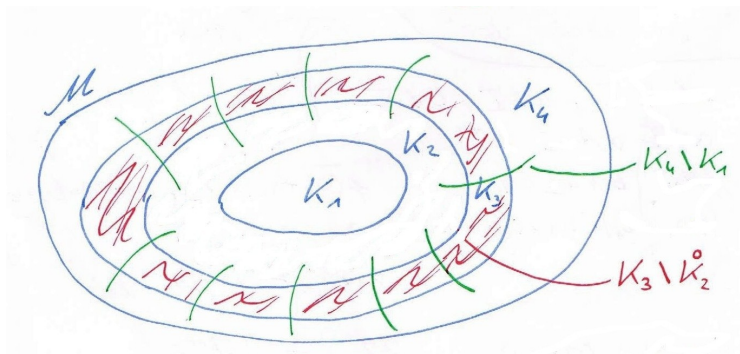
**Satz:** Zu jeder Überdeckung  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  gibt es einen abzählbaren „guten Atlas“  $(V_\nu, x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  so dass gilt:

- (i)  $x_\nu(V_\nu) = B_3(0) \subset \mathbb{R}^n$ .
- (ii) Die Mengen  $V_\nu$  sind lokal endlich und jedes  $V_\nu$  liegt in einem der  $U_\lambda$ .
- (iii) Die Mengen  $x_\nu^{-1}(B_1(0)) =: W_\nu$  bilden eine offene Überdeckung von  $\mathcal{M}$ .

**Bew:** Wähle eine kompakte Ausschöpfung  $(K_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ .

$$A_i := K_{i+1} \setminus \overset{\circ}{K}_i \quad \text{sind kompakt.}$$

$$\Omega_i := \overset{\circ}{K}_{i+2} \setminus K_{i-1} \quad \text{sind offen und bilden lokal endliche Überdeckung.}$$



Für jedes feste  $i$  gilt:

Zu jedem  $p \in A_i$  gibt es eine Karte  $(U, x)$  mit  $U \subset \Omega_i$  und  $U$  ist in einem der  $U_\lambda$  enthalten. Durch Skalierung erreichen wir:  $B_3(0) \subset x(U)$ .

Setze  $V_p := x^{-1}(B_3(0))$  und  $W_p := x^{-1}(B_1(0))$ .

Die  $(W_p)_{p \in A_i}$  bilden eine offene Überdeckung von  $A_i$ .

Da die  $A_i$  kompakt sind, kann eine endliche Teilüberdeckung gewählt werden.

So erhalten wir endlich viele Karten von  $A_i$  (für alle  $i$ ).

Fasse alle diese Karten zu einem Atlas zusammen. □

Nach diesen Hilfsresultaten können wir nun Satz 1.27 beweisen.

**Bew.:** Wähle zu  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  den „guten Atlas“  $(V_\nu, x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  aus Satz 1.30.

Wähle  $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } \gamma \subset \overline{B_2(0)}$  mit  $\gamma \geq 0$  und  $\gamma > 0$  auf  $\overline{B_1(0)}$ ,

$$\text{z.B. } \gamma(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{4-\|x\|^2}} & \text{falls } \|x\| < 2 \\ 0 & \text{falls } \|x\| \geq 2 \end{cases}$$

Definiere Funktionen  $\alpha_\nu$  durch

$$\alpha_\nu(p) := \begin{cases} \gamma(x_\nu(p)) & \text{falls } p \in V_\nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann haben die  $\alpha_\nu$  abgeschlossenen Träger in  $V_\nu$ .

Da die  $(W_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  die Menge  $\mathcal{M}$  schon überdecken gilt:

$$\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \quad \text{ist positiv auf } \mathcal{M}.$$

Außerdem sind die  $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  lokal endlich (da  $(V_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  lokal endlich ist).

Setze  $\varphi_\nu := \frac{\alpha_\nu}{\alpha}$ , dann gilt:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu = \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu}{\alpha} = 1$$

Die  $\varphi_\nu$  haben alle gewünschten Eigenschaften. □

## 1.31 Jede $C^2$ -Mannigfaltigkeit ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit

**Satz:** Jede  $C^2$ -Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  kann mit einer Riemannschen Metrik versehen werden.

**Bew:** Es sei  $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$  ein Atlas und  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  eine dem Atlas untergeordnete Partition der Eins. (D.h.  $\forall \nu \in \mathbb{N} : \text{supp } \varphi_\nu \subset U_\lambda$  für ein  $\lambda \in \Lambda$ )  
Für  $v, w \in T_p \mathcal{M}$  definiere:

$$\langle v, w \rangle := \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N} \\ \text{supp } \varphi_\nu \in U_\lambda}} \varphi_\nu(p) \sum_{i=1}^n v_\lambda^i w_\lambda^i$$

wobei  $v = \sum_{i=1}^n v_\lambda^i \partial_{x_\lambda^i}$ ,  $w = \sum_{i=1}^n w_\lambda^i \partial_{x_\lambda^i}$  mit den kanonischen Basisvektoren  $\partial_{x_\lambda^1}, \dots, \partial_{x_\lambda^n}$  der Karte  $x_\lambda$ .  $\square$

Wenn man Mannigfaltigkeiten bezüglich der differenzierbaren bzw. Riemannschen Struktur vergleichen möchte, so brauchen wir folgende Begriffe:

## 1.32 Lokale Diffeomorphismen

**Def:** Es seien  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten.  
Eine surjektive, stetige Abbildung  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt *lokaler  $C^k$ -Diffeomorphismus*, falls für alle  $p \in \mathcal{M}$  eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  in  $\mathcal{M}$  und eine offene Umgebung  $V$  von  $f(p)$  in  $\mathcal{N}$  existieren, so dass

$$f|_U : U \rightarrow V$$

ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist.

**Bsp:** Setze  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  mit  $f(t) := (\cos t, \sin t)^T$ .  
Dann ist  $f$  nicht injektiv, aber ein lokaler  $C^\infty$ -Diffeomorphismus, denn:  
Zu  $t_0 \in \mathbb{R}$  wähle  $U := (t_0 - \pi, t_0 + \pi)$  und  $V := S^1 \setminus \{-f(t_0)\}$ .

## 1.33 Isometrie

**Def:** i) Seien  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{N}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{N}})$  semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten.  
Dann heißt ein lokaler Diffeomorphismus  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  *lokale Isometrie*, falls

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle_{\mathcal{N}} = \langle v, w \rangle_{\mathcal{M}} \quad \forall p \in \mathcal{M} \quad \forall v, w \in T_p \mathcal{M}$$

ii) Ist eine lokale Isometrie  $\varphi$  zusätzlich injektiv, d.h.  $\varphi$  ist ein Diffeomorphismus, so heißt sie *Isometrie*.

**Bsp:** Beispiel zu 1.32 mit dem „Skalarprodukt“ auf  $\mathbb{R}^2$  eingeschränkt auf  $T_p S^1$  ist eine lokale Isometrie.  
 $S^n$  und  $5S^n$  sind diffeomorph aber nicht isometrisch (werden wir später sehen).



## 1.34 Isometrien bezüglich des euklidischen Skalarprodukts

**Bsp:** Frage: Was sind Isometrien  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bezüglich des euklidischen Skalarprodukts?

In  $p \in \mathbb{R}^n$  gilt für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $Av := d\varphi_p(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$ , dass

$$v \cdot A^T A w = Av \cdot Aw = v \cdot w$$

D.h.  $A^T A = \text{id}$ . Damit lautet die Antwort auf die obige Frage: Isometrien bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  erfüllen  $d\varphi_p \in \mathcal{O}(n)$ .

Bsp:  $\varphi(x) = Ax + b$  mit  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathcal{O}(n)$

## 1.35 Integration auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

**Idee:** Betrachte die Situation zunächst lokal.

Es sei  $(U, x)$  eine Karte und  $f \in C^0(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ .

Erster Ansatz: Integriere im Bildbereich der Karte durch:

$$\int_{x(U)} \underbrace{(f \circ x^{-1})}_{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}}(t) dt \quad (+)$$

Frage: Ist (+) wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Karte?

Transformationssatz liefert:

$$\int_{\varphi(V)} g(y) dy = \int_V (g \circ \varphi)(x) |\det D\varphi| dx$$

Wähle  $g = f \circ y^{-1}$  und  $\varphi = y \circ x^{-1}$

Wir erhalten:

$$\int_{y(U)} (f \circ y^{-1})(t) dt = \int_{x(U)} (f \circ x^{-1})(t) |\det D(y \circ x^{-1})| dt$$

Problem: Der Integrand rechts enthält den zusätzlichen Faktor  $|\det D(y \circ x^{-1})|$ .

Idee: Versuche den Faktor zu kompensieren, indem wir einen zusätzlichen Term einführen.

Vorüberlegungen:  $(g_{ij}^y)$  Metrik in  $y$ -Koordinaten.

$(g_{ij}^x)$  Metrik in  $x$ -Koordinaten.

$$g_{ij}^y = \sum_{k,l=1}^n g_{kl}^x \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right)_{k,i=1}^n & \text{ ist die Jacobi-Matrix von } x \circ y^{-1} \\ \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right)_{i,k=1}^n & \text{ ist die Jacobi-Matrix von } y \circ x^{-1} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\det \left( \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right)_{k,i=1}^n = \det(D(x \circ y^{-1})) = \det(D(y \circ x^{-1}))^{-1} = \frac{1}{\det(D(y \circ x^{-1}))}$$

$$G^y := (g_{ij}^y)_{i,j=1}^n \quad G^x := (g_{ij}^x)_{i,j=1}^n$$

$$\det G^y = \det \left( \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right) \det G^x \det \left( \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \right) = \det G^x \left( \det \left( \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right) \right)^2$$

Es folgt:

$$\sqrt{\det(G^y(y))} = \sqrt{\det(G^x(x))} \cdot \frac{1}{|\det D(y \circ x^{-1})|}$$

## 1.36 Integration mit verschiedenen Karten

**Lemma:** Es seien  $x, y$  zwei Karten auf  $U \subset \mathcal{M}$  und es sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, sodass  $(f \circ x^{-1})\sqrt{\det G^x}$  integrierbar ist.

Dann ist  $(f \circ y^{-1})\sqrt{\det G^y}$  integrierbar und es gilt:

$$\int_{x(U)} (f \circ x^{-1})(t) \sqrt{\det G^x(t)} dt = \int_{y(U)} (f \circ y^{-1})(t) \sqrt{\det G^y(t)} dt$$

**Bew:**

$$\begin{aligned} \int_{y(U)} (f \circ y^{-1})(t) \sqrt{\det G^y(t)} dt &= \int_{x(U)} (f \circ y^{-1})(y \circ x^{-1}) \frac{\sqrt{\det G^x(t)} |\det D(y \circ x^{-1})|}{|\det D(y \circ x^{-1})|} dt \\ &= \int_{x(U)} (f \circ x^{-1}) \sqrt{\det G^x(t)} dt \end{aligned}$$

□

## 1.37 Integrierbarkeit

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit „gutem Atlas“  $(V_\nu, x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  und zugehöriger Partition der Eins  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ .

a) Dann heißt eine Funktion  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  integrierbar, falls

- i) für alle  $\nu \in \mathbb{N}$  die Funktionen  $((f\varphi_\nu) \circ x_\nu^{-1})\sqrt{\det G_\nu} : x_\nu(V_\nu) \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar sind. (Dabei ist  $G_\nu = ((g_\nu)_{ij})_{i,j=1}^m$ , wobei  $(g_\nu)_{ij}$  die Metrik bezüglich der Karte  $x_\nu$  ist.)
- ii) die Summe

$$\int_{\mathcal{M}} f \, d\mu := \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \int_{x_\nu(V_\nu)} (f\varphi_\nu)(x_\nu^{-1}(t))\sqrt{\det G_\nu(t)} \, dt$$

endlich ist.

- b) Ist die charakteristische Funktion  $\chi_U$  für  $U \subset \mathcal{M}$  integrierbar, so definieren wir das Maß  $\mu(U)$  durch

$$\mu(U) := \int_{\mathcal{M}} \chi_U \, d\mu$$

- c) Eine Funktion  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar, falls

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \quad \text{und} \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$$

integrierbar sind. In diesem Fall definieren wir:

$$\int_{\mathcal{M}} f \, d\mu := \int_{\mathcal{M}} f^+ \, d\mu - \int_{\mathcal{M}} f^- \, d\mu$$

- d) Den Vektorraum der integrierbaren Funktionen nennen wir  $L^1(\mathcal{M})$ . Er ist ein Banachraum mit der Norm

$$f \mapsto \int_{\mathcal{M}} |f| \, d\mu = \int_{\mathcal{M}} f^+ \, d\mu + \int_{\mathcal{M}} f^- \, d\mu$$

## 1.38 Integration auf der Einheitskugel

**Bsp:** Es sei  $\mathcal{M} = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

Berechne  $\int_{S^2} f \, d\mu$  mit  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Betrachte Polarkoordinaten  $(\vartheta, \varphi)$  gegeben durch:

$$F : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 : (\vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$(g_{ij})_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad \det G = \sin^2 \vartheta$$

$$\int_{\mathcal{M}} f \, d\mu = \int_{(0,\pi) \times (0,2\pi)} f(\vartheta, \varphi) |\sin \vartheta| \, d(\vartheta, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

Sei  $f \equiv 1$ , dann ist

$$\text{Oberfläche von } S^2 = 2\pi \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta = 2\pi[-\cos \vartheta]_0^\pi = 2\pi(1+1) = 4\pi$$

**Bem:** Die Partition der 1 muss nicht stetig sein.

Man kann auch charakteristische Funktionen von Mengen  $(W_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  nehmen, sodass  $\sum_{\nu \in \mathbb{N}} \chi_{W_\nu} = 1$  (d.h.  $W_\nu$  sind disjunkt).

Man fordert: Ist  $x_\nu$  Karte mit  $x_\nu : V_\nu \rightarrow \mathbb{R}^m$  und ist  $W_\nu \subset V_\nu$ , so muss  $x_\nu(W_\nu)$  messbar sein.

## 1.39 Invarianz des Integrals

**Satz:** Die Definition des Integrals ist unabhängig von der Wahl des Atlas und der Partition der Eins.

**Bew:** Sei  $(V_l, y_l)$  ein anderer Atlas mit untergeordneter Zerlegung der Eins  $(\mu_l)_{l \in \mathbb{N}}$ . O.B.d.A. gelte  $f \geq 0$ , dann folgt:

$$\begin{aligned} \int_{x_\nu(U_\nu)} (f \underbrace{\sum_{m \in \mathbb{N}} \mu_m \varphi_\nu}_{=1}) \sqrt{\det G_x^\nu} \, dt &= \int_{x_\nu(U_\nu)} \sum_{m \in \mathbb{N}} (f \varphi_\nu \mu_m) \sqrt{\det G_x^\nu} \, dt \\ &\stackrel{\text{Mon. Konv.}}{=} \sum_{m \in \mathbb{N}_{x_\nu}} \int_{(U_\nu)} (f \varphi_\nu \mu_m) \sqrt{\det G_x^\nu} \, dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}_{y_m(V_m)}} \int (f \varphi_\nu \mu_m) \sqrt{\det G_y^m} \, dt \end{aligned}$$

Somit erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} f \, d\mu &= \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{x_\nu(U_\nu)}} \int (f \varphi_\nu) \sqrt{\det G_x^\nu} \, dt \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}_{y_m(V_m)}} \int (f \varphi_\nu \mu_m) \sqrt{\det G_y^m} \, dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{y_m(V_m)}} \int (f \varphi_\nu \mu_m) \sqrt{\det G_y^m} \, dt \\ &\stackrel{\text{Mon. Konv.}}{=} \sum_{m \in \mathbb{N}_{y_m(V_m)}} \int \left( f \mu_m \underbrace{\sum_{\nu \in \mathbb{N}} \varphi_\nu}_{=1} \right) \sqrt{\det G_y^m} \, dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}_{y_m(V_m)}} \int (f \mu_m) \sqrt{\det G_y^m} \, dt \\ &= \int_{\mathcal{M}} f \, d\mu \end{aligned}$$





# Kapitel 2

## Multilinear- und Differentialformen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Formen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum  $V$ . Später werden wir dann  $V := T_p\mathcal{M}$  betrachten.

### 2.1 Alternierende Formen

**Def:** i) Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum.

Unter einer *alternierenden  $k$ -Form*  $\omega$  auf  $V$  versteht man eine multilineare Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft:

Sind  $v_1, \dots, v_k \in V$  linear abhängig, so gilt  $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$

ii) Die alternierenden  $k$ -Formen auf  $V$  bilden einen Vektorraum mittels

$$(\omega + \nu)(v_1, \dots, v_k) := \omega(v_1, \dots, v_k) + \nu(v_1, \dots, v_k)$$

$$(\lambda\omega)(v_1, \dots, v_k) := \lambda\omega(v_1, \dots, v_k)$$

Dieser wird mit  $\text{Alt}^k V$  bezeichnet.

iii) Wir setzen  $\text{Alt}^0 V := \mathbb{R}$ .

**Bem:** Es gilt  $\text{Alt}^1 V = V^*$ .

### 2.2 Äquivalenzen der multilinearen Abbildung

**Lemma:** Für multilineare Abbildungen  $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow W$  (wobei  $W$  auch ein Vektorraum sein soll) sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (1)  $\omega$  ist alternierend, d.h.  $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$ , wenn  $v_1, \dots, v_k$  linear abhängig sind.

(2)  $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$ , wenn unter den  $v_1, \dots, v_k$  zwei gleich sind, d.h.  $\exists i \neq j$  mit  $v_i = v_j$ .

(3) Bei Vertauschung zweier Variablen in  $\omega$  dreht sich das Vorzeichen um.  
Das heißt für  $i < j$  gilt:

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

(4) Ist  $\tau : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  eine Permutation, so gilt:

$$\omega(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) = \text{sgn}(\tau)\omega(v_1, \dots, v_k)$$

**Bew:**

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Trivial.

(3)  $\Rightarrow$  (2) : Trivial.

(3)  $\Leftrightarrow$  (4) : Folgt aus der Definition des Signums.

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Gilt  $v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \alpha_j v_j$ , so nutze die Linearität, um aus (2) die Eigenschaft (1) zu folgern.

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Aus (2) folgt

$$\omega(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) = 0$$

Nutze Multilinearität und (2), dann folgt

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) + \omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) = 0$$

□

## 2.3 Alternierende Formen auf linearen Abbildungen

**Def:** Jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  definiert eine lineare Abbildung

$$\text{Alt}^k f : \text{Alt}^k W \rightarrow \text{Alt}^k V$$

durch

$$((\text{Alt}^k f)(\omega))(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

bzw.  $\text{Alt}^0 f := \text{id}_{\mathbb{R}}$ .

**Bem:** i) Es gilt:  $\text{Alt}^k \text{id}_V = \text{id}_{\text{Alt}^k V}$ .



ii) Es gilt

$$\text{Alt}^k(g \circ f) = \text{Alt}^k f \circ \text{Alt}^k g$$

für  $f : V \rightarrow W$  und  $g : W \rightarrow X$  linear, denn:

Zunächst ist für beliebige  $w_1, \dots, w_k \in W$ :

$$((\text{Alt}^k g)(\omega_X))(w_1, \dots, w_k) = \omega_X(g(w_1), \dots, g(w_k)) =: \omega_W(w_1, \dots, w_k)$$

Dann erhält man:

$$\begin{aligned} (\text{Alt}^k f)(\omega_W)(v_1, \dots, v_k) &= \omega_W(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= \omega_X(g(f(v_1)), \dots, g(f(v_k))) \\ &= ((\text{Alt}^k(g \circ f))(\omega_X))(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

□

iii) Statt  $\text{Alt}^k f$  schreiben wir auch  $f^*$  und sprechen von der durch  $f$  aus  $\omega$  induzierten  $k$ -Form.

## 2.4 Komponenten einer alternierenden Form

**Def:** Ist  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis von  $V$  und  $\omega$  sei eine alternierende  $k$ -Form auf  $V$ , so heißen die Zahlen

$$a_{\mu_1, \dots, \mu_k} := \omega(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k})$$

für  $1 \leq \mu_i \leq n$  die *Komponenten* von  $\omega$  bezüglich der Basis.

**Bem:** Es gilt für alle Permutationen  $\tau$ :

$$a_{\mu_{\tau(1)}, \dots, \mu_{\tau(k)}} = \text{sgn}(\tau) a_{\mu_1, \dots, \mu_k}$$

Daher genügt es, die  $a_{\mu_1, \dots, \mu_k}$  für  $\mu_1 < \dots < \mu_k$  zu kennen.

Tatsächlich können wir  $a_{\mu_1, \dots, \mu_k}$  für  $\mu_1 < \dots < \mu_k$  beliebig vorschreiben.

## 2.5 Die alternierenden Formen als $\mathbb{R}$ -Vektorraum

**Lemma:** Ist  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis von  $V$ , so ist durch

$$T : \text{Alt}^k V \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} : \omega \mapsto (\omega(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}))_{\mu_1 < \dots < \mu_k}$$

ein linearer Isomorphismus gegeben.

**Bew:** Die Abbildung ist linear, denn die Multilinearität von  $\omega$  impliziert für  $v_j^{(i)} \in \mathbb{R}$ :

$$\omega \left( \sum_{\mu_1=1}^n v_{\mu_1}^{(1)} e_{\mu_1}, \dots, \sum_{\mu_k=1}^n v_{\mu_k}^{(k)} e_{\mu_k} \right) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n v_{\mu_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot v_{\mu_k}^{(k)} \cdot \omega(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k})$$

Die Injektivität der Abbildung zeigt man wie folgt:

Ist  $\omega(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}) = 0$  für  $\mu_1 < \dots < \mu_k$ , so folgt aus der Eigenschaft „ $\omega$  ist alternierend“, dass  $\omega(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}) = 0 \forall \mu_1, \dots, \mu_k$ .

Die Abbildung ist auch surjektiv:

Ist nämlich  $(a_{\mu_1, \dots, \mu_k})_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$  beliebig vorgegeben, so definiere:

$$a_{\mu_1, \dots, \mu_k} := \begin{cases} 0 & \text{falls zwei Indizes gleich sind} \\ \operatorname{sgn}(\tau) a_{\mu_{\tau(1)}, \dots, \mu_{\tau(k)}} & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei  $\tau$  die Permutation ist, die die Indizes der Größe nach ordnet.

Dann ist

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n v_{\mu_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot v_{\mu_k}^{(k)} a_{\mu_1, \dots, \mu_k}$$

die gesuchte  $k$ -Form. □

## 2.6 Dimension der alternierenden Formen

**Korollar:** Ist  $\dim V = n$ , so gilt

$$\dim \operatorname{Alt}^k V = \binom{n}{k}$$

Für die Integrationstheorie auf  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten benötigen wir alternierende  $n$ -Formen. Es gilt im Speziellen:

$$\dim \operatorname{Alt}^n V = \binom{n}{n} = 1$$

## 2.7 Eindeutigkeit der alternierenden Form

**Korollar:** Ist  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis von  $V$  und  $a \in \mathbb{R}$ , so gibt es genau eine alternierende  $n$ -Form  $\omega$  auf  $V$  mit

$$\omega(e_1, \dots, e_n) = a.$$

## 2.8 Determinante als alternierende Form

**Bem:** i) Für die Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^n$  und  $a = 1$  ist dies die *Determinante*:

$$\det : M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Aufgefasst als Multilinearform der Spaltenvektoren.

ii) Die Determinante ist die einzige Abbildung vom Raum der  $(n \times n)$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , die multilinear alternierend in den Spalten ist und der Einheitsmatrix den Wert 1 zuordnet.

## 2.9 Determinante von Endomorphismen

**Lemma:** Ist  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  linear, so ist

$$\text{Alt}^n f : \text{Alt}^n V \rightarrow \text{Alt}^n V$$

die Multiplikation mit  $\det f \in \mathbb{R}$

**Bew:** Da  $\text{Alt}^n V$  eindimensional ist und da  $\text{Alt}^n f$  linear ist, gilt:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : (\text{Alt}^n f)(\omega) = \alpha \omega \quad \forall \omega \in \text{Alt}^n V$$

Es sei  $(e_1, \dots, e_n)$  die Basis von  $V$  und  $f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ .

**Bem:**  $\det f = \det A$  mit  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$

$$\begin{aligned} ((\text{Alt}^n f)(\omega))(e_1, \dots, e_n) &= \omega(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\ &= \omega \left( \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} e_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} \cdot \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \text{sgn}(i_1, \dots, i_n) \cdot a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} \cdot \omega(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det f \cdot \omega(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Leibniz-Regel für die Determinante angewandt.  $\square$

## 2.10 Differentialformen

- Def:**
- i) Eine *Differentialform* vom Grad  $k$  (oder kurz  $k$ -Form) auf einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist eine Abbildung, die jedem  $p \in \mathcal{M}$  eine alternierende  $k$ -Form  $\omega_p \in \text{Alt}^k T_p \mathcal{M}$  zuweist.
  - ii) Eine  $k$ -Form  $\omega$  auf  $\mathcal{M}$  bezüglich einer Karte  $(U, x)$  heißt stetig bzw. differenzierbar, falls die Komponentenfunktionen

$$\omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} := \omega(\partial_{x^{\mu_1}}, \dots, \partial_{x^{\mu_k}}) : U \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig bzw. differenzierbar sind.

$\omega$  heißt stetig bzw. differenzierbar auf  $\mathcal{M}$ , falls  $\omega$  bezüglich aller Karten eines Atlas von  $\mathcal{M}$  stetig bzw. differenzierbar ist.

- iii) Der Vektorraum der einmal stetig differenzierbaren  $k$ -Formen auf  $\mathcal{M}$  wird mit  $\Omega^k \mathcal{M}$  bezeichnet.

- Bem:** i) Ist  $\omega$  bezüglich eines Atlas stetig, differenzierbar, ..., so auch bezüglich jedes anderen Atlas (nutze Multilinearität).  
Voraussetzung ist genügende Differenzierbarkeit des Kartenwechsels.
- ii)  $\Omega^0 \mathcal{M} = C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ , da  $\text{Alt}^0 T_p \mathcal{M} = \mathbb{R}$ .

## 2.11 Das Differential von Formen auf Mannigfaltigkeiten

**Def:** Ist  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  stetig differenzierbar, so induziert  $f$  eine Abbildung

$$f^* : \Omega^k \mathcal{N} \rightarrow \Omega^k \mathcal{M}$$

durch

$$(f^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) := \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k))$$

für  $\omega \in \Omega^k \mathcal{N}$  und  $v_1, \dots, v_k \in T_p \mathcal{M}$ .

- Bem:** i) Es sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar.  
Dann heißt die durch  $p \mapsto df_p \in \text{Alt}^1 T_p \mathcal{M} = T_p^* \mathcal{M}$  gegebene 1-Form  $df \in \Omega^1 \mathcal{M}$  das *Differential* von  $f$ .
- ii) Fasse  $df_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_p \mathbb{R}$  als Abbildung  $df_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  auf, da  $T_p \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ .

## 2.12 Die Einschränkung von 1-Formen auf eine Karte

**Lemma:** Ist  $\omega$  eine 1-Form auf  $\mathcal{M}$  und  $(U, x)$  eine Karte, so gilt

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$$

wobei  $\omega_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\omega_i := \omega|_U(\partial_{x^i})$  gegeben ist.

Für  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar gilt ferner:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

mit  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{d}{dt} f(x^{-1}(x(p) + te_i))|_{t=0} = df(\partial_{x^i})$ .

**Bew:** Es sei  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_{x^i} \in T_p \mathcal{M}$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ .  
Dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega|_U \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_{x^i} \right) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\omega|_U(\partial_{x^i})}_{=: \omega_i} \\ dx^i \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \partial_{x^j} \right) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{dx^i(\partial_{x^j})}_{=: \delta_{ij}} = \alpha_i \end{aligned}$$

Dies zeigt:

$$\omega|_U(v) = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i(v) \quad \forall v \in T_p \mathcal{M}$$

Es gilt außerdem:

$$df = \sum_{i=1}^n df(\partial_{x^i}) dx^i \quad \text{und} \quad df(\partial_{x^i}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

□



# Kapitel 3

## Orientierung und Integration auf Mannigfaltigkeiten

### 3.1 Orientierung in Vektorräumen

**Erinnerung:** Orientierung eines Vektorraums  $V$  mit Dimension  $n$ .  
Es sei  $\mathcal{B}(V)$  die Menge aller Basen in  $V$ .  
Führe folgende Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{B}(V)$  ein:

$$\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n) \sim \mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \det \mathcal{M}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} > 0$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  die Matrix der Basistransformation von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$ .

**Def:** Eine *Orientierung* in  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Basen

$$[(a_1, \dots, a_n)] \in \mathcal{B}(V) / \sim$$

- Bem:**
- i) Es gibt genau zwei mögliche Orientierungen von  $V$ .
  - ii) Ist eine Orientierung  $O_V$  auf  $V$  fest vorgegeben, so nennen wir alle  $\mathcal{A} \in O_V$  positiv orientiert und alle  $\mathcal{A} \notin O_V$  negativ orientiert.

### 3.2 Orientierung im $\mathbb{R}^n$

- Bsp:**
1. Die Orientierung  $O_{\mathbb{R}^n} = [(e_1, \dots, e_n)]$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt die positive Orientierung des  $\mathbb{R}^n$ .
  2. Im  $\mathbb{R}^2$  sind  $(a_1, a_2) \in O_{\mathbb{R}^2}$  genau dann, wenn  $\angle(a_1, a_2) \in (0, \pi)$ .
  3. Im  $\mathbb{R}^3$  sind  $(a_1, a_2, a_3) \in O_{\mathbb{R}^3}$  genau dann, wenn  $(a_1, a_2, a_3)$  erfüllen die „rechte-Hand-Regel“.

Jetzt wollen wir diesen Begriff auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

### 3.3 Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten

**Def:** i) Es sei  $\mathcal{M}^n$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.  
Eine Orientierung auf  $\mathcal{M}$  ist eine Familie von Orientierungen der Tangentialräume

$$O_{\mathcal{M}} = \{O_{T_p\mathcal{M}}\}_{p \in \mathcal{M}}$$

mit der folgenden Eigenschaft:

Zu jedem  $p \in \mathcal{M}$  existiert eine Karte  $(U, x)$ , s.d. für die kanonische Basis von  $T_p\mathcal{M}$  gilt:

$$(\partial_{x^1}(q), \dots, \partial_{x^n}(q)) \in O_{T_p\mathcal{M}} \quad \forall q \in U$$

- ii)  $\mathcal{M}$  heißt genau dann orientierbar, wenn eine Orientierung  $O_{\mathcal{M}}$  existiert.  
iii) Sei  $(\mathcal{M}, O_{\mathcal{M}})$  eine orientierte Mannigfaltigkeit.  
Eine Karte  $(U, x)$  heißt positiv (negativ) orientiert, falls

$$(\partial_{x^1}(q), \dots, \partial_{x^n}(q)) \in (\notin) O_{T_p\mathcal{M}} \quad \forall q \in U$$

### 3.4 Umkehrung der Orientierung

**Bem:** Es sei  $(U, x)$  eine Karte und es sei

$$x^-(p) := (-x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)) \quad \forall p \in U$$

Dann gilt:  $(U, x)$  ist positiv orientiert genau dann, wenn  $(U, x^-)$  negativ orientiert ist.

**Bsp:**

- $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  und  $\text{graph } f := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$  für  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sind orientierbar, da man sie durch eine einzige Karte überdecken kann.
- $S^1$  ist orientierbar, denn für  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  ist  $O_{T_p S^1} = [\gamma'(t)]$  eine Orientierung.

### 3.5 Kriterium für Orientierbarkeit

**Satz:**  $\mathcal{M}^1$  ist genau dann orientierbar, falls ein Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $\mathcal{M}$  existiert, sodass für alle Karten  $(U, x), (V, y) \in \mathcal{A}$  mit  $U \cap V \neq \emptyset$  gilt:

$$\det(D(y \circ x^{-1})|_{x(p)}) > 0 \quad \forall p \in U \cap V$$

**Bew:** „ $\Rightarrow$ “: Es sei  $O_{\mathcal{M}}$  eine Orientierung von  $\mathcal{M}$ .

Nach Definition existiert für alle  $p \in \mathcal{M}$  eine Karte  $(U_p, x_p)$  mit

$$(\partial_{x^1}(q), \dots, \partial_{x^n}(q)) \in O_{T_p\mathcal{M}} \quad \forall q \in U_p$$



Jetzt seien  $(U, x)$  und  $(V, y)$  zwei solche Karten mit  $U \cap V \neq \emptyset$ .  
Für  $p \in U \cap V$  gilt:

$$D(y \circ x^{-1})|_{x(p)} = M \quad (*)$$

wobei  $M$  die Matrix des Basiswechsels von der Basis  $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}\}$  auf die Basis  $\{\partial_{y^1}, \dots, \partial_{y^n}\}$  ist. (Vgl. 1.16)

Da beide Basen positiv orientiert sind, folgt  $\det M > 0$ . (\*\*)

„ $\Leftarrow$ “: Es sei  $p \in \mathcal{M}$  und  $\mathcal{A}$  der Atlas aus der Voraussetzung. Und sei weiter  $(U, x) \in \mathcal{A}$  eine Karte um  $p$ . Dann definiere

$$O_{T_p \mathcal{M}} := [(\partial_{x^1}(p), \dots, \partial_{x^n}(p))]$$

Wegen (\*) und (\*\*) definiert dies eine Orientierung. □

### 3.6 Orientierbarkeit und $n$ -Formen

**Satz:** Eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^n$  ist genau dann orientierbar, falls eine  $n$ -Form  $\omega \in \Omega^n \mathcal{M}$  mit der Eigenschaft  $\omega_p \neq 0$  für alle  $p \in \mathcal{M}$  existiert.

**Bew:** „ $\Leftarrow$ “: Sind  $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$  und  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  Basen von  $T_p \mathcal{M}$ , so sei

$$a_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} b_j$$

für eine Matrix  $M$ .

( $M = \mathcal{M}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  heißt Matrix des Basiswechsels von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$ .)

Wie in Lemma 2.9 folgt:

$$\omega_p(a_1, \dots, a_n) = \det(M) \omega_p(b_1, \dots, b_n)$$

Daher haben  $\omega_p(a_1, \dots, a_n)$  und  $\omega_p(b_1, \dots, b_n)$  das selbe Vorzeichen, falls  $\mathcal{A}$  gleich orientiert ist wie  $\mathcal{B}$ . Damit definiert

$$O_{T_p \mathcal{M}} := \{(a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n) \text{ Basis von } T_p \mathcal{M} \text{ und } \omega_p(a_1, \dots, a_n) > 0\}$$

eine Orientierung.

„ $\Rightarrow$ “: Betrachte eine Zerlegung der Eins.

$\mathcal{A} = (U_i, x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sei ein Atlas aus positiv orientierten Karten und  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine untergeordnete Partition der Eins. (Das heißt  $\text{supp } \varphi_i \subset U_i$ .)

Zu jeder Karte  $x_i$  definiere eine  $n$ -Form  $\omega_i$ , sodass gilt

$$\omega_i(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}) = 1.$$

(Dies definiert eine eindeutige Form aus  $\Omega^n U_i$ , da der Vektorraum der  $n$ -Formen eindimensional ist.)

Definiere

$$\omega_p := \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\varphi_i \omega_i}_{\in \Omega^n \mathcal{M}}.$$

Behauptung:  $\omega_p \neq 0 \quad \forall p \in \mathcal{M}$ .

Es existiert ein  $j \in \mathbb{N}$  mit  $\varphi_j(p) > 0$ .

Sei  $(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n})$  die kanonische Basis von  $x_j$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega_p(\partial_{x^1}^{(p)}, \dots, \partial_{x^n}^{(p)}) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i^{(p)} \omega_{p,i}(\partial_{x^1}^{(p)}, \dots, \partial_{x^n}^{(p)}) \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \varphi_j(p) \underbrace{\omega_{p,j}(\partial_{x^1}^{(p)}, \dots, \partial_{x^n}^{(p)})}_{=1} > 0 \end{aligned}$$

Da bei (\*) gilt, denn:  $\forall i \in \mathbb{N}$  gilt  $\varphi_i(p) \geq 0$  und die positive Orientierung der  $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$  wird benutzt. □

### 3.7 Volumenform

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}^n$  eine orientierbare Mannigfaltigkeit mit Orientierung  $O$ .

Eine  $n$ -Form  $\omega \in \Omega^n \mathcal{M}$  mit  $\omega(a_1, \dots, a_n) > 0 \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in O_{T_p \mathcal{M}}$  heißt *Volumenform* von  $(\mathcal{M}, O)$ .

### 3.8 Orientierbarkeit über das Einheitsnormalenfeld

**Satz:** Es sei  $\mathcal{M}^n$  eine Hyperfläche des  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Dann gilt:

$\mathcal{M}$  ist genau dann orientierbar, wenn ein stetiges Einheitsnormalenfeld

$$\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : p \mapsto \nu(p) \in N_p \mathcal{M} = (T_p \mathcal{M})^\perp \quad \text{mit } \|\nu(p)\| = 1$$

existiert.

**Bew:** „ $\Rightarrow$ “: Es sei  $(O_{T_p \mathcal{M}})_{p \in \mathcal{M}}$  eine Orientierung auf  $\mathcal{M}$ .

Wähle  $\nu(p) \in N_p \mathcal{M}$  mit  $\|\nu(p)\| = 1$  sodass gilt

$$\underbrace{(v_1, \dots, v_n, \nu(p))}_{\in O_{T_p \mathcal{M}}} \in O_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Dies bestimmt  $\nu(p)$  eindeutig, da  $(T_p \mathcal{M})^\perp$  eindimensional ist und somit gibt es nur zwei Vektoren in  $(T_p \mathcal{M})^\perp$  mit  $\|\nu(p)\| = 1$ .

Wählen wir eine andere Basis  $(w_1, \dots, w_n) \in O_{T_p \mathcal{M}}$ , so ergibt sich mit der Matrix  $M$  des Basiswechsels von  $(v_1, \dots, v_n)$  nach  $(w_1, \dots, w_n)$  und der Matrix  $\widehat{M}$  des Basiswechsels  $(v_1, \dots, v_n, \nu(p))$  nach  $(w_1, \dots, w_n, \nu(p))$ :

$$0 < \det M = \det \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \widehat{M} \quad (*)$$

Zeige:  $\nu$  ist stetig.

Definiere ein Kreuzprodukt  $f_1 \times \dots \times f_n \in \mathbb{R}^{n+1}$  von Vektoren  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}^{n+1}$  durch:

$$(f_1 \times \dots \times f_n)_i = \det \begin{pmatrix} | & & | & | \\ f_1 & \cdots & f_n & e_i \\ | & & | & | \end{pmatrix}$$

Dann gilt:  $f_1 \times \dots \times f_n \neq 0$ , falls  $f_1, \dots, f_n$  linear unabhängig sind.

$$(f_1 \times \dots \times f_n) \cdot f_j = \sum_{i=1}^{n+1} (f_1 \times \dots \times f_n)_i \cdot f_{j,i} = \det \begin{pmatrix} | & & | & | \\ f_1 & \cdots & f_n & f_j \\ | & & | & | \end{pmatrix} = 0$$

Das heißt  $f_1 \times \dots \times f_n \in N_p \mathcal{M}$ . Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} | & & | & | \\ f_1 & \cdots & f_n & f_1 \times \dots \times f_n \\ | & & | & | \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} | & & | & | \\ f_1 & \cdots & f_n & \sum_{i=1}^{n+1} \det(f_1 \cdots f_n e_i) e_i \\ | & & | & | \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \det \begin{pmatrix} | & & | & | \\ f_1 & \cdots & f_n & e_i \\ | & & | & | \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} | & & | & | \\ f_1 & \cdots & f_n & e_i \\ | & & | & | \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

falls  $f_1, \dots, f_n$  linear unabhängig sind.

Für eine positiv orientierte Karte ergibt sich:

$$\nu(p) = \frac{\partial_{x^1}(p) \times \dots \times \partial_{x^n}(p)}{\|\partial_{x^1}(p) \times \dots \times \partial_{x^n}(p)\|}$$

Diese Abbildung ist stetig.

„ $\Leftarrow$ “: Existiert ein stetiges Normalenfeld  $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , so definiere:

$$(v_1, \dots, v_n) \in O_{T_p \mathcal{M}} \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n, \nu(p)) \in O_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

Wegen (\*) ist dies wohldefiniert.

Es sei  $(U, x)$  eine Karte und  $U$  zusammenhängend.

Wegen der Stetigkeit der Determinante gilt:

$$(\partial_{x^1}(p), \dots, \partial_{x^n}(p), \nu(p)) \in O_{\mathbb{R}^{n+1}} \quad \forall p \in U$$

oder

$$(\partial_{x^1}(p), \dots, \partial_{x^n}(p), \nu(p)) \notin O_{\mathbb{R}^{n+1}} \quad \forall p \in U$$

Im ersten Fall realisiert  $(U, x)$  die Orientierung und im zweiten Fall  $(U, x^-)$ .  $\square$

**Folgerung:** 1. Es gilt:  $S_r^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = r\}$  ist orientierbar, denn:  
 $T_p S_r^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v \cdot p = 0\}$ .  
 Das Vektorfeld  $\nu(p) := \frac{p}{r}$  ist ein stetiges Einheitsnormalenfeld.

2. Gleichungsdefinierte Hyperflächen sind orientierbar, denn:  
Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung und  $0 \in \mathbb{R}$  ein regulärer Wert von  $f$ .

Dann bildet  $\mathcal{M}^n := f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  eine Hyperfläche mit

$$T_p\mathcal{M} = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v \cdot \text{grad } f(p) = 0\}$$

Dann gilt:

$$N_p\mathcal{M} = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v = \alpha \text{grad } f(p), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

und  $\nu(p) = \frac{\text{grad } f(p)}{\|\text{grad } f(p)\|}$  ist stetiges Einheitsnormalenfeld.

3. Das Möbiusband ist nicht orientierbar.

Jetzt wollen wir Differentialformen integrieren. Auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten haben wir mit Hilfe der Metrik einen Integralbegriff entwickelt. Um das Integral für eine  $n$ -Form  $\omega \in \Omega^n\mathcal{M}$  zu definieren führen wir zunächst den Begriff des Dachproduktes von Linearformen ein.

### 3.9 Das äußere Produkt

**Def:** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum.

Es seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^* = \text{Alt}^1(V)$ .

Dann definieren wir  $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) \in \text{Alt}^k(V)$  durch:

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \cdots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \cdots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix} \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V$$

Aus den Eigenschaften der Determinante folgt, dass  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$  eine alternierende  $k$ -Form ist.

**Bsp:** i) Es sei  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  und  $e_1^*, \dots, e_n^*$  die duale Basis. Dann gilt:

$$(e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*)(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} e_1^*(v_1) & \cdots & e_1^*(v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n^*(v_1) & \cdots & e_n^*(v_n) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

da  $e_i^*(v_j)$  die  $i$ -te Komponente von  $v_j$  ist.

ii) Die Elemente  $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  bilden eine Basis von  $\text{Alt}^k V$ .

Vergleiche dazu Lemma 2.5 und nutze

$$(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i_j = \mu_j \quad \forall j \in \{1, \dots, k\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- iii) Ist  $\mathcal{M}$  eine Mannigfaltigkeit und  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Omega^1 \mathcal{M}$ , so definieren wir  $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)$  punktweise für  $p \in \mathcal{M}$ .  
Ist  $(U, x)$  eine Karte, so gilt:

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}) \stackrel{1.18}{=} \det E_n = 1$$

Jede andere Form  $\omega \in \Omega^n U$  lässt sich schreiben als

$$\omega(p) = f(p) \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$$

mit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Es sei  $\mathcal{M}$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  sowie  $\omega \in \Omega^n \mathcal{M}$  und  $(U, x)$  eine Karte.

Auf  $U$  ergibt sich  $\omega = f \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$  mit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dann definiere:

$$\int_U \omega = \int_{x(U)} f \circ x^{-1} dx$$

### 3.10 Integration auf orientierbaren Mannigfaltigkeiten

**Def:** Es sei  $(\mathcal{M}^n, O)$  eine orientierte, diff'bare Mannigfaltigkeit und  $\omega \in \Omega^n \mathcal{M}$ .  
Wähle einen Atlas  $(U_i, x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit untergeordneter Partition der Eins  $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .  
Wir sagen:  $\omega$  ist Lebesgue-integrierbar, falls

$$g_i := (\mu_i \omega)(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}) \circ x_i^{-1} : x_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Lebesgue-integrierbar ist und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_i(U_i)} |g_i(x)| dx < \infty.$$

Der von der Wahl der Zerlegung der Eins und der Karten unabhängige Wert

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_i(U_i)} g_i(x) dx =: \int_{\mathcal{M}} \omega$$

heißt das *Integral* von  $\omega$  über  $\mathcal{M}$ .

**Bem:** Es gilt:  $g_i = \mu_i f_i$  mit  $\omega|_{U_i} = f_i \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$  mit  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Frage:** Ist die Definition wirklich unabhängig von der Karte bzw. der Partition der Eins?

Wir prüfen die Unabhängigkeit des Integrals unter orientierungserhaltenden Kartenwechsel.

Dass dann die Summe bezüglich verschiedener Partitionen der Eins übereinstimmen, folgt wie im Satz 1.39.

Es seien Karten  $(U, x), (V, y)$  gegeben, die gleich orientiert sind.

$$\begin{aligned} y \circ x^{-1} &: x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V) \\ \omega &= f_x \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \\ \omega &= f_y \cdot (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen:

$$\int_{y(U \cap V)} f_y \circ y^{-1} dy = \int_{x(U \cap V)} f_x \circ x^{-1} dx$$

Dazu berechnet man mittels Substitutionsregel:

$$\int_{y(U \cap V)} f_y \circ y^{-1} dy = \int_{x(U \cap V)} (f_y \circ y^{-1} \circ y \circ x^{-1}) \left| \det \left( \frac{\partial(y \circ x^{-1})}{\partial x} \right) \right| dx$$

Ferner gilt  $f_x = \omega(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}) = \det M \cdot \omega(\partial_{y^1}, \dots, \partial_{y^n}) = \det M \cdot f_y$ , wobei  $M$  die Matrix des Basiswechsels ist.

Da  $M = \left( \frac{\partial(y \circ x^{-1})}{\partial x} \right)$  und da  $\det M > 0$  ist, also die Orientierung erhalten bleibt, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bem:** i) Auf einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit können  $k$ -Formen (mit  $k < n$ ) nicht integriert werden.

Allerdings kann man  $k$ -Formen auf  $\mathcal{M}^n$  auf orientierte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten  $\mathcal{N}$  einschränken und dann auf  $\mathcal{N}^k$  integrieren.

ii) Bsp.:  $U \subset \mathbb{R}^n$  sei offen und  $\omega$  sei stetige  $k$ -Form auf  $U$ .

Es sei  $\mathcal{N} \subset U$  eine in  $U$  enthaltene  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  und  $O$  eine Orientierung von  $\mathcal{N}$ .

Wir definieren  $\omega_{\mathcal{N}} \in \Omega^k \mathcal{N}$  durch:

$$\omega_{\mathcal{N},p}(v_1, \dots, v_k) = \omega_p(v_1, \dots, v_k) \quad \forall v_1, \dots, v_k \in T_p \mathcal{N}$$

iii) Konkret bedeutet das:

Es sei  $\mathcal{N} \subset U \subset \mathbb{R}^n$  eine orientierte eindimensionale Untermannigfaltigkeit und  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx^i$  eine stetige 1-Form in  $U$ .

Es sei  $\varphi : I \rightarrow V \subset \mathcal{N}$  (wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist) stetig und bijektiv, sodass  $x = \varphi^{-1}$  Karte ist.

Es gilt mit  $I = (a, b)$ :

$$\int_V \omega = \int_I \omega_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt$$

iv) Noch konkreter sei

$$\varphi : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

Diese Abbildung gibt die Orientierung vor.

Es gilt dann  $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$ .

$$\begin{aligned}\omega^{(1)} &:= xdx + ydy \\ \omega_{\varphi(t)}^{(1)}(\varphi'(t)) &= \cos t(-\sin t) + \sin t \cos t = 0 \\ \Rightarrow \int_{S^1} \omega^{(1)} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^{(2)} &:= -ydx + xdy \\ \omega_{\varphi(t)}^{(2)}(\varphi'(t)) &= -\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t = 1 \\ \int_{S^1} \omega^{(2)} &= \int_0^{2\pi} \omega_{\varphi(t)}^{(2)}(\varphi'(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi\end{aligned}$$

Drehen wir die Orientierung um (d.h. wählen wir  $\psi(t) = (\cos(-t), \sin(-t))$  statt  $\varphi(t)$ ), so ergibt sich  $\omega_{\psi(t)}^{(2)}(\psi'(t)) = -1$ , also  $\int_{-S^1} \omega^{(2)} = -2\pi$ .

**Def:** Ist  $\mathcal{M}$  eine orientierte Mannigfaltigkeit, so bezeichnen wir mit  $-\mathcal{M}$  die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  mit negativer Orientierung.





# Kapitel 4

## Dachprodukt und Cartan-Ableitung

Wir wollen nun ein  $\wedge$ -Produkt zwischen  $k$ - und  $l$ -Formen definieren.

### 4.1 Das Dachprodukt zweier alternierender Formen

**Satz:**  $V$  sei endlich dimensionaler Vektorraum. Dann gibt genau eine Abbildung

$$\text{Alt}^k V \times \text{Alt}^l V \rightarrow \text{Alt}^{l+k} V : (\omega, \sigma) \mapsto \omega \wedge \sigma$$

mit den folgenden Eigenschaften:

i)  $\omega \wedge \sigma$  ist linear in jedem Faktor, d.h.

$$\begin{aligned}(\omega_1 + \omega_2) \wedge \sigma &= (\omega_1 \wedge \sigma) + (\omega_2 \wedge \sigma) \\ \omega \wedge (\sigma_1 + \sigma_2) &= (\omega \wedge \sigma_1) + (\omega \wedge \sigma_2) \\ \lambda(\omega \wedge \sigma) &= (\lambda\omega) \wedge \sigma = \omega \wedge (\lambda\sigma)\end{aligned}$$

ii) Sind  $\psi_1, \dots, \psi_k, \eta_1, \dots, \eta_l \in V^*$ , so gilt:

$$(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k) \wedge (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_l) = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_l$$

**Bew:** Es sei  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  eine Basis von  $V^*$ .

Dann definieren wir für

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \cdot (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}) & a_{i_1, \dots, i_k} &\in \mathbb{R} \\ \sigma &= \sum_{j_1 < \dots < j_l} b_{j_1, \dots, j_l} \cdot (\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_l}) & b_{j_1, \dots, j_l} &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

das Produkt  $\omega \wedge \sigma$  durch:

$$\omega \wedge \sigma := \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} a_{i_1, \dots, i_k} \cdot b_{j_1, \dots, j_l} \cdot (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_l})$$

Das Produkt hat offensichtlich die Eigenschaften i) und ii).  
Es definiert außerdem eine alternierende Multilinearform.  
Die Eindeutigkeit folgt aus ii) und der Linearität.

□

## 4.2 Eigenschaften des Dachprodukts

**Bem:** i) Für  $a \in \mathbb{R}$  und  $\omega \in \text{Alt}^k V$  setze

$$a \wedge \omega := \omega \wedge a := a \cdot \omega$$

(um die Fälle  $k = 0$  oder  $l = 0$  abzudecken).

ii) Es gilt für  $\omega_1 \in \text{Alt}^k V$ ,  $\omega_2 \in \text{Alt}^l V$  und  $\omega_3 \in \text{Alt}^m V$ , dass

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

iii) Für  $\omega \in \text{Alt}^k V$  und  $\sigma \in \text{Alt}^l V$  gilt:

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \cdot (\sigma \wedge \omega)$$

(Betrachte die Definition von  $\omega \wedge \sigma$  aus dem Beweis 4.1 und die Permutation  $(k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k) \mapsto (1, \dots, k, k+1, \dots, k+l)$ .)

## 4.3 Distributivgesetz für das Dachprodukt

**Bsp:** Auf  $\mathbb{R}^3$  gilt:

$$\begin{aligned} (dx^1 + 5dx^3) \wedge (2dx^1 + 3dx^2 + dx^3) &= 2(dx^1 \wedge dx^1) + 3(dx^1 \wedge dx^2) + (dx^1 \wedge dx^3) \\ &\quad + 10(dx^3 \wedge dx^1) + 15(dx^3 \wedge dx^2) + 5(dx^3 \wedge dx^3) \\ &= 0 + 3(dx^1 \wedge dx^2) + (dx^1 \wedge dx^3) - 10(dx^1 \wedge dx^3) \\ &\quad - 15(dx^2 \wedge dx^3) + 0 \\ &= 3(dx^1 \wedge dx^2) - 9(dx^1 \wedge dx^3) - 15(dx^2 \wedge dx^3) \end{aligned}$$

**Bem:** Sind Differentialformen  $\omega \in \Omega^k \mathcal{M}$  und  $\sigma \in \Omega^l \mathcal{M}$  gegeben, so definieren wir  $\omega \wedge \sigma$  punktweise für  $p \in \mathcal{M}$ .

## 4.4 Die Cartansche Ableitung

**Satz:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Dann gibt es genau eine Möglichkeit, eine Sequenz linearer Abbildungen

$$0 \rightarrow \Omega^0 \mathcal{M} \xrightarrow{d} \Omega^1 \mathcal{M} \xrightarrow{d} \Omega^2 \mathcal{M} \xrightarrow{d} \Omega^3 \mathcal{M} \rightarrow \dots$$

so einzuführen, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für  $f \in \Omega^0 \mathcal{M} = C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$  ist  $df \in \Omega^1 \mathcal{M}$  das Differential von  $f$ .
- Es gilt die Komplexeigenschaft:  $d \circ d = 0$ .
- Ferner gilt eine Produktregel:

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^r (\omega \wedge d\eta)$$

für  $\omega \in \Omega^r \mathcal{M}$ ,  $\eta \in \Omega^s \mathcal{M}$ .

## 4.5 Lokale Darstellung der Cartanschen Ableitung

**Bem:** (i)  $d\omega$  heißt äußere oder *Cartansche Ableitung*.

(ii) Ist  $\omega \in \Omega^k \mathcal{M}$  und  $(U, x)$  eine Karte von  $\mathcal{M}$  und sei

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \cdot (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \quad (U)$$

Dann gilt notwendigerweise:

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} =: d_U \omega \quad (+)$$

D.h. bezüglich einer lokalen Karte ist  $d$  eindeutig bestimmt.

Beweis:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(a_{i_1, \dots, i_k} \cdot (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(a_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} (da_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) + a_{i_1, \dots, i_k} \wedge d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \end{aligned}$$

Es gilt:  $dx^{i_j}$  ist Differential von  $p \mapsto x^{i_j}(p)$ .

Also folgt  $d \circ dx^{i_j} = 0$  nach der Komplexeigenschaft und somit ist

$$d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = 0$$

nach mehrfachem Anwenden der Produktregel. Setze man dies ein, so erhält man zusammen mit 2.12 die gewünschte Aussage (+).

## 4.6 Existenz der Cartanschen Ableitung für ein Kartengebiet

**Bew:**  $d_{\mathcal{M}}$  sei immer die zu konstruierende Ableitung.

$d$  sei das Differential der Funktion  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Jetzt sei  $(U, x)$  eine Karte.

Jedes  $\omega \in \Omega^k U$  mit  $(U)$  muss notwendigerweise

$$d_U \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(a_{i_1, \dots, i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (*)$$

erfüllen (siehe 4.5(ii)).

Wir wählen (\*) als Definition.

Dann gilt:

- i)  $d_U$  ist linear.
- ii) die Bedingung a) ist erfüllt.

Bleibt die Komplexeigenschaft und die Produktregel zu zeigen.

Komplexeigenschaft:  $(d_U \circ d_U)\omega = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^k U$ .

Betrachte dazu  $\omega = f \cdot (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$

$$d_U \omega = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$d_U d_U \omega = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0$$

Da die Terme mit  $i = j$  verschwinden und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$  symmetrisch in  $i, j$  und  $dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$  ist und sich somit alle Terme mit  $i \neq j$  gegenseitig wegheben.

Produktregel:

Es seien  $\omega = f \cdot (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$  und  $\eta = g \cdot (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l})$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} d_U(\omega \wedge \eta) &= d_U(f \cdot g \cdot (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l})) \\ &= d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} g + f \frac{\partial g}{\partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= d\omega \wedge \eta + \sum_{i=1}^n f \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k (\omega \wedge d\eta) \end{aligned}$$

Für den Spezialfall  $\mathcal{M} = U$  ist der Satz damit bewiesen. □

## 4.7 Existenz der Cartanschen Ableitung für die ganze Mannigfaltigkeit

**Bew:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Wir wollen  $d_{\mathcal{M}}$  mittels Karten definieren.

Für  $\omega \in \Omega^k \mathcal{M}$  und eine Karte  $(U, x)$  definiere  $d_{\mathcal{M}}\omega$  durch (+).

Die Unabhängigkeit vom Kartenwechsel folgt aus:

$$d_U\omega|_{U \cap V} = d_{U \cap V}\omega = d_V\omega|_{U \cap V}$$

wobei  $(V, y)$  eine andere Karte sei und  $d_{U \cap V}\omega$  nach 4.6 eindeutig ist.

Da  $d_{\mathcal{M}}\omega|_U = d_U\omega$  ist, folgt weiterhin aus 4.6, dass  $d_{\mathcal{M}}$  die gewünschten Eigenschaften hat.

Dies zeigt die Existenz der Abbildung  $d_{\mathcal{M}}$ .

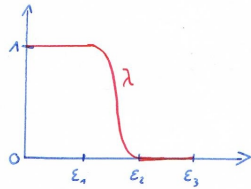
**Beh:**  $d_{\mathcal{M}}$  ist eindeutig, d.h. erfüllt ein  $d_{\mathcal{M}}$  die Anforderungen an eine Cartansche Ableitung, so gilt  $(d_{\mathcal{M}}\omega)_p = (d_U\omega)_p$ .

Wähle zu der Karte  $(U, x)$  in  $x(U)$  drei konzentrische Kugeln um  $x(p)$  mit den Radien  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ .

Setze  $U_i = x^{-1}(B_{\varepsilon_i}(x(p)))$ .

Wähle eine  $C^\infty$ -Funktion  $\tau : U_3 \rightarrow [0, 1]$  mit  $\tau|_{U_1} \equiv 1$ ,  $\tau|_{U_3 \setminus U_2} \equiv 0$ .

Dazu setze  $\tau(q) := \lambda(\|x(q) - x(p)\|)$  mit  $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$  von der Form:



Wir setzen

$$b_{i_1, \dots, i_k}(p) := \begin{cases} \tau(p) \cdot a_{i_1, \dots, i_k} & \text{für } p \in U_3 \\ 0 & \text{für } p \in \mathcal{M} \setminus U_3 \end{cases}$$

$$\xi^i(q) := \begin{cases} \tau(q) \cdot x^i(q) & \text{für } q \in U_3 \\ 0 & \text{für } q \in \mathcal{M} \setminus U_3 \end{cases}$$

Für

$$\tilde{\omega} := \sum_{i_1 < \dots < i_k} b_{i_1, \dots, i_k} \cdot (d\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi^{i_k})$$

folgt:

$$d_{\mathcal{M}}\tilde{\omega} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} db_{i_1, \dots, i_k} \wedge d\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi^{i_k}$$

da  $b, \xi$  auf ganz  $\mathcal{M}$  differenzierbar sind.

Außerdem gilt mit (+) für  $U$ :

$$(d_{\mathcal{M}}\tilde{\omega})_p = (d_U\tilde{\omega})_p$$

Weiter folgt:

$$(d_U \tilde{\omega})_p = (d_U \omega)_p$$

da  $\omega$  und  $\tilde{\omega}$  auf der Umgebung  $U_1 \subseteq U$  von  $p$  übereinstimmen.

Es bleibt zu zeigen:

$$(d_{\mathcal{M}} \tilde{\omega})_p = (d_{\mathcal{M}} \omega)_p$$

Wähle dazu  $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$  glatt mit  $\sigma_{\mathcal{M} \setminus U_1} \equiv 1$  und  $\sigma(p) = 0$ .

Dann gilt:  $\tilde{\omega} - \omega = \sigma(\tilde{\omega} - \omega)$ .

Aus den definierenden Eigenschaften für  $d_{\mathcal{M}}$  folgt:

$$d_{\mathcal{M}}(\tilde{\omega} - \omega) = d_{\mathcal{M}}\sigma \wedge \underbrace{(\tilde{\omega} - \omega)}_{=0 \text{ in } p} + \underbrace{\sigma}_{=0 \text{ in } p} d_{\mathcal{M}}(\tilde{\omega} - \omega)$$

$$\Rightarrow d_{\mathcal{M}}(\tilde{\omega} - \omega) \big|_p = 0. \quad \square$$

## 4.8 Natürlichkeit der Cartanschen Ableitung

**Lemma:** Sind  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und ist  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  differenzierbar, so gilt

$$f^* d\omega = d(f^* \omega) \quad (+)$$

für alle Differentialformen auf  $\mathcal{N}$ .

**Bem:**  $f^* \omega = \omega \circ f$ , falls  $\omega$  eine Nullform ist.

**Bew:** Es sei  $\omega \in \Omega^0 \mathcal{N}$ . Dann gilt  $f^* \omega = \omega \circ f$ . Dann folgt mit der Kettenregel und nach Definition von  $f^* d\omega$ :

$$d(f^* \omega) = d\omega_{f(p)} \circ df_p = (f^* d\omega)_p$$

Es sei  $(U, x)$  eine Karte von  $\mathcal{N}$ .

Dann gilt für

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \cdot (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$$

dass

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (da_{i_1, \dots, i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Die Anwendung von  $f^*$  liefert:

$$\begin{aligned} (f^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) &= \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(f(p)) \cdot (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} f^* a_{i_1, \dots, i_k} \cdot (f^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge f^* dx^{i_k})(v_1, \dots, v_k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

und

$$f^* d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f^* d(a_{i_1, \dots, i_k}) \wedge f^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge f^* dx^{i_k}$$

**Beh:**

$$d(f^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge f^* dx^{i_k}) = 0$$

Beweis der Behauptung:

Da  $x^{i_i}$  eine Nullform ist, gilt:

$$f^* dx^{i_i} = d(f^* x^{i_i})$$

und damit nach der Komplexeigenschaft:

$$d(f^* dx^{i_i}) = d(d(f^* x^{i_i})) = 0$$

Die Behauptung folgt aus der Produktregel.

Mit der Produktregel folgt aus 4.1:

$$d(f^* \omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \underbrace{d(f^* a_{i_1, \dots, i_k})}_{= f^* d(a_{i_1, \dots, i_k})} \wedge f^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge f^* dx^{i_k}$$

Damit ist das Lemma gezeigt. □

## 4.9 Anwendung der Natürlichkeit der Cartanschen Abbildung

**Anwendung:** Es seien  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  differenzierbar. Dann gilt:

$$0 \equiv df^* d : \Omega^{r-1} \mathcal{N} \xrightarrow{d} \Omega^r \mathcal{N} \xrightarrow{f^*} \Omega^r \mathcal{M} \xrightarrow{d} \Omega^{r+1} \mathcal{M}$$

**Bew:**  $(df^* d)(\omega) = (df^*)(d\omega) = f^*(\underbrace{dd}_{=0}(\omega)) = 0$  □

## 4.10 Der Gradient in Riemannschen Mannigfaltigkeiten

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Der *Gradient* von  $f$  ist der Tangentialvektor  $\text{grad } f(p) \in T_p \mathcal{M}$ , der

$$\langle v, \text{grad } f(p) \rangle = df_p(v) \quad \forall v \in T_p \mathcal{M}$$

erfüllt.

**Bem:** i) Für alle  $\omega \in (T_p \mathcal{M})^*$  existiert genau ein  $\hat{\omega} \in T_p \mathcal{M}$  so dass

$$\omega(v) = \langle v, \hat{\omega} \rangle$$

Daraus folgt die Existenz eines eindeutigen Gradienten.

ii) Jetzt sei  $(U, x)$  eine Karte.

Für  $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_{x^i}$ ,  $w = \sum_{i=1}^n w^i \partial_{x^i} \in T_p \mathcal{M}$  gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i,j} v^i g_{ij} w^j \quad \text{mit } g_{ij} := \langle \partial_{x^i}, \partial_{x^j} \rangle$$

Außerdem gilt:

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i$$

Mit  $G := (g_{ij})_{i,j=1}^n$ ,  $(g^{ij})_{i,j=1}^n := G^{-1}$  folgt für  $\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \partial_{x^i}$ :

$$G \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = G^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\text{grad } f(p) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_{x^j}$$

## 4.11 Beispiele für den Gradienten

**Bsp:** i) Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, ( $U \subset \mathbb{R}^n$  offen) und ist  $(U, x)$  mit  $x = \text{id}$  die kanonische Karte, so folgt (mit euklidischem Skalarprodukt):  $G = \text{id}$  und

$$\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_{x^i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} e_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

ii) Es sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $\Phi(r, v) = \begin{pmatrix} r \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix}$  sei Parametrisierung mit Polarkoordinaten. Dann ist  $x = \Phi^{-1}$  Karte von  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Wir wissen schon:  $(g_{ij})_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$  und somit  $(g^{ij})_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$ .

Jetzt setze  $\hat{f}(r, v) = f(\Phi(r, v))$ .

Für den Gradienten folgt:

$$\text{grad } f(x) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \hat{f}}{\partial v} \partial_v = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{f}}{\partial v} \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$$



iii) Betrachte  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in sphärischen Koordinaten:

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v \cos u \\ \sin v \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$$

Für  $\hat{f} = f \circ \Phi$  berechnen wir  $(g_{ij})_{ij=1}^2$ :

$$\begin{aligned} \partial_u &= \begin{pmatrix} -\cos v \sin u \\ -\sin v \sin u \\ \cos u \end{pmatrix} & \partial_v &= \begin{pmatrix} -\sin v \cos u \\ \cos v \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (g_{ij})_{ij=1}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix} & (g^{ij})_{ij=1}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 u} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Gradient ist also:

$$\text{grad } f(u, v) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial u} \partial_u + \frac{1}{\cos^2 u} \frac{\partial \hat{f}}{\partial v} \partial_v$$

Der Gradient macht aus einer skalaren Funktion ein Vektorfeld. Jetzt betrachten wir den umgekehrten Prozess - die Divergenz  $\text{div}$ .

## 4.12 Die kanonische Volumenform

**Def:** Auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist die *kanonische Volumenform*  $\omega = \omega_{\mathcal{M}} \in \Omega^n \mathcal{M}$  dadurch eindeutig bestimmt, dass sie einer positiv orientierten Orthonormalbasis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $T_p \mathcal{M}$  den Wert 1 zuordnet.

**Bem:** Die Volumenform ist eindeutig bestimmt, denn wenn von einer positiv orientierten Orthonormalbasis zu einer anderen transformiert wird, hat die Matrix des Basiswechsels  $M$  die Determinante 1.

$w_i = Mv_i$  und  $(w_1, \dots, w_n), (v_1, \dots, v_n)$  positiv orientierte Orthonormalbasen. Dann ist:

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \omega(Mv_1, \dots, Mv_n) = \underbrace{\det M}_{=1} \omega(v_1, \dots, v_n)$$

## 4.13 Vektorfeld

**Def:** Ein *Vektorfeld* auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist eine Abbildung  $v$ , die jedem Punkt  $p \in \mathcal{M}$  einen Tangentialvektor  $v(p) \in T_p \mathcal{M}$  zuordnet.

**Bem:** Im Gebiet einer Karte  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $\mathcal{M}$  gilt:

$$v(p) = \sum_{i=1}^n v_i(p) \partial_{x^i}$$

Das Vektorfeld heißt stetig, glatt,  $C^k$ , etc. falls die  $v_i$  diese Eigenschaft haben.

## 4.14 Divergenz

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $v$  ein Vektorfeld auf  $\mathcal{M}$ .  
Es sei lokal um einen Punkt  $p \in \mathcal{M}$  eine Orientierung gewählt und  $\omega$  sei die zugehörige kanonische Volumenform.  
Dann sei die  $(n-1)$ -Form  $v \lrcorner \omega$  wie folgt definiert:

$$(v \lrcorner \omega)_p(w_1, \dots, w_{n-1}) := \omega_p(v(p), w_1, \dots, w_{n-1}) \quad \forall w_i \in T_p \mathcal{M}$$

Die *Divergenz* des Vektorfeldes  $v$  ist durch die Identität

$$d(v \lrcorner \omega) = (\operatorname{div}_{\mathcal{M}} v) \omega$$

als Funktion auf  $\mathcal{M}$  definiert.

- Bem:**
- i) Manchmal schreibt man  $\operatorname{div}$  statt  $\operatorname{div}_{\mathcal{M}}$ .  
Manchmal schreibt man  $\operatorname{grad}_{\mathcal{M}}$  statt  $\operatorname{grad}$ .
  - ii) Die Definition von  $\operatorname{div}_{\mathcal{M}}$  hängt nicht von der Orientierung ab, denn ändern wir die Orientierung, ändert sich das Vorzeichen von  $\omega$ , aber nicht der Wert von  $\operatorname{div}_{\mathcal{M}} v$ .
  - iii) Die Divergenz hat geometrische und physikalische Bedeutung (siehe spätere Kapitel).
  - iv) Die Abbildung  $v \mapsto \operatorname{div} v$  ist linear.

**Bew:** Es gilt:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(v_1 + v_2))\omega &= d((v_1 + v_2) \lrcorner \omega) = d(\omega((v_1 + v_2)(p), w_1, \dots, w_{n-1})) \\ &= d(\omega((v_1(p), w_1, \dots, w_{n-1})) + \omega(v_2(p), w_1, \dots, w_{n-1})) \\ &= d(\omega((v_1(p), w_1, \dots, w_{n-1})) + d(\omega(v_2(p), w_1, \dots, w_{n-1})) \\ &= d(v_1 \lrcorner \omega) + d(v_2 \lrcorner \omega) = (\operatorname{div}(v_1))\omega + (\operatorname{div}(v_2))\omega \\ &= (\operatorname{div}(v_1) + \operatorname{div}(v_2))\omega \quad \text{sowie} \\ (\operatorname{div}(\lambda v))\omega &= d((\lambda v) \lrcorner \omega) = d(\omega(\lambda v(p), w_1, \dots, w_{n-1})) \\ &= \lambda d(\omega(v(p), w_1, \dots, w_{n-1})) = \lambda d(v \lrcorner \omega) = (\lambda \operatorname{div}(v))\omega \end{aligned}$$

□

## 4.15 Die Volumenform

**Satz:** Es sei  $(U, x)$  eine positiv orientierte Karte einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

Dann gilt für die Volumenform  $\omega_{\mathcal{M}}$  von  $\mathcal{M}$ :

$$\omega_{\mathcal{M}}|_U = \sqrt{g}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$$

wobei  $g := \det((g_{ij})_{ij=1}^n)$  ist.

**Bew:** Es sei  $(f_1, \dots, f_n)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $T_p\mathcal{M}$  und die lineare Abbildung  $B : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$  sei durch  $\partial_{x^j} := Bf_j$  für  $j \in \{1, \dots, n\}$  definiert.

Da  $(f_1, \dots, f_n)$  und  $(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n})$  positiv orientiert sind folgt  $\det B > 0$ .

Es gilt also:

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{M}}(f_1, \dots, f_n) &= 1 = (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}) \\ &= (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(Bf_1, \dots, Bf_n) \\ &= \det B \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(f_1, \dots, f_n)\end{aligned}$$

Dies zeigt:  $\omega_{\mathcal{M}} = (\det B) \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$ .

Außerdem gilt:  $\langle \partial_{x^i}, \partial_{x^j} \rangle = \langle Bf_i, Bf_j \rangle = \langle B^T Bf_i, f_j \rangle$ .

Da  $(f_1, \dots, f_n)$  eine Orthonormalbasis ist, gilt für  $v \in T_p\mathcal{M}$ :

$$v = \sum_{k=1}^n \langle v, f_k \rangle f_k \text{ und somit:}$$

$$Tf_j = \sum_{k=1}^n \langle Tf_j, f_k \rangle f_k \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall T : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M} \text{ linear}$$

Dabei ist  $(\langle Tf_j, f_k \rangle)_{j,k=1}^n$  die Matrix, die  $T$  bezüglich der Basis  $(f_1, \dots, f_n)$  darstellt.

Dies zeigt  $(\langle \partial_{x^j}, \partial_{x^k} \rangle)_{j,k=1}^n$  ist die Matrix, die  $B^T B$  bezüglich der Basis  $(f_1, \dots, f_n)$  darstellt.

Es folgt:

$$g = \det \left( (\langle \partial_{x^j}, \partial_{x^k} \rangle)_{j,k=1}^n \right) = \det(B^T B) = (\det B)^2$$

□

## 4.16 Berechnung mit der Volumenform

**Lemma:** Es sei  $(U, x)$  eine Karte von  $\mathcal{M}$ . Dann gilt:

$$\left( \sum_{j=1}^n v^j \partial_{x^j} \right) \lrcorner \omega_{\mathcal{M}} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} v^j \sqrt{g} \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n)$$

**Bew:** Setze  $v_1 := v := \sum_{j=1}^n v^j \partial_{x^j}$  und wähle  $v_2, \dots, v_n \in T_p\mathcal{M}$ .

Es gilt:  $\omega_{\mathcal{M}} = \sqrt{g} \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$ .

$$(v_1 \lrcorner \omega_{\mathcal{M}})(v_2, \dots, v_n) = \omega_{\mathcal{M}}(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{g} \det \left( (\langle dx^j, v_k \rangle)_{j,k=1}^n \right)$$

Durch Entwickeln der Determinante nach der ersten Spalte erhalten wir:

$$\det \left( (\langle dx^j, v_k \rangle)_{j,k=1}^n \right) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \langle dx^j, v_1 \rangle \det A_j$$

Dabei ergibt sich  $A_j$  indem man in  $(\langle dx^j, v_k \rangle)_{j,k=1}^n$  die erste Spalte und die  $j$ -te Zeile streicht.

Somit ergibt sich:

$$\det A_j = (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n)(v_2, \dots, v_n)$$

Aus  $\langle dx^j, v_1 \rangle = \sum_{k=1}^n v^k \langle dx^j, \partial_{x^k} \rangle = \sum_{k=1}^n v^k \delta_{jk} = v_j$  folgt die Behauptung.  $\square$

## 4.17 Berechnung der Divergenz

**Lemma:** Es sei  $(U, x)$  eine Karte für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ .

Für ein Vektorfeld  $v := \sum_{j=1}^n v^j \partial_{x^j}$  gilt:

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} v^j)$$

**Bew:** Auf  $U$  gilt (für eine positiv orientierte Karte):

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} v) \omega_{\mathcal{M}} &= d(v \lrcorner \omega_{\mathcal{M}}) \\ &= d \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} v^j \sqrt{g} (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n) \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial (v^j \sqrt{g})}{\partial x^k} (dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial (v^j \sqrt{g})}{\partial x^j} (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial (v^j \sqrt{g})}{\partial x^j} \right) \omega_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

$\square$

**Bsp:** 1. Euklidische Koordinaten auf  $\mathbb{R}^n$ .

Es sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $(U, \operatorname{id})$  die kanonische Karte.

Dann gilt für  $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ , dass  $\operatorname{div} v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v^j}{\partial x^j}$ , weil  $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n = \operatorname{id}$  und

somit  $g = \det G = 1$  ist.

Diese Formel bleibt richtig, falls  $(U, x)$  eine beliebige Karte mit konstantem  $g$  ist.

2. Ebene Polarkoordinaten:  $V_2 := (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ .

$f_2 : V_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \varphi) \mapsto (x, y) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v^1 \partial_r + v^2 \partial_\varphi) &= \frac{1}{r} \frac{\partial (rv^1)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv^2)}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \left( v^1 + r \frac{\partial v^1}{\partial r} \right) + \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial v^1}{\partial r} + \frac{v^1}{r} + \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Dies folgt, da nach 4.11 ii)  $\sqrt{g} = r$  ist.

Konkret bedeutet dies für das Vektorfeld  $v(x) := \frac{x}{\|x\|^\alpha} = \frac{1}{\|x\|^{\alpha-1}} \frac{x}{\|x\|}$ , was sich ausgedrückt in der Basis

$$\partial_r = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \partial_\varphi = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

schreibt als  $v(x) = \frac{1}{r^{\alpha-1}} \partial_r + 0 \cdot \partial_\varphi$ :

$$\operatorname{div}(v) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv^1)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv^2)}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \partial_r(r^{2-\alpha}) + 0 = (2-\alpha)r^{-\alpha}$$

Das zeigt:  $\operatorname{div}\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) = 0$ .

### 3. Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ .

Es sei  $V_3 := (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  und  $f_3 : V_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch:

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Dann ist  $f_3$  eine Parametrisierung von  $\mathbb{R}^3 \setminus H_2$  mit  $H_2 := \mathbb{R}^+ \times \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ . Daher ist  $f_3^{-1}$  eine Karte von  $\mathbb{R}^3 \setminus H_2$ . Es gilt:

$$\partial_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \partial_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \partial_\vartheta = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ -r \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\text{Also ist } G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{und somit } g = \det G = r^4 \sin^2 \vartheta$$

Wir erhalten also für die Divergenz:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v^1 \partial_r + v^2 \partial_\varphi + v^3 \partial_\vartheta) &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left( \frac{\partial(r^2 \sin \vartheta v^1)}{\partial r} + \frac{\partial(r^2 \sin \vartheta v^2)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(r^2 \sin \vartheta v^3)}{\partial \vartheta} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v^1)}{\partial r} + \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta v^3)}{\partial \vartheta} \\ &= \frac{2v^1}{r} + \frac{\partial v^1}{\partial r} + \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} + \cot \vartheta v^3 + \frac{\partial v^3}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

Analog zu den Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^2$  erhält man  $\operatorname{div}\left(\frac{x}{\|x\|^3}\right) = 0$ , denn

$$v(x) = \frac{x}{\|x\|^3} = \frac{1}{\|x\|^2} \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{r^2} \partial_r + 0 \cdot \partial_\varphi + 0 \cdot \partial_\vartheta$$

und somit ist für dieses Vektorfeld  $v^1 = r^{-2}$  und  $v^2 = v^3 = 0$ .

## 4.18 Der Laplace-Beltrami-Operator $\Delta_{\mathcal{M}}$

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar.

Dann ist

$$\Delta_{\mathcal{M}} f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\Delta_{\mathcal{M}} f := \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(\operatorname{grad}_{\mathcal{M}} f)$$

**Bem:** Ist  $(U, x)$  eine Karte von  $\mathcal{M}$ , so gilt (mit  $\partial_{x^i} f = \frac{\partial}{\partial x^i} f$ ):

$$\Delta_{\mathcal{M}} f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$

**Bew:**

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{\mathcal{M}} f &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \partial_{x^i} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)}_{=: v^i} \partial_{x^i} \\ \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^n v^i \partial_{x^i} \right) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} v^i) \end{aligned}$$

□

**Bsp:** i) Es sei  $\mathcal{M} = U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $(U, \operatorname{id})$  die kanonische Karte.

Dann gilt:  $(g^{ij})_{i,j=1}^n = (g_{ij})_{i,j=1}^n = \operatorname{id}$  und  $g = \det(g_{ij}) = 1$ .

Somit folgt:

$$\Delta_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} f \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i{}^2} f$$

ii) Es sei  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$  injektiv und differenzierbar mit  $\alpha'(u) \neq 0$  für alle  $u \in (a, b)$ .

Dann ist  $\mathcal{M} = \alpha((a, b))$  eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Es gilt  $g_{11} = \langle \alpha', \alpha' \rangle = \|\alpha'\|^2$  und  $g^{11} = \frac{1}{\|\alpha'\|^2}$  sowie  $\sqrt{g} = \|\alpha'\|$ .

Wir erhalten für  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\Delta_{\mathcal{M}} f = \frac{1}{\|\alpha'\|} \left( \frac{1}{\|\alpha'\|} \hat{f}' \right)'$$

Dabei ist  $\hat{f}(u) := f(\alpha(u))$ .

Sei konkret

$$\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 : \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

dann ist  $\mathcal{M} = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$  und es gilt  $\|\alpha'\| = 1$ . Also folgt  $\Delta_{\mathcal{M}} f = (\hat{f}')' = \hat{f}''$  bzw.  $\Delta_{S^1} = \partial_{\varphi}^2$ .

iii) Für Polarkoordinaten

$$(0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

gilt:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{R}^2} f &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 f = \partial_r^2 f + \frac{1}{r} \partial_r f + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 f \\ &= \frac{1}{r^2} (r^2 \partial_r^2 f + r \partial_r f + \partial_\varphi^2 f) = \frac{1}{r^2} \left( (r \partial_r)^2 f + \Delta_{S^1} f \right) \end{aligned}$$

## 4.19 Produktregeln

**Satz:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar und  $v$  sei differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

- (i)  $\text{grad}(f \cdot g) = f \text{grad } g + g \text{grad } f$
- (ii)  $\text{div}(f \cdot v) = f \text{div } v + \langle \text{grad } f, v \rangle$
- (iii)  $\Delta(f \cdot g) = f \Delta g + 2 \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle + g \Delta f$
- (iv)  $f \Delta g - g \Delta f = \text{div}(f \text{grad } g) - \text{div}(g \text{grad } f)$

**Bew:** (i) Die Aussage ist äquivalent zu  $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$ :

$$\begin{aligned} d(f \cdot g) : T_p \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} : [\gamma] \mapsto [(f \cdot g) \circ \gamma] \\ (d(f \cdot g))([\gamma]) &= [(f \cdot g) \circ \gamma] = \frac{d}{d\varepsilon} (f \cdot g)(\gamma(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \left( g \frac{d}{d\varepsilon} f(\gamma(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} + f \frac{d}{d\varepsilon} g(\gamma(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} \right) \cdot \gamma'(0) \\ &= gdf([\gamma]) + fdg([\gamma]) = (gdf + fdg)([\gamma]) \end{aligned}$$

Zweite Möglichkeit (i) zu beweisen:

$$\begin{aligned} \text{grad}(f \cdot g) &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} (f \cdot g) \partial_{x^i} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} g + f \frac{\partial g}{\partial x^j} \right) \partial_{x^i} \\ &= (\text{grad } f)g + f(\text{grad } g) \end{aligned}$$

(ii)  $(fv) \lrcorner \omega_{\mathcal{M}} = f(v \lrcorner \omega_{\mathcal{M}}) = f \wedge (v \lrcorner \omega_{\mathcal{M}})$

Die Produktregel für äußere Ableitung liefert:

$$(*) \quad d((fv) \lrcorner \omega_{\mathcal{M}}) = d(f \wedge (v \lrcorner \omega_{\mathcal{M}})) = df \wedge (v \lrcorner \omega_{\mathcal{M}}) + f \wedge d(v \lrcorner \omega_{\mathcal{M}})$$

Für eine lokale Karte gilt:

$$\begin{aligned} (**) \quad df \wedge (v \lrcorner \omega_{\mathcal{M}}) &= \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} v^k \sqrt{g} \\ &\quad \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} v^j \sqrt{g} (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} v^j \omega_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$(***) \quad \langle \text{grad } f, v \rangle = df(v) = \sum_{j=1}^n v^j df(\partial_{x_j}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} v^j$$

Aus (\*), (\*\*), (\*\*\*) folgt:

$$\begin{aligned} \text{div}(f \cdot v)\omega_{\mathcal{M}} &= d((f \cdot v) \lrcorner \omega_{\mathcal{M}}) = \langle \text{grad } f, v \rangle \omega_{\mathcal{M}} + (f \cdot \text{div } v)\omega_{\mathcal{M}} \\ &= (\langle \text{grad } f, v \rangle + f \cdot \text{div } v)\omega_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

Andere Beweisvariante:

$$\begin{aligned} \text{div}(f \cdot v) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} f v^i) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^n f \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} v^i) + \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \\ &= f \cdot \text{div } v + \langle \text{grad } f, v \rangle \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \Delta(f \cdot g) &= \text{div}(\text{grad}(f \cdot g)) \stackrel{(i)}{=} \text{div}(g \text{ grad } f + f \text{ grad } g) \\ &= \text{div}(g \text{ grad } f) + \text{div}(f \text{ grad } g) \\ &\stackrel{(ii)}{=} g \text{ div}(\text{grad } f) + \langle \text{grad } g, \text{grad } f \rangle + f \text{ div}(\text{grad } g) + \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle \\ &= f \Delta g + 2 \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle + g \Delta f \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \text{div}(f \text{ grad } g) &\stackrel{(ii)}{=} f \Delta g + \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle \\ \text{div}(g \text{ grad } f) &\stackrel{(ii)}{=} g \Delta f + \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt durch Bilden der Differenz.

□



# Kapitel 5

## Mannigfaltigkeiten mit Rand und Integralsätze

Es sei  $\mathbb{R}_-^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = (x^1, \dots, x^n), x^1 \leq 0\}$ .

Dann ist  $\partial\mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^1 = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ .

Wir betrachten auf  $\mathbb{R}_-^n$  und  $\partial\mathbb{R}_-^n$  die von  $\mathbb{R}^n$  induzierte Relativtopologie.

### 5.1 Differenzierbarkeit mit Rand

**Def:** i) Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}_-^n$  offen bezüglich der relativen Topologie von  $\mathbb{R}_-^n$ .

Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *differenzierbar* ( $k$ -mal stetig differenzierbar) in  $p \in \Omega$ , falls es eine Umgebung  $U$  von  $p \in \mathbb{R}^n$  und eine Funktion  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $\tilde{f}|_{U \cap \Omega} = f|_{U \cap \Omega}$ , die außerdem differenzierbar ( $k$ -mal stetig differenzierbar) ist.

ii)  $f$  heißt *differenzierbar in  $\Omega$*  ( $k$ -mal stetig differenzierbar in  $\Omega$ ), falls  $f$  in jedem Punkt von  $\Omega$  differenzierbar ( $k$ -mal stetig differenzierbar) ist.

iii) Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}_-^n$  ist  $C^k(\Omega, \mathbb{R}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$ .

### 5.2 Existenz einer Fortsetzung

**Lemma:** Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}_-^n$  und  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$  für  $k \geq 1$ , so gibt es eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\Omega \subset U$  und eine Fortsetzung  $\tilde{f} \in C^k(U, \mathbb{R})$  von  $f$ .

**Bew:** Für jedes  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}_-^n$  sei  $f^x : U^x \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine lokale  $C^k$ -Fortsetzung ( $x \in U^x$ ,  $U^x$  offen).

Die  $(U^x)_{x \in \Omega}$  bilden eine offene Überdeckung von  $\Omega$ .

Wähle eine dieser Überdeckung untergeordnete Partition der Eins  $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit

- $\text{supp } \eta_k \subset U^{x(k)}$  mit  $x(k) \in \Omega$
- $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sind lokal endlich.

- $\sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k = 1$  auf  $\Omega$

Setze  $\tilde{f}_k := \eta_k f^{x(k)}$  und  $\tilde{f} := \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k$ . (Diese Summe ist lokal endlich, daher konvergiert sie.)

Dann ist  $\tilde{f} \in C^k(U, \mathbb{R})$  und für alle  $p \in \Omega$  gilt:

$$\tilde{f}(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(p) f^{x(k)}(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(p) f(p) = f(p)$$

□

### 5.3 Mannigfaltigkeiten mit Rand

**Def:** Eine Mannigfaltigkeit mit Rand  $\mathcal{M}$  ist ein separabler topologischer Hausdorffraum, der lokal homöomorph zum  $\mathbb{R}_-^n$  ist, d.h. für alle  $p \in \mathcal{M}$  existieren offene Umgebungen  $U$  von  $p$  und  $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}_-^n$  ist Homöomorphismus. (Wichtig hierbei: Stetigkeit wird bezüglich der Relativtopologie geprüft.)

**Bem:** Genau wie bei Mannigfaltigkeiten führen wir die Begriffe Karte  $(U, x)$ , Atlas und maximaler Atlas ein.

Eine Mannigfaltigkeit mit Rand  $\mathcal{M}$  heißt differenzierbar (bzw.  $k$ -mal stetig differenzierbar), falls alle Kartenwechselabbildungen differenzierbar ( $k$ -mal stetig differenzierbar) sind.

Den Begriff der differenzierbaren Struktur verwenden wir wie bei Mannigfaltigkeiten.

### 5.4 Der Rand ist unabhängig von den Karten

Frage: Ist es möglich, dass  $p \in \mathcal{M}$  unter der Karte  $x$  auf  $\partial\mathbb{R}_-^n$  abgebildet wird und unter  $y$  im Inneren von  $\mathbb{R}_-^n$  landet?

Die Antwort für diff'bare Mannigfaltigkeiten liefert das nächste Lemma.

**Lemma:** Es seien  $\mathcal{M}$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $x, y$  Karten um  $p \in \mathcal{M}$ . Dann gilt:

$$x(p) \in \partial\mathbb{R}_-^n \quad \Rightarrow \quad y(p) \in \partial\mathbb{R}_-^n$$

**Bew:** Annahme:  $y(p)$  liegt im Inneren von  $\mathbb{R}_-^n$ .

$(U, x), (V, y)$  seien Karten und  $\Omega_1 := x(U), \Omega_2 := y(V)$ .

Die Abbildung  $f := y \circ x^{-1} : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  ist stetig differenzierbar, d.h. es gibt eine Fortsetzung  $\tilde{f} : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $U_1$  offen im  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega_1 \subset U_1$  und  $\tilde{f}$  stetig differenzierbar ist.

$Df|_{x(p)} = D(y \circ x^{-1})|_{x(p)} = \left( D(x \circ y^{-1})|_{y(p)} \right)^{-1}$  ist invertierbar und ferner gilt

$Df|_{x(p)} = D\tilde{f}|_{x(p)}$ , da  $\tilde{f}$  stetig differenzierbare Fortsetzung ist.

Nach dem Satz von der lokalen Umkehrbarkeit gibt es eine in  $\mathbb{R}^n$  offene Umgebung  $V_1$  von  $x(p)$  mit  $V_1 \subset U_1$  sodass  $f|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_2 := \tilde{f}(V_1)$  Diffeomorphismus ist ( $V_2$  offen im  $\mathbb{R}^n$ ).

Sei  $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_-^n$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) eine Folge mit  $x_k \rightarrow x(p)$ .

O.B.d.A. sei  $x_k \in V_1$ . Setze  $y_k := \tilde{f}(x_k)$ .

Die Stetigkeit von  $\tilde{f}$  impliziert  $y_k \rightarrow y(p)$  für  $k \rightarrow \infty$ .

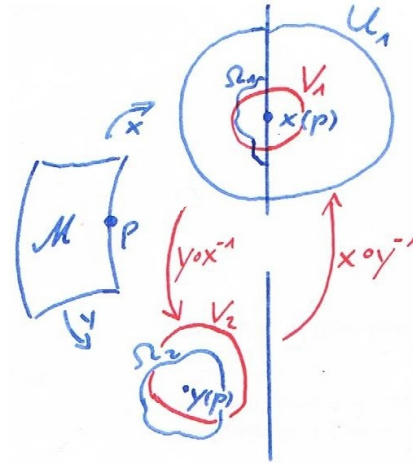
Für großes  $k$  liegen die  $y_k$  in  $V_2$ .

Setze  $\tilde{x}_k := (x \circ y^{-1})(y_k) \in \mathbb{R}_-^n$ .

Die Stetigkeit von  $x \circ y^{-1}$  impliziert, dass auch  $\tilde{x}_k \rightarrow x(p)$ .

Für große  $k$  gilt  $x_k, \tilde{x}_k \in V_1$  und  $\tilde{f}(x_k) = \tilde{f}(\tilde{x}_k) = y_k$ .

Das ist ein Widerspruch zur Tatsache, dass  $\tilde{f}|_{V_1}$  ein Diffeomorphismus ist, denn  $x_k \neq \tilde{x}_k$ , weil  $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_-^n$  und  $\tilde{x}_k \in \mathbb{R}_-^n$ .



□

## 5.5 Definition des Randes

- Def:**
- $p \in \mathcal{M}$  heißt Randpunkt, falls  $x(p) \in \partial\mathbb{R}_-^n$  ist.
  - Ist  $p$  kein Randpunkt, so nennen wir  $p$  inneren Punkt.
  - $\partial\mathcal{M} := \{p \in \mathcal{M} \mid p \text{ ist Randpunkt}\}$   
 $\overset{\circ}{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}$

- Bem:**
- $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$  ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit *ohne Rand*.
  - $\partial\mathcal{M}$  ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $(n-1)$  *ohne Rand*.  
(Das heißt  $\partial(\partial\mathcal{M}) = \emptyset$ .)

## 5.6 Konstruktion einer Mannigfaltigkeit mit Rand

**Bsp:** Es sei  $\mathcal{N}^n$  eine Mannigfaltigkeit und  $\varphi : \mathcal{N}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $C^1$ .

Weiter sei  $a$  regulärer Wert von  $\varphi$ , d.h.  $d\varphi_p(v) \neq 0 \forall v \in T_p\mathcal{N}$  für beliebiges  $p \in \mathcal{N}$  mit  $\varphi(p) = a$ .

Dann ist

- $\mathcal{M} = \varphi^{-1}((-\infty, a])$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand
- $\overset{\circ}{\mathcal{M}} = \varphi^{-1}((-\infty, a))$
- $\partial\mathcal{M} = \varphi^{-1}(\{a\})$

**Bew:** •  $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$  ist offene Teilmenge von  $\mathcal{N}$  und damit eine Mannigfaltigkeit ohne Rand (da  $\varphi$  stetig):

Denn für  $p \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}$  gibt es eine Karte  $(U, x)$  von  $\mathcal{N}$ .

Dann ist  $(U \cap \overset{\circ}{\mathcal{M}}, x|_{U \cap \overset{\circ}{\mathcal{M}}})$  eine Karte um  $p$  von  $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ .

• Sei nun  $p \in \partial\mathcal{M}$ , also  $\varphi(p) = a$ . Dann ist  $d\varphi_p \neq 0$ .

Es sei  $(U, x)$  Karte um  $p$  von  $\mathcal{N}$ .

Definiere  $\hat{\varphi} := \varphi \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Jetzt gilt:  $D\hat{\varphi}(x(p)) \neq 0$ . O.B.d.A. sei  $\frac{\partial}{\partial x^1} \hat{\varphi} \neq 0$  (sonst permutiere Koordinaten).

Der Satz über implizite Funktionen liefert die Existenz einer Funktion  $v : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  und  $W \subset x(U)$  offen, zusammenhängend, sodass  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in W$  gilt:

$$\hat{\varphi}(x) = a \Leftrightarrow x_1 = v(x_2, \dots, x_n)$$

Dann definiere  $y(q) := x(q) - v((x_2, \dots, x_n)(q))e_1$ .

$y$  ist geeignete Karte um  $p$  bezüglich  $\mathcal{M}$ , denn es gilt:

$$\varphi(q) = a \Leftrightarrow \hat{\varphi}(x(p)) = a \Leftrightarrow x_1(q) - v((x_2, \dots, x_n)(q)) = 0 \Leftrightarrow y_1(q) = 0$$

Dies zeigt  $y$  ist Karte, die  $p \in \partial\mathcal{M}$  auf  $\partial\mathbb{R}^n$  abbildet.

Frage: Gilt  $x_1(q) - v(x_2, \dots, x_n)(q) < 0$  falls  $\varphi(q) < a$ ?

Falls dies nicht richtig ist, spiegele an der Hyperfläche  $\{x_1 = 0\}$ .

□

## 5.7 Tangentialräume am Rand

Um Tangentialräume am Rand zu definieren, führen wir eine zusätzliche Variante ein, den Tangentialraum zu definieren.

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) und  $p \in \mathcal{M}$ . Es sei

$$\mathcal{D}_p(\mathcal{M}) := \{(U, x) \text{ Karte um } p\}$$

Unter einem (physikalisch definierten) Tangentialvektor  $v$  an  $\mathcal{M}$  in  $p$  verstehen wir eine Abbildung  $v : \mathcal{D}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft:

$$v(V, y) = d(y \circ x^{-1})|_{x(p)} v(U, x) \quad (*)$$

für alle  $(V, y), (U, x) \in \mathcal{D}_p(\mathcal{M})$ .

Den Vektorraum dieser Abbildungen  $v$  bezeichnen wir mit  $T_p^{\text{phys}}\mathcal{M}$ .

**Bem:**  $T_p^{\text{phys}}\mathcal{M}$  ist ein Vektorraum:

Betrachte dazu eine feste Karte  $x$  und den linearen Isomorphismus

$$\mathbb{R}^n \rightarrow T_p^{\text{phys}}\mathcal{M} : w \mapsto v \text{ mit } v(U, x) := w$$

(\*) sagt dann, was  $v(V, y)$  bezüglich anderer Karten ist.

## 5.8 Verträglichkeit des physikalisch definierten Tangentialraumes

**Lemma:** Ist  $\mathcal{M}$  eine Mannigfaltigkeit ohne Rand, so gilt:

$$T_p^{\text{phys}} \mathcal{M} \cong T_p \mathcal{M}$$

**Bew:** Es sei  $(U, x)$  eine feste Karte.

Dann definiere:

$$\alpha(t) := x^{-1}(x(p) + t \cdot v(U, x))$$

Dann ist  $[\alpha] \in T_p \mathcal{M}$  unabhängig von der Wahl der Karte (bzgl.  $v$ ):

Sei nämlich  $(V, y)$  eine weitere Karte und  $\beta(t) := y^{-1}(y(p) + t \cdot v(V, y))$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} (y \circ \alpha)'(0) &= \left( (y \circ x^{-1})(x(p) + tv(U, x)) \right)' \\ &= d(y \circ x^{-1})|_{x(p)} v(U, x) = v(V, y) = (y \circ \beta)'(0) \end{aligned}$$

Damit sind  $\alpha$  und  $\beta$  tangential äquivalent.

$[\alpha] := Av$  für  $A : T_p^{\text{phys}} \mathcal{M} \rightarrow T_p \mathcal{M}$ .

Nach Definition der Addition und Skalarmultiplikation auf  $T_p \mathcal{M}$  ist die Abbildung linear.

Die Bijektivität folgt wie im Abschnitt 1.11. □

## 5.9 Neue Definition des Tangentialraums

**Bem:** i) Ab jetzt arbeiten wir mit  $T_p^{\text{phys}} \mathcal{M}$  statt  $T_p \mathcal{M}$ .

Schreibweise ist jetzt  $T_p \mathcal{M}$  für  $T_p^{\text{phys}} \mathcal{M}$ .

ii) Für Mannigfaltigkeiten ohne Rand sind  $T_p \mathcal{M}$  und  $T_p^{\text{phys}} \mathcal{M}$  äquivalent.

iii) Es sei  $p$  ein Randpunkt von  $\mathcal{M}$ . Dann gilt kanonisch:

$$T_p \partial \mathcal{M} \subset T_p \mathcal{M}$$

Setze stets  $v_1 = 0$  in der Definition des physikalischen Tangentialraums.

## 5.10 Die Halbräume des Tangentialraums

**Def:** i) Wir definieren den positiven und negativen Halbraum im Tangentialraum durch

$$T_p^\pm \mathcal{M} := (dx_p)^{-1}(\mathbb{R}_\pm^n)$$

ii) Vektoren im  $T_p^- \mathcal{M} \setminus T_p \partial \mathcal{M}$  (bzw.  $T_p^+ \mathcal{M} \setminus T_p \partial \mathcal{M}$ ) heißen nach innen (bzw. außen) weisende Tangentialvektoren.

- Bem:** i) Ein  $v \in T_p\mathcal{M}$  weist genau dann nach innen bzw. außen, wenn bzgl. einer (und dann jeder) Karte die erste Komponente  $v^1$  von  $v$  negativ bzw. positiv ist.
- ii) Zeigt  $v \in T_p\mathcal{M}$  nach außen (bzw. innen), so kann man eine  $C^1$ -Kurve  $\alpha : (-\varepsilon, 0] \rightarrow \mathcal{M}$  (bzw.  $\alpha : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ ) wählen mit  $\alpha(t) = x^{-1}(x(p) + tv)$ . Die Kurve  $\alpha$  ist eine geometrische Veranschaulichung des Tangentialvektors  $v$ .

**Bem:** Der Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit lässt sich erweitern zum Begriff Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Rand. Auch in Randpunkten führen wir ein Skalarprodukt ein.

## 5.11 Die äußere Einheitsnormale

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.  $\nu \in T_p\mathcal{M}$  heißt *äußere Einheitsnormale* an  $T_p\partial\mathcal{M}$ , falls

- (i)  $\langle \nu, u \rangle_{T_p\mathcal{M}} = 0 \quad \forall u \in T_p\partial\mathcal{M}$
- (ii)  $\langle \nu, \nu \rangle_{T_p\mathcal{M}} = 1$
- (iii)  $\nu$  ist äußerer Tangentialvektor

**Bem:** Bei Hyperflächen im  $\mathbb{R}^n$  spricht man auch von *Konormale*.

In diesem Kapitel sei ab jetzt  $\mathcal{M}$  stets eine  $C^2$ -Mannigfaltigkeit. Die Metrik  $g$  sei stets differenzierbar und Vektorfelder seien stets differenzierbar.

## 5.12 Der Satz von Gauß

**Theorem:** Es sei  $(\mathcal{M}^n, g)$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial\mathcal{M}$  (wobei  $\partial\mathcal{M} = \emptyset$  zugelassen ist). Es sei  $\nu$  die äußere Einheitsnormale und  $u$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf  $\mathcal{M}$ . Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}_{\mathcal{M}} u d\mu_{\mathcal{M}} = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \nu, u \rangle_{T_p\mathcal{M}} d\mu_{\partial\mathcal{M}}$$

Dabei steht  $d\mu_{\partial\mathcal{M}}$  für die Integration bzgl.  $(\partial\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{T_p\mathcal{M}})$ , wobei das Skalarprodukt auf  $\partial\mathcal{M}$  eingeschränkt wird.

**Bew:** Überdecke  $\mathcal{M}$  mit endlich vielen Karten  $(U_l, x_l)_{l=1}^N$  (Dies ist möglich, da  $\mathcal{M}$  kompakt ist).

Es sei  $(\eta_l)_{l=1}^N$  eine zugehörige Partition der Eins. Dann folgt:

$$\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div} u d\mu_{\mathcal{M}} = \sum_{l=1}^N \int_{U_l} \eta_l \operatorname{div} u d\mu_{\mathcal{M}}$$

$$\int_{U_l} \eta_l \operatorname{div} u d\mu_{\mathcal{M}} = \int_{x_l(U_l)} \underbrace{\eta_l \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} u^j)}_{\text{Setze Integranden durch 0 auf ganz } \mathbb{R}_-^n \text{ fort}} \sqrt{g} \quad dx$$

1. Fall:  $x_l(U_l)$  liegt im Innern von  $\mathbb{R}_-^n$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \eta_l \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} u^j) dx &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \eta_l \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} u^j) dx^1 \dots dx^n \\ &= - \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \eta_l \right) u^j \sqrt{g} dx^1 \dots dx^n \\ &= - \int_{\mathcal{M}} \underbrace{D_u \eta_l}_{\substack{\text{Richtungsableitung} \\ \text{in Richtung } u}} d\mu_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

Dabei verschwinden die Randterme bei der partiellen Integration, da  $\eta_l \equiv 0$  "weit draußen" ist.

2. Fall:  $x_l(U_l) \cap \partial \mathbb{R}_-^n \neq \emptyset$

Für  $j = 2, \dots, n$  gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_l \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} u^j) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \eta_l \right) u^j \sqrt{g} dx^1 \dots dx^n$$

Für  $j = 1$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_l \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} u^1) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \eta_l \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} u^1) dx^1 \dots dx^n \\ &\stackrel{P.I.}{=} - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \eta_l \right) u^1 \sqrt{g} dx^1 \dots dx^n \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\eta_l u^1 \sqrt{g}}_{\text{ausgewertet für } x_1=0} dx^2 \dots dx^n \end{aligned}$$

Behauptung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \eta_l u^1 \sqrt{g} dx^2 \dots dx^n = \int_{\partial \mathcal{M}} \eta_l \langle \nu, u \rangle d\mu_{\partial \mathcal{M}}$$

Beobachtung:  $\{\partial_{x^2}, \dots, \partial_{x^n}\}$  ist Basis von  $T_p \partial \mathcal{M}$ .

Sei  $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$  und  $g = \det G$ .  $\hat{G} = (g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=2}^n$  ist metrischer Tensor auf  $T_p \partial \mathcal{M}$ .

Cramersche Regel liefert  $g^{11} = \frac{1}{g} \det(g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=2}^n$  (indem man das Inverse über das Adjunkte berechnet).

Die äußere Einheitsnormale  $\nu$  steht senkrecht auf  $\partial_{x^2}, \dots, \partial_{x^n}$  und damit ist  $\langle \nu, \partial_{x^i} \rangle = 0 \forall i \in \{2, \dots, n\}$ .

Sei  $\nu = \sum_{j=1}^n \nu^j \partial_{x^j}$  die Darstellung von  $\nu$ .

Dann folgt:  $\sum_{j=1}^n \nu^j g_{ij} = 0$  für  $i \in \{2, \dots, n\}$  und somit

$$G \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \vdots \\ \nu^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da  $G^{-1} = (g^{ij})_{i,j=1}^n$  folgt  $\nu^1 = g^{11}c$  und

$$\langle \nu, \nu \rangle_G = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \vdots \\ \nu^n \end{pmatrix} \cdot G \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \vdots \\ \nu^n \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \nu^1 c = 1$$

Daraus folgt:  $1 = \nu^1 c = g^{11}c^2$ , also  $c^2 = \frac{1}{g^{11}}$ .

Da  $\nu$  die äußere Einheitsnormale ist, folgt:  $c = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}}$ .

Es sei  $u = \sum_{j=1}^n u^j \partial_{x^j}$  und somit

$$\langle \nu, u \rangle_G = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \cdot G \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \vdots \\ \nu^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = u^1 \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} = u^1 \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\hat{g}}}$$

wobei  $\hat{g} = \det \hat{G}$  ist.

Dies zeigt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \eta u^1 \sqrt{g} dx^2 \cdots dx^n &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \eta \langle \nu, u \rangle \sqrt{\hat{g}} dx^2 \cdots dx^n \\ &= \int_{\partial \mathcal{M}} \eta \langle \nu, u \rangle d\mu_{\partial \mathcal{M}} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

$$\int_{\mathcal{M}} \eta \operatorname{div}_{\mathcal{M}} u d\mu_{\mathcal{M}} = \int_{\partial \mathcal{M}} \eta \langle \nu, u \rangle d\mu_{\partial \mathcal{M}} - \int_{\mathcal{M}} D_u \eta d\mu_{\mathcal{M}}$$



Summiere über  $l$  und nutze  $D_u \left( \sum_{i=1}^n \eta_i \right) = D_u(1) = 0$ , so folgt:

$$\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}_{\mathcal{M}} u d\mu_{\mathcal{M}} = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \nu, u \rangle d\mu_{\partial\mathcal{M}}$$

□

Als Folgerung erhalten wir:

### 5.13 Satz von Stokes

**Satz:** Es sei  $\mathcal{M}^n$  eine kompakte, orientierbare, differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial\mathcal{M}$  (wobei  $\partial\mathcal{M} = \emptyset$  zugelassen ist) und  $\omega \in \Omega^{n-1}\mathcal{M}$ .

Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega$$

**Bew:** Wähle eine Riemannsche Metrik auf  $\mathcal{M}$ .

Da  $\mathcal{M}$  orientierbar ist, existiert eine kanonische Volumenform  $\omega_{\mathcal{M}}$ .

Dann existiert ein Vektorfeld  $u$  auf  $\mathcal{M}$ , sodass  $\omega = u \lrcorner \omega_{\mathcal{M}}$  (dies folgt mit Lemma 4.16 und dem Fakt, dass  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n)$ ).

Es folgt:

$$d\omega = (\operatorname{div} u) \omega_{\mathcal{M}}$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div} u d\mu_{\mathcal{M}} = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle u, \nu \rangle d\mu_{\partial\mathcal{M}}$$

Dabei ist  $d\mu_{\mathcal{M}}$  die entsprechende Integration bzgl. der kanonischen Volumenform.

Wenden wir die Partition der Eins an, so reicht es alles in lokalen positiv orientierten Koordinaten zu betrachten. Unter Verwendung von Satz 4.15 folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{M}} \eta_l \langle u, \nu \rangle d\mu_{\partial\mathcal{M}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \eta_l u^1 \sqrt{g} dx^2 \dots dx^n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \eta_l u^1 \omega_{\mathcal{M}}(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}) dx^2 \dots dx^n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \eta_l \omega_{\mathcal{M}}(u, \partial_{x^2}, \dots, \partial_{x^n}) dx^2 \dots dx^n \\ &= \int_{\partial\mathcal{M}} \eta_l (u \lrcorner \omega_{\mathcal{M}}) = \int_{\partial\mathcal{M}} \eta_l \omega \end{aligned}$$

Summation über  $l$  liefert die Behauptung.

□

- Bem:**
- i) Der Satz von Stokes kann ohne den Satz von Gauß bewiesen werden. Beweis analog ist dann analog wie bei Gauß (Partition der Eins, lokale Koordinaten, Fubini, partielle Integration).
  - ii) Der Satz von Stokes braucht eine orientierte Mannigfaltigkeit, während Gauß nur eine Riemannsche Struktur braucht, aber keine Orientierbarkeit.
  - iii) Gauß und Stokes gelten auch allgemeiner. Z.B. falls  $\mathcal{M}$  nicht kompakt sind, aber  $u$  bzw.  $\omega$  kompakte Träger haben.

## 5.14 Greensche Formeln

**Theorem:** Sei  $\mathcal{M}$  kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und  $f, h \in C^2(\mathcal{M})$ . Dann gilt:

(i)

$$\int_{\mathcal{M}} f \Delta h d\mu_{\mathcal{M}} = - \int_{\mathcal{M}} \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle d\mu_{\mathcal{M}} + \int_{\partial \mathcal{M}} f \langle \text{grad } h, \nu \rangle d\mu_{\partial \mathcal{M}}$$

wobei  $\nu$  die äußere Einheitsnormale ist.

(ii)

$$\int_{\mathcal{M}} (f \Delta h - \Delta f h) d\mu_{\mathcal{M}} = \int_{\partial \mathcal{M}} (f \langle \text{grad } h, \nu \rangle - h \langle \text{grad } f, \nu \rangle) d\mu_{\partial \mathcal{M}}$$

**Bew:** Satz 4.19(ii) liefert:  $\text{div}(f \text{ grad } h) = \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle + f \Delta h$ .  
Satz von Gauß liefert:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{M}} f \langle \text{grad } h, \nu \rangle d\mu_{\partial \mathcal{M}} &= \int_{\mathcal{M}} \text{div}(f \text{ grad } h) d\mu_{\mathcal{M}} \\ &= \int_{\mathcal{M}} (\langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle + f \Delta h) d\mu_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

Satz 4.19(iv) und Gauß liefern:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} (f \Delta h - \Delta f h) d\mu_{\mathcal{M}} &= \int_{\mathcal{M}} (\text{div}(f \text{ grad } h) - \text{div}(h \text{ grad } f)) d\mu_{\mathcal{M}} \\ &= \int_{\partial \mathcal{M}} (f \langle \text{grad } h, \nu \rangle - h \langle \text{grad } f, \nu \rangle) d\mu_{\partial \mathcal{M}} \end{aligned}$$

□

## 5.15 Randwertprobleme

**Korollar:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine zusammenhängende, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand,  $\varrho \in C^0(\mathcal{M})$  und  $\varphi \in C^0(\partial \mathcal{M})$ . Dann gilt:

i) Das Dirichlet'sche Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta f &= \varrho && \text{auf } \mathcal{M} \\ f &= \varphi && \text{auf } \partial\mathcal{M} \end{aligned}$$

hat höchstens eine Lösung  $f \in C^2(\mathcal{M})$ .

ii) Das Neumann'sche Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta f &= \varrho && \text{auf } \mathcal{M} \\ \langle \text{grad } f, \nu \rangle &= \varphi && \text{auf } \partial\mathcal{M} \end{aligned}$$

hat bis auf additive Konstanten eine eindeutige Lösung.

**Bem:** Ist  $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ , dann ist ii) noch richtig.

**Bew:** Es seien  $f_1, f_2$  zwei Lösungen.

Dann erfüllt  $h := f_1 - f_2$  wegen der Linearität von  $\Delta$ :

$$\Delta h = 0 \quad \text{und} \quad \begin{cases} h = 0 & \text{auf } \partial\mathcal{M} \text{ (Dirichlet)} \\ \langle \text{grad } h, \nu \rangle = 0 & \text{auf } \partial\mathcal{M} \text{ (Neumann)} \end{cases}$$

Die erste Greensche Formel liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{M}} h \Delta h d\mu = - \int_{\mathcal{M}} \langle \text{grad } h, \text{grad } h \rangle d\mu + \int_{\partial\mathcal{M}} \underbrace{h \langle \text{grad } h, \nu \rangle}_{=0} d\mu \\ \Rightarrow 0 &= \int_{\mathcal{M}} \underbrace{\langle \text{grad } h, \text{grad } h \rangle}_{\geq 0 \text{ und stetig}} d\mu \\ \Rightarrow 0 &= \langle \text{grad } h, \text{grad } h \rangle \text{ auf } \mathcal{M} \\ \Rightarrow 0 &= \text{grad } h \text{ auf } \mathcal{M} \end{aligned}$$

Somit ist  $h$  konstant und im Dirichlet-Fall folgt sogar  $h \equiv 0$ , da  $h = 0$  auf  $\partial\mathcal{M}$ .  $\square$

## 5.16 Mittelwertgleichung

**Theorem:** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\overline{B_r(0)} \subset \Omega$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch (d.h.  $f \in C^2(\Omega)$  und  $\Delta f = 0$ ). Dann gilt:

$$f(0) = \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r(0))} \int_{\partial B_r(0)} f d\mathcal{H}^{n-1}$$

wobei mit  $\mathcal{H}^{n-1}$  das  $(n-1)$ -dimensionale Hausdoff-Maß bezeichnet wird.

**Bew:**  $\Delta f = 0$  und der Satz von Gauß liefert:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{B_r(0)} \Delta f \, dx = \int_{\partial B_r(0)} \langle \nabla f, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1} \\
 &= r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} \underbrace{\langle \nabla f(rx), x \rangle}_{= \frac{d}{dr} f(rx)} d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\
 &= r^{n-1} \frac{d}{dr} \int_{\partial B_1(0)} f(rx) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\
 &= r^{n-1} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} f(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right)
 \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion

$$F(r) := \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} f d\mathcal{H}^{n-1}$$

konstant. Es gilt ferner:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \searrow 0} F(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} f(x) - f(0) d\mathcal{H}^{n-1}(x) + \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} f(0) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) \\
 &= 0 + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(0)}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} 1 d\mathcal{H}^{n-1}(x) = f(0) \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1(0))
 \end{aligned}$$

Also ist  $F(r) \equiv \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1(0))f(0)$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

## 5.17 Kurvenintegrale

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega := \sum_{j=1}^n a_j dx^j \in \Omega^1 U$  und  $\mathcal{M} \subset U$  sei eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Dann ist  $\int_{\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} (a_1 dx^1 + \dots + a_n dx^n)$  ein Kurvenintegral.

Es sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Parametrisierung von  $\mathcal{M}$  (d.h.  $\gamma^{-1}$  ist eine Karte), dann gilt (vgl. Bemerkung 3.10 (iii)):

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \sum_{j=1}^n \int_I a_j(\gamma(t)) (\gamma^j)'(t) dt$$

**Bem:** Die Substitutionsregel liefert:

Das Integral ist unabhängig von der Parametrisierung (falls beide Parametrisierungen gleich orientiert sind).

In der Physik schreibt man (oft) statt  $\omega = a_1 dx^1 + \dots + a_n dx^n$  einfach  $\vec{a} \cdot \vec{ds}$  mit einem Vektorfeld  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  und  $\vec{ds} := (dx^1, \dots, dx^n)$ .

Es sei  $\mathcal{M}$  jetzt zusätzlich orientiert.

Dann existiert für alle  $p \in \mathcal{M}$  genau ein Tangentialvektor  $\tau(p)$  von  $\mathcal{M}$  in  $p$ .

D.h. genau ein  $\tau(p) = \sum_{j=1}^n \tau^j(p)e_j \in T_p\mathcal{M}$  mit  $\|\tau(p)\| = 1$  und  $\omega_{\mathcal{M},p}(\tau(p)) = 1$ .

(Wobei  $\omega_{\mathcal{M}}$  die kanonische Volumenform ist.)

Ist  $p = \gamma(t)$  (für die positiv orientierte Karte  $\gamma^{-1}$ ), so gilt  $\tau(p) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ .

Somit folgt:

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \sum_{j=1}^n \int_I a_j(\gamma(t)) \frac{(\gamma^j)'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{=d\mathcal{H}^1} dt = \int_{\mathcal{M}} \langle \vec{a}, \tau \rangle d\mathcal{H}^1 = \int_{\mathcal{M}} \Theta \vec{a}$$

wobei der Riesz-Operator  $\Theta$  gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{V}(\mathcal{M}) &\rightarrow \Omega^1\mathcal{M} : v \mapsto (\Theta v)(p) := (\Theta_p v)(p) \\ \Theta_p : T_p\mathcal{M} &\rightarrow T_p^*\mathcal{M} : u \mapsto (\Theta_p u)(w) := \langle u, w \rangle \end{aligned}$$

## 5.18 Flächen im Raum

Es sei  $n = 2$ ,  $U$  sei offen im  $\mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ferner seien  $(x, y, z)$  die euklidischen Koordinaten von  $\mathbb{R}^3$  und  $\omega = a(dy \wedge dz) + b(dz \wedge dx) + c(dx \wedge dy)$ .

Betrachte lokale Koordinaten  $(u, v)$ , d.h.

$$\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x, y, z)(u, v)$$

mit  $V \subset \mathbb{R}^2$  als lokale Parametrisierung von  $\mathcal{M}$ .

Damit ist  $\Phi^{-1}$  Karte und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(V)} \omega &= \int_{\Phi(V)} (a(dy \wedge dz) + b(dz \wedge dx) + c(dx \wedge dy)) \\ &= \int_V \left( (\Phi^*a) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + (\Phi^*b) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + (\Phi^*c) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) d(u, v) \\ &= \int_V (\Phi^*\vec{a}) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) d(u, v) \end{aligned}$$

mit  $\vec{a} = (a, b, c)$ ,  $\Phi^*a = a \circ \Phi$ ,  $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}$  und  $\Phi_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ .

Die letzte Identität gilt nach Definition von  $\Phi_u \times \Phi_v$ .

## 5.19 Vektorielles Flächenelement

Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in 5.18, zusätzlich sei  $\mathcal{M}$  orientiert.

$\nu$  sei die positive Einheitsnormale an  $\mathcal{M}$ , sodass  $(\nu(p), v_1, v_2)$  positiv orientiert ist,

falls eine  $(v_1, v_2)$  positiv orientierte Orthonormalbasis von  $T_p\mathcal{M}$  ist.

Seien  $(u, v)$  positive Koordinaten auf  $\mathcal{M}$ , d.h.  $(\Phi_u, \Phi_v)$  ist positiv orientiert.

Jetzt sei  $\partial_u := \Phi_u$  und  $\partial_v := \Phi_v$ .

Dann gilt (vgl. Beweis von Satz 3.8):

$$\nu|_{\Phi(V)} = \frac{\partial_u \times \partial_v}{\|\partial_u \times \partial_v\|}$$

Das Tripel  $(dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$  wird in der physikalisch orientierten Literatur oft orientiertes Flächenelement genannt und mit  $d\vec{F}$  bezeichnet.

Dann setzt man:

$$\int_{\mathcal{M}} \vec{a} \cdot d\vec{F} := \int_{\mathcal{M}} (a(dy \wedge dz) + b(dz \wedge dx) + c(dx \wedge dy))$$

Es gilt dann:  $\int_{\mathcal{M}} \vec{a} \cdot d\vec{F} = \int_{\mathcal{M}} \vec{a} \cdot \nu dF$  mit der kanonischen Flächenform  $dF$  auf  $\mathcal{M}$ .

Schreibweise:  $d\vec{F} = \nu dF$ .

In lokalen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(V)} \vec{a} \cdot d\vec{F} &= \int_V (\Phi^* \vec{a}) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) d(u, v) \\ \int_{\Phi(V)} \vec{a} \cdot \nu dF &= \int_V (\Phi^* \vec{a}) \cdot \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} \sqrt{g} d(u, v) \end{aligned}$$

Dabei ist  $g = \det \begin{pmatrix} \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle & \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle \\ \langle \Phi_v, \Phi_u \rangle & \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2$ , wobei  $E := \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle$ ,  $F := \langle \Phi_v, \Phi_u \rangle$  und  $G := \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle$  ist.

Andererseits zeigt einfaches Nachrechnen:  $\|\Phi_u \times \Phi_v\|^2 = EG - F^2$ .

## 5.20 Klassischer Satz von Stokes

**Satz:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine orientierte 2-dimensionale  $C^2$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ .

Weiter sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen mit  $\mathcal{M} \subseteq \bar{U}$  und  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar.

Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \text{rot}(v), \nu \rangle d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle v, \tau \rangle d\mathcal{H}^1$$

Wobei  $\tau : \partial\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  Tangentialfeld ist, sodass  $\nu_{\mathcal{M}} \times \tau = \nu$ .

Dabei ist  $\nu_{\mathcal{M}}$  die äußere Einheitsnormale an  $\partial\mathcal{M}$  in  $T_p\mathcal{M}$  und  $\text{rot } v \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$  ist definiert durch  $(\text{rot } v) \lrcorner \omega_{\mathcal{M}} = d(\Theta v)$ .

**Bew:** Lemma 4.16 impliziert für  $\text{rot } v = \begin{pmatrix} (\text{rot } v)^1 \\ (\text{rot } v)^2 \\ (\text{rot } v)^3 \end{pmatrix}$ :

$$(\text{rot } v) \lrcorner \omega_{\mathbb{R}^3} = (\text{rot } v)^1 (dy \wedge dz) - (\text{rot } v)^2 (dx \wedge dz) + (\text{rot } v)^3 (dx \wedge dy)$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \langle \operatorname{rot} v, \nu \rangle dF &= \int_{\mathcal{M}} \operatorname{rot} v \cdot d\vec{F} = \int_{\mathcal{M}} (\operatorname{rot} v) \lrcorner \omega_{\mathbb{R}^3} \\ &= \int_{\mathcal{M}} d(\Theta v) = \int_{\partial\mathcal{M}} \Theta v = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle v, \tau \rangle d\mathcal{H}^1 \end{aligned}$$

□

- Bem:**
- i)  $\nu_{\mathcal{M}}$  heißt auch Konormale, um  $\nu_{\mathcal{M}}$  von  $\nu$  zu unterscheiden.
  - ii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist das euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$ .
  - iii) Für das Kreuzprodukt gilt:

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

und ist  $\tau_1, \tau_2$  Orthonormalbasis von  $T_x \mathcal{M}$  mit  $\tau_1 \times \tau_2 = \nu$ , so gilt:

$$\langle \operatorname{rot}(v(x)), \nu(x) \rangle = \langle \partial_{\tau_1} v(x), \tau_2 \rangle - \langle \partial_{\tau_2} v(x), \tau_1 \rangle$$

Deshalb reicht es  $v$  nur auf  $\mathcal{M}$  zu kennen, wenn  $v$  stetig diff'bar ist.

- iv) In physikalischer Notation:

$$\int_{\mathcal{M}} (\operatorname{rot} a) \cdot d\vec{F} = \int_{\partial\mathcal{M}} \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

**Phys. Interpr.:** Sei  $\Gamma$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ . Der Wert  $\int_{\Gamma} \langle v, \tau \rangle d\mathcal{H}^1$  heißt Zirkulation des Vektorfeldes  $v$  längs  $\Gamma$ .  
Ist  $\Gamma := \partial B$ , so ist  $\int_{\Gamma} \langle v, \tau \rangle d\mathcal{H}^1 > 0$  und damit auch  $\int_B \langle \operatorname{rot}(v), \nu \rangle d\mathcal{H}^2 > 0$ .  
 $\langle \operatorname{rot}(v), \nu \rangle$  sagt also, wie stark  $v$  in der Ebene senkrecht zu  $\nu$  rotiert.





# Kapitel 6

## Geometrie von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$

In diesem Kapitel gelte stets:

$\mathcal{M}$  ist eine  $n$ -dimensionale  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^d$ .

Ist  $(U, x)$  mit  $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine (lokale) Karte, so bezeichnen wir mit  $\gamma : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^d$  die zugehörige Parametrisierung, d.h.  $\gamma = x^{-1}$ .

Das Skalarprodukt sei stets euklidisch (falls nicht anders angegeben).

Wir wollen  $\text{grad}_{\mathcal{M}}$  und  $\text{div}_{\mathcal{M}}$  umformulieren.

### 6.1 Der Gradient in Untermannigfaltigkeiten

**Lemma:** Es sei  $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  Orthonormalbasis von  $T_p\mathcal{M}$ .

Dann gilt:

$$\text{grad}_{\mathcal{M}} u = \sum_{i=1}^n \partial_{\tau_i} u \tau_i$$

Dabei ist  $\partial_{\tau_i} u$  die Richtungsableitung von  $u$  in Richtung  $\tau_i$  (d.h.  $\partial_{\tau_i} u = du(\tau_i)$ ).

**Bew:** Ohne Einschränkung können wir eine Karte wählen mit  $\partial_{x^i} = \tau_i$  in  $p$ , denn:

Es sei  $y$  Karte mit  $\partial_{y^1}, \dots, \partial_{y^n} \in T_p\mathcal{M}$  Basis.

Wähle  $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  linear, sodass  $A\partial_{y^i} = \tau_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$  und definiere  $x := A \circ y$ . Dann gilt:  $\partial_{x^i} = A\partial_{y^i} = \tau_i$ .

Mit dieser Karte  $x$  gilt:  $g_{ij} = \delta_{ij}$  und

$$\text{grad}_{\mathcal{M}} u = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} (\partial_{\tau_j} u) \tau_i = \sum_{i=1}^n \partial_{\tau_i} u \tau_i$$

□

**Bem:** Ist  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , so gilt für  $u|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , dass

$$\text{grad}_{\mathcal{M}}(u|_{\mathcal{M}}) = P_{T_p\mathcal{M}}(\text{grad } u)$$

wobei  $u|_{\mathcal{M}}$  Einschränkung von  $u$  auf  $\mathcal{M}$  und  $P_{T_p\mathcal{M}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d : v \mapsto \sum_{i=1}^n \langle v, \tau_i \rangle \tau_i$  die orthogonale Projektion auf  $T_p\mathcal{M}$  ist.

## 6.2 Die kovariante Ableitung

**Def:** Es sei  $c : I \rightarrow \mathcal{M}$  eine parametrisierte Kurve (d.h.  $c'(t) \neq 0 \forall t \in I$ ) und  $v : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein differenzierbares Vektorfeld an  $\mathcal{M}$  längs  $c$ , d.h. dem Punkt  $c(t)$  ordnen wir einen Vektor  $v(t) \in T_{c(t)}\mathcal{M}$  zu.

Dann heißt

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) := P_{T_{c(t)}\mathcal{M}}(v'(t))$$

die *kovariante Ableitung* von  $v$ .

Ab jetzt schreiben wir  $P_{c(t)}$  statt  $P_{T_{c(t)}\mathcal{M}}$ .

**Bem:** Mit  $v$  ist auch  $\frac{\nabla}{dt}v$  ein Vektorfeld an  $\mathcal{M}$  längs  $c$ .

**Bsp:** i) Es sei  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  und  $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)$ .  
Ein Vektorfeld  $v$  an  $\mathcal{M}$  längs  $c$  ist dann von der Form  $v(t) = (v^1(t), v^2(t), 0)$ .  
Es ergibt sich:

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) = P_{c(t)}(v'(t)) = P_{c(t)}((v_1'(t), v_2'(t), 0)) = (v_1'(t), v_2'(t), 0) = v'(t)$$

In der Ebene ist die kovariante Ableitung also gerade die gewöhnliche Ableitung.

ii) Es sei  $S = S^2$  die Sphäre.  
Berechne die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsfelds der Kurve

$$c : \mathbb{R} \rightarrow S^2 : t \mapsto c(t) := (\cos t, \sin t, 0)$$

Es gilt:  $c'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$  und  $c''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) = -c(t)$ .  
 $c''(t)$  steht senkrecht auf  $T_{c(t)}S^2$ , also folgt:  $\frac{\nabla}{dt}c'(t) = 0$ .

## 6.3 Eigenschaften der kovarianten Ableitung

**Lemma:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^d$ ,  $c : I \rightarrow \mathcal{M}$  eine parametrisierte Kurve und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbare Funktion und  $\varphi : J \rightarrow I$  (wobei  $I$  und  $J$  Intervalle sind) differenzierbar mit  $\varphi'(s) \neq 0 \forall s \in J$ .

Ferner seien  $v$  und  $w$  Vektorfelder an  $\mathcal{M}$  längs  $c$ .

Dann sind auch  $v + w$  und  $fw$  Vektorfelder an  $\mathcal{M}$  längs  $c$  und es gilt:

a) Additivität:

$$\frac{\nabla}{dt}(v + w)(t) = \frac{\nabla}{dt}v(t) + \frac{\nabla}{dt}w(t)$$

b) Produktregel I:

$$\frac{\nabla}{dt}(fv)(t) = f'(t)v(t) + f(t)\frac{\nabla}{dt}v(t)$$

c) Produktregel II:

$$\frac{d}{dt}\langle v, w \rangle(t) = \left\langle \frac{\nabla}{dt}v(t), w(t) \right\rangle + \left\langle v(t), \frac{\nabla}{dt}w(t) \right\rangle$$

d) Umparametrisierung:

$$\frac{\nabla}{dt}(v \circ \varphi) = \varphi'(t) \left( \left( \frac{\nabla}{dt}v \right) \circ \varphi \right)$$

**Bew:** Alle Aussagen folgen direkt aus der Definition. Exemplarisch zeigen wir d):

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}(v \circ \varphi) &= P_{v(\varphi(t))}((v \circ \varphi)'(t)) = P_{v(\varphi(t))}(v'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) \\ &= \varphi'(t)P_{v(\varphi(t))}(v'(\varphi(t))) = \varphi'(t) \left( \left( \frac{\nabla}{dt}v \right) \circ \varphi \right) \end{aligned}$$

□

## 6.4 Christoffel-Symbole

**Def:** Es sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  ( $U \subset \mathbb{R}^n$  offen) eine lokale Parametrisierung von  $\mathcal{M}$ .

Dann kann man  $P_{c(t)}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}\right)$  in der Basis  $\frac{\partial F}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_n}$  ausdrücken. Es sei:

$$P_{c(t)}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}\right) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial F}{\partial u_k}$$

Die Koeffizientenfunktionen  $\Gamma_{i,j}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißen *Christoffel-Symbole*.

**Bem:** i) Da  $\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}$  folgt  $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k$ .

ii)  $\frac{\partial F}{\partial u_i}$  entspricht  $\partial_{u^i}$ .

## 6.5 Die kovariante Abbildung mittels Christoffel-Symbole

**Lemma:** Es sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine lokale Parametrisierung von  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$ ,  $c : I \rightarrow \mathcal{M}$  eine parametrisierte Kurve (wobei o.B.d.A.  $c(I) \subset F(U)$  gelten soll) und  $v : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein glattes Vektorfeld an  $\mathcal{M}$  längs  $c$ . Bilde  $\tilde{c} := F^{-1} \circ c : I \rightarrow U$ .

Drücken wir  $v$  in der Basis  $\frac{\partial F}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_n}$  wie folgt aus

$$v(t) = \sum_{k=1}^n v^k(t) \frac{\partial F}{\partial u_k}(\tilde{c}(t))$$

so erhalten wir:

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) = \sum_{k=1}^n \left( (v^k)'(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k(\tilde{c}(t))v^i(t)\tilde{c}'_j(t) \right) \frac{\partial F}{\partial u_k}(\tilde{c}(t))$$

**Bew:**

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}v(t) &= P_{c(t)}(v'(t)) \\ &= P_{c(t)} \left( \sum_{k=1}^n (v^k)'(t) \frac{\partial F}{\partial u_k}(\tilde{c}(t)) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_k}(\tilde{c}(t))\tilde{c}'_j(t)v^k(t) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (v^k)'(t) \frac{\partial F}{\partial u_k}(\tilde{c}(t)) + \sum_{i,j,k=1}^n v^k(t)\tilde{c}'_j(t)\Gamma_{j,k}^i(\tilde{c}(t)) \frac{\partial F}{\partial u_i}(\tilde{c}(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( (v^k)'(t) + \sum_{i,j=1}^n v^i(t)\tilde{c}'_j(t)\Gamma_{i,j}^k(\tilde{c}(t)) \right) \frac{\partial F}{\partial u_k}(\tilde{c}(t)) \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt eine Umbenennung von  $i$  und  $k$  stattgefunden hat und  $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k$  angewendet wurde.  $\square$

Jetzt wollen wir feststellen:  $\Gamma$  hängt nur von  $\mathcal{M}$  und dem Skalarprodukt auf  $\mathcal{M}$  ab (und nicht vom umgebenen Raum).

## 6.6 Berechnung der Christoffel-Symbole

**Lemma:** Für die Christoffel-Symbole gilt:

$$\Gamma_{i,j}^l = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right) g^{ml}$$

**Bew:** Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j}, \frac{\partial F}{\partial u_m} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}, \frac{\partial F}{\partial u_m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j}, \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_m} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial F}{\partial u_k}, \frac{\partial F}{\partial u_m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j}, \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,m}^k \frac{\partial F}{\partial u_k} \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \Gamma_{i,j}^k g_{km} + \Gamma_{i,m}^k g_{kj} \right) \end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} &= \sum_{k=1}^n \left( \Gamma_{i,j}^k g_{km} + \Gamma_{j,m}^k g_{ki} \right) \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} &= \sum_{k=1}^n \left( \Gamma_{m,i}^k g_{kj} + \Gamma_{m,j}^k g_{ki} \right) \end{aligned}$$

Setzt man diese drei Gleichungen zusammen folgt:

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} = 2 \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k g_{km}$$

Multipliziert man mit  $(g^{ml})_{m,l=1}^n$  und summiert über  $m$  erhält man schließlich die Behauptung (da  $\sum_{m=1}^n g_{km} g^{ml} = \delta_{kl}$ ).  $\square$

## 6.7 Die gerichtete kovariante Ableitung

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^d$  Untermannigfaltigkeit,  $v$  sei ein Vektorfeld auf  $\mathcal{M}^n$  und  $w_p \in T_p \mathcal{M}^n$  ein Tangentialvektor.

Dann ist die kovariante Ableitung  $\nabla_{w_p} v \in T_p \mathcal{M}^n$  von  $v$  in Richtung  $w_p$  wie folgt definiert:

Wähle eine Kurve  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}^n$  mit  $c(0) = p$ ,  $c'(0) = w_p$  und setze

$$\nabla_{w_p} v := \frac{\nabla}{dt}(v \circ c)(0)$$

Die Definition hängt nicht von der Auswahl der Kurve ab (vgl. Übungsaufgabe 38.(ii)).

## 6.8 Definition der kovarianten Ableitung über Vektorfeldern

**Def:** Sind  $v, w$  Vektorfelder auf  $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^d$ , so definiere  $\nabla_w v$  durch

$$(\nabla_w v)(p) := \nabla_{w(p)} v$$

## 6.9 Rechenregeln für die gerichtete kovariante Ableitung

**Lemma:** Es sei  $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^d$  eine Untermannigfaltigkeit,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2$  Vektorfelder auf  $\mathcal{M}^n$  und sei  $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$  glatt.

Dann gilt:

a) Linearität im zu differenzierbaren Vektorfeld:

$$\nabla_w(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \nabla_w v_1 + c_2 \nabla_w v_2$$

b) Produktregel I:

$$\nabla_w(fv) = df(w)v + f \nabla_w v$$

c) Produktregel II:

$$d(\langle v_1, v_2 \rangle)(w) = \langle \nabla_w v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, \nabla_w v_2 \rangle$$

d) Linearität in dem Vektorfeld, nach dem differenziert wird:

$$\nabla_{(c_1 w_1 + c_2 w_2)} v = c_1 \nabla_{w_1} v + c_2 \nabla_{w_2} v$$

e) Funktionen-Linearität in dem Vektorfeld, nach dem differenziert wird:

$$\nabla_{fw} v = f \nabla_w v$$

**Bew:** a), b), c) folgen direkt aus Lemma 6.3.

d), e) sind Übungsaufgabe 38(iii). □

## 6.10 Zweite Kovariante Ableitung

Wir wollen nun die zweite kovariante Ableitung definieren. Hier müssen wir jedoch aufpassen.

Zur Motivation sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $v, w, z : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  Vektorfelder.

Dann gilt:

$$\nabla_w z = (Dz(x))w(x)$$

und

$$\begin{aligned} \nabla_v(\nabla_w z) &= v^T D^2 z w + Dz \nabla_v w \\ &= v^T D^2 z w + \nabla_{\nabla_v w} z \end{aligned}$$

Das zeigt

$$v^T D^2 z w = \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_{\nabla_v w} z$$

Dies motiviert die folgende Definition.

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^d$  Untermannigfaltigkeit und  $v, w, z$  seien Vektorfelder auf  $\mathcal{M}^n$ .

Dann ist die zweite kovariante Ableitung von  $z$  nach  $v$  und  $w$  definiert durch

$$\nabla_{v,w}^2 z = \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_{\nabla_v w} z$$

## 6.11 Berechnung der zweiten kovarianten Ableitung

Wir wollen die zweite kovariante Ableitung in lokalen Koordinaten berechnen.

**Lemma:** Es sei  $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^d$  eine Untermannigfaltigkeit und  $v, w, z$  seien Vektorfelder auf  $\mathcal{M}^n$ . Weiter sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $U \subset \mathbb{R}^n$  offen) eine lokale Parametrisierung von  $\mathcal{M}^n$  und  $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$  sei die lokale Basisdarstellung von  $v$  und entsprechend  $w = \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial F}{\partial u^j}$  sowie  $z = \sum_{k=1}^n z^k \frac{\partial F}{\partial u^k}$ .  
Dann gilt:

$$\nabla_{v,w}^2 z = \sum_{m=1}^n \alpha^m \frac{\partial F}{\partial u^m}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha^m &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 z^m}{\partial u^i \partial u^j} v^i w^j + \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma_{i,j}^m \frac{\partial z^i}{\partial u^k} (v^j w^k + v^k w^j) \\ &\quad - \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial z^m}{\partial u^k} v^i w^j + \sum_{i,j,k=1}^n \left( \left( \frac{\partial \Gamma_{k,j}^m}{\partial u^i} + \sum_{l=1}^n (\Gamma_{l,i}^m \Gamma_{k,j}^l - \Gamma_{k,l}^m \Gamma_{i,j}^l) \right) v^i w^j z^k \right) \end{aligned}$$

**Bem:** Die erste Summe ist die übliche zweite Ableitung.  
Alle andere Terme sind Korrekturen von niederer Ordnung.

**Bew:** (Konsequentes Rechnen, kühlen Kopf bewahren.)  
Es gilt nach Lemma 6.5:

$$\begin{aligned} \nabla_w z &= \sum_{k=1}^n \nu^k \frac{\partial F}{\partial u^k} \quad \text{mit} \\ \nu^k &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial z^k}{\partial u^l} w^l + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k z^i w^j \end{aligned}$$

Für  $\nabla_v(\nabla_w z)$  ergibt sich als  $\alpha$ -ter Koeffizient ( $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ ):

$$\begin{aligned} (*) \quad \sum_{m=1}^n \frac{\partial \nu^\alpha}{\partial u^m} v^m + \sum_{\beta,\gamma=1}^n \Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha \nu^\beta v^\gamma &= \sum_{m,l=1}^n \left( \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial u^l \partial u^m} w^l v^m + \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^l} \frac{\partial w^l}{\partial u^m} v^m \right) \\ &\quad + \sum_{i,j,m=1}^n \left( \frac{\partial \Gamma_{i,j}^\alpha}{\partial u^m} z^i w^j v^m + \Gamma_{i,j}^\alpha \frac{\partial z^i}{\partial u^m} w^j v^m + \Gamma_{i,j}^\alpha z^i \frac{\partial w^j}{\partial u^m} v^m \right) \\ &\quad + \sum_{l,\beta,\gamma=1}^n \frac{\partial z^\beta}{\partial u^l} w^l \Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha v^\gamma + \sum_{i,j,\beta,\gamma=1}^n \Gamma_{i,j}^\beta \Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha z^i w^j v^\gamma \end{aligned}$$

Für  $\nabla_v w = \sum_{k=1}^n \mu^k \frac{\partial F}{\partial u^k}$  gilt:

$$\mu^k = \sum_{l=1}^n \frac{\partial w^k}{\partial u^l} v^l + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k v^i w^j$$

Für  $\nabla_{\nabla_v w} z$  folgt für die  $\alpha$ -te Komponente:

$$(**) \quad \sum_{m=1}^n \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \mu^m + \sum_{\beta, \gamma=1}^n \Gamma_{\beta, \gamma}^\alpha z^\beta \mu^\gamma = \sum_{m, l=1}^n \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \frac{\partial w^m}{\partial u^l} v^l + \sum_{m, i, j=1}^n \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \Gamma_{i, j}^m v^i w^j \\ + \sum_{l, \beta, \gamma=1}^n \frac{\partial w^\gamma}{\partial u^l} v^l \Gamma_{\beta, \gamma}^\alpha z^\beta + \sum_{i, j, \beta, \gamma=1}^n \Gamma_{i, j}^\gamma \Gamma_{\beta, \gamma}^\alpha v^i w^j z^\beta$$

Die Differenz von (\*) und (\*\*) liefert die Behauptung, da sich alle Terme wegheben, die Ableitungen von  $v$  und  $w$  enthalten.  $\square$

## 6.12 Festlegung der zweiten Ableitung

**Korollar:** Der Wert von  $\nabla_{v, w}^2 z$  hängt in  $p \in \mathcal{M}$  nur von  $v(p)$ ,  $w(p)$  und der Ableitung von  $z$  in  $p$  bis zur 2. Ordnung ab.

Daher hat folgende Definition Sinn:

**Def:** Für ein Vektorfeld  $z$  auf  $\mathcal{M}$  definiere

$$\nabla^2 z : T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \rightarrow T_p \mathcal{M} : (v_p, w_p) \mapsto (\nabla_{v, w}^2 z)(p)$$

wobei  $v$  und  $w$  beliebige Vektorfelder auf  $\mathcal{M}$  mit  $v(p) = v_p$  und  $w(p) = w_p$  sind.

- Bem:**
- i) Die zweite kovariante Ableitung ist eine Größe der inneren Geometrie (d.h. sie hängt nur von dem metrischen Tensor auf  $\mathcal{M}$  ab).
  - ii) Wir wollen nun Krümmung als den Fehlerterm, der die „Nichtvertauschbarkeit“ der beiden Argumente in der zweiten kovarianten Ableitung misst, definieren.

## 6.13 Der Riemannsche Krümmungstensor

**Def:** Sei  $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^d$  eine Untermannigfaltigkeit,  $p \in \mathcal{M}$ ,  $v_p, w_p \in T_p \mathcal{M}$  und  $z$  sei ein Vektorfeld auf  $\mathcal{M}$ .

Dann ist der *Riemannsche Krümmungstensor*  $R$  definiert durch:

$$R(v_p, w_p)z := \nabla_{v_p, w_p}^2 z - \nabla_{w_p, v_p}^2 z$$

## 6.14 Berechnung des Riemannschen Krümmungstensors

Wir wollen nun die Darstellung von  $R$  in lokalen Koordinaten berechnen:



**Lemma:** Es sei  $F : U \rightarrow \mathcal{M}$  eine lokale Parametrisierung und  $p = F(u_0)$ .

Weiter sei  $v_p = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0)$ ,  $w_p = \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial F}{\partial u^j}(u_0)$ ,  $z = \sum_{k=1}^n z^k \frac{\partial F}{\partial u^k}$ .

Dann hat der Riemannsche Krümmungstensor in lokalen Koordinaten die Form

$$R(v_p, w_p)z = \sum_{i,j,k,l=1}^n R_{i,j,k}^l(u_0) v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u_0)$$

wobei

$$R_{i,j,k}^l := \frac{\partial \Gamma_{k,j}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{k,i}^l}{\partial u^j} + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{m,i}^l \Gamma_{k,j}^m - \Gamma_{m,j}^l \Gamma_{k,i}^m)$$

**Bew:** Alle Ausdrücke in Lemma 6.11, die Ableitungen von  $z$  enthalten, sind symmetrisch in  $v$  und  $w$  und fallen daher weg. Nutze außerdem die Symmetrie von  $\Gamma_{i,j}^k$  bezüglich  $i$  und  $j$ .  $\square$

## 6.15 Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors

**Korollar:** i) Der Tangentialvektor  $R(v_p, w_p)z$  hängt an der Stelle  $p \in \mathcal{M}$  nur von  $z(p)$  ab (nicht aber von den Werten von  $z$  in  $\mathcal{M} \setminus \{p\}$ ).  
Daher ist die Abbildung

$$R_p : T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \rightarrow T_p \mathcal{M}$$

$R_p(v_p, w_p)z_p := R(v_p, w_p)z$  wohldefiniert, wobei  $z$  ein beliebiges Vektorfeld auf  $\mathcal{M}$  mit  $z(p) = z_p$  ist.

- ii)  $R_p$  ist linear in jedem Ausdruck.  
iii)  $R_p$  ist schiefsymmetrisch in  $v_p$  und  $w_p$ , d.h.

$$R_p(v_p, w_p)z_p = -R_p(w_p, v_p)z_p$$

Wir wollen jetzt die Krümmung für Hyperflächen (d.h.  $n = d - 1$ ) des  $\mathbb{R}^d$  besser verstehen. Auf Hyperflächen können wir die Krümmung mit Hilfe eines Normalenfeldes definieren.

## 6.16 Gauß-Abbildung

**Def:** Es sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$  eine orientierbare Hyperfläche mit glattem Einheitsnormalenfeld  $\nu : \mathcal{M} \rightarrow S^{d-1}$ .

Dann heißt  $\nu$  *Gauß-Abbildung*.

Es sei  $p \in \mathcal{M}$ . Betrachte das Differential von  $\nu$  in  $p$ :

$$d_p \nu : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{\nu(p)} S^{d-1}$$

Nun gilt:  $T_{\nu(p)} S^{d-1} = \nu(p)^\perp \cong T_p \mathcal{M}$ .

Damit ist  $d_p \nu$  ein Endomorphismus von  $T_p \mathcal{M}$ .

## 6.17 Weingartenabbildung

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  eine glatte, orientierbare Hyperfläche mit Normalenfeld  $\nu$ .  
Der Endomorphismus

$$W_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M} : X \mapsto W_p(X) := -d_p\nu(X) \quad \forall X \in T_p\mathcal{M}$$

heißt *Weingartenabbildung*.

## 6.18 Beispiele zur Weingartenabbildung

- Bsp:**
- i) Es sei  $\mathcal{M} = S^2$  und  $\nu(p) = p \quad \forall p \in S^2$ .  
Dann gilt:  $W_p = -\text{id} : T_pS^2 \rightarrow T_pS^2$ .
  - ii) Es sei  $\mathcal{M} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  die  $x$ - $y$ -Ebene und  $\nu(x, y, z) = (0, 0, 1)$ .  
Dann gilt  $W_p \equiv 0$ .
  - iii) Es sei  $\mathcal{M} = S^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$ .  
Jetzt wähle  $\nu = (x, y, 0)$ .  
In  $p = (x, y, z) \in \mathcal{M}$  wird die Tangentialebene durch  $(-y, x, 0)$  und  $(0, 0, 1)$  aufgespannt. Wir berechnen

$$\begin{aligned} W_p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -d_p\nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{d}{dt}\nu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+t \end{pmatrix} \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir  $W_p \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$  bestimmen:

Wähle  $t_0 \in \mathbb{R}$  sodass  $\begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Dann gilt für  $c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t+t_0) \\ \sin(t+t_0) \\ z \end{pmatrix}$ , dass  $c(0) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p$ .

$$c'(0) = \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} W_p \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} &= -d_p \nu \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{d}{dt} \nu \begin{pmatrix} \cos(t+t_0) \\ \sin(t+t_0) \\ z \end{pmatrix} \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t+t_0) \\ \sin(t+t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \sin(t_0) \\ -\cos(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt somit, dass  $W_p$  in der Basis  $(-y, x, 0)$  und  $(0, 0, 1)$  die Matrixdarstellung  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  hat.

## 6.19 Die Weingartenabbildung ist selbstadjungiert

**Satz:** Es sei  $\mathcal{M}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  eine orientierbare Untermannigfaltigkeit mit Weingartenabbildung  $W_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_p \mathcal{M}$  für  $p \in \mathcal{M}$ .

Dann ist  $W_p$  selbstadjungiert bezüglich der ersten Fundamentalform (d.h. bezüglich dem euklidischen Skalarprodukt auf  $T_p \mathcal{M}$ ).

**Bew:** Es ist zu zeigen:  $\langle W_p(X), Y \rangle = \langle X, W_p(Y) \rangle$ . (\*)

Es sei  $\nu$  das Normalenfeld, das zu  $W_p$  führt.

$F : U \rightarrow \mathcal{M}$  sei eine lokale Parametrisierung und  $u = F^{-1}(p)$ .

Weiter seien  $X_i = \frac{\partial}{\partial u_i} F = DF(u)e_i$  (Achtung:  $X_i \hat{=} \partial_{x^i}$ ) die kanonischen Basisvektoren von  $T_p \mathcal{M}$ .

Da  $\nu$  senkrecht auf  $X_i$  steht folgt:

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u + te_j), \nu(F(u + te_j)) \right\rangle = 0$$

Differenziation nach  $t$  ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u + te_j), \nu(F(u + te_j)) \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u_i}(u + te_j), \nu(F(u + te_j)) \right\rangle \Big|_{t=0} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u + te_j), \frac{d}{dt} \nu(F(u + te_j)) \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}(u), \nu(F(u)) \right\rangle + \langle X_i, d_p \nu(DF(u)e_j) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}(u), \nu(p) \right\rangle + \langle X_i, -W_p(X_j) \rangle \end{aligned}$$

Satz von Schwarz liefert:

$$\langle X_i, W_p(X_j) \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}(u), \nu(p) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(u), \nu(p) \right\rangle = \langle X_j, W_p(X_i) \rangle$$

Für  $v = \sum_{i=1}^n v^i X_i$  und  $w = \sum_{j=1}^n w^j X_j$  folgt somit wegen der Linearität des Differentials und des Skalarproduktes:

$$\begin{aligned} \langle v, W_p(w) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n v^i X_i, W_p \left( \sum_{j=1}^n w^j X_j \right) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n v^i w^j \langle X_i, W_p(X_j) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n v^i w^j \langle X_j, W_p(X_i) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n w^j X_j, W_p \left( \sum_{i=1}^n v^i X_i \right) \right\rangle = \langle w, W_p(v) \rangle \end{aligned}$$

□

## 6.20 Die zweite Fundamentalform

**Def:** Die zur Weingarten-Abbildung gehörende Bilinearform  $II_p$  heißt *zweite Fundamentalform* (der Fläche  $\mathcal{M}$  im Punkt  $p$ ):

$$II_p(X, Y) := \langle W_p(X), Y \rangle \quad \forall X, Y \in T_p \mathcal{M}$$

## 6.21 Die erste Fundamentalform

**Bem:** Die Form

$$I_p(X, Y) := \langle X, Y \rangle \quad \forall X, Y \in T_p \mathcal{M}$$

heißt erste Fundamentalform.

## 6.22 Weingarten-Abbildung und zweite Fundamentalform in lokalen Koordinaten

Es sei  $\mathcal{M}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  eine Untermannigfaltigkeit,  $p \in \mathcal{M}$  und  $F : U \rightarrow \mathcal{M}$  eine lokale Parametrisierung von  $\mathcal{M}$  um  $p$ . Setze  $u := F^{-1}(p)$ .

Weiter sei

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &:= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u), \frac{\partial F}{\partial u_j}(u) \right\rangle \\ h_{ij}(u) &:= II_p \left( \frac{\partial F}{\partial u_i}, \frac{\partial F}{\partial u_j} \right) = \left\langle W_p \left( \frac{\partial F}{\partial u_i} \right), \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}, \nu(p) \right\rangle \end{aligned}$$

D.h.  $h_{ij}$  beschreibt  $II_p$  in der Basis  $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_n} \right\}$  und  $n := d - 1$ .

Die Matrixkoeffizienten  $w_i^j$  von  $W_p$  sind gegeben durch

$$W_p \left( \frac{\partial F}{\partial u_i} \right) = \sum_{j=1}^n w_i^j \frac{\partial F}{\partial u_j} \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} h_{ij} &= II_p \left( \frac{\partial F}{\partial u_i}, \frac{\partial F}{\partial u_j} \right) = \left\langle W_p \left( \frac{\partial F}{\partial u_i} \right), \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n w_i^k \frac{\partial F}{\partial u_k}, \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n w_i^k \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_k}, \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle = \sum_{k=1}^n w_i^k g_{kj} \end{aligned}$$

Das zeigt

$$(h_{ij})_{i,j=1}^n = (w_i^k)_{i,k=1}^n \cdot (g_{kj})_{k,j=1}^n \quad \text{also} \quad W = HG^{-1}$$

oder

$$w_i^j = \sum_{k=1}^n h_{ik} g^{kj}$$

**Bem:** Da  $W_p : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_p \mathcal{M}$  selbstadjungiert ist, gibt es eine Orthonormalbasis  $X_1, \dots, X_n$  von  $T_p \mathcal{M}$  aus Eigenvektoren, d.h.

$$W_p(X_i) = \kappa_i X_i \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

wobei  $\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_n \in \mathbb{R}$  die Eigenwerte von  $W_p$  sind.

(Sofern nicht anderes gesagt ist, gehen wir immer von  $\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_n \in \mathbb{R}$  aus.)

## 6.23 Hauptkrümmungen

- Def:** i) Die Eigenwerte  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  heißen *Hauptkrümmungen* von  $\mathcal{M}$  in  $p$ . Die zugehörigen Eigenvektoren  $\pm X_i$  heißen *Hauptkrümmungsrichtungen*.  
ii) Es sei  $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^d$  mit  $n = d - 1$  eine orientierte Untermannigfaltigkeit und  $p \in \mathcal{M}^n$ .

Dann heißt

$$H(p) := \frac{1}{n} \operatorname{spur}(W_p) = \frac{1}{n} (\kappa_1 + \dots + \kappa_n)$$

die mittlere Krümmung von  $\mathcal{M}$  in  $p$ .

- iii) Ist  $n = 2$  und  $d = 3$ , so heißt

$$K(p) := \kappa_1 \kappa_2 = \det W_p$$

die *Gauß-Krümmung*.

## 6.24 Krümmung bei umgekehrter Orientierung

- Bem:** i) Drehen wir die Orientierung um, so dreht sich das Vorzeichen von  $W_p$  und somit auch das der  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  um. Damit dreht sich das Vorzeichen von  $H$  um. Das Vorzeichen von  $K$  hingegen ändert sich nicht.  
ii) Definieren wir den mittleren Krümmungsvektor  $\mathcal{H}$  durch  $\mathcal{H} := H\nu$ , so dreht sich das Vorzeichen von  $\mathcal{H}$  bei Orientierungswechsel nicht um.

## 6.25 Klassifizierung von Krümmungspunkten

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine orientierte Untermannigfaltigkeit und  $p \in \mathcal{M}$ .  
Mann nennt  $p$

- i) elliptisch, falls  $K(p) > 0$ .
- ii) hyperbolisch, falls  $K(p) < 0$ .
- iii) parabolisch, falls  $K(p) = 0$ , aber einer der  $\kappa_i \neq 0$  ist.
- iv) Flachpunkt, falls  $W_p \equiv 0$ , d.h.  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ .

## 6.26 Beispiele zum Krümmungsbegriff

- Bsp:**
- i)  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ .  
Es gilt  $W_p = 0$  für  $p \in \mathcal{M}$  und daher sind alle Punkte Flachpunkte.
  - ii)  $\mathcal{M} = S^2$ , die Orientierung sei durch die innere (!) Normale gegeben.  
Dann gilt  $W = \text{id}$ , also  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ , womit  $K \equiv 1$  ist.  
D.h. alle Richtungen sind Hauptkrümmungsrichtungen und alle Punkte sind elliptisch.  
Weiter gilt:  $H \equiv 1$  und  $\mathcal{H}(p) = -p$ .
  - iii) Sei  $\mathcal{M}$  ein Zylinder  $\mathcal{M} = S^1 \times \mathbb{R}$ , die Orientierung durch innere Normale gegeben.  
Wir wissen:  $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = 1$ , also ist  $K = 0$  und  $H = \frac{1}{2}$ .  
Alle Punkte sind daher parabolisch.

## 6.27 Bogenlängenparametrisierung

Für eine Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  wollen wir die Krümmung als Maß für die Richtungsänderung auffassen. Dabei ist die Richtung gegeben durch die Tangente bzw. Normale. Um die Richtungsänderung zu definieren müssen wir zunächst festlegen, wie schnell wir die Kurve durchlaufen.

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}^1 \subset \mathbb{R}^d$  eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit (d.h. eine Kurve).  
Dann heißt  $c : I \rightarrow \mathcal{M}^1$  *Bogenlängenparametrisierung*, falls

$$\|c'(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$$

## 6.28 Existenz einer Bogenlängenparametrisierung

**Lemma:** Es sei  $\mathcal{M}^1 \subset \mathbb{R}^d$  eine Kurve mit Parametrisierung  $c : I \rightarrow \mathcal{M}^1$ .  
Dann existiert eine Abbildung  $\varphi : J \rightarrow I$  ( $I, J$  Intervalle), sodass  $c \circ \varphi$  eine Bogenlängenparametrisierung ist und die gleiche Orientierung wie  $c$  besitzt.

**Bew:** Wähle  $t_0 \in I$  und definiere  $\psi(s) := \int_{t_0}^s \|c'(t)\| dt$ .

Da  $\psi'(s) = \|c'(s)\| > 0$  ist, ist  $\psi$  streng monoton steigend, also insbesondere auch injektiv.

Definiere  $\varphi := \psi^{-1} : J := \psi(I) \rightarrow I$ , dann gilt:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\psi'(\varphi(t))} = \frac{1}{\|c'(\varphi(t))\|}$$

Aus der Kettenregel folgt

$$\|(c \circ \varphi)'(t)\| = \|c'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\| = |\varphi'(t)| \|c'(\varphi(t))\| = 1$$

Damit ist  $c \circ \varphi$  nach Bogenlänge parametrisiert.

Betrachte „Kartenwechsel“  $c^{-1} \circ (c \circ \varphi) = \varphi$ . Da  $\varphi' > 0$  ist, sind  $c$  und  $c \circ \varphi$  nach Satz 3.5 gleich orientiert.  $\square$

## 6.29 Krümmung einer ebenen Kurve

Es sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Bogenlängenparametrisierung von  $\mathcal{M}^1 \subset \mathbb{R}^2$ .

Dann ist  $\nu(t) = (-c_2'(t), c_1'(t))$  eine Einheitsnormale an  $\mathcal{M}^1$ .

Weiter ist  $(c'(t), \nu(t))$  positiv orientiert.

Da  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, folgt  $\langle c', c' \rangle = 1$ .

Differenziere diese Identität und man erhält:

$$0 = \langle c'', c' \rangle + \langle c', c'' \rangle = 2 \langle c'', c' \rangle$$

D.h.  $c'$  und  $c''$  stehen senkrecht aufeinander.

Also existiert  $\kappa(t) \in \mathbb{R}$  sodass

$$c''(t) = \kappa(t)\nu(t)$$

**Def:** Die Größe  $\kappa(t)$  heißt *Krümmung* der orientierten Kurve  $\mathcal{M}^1$  im Punkt  $c(t)$ .

**Bem:** Es gilt  $\kappa > 0$ , falls die Kurve sich in Richtung  $\nu$  krümmt und  $\kappa < 0$  falls sie sich von  $\nu$  wegkrümmt.

**Bsp:** Gegeben sei die Kreislinie  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Radius  $r > 0$ .

Deren Bogenlängenparametrisierung lautet:

$$c(t) = \left( r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r} \right)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} c'(t) &= \left( -\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r} \right) \quad \text{und} \quad \nu(t) = \left( -\cos \frac{t}{r}, -\sin \frac{t}{r} \right) \\ c''(t) &= \frac{1}{r} \left( -\cos \frac{t}{r}, -\sin \frac{t}{r} \right) = \frac{1}{r} \nu(t) \end{aligned}$$

Damit ist  $\kappa(t) = \frac{1}{r}$ .

## 6.30 Frenet-Gleichungen I

**Prop:** Es sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Bogenlängenparametrisierung von  $\mathcal{M}^1 \subset \mathbb{R}^2$ .  
Setze  $v := c'$  und es sei  $\kappa$  die Krümmung von  $c$  und  $\nu$  sei Einheitsnormalenvektor. Dann gilt:

$$\begin{aligned}v'(t) &= \kappa(t)\nu(t) \\ \nu'(t) &= -\kappa(t)v(t)\end{aligned}$$

**Bew:**  $v'(t) = c''(t) = \kappa(t)\nu(t)$  ist gerade die Definition von  $\kappa$ .  
Differenziation von  $1 = \langle \nu, \nu \rangle$  liefert:  $\langle \nu', \nu \rangle = 0$  und daher  $\nu' = \alpha\nu$ .  
Durch differenzieren von  $0 = \langle \nu, v \rangle$  erhalten wir außerdem:

$$0 = \langle \nu', v \rangle + \langle \nu, v' \rangle = \langle \alpha\nu, v \rangle + \langle \nu, \kappa\nu \rangle = \alpha + \kappa$$

□

**Bem:** Für  $d = 2$  und  $n = 1$  ist die Weingartenabbildung gerade

$$W_{c(t)}(X) = -(d_p\nu)(X)$$

Wähle  $v := c'$ , dann gilt  $d_p\nu(v) = \nu'(t)$ , also  $W_{c(t)}(v) = \kappa(t)v(t)$ .  
In diesem Fall stimmt also die Krümmung  $\kappa$  mit der Hauptkrümmung überein.

## 6.31 Raumkrümmung

Es sei  $\mathcal{M}^1 \subset \mathbb{R}^d$  eine Untermannigfaltigkeit und  $c : I \rightarrow \mathcal{M}^1$  sei eine Bogenlängenparametrisierung.

Dann heißt

$$\kappa(t) := \|c''(t)\|$$

Krümmung von  $c$  (bzw.  $\mathcal{M}^1$ ) und  $\vec{\kappa} := c''(t)$  heißt Krümmungsvektor von  $c$  (bzw.  $\mathcal{M}^1$ ) in  $c(t)$ .

**Bem:** i) Es gilt:  $\kappa = 0 \quad \forall t \in I \Leftrightarrow c'' = 0 \quad \forall t \in I \Leftrightarrow c$  ist eine Gerade.  
 $\kappa \neq 0$  misst die „Abweichung“ von der Geraden.  
ii) Für  $\mathcal{M}^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}^{d-2} \subset \mathbb{R}^d$  haben wir nun zwei verschiedene Begriffe von Krümmung.

## 6.32 Der Normalenvektor im $\mathbb{R}^d$

**Def:** Es sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Bogenlängenparametrisierung der Untermannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^1 \subset \mathbb{R}^d$  und  $t_0 \in I$  mit  $\kappa(t_0) \neq 0$ .

Dann heißt

$$\nu(t_0) := \frac{c''(t_0)}{\kappa(t_0)} = \frac{c''(t_0)}{\|c''(t_0)\|}$$

der Normalenvektor von  $c$  in  $t_0$ .

**Bem:** Wegen  $0 = \frac{d}{dt} \langle c', c' \rangle = 2 \langle c'', c' \rangle$  folgt  $\nu(t_0) \perp c'(t_0)$ .



### 6.33 Der Binormalenvektor

**Def:** Es sei  $c$  wie oben, aber jetzt sei  $d = 3$ ,  $t_0 \in I$  und  $\kappa(t_0) \neq 0$ .  
Dann heißt

$$b(t_0) = c'(t_0) \times \nu(t_0)$$

der *Binormalenvektor* von  $\mathcal{M}^1$  (bzw.  $c$ ) in  $c(t_0)$ .

### 6.34 Das begleitende Dreibein

**Def:** Die Orthonormalbasis  $(c'(t_0), \nu(t_0), b(t_0))$  heißt *begleitendes Dreibein* von  $c$  in  $t_0$ .

**Bem:** Das Dreibein existiert nur, falls  $\kappa(t) \neq 0$ .

### 6.35 Windung

**Def:** Es sei  $c$  wie oben,  $d = 3$ ,  $t_0 \in I$ ,  $\kappa(t_0) \neq 0$  und  $(c'(t_0), \nu(t_0), b(t_0))$  sei das begleitende Dreibein.  
Dann heißt

$$\tau(t_0) := \langle \nu'(t_0), b(t_0) \rangle$$

die *Windung* (oder *Torsion*) von  $c$  in  $t_0$ .

### 6.36 Frenet Gleichungen II

**Prop:** Es sei  $c$  wie oben,  $d = 3$  und  $\kappa(t) > 0$  für alle  $t \in I$ .  
Es sei  $(v, \nu, b)$  das begleitende Dreibein ( $v := c'$ ) von  $c$  und  $\tau$  sei die Windung.  
Dann gilt:

$$\begin{aligned}v'(t) &= \kappa(t)\nu(t) \\ \nu'(t) &= -\kappa(t)v(t) + \tau(t)b(t) \\ b'(t) &= -\tau(t)\nu(t)\end{aligned}$$

**Bew:**  $v' = \kappa\nu$  folgt aus der Definition des Normalenvektors.  
Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\langle \nu', v \rangle &= \left( \frac{d}{dt} \langle \nu, v \rangle \right) - \langle \nu, c'' \rangle = 0 - \kappa \\ \langle \nu', \nu \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \nu, \nu \rangle = 0\end{aligned}$$

Diese Identitäten und die Definition der Torsion liefern die zweite Gleichung. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\langle b', v \rangle &= \left( \frac{d}{dt} \langle b, c' \rangle \right) - \langle b, c'' \rangle = 0 - \kappa \langle b, \nu \rangle = 0 \\ \langle b', \nu \rangle &= \left( \frac{d}{dt} \langle b, \nu \rangle \right) - \langle b, \nu' \rangle = 0 - \tau \langle b, b \rangle + \kappa \langle b, v \rangle = -\tau \\ \langle b', b \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle b, b \rangle = 0\end{aligned}$$

□

**Bsp:** Wir betrachten die Schraubenlinie gegeben durch

$$c(t) := \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \frac{t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$c'(t) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit auch  $\|c'(t)\|^2 = 1$ . Daher ist  $c$  eine Bogenlängenparametrisierung. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}c''(t) &= \frac{1}{2} \left( -\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T \quad \text{und} \\ \kappa(t) = \|c''(t)\| &= \sqrt{\frac{1}{4} \left( \cos \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2 + \sin \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Als Normalenvektor erhalten wir

$$\nu(t) = \frac{c''(t)}{\kappa(t)} = \left( -\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T$$

Der Binormalenvektor ist somit gegeben durch:

$$b(t) = c'(t) \times \nu(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ -\sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ -\cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schließlich erhalten wir für die Windung von  $c$ :

$$\tau(t) = \langle \nu'(t), b(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ -\cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ -\cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}$$

Die Schraubenlinie hat also konstante Krümmung und konstante Torsion.

## 6.37 Normalkrümmung und geodätische Krümmung

Es sei  $\mathcal{M}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  eine orientierbare Untermannigfaltigkeit mit Normalenfeld  $\nu$  und  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}^{d-1}$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit  $c(0) = p$ . Aufgefasst als Kurve in  $\mathbb{R}^d$  hat  $c$  in  $p = c(0)$  den Krümmungsvektor  $\vec{\kappa} = c''(0)$ .

Wir spalten diesen Vektor nun in einen Teil, der daher kommt, dass sich  $c$  in  $\mathcal{M}^{d-1}$  krümmt und einen Teil, der die Krümmung in  $\mathbb{R}^d$  widerspiegelt.

$$\vec{\kappa} = c''(0) = P_{c(0)}(c''(0)) + \langle \vec{\kappa}, \nu(p) \rangle \nu(p) = \frac{\nabla}{dt} c'(0) + \langle \vec{\kappa}, \nu(p) \rangle \nu(p)$$

**Def:**  $\kappa_{\text{nor}} := \langle \vec{\kappa}, \nu \rangle$  heißt *Normalkrümmung* von  $\mathcal{M}$  im Punkt  $p = c(0)$  in Richtung  $c'(0)$ .

**Bem:** Es gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\kappa_{\text{nor}}| = |\langle \vec{\kappa}, \nu \rangle| \leq \|\vec{\kappa}\| \|\nu\| = \kappa$$

## 6.38 Satz von Meusnier

**Satz:** Es sei  $\mathcal{M}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  eine orientierbare Untermannigfaltigkeit mit Normalenfeld  $\nu$  und zweiter Fundamentalform  $II$ .

Weiter sei  $p \in \mathcal{M}^{d-1}$  und  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}^{d-1}$  sei nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit  $c(0) = p$ . Dann gilt

$$\kappa_{\text{nor}} = II(c'(0), c'(0))$$

**Bew:**  $\langle \nu(c(t)), c'(t) \rangle = 0$  wird differenziert und man erhält:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle \nu, c' \rangle |_{t=0} = \left\langle \frac{d}{dt} \nu(c(t)) |_{t=0}, c'(0) \right\rangle + \langle \nu(p), c''(0) \rangle \\ &= \langle d_p \nu(c'(0)), c'(0) \rangle + \kappa_{\text{nor}} = \langle -W_p(c'(0)), c'(0) \rangle + \kappa_{\text{nor}} \\ &= -II(c'(0), c'(0)) + \kappa_{\text{nor}} \end{aligned}$$

□

**Bem:** Insbesondere haben alle nach Bogenlänge parametrisierten Kurven in  $\mathcal{M}^{d-1}$  durch  $p$  mit demselben Tangentialvektor  $c'(0)$  die gleiche Normalkrümmung. Der Satz von Meusnier rechtfertigt die Sprechweise:  
„ $\kappa_{\text{nor}}$  ist die Normalkrümmung von  $\mathcal{M}^{d-1}$  in  $p$  in Richtung  $c'(0)$ .“

## 6.39 Verallgemeinerung der Frenet-Gleichungen

**Bem:** Es seien  $\mathcal{M}^{d-1}$  und  $\nu$  wie vorher. Weiter sei  $p \in \mathcal{M}^{d-1}$  und  $X \in T_p\mathcal{M}$  mit  $\|X\| = 1$ .

Weiter sei  $E$  die durch  $X$  und  $\nu$  aufgespannte Ebene im  $\mathbb{R}^d$ .

Es existiert eine Umgebung  $V$  so, dass  $M \cap ((p + E) \cap V)$  eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit (also eine Kurve) ist (siehe Übungsaufgabe 45).

Es sei  $c$  eine Bogenlängenparametrisierung dieser Kurve mit  $c(0) = p$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{c(\tau) - c(t)}{\tau - t} \in E \quad \forall t \in I &\Rightarrow c'(t) \in E \\ \frac{c'(t) - c'(0)}{t} \in E \quad \forall t \in I &\Rightarrow c''(0) \in E \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass  $\vec{\kappa} = c''(0) \in E$ .

Da  $\langle \vec{\kappa}, c'(0) \rangle = 0$  folgt:  $\vec{\kappa}$  ist ein Vielfaches von  $\nu$ , d.h.  $\vec{\kappa} = \kappa\nu$ , wobei  $\kappa$  die Krümmung von  $c$  als Kurve in der Ebene  $E$  ist.

Der Satz von Meusnier liefert:  $II(X, X) = \kappa_{\text{nor}} = \kappa$ .

- Bem:**
- i) Minimieren (bzw. Maximieren) wir  $II(X, X)$  unter allen  $X \in T_p\mathcal{M}$  mit  $\|X\| = 1$ , so erhalten wir  $\kappa_1$  (bzw.  $\kappa_{d-1}$ ), also die minimale (bzw. maximale) Hauptkrümmung, die auftreten kann.
  - ii) Ist  $d = 3$ , d.h.  $\mathcal{M}$  ist 2-dimensional, so folgt:  $\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$  ist der Mittelwert aus maximaler und minimaler Hauptkrümmung.

## 6.40 Gauß-Gleichung

Wir wollen nun nachweisen, dass die Gauß-Krümmung eine Größe der inneren Geometrie ist.

**Satz:** Es sei  $\mathcal{M}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  eine orientierte Untermannigfaltigkeit und  $p \in \mathcal{M}^{d-1}$ . Dann gilt für  $v, w, z \in T_p\mathcal{M}$ :

$$R(v, w)z = II(w, z)W(v) - II(v, z)W(w)$$

In lokalen Koordinaten bedeutet dies:

$$R_{ijk}^l = h_{jk}w_i^l - h_{ij}w_j^l \quad (*)$$

**Bew:** Wir beweisen zunächst (\*).

Es sei  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine lokale Parametrisierung.

Stelle den Vektor  $\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}$  lokal in der Basis  $\frac{\partial F}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u^{d-1}}, \nu(F(u))$  dar.

Also existieren  $h_{ij}$ , sodass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_{k=1}^{d-1} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} + h_{ij} \nu(F(u))$$

Differenziation nach  $u^l$  gibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} &= \sum_{k=1}^{d-1} \left( \frac{\partial \Gamma_{i,j}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 F}{\partial u^l \partial u^k} \right) + \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^l} \nu(F(u)) + h_{ij} \frac{\partial(\nu \circ F)}{\partial u^l} \\
&= \sum_{k=1}^{d-1} \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \sum_{m=1}^{d-1} \Gamma_{lk}^m \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Normalenanteil} \right) \\
&\quad + \text{Normalenanteil} + h_{ij} \left( -W \left( \frac{\partial F}{\partial u^l} \right) \right) \\
&= \sum_{m=1}^{d-1} \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} + \sum_{k=1}^{d-1} \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - h_{ij} w_l^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Normalenanteil}
\end{aligned}$$

Ableitung nach  $i, j$  und  $l$  dürfen vertauscht werden. Also folgt:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^l \partial u^j} \\
&= \sum_{m=1}^{d-1} \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^m}{\partial u^i} + \sum_{k=1}^{d-1} (\Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^m) - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} \\
&\quad + \text{Normalenanteil} \\
&= \sum_{m=1}^{d-1} \left( R_{lij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Normalanteil}
\end{aligned}$$

Dies zeigt:

$$R_{ijk}^l = h_{jk} w_i^l - h_{ik} w_j^l$$

Mit  $v = \sum_{i=1}^{d-1} v^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$ ,  $w = \sum_{j=1}^{d-1} w^j \frac{\partial F}{\partial u^j}$  und  $z = \sum_{k=1}^{d-1} z^k \frac{\partial F}{\partial u^k}$  folgt:

$$\begin{aligned}
R(v, w)z &= \sum_{i,j,k,l=1}^{d-1} R_{ijk}^l v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l} = \sum_{i,j,k,l=1}^{d-1} (h_{jk} w_i^l - h_{ik} w_j^l) v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l} \\
&= \left( \sum_{j,k=1}^{d-1} h_{jk} w^j z^k \right) \left( \sum_{i,l=1}^{d-1} v^i w_i^l \frac{\partial F}{\partial u^l} \right) - \left( \sum_{i,k=1}^{d-1} v^i z^k h_{ik} \right) \left( \sum_{j,l=1}^{d-1} w_j^l w^j \frac{\partial F}{\partial u^l} \right) \\
&= II(w, z)W(v) - II(v, z)W(w)
\end{aligned}$$

□

## 6.41 Theorema egregium

**Theorem:** Es sei  $\mathcal{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine orientierbare Untermannigfaltigkeit.

Dann gilt:

Die Gauß-Krümmung  $K$  ist eine Größe der inneren Geometrie.

Genauer kann die Gauß-Krümmung wie folgt aus dem Riemannschen Krümmungstensor berechnet werden:

Es sei  $p \in \mathcal{M}^2$  und  $v, w \in T_p\mathcal{M}^2$  eine Orthonormalbasis. Dann gilt:

$$K(p) = I(R_p(v, w)w, v) = \langle R_p(v, w)w, v \rangle$$

**Bew:** Die Gauß-Gleichung impliziert:

$$\begin{aligned} I(R_p(v, w)w, v) &= I(II(w, w)W(v) - II(v, w)W(w), v) \\ &= II(w, w)I(W(v), v) - II(v, w)I(W(w), v) \\ &= II(w, w)II(v, v) - II(v, w)II(w, v) = \det W = K \end{aligned}$$

□

**Bsp:** Die Fläche  $\mathcal{M}_1 := \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 < 1\}$  (die Kreisscheibe) und

$$\mathcal{M}_2 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 1, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

(die obere Halbsphäre) sind diffeomorph, denn die Abbildung

$$f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2 : (x, y, 0) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

definiert einen Diffeomorphismus von  $\mathcal{M}_1$  nach  $\mathcal{M}_2$ .

Es kann aber keine Isometrie zwischen  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  geben, da  $\mathcal{M}_1$  die Gaußkrümmung  $K_{\mathcal{M}_1} = 0$  und  $\mathcal{M}_2$  die Gauß-Krümmung  $K_{\mathcal{M}_2} = 1$  hat. Wir wissen nämlich, dass Isometrien das Skalarprodukt erhalten und damit auch  $I$  und  $R$ , womit auch  $K$  invariant ist.

# Kapitel 7

## Krümmung in Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Es sei  $(\mathcal{M}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Skalarprodukt zweimal stetig differenzierbar von  $p$  abhängt. In diesem Fall können wir die Begriffe der inneren Geometrie aus Kapitel 6 übertragen.

### 7.1 Christoffel-Symbole und kovariante Ableitung

**Def:** Für  $(\mathcal{M}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sei der metrische Tensor in lokalen Koordinaten durch  $(g_{ij})_{i,j=1}^n$  gegeben.

i) Wir definieren die Christoffel-Symbole durch

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g^{mk}$$

ii) Für Vektorfelder  $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_{x^i}$  und  $w = \sum_{j=1}^n w^j \partial_{x^j}$  definieren wir die kovariante Ableitung durch

$$\nabla_w v(p) := \sum_{i,k=1}^n \left( w^i \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k w^j v^j \right) \partial_{x^k}$$

### 7.2 Unabhängigkeit von Karten

- Bem:**
- i) Es kann gezeigt werden, dass die Definition 7.1 nicht von den lokalen Koordinaten abhängt.
  - ii) Die Motivation für diese Definitionen ist gegeben durch Überlegungen in Kapitel 6, indem wir die Christoffel-Symbole und die kovariante Ableitung für Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^d$  betrachtet haben.

iii) Für  $w = \partial_{x^i}$  gilt:

$$\nabla_{\partial_{x^i}} v(p) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k v^j \right) \partial_{x^k}$$

iv) Die kovariante Ableitung ist zentral in Differentialgeometrie. Man spricht dort auch vom Levi-Civita-Zusammenhang.

## 7.3 Der Riemannsche Krümmungstensor

**Def:** Der Riemannsche Krümmungstensor ist in lokalen Koordinaten durch

$$R(v, w)z := \sum_{i,j,k,l=1}^n R_{ijk}^l v^i w^j z^k \partial_{x^l}$$

definiert.

Dabei ist  $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_{x^i}$ ,  $w = \sum_{j=1}^n w^j \partial_{x^j}$ ,  $z = \sum_{k=1}^n z^k \partial_{x^k}$  und

$$R_{ijk}^l := \frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x^j} + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{mi}^l \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ki}^m)$$

- Bem:**
- i) Auch diese Definition ist unabhängig von lokalen Koordinaten.
  - ii) Motiviert wurde diese Definition durch die Überlegungen aus Kapitel 6.
  - iii) Es gelten die Linearitäts- und Schiefsymmetrie-Eigenschaften aus 6.15.

## 7.4 Der Ricci-Tensor

**Def:** Der *Ricci-Tensor*  $\text{Ric}(v, w) \in \mathbb{R}$  für  $v, w \in T_p \mathcal{M}$  ist gegeben durch

$$\text{Ric}(v, w) := \sum_{j,l=1}^n R_{jl} v^j w^l$$

Dabei ist  $R_{jl} = \sum_{i=1}^n R_{ijl}^i$ ,  $v = \sum_{j=1}^n v^j \partial_{x^j}$ ,  $w = \sum_{l=1}^n w^l \partial_{x^l}$ .

## 7.5 Eigenschaften des Ricci-Tensors

- Bem:**
- i) Ric ergibt sich durch eine Art Spurbildung aus dem Riemannschen Krümmungstensor.
  - ii) Ric kann auch für semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten definiert werden und ist wichtiger Bestandteil der Einsteinschen Relativitätstheorie.
  - iii) Man spricht bei  $R_{jl}$  auch von der Ricci-Krümmung.



iv) Die Evolutionsgleichung

$$\frac{dg}{dt} = -2 \operatorname{Ric}$$

(eine partielle Differentialgleichung) heißt Ricci-Fluss.

Diese Gleichung wurde von Perelman benutzt um die Poincaré-Vermutung zu lösen.

## 7.6 Skalarkrümmung

**Def:** Die *Skalarkrümmung* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  an einem Punkt  $p \in \mathcal{M}$  ist gegeben durch

$$R = \sum_{j,l=1}^n g^{jl} R_{jl}$$

**Bem:** Sei  $\mathcal{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine Untermannigfaltigkeit, dann gilt  $K = \frac{R}{2}$  (vgl. Übungsaufgabe 47).

**Def:** Für allgemeine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}^2$  definieren wir die Gaußkrümmung durch

$$K = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^2 g^{jk} R_{jik}^i$$

**Bem:** Der hyperbolische Raum hat die Gauß-Krümmung -1 (vgl. Übungsaufgabe 48).



# Kapitel 8

## Geodätische

Wir wollen nun die kürzeste Verbindungen zwischen zwei Punkten untersuchen.

### 8.1 Länge und Energie

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}^n$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Es sei  $c : I \rightarrow \mathcal{M}^n$  differenzierbar.

i) Dann ist die *Länge* von  $c$  definiert durch

$$L(c) := \int_I \sqrt{\langle c'(t), c'(t) \rangle_{c(t)}} dt$$

ii) Die *Energie* von  $c$  ist definiert durch

$$E(c) := \frac{1}{2} \int_I \langle c'(t), c'(t) \rangle_{c(t)} dt$$

**Bem:** i)  $L$  ändert sich nicht, wenn man  $c$  umparametrisiert, denn für die Umparametrisierung  $\varphi : J \rightarrow I$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_J \sqrt{\langle (c \circ \varphi)'(t), (c \circ \varphi)'(t) \rangle} dt &= \int_J \sqrt{\langle c'(\varphi(t)), c'(\varphi(t)) \rangle} \cdot |\varphi'(t)| dt \\ &= \int_I \sqrt{\langle c'(s), c'(s) \rangle} ds \end{aligned}$$

ii)  $E$  kann sich bei Parametertransformationen ändern, denn für die skalierte Kurve  $c(\lambda \cdot) : \frac{1}{\lambda}I \rightarrow \mathcal{M}^n$  mit  $\lambda \in (1, \infty)$  gilt:

$$\begin{aligned} E(c(\lambda \cdot)) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\lambda}I} \langle c(\lambda t)', c(\lambda t)' \rangle dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\lambda}I} \langle \lambda c'(\lambda t), \lambda c'(\lambda t) \rangle dt \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int_I \langle c'(s), c'(s) \rangle \frac{1}{\lambda} ds = \lambda E(c) \neq E(c) \end{aligned}$$

## 8.2 Energie-Längen-Ungleichung

**Lemma:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  differenzierbar. Dann gilt:

$$L(c)^2 \leq 2(b-a)E(c)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\langle c'(t), c'(t) \rangle \equiv \text{const} \quad (*)$ .

**Bem:** Falls  $(*)$  gilt, sagt man: "c ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert".

**Bew:** Es sei  $f(t) = \sqrt{\langle c'(t), c'(t) \rangle}$ .

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert:

$$L(c)^2 = \left( \int_a^b 1 \cdot f(t) dt \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(t)^2 dt \right) \left( \int_a^b 1^2 dt \right) = 2E(c)(b-a)$$

Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt nur, falls  $f$  ein Vielfaches von 1 ist, d.h. wenn  $\langle c'(t), c'(t) \rangle$  konstant ist.  $\square$

## 8.3 Symmetrie der kovarianten Ableitung

**Lemma:** Es sei  $\mathcal{M}^n$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c : I \times J \rightarrow \mathcal{M}^n$  ( $I, J$  Intervalle) eine differenzierbare Abbildung. Dann gilt:

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c}{\partial s}$$

**Bem:** Die kovariante Ableitung längs Kurven  $\frac{\nabla}{\partial s}$  ist dabei wie im Kapitel 7 definiert oder falls  $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^d$  einfach als Projektion der gewöhnlichen Ableitung.

**Bew:** Es sei  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $U \subset \mathcal{M}$  eine Karte. Die Formel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g^{mk}$$

zeigt, dass  $\Gamma_{ij}^k$  symmetrisch in  $i$  und  $j$  ist.

Es sei  $u = x \circ c$ .

In lokalen Koordinaten gilt:  $\frac{\partial c}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u^k}{\partial t} \partial_{x^k}$ .

Also folgt (vgl. Lemma 6.5):

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u^k}{\partial t \partial s} \partial_{x^k} + \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u^i}{\partial t} \frac{\partial u^j}{\partial s} \partial_{x^k}$$

Da die Christoffel-Symbole symmetrisch in  $i$  und  $j$  sind, folgt die Symmetrie der rechten Seite in  $s$  und  $t$ .  $\square$

## 8.4 Variation der Energie

**Satz:** Es sei  $\mathcal{M}^n$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  auf  $T_p\mathcal{M}$ .

Weiter seien  $p, q \in \mathcal{M}^n$  und  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  sei eine glatte Abbildung, sodass für  $c_s : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}^n : t \mapsto c_s(t) := c(s, t)$  gilt:

$$c_s(a) = p \quad \text{und} \quad c_s(b) = q \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Weiter sei

$$V(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)$$

das sogenannte Variationsvektorfeld ( $V(t)$  ist Tangentialvektor in  $c(0, t)$ ).

Dann gilt:

$$\frac{d}{ds} E(c_s) \Big|_{s=0} = - \int_a^b \left\langle V(t), \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right\rangle dt$$

**Bew:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(c_s) \Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \frac{1}{2} \int_a^b \langle c'_s(t), c'_s(t) \rangle dt \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{ds} \langle c'_s(t), c'_s(t) \rangle \Big|_{s=0} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b 2 \left\langle \frac{\nabla}{ds} c'_s(t) \Big|_{s=0}, c'_0(t) \right\rangle dt = \int_a^b \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c}{\partial t} \Big|_{s=0}, c'_0(t) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c}{\partial s} \Big|_{s=0}, c'_0(t) \right\rangle dt = \int_a^b \left\langle \frac{\nabla}{dt} V(t), c'_0(t) \right\rangle dt \end{aligned}$$

Da  $V(a) = V(b) = 0$  ist, weil die Randpunkte fest sind, folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle V(b), c'_0(b) \rangle - \langle V(a), c'_0(a) \rangle = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle V(t), c'_0(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle \frac{\nabla}{dt} V(t), c'_0(t) \right\rangle + \int_a^b \left\langle V(t), \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right\rangle dt \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

## 8.5 Kurven minimaler Energie

**Korollar:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $p, q \in \mathcal{M}$ .

Ist  $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  eine Kurve mit  $c(a) = p$  und  $c(b) = q$  von minimaler Energie, so gilt:

$$\frac{\nabla}{dt} c'(t) \equiv 0$$

**Bew:** Annahme: Es gibt  $t_0 \in (a, b)$  mit  $\frac{\nabla}{dt}c'(t_0) \neq 0$ .  
 Wähle eine lokale Karte  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um  $c(t_0)$ .  
 Wähle ein  $\delta > 0$  sodass

- $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$
- $c(t) \in U \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

und definiere

$$u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n : t \mapsto x(c(t))$$

und

$$\begin{aligned} X &: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad \frac{\nabla}{dt}c'(t) &= \left( D_{u(t)}x^{-1} \right) (X(t)) \\ \text{wobei} \quad D_{u(t)}x^{-1} &: \mathbb{R}^n \rightarrow T_{c(t)}\mathcal{M} \end{aligned}$$

Wähle  $\varphi : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  glatt, sodass

- $\varphi \geq 0$  und  $\varphi(t_0) > 0$
- $\text{supp}(\varphi) \subset (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Für  $\varepsilon > 0$  genügend klein, gilt für alle  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  und alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ :

$$u(t) + s\varphi(t)X(t) \subset x(U)$$

Definiere

$$c_s(t) := x^{-1}(u(t) + s\varphi(t)X(t)) \in U \subset \mathcal{M} \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Für  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  und  $t \in [a, b] \setminus [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  setze  $c_s(t) := c(t)$

Für  $t \in [a, b] \setminus [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  gilt

$$V(t) := \frac{\partial}{\partial s}c_s(t) \Big|_{s=0} = 0$$

Für  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  gilt:

$$\begin{aligned} V(t) &:= \frac{\partial}{\partial s}c_s(t) \Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}x^{-1}(u(t) + s\varphi(t)X(t)) \Big|_{s=0} \\ &= \left( D_{u(t)}x^{-1} \right) (\varphi(t)X(t)) = \varphi(t) \frac{\nabla}{dt}c'(t) \end{aligned}$$

Also erhalten wir mit diesem Variationsfeld:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}E(c_s) \Big|_{s=0} &= - \int_a^b g_{c(t)} \left( V(t), \frac{\nabla}{dt}c'(t) \right) dt \\ &= - \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} g_{c(t)} \left( \varphi(t) \frac{\nabla}{dt}c'(t), \frac{\nabla}{dt}c'(t) \right) dt \\ &= - \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t) g_{c(t)} \left( \frac{\nabla}{dt}c'(t), \frac{\nabla}{dt}c'(t) \right) dt < 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, denn da  $c = c_0$  energieminimierend ist, müsste  $\frac{d}{ds}E(c_s) \big|_{s=0} = 0$  sein.  $\square$

## 8.6 Geodätische

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $I$  ein Intervall. Eine Kurve  $c : I \rightarrow \mathcal{M}$  heißt *Geodätische*, falls

$$\frac{\nabla}{dt}c'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

**Bsp:** i) Es sei  $\mathcal{M} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$  die  $x$ - $y$ -Ebene mit dem üblichen Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$ .  
Dann gilt:

$$\frac{\nabla}{dt}c'(t) = c''(t)$$

Somit haben Geodätische die Form  $c(t) = p + tv$ , also Geraden, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden.

ii) Es sei  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  die Sphäre. Wir haben in Übungsaufgabe 49 gesehen, dass der Breitenkreis

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \cos \vartheta \\ \sin t \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

genau dann eine Geodätische ist, wenn  $\vartheta = 0$  gilt.

Da sich bei Drehung der Sphäre Abstände nicht ändern (Skalarprodukt ändert sich nicht) sehen wir, dass Großkreise, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden, Geodätische sind.

## 8.7 Geodätische sind proportional zur Bogenlänge parametrisiert

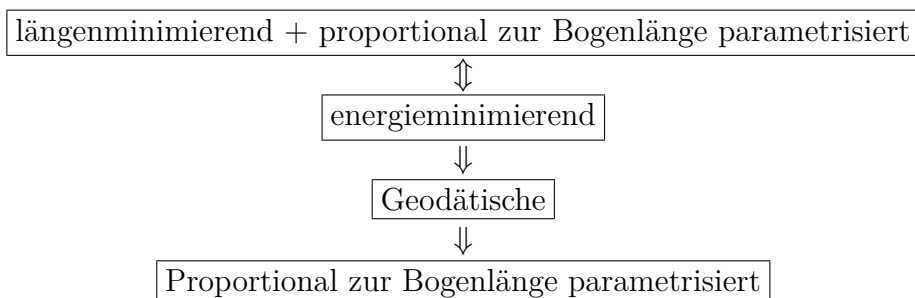
**Lemma:** Geodätische sind proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

**Bew:**  $c$  sei eine Geodätische. Die Produktregel liefert:

$$\frac{d}{dt}g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = 2g_{c(t)}\left(\frac{\nabla}{dt}c'(t), c'(t)\right) = 0$$

Somit ist  $g_{c(t)}(c'(t), c'(t))$  konstant.  $\square$

Zusammengefasst haben wir in Kapitel 8 gesehen:



## 8.8 Geodätische Krümmung

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}^2$  eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c : I \rightarrow \mathcal{M}^2$  sei nach Bogenlänge parametrisiert.

Weiter sei  $\nu(t) \in T_{c(t)}\mathcal{M}$ , sodass  $(c', \nu)$  positiv orientierte Orthonormalbasis von  $T_{c(t)}\mathcal{M}$  ist.

$$1 = g_{c(t)}(c'(t), c'(t))$$

impliziert nach Differenziation:

$$0 = 2g_{c(t)}\left(\frac{\nabla}{dt}c'(t), c'(t)\right)$$

Das heißt  $\frac{\nabla}{dt}c'(t)$  ist ein Vielfaches von  $\nu$ .

Also existiert eine eindeutige Funktion

$$\kappa_g : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{sodass} \quad \frac{\nabla}{dt}c'(t) = \kappa_g(t)\nu(t)$$

Die Funktion  $\kappa_g$  misst die geodätische Krümmung von  $c$  in  $\mathcal{M}$  bezüglich  $g$ .

- Bem:**
- i)  $\kappa_g$  entspricht  $\kappa$  im Fall von Kurven in der Ebene.
  - ii)  $\kappa_g = 0 \iff c$  ist Geodätische.
  - iii) Sei  $\mathcal{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$  orientiert,  $n$  sei die Einheitsnormale an  $\mathcal{M}$ .

$$c''(t) = \frac{\nabla}{dt}c'(t) + \langle c''(t), n(t) \rangle n(t) = \underbrace{\kappa_g(t)\nu(t)}_{\text{geod. Anteil}} + \underbrace{\kappa_{\text{nor}}n(t)}_{\text{Anteil der Normalkr.}}$$

Geodätische auf  $\mathcal{M}^2$  haben nur einen Normalenanteil bei der Krümmung, daher muss  $c''(t)$  in Richtung der Normalen zeigen.



# Kapitel 9

## Krümmung von $n$ -dimensionalen Flächen im $\mathbb{R}^d$ und Satz von Gauß für nicht-tangentiale Vektorfelder

In diesem Kapitel (falls nichts anderes gesagt) sei  $\mathcal{M}^n$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^d$ .

Für Hyperflächen konnten wir die Krümmung über die Ableitung der Normale definieren:

$$W(\tau) = -\partial_\tau \nu \quad \tau \text{ Tangentialvektor}$$

Es gilt:

$$II(\tau_1, \tau_2) = \langle -\partial_{\tau_1} \nu, \tau_2 \rangle = -\partial_{\tau_1} (\langle \nu, \tau_2 \rangle) + \langle \nu, \partial_{\tau_1} \tau_2 \rangle = \langle \nu, \partial_{\tau_1} \tau_2 \rangle$$

Wir wollen nun die vektorwertige Bilinearform  $(\tau_1, \tau_2) \mapsto \langle \nu, \partial_{\tau_1} \tau_2 \rangle \nu = (\text{id} - P)\partial_{\tau_1} \tau_2$  auf den Fall allgemeiner Hyperflächen verallgemeinern. Dabei sei  $P$  die orthogonale Projektion auf den Tangentialraum.

### 9.1 Krümmung einer euklidischen Untermannigfaltigkeit

**Def:** Es sei  $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^d$  eine  $n$ -dimensionale  $C^2$ -Fläche. Die vektorwertige Bilinearform

$$B_p : T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \rightarrow (T_p \mathcal{M})^\perp = N_p \mathcal{M} : (v, w) \mapsto (\text{id} - P_p)\partial_v w$$

heißt *zweiter Fundamentaltensor* von  $\mathcal{M}$  in  $p$ .

$P_p$  ist die orthogonale Projektion auf  $T_p \mathcal{M}$ . Dabei setzen wir  $v$  und  $w$  zu einem Vektorfeld auf  $\mathcal{M}$  fort.

## 9.2 Die zweite Fundamentalform

**Lemma:**  $B_p$  ist symmetrisch und hängt nur von  $v(p)$ ,  $w(p)$  ab.

**Bew:** Mit lokaler Parametrisierung  $F$  gilt  $\left(v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial F}{\partial u^i}, w = \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial F}{\partial u^j}\right)$ :

$$\begin{aligned} \partial_v w &= dw(v) = dw \left( \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial F}{\partial u^i} \right) = \sum_{i=1}^n v^i dw \left( \frac{\partial F}{\partial u^i} \right) = \sum_{i=1}^n v^i \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial w}{\partial u^j} du^j \left( \frac{\partial F}{\partial u^i} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial w}{\partial u^i} = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial F}{\partial u^j} \right) = \underbrace{\sum_{i,j=1}^n v^i \frac{\partial w^j}{\partial u^i} \frac{\partial F}{\partial u^j}}_{\text{ist Tangentialvektor}} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^n v^i w^j \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}}_{\text{symmetrisch in } v, w} \end{aligned}$$

Somit ist  $(\text{id} - P_p) \partial_v w = (\text{id} - P_p) \partial_w v$ , da der tangente Anteil unter  $\text{id} - P$  verschwindet und außerdem hängt  $\partial_v w$  an der Stelle  $p$  nur von  $v(p)$  und  $w(p)$  ab.  $\square$

## 9.3 Krümmungsvektor

**Def:** i) Der Krümmungsvektor von  $\mathcal{M}$  in  $p$  ist definiert durch:

$$\kappa(p) := \text{spur}(B_p) = \sum_{k=1}^n B_p(\tau_k, \tau_k) = \sum_{k=1}^n (\text{id} - P_p) (\partial_{\tau_k} \tau_k)$$

wobei  $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_p \mathcal{M}$  ist. (Beachte:  $\kappa$  ist ein Vektor!)

ii) Ist  $\nu \in (T_p \mathcal{M})^\perp = N_p \mathcal{M}$ , so heißt

$$H_\nu(p) := \frac{1}{n} (\kappa(p) \cdot \nu)$$

die *mittlere Krümmung* von  $\mathcal{M}$  im Punkt  $p$  in Richtung  $\nu$ .

iii) Eine Fläche heißt *Minimalfläche*, falls  $\kappa \equiv 0$ .

**Bem:** Es sei  $n = d - 1$  und  $\nu \in N_p \mathcal{M}$  mit  $\|\nu\| = 1$ .

Wähle die Hauptkrümmungsrichtungen  $\tau_1, \dots, \tau_{d-1}$ , also (wegen der Selbstadjungiertheit von  $W$ ) eine Orthonormalbasis von  $T_p \mathcal{M}$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle \kappa(p), \nu(p) \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n (\text{id} - P_p) \partial_{\tau_k} \tau_k, \nu \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle \partial_{\tau_k} \tau_k, \nu \rangle = - \sum_{k=1}^n \langle \tau_k, \partial_{\tau_k} \nu \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \tau_k, W(\tau_k) \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \tau_k, \kappa_k \tau_k \rangle = \sum_{k=1}^n \kappa_k \end{aligned}$$

D.h.  $nH_\nu(p)\nu(p) = \langle \kappa(p), \nu(p) \rangle \nu(p) = \left( \sum_{k=1}^n \kappa_k \right) \nu(p)$ . Damit erhält man also:

$$H_\nu(p) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \kappa_k.$$

(Beachte: In diesem Kapitel ist  $\kappa$  ein Vektor!)

## 9.4 Interpretation von $B_p(X, X)$

**Bem:** Es sei  $X \in T_p\mathcal{M}$ ,  $\|X\| = 1$  und

$$E := \text{span}(X) \oplus N_p\mathcal{M}$$

der durch  $X$  und die Normalen aufgespannte  $(d - n + 1)$ -dimensionale Untervektorraum des  $\mathbb{R}^d$ .

Dann ist

$$\mathcal{M} \cap ((p + E) \cap V)$$

für eine Umgebung  $V$  von  $p$  eine Kurve (vgl. Übungsaufgabe 45).

Es sei  $c$  eine Bogenlängenparametrisierung mit  $c(0) = p$  und  $c'(0) = X$ .

Dann gilt:

$$c''(0) = \partial_X c'(t) |_{t=0} \quad \text{und} \quad \langle c''(0), c'(0) \rangle = 0$$

D.h.  $c''(0) \in N_p\mathcal{M}$ .

Also folgt:

$$c''(0) = (\text{id} - P)\partial_X X = B_p(X, X)$$

Dies gibt eine anschauliche Interpretation von  $B_p(X, X)$ .

## 9.5 Darstellung der Divergenz

**Lemma:** Es sei  $\mathcal{M}^n$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $v$  ein Vektorfeld mit folgender Darstellung (in lokalen Koordinaten)  $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_{x^i}$ .

Dann gilt:

$$\text{div } v = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial v^j}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^j v^i \right) = \text{spur}(E_{p,v})$$

wobei  $E_{p,v} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M} : w \mapsto \nabla_w v$  ist.

**Bew:** Zur Abkürzung schreibe  $E$  statt  $E_{p,v}$ .

In lokalen Koordinaten hat  $E$  bzgl. der Basis  $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$  die Darstellung

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_{x^j}} v &= \nabla_{\partial_{x^j}} \left( \sum_{i=1}^n v^i \partial_{x^i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \partial_{x^i} + v^i \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^n v^i \Gamma_{ij}^k \right) \partial_{x^k} \end{aligned}$$

$E$  hat also die Matrixdarstellung

$$\left( \frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^n v^i \Gamma_{ij}^k \right)_{j,k=1}^n$$

Daraus folgt:

$$\text{spur } E = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial v^j}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^j v^i \right)$$

Mit  $g = \det(g_{kl})_{k,l=1}^n$  gilt:

$$\begin{aligned} \text{div } v &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} v^j) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{g} \right) v^j + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \sqrt{g} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} v^j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial v^j}{\partial x^j} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x^j} (\ln \sqrt{g}) \right) v^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v^j}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x^j} (\ln g) \right) v^j \end{aligned}$$

Falls wir  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} (\ln g) = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ji}^i$  zeigen können, ist die Behauptung bewiesen.

Dazu berechne:

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{ji}^i = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} \right) g^{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) g^{ik}$$

In Matrixform:

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{ji}^i = \frac{1}{2} \text{spur} \left( G^{-1} \frac{\partial G}{\partial x^j} \right)$$

mit  $G = (g_{ik})_{i,k=1}^n$  und  $G^{-1} = (g^{ik})_{i,k=1}^n$ .

Die Behauptung erhalten wir aus dem folgenden Lemma, denn es liefert die Gleichung  $\frac{d}{dt} \ln(\det A(t)) = \text{spur}(A^{-1}(t) \frac{d}{dt} A(t))$ .  $\square$

## 9.6 Ableitung der Determinante

**Lemma:** Es sei  $t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig differenzierbar und  $A(t)$  invertierbar.

Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \text{spur} \left( A^{-1}(t) \frac{d}{dt} A(t) \right) \det A(t)$$

**Bew:** Es sei jetzt  $a_j(t) \in \mathbb{R}^n$  die  $j$ -te Spalte von  $A(t)$ .

Dann folgt (Laplace'sche Entwicklungsformel für Determinanten):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \frac{d}{dt} \det(a_1(t), \dots, a_n(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n \det(a_1(t), \dots, a_{j-1}(t), \frac{d}{dt} a_j(t), a_{j+1}(t), \dots, a_n(t)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+j} \frac{d}{dt} a_{ij}(t) \det A^{(i,j)}(t) \end{aligned}$$

Dabei ist  $A^{(j,i)}(t)$  die Matrix  $A(t)$  ohne die  $i$ -te Zeile und  $j$ -te Spalte. Die Cramer'sche Regel liefert:

$$(A^{-1}(t))_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det A(t)} \det A^{(j,i)}(t)$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \sum_{i,j=1}^n (\det A(t)) \frac{d}{dt} a_{ij}(t) (A^{-1}(t))_{ji} \\ &= \text{spur} \left( A^{-1}(t) \frac{d}{dt} A(t) \right) \det A(t) \end{aligned}$$

□

## 9.7 Flächen-Divergenz für nicht-tangentiale Vektorfelder

**Def:** i) Es sei  $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^d$  eine Untermannigfaltigkeit und  $v : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein (nicht notwendigerweise tangentiales) Vektorfeld auf  $\mathcal{M}^n$ .  
Dann definiere eine verallgemeinerte kovariante Ableitung von  $v$  in Richtung  $w \in T_p\mathcal{M}$  durch

$$\nabla_w v := P_p(\partial_w v)$$

Dabei sei  $\partial_w v$  die Richtungsableitung von  $v$  in Richtung  $w$  und  $P_p$  die orthogonale Projektion auf  $T_p\mathcal{M}$ .

ii) Wir definieren

$$\text{div}_{\mathcal{M}} v := \text{spur } E_{p,v}$$

wobei  $E_{p,v} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M} : w \mapsto \nabla_w v$ .

## 9.8 Bemerkung zur Divergenz

**Bem:** i) Ist  $v$  ein tangentiales Vektorfeld, so stimmt diese Definition mit unserer ursprünglichen überein.

ii) Die Darstellung

$$\text{div}_{\mathcal{M}} v = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \langle \partial_{x^i} v, \partial_{x^j} \rangle$$

folgt wie bei den tangentialen Vektorfeldern.

iii) In der Nähe eines Punktes  $p \in \mathcal{M}$  wähle Vektorfelder  $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  sodass sie für alle  $p \in \mathcal{M}$  eine Orthonormalbasis von  $T_p\mathcal{M}$  sind.

Dann gilt:

$$\text{div}_{\mathcal{M}} v = \sum_{i=1}^n \langle \partial_{\tau_i} v, \tau_i \rangle$$

Dies folgt, wenn wir die Spur bezüglich der Basis  $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  berechnen.

- iv) Es sei  $\mathcal{M}$  orientierbar und  $\nu$  das Einheitsnormalenfeld an  $\mathcal{M}$ . Dann gilt:  $\operatorname{div}_{\mathcal{M}} \nu = -nH$ , denn:  
Wir wählen  $\tau_1, \dots, \tau_n$  als die Hauptkrümmungsrichtungen, d.h. man hat  $\partial_{\tau_i} \nu = -\kappa_i \tau_i$ . Dann gilt:

$$\operatorname{div}_{\mathcal{M}} \nu = \sum_{i=1}^n \langle \partial_{\tau_i} \nu, \tau_i \rangle = - \sum_{i=1}^n \langle \kappa_i \tau_i, \tau_i \rangle = - \sum_{i=1}^n \kappa_i = -nH$$

## 9.9 Satz von Gauß für nicht-tangentiale Vektorfelder

**Satz:** Es sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$  eine  $n$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit mit  $C^1$ -Rand und  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei stetig differenzierbar.

Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div}_{\mathcal{M}} f + \langle f, \kappa \rangle) d\mathcal{H}^n = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle f, \nu_{\partial\mathcal{M}} \rangle d\mathcal{H}^{n-1}$$

Dabei ist  $\kappa$  der Krümmungsvektor und  $\nu_{\partial\mathcal{M}} \in T_p\mathcal{M}$  die äußere Einheitsnormale an  $\partial\mathcal{M}$ .

**Bem:** Gilt  $f(p) \in T_p\mathcal{M}$  für alle  $p$ , so folgt  $\langle f, \kappa \rangle = 0$ , da  $\kappa \in N_p\mathcal{M}$ , und somit der übliche Gauß.

**Bew:** Es gilt  $f = f_{\tan} + f_{\text{nor}}$  für  $f_{\tan} \in T_p\mathcal{M}$  und  $f_{\text{nor}} \in N_p\mathcal{M}$ .  
Somit folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div} f d\mathcal{H}^n &= \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}_{\mathcal{M}} f_{\tan} + \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}_{\mathcal{M}} f_{\text{nor}} d\mathcal{H}^n \\ &= \int_{\partial\mathcal{M}} \langle f_{\tan}, \nu_{\partial\mathcal{M}} \rangle d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}_{\mathcal{M}} f_{\text{nor}} d\mathcal{H}^n \\ &= \int_{\partial\mathcal{M}} \langle f, \nu_{\partial\mathcal{M}} \rangle d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}_{\mathcal{M}} f_{\text{nor}} d\mathcal{H}^n \end{aligned}$$

Wähle eine lokale Orthonormalbasis  $\{\tau_1, \dots, \tau_n, \nu_1, \dots, \nu_{d-n}\}$  von  $\mathbb{R}^d$ , sodass  $\tau_1, \dots, \tau_n \in T_p\mathcal{M}$  und  $\nu_1, \dots, \nu_{d-n} \in N_p\mathcal{M}$  und  $f_{\text{nor}} = \sum_{i=1}^{d-n} f_i \nu_i$  mit  $f_i(p) \in \mathbb{R}$  gilt. (Eine solche Wahl ist wegen des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt immer möglich.) Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\mathcal{M}} f_{\text{nor}} &= \sum_{k=1}^n \left\langle \partial_{\tau_k} \left( \sum_{i=1}^{d-n} f_i \nu_i \right), \tau_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{d-n} f_i \langle \partial_{\tau_k} \nu_i, \tau_k \rangle \\ &= - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{d-n} f_i \langle \nu_i, \partial_{\tau_k} \tau_k \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^{d-n} f_i \nu_i, \sum_{k=1}^n \partial_{\tau_k} \tau_k \right\rangle \\ &= - \langle f_{\text{nor}}, \kappa \rangle = - \langle f, \kappa \rangle \end{aligned}$$

(da  $\kappa \in N_p \mathcal{M}$  und  $\kappa = (\text{id} - P) \sum_{k=1}^n \partial_{\tau_k} \tau_k$ ).

Dies zeigt die Behauptung. □

## 9.10 Variation des Flächeninhalts

**Theorem:** Es sei  $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^d$  eine  $C^2$ -Untermannigfaltigkeit und  $f : \mathcal{M} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$  2-mal stetig differenzierbar mit

- $f(x, 0) = x$
- $\mathcal{M}_t := f(\mathcal{M}, t)$  ist  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Weiter sei  $h(x, t) = \partial_t f(x, t)$  für alle  $x \in \mathcal{M}$  und  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}^n(\mathcal{M}_t) \Big|_{t=0} = \int_{\mathcal{M}} \text{div}_{\mathcal{M}} h d\mathcal{H}^n = - \int_{\mathcal{M}} \langle h, \kappa \rangle d\mathcal{H}^n + \int_{\partial \mathcal{M}} \langle h, \nu_{\partial \mathcal{M}} \rangle d\mathcal{H}^{n-1}$$

Wir sagen die erste Variation des Flächeninhalts ist durch den negativen Krümmungsvektor der Fläche plus ein Randintegral gegeben.

**Bew:** Betrachte die Situation in der  $\mathcal{M}$  durch eine einzige Karte/Parametrisierung dargestellt werden kann. (Den allgemeinen Fall erhält man dann durch „additive“ Zerlegung der Fläche.)

Es gilt somit:

$$\mathcal{H}^n(\mathcal{M}_t) = \int_U \sqrt{g_t} dx$$

mit  $\varphi : U \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^d$ , Parametrisierung und  $g_t = \det \left( \left\langle \partial_{y_i} v(y, t), \partial_{y_j} v(y, t) \right\rangle \right)_{i,j=1}^n$ , wobei  $v(y, t) = f(\varphi(y), t)$  eine Parametrisierung von  $\mathcal{M}_t$  ist.

Lemma 9.6 liefert (mit  $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}^n(\mathcal{M}_t) &= \int_U \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_t}} \text{spur} \left( G^{-1}(t) \frac{d}{dt} G(t) \right) g_t dy \\ &= \int_U \frac{1}{2} \text{spur} \left( G^{-1}(t) \frac{d}{dt} G(t) \right) \sqrt{g_t} dy \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\frac{d}{dt} \langle \partial_{y_i} v, \partial_{y_j} v \rangle = \langle \partial_t \partial_{y_i} v, \partial_{y_j} v \rangle + \langle \partial_{y_i} v, \partial_t \partial_{y_j} v \rangle = \langle \partial_{y_i} \partial_t v, \partial_{y_j} v \rangle + \langle \partial_{y_i} v, \partial_{y_j} \partial_t v \rangle$$

sowie nach Bemerkung 9.8.(ii)

$$\frac{1}{2} \text{spur} \left( G^{-1}(t) \frac{d}{dt} G(t) \right) \Big|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(0) \langle \partial_{x_i} h, \partial_{x_j} f \rangle = \text{div}_{\mathcal{M}} h$$

Der Satz von Gauß für nicht-tangentiale Vektorfelder liefert den zweiten Teil der Behauptung. □

## 9.11 Mittlere Krümmung bei Flächen mit minimalem Inhalt

**Korollar:** Es sei  $\mathcal{M}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  eine Untermannigfaltigkeit mit Rand  $\partial\mathcal{M}$ .

Wir nehmen an, dass  $\mathcal{M}$  minimalen Flächeninhalt hat unter allen Untermannigfaltigkeiten  $\mathcal{N}$  mit demselben Rand  $\partial\mathcal{N} = \partial\mathcal{M}$ .

Dann gilt:  $\kappa = 0$ .

**Bew:** Annahme:  $\kappa(p) \neq 0$  für  $p \in \mathcal{M}$ .

Sei  $\nu$  Einheitsnormalenfeld in der Nähe von  $p \in \mathcal{M}$ , sodass  $\langle \kappa(p), \nu(p) \rangle > 0$ . (Falls  $\langle \kappa(p), \nu(p) \rangle < 0$  sein sollte, betrachte man  $-\nu$  statt  $\nu$ .  $\langle \kappa, \nu \rangle = 0$  ist nicht möglich, da  $\kappa$  Normalenvektor ist.)

Dann gilt:  $\langle \kappa(p), \nu(p) \rangle > 0$  in einer Umgebung  $V$  von  $p$ .

Wähle glattes  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{supp } f \subset V$ ,  $f \geq 0$  und  $f(p) > 0$ .

Definiere dann

$$\Phi(q) := \begin{cases} f(q)\nu(q) & \text{falls } q \in \mathcal{M} \cap V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist  $\Phi \in C^2(\mathcal{M})$  und es folgt:

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \kappa, \Phi \rangle d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{V \cap \mathcal{M}} \langle \kappa, \Phi \rangle d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\mathcal{M} \cap V} f \langle \kappa, \nu \rangle d\mathcal{H}^{d-1} > 0$$

Definiere für  $|t|$  klein:  $h(q, t) := q + t\Phi(q) \forall q \in \mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}_t := h(\mathcal{M}, t)$ .

Dann gilt  $\partial\mathcal{M}_t = \partial\mathcal{M}$  (Wähle die Umgebung  $V$  so klein, dass der Rand nicht getroffen wird.) und

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}^{d-1}(\mathcal{M}_t) \Big|_{t=0} = - \int_{\mathcal{M}} \langle \Phi, \kappa \rangle d\mathcal{H}^{d-1} < 0$$

Widerspruch zur Minimalität, da  $\frac{d}{dt} \mathcal{H}^{d-1}(\mathcal{M}_t) \Big|_{t=0} = 0$  gelten müsste.  $\square$

## 9.12 Minimalflächen

**Def:** Eine Untermannigfaltigkeiten (mit Rand)  $\mathcal{M}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  heißt Minimalfläche, falls  $\kappa = 0$  ist.

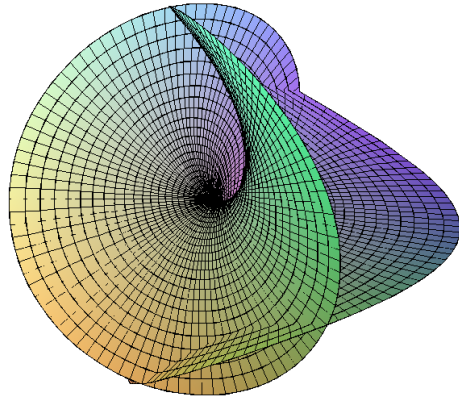
(Im Fall von orientierbaren Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  ist dies äquivalent zu  $H = 0$ , da  $\kappa = (d-1)H\nu$ .)

## 9.13 Beispiele für Minimalflächen

**Bsp:** i) Die flache Hyperebene  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$ .  
Hier gilt  $\kappa = 0$  und  $H = K = 0$ .



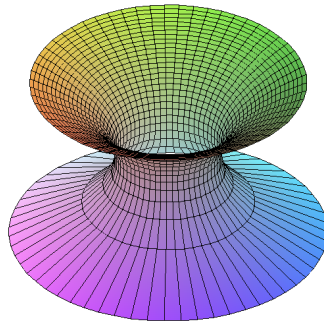
ii) Die *Enneperfläche*:



Gegeben durch die Parametrisierung  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ v - \frac{v^3}{3} + vu^2 \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$$

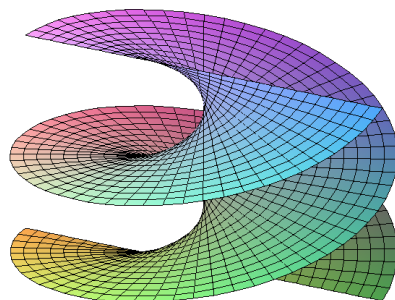
iii) *Kettenfläche (Katenoid)*:



$$F(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ u \end{pmatrix}$$

Dies ist auch eine Drehfläche.

iv) *Wendelfläche (Helikoid)*:



$$F(u, v) = \begin{pmatrix} u \sin v \\ -u \cos v \\ v \end{pmatrix}$$

Hält man  $v$  fest, so ergibt sich eine Gerade.

Flächen dieser Form  $F(u, v) = c(v) + ud(v)$  heißen *Regelflächen*.

(Im Beispiel der Wendelfläche ist  $c(v) = 0$  und  $d(v) = (\sin v, -\cos v, 1)^T$ .)

Die Bilder für dieses Beispiel finden sich bei [12].

**Bem:** (i) Die Gaußkrümmung bei Minimalflächen im  $\mathbb{R}^2$  ist negativ, denn:

$$\kappa_1 + \kappa_2 = 0 \Rightarrow \kappa_1 \kappa_2 \leq 0$$

(ii) Es gibt keine beschränkte Minimalfläche ohne Rand im  $\mathbb{R}^2$ .

# Kapitel 10

## de Rham-Cohomologie

In diesem Kapitel sei  $\mathcal{M}^n$  stets eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

### 10.1 de Rham Komplex

**Def:** Die Sequenz linearer Abbildungen

$$0 \rightarrow \Omega^0 \mathcal{M} \xrightarrow{d} \Omega^1 \mathcal{M} \xrightarrow{d} \Omega^2 \mathcal{M} \xrightarrow{d} \dots$$

heißt *de Rham Komplex* von  $\mathcal{M}$ , wobei  $d$  die Cartansche Ableitung ist.

### 10.2 de Rham Komplex von Mannigfaltigkeiten

**Bem:** i) Da  $\Omega^k \mathcal{M} = 0$  für alle  $k > n$  wird auch die endliche Sequenz

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0 \mathcal{M} \xrightarrow{d} \Omega^1 \mathcal{M} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n \mathcal{M} \rightarrow 0$$

de Rham Komplex von  $\mathcal{M}$  genannt.

ii)  $d \circ d = 0$  bedeutet:

$$\text{im}(d : \Omega^{k-1} \mathcal{M} \rightarrow \Omega^k \mathcal{M}) \subset \ker(d : \Omega^k \mathcal{M} \rightarrow \Omega^{k+1} \mathcal{M})$$

Wir können also den Quotienten-Vektorraum  $\ker(\dots)/\text{im}(\dots)$  betrachten.

### 10.3 de Rham Cohomologiegruppe

**Def:** i)  $\mathcal{M}$  sei eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.  
Dann heißt der Quotientenvektorraum

$$H^k \mathcal{M} := \ker(d : \Omega^k \mathcal{M} \rightarrow \Omega^{k+1} \mathcal{M}) / \text{im}(d : \Omega^{k-1} \mathcal{M} \rightarrow \Omega^k \mathcal{M})$$

die  $k$ -te de Rham-Cohomologiegruppe von  $\mathcal{M}$ .

- ii) Die Cartansche Ableitung  $d$  wird auch *Corand Operator* genannt.
- iii) Differentialformen im Kern von  $d : \Omega^k \mathcal{M} \rightarrow \Omega^{k+1} \mathcal{M}$  heißen *k-dimensionale Cozykeln*. Die Differentialformen im Bild von  $d : \Omega^{k-1} \mathcal{M} \rightarrow \Omega^k \mathcal{M}$  heißen *k-dimensionale Coränder*.
- iv) Ist  $\eta \in \Omega^k \mathcal{M}$  ein *k-dimensionaler Cozykel*, so heißt seine Nebenklasse

$$[\eta] := \eta + d(\Omega^{k-1} \mathcal{M}) \in H^k \mathcal{M}$$

die *Cohomologieklass*e von  $\eta$ .

## 10.4 Beispiel für Coränder und Cozykel

- Bem:**
- i) Rotationsfreie Vektorfelder  $f$  im  $\mathbb{R}^3$  sind (in einem gewissen Sinne) 1-dimensionale Cozykel, da sie im Kern von  $\text{rot}$  liegen. (Identifiziere  $\text{rot}$   $f$  mit 2-Formen, dann ist  $\text{rot}$  die Cartan'sche Ableitung.)
  - ii) Gradientenvektorfelder  $g = \nabla h$  im  $\mathbb{R}^n$  sind 1-dimensionale Coränder, da sie sich als „Ableitung“ der 0-Form  $h$  ergeben.

## 10.5 0-Cozykel

- Bem:**
- i) Ist  $\mathcal{M}$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $k > n$ , so ist  $H^k \mathcal{M} = \{0\}$ , denn es gilt  $\Omega^k \mathcal{M} = 0$ .
  - ii) Was sind die 0-Cozykeln?  
Das sind Funktionen  $f \in \Omega^0 \mathcal{M}$  mit  $df = 0$ , also die lokal konstanten reellen Funktionen.  
D.h. ist  $\mathcal{M}$  zusammenhängend, so folgt  $H^0 \mathcal{M} \cong \mathbb{R}$ .

## 10.6 Cohomologiegruppen von orientierbaren und geschlossenen Mannigfaltigkeiten

**Lemma:** Ist  $\mathcal{M}^n$  orientierbar und geschlossen (d.h. kompakt und unberandet), so gilt  $H^n \mathcal{M} \neq 0$ .

**Bew:** Orientiere  $\mathcal{M}$  und wähle ein  $\eta \in \Omega^n \mathcal{M}$  mit  $\int_{\mathcal{M}} \eta \neq 0$ . (Dies kann erreicht werden, indem wir lokal  $\eta = a(x)(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$  mit  $a \geq 0$ ,  $a \neq 0$  und  $a$  hat einen kompakten Träger im Kartengebiet setzen.)  
Da  $d\eta \in \Omega^{n+1} \mathcal{M} = \{0\}$  ist  $\eta$  ein Cozykel, aber  $\eta$  ist kein Corand  $d\omega$ , denn sonst würde gelten:

$$\int_{\mathcal{M}} \eta = \int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial \mathcal{M}} \omega = 0 \quad \text{da } \partial \mathcal{M} = \emptyset$$

Also gilt:  $\begin{cases} \eta \in \ker(d : \Omega^n \mathcal{M} \rightarrow \Omega^{n+1} \mathcal{M}) \\ \eta \notin \text{im}(d : \Omega^{n-1} \mathcal{M} \rightarrow \Omega^n \mathcal{M}) \end{cases}$ , also  $[\eta] \neq 0$  in  $H^n \mathcal{M}$ .  $\square$

## 10.7 Differenzierbare Homotopie

**Def:** Es seien  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Zwei differenzierbare Abbildungen  $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißen differenzierbar homotop, wenn es eine differenzierbare Homotopie  $h$  zwischen ihnen gibt, d.h. es existiert ein

$$h : [0, 1] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$$

mit

$$h(0, x) = f(x) \quad \text{und} \quad h(1, x) = g(x) \quad \forall x \in \mathcal{M}$$

Ziel ist es nun die Homotopie-Invarianz der de Rham Cohomologie zu zeigen.

## 10.8 Kettenhomomorphismus

$\mathcal{M}, \mathcal{N}$  seien differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  sei differenzierbar.

Dann ist der *Kettenhomomorphismus* zwischen den de Rham Komplexen von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  kommutativ, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0 \mathcal{N} & \xrightarrow{d} & \Omega^1 \mathcal{N} & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \mathcal{N} \xrightarrow{d} \dots \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^0 \mathcal{M} & \xrightarrow{d} & \Omega^1 \mathcal{M} & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \mathcal{M} \xrightarrow{d} \dots \end{array}$$

ist kommutativ, d.h.  $df^* = f^*d$ . (Entspricht der Natürlichkeit der Cartan-Ableitung aus Lemma 4.8.)

## 10.9 Betti-Zahlen

**Def:** Die Zahl  $\dim H^k \mathcal{M} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  heißt *k-te Betti-Zahl*.

## 10.10 Die 0. Betti-Zahl

- Bem:**
- i) Die Betti-Zahlen beschreiben die Topologie der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  durch Zahlen.
  - ii) Haben  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  verschiedene Betti-Zahlen, so sind sie *nicht* diffeomorph. In diesem Kontext: Wann verschwinden die Betti-Zahlen?

iii) Für eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit gilt: Die 0-te Betti-Zahl ist gleich 1.

Im Allgemeinen gilt: Die 0-te Betti-Zahl misst die Anzahl der zusammenhängenden Komponenten.

## 10.11 Kettenhomomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension

**Bem:** Gilt  $\dim \mathcal{N} =: k < n := \dim \mathcal{M}$ , so erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k \mathcal{N} & \xrightarrow{d} & 0 \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \Omega^k \mathcal{M} & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1} \mathcal{M} \end{array}$$

D.h. alle von  $\mathcal{N}$  kommenden  $k$ -Formen sind Cozykel.

Wir erhalten:

## 10.12 Abbildungen von $\mathcal{M}$ nach $\partial\mathcal{M}$

**Lemma:** Ist  $\mathcal{M}$  eine  $n$ -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit und  $f : \mathcal{M} \rightarrow \partial\mathcal{M}$  irgendeine differenzierbare Abbildung, so gilt:

$$df^*\omega = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^{n-1}(\partial\mathcal{M})$$

**Bew:** Spezialfall von Bemerkung 10.11. □

## 10.13 Das Dachprodukt auf Cohomologiegruppen

**Bem:** i)

$$[\omega] \wedge [\eta] := [\omega \wedge \eta] \quad \forall [\omega] \in H^r \mathcal{M}, [\eta] \in H^s \mathcal{M}$$

definiert ein Dachprodukt  $H^r \mathcal{M} \times H^s \mathcal{M} \xrightarrow{\wedge} H^{r+s} \mathcal{M}$ .

Wohldefiniertheit:

Betrachte  $\omega + d\alpha, \eta + d\beta$  mit  $\omega, \eta$  Cozykel:

$$(\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) = (\omega \wedge \eta) + (\omega \wedge d\beta) + (d\alpha \wedge \eta) + (d\alpha \wedge d\beta)$$

Es gilt:  $d\alpha \wedge d\beta$  ist Corandelement, da:

$$d(\alpha \wedge d\beta) = d\alpha \wedge d\beta + (-1)^r \alpha \wedge \underbrace{dd\beta}_{=0} = d\alpha \wedge d\beta$$

Und da  $\eta$  Cozykel ist ( $d\eta = 0$ ) gilt:

$$d(\alpha \wedge \eta) = d\alpha \wedge \eta + (-1)^r \alpha \wedge d\eta = d\alpha \wedge \eta$$

Also ist  $d\alpha \wedge \mu$  ein Corandelement. Entsprechend folgt:  $\omega \wedge d\beta$  ist ein Corandelement. Insgesamt erhalten wir:

$$(\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) = \omega \wedge \eta + \text{Corandelement}$$

ii) Außerdem ist  $f^* : H^k \mathcal{N} \rightarrow H^k \mathcal{M} : [\eta] \mapsto [f^* \eta]$  wegen der Natürlichkeit von  $d$  wohldefiniert, denn:

Sei  $\eta$  Cozykel. Dann gilt:

$$f^*(\eta + d\alpha) = f^* \eta + f^* d\alpha = f^* \eta + d(f^* \alpha)$$

## 10.14 Homotopieinvarianz der de Rham Cohomologie

**Satz:** Sind  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  differenzierbar homotope Abbildungen, so gilt:

$$f^* = g^* : H^k \mathcal{N} \rightarrow H^k \mathcal{M}$$

für alle  $k$ .

**Bew:** Für den Beweis verweisen wir auf [8]. □

## 10.15 Nullhomotope Abbildungen

**Korollar:** Ist  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  differenzierbar nullhomotop, d.h. differenzierbar homotop zu einer konstanten Abbildung, so ist  $f^* : H^k \mathcal{N} \rightarrow H^k \mathcal{M}$  für alle  $k \geq 1$  die Nullabbildung.

## 10.16 Zusammenziehbare Mannigfaltigkeiten

**Korollar:** Ist  $\mathcal{M}$  zusammenziehbar, d.h. ist  $\text{id}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  nullhomotop, so ist  $H^k \mathcal{M} = 0$  für alle  $k \geq 1$ .

**Bew:**  $\text{id}_{\mathcal{M}}^* : H^k \mathcal{M} \rightarrow H^k \mathcal{M}$  ist die Identität, da  $\text{id}_{\mathcal{M}}^*([\eta]) = [\text{id}_{\mathcal{M}} \eta] = [\eta]$ . Damit können wir Korollar 10.15 anwenden. □

## 10.17 Positiv dimensionale Cozykel auf zusammenziehbaren Mannigfaltigkeiten

**Korollar:** Auf einer zusammenziehbaren Mannigfaltigkeit ist jeder positiv dimensionale Cozykel ein Corand, d.h. aus  $\omega \in \Omega^k \mathcal{M}$  (mit  $k > 0$ ) und  $d\omega = 0$  folgt, es gibt ein  $\alpha \in \Omega^{k-1} \mathcal{M}$  mit  $d\alpha = \omega$ .

**Bew:**  $[\omega] = 0$ , d.h.  $\omega \in \text{im } d$ . □

## 10.18 Poincaré-Lemma

**Korollar:** Für beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeiten gilt:

Lokal ist jeder positiv dimensionale Cozykel (mit  $k \geq 1$ ) ein Corand, d.h. um jeden Punkt  $p$  gibt es eine offene Umgebung  $U$ , in der zu jedem  $\omega \in \Omega^k \mathcal{M}$  mit  $k > 0$  und  $d\omega = 0$  ein  $\alpha \in \Omega^{k-1}U$  mit  $d\alpha = \omega|_U$  existiert.

**Bew:** Lokalisierere mit Hilfe einer Karte  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $p \in V$ .

$x^{-1}(B_\varepsilon(x(p)))$  liefert eine Umgebung die zusammenziehbar ist.

Nutze dann die Korollare 10.16 und 10.17.  $\square$

## 10.19 Sternförmige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

**Korollar:** Ist  $X \subset \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig, so ist jeder positiv dimensionale Cozykel auf  $X$  ein Corand.

**Bew:** Sei  $X$  sternförmig bzgl. Punkt  $x_0$ . Wähle o.B.d.A.  $x_0 = 0$ , sonst verschiebe man entsprechend.

Sei ferner  $\omega \in \Omega^k X$  ein Cozykel mit der Basisdarstellung

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$$

Wir definieren nun eine Abbildung  $P : \Omega^k X \rightarrow \Omega^{k-1} X$  durch:

$$P(\omega) := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \left( \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x^{i_l} (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{l-1}} \wedge dx^{i_{l+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$$

Wenn wir die Identität

$$\omega = P(d\omega) + dP(\omega) \quad (*)$$

beweisen, folgt sofort die Behauptung, denn für einen Cozykel entfällt der erste Summand und wir haben mit  $P(\omega) \in \Omega^{k-1} X$  den gesuchten Corand gefunden. Bleibt also  $(*)$  zu zeigen.

Zunächst gilt (wie im Bemerkung 4.5 gesehen):

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Wendet man  $P$  auf diese Differentialform an, so folgt:

$$\begin{aligned} P(d\omega) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^j}(tx) dt \right) x^j (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &\quad - \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{l-1} \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^j}(tx) dt \right) x^{i_l} \\ &\quad \quad \quad (dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{l-1}} \wedge dx^{i_{l+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \end{aligned}$$



Leitet man andererseits  $P(\omega)$  ab, so erhält man:

$$\begin{aligned}
dP(\omega) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \left( \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x^{i_l} \right) dx^j \right) \\
&\quad \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{l-1}} \wedge dx^{i_{l+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left( \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \int_0^1 t^{k-1} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} (\omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) x^{i_l}) dx^j \right) dt \right) \\
&\quad \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{l-1}} \wedge dx^{i_{l+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left( \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \int_0^1 t^{k-1} \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx)}{\partial x^j} tx^{i_l} + \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) \delta_{ji_l} \right) dx^j \right) dt \right) \\
&\quad \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{l-1}} \wedge dx^{i_{l+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx)}{\partial x^j} tx^{i_l} dt \right) \right) \\
&\quad (dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{l-1}} \wedge dx^{i_{l+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
&\quad + \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left( \int_0^1 kt^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})
\end{aligned}$$

Addiert man nun diese beiden Terme erhält man:

$$\begin{aligned}
P(d\omega) + dP(\omega) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left( \int_0^1 kt^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
&\quad + \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx)}{\partial x^j} (tx) dt \right) x^j (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left( \int_0^1 kt^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) + t^k \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx)}{\partial x^j} (tx) x^j dt \right) (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left( \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx)) dt \right) (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left[ t^k \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) \right]_0^1 (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k}(x) (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \omega
\end{aligned}$$

Somit ist (\*) und damit auch das Korollar bewiesen.  $\square$

**Bem:** Der Beweis von Korollar 10.19 verallgemeinert den Beweis des Satzes "Rotationsfreie Vektorfelder auf sternförmigen Gebieten haben eine Stammfunktion".

## 10.20 Zusammenziehbare Teilmengen des $\mathbb{R}^3$

**Korollar:** Es sei jetzt  $X \subset \mathbb{R}^3$  zusammenziehbar (z.B. sternförmig), so gibt es auf  $X$ :

- (i) zu jedem Vektorfeld  $\vec{a}$  mit  $\text{rot } \vec{a} = 0$  eine Funktion  $f$  mit  $\text{grad } f = \vec{a}$  (vgl. Übungsaufgabe Analysis II).
- (ii) zu jedem Vektorfeld  $\vec{b}$  mit  $\text{div } \vec{b} = 0$  ein Vektorfeld  $\vec{a}$  mit  $\text{rot } \vec{a} = \vec{b}$ .
- (iii) zu jeder Funktion  $c$  ein Vektorfeld  $\vec{b}$  mit  $\text{div } \vec{b} = c$ .

**Bew:** Nutze die folgende Identität zwischen Funktionen, Vektorfeldern und Formen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Omega^0 X & \xrightarrow{\text{grad}} & \Omega^1 X & \xrightarrow{\text{rot}} & \Omega^2 X & \xrightarrow{\text{div}} & \Omega^3 X & \longrightarrow & 0 \\
 & & f & \longmapsto & \text{grad } f & & & & & & \\
 & & & & \vec{a} & \longmapsto & \text{rot } \vec{a} & & & & \\
 & & & & & & \vec{b} & \longmapsto & \text{div } \vec{b} & & 
 \end{array}$$

Dann gilt (wobei  $\Theta$  der Riesz Operator ist):

$$df = \Theta \text{grad } f \quad d(\Theta \vec{a}) = \text{rot } \vec{a} \lrcorner \omega_{\mathbb{R}^3} \quad d(\vec{b} \lrcorner \omega) = (\text{div } \vec{b}) \omega_{\mathbb{R}^3}$$

Nun kann Korollar 10.17 angewendet werden. □

## 10.21 Die Betti-Zahlen auf offenen und sternförmigen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$

- Bem:**
- i) Korollar 10.19 ergibt, dass für  $X \subset \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig die Betti-Zahlen  $\beta_1, \beta_2, \dots$  verschwinden. Außerdem gilt  $\beta_0 = 1$ , da  $X$  zusammenhängend ist.
  - ii) Auch für die reelle projektive Ebene und für einen einzelnen Punkt lauten die Betti-Zahlen  $1, 0, 0, \dots$ . D.h. die Betti-Zahlen von ganz unterschiedlichen Mannigfaltigkeiten können gleich sein.
  - iii) Die Betti-Zahlen der  $n$ -Sphäre sind

$$\beta_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- iv) Für eine orientierbare, geschlossene (d.h. kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand), zusammenhängende 2-dimensionale Fläche gilt  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 2g$  und  $\beta_2 = 1$ . Dabei ist  $g$  das Geschlecht, d.h. die Anzahl der „Löcher“.

# Kapitel 11

## Coableitung & Laplace-de Rham Operator

### 11.1 Skalarprodukt für alternierende Formen

Es sei  $V$  ein orientierter Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Auf dem Raum aller alternierenden Multilinearformen führe für  $\omega_1, \omega_2 \in \text{Alt}^k V$  ein Skalarprodukt wie folgt ein:

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_1(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \omega_2(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

Dabei sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis auf  $V$ .

Diese Definition hängt nicht von der Orthonormalbasis ab.

### 11.2 Der $*$ -Operator (Hodge-Operator)

Der  $*$ -Operator ordnet nun jeder  $k$ -Form eine  $(n - k)$ -Form wie folgt zu:

Es sei  $\omega \in \text{Alt}^k V$ . Betrachte die folgende Zuordnung:

$$\text{Alt}^{n-k} V \rightarrow \text{Alt}^n V : \eta \mapsto \omega \wedge \eta$$

Es existiert nun genau eine  $(n - k)$ -Form  $*\omega$ , sodass

$$\omega \wedge \eta = \langle *\omega, \eta \rangle \omega_V$$

Dabei ist  $\omega_V$  die kanonische Volumenform.

### 11.3 Der Hodge-Operator

**Def:** Die lineare Abbildung  $*$  :  $\text{Alt}^k V \rightarrow \text{Alt}^{n-k} V$  heißt *Hodge-Operator* (oder  $*$ -Operator).

**Bem:** Für die „Zweimalanwendung“ des Hodgeoperators gilt:

$$**\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$$

**Bem:** Für orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeiten ergeben sich Skalarprodukte auf  $\Omega^k\mathcal{M}$  (d.h. auf jedem Tangentialraum) sowie ein  $*$ -Operator indem wir diese für jedes  $p$  auf  $T_p\mathcal{M}$  anwenden.

## 11.4 Die Coableitung

**Bem:** Mit Hilfe des  $*$ -Operators bringen wir den aufsteigenden de Rham-Komplex mit dem absteigenden de Rham-Komplex in Verbindung.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0\mathcal{M} & \xrightarrow{d} & \Omega^1\mathcal{M} & \xrightarrow{d} & \Omega^2\mathcal{M} & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & \Omega^n\mathcal{M} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow * & & \downarrow * & & \downarrow * & & & & \downarrow * & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^n\mathcal{M} & \xrightarrow{d^{-1}} & \Omega^{n-1}\mathcal{M} & \xrightarrow{d^{-1}} & \Omega^{n-2}\mathcal{M} & \xrightarrow{d^{-1}} & \cdots & \xrightarrow{d^{-1}} & \Omega^0\mathcal{M} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**Bem:** Da  $*$  invertierbar ist (nach Bemerkung 11.3) geht die Cartan-Ableitung nun in  $d = *^{-1}d^{-1}*$  über.

## 11.5 Definition der Coableitung

**Def:** Die *Coableitung*  $\delta : \Omega^{n-k}\mathcal{M} \rightarrow \Omega^{n-k-1}\mathcal{M}$  auf einer  $n$ -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist durch

$$\delta := (-1)^k * d *^{-1}$$

definiert.

## 11.6 Skalarprodukt für $k$ -Formen

**Def:** Für  $k$ -Formen  $\eta, \zeta \in \Omega^k\mathcal{M}$  definiere

$$\langle\langle \eta, \zeta \rangle\rangle := \int_{\mathcal{M}} \langle \eta, \zeta \rangle \omega_{\mathcal{M}} = \int_{\mathcal{M}} \eta \wedge (*\zeta)$$

Ziel: Finde den zu  $d$  dualen (transponierten) Operator.  
Die Produktregel liefert:

$$d(\eta \wedge *\zeta) = d\eta \wedge (*\zeta) + (-1)^k(\eta \wedge d(*\zeta))$$

Für  $\zeta \in \Omega^{k+1}\mathcal{M}$  gilt nach Definition 11.5 stets  $\delta : \Omega^{n-l}\mathcal{M} \rightarrow \Omega^{n-l-1}\mathcal{M}$  mit  $l = n - k - 1$ , also  $\delta\zeta = (-1)^{n-k-1} * d*^{-1}\zeta$ . Somit folgt:

$$\begin{aligned} d(*\zeta) &= (-1)^{(n-k)k} * d(*\zeta) = (-1)^{(n-k)k} * * d * * *^{-1} \zeta \\ &= (-1)^{(n-k)k+(n-k-1)(k+1)} * * d *^{-1} \zeta \\ &= (-1)^{2nk-2k^2-2k+n-1} * (*d*^{-1})\zeta \\ &= (-1)^{n-1}(-1)^{n-k-1} * \delta\zeta = (-1)^k * \delta\zeta \end{aligned}$$

Wir erhalten eine Produktregel:

$$d(\eta \wedge *\zeta) = d\eta \wedge *\zeta + \eta \wedge (*\delta\zeta)$$

für  $\eta \in \Omega^k\mathcal{M}$  und  $\zeta \in \Omega^{k+1}\mathcal{M}$ .

**Korollar:** Ist der Träger von  $\eta \in \Omega^k\mathcal{M}$  und  $\zeta \in \Omega^{k+1}\mathcal{M}$  kompakt in  $\mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}$ , so gilt:

$$\langle\langle d\eta, \zeta \rangle\rangle + \langle\langle \eta, \delta\zeta \rangle\rangle = 0$$

**Bew:**

$$\begin{aligned} \langle\langle d\eta, \zeta \rangle\rangle + \langle\langle \eta, \delta\zeta \rangle\rangle &= \int_{\mathcal{M}} d\eta \wedge (*\zeta) + \int_{\mathcal{M}} \eta \wedge (*\delta\zeta) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d(\eta \wedge *\zeta) = \int_{\partial\mathcal{M}} \eta \wedge (*\zeta) = 0 \end{aligned}$$

□

## 11.7 $-\delta$ ist dual (transponiert) zu $d$

**Bem:**  $-\delta$  ist dual (transponiert) zu  $d$ .

Schreibe  $d_k$  statt nur  $d$ , falls  $d : \Omega^k\mathcal{M} \rightarrow \Omega^{k+1}\mathcal{M}$

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k\mathcal{M} & \xrightarrow{d_k} & \Omega^{k+1}\mathcal{M} \\ \downarrow * & & \downarrow * \\ \Omega^{n-k}\mathcal{M} & \xrightarrow{(-1)^k \delta_k} & \Omega^{n-k-1}\mathcal{M} \end{array}$$

Nach Korollar 11.6 erhalten wir für Formen mit kompakten Träger in  $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ :

$$\langle\langle d\eta, \zeta \rangle\rangle = \langle\langle \eta, -\delta\zeta \rangle\rangle$$

Dies rechtfertigt die Aussage „ $-\delta$  ist transponiert zu  $d$ “.

## 11.8 Zerlegung von $\Omega^k \mathcal{M}$

**Satz:** Ist  $\mathcal{M}$  eine orientierbare  $n$ -dimensionale geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit, so gilt:

$$\Omega^k \mathcal{M} = \ker d_k \oplus \operatorname{im} \delta_{n-k-1} = \ker \delta_{n-k} \oplus \operatorname{im} d_{k-1}$$

als orthogonale direkte Summe bezüglich dem Skalarprodukt  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  auf  $\Omega^k \mathcal{M}$ .

**Bew:** Zu finden in [8]. □

## 11.9 Der Laplace-de Rham-Operator

**Def:** (a) Der Operator

$$\Delta = d^{k+1} \delta^{n-k} + \delta^{n-k-1} d^k : \Omega^k \mathcal{M} \rightarrow \Omega^k \mathcal{M}$$

heißt Laplace-de Rham-Operator auf  $\mathcal{M}$ .

(b) Formen  $\eta \in \Omega^k \mathcal{M}$  mit  $\Delta \eta = 0$  heißen harmonische Formen.

**Bem:** Für den Fall  $k = 0$  gilt:

$$\begin{aligned} d^0 &\cong \operatorname{grad} : \Omega^0 \mathcal{M} \rightarrow \Omega^1 \mathcal{M} \\ \delta^{n-1} &\cong \operatorname{div} : \Omega^1 \mathcal{M} \rightarrow \Omega^0 \mathcal{M} \end{aligned}$$

$\Delta$  entspricht somit  $\operatorname{div} \operatorname{grad}$  wie früher.

Sei  $\mathcal{M}$  wie oben. Definiere die Menge der harmonischen  $k$ -Formen als

$$\mathcal{H}^k \mathcal{M} := \{\eta \in \Omega^k \mathcal{M} \mid \Delta \eta = 0\}$$

## 11.10 Hodge Theorem

**Satz:** Jede de Rham-Cohomologiekategorie einer orientierbaren Mannigfaltigkeit wird durch eine wohlbestimmte harmonische Form repräsentiert.

Genauer heißt das: Die kanonische Abbildung

$$\mathcal{H}^k \mathcal{M} \rightarrow H^k \mathcal{M} : \eta \mapsto [\eta]$$

ist ein Isomorphismus für jedes  $k$ .

**Bew:** Zu finden in [8]. □

# Literaturverzeichnis

- [1] Agricola, Ilka und Friedrich, Thomas. *Globale Analysis*. Vieweg Verlag 2001.
- [2] Alt, Hans Wilhelm. *Analysis III*. Skript einer Vorlesung aus dem WS 2001/2002 der Universität Bonn.
- [3] Amann, Herbert und Escher, Joachim. *Analysis III*. Birkhäuser Verlag 2008.
- [4] Bär, Christian. *Elementare Differentialgeometrie*. DeGruyter Lehrbuch 2010.
- [5] Barner, Martin und Flohr, Friedrich. *Analysis II*. DeGruyter Lehrbuch 1983.
- [6] Bröcker, Theodor. *Analysis III*. Spektrum Akademischer Verlag 1992.
- [7] Forster, Otto. *Analysis 3*. Vieweg+Teubner Verlag 2008.
- [8] Jänich, Klaus. *Vektoranalysis*. Springer-Verlag.
- [9] Morgan, Frank. *Riemannian geometry. A beginner's guide*. A K Peters, Ltd 1998.
- [10] Spivak, Michael. *Calculus on Manifolds*. Westview Press 1971.
- [11] Walter, Rolf. *Einführung in die Analysis 3*. DeGruyter 2009.
- [12] <http://de.wikipedia.org/wiki/Minimalfl%C3%A4che>. Zugriff: 25.2.2011, 15:29 Uhr.

## Analysis IV

### Anwesenheitsaufgaben für die erste Übung

#### Aufgabe A1

Ist jede  $n$ -dimensionale Karte zugleich auch eine  $m$ -dimensionale Karte für ein beliebiges  $m \geq n$ ?

- Ja.
- Das ist Auffassungssache und hängt davon ab, ob man zwischen  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$  in diesem Zusammenhang unterscheiden will oder nicht.
- Nein, denn für  $U \neq \emptyset$  und  $m > n$  ist dann jedenfalls  $U'$  nicht offen in  $\mathbb{R}^m$ .

#### Aufgabe A2

Hat der topologische Raum  $X$  eine abzählbare Basis, so besitzt jede offene Überdeckung von  $X$  eine abzählbare Teilüberdeckung.

Insbesondere besitzt jede Mannigfaltigkeit einen abzählbaren Atlas.

#### Aufgabe A3

Man präzisiere und beweise: Jeder  $n$ -dimensionale reelle Vektorraum ist in kanonischer Weise eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

#### Aufgabe A4

Zeigen Sie, dass die  $n$ -Sphäre  $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist mit Atlas  $\mathcal{A} = \{\varphi_+, \varphi_-\}$  mit

$$\varphi_\pm : S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 \mp x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

Die Umkehrabbildungen werden gegeben durch

$$(\varphi_\pm)^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\|y\|^2 + 1}(2y_1, \dots, 2y_n, \pm\|y\|^2 \mp 1).$$

#### Aufgabe A5

Zeigen Sie, dass für  $S^n$  versehen wird mit der differenzierbaren Struktur von Aufgabe 4

$$f : S^n \rightarrow S^n, \quad f(y) = -y$$

eine  $C^\infty$ -Abbildung ist.



## Aufgabe A6

Betrachten Sie den Zylinder  $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $Z$  eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist.
- (ii) Geben Sie lokale Parametrisierungen an, die den Zylinder beschreiben.
- (iii) Bestimmen Sie den Tangentialraum und den Normalenraum an einem beliebigen Punkt von  $Z$ .

## Aufgabe A7

- (i) Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension  $m$  bzw.  $n$ . Zeigen Sie, dass  $M \times N$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $m + n$  ist.
- (ii) Seien  $M$  und  $N$  endlich-dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und sei  $f : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\text{graph}(f) := \{(x, y) \mid x \in M, y = f(x)\} \subset M \times N$$

eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist.

## Aufgabe A8

- (i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)(x - y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Relativtopologie keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

- (ii) Zeigen Sie, dass die Neilsche Parabel

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^3 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Relativtopologie keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Skizzieren Sie jeweils die Kurven.

## Analysis IV

### Übungsblatt 1

Abgabe: 30.04.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

#### Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der Doppelkegel

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2 + z^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

versehen mit der Relativtopologie keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, es existiert eine Karte um  $0 \in M$  und führen Sie dies zum Widerspruch.

#### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum  $(M, d)$  genau dann separabel ist, wenn er eine abzählbar dichte Teilmenge  $A \subset M$  besitzt. Dabei ist  $M$  versehen mit der durch die Metrik induzierten Topologie.

#### Aufgabe 3

Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $p \in M$ .

- (i) Zeigen Sie, dass für einen Diffeomorphismus  $f : M \rightarrow N$  das Differential  $df|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  ein Isomorphismus ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass eine Karte  $x$  um  $p$  ein Diffeomorphismus ist.
- (iii) Betrachten Sie die speziellen Tangentialvektoren  $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$  aus der Vorlesung definiert durch

$$\partial_{x_i} := \left[ x^{-1} (x(p) + te_i) \right], \quad i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass diese Vektoren eine Basis des Tangentialraumes  $T_p M$  bilden.

#### Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass  $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^4 = 3\}$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist. Geben Sie eine Karte um den Punkt  $p = (1, 1, 1)$  von  $M$  und eine lineare Gleichung für den Tangentialraum  $T_p M \subset \mathbb{R}^3$  an. Zeigen Sie außerdem, dass  $M$  homöomorph ist zur Sphäre  $S^2$ .

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV

### Übungsblatt 2

Abgabe: 07.05.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

#### Aufgabe 5

- (i) Sei  $f : M \rightarrow N$  eine konstante Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Berechnen Sie das Differential  $df_p$ .
- (ii) Seien  $V, W$  endlich-dimensionale Vektorräume versehen mit der Mannigfaltigkeitsstruktur wie auf Blatt 0. Zeigen Sie, dass der Tangentialraum  $T_p V$  linear isomorph ist zu  $V$  und berechnen Sie  $df_p$  für eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$ .
- (iii) Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und seien  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Abbildungen. Berechnen Sie  $d(fg)_p$ .
- (iv) Berechnen Sie für  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(p) = p_1 + p_2 + \dots + p_{n+1}$  das Differential  $df_p$ .

#### Aufgabe 6

- (i) Betrachten Sie die Polarkoordinaten auf  $\mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}, \quad \Phi(r, v) := (r \cos v, r \sin v).$$

Wir betrachten die speziellen Tangentialvektoren  $\partial_r, \partial_v$  von Definition 1.14 der Vorlesung für  $U$  versehen mit der Karte  $\Phi^{-1}$  und  $\partial_x, \partial_y$  für  $U$  versehen mit der Karte  $id$ . Stellen Sie die Basisvektoren  $\partial_r, \partial_v$  in den Basisvektoren  $\partial_x, \partial_y$  dar.

- (ii) Stellen Sie mit der Notation aus Teil (i) die Basisvektoren  $\partial_r, \partial_\varphi, \partial_\vartheta$  dar in den Basisvektoren  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  für den Fall von Kugelkoordinaten auf  $\mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$\Psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow V := \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}, \\ \Psi(r, \varphi, \vartheta) := (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta).$$

#### Aufgabe 7

Gegeben sei die Kurve  $c : (a, b) \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$ ,  $c(u) = (r(u), h(u))$  mit  $c'(u) \neq 0$  für alle  $u \in (a, b)$ . Wir legen diese Kurve in die  $x, z$ -Ebene des  $\mathbb{R}^3$  und rotieren sie um die  $z$ -Achse. Dadurch erhalten wir eine Rotationsfläche  $M \subset \mathbb{R}^3$  mit Parametrisierung

$$f : (a, b) \times (0, 2\pi) \longrightarrow M, \quad f(u, \varphi) := (r(u) \cos \varphi, r(u) \sin \varphi, h(u)).$$

Auf dem Tangentialraum an  $M$  betrachten wir die Einschränkung des euklidischen Skalarprodukts. Berechnen Sie die Koeffizienten  $(g_{ij})_{i,j=1,2}$  bezüglich der Karte  $f^{-1}$ .

**Bitte wenden**

## Aufgabe 8

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbare Untermannigfaltigkeit versehen mit der induzierten Metrik des  $\mathbb{R}^n$ ,  $q \in \mathbb{R}^n \setminus M$  und die Abbildung  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|q - x\|$  nehme im Punkt  $p \in M$  ein Minimum an. Zeigen Sie, dass der Vektor  $q - p$  zu  $T_p M$  orthogonal ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich noch an Minimumprobleme mit Nebenbedingungen aus Analysis II ?

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV

### Übungsblatt 3

Abgabe: 14.05.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

#### Aufgabe 9

Es bezeichne  $(H^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2})$  die Poincaré-Halbebene

$$H^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g_{ij}^{H^2}(x, y) = \frac{1}{y^2} \delta_{ij}$$

bzgl. der Identität als Karte und  $(D^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{D^2})$  die Poincaré-Kreisscheibe

$$D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad g_{ij}^{D^2}(x, y) = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} \delta_{ij}$$

bzgl. der Identität als Karte. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{iz + 1}{z + i}$$

eine Isometrie zwischen  $(H^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2})$  und  $(D^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{D^2})$  ist. Man sagt,  $(H^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2})$  und  $(D^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{D^2})$  sind Modelle für die hyperbolische Ebene.

*Hinweise:*

1. Wenn man also  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2}$  bezüglich der Basis gegeben durch die Karte Identität durch die Angabe von  $g_{ij}^{H^2}$  kennt, so kann man für beliebige Vektoren aus dem Tangentialraum  $T_{(x,y)}H^2$ , der hier gegeben ist durch  $\mathbb{R}^2$ , schließen:

$$\langle v, w \rangle_{H^2}|_{(x,y)} = \sum_{i,j=1}^2 v_i w_j \langle e_i, e_j \rangle_{H^2}|_{(x,y)} = \sum_{i,j=1}^2 v_i w_j g_{ij}^{H^2}(x, y) = \sum_{i,j=1}^2 v_i w_j \frac{1}{y^2} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^2 v_i w_i \frac{1}{y^2}.$$

Eine analoge Argumentation gilt für  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D^2}$ .

2. Identifizieren Sie hier  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  und rechnen Sie in komplexen Koordinaten.

#### Aufgabe 10

Wir betrachten die Poincaré-Halbebene  $(H^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2})$  aus Aufgabe 9 und den Kreisbogen

$$\gamma : I = \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow H^2, \quad \gamma(t) := (r \cos(t), r \sin(t)),$$

wobei  $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$  und  $r > 0$ . Zeigen Sie, dass die Länge des Kreisbogens gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{H^2}|_{\gamma(t)}} dt$$

unabhängig ist von  $r$ . Vergleichen Sie für  $\varphi_0 = \pi/4$  die Länge des Kreisbogens mit der Länge der Strecke von  $\gamma(\pi/4)$  nach  $\gamma(\pi/2)$ , wobei Sie benutzen dürfen, dass hier  $L(\gamma) = -\ln(\tan(\pi/8))$ .

Berechnen Sie außerdem die Länge der Strecke  $\beta_\varepsilon : (\varepsilon, 1) \rightarrow H^2$ ,  $\beta_\varepsilon(t) = (0, t)$  für  $\varepsilon > 0$ .

**Bitte wenden**

## Aufgabe 11

Wir versehen den  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit der Metrik  $g_x(v, w) = -v_0w_0 + \sum_{i=1}^n v_iw_i$  für  $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Zeigen Sie für Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $g_x(v, v) < 0$  und  $g_x(w, w) < 0$  die "umgekehrte" Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|g_x(v, w)| \geq \|v\| \cdot \|w\|,$$

wobei  $\|v\| = \sqrt{|g_x(v, v)|}$ .

Hinweis: Man darf annehmen, dass  $v, w$  linear unabhängig sind (warum?). Finden Sie dann eine Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  und einen Vektor  $\tilde{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , so dass  $w = \alpha v + \tilde{w}$  und  $g_x(v, \tilde{w}) = 0$ .

## Aufgabe 12

- (i) Betrachten Sie die Rotationsfläche  $M \subset \mathbb{R}^3$  aus Aufgabe 7 mit einer Kurve  $c$ , die zusätzlich stetig auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  ist. Berechnen Sie das Maß von  $M$ .
- (ii) Betrachten Sie die Poincaré-Halbebene  $(H^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2})$  aus Aufgabe 9 und berechnen Sie das Maß der Rechtecke in  $H^2$  gegeben durch  $A_1 = [-10, 10] \times [1, 10]$  und  $A_2 = [-1, 1] \times [\frac{1}{11}, 1]$ .

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV

### Übungsblatt 4

Abgabe: 21.05.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

#### Aufgabe 13

Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum und  $\omega \in \text{Alt}^n V$  von Null verschieden. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$V \longrightarrow \text{Alt}^{n-1} V, \quad v \mapsto v \lrcorner \omega \quad (\text{lies "v in } \omega\text{"}),$$

wobei  $(v \lrcorner \omega)(v_1, \dots, v_{n-1}) := \omega(v, v_1, \dots, v_{n-1})$ , ein linearer Isomorphismus ist.

#### Aufgabe 14

Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen,  $f : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus und  $\omega \in \Omega^n V$ . Geben Sie eine Formel für  $f^* \omega$  an.

#### Aufgabe 15

- (i) Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum und  $0 \neq \omega \in \text{Alt}^n V$  eine alternierende  $n$ -Form auf  $V$ . Seien außerdem  $a = (a_1, \dots, a_n)$  und  $b = (b_1, \dots, b_n)$  zwei Basen auf  $V$  und  $\mathcal{M}_{a,b}$  bezeichne die Übergangsmatrix von  $a$  nach  $b$ . Zeigen Sie die Identität

$$\omega(a_1, \dots, a_n) = \det(\mathcal{M}_{a,b}) \omega(b_1, \dots, b_n).$$

- (ii) Sei  $M$  eine differenzierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $\omega \in \Omega^n M$  eine  $n$ -Form mit der Eigenschaft, dass  $\omega_p \neq 0$  für alle  $p \in M$ . Zeigen Sie, dass dann  $M$  orientierbar ist.  
(Damit ist die noch offene Beweisrichtung aus einem Satz der Vorlesung gezeigt.)

#### Aufgabe 16

- (i) Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die einen Atlas aus zwei Karten  $(U_1, \varphi_1)$ ,  $(U_2, \varphi_2)$  besitzt. Zeigen Sie: Wenn  $U_1 \cap U_2$  zusammenhängend ist, so ist  $M$  orientierbar.
- (ii) Zeigen Sie mit Hilfe von (i), dass die Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  orientierbar ist.

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV

### Übungsblatt 5

Abgabe: 28.05.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

#### Aufgabe 17

Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  eine stetige Kurve in einer orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

- (i) Wir sagen eine Abbildung  $w : [0, 1] \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M$  längs  $\gamma$  mit  $w(t) \in T_{\gamma(t)} M$  ist stetig bezüglich Karten, falls für jeden Punkt  $t_0 \in [0, 1]$  eine Karte  $x : U \rightarrow V$  um  $\gamma(t_0) \in M$  existiert, so dass die Abbildung  $t \mapsto dx|_{\gamma(t)}(w(t)) \in \mathbb{R}^n$  stetig ist. Zeigen Sie, dass diese Definition unabhängig ist von der Karte.
- (ii) Sei mit  $\mathcal{B}(T_p M)$  die Menge der Basen von  $T_p M$  bezeichnet. Sei nun

$$v : [0, 1] \longrightarrow \bigcup_{p \in M} \mathcal{B}(T_p M)$$

ein stetiges  $n$ -Bein längs  $\gamma$ , d.h.  $v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$  ist eine Basis in  $T_{\gamma(t)} M$  und die  $v_i$  seien stetig bezüglich Karten. Zeigen Sie: Ist  $v(0)$  positiv orientiert, so auch jedes  $v(t)$ .

#### Aufgabe 18

Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum.

- (i) Zeigen Sie, dass  $k$  Linearformen  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^* = \text{Alt}^1(V)$  genau dann linear unabhängig sind, wenn

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \neq 0.$$

- (ii) Ist  $\omega \in \text{Alt}^{2k+1}(V)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ , so ist  $\omega \wedge \omega = 0$ . Geben Sie für beliebiges  $k \in \mathbb{N}_0$  ein Beispiel für ein  $\omega \in \text{Alt}^{2k}(\mathbb{R}^n)$  an mit  $\omega \wedge \omega \neq 0$ .

#### Aufgabe 19

Seien  $\varphi$ ,  $\psi$  und  $\vartheta$  die folgenden Formen im  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\varphi &= x \, dx - y \, dy, \\ \psi &= z \, dx \wedge dy + x \, dy \wedge dz, \\ \vartheta &= z \, dy.\end{aligned}$$

Berechnen Sie  $\varphi \wedge \vartheta$ ,  $\vartheta \wedge \varphi \wedge \psi$ ,  $d\varphi$ ,  $d\psi$  und  $d\vartheta$ .

**Bitte wenden**



## Aufgabe 20

Seien  $M$  und eine Eins-Form  $\omega \in \Omega^1(M)$  jeweils wie folgt gegeben.

- (i)  $M = \{(t, t^2 + 1) \mid t \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$  ein Parabelstück und  $\omega = (x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy$ ,
- (ii)  $M \subset \mathbb{R}^2$  die Verbindungsstrecke zwischen  $(0, \pi)$  und  $(\pi, 0)$  und  $\omega = \sin(y)dx + \sin(x)dy$  und
- (iii)  $M = \{(\cos t, \sin t, t) \mid t \in (0, 2\pi)\} \subset \mathbb{R}^3$  die Schraubenlinie und  $\omega = ydx + zdy + xdz$ .

Wählen Sie eine Orientierung auf  $M$  und berechnen damit das Integral  $\int_M \omega$ . Was passiert, wenn Sie die Orientierung ändern?

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV

### Übungsblatt 6

Abgabe: 04.06.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

#### Aufgabe 21

Sei  $\omega = \sum_{i < j} a_{ij} dx^i \wedge dx^j \in \Omega^2(\mathbb{R}^n)$  eine Zwei-Form auf  $\mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie

$$d\omega = \sum_{i < j < k} \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k,$$

wobei  $a_{ki} := -a_{ik}$  für  $i < k$ .

#### Aufgabe 22

(i) Sei  $\alpha = 2xzdy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$  eine Zwei-Form auf  $\mathbb{R}^3$ . Zeigen Sie  $d\alpha = 0$  und bestimmen Sie ein  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ , so dass  $d\omega = \alpha$ .

(ii) Geben Sie eine Zwei-Form  $\beta \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$  an, so dass  $d\beta = dx \wedge dy \wedge dz$ . Gibt es ein  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ , so dass  $d\omega = \beta$ ?

#### Aufgabe 23

Sei  $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  die Polarkoordinatenabbildung. Zeigen Sie:

(i) Für die sogenannte Windungsform  $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$  gilt  $f^*\omega = d\varphi$ .

(ii) Für die sogenannte Radialform  $\omega = xdx + ydy$  gilt  $f^*\omega = rdr$ .

Hinweis: Nutzen Sie  $f^*g = g \circ f$  für eine Nullform  $g$  und  $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$  insbesondere für  $\omega = x$  bzw.  $\omega = y$ .

## Aufgabe 24

Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion und  $F = (F^1, F^2, F^3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein glattes Vektorfeld. Wir betrachten die Differentialoperatoren Gradient, Rotation und Divergenz gegeben durch

$$\operatorname{grad} f := \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} F := \begin{pmatrix} \partial_y F^3 - \partial_z F^2 \\ \partial_z F^1 - \partial_x F^3 \\ \partial_x F^2 - \partial_y F^1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} F := \partial_x F^1 + \partial_y F^2 + \partial_z F^3.$$

Seien die Formen  $\omega_F^1$  und  $\omega_F^2$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \omega_F^1 &= F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz, \\ \omega_F^2 &= F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$df = \omega_{\operatorname{grad} f}^1, \quad d(\omega_F^1) = \omega_{\operatorname{rot} F}^2 \quad \text{und} \quad d(\omega_F^2) = (\operatorname{div} F) dx \wedge dy \wedge dz.$$

(ii) Benutzen Sie (i), um die folgenden Beziehungen zu beweisen:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0.$$

## Aufgabe 25 – Zusatzaufgabe mit 4 Extrapunkten

Ein einfaches thermodynamisches System (z.B. ein ideales Gas) wird durch sein Volumen  $V$  und seine Temperatur  $T$  gekennzeichnet ( $V, T \in \mathbb{R}$ ). Der Zustand eines solchen Systems wird dann durch den Druck  $p := p(V, T)$  und die innere Energie  $E := E(V, T)$  beschrieben. Nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik besitzt das System eine weitere Zustandsfunktion  $S := S(V, T)$ , die Entropie, deren Differential durch

$$dS := \frac{dE + pdV}{T}, \quad T > 0,$$

gegeben wird. Zeigen Sie:

(i) Zwischen  $E$  und  $p$  besteht die Beziehung

$$\frac{\partial E}{\partial V} = T \frac{\partial p}{\partial T} - p.$$

(ii) Die innere Energie eines idealen Gases, das der Zustandsgleichung  $pV = RT$  mit der (universellen Gas-)Konstante  $R \in \mathbb{R}$  genügt, ist vom Volumen unabhängig, d.h.  $E = E(T)$ .

(iii) Bei einem van der Waalschen Gas, das der Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = cT, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

genügt, ist die innere Energie volumenabhängig.

Hinweis: Nutzen Sie bei (i) die Eigenschaft  $d^2 = 0$  und zeigen Sie für (iii) die Identität  $T \frac{\partial p}{\partial T} = p + \frac{a}{V^2}$ .

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV Übungsblatt 7

Abgabe: 11.06.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

### Aufgabe 26

Berechnen Sie die lokale Darstellung der kanonischen Volumenform für folgende Flächen des  $\mathbb{R}^3$ .

- (i) Rotationsfläche:  $R_f(a, b) = \{(f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z) \mid (\varphi, z) \in \mathbb{R} \times (a, b)\}$ , wobei  $f \in C^\infty((a, b))$  mit  $f > 0$ .
- (ii) Wendelfläche:  $W = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \varphi) \mid (\varphi, r) \in \mathbb{R}^2\}$ .
- (iii) Graph einer Funktion:  $\text{Graph}(h) = \{(u, v, h(u, v)) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$ , wobei  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

### Aufgabe 27

- (i) Geben Sie den Gradienten einer glatten Funktion  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die Divergenz eines Vektorfeldes  $v$  auf  $S^n$  und den Laplace-Operator von  $f$  in der durch die stereographische Projektion (vgl. Blatt 0) gegebenen Karte auf  $S^n$  ohne Nordpol  $e_{n+1}$  an.
- (ii) Geben Sie die lokale Darstellung des Laplace-Operators einer glatten Funktion  $f : \text{Graph}(h) \rightarrow \mathbb{R}$  an, wobei  $\text{Graph}(h)$  wie in Aufgabe 26 gegeben ist.

### Aufgabe 28

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{V}(M)$  die Menge der glatten Vektorfelder auf  $M$ . Wir definieren den Rieszschen Isomorphismus  $\Theta : \mathcal{V}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  durch  $(\Theta v)(p) := \Theta_p v(p)$ , wobei  $\Theta_p : T_p M \rightarrow T_p^* M$  den durch  $\Theta_p u(w) = \langle u, w \rangle$  für  $u, w \in T_p M$  definierten Rieszschen Isomorphismus aus der Linearen Algebra bezeichnet.

Sei nun zusätzlich  $M$  dreidimensional und orientiert mit kanonischer Volumenform  $\omega_M$ . Für ein Vektorfeld  $v \in \mathcal{V}(M)$  definieren wir die **Rotation**  $\text{rot } v \in \mathcal{V}(M)$  durch

$$(\text{rot } v) \lrcorner \omega_M = d(\Theta v).$$

Zeigen Sie folgende lokale Darstellung bezüglich einer Karte  $(x = (x^1, x^2, x^3), U)$  von  $M$ .

$$\text{rot } v = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \sum_{(j,k,l) \in S_3} \text{sign}(j, k, l) \frac{\partial}{\partial x^j} (g_{ki} v^i) \partial_{x^l}.$$

Hierbei ist  $(j, k, l)$  die Permutation aus  $S_3$  mit  $1 \mapsto j, 2 \mapsto k, 3 \mapsto l$ .

Zeigen Sie außerdem die Identitäten

$$\text{rot} \circ \text{grad} = 0 \quad \text{und} \quad \text{div} \circ \text{rot} = 0.$$

Bitte wenden

## Aufgabe 29

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine dreidimensionale orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\omega_M$  ihr kanonisches Volumenelement. Auf  $\mathcal{V}(M)$  definieren wir das **Vektor-** oder **Kreuzprodukt**

$$\times : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M), \quad (v, w) \mapsto v \times w := \Theta^{-1}(\omega_M(v, w, \cdot)),$$

wobei  $\omega_M(v, w, \cdot)$  die Eins-Form  $u \mapsto \omega_M(v, w, u) = \omega_M(u, v, w)$  bezeichnet.

Zeigen Sie: Das Vektorprodukt ist bilinear, alternierend, erfüllt

$$\langle u, v \times w \rangle = \omega_M(u, v, w), \quad u, v, w \in \mathcal{V}(M)$$

und für  $p \in M$  ist  $(v \times w)(p)$  bezüglich des inneren Produkts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $T_p M$  orthogonal zu  $v(p)$  und  $w(p)$ .

Zeigen Sie folgende lokale Darstellung bezüglich einer positiv orientierten Karte  $(x = (x^1, x^2, x^3), U)$  von  $M$ .

$$v \times w = \sqrt{g} \sum_{i=1}^3 \sum_{(j,k,l) \in S_3} \text{sign}(j, k, l) g^{il} v^j w^k \partial_{x^i}.$$

Falls die Karte orthonormiert ist, d.h.  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , so gilt

$$v \times w = (v^2 w^3 - v^3 w^2) \frac{\partial}{\partial x^1} + (v^3 w^1 - v^1 w^3) \frac{\partial}{\partial x^2} + (v^1 w^2 - v^2 w^1) \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV Übungsblatt 7

Abgabe: 11.06.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

### Aufgabe 26

Berechnen Sie die lokale Darstellung der kanonischen Volumenform für folgende Flächen des  $\mathbb{R}^3$ .

- (i) Rotationsfläche:  $R_f(a, b) = \{(f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z) \mid (\varphi, z) \in \mathbb{R} \times (a, b)\}$ , wobei  $f \in C^\infty((a, b))$  mit  $f > 0$ .
- (ii) Wendelfläche:  $W = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \varphi) \mid (\varphi, r) \in \mathbb{R}^2\}$ .
- (iii) Graph einer Funktion:  $\text{Graph}(h) = \{(u, v, h(u, v)) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$ , wobei  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

### Aufgabe 27

- (i) Geben Sie den Gradienten einer glatten Funktion  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die Divergenz eines Vektorfeldes  $v$  auf  $S^n$  und den Laplace-Operator von  $f$  in der durch die stereographische Projektion (vgl. Blatt 0) gegebenen Karte auf  $S^n$  ohne Nordpol  $e_{n+1}$  an.
- (ii) Geben Sie die lokale Darstellung des Laplace-Operators einer glatten Funktion  $f : \text{Graph}(h) \rightarrow \mathbb{R}$  an, wobei  $\text{Graph}(h)$  wie in Aufgabe 26 gegeben ist.

### Aufgabe 28

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{V}(M)$  die Menge der glatten Vektorfelder auf  $M$ . Wir definieren den Rieszischen Isomorphismus  $\Theta : \mathcal{V}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  durch  $(\Theta v)(p) := \Theta_p v(p)$ , wobei  $\Theta_p : T_p M \rightarrow T_p^* M$  den durch  $\Theta_p u(w) = \langle u, w \rangle$  für  $u, w \in T_p M$  definierten Rieszischen Isomorphismus aus der Linearen Algebra bezeichnet.

Sei nun zusätzlich  $M$  dreidimensional und orientiert mit kanonischer Volumenform  $\omega_M$ . Für ein Vektorfeld  $v \in \mathcal{V}(M)$  definieren wir die **Rotation**  $\text{rot } v \in \mathcal{V}(M)$  durch

$$(\text{rot } v) \lrcorner \omega_M = d(\Theta v).$$

Zeigen Sie folgende lokale Darstellung bezüglich einer Karte  $(x = (x^1, x^2, x^3), U)$  von  $M$ .

$$\text{rot } v = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \sum_{(j,k,l) \in S_3} \text{sign}(j, k, l) \frac{\partial}{\partial x^j} (g_{ki} v^i) \partial_{x^l}.$$

Hierbei ist  $(j, k, l)$  die Permutation aus  $S_3$  mit  $1 \mapsto j, 2 \mapsto k, 3 \mapsto l$ .

Zeigen Sie außerdem die Identitäten

$$\text{rot} \circ \text{grad} = 0 \quad \text{und} \quad \text{div} \circ \text{rot} = 0.$$

Bitte wenden

## Aufgabe 29

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine dreidimensionale orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\omega_M$  ihr kanonisches Volumenelement. Auf  $\mathcal{V}(M)$  definieren wir das **Vektor-** oder **Kreuzprodukt**

$$\times : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M), \quad (v, w) \mapsto v \times w := \Theta^{-1}(\omega_M(v, w, \cdot)),$$

wobei  $\omega_M(v, w, \cdot)$  die Eins-Form  $u \mapsto \omega_M(v, w, u) = \omega_M(u, v, w)$  bezeichnet.

Zeigen Sie: Das Vektorprodukt ist bilinear, alternierend, erfüllt

$$\langle u, v \times w \rangle = \omega_M(u, v, w), \quad u, v, w \in \mathcal{V}(M)$$

und für  $p \in M$  ist  $(v \times w)(p)$  bezüglich des inneren Produkts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $T_p M$  orthogonal zu  $v(p)$  und  $w(p)$ .

Zeigen Sie folgende lokale Darstellung bezüglich einer positiv orientierten Karte  $(x = (x^1, x^2, x^3), U)$  von  $M$ .

$$v \times w = \sqrt{g} \sum_{i=1}^3 \sum_{(j,k,l) \in S_3} \text{sign}(j, k, l) g^{il} v^j w^k \partial_{x^i}.$$

Falls die Karte orthonormiert ist, d.h.  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , so gilt

$$v \times w = (v^2 w^3 - v^3 w^2) \frac{\partial}{\partial x^1} + (v^3 w^1 - v^1 w^3) \frac{\partial}{\partial x^2} + (v^1 w^2 - v^2 w^1) \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV

### Übungsblatt 8

Abgabe: 18.06.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

#### Aufgabe 30

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle^M)$  eine  $n$ -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass  $N := (0, \infty) \times M$  eine  $(n + 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist mit  $T_{(r,p)}N = \mathbb{R} \times T_pM$ . Wir setzen für  $v_1, v_2 \in T_{(r,p)}M$  mit  $v_1 = (r_1, w_1)$ ,  $v_2 = (r_2, w_2)$ , wobei  $r_i \in \mathbb{R}$  und  $w_i \in T_pM$ ,

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{(r,p)}^N := r_1 r_2 + r^2 \langle w_1, w_2 \rangle_p^M .$$

Zeigen Sie, dass  $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle_N)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist und drücken Sie den Laplace-Operator  $\Delta_N$  auf  $N$  aus mit Hilfe des Laplace-Operators  $\Delta_M$  auf  $M$ .

#### Aufgabe 31

- (i) Sei  $M$  eine berandete Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass  $\partial M$  abgeschlossen ist in  $M$ .
- (ii) Sei  $M$  eine kompakte berandete Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine reguläre differenzierbare Funktion, d.h. es gilt  $df_p \neq 0$  für alle  $p \in M$ . Zeigen Sie, dass  $f$  seine Extrema am Rand annimmt.

#### Aufgabe 32

- (i) Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  eine offene Menge mit glattem Rand  $\partial\Omega$  und der dazu äußeren Einheitsnormalen  $\nu$ . Berechnen Sie für das Vektorfeld  $a(x, y, z) = (0, 0, -\rho z)$  mit  $\rho > 0$  den Wert von  $-\int_{\partial\Omega} \langle a, \nu \rangle d\mu_{\partial\Omega}$ .
- (ii) Sei  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = \frac{a}{|x|}$  mit  $a > 0$ . Zeigen Sie:  $f$  ist harmonisch und für jede berandete kompakte **drei-dimensionale** Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  mit 0 als innerem Punkt gilt

$$\int_{\partial M} \langle \text{grad} f, \nu \rangle d\mu_{\partial M} = -4a\pi .$$

Hinweis: Teilen Sie das entstehende Integral über  $M$  auf in ein Integral über  $B_\varepsilon(0)$  und über  $M \setminus B_\varepsilon(0)$  für eine kleine Kugel  $B_\varepsilon(0) \subset M$ .

**Bitte wenden**



### Aufgabe 33

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  offen und beschränkt mit glattem Rand und der äußeren Einheitsnormalen  $\nu_\Omega$ . Wir identifizieren  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{C}$  und setzen  $\tau_\Omega := i\nu_\Omega$  (d.h.  $\nu_\Omega$  wird um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn gedreht). Sei  $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$  eine holomorphe Abbildung. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß die Identität

$$\int_{\partial\Omega} f\tau_\Omega d\mu_{\partial\Omega} = 0. \quad (11.1)$$

Hierbei ist in  $i\nu_\Omega$  und in  $f\tau_\Omega$  die komplexe Multiplikation zu verstehen.

Hinweis: Schreiben Sie  $f\tau_\Omega$  um in ein Skalarprodukt von Termen mit  $\nu_\Omega$ .

**Anmerkung:** Falls  $\partial\Omega$  parametrisiert wird durch  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\tau_\Omega(z) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$  für  $z = \gamma(t)$  eine Einheitstangente auf  $\partial\Omega$  bezeichnet, so gilt

$$\int_{\partial\Omega} f\tau_\Omega d\mu_{\partial\Omega} = \int_0^1 (f\tau_\Omega)(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_\gamma f dz.$$

Auf diese Weise liefert (11.1) den Cauchy-Integralsatz für  $f$  und  $\gamma$ .

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV

### Übungsblatt 9

Abgabe: 25.06.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

#### Aufgabe 34

- (i) Sei  $M$  eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\partial M = \emptyset$  und  $f \in C_0^\infty(M)$  (d.h.  $f$  hat kompakten Träger in  $M$ ) erfülle  $\Delta f \geq 0$ . Zeigen Sie, dass  $f$  konstant ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass  $M$  nicht als kompakt vorausgesetzt ist, sondern nur der Träger von  $f$ , der aber im Allgemeinen keinen glatten Rand hat. Überdecken Sie diesen Träger mit (kompakten) Kartenumgebungen und wählen Sie eine zugehörige Partition der Eins, um schließlich  $\Delta f = 0$  zu zeigen.

- (ii) Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine zusammenhängende offene Menge und  $f \in C^2(\Omega)$  harmonisch. Zeigen Sie: Nimmt  $f$  in  $\Omega$  ein Extremum an, so ist  $f$  bereits konstant.

#### Aufgabe 35

Sei  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$  und  $\omega = xy^2 dx + 2xy dy$  eine Eins-Form auf  $\mathbb{R}^2$ . Berechnen Sie  $\int_{\partial D} \omega$  einmal mit der Definition des Integrals und dann mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Hinweis: Man kann zeigen, dass der Satz von Stokes richtig bleibt, obwohl  $\partial D$  keine glatte Kurve ist. Sie dürfen diese Tatsache benutzen.

#### Aufgabe 36

- (i) Sei  $\varphi$  die Zwei-Form in  $\mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$\varphi = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$$

Berechnen Sie  $\int_{S^2} \varphi$  für die Einheitskugel  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

- (ii) Sei  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$  die Oberfläche der oberen Hälfte der Kugel vom Radius 1 in  $\mathbb{R}^3$  und  $a(x, y, z) = (-y, x, z)$  ein Vektorfeld im  $\mathbb{R}^3$ . Berechnen Sie  $\int_B \operatorname{rot} a \cdot d\vec{F}$ .

Bitte wenden

### Aufgabe 37

- (i) Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit,  $c : I \rightarrow S$  differenzierbar,  $v, w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  zwei differenzierbare Vektorfelder längs  $c$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Zeigen Sie die beiden Produktregeln aus der Vorlesung für die kovariante Ableitung, genauer

$$\begin{aligned}\frac{\nabla}{dt}(fv)(t) &= \dot{f}v(t) + f(t)\frac{\nabla}{dt}v(t) \text{ und} \\ \frac{d}{dt}\langle v, w \rangle(t) &= \left\langle \frac{\nabla}{dt}v(t), w(t) \right\rangle + \left\langle v(t), \frac{\nabla}{dt}w(t) \right\rangle.\end{aligned}$$

- (ii) Sei nun  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  die Einheitssphäre und sei

$$c : \mathbb{R} \rightarrow S^2, \quad c(t) = (\cos(t) \sin(\vartheta), \sin(t) \sin(\vartheta), \cos(\vartheta))$$

eine Kurve auf  $S^2$ , wobei  $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$  fest. Zeigen Sie: Die kovariante Ableitung von  $c$  verschwindet genau dann, wenn  $\vartheta = 0$ .

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV

### Übungsblatt 10

Abgabe: 02.06.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

#### Aufgabe 38

Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^d$  eine Untermannigfaltigkeit,  $v$  ein Vektorfeld auf  $M^n$  und  $w_p \in T_p M^n$ .

- (i) Zeigen Sie die folgende lokale Darstellung bzgl. einer Parametrisierung  $F : U \rightarrow V$  der kovarianten Ableitung

$$\nabla_{w_p} v = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial \xi^k}{\partial u^l}(u) \eta^l + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(u) \xi^i(u) \eta^j \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}(u),$$

wobei  $w_p = \sum_{k=1}^n \eta^k \frac{\partial F}{\partial u^k}$  und  $v(F(u)) = \sum_{k=1}^n \xi^k(u) \frac{\partial F}{\partial u^k}(u)$ .

- (ii) Zeigen Sie, dass die Definition der kovarianten Ableitung  $\nabla_{w_p} v$  aus der Vorlesung nicht abhängt von der Auswahl der Kurve.

- (iii) Zeigen Sie für  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $v, w, w_1, w_2$  Vektorfelder auf  $M^n$  und  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  glatt

$$\nabla_{(c_1 w_1 + c_2 w_2)} v = c_1 \nabla_{w_1} v + c_2 \nabla_{w_2} v \quad \text{und} \quad \nabla_{fw} v = f \nabla_w v.$$

Hinweis: Für die Korrektheit der Definition der kovarianten Ableitung soll die Formel aus (i) benutzt werden. Insbesondere muss diese Formel also hergeleitet werden ohne spätere Eigenschaften der kovarianten Ableitung.

#### Aufgabe 39

Sei der Rotationstor  $T \subset \mathbb{R}^3$  gegeben durch die Parametrisierung

$$F : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) = ((4 + \cos u) \cos v, (4 + \cos u) \sin v, \sin u).$$

Berechnen Sie die Koeffizienten der ersten Fundamentalform (d.h. die Komponenten  $g_{ij}$  der Metrik), die Christoffelsymbole und die kovariante Ableitung des Vektorfeldes  $a(F(u, v)) = u \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$  nach dem Vektorfeld  $\frac{\partial F}{\partial u}$ .

#### Aufgabe 40

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine Rotationsfläche mit Parametrisierung

$$F : (a, b) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, \varphi) := (r(u) \cos \varphi, r(u) \sin \varphi, h(u)),$$

wobei  $u \mapsto (r(u), h(u))$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ist (d.h.  $(r')^2 + (h')^2 = 1$ ) mit  $r(u) > 0$ . Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform von  $S$  sowie die Gauß'sche und die mittlere Krümmung.

**Bitte wenden**

### **Aufgabe 41**

Bestimmen Sie für  $K_0 \in \{-1, 0, 1\}$  jeweils alle Rotationsflächen  $S$  des in Aufgabe 40 definierten Typs, für die die Gaußkrümmung gegeben ist durch  $K \equiv K_0$  und skizzieren Sie jeweils einen Spezialfall.

Hinweis: Aufgabe 40 liefert die Differentialgleichung  $r'' + Kr = 0$  für  $r$ . Lösen Sie diese und bestimmen Sie, soweit möglich, das zugehörige  $h$  über die Bedingung der Bogenlängenparametrisierung.

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV

### Übungsblatt 11

Abgabe: 09.07.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

#### Aufgabe 42

- (i) Sei  $S$  der Graph der glatten Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  für  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen. Zeigen Sie, dass die mittlere Krümmung von  $S$  genau dann verschwindet, wenn  $g$  die folgende partielle Differentialgleichung erfüllt:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

- (ii) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion  $g : (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) = \ln(\cos(y)) - \ln(\cos(x))$ , die sogenannte **scherksche Fläche**, mittlere Krümmung Null hat.

#### Aufgabe 43

Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach Bogenlänge parametrisierte injektive Kurve mit nicht verschwindender Krümmung  $\kappa(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ . Damit sind die Windung  $\tau$  und das Frenetsche Dreiein  $(c', \nu, b)$  definiert. Zu  $r > 0$  betrachten wir

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(t, \varphi) = c(t) + r(\cos \varphi \nu(t) + \sin \varphi b(t)).$$

Zeigen Sie, dass für kleines  $r$  nach geeigneter Einschränkung des Definitionsbereiches  $F$  Parametrisierung einer zwei-dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M$  ist. Leiten Sie außerdem folgende Formeln für die Hauptkrümmungen von  $M$  her:

$$\kappa_1 = \frac{-\cos \varphi}{1 - r \cos \varphi \kappa(t)}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{r}.$$

Hinweis: Benutzen Sie das Normalenfeld  $N = -\cos \varphi \nu(t) - \sin \varphi b(t)$  an  $M$  und die Frenetschen Formeln.

#### Aufgabe 44

Sei  $c : I \rightarrow M$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve auf einer Hyperfläche  $M \subset \mathbb{R}^d$ . Falls  $c'(t)$  für alle  $t \in I$  eine Hauptkrümmungsrichtung ist, so heißt  $c$  **Krümmungslinie**. Zeigen Sie, dass  $c$  genau dann Krümmungslinie ist, wenn es eine Funktion  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $\frac{d}{dt} \nu(c(t)) = \lambda(t) \cdot c'(t)$ . In diesem Fall ist  $-\lambda(t)$  die entsprechende Hauptkrümmung.

### Aufgabe 45

Sei  $M \subset \mathbb{R}^d$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit,  $p \in M$ ,  $X \in T_p M$  mit  $|X| = 1$ . Sei  $N_p M = (T_p M)^\perp$  der  $(d - n)$ -dimensionale Normalenraum und sei  $\nu_1(p), \dots, \nu_{d-n}(p)$  eine Orthonormalbasis von  $N_p M$ . Sei  $E = \text{span}\{X, \nu_1(p), \dots, \nu_{d-n}(p)\}$  der  $(d - n + 1)$ -dimensionale Untervektorraum aufgespannt von  $X, \nu_1(p), \dots, \nu_{d-n}(p)$ . Zeigen Sie: Es existiert eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^d$  von  $p$ , so dass  $M \cap ((E + p) \cap V)$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Außerdem existiert eine Bogenlängenparametrisierung  $c$  dieser Kurve mit  $c'(0) = X$ .

Hinweis: Benutzen Sie eine Darstellung von  $M$  als Nullstellenmenge und den Satz über implizite Funktionen. Falls Sie die entsprechende Aussage aus dieser Aufgabe nur für Hyperflächen  $M \subset \mathbb{R}^d$  zeigen, bekommen Sie noch drei Punkte.

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV

### Übungsblatt 12

Abgabe: 16.07.2010, 08:10 Uhr (in den Übungskästen)

#### Aufgabe 46

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie die folgende Produktregel für die kovariante Ableitung aus Definition 7.1

$$d(\langle v, w \rangle)(\xi) = \langle \nabla_{\xi} v, w \rangle + \langle v, \nabla_{\xi} w \rangle .$$

Wir können insbesondere für eine glatte Kurve  $c : I \rightarrow M$  die kovariante Ableitung von einem Vektorfeld längs  $c$  gegeben durch  $\eta(t) = \sum_{j=1}^n \eta^j(t) \frac{\partial F}{\partial u^j}$  analog zur inneren Geometrie definieren und erhalten die Produktregel

$$\frac{d}{dt} \langle v, w \rangle (t) = \left\langle \frac{\nabla}{dt} v(t), w(t) \right\rangle + \left\langle v(t), \frac{\nabla}{dt} w(t) \right\rangle .$$

#### Aufgabe 47

Sei  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine Untermannigfaltigkeit mit der ersten Fundamentalform als Metrik. Zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung bezüglich einer lokalen Parametrisierung gegeben ist durch

$$K = \frac{R}{2} ,$$

wobei  $R = \sum_{j,l} g^{jl} R_{jl} = \sum_{i,j,l} g^{jl} R_{ijl}^i$  die Skalarkrümmung bezeichnet.

#### Aufgabe 48

Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  die hyperbolische Ebene aus Aufgabe 9, d.h.  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  ist die obere Halbebene und die Metrik bezüglich der Identität als Karte sei gegeben durch  $g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2} \delta_{ij}$ . Zeigen Sie, dass die hyperbolische Ebene Gauß-Krümmung  $K = -1$  besitzt. Zeigen Sie, dass die senkrechten (Halb-)Geraden und die Halbkreise mit Mittelpunkt auf der reellen Achse (nach Umparametrisierung) alle Geodätischen von  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sind. Hinweis: Um die Geodäten zu behandeln, wählen Sie zunächst eine (einfache) Parametrisierung von Halbgerade und Halbkreis und parametrisieren diese um nach Bogenlänge. Damit können Sie schließlich die Geodätengleichung zeigen.



## Aufgabe 49

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine Rotationsfläche mit erster Fundamentalform als Metrik und Parametrisierung

$$F : (a, b) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, \varphi) := (r(u) \cos \varphi, r(u) \sin \varphi, h(u)),$$

wobei  $u \mapsto (r(u), h(u))$  eine reguläre Kurve ist (d.h.  $(r')^2 + (h')^2 \neq 0$ ) mit  $r(u) > 0$ . Zeigen Sie:

- (i) Alle nach Bogenlänge parametrisierten Meridiane  $\alpha_{\varphi_0}(t) = F(u(t), \varphi_0)$  sind geodätische Linien auf  $S$ .
- (ii) Ein nach Bogenlänge parametrisierter Breitenkreis  $\delta_{u_0}(t) = F(u_0, \varphi(t))$  ist eine geodätische Linie auf  $S$  genau dann, wenn  $r'(u_0) = 0$ .

**Viel Erfolg!**

## Analysis IV

### Übungsblatt 13

Dieses Blatt wird nicht mehr abgegeben!

#### Aufgabe 50

(i) Die **Kettenfläche** (oder das **Katenoid**) ist gegeben durch die Parametrisierung

$$F : I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) = (\cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v), u),$$

wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall ist. Zeigen Sie, dass das Katenoid eine Minimalfläche ist.

(ii) Die **Wendelfläche** (oder das **Helikoid**) ist gegeben durch die Parametrisierung

$$F : I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) = (u \sin(v), -u \cos(v), v),$$

wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall ist. Zeigen Sie, dass das Helikoid eine Minimalfläche ist.

#### Aufgabe 51

Sei das **reskalierte Katenoid** gegeben durch die Parametrisierung

$$F : I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) = (R \cosh(u/R) \cos(v), R \cosh(u/R) \sin(v), u).$$

(i) Zeigen Sie, dass das reskalierte Katenoid für alle  $R > 0$  eine Minimalfläche ist.

(ii) Berechnen Sie für  $0 < R < 1$  die Höhe  $h$ , in der die um  $h$  längs der  $z$ -Achse nach oben verschobene  $x$ - $y$ -Ebene aus der Fläche einen Kreis vom Radius 1 herauschneidet.

(iii) Zeigen Sie, dass diese Höhe nach oben beschränkt ist.

#### Aufgabe 52

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die mittlere Krümmung  $H$ , die Gauß-Krümmung  $K$  und die beiden Hauptkrümmungen  $\kappa = \kappa_1$  und  $\kappa = \kappa_2$  die Relation

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$$

erfüllen. Folgern Sie hieraus, dass  $H^2 \geq K$  gilt und insbesondere  $K \leq 0$  für die Gauß-Krümmung einer Minimalfläche.

### Aufgabe 53

- (i) Sei  $M = \{(u, g(u)) \mid u \in U\}$  der Graph einer glatten Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Für  $p_0 = (u_0, g(u_0)) \in M$  gelte  $\nabla g(u_0) = 0$ . Zeigen Sie, dass dann  $T_{p_0}M = \mathbb{R}^n \times \{0\}$  gilt und dass der zweite Fundamentaltensor  $B_{p_0} : T_{p_0}M \times T_{p_0}M \rightarrow N_{p_0}M$  durch die Hesseform  $\text{Hess}_{u_0}(g)$  gegeben ist.
- (ii) Sei  $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(x, y) := (x, y, x^2 - y^2)$  die Parametrisierung einer Sattelfläche. Berechnen Sie den Krümmungsvektor  $\varkappa(0) = \text{spur } B_0$  an der Stelle 0 und außerdem die Eigenwerte (Hauptkrümmungen in 0) und Eigenvektoren (Hauptkrümmungsrichtungen in 0) der  $B_0$  darstellenden Matrix.

**Keine Abgabe, trotzdem viel Erfolg!**

## Wiederholungsfragen zur Analysis IV

Suchen Sie sich einen Kommilitonen und beantworten Sie sich die folgenden Fragen gegenseitig. Hauptsächlich sollten Sie dabei mündlich vorgehen, aber die wichtigsten Definitionen und Aussagen müssen Sie auch auf ein Blatt Papier aufschreiben können. Sie sollten in der Lage sein, die Fragen ohne Vorlesungsskript zu bearbeiten.

**Hinweis: Dies ist kein Fragenkatalog für die mündliche Prüfung, sondern nur eine Hilfestellung. Herr Garcke wird sich bei der mündlichen Prüfung nicht nur an diese Fragen halten!**

1. Was ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und wie definiert man den Tangentialraum? Bestimmen Sie den Tangentialraum an die Sphäre.
2. Was bedeutet Differenzierbarkeit für Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten? Definieren Sie den Begriff Differential und sagen Sie, wie dieser zusammenhängt mit der Richtungsableitung. Berechnen Sie das Differential von  $f : S^n \rightarrow S^n$ ,  $f(x) = -x$ .
3. Wie kann man einen Tangentialvektor darstellen?
4. Was ist eine riemannsche Mannigfaltigkeit? Geben Sie ein Beispiel.
5. Sagen Sie, was eine Differentialform ist und geben Sie die lokale Darstellung von Eins-Formen an.
6. Was braucht man zur Integration einer  $n$ -Form auf  $M^n$  und wie ist das Integral definiert?
7. Berechnen Sie das Dachprodukt der Differentialformen auf  $\mathbb{R}^2$  gegeben durch  $\omega_1 = (x^2 + y^2)dx$  und  $\omega_2 = dy$  und die Cartan-Ableitung von  $\omega_1$ . Wie ist die Cartan-Ableitung definiert?
8. Definieren Sie die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Laplace-Beltrami-Operator.
9. Was ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand? Skizzieren Sie die möglichen Karten. Wie ist hierbei der Tangentialraum am Rand definiert?
10. Sagen Sie, was eine äußere Einheitsnormale ist und formulieren Sie den Satz von Gauß für riemannsche Mannigfaltigkeiten. Geben Sie die nötigen Beweisschritte an.
11. Was sagt der Satz von Stokes und wie wird dieser bewiesen?
12. Wie kann man in diesem Zusammenhang eine partielle Integration erklären?
13. Definieren Sie die Weingartenabbildung für Hyperflächen und die zweite Fundamentalform.
14. Wie sind mittlere Krümmung und Gauß-Krümmung definiert? Berechnen Sie die mittlere Krümmung für die Sphäre.
15. Was besagt das "Theorema egregium" von Gauß und wie wird es bewiesen?

16. Definieren Sie die Gauß-Krümmung für beliebige zweidimensionale riemannsche Mannigfaltigkeiten.
17. Was sind Geodätische? Geben Sie die Geodäten in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , auf der Sphäre  $S^2$  und in der hyperbolischen Ebene  $H^2$  an.
18. Zeigen Sie, dass Geodäten proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind.
19. Was ist der Krümmungsvektor einer Untermannigfaltigkeit und wie hängt dieser für Hyperflächen mit der mittleren Krümmung zusammen?
20. Erklären Sie die Divergenz von nicht-tangentialen Vektorfeldern und formulieren Sie hierfür den Satz von Gauß. Wie beweist man diesen?
21. Beschreiben Sie die Variation des Flächeninhalts.
22. Was ist der de Rham-Komplex und warum gilt  $im(d_{k-1}) \subset ker(d_k)$ ?
23. Was sind die Betti-Zahlen?
24. Was besagt das Poincaré-Lemma?
25. Wie kann man den Laplace-Operator für Formen definieren?