

**Tóth András**

**Kísérleti Fizika I.**

**2007**

## Bevezetés

*Fizika*: a szó eredeti görög alakjának jelentése "természet", akkoriban az összes természeti jelenség vizsgálatát jelentette.

*Később* a vizsgálatok köre szűkül: élettelen természet jelenségei anyagi minőség változása nélkül (utóbbi a kémia "területe"). Ennek a szűkített területnek a jellegzetességei:

- a jelenségek egyszerűbben vizsgálhatók, matematikailag könnyebben leírhatók (a fizika ún. egzakt tudomány)
- a feltárt törvények általánosak, a jelenségek széles körében érvényesek (pl. kémia, biológia).

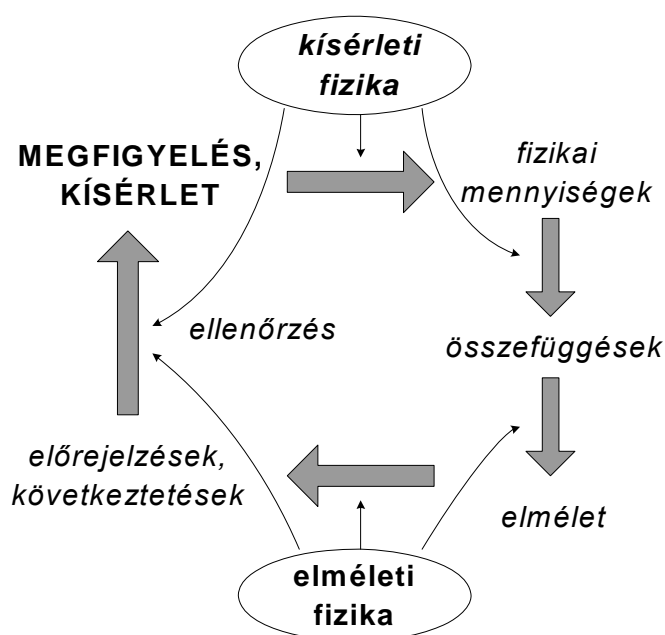
*Ma* nehéz definiálni a vizsgálati területet, de a fenténél sokkal szélesebb:

- a modern fizika alapvetően fontos szerepet játszik az *anyagátalakulással* járó jelenségek leírásában (pl. kémiai kötés, vegyületképződés, magátalakulások), sőt a bonyolultabb természettudományokban, mint a biológia és az orvostudomány is (biofizika),
- a *modern technológiák* megalapozásában közvetlenül részt vesz, aminek társadalmi hatásai is vannak (mikroelektronika, atomenergia)
- a *Föld és a világegyetem* egészének megértéséhez nélkülözhetetlen (pl. "globális problémák")
- a fizika kísérletező tudomány, ezért *új, hatékony mérési módszereket* fejleszt ki, amelyeket más tudományok és a technika felhasznál.

Jobb egy olyan definíció, amely nem tudományterülethez kapcsolja a fizikát, ilyen például az alábbi:

*a fizika az anyag részei közötti kölcsönhatások- és az ebből fakadó folyamatok vizsgálatával és értelmezésével, az anyag tulajdonságainak magyarázatával és megváltoztatásával, a természeti jelenségek magyarázatával foglalkozik.*

Vizsgálati módszerének vázlatja:



A fizika a jelenségek megértése és leírása érdekében *modellekkel* dolgozik, vagyis nem a vizsgált objektumot vagy jelenséget próbálja a maga teljességében leírni, hanem egyszerűsítéseket használ, elhanyagolja a jelenség lényegének megértéséhez nem okvetlenül szükséges részleteket, és az így kapott modell-objektumot, vagy modell-jelenséget vizsgálja. A modell akkor jó, ha a belőle kapott eredményeket a tapasztalat igazolja (*ellenőrzés*).

Fontos segédeszköz a *matematika*, amelynek segítségével a mennyiségek között számszerű összefüggések írhatók fel: a *törvények kvantitatív vá tehetők*.

Használt mennyiségek típusai:

- *skaláris*- (csak nagyság: pl. tömeg, hőmérséklet, töltés)
- *vektoriális* (irány is: pl. elmozdulás, sebesség, erő).

Számunkra szükséges matematikai alapok: a skalár- és vektormennyiségekkel végzett műveletek, vagyis a *vektorszámítás*-, továbbá a *differenciál- és integrálszámítás alapjai*.

## A mozgás leírása, modellek a mechanikában

A mozgás alapvető jelenség a világban, ennek vizsgálatával a *mechanika* foglalkozik.

A mozgások nagyon sokfélék és bonyolultak lehetnek. A mozgó test

- haladhat,
- foroghat,
- deformálódhat,
- áramolhat.

A leírásnál gyakran nem a valódi testet, hanem annak egyszerűsített "hasonmását", *modelljét* használjuk, mert pl.:

- az általános leírás nem megy, hiányos információk, hiányos fizikai ismeretek vagy hiányos matematikai lehetőségek miatt,
- az általános leírásra nincs is szükség, mert a mozgás egyik vagy másik formája számunkra elhanyagolható.

A mechanikában használt modellek:

- *anyagi pont* vagy *tömegpont* (kiterjedése nincs, tehát csak haladó mozgást tud végezni, de tömege van),
- *pontrendszer* (kiterjedt, de önálló pontokból álló, nem "összefüggő test"),
- *merev test* (valódi testhez közelálló kiterjedt test, amely foroghat is, de nem deformálódik),
- *deformálható test* (a valódi testhez legközelebb áll), sajátos deformálható "testek" a folyadékok és a gázok.

A modell jóságát a levont következtetések kísérleti vizsgálatával *ellenőrizni* kell.

A mozgás leírásának két lépcsőfoka:

- mozgás leírása, anélkül, hogy a mozgás jellegének okát kutatnánk: ez a *kinematika* tárgya.
- annak vizsgálata, hogy miért a megfigyelt módon mozognak a testek, milyen összefüggés van a test mozgása és a külső hatások között: ezt vizsgálja a *dinamika*.

A tárgyalás során a legegyszerűbb modelltől haladunk a bonyolultabbak felé.

## Anyagi pont kinematikája

A legegyszerűbb, legelvontabb – de ennek ellenére a gyakorlatban is használható – modell az *anyagi pont* vagy *tömegpont*, amelynek kiterjedése nincs, de tömege van. Tárgyalása azért fontos, mert

- itt könnyen bevezethetők a mozgás leírásához szükséges alapfogalmak,
- a mozgás egyszerű leírását teszi lehetővé,
- a *modell alapján kapott fogalmak és eredmények a bonyolultabb modelleknél is használhatók.*

A továbbiakban általában a tömegpont kifejezést használjuk.

### A kinematika alapmennyiségei

A kinematika egyszerűen *leírja* a test mozgását, anélkül, hogy a mozgás körülményeivel foglalkozna. Ehhez szükség van egy olyan eszköztárra, amellyel a test mozgását számszerűen jellemezni lehet (hol van, hogyan mozog).

#### Helyzetmegadás, helyzetvektor, pálya, út, elmozdulás

A mozgás leírásához a tömegpont helyzetét kell megadnunk az idő függvényeként.

A tömegpont helyzete megadható pl. egy derékszögű koordinátarendszerben a *tömegpont*  $x, y, z$  koordinátaival, illetve az ide mutató  $\mathbf{r}(x, y, z)$  *helyzetvektor* komponenseivel.

Ha bevezetjük a koordinátatengelyek irányát megadó  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  egységvektorokat, akkor a helyzetvektor így írható

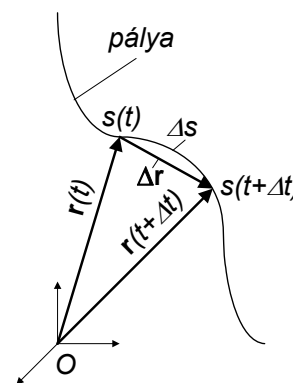
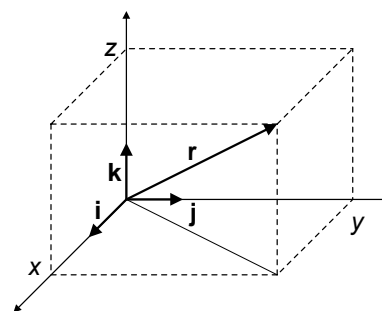
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Ha a tömegpont mozog, akkor a helyzetvektor (és komponensei) változnak, vagyis

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \Rightarrow x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Eközben a tömegpont a helyzetvektor végpontja által leírt *pályagörbén* halad. A pályagörbén egy önkényesen kiválasztott nulla időponttól a  $t$  időpontig befutott *szakasznak* az  $s = s(t)$  hosszát a tömegpont által *megtett útnak* nevezik. A  $t$  és  $t + \Delta t$  pillanatok között megtett  $\Delta s$  út eszerint:  $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ .

A tömegpont helyzetét a  $t$  időpillanatban az  $\mathbf{r}(t)$  helyzetvektor adja meg. Azt, hogy a pályagörbe egy kiszemelt  $\mathbf{r}(t)$  pontjából egy másik  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$  pontjába való átmenet során a tömegpont milyen irányban, mekkora távolságra mozdult el, a kiindulópontból a végpontba mutató



$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t)$$

$$\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad \Rightarrow \quad \Delta y(t) = y(t + \Delta t) - y(t)$$

$$\Delta z(t) = z(t + \Delta t) - z(t)$$

vektorral jellemezhetjük. Ez az *elmozdulásvektor*, amelynek komponenseit is megadtuk.

Látható, hogy az elmozdulás és az út – bár egységük ugyanaz – két lényegesen különböző mennyiség: az elmozdulás vektor, az út skalár, és általában a nagyságuk is különböző.

### A sebesség és a gyorsulás

Az elmozdulás illetve a pályán való haladás "gyorsasága" – a szokásos módon – a változás és a hozzá szükséges idő hányadosával jellemezhető. Ha egy rövid  $\Delta t$  idő alatt az elmozdulás  $\Delta \mathbf{r}$ , akkor ez a jellemző

$$\mathbf{v}_{\text{átl}} = \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

alakban írható fel. Ez a mennyiség a tömegpontnak a  $(t, t + \Delta t)$  időintervallumra vonatkozó *átlagos sebessége*. Ez nem nagyon pontos jellemzése az elmozdulás "ütemének", mert általában nagysága és iránya is függ a választott időtartam hosszától (véges időtartamon belül a mozgás „üteme” és iránya változhat).

Megadott  $t$  időpillanatban érvényes, pontos jellemzőt kapunk, ha az időtartam hosszát végtelenül kicsire csökkentjük és a

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

határértéket számítjuk ki, aminek a jelölésére szolgál az egyenlet jobb oldalán álló differenciálhányados-szimbólum. Az így kapott mennyiség a tömegpont *pillanatnyi sebessége* vagy egyszerűen a *sebessége* a  $t$  időpillanatban.

A fenti differenciálhányados eltér a szokásos alaktól, hiszen itt egy vektorra vonatkozik. A matematikában egy vektor differenciálhányadosán azt a vektort értik, amelynek komponensei a vektor (skaláris) komponenseinek a differenciálhányadosaival egyenlők:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt} \mathbf{k}.$$

Így a sebességvektor komponensei:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt},$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt},$$

$$v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}.$$

A sebesség nagysága a vektorokra vonatkozó szabálynak megfelelően

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Az ábra alapján jól látható, hogy az elmozdulás és az út nagysága általában nem azonos, de az is látható, hogy igen kis elmozdulásoknál fennáll a

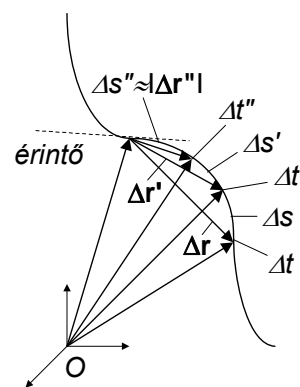
$$|\Delta \mathbf{r}| \approx \Delta s$$

összefüggés. Ezt felhasználva, a sebességre vonatkozóan újabb megállapításokat tehetünk.

Egyrészt a sebesség nagyságára a

$$v(t) = \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| = \frac{|d\mathbf{r}(t)|}{dt} = \frac{ds(t)}{dt}.$$

kifejezést kaphatjuk, másrészt az is látható (ábra), hogy a



sebességvektor a *pálya érintőjének* irányába mutat. Ezért, bevezetve az érintőirányú  $\mathbf{u}_T$  egységvektort, a sebességvektor más alakban is felírható. Ehhez a sebesség kifejezését – formálisan  $ds$ -sel osztva és szorozva, majd figyelembe véve, hogy  $ds=dr$  – írjuk át az alábbi módon:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dr} \frac{ds}{dt}.$$

Itt az első tényező az elmozdulás illetve a sebesség irányába mutató egységvektor, ami egyúttal a pálya érintőjének irányába mutat ( $\mathbf{u}_T$ ), a második tényező pedig a sebesség nagysága ( $v$ ), így a sebességvektor az alábbi alakba írható:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_T.$$

*Megjegyzések:*

- ◆ A sebesség nagyságára vonatkozó fenti összefüggés szigorúan véve csak a (pillanatnyi) sebességre érvényes, az átlagos sebességre csak akkor, ha a sebesség időben állandó (közelítőleg érvényes "igen rövid" időtartamra vonatkozó átlagos sebességre is).
- ◆ A sebesség nagyságából kiszámítható a tömegpont által adott idő alatt megtett út is:

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} v(t') dt'.$$

A gyakorlatban *átlagsebességnek* nevezik egy adott időtartam alatt befutott út  $s$  hosszának és az időnek a hányadosát:  $\bar{v} = \frac{s_{12}}{t_2 - t_1}$

Egy mozgó tömegpont sebessége változhat. Elvi és gyakorlati szempontból is fontos számszerűen jellemezni a sebesség változásának "ütemét", amit ismét a változás és a változás időtartamának hányadosa ad meg. A közelítő jellemzésre az *átlagos gyorsulás* (ábra)

$$\mathbf{a}_{\text{át}} = \frac{\Delta\mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t},$$

a pontos jellemzésre az

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}$$

*pillanatnyi gyorsulás* szolgál. A gyorsulásvektor komponensei a sebességvektor mintájára:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2},$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2},$$

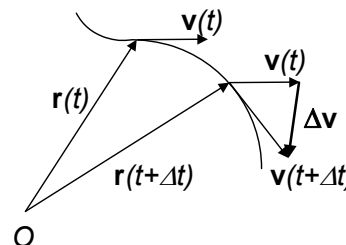
$$a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2}.$$

A gyorsulás nagysága

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

*Példa a kinematikai mennyiségek számítására:*

Ha az  $\mathbf{r}(t)$  függvény az alábbi



$$x(t) = 2 + 3t^3$$

$$y(t) = 3t$$

$$z(t) = 1 + 2t + t^2,$$

akkor a sebesség:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 9t^2$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 3$$

$$v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = 2 + 2t,$$

a gyorsulás pedig:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 18t$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 0$$

$$a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = 2.$$

### A helyzetvektor kiszámítása a gyorsulásból

A valóságban a helyzetvektor időfüggését többnyire nem ismerjük, hanem a gyorsulásra vonatkozóan vannak ismereteink (ezzel a kérdéssel később részletesen foglalkozunk a Newton-törvények kapcsán).

A gyorsulás időfüggésének ismeretében a sebesség kiszámítható a differenciálás inverz művelete, az integrálás segítségével.

Ha a mozgást egy önkényesen választható  $t_0$  időpillanattól vizsgáljuk, akkor a gyorsulás definícióját felhasználva kapjuk:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow d\mathbf{v} = \mathbf{a}(t)dt$$

$$dv_x = a_x(t)dt, dv_y = a_y(t)dt, dv_z = a_z(t)dt$$

A fenti vektoregyenlet komponens-egyenleteinek integrálásával megkaphatjuk a sebességkomponensek

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t')dt' = v_{0x} + \int_{t_0}^t a_x(t')dt',$$

$$v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^t a_y(t')dt' = v_{0y} + \int_{t_0}^t a_y(t')dt',$$

$$v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^t a_z(t')dt' = v_{0z} + \int_{t_0}^t a_z(t')dt'$$

illetve a sebességvektor

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t')dt' = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t')dt'$$

időfüggését. Jelölés:  $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$ , a  $t_0$  időpillanatban érvényes ún. *kezdeti sebesség*.



Hasonlóan kapható a helyzetvektor időfüggése a sebesség integrálásával:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t') dt' = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t') dt',$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(t') dt' = y_0 + \int_{t_0}^t v_y(t') dt',$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(t') dt' = z_0 + \int_{t_0}^t v_z(t') dt'.$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt'$$

Itt a kezdeti helyzetvektorra az  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$  jelölést alkalmaztuk.

Az integrálás határozatlan jellegéből következik, hogy a helyzetvektor időfüggésének meghatározásához a gyorsulás időfüggésének ismerete mellett még 6 állandót – pl. a 3 kezdeti koordinátát és a 3 kezdeti sebességet – is ismerni kell.

### **Kinematikai összefüggések konkrét esetekben**

A fenti egyenletek megoldásához ismerni kell az integrálandó függvényeket, mindenek előtt a gyorsulás  $\mathbf{a}(t)$  időfüggését. A feladat megoldása – vagyis az  $\mathbf{r}(t)$  függvény megkeresése – attól függően könnyű vagy nehéz, hogy milyen a gyorsulásvektor és annak időfüggése. A mozgások csoportosításánál ez a szempont fontos szerepet játszik.

#### **Mozgás állandó gyorsulással**

Ha  $\mathbf{a} = \text{állandó}$ , akkor a gyorsulás  $a_x, a_y, a_z$  komponensei is állandók, ezért

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_{t_0}^t a_x dt = v_{0x} + a_x(t - t_0).$$

Hasonlóan:

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y(t - t_0)$$

$$v_z(t) = v_{0z} + a_z(t - t_0).$$

Ugyancsak integrálással kapható a helyzetvektor a sebességből:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t) dt = x_0 + \int_{t_0}^t (v_{0x} + a_x(t - t_0)) dt = \\ &= x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_x(t^2 - t_0^2) - a_x t_0(t - t_0), \end{aligned}$$

vagyis

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_x(t - t_0)^2.$$

Hasonlóan:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t-t_0) + \frac{1}{2}a_y(t-t_0)^2$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}(t-t_0) + \frac{1}{2}a_z(t-t_0)^2.$$

Vektori alakban ugyanezek az összefüggések:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t-t_0)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t-t_0)^2.$$

Ha a mozgás vizsgálatát a  $t_0 = 0$  időpillanatban kezdjük, és a tömegpont ekkor az  $\mathbf{r}_0 = 0$  origóban van, akkor az ismert egyszerű összefüggéseket kapjuk:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2.$$

Mivel a kezdősebességre és a gyorsulásra semmiféle kikötést nem tettünk, az állandó gyorsulású mozgás pályája általában nem egyenes. A legegyszerűbb mozgáshoz úgy jutunk el, hogy újabb egyszerűsítő feltételeket alkalmazunk.

### Egyenes vonalú mozgás állandó gyorsulással

A mozgás akkor lesz egyenesvonalú, ha a gyorsulás a sebesség irányát nem változtatja meg, vagyis, ha a gyorsulásvektor ( $\mathbf{a}$ ) és a kezdeti sebesség vektor ( $\mathbf{v}_0$ ) egyenese egymással párhuzamos. Ekkor ugyanis az egyik koordinátatengelyt – például a  $z$  tengelyt – a kezdeti sebesség egyenesén felvéve:

$$\mathbf{v}_0 \{0, 0, v_{0z}\}$$

$$\mathbf{a}(t) \{0, 0, a_z(t)\}$$

és

$$\mathbf{r}_0 \{0, 0, z_0\}.$$

Ebből következik, hogy az integrálás után a sebességvektornak és a helyzetvektornak is csak a  $z$ -komponense lesz nullától különböző, vagyis a mozgás a  $z$ -tengelyen zajlik, és egyetlen koordináta segítségével írható le:

$$\mathbf{a}(t) \{0, 0, a_z(t)\}$$

$$\mathbf{v}(t) \{0, 0, v_z(t)\}$$

$$\mathbf{r}(t) \{0, 0, z(t)\}.$$

A legegyszerűbb eset az, ha a gyorsulás időben állandó. Ilyen mozgás pl. a lejtőn való lecsúszás és a szabadesés. A kinematikai összefüggések ilyenkor:

$$v_z(t) = v_{0z} + a_z t$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2.$$

Ha a test nyugalomból, az origóból indul, akkor  $v_{0z} = 0$ , és  $z_0 = 0$ . Ha emellett még  $t_0 = 0$  is fennáll, akkor az egyenletek:

$$v_z(t) = a_z t$$

$$z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2.$$

**KÍSÉRLET:** golyós kötélt ejtése (függőleges kötéltre golyókat erősítünk, a padlótól rendre  $d$ ,  $4d$ ,  $9d$ ,  $16d$ , stb távolságra, majd a kötelet elengedjük. A golyók a padlón egyenlő időközökben koppannak).

**KÍSÉRLET:** Galilei lejtő (lejtőbe vágott csatornában azonos magasságú helyről induló golyók útjába az indulási helytől rendre  $d$ ,  $4d$ ,  $9d$ ,  $16d$ , stb távolságra csengőket helyezünk el, majd a golyókat egyszerre elengedjük a lejtőn. A golyók egyenlő időközökben csendítik meg a csengőket).

*Értelmezés:*

Ha a két koppanás (csengetés) közti idő  $t_1$ , akkor az  $n$ -edik golyó koppanásának (csengetésének) időpontja:  $t_n = nt_1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), és így a különböző golyók által megtett (azaz különböző  $n$  értékekhez tartozó) utakra kapjuk:

$$z_n = \frac{1}{2} a_z n^2 t_1^2$$

$$z_n = n^2 z_1 = n^2 d$$

$$(z_1 = d).$$

Ebből a golyók útjaira valóban a fenti számsorozat adódik, a golyók egymás közti távolságára pedig a  $3d$ ,  $5d$ ,  $7d, \dots$  számok adódnak.

Lejtő segítségével pontosabb vizsgálatot is végezhetünk.

**KÍSÉRLET:** Légpárnás lejtőn lecsúszó test sebességét ( $v_z$ ) mérjük különböző helyeken, és ábrázoljuk a befutott út ( $z$ ) négyzetgyökének függvényében (mert  $v_z = \sqrt{2a_z z} = \sqrt{2a_z} \sqrt{z}$ ). Ha a mért pontok egyenest adnak, akkor igaz, hogy a mozgás gyorsulása állandó, és az egyenes meredekségéből ( $M_e = \sqrt{2a_z}$ ) a gyorsulás megkapható:  $a_z = \frac{M_e^2}{2}$ .

Ha  $a_z = 0$ , akkor *egyenletes* is a mozgás, és az egyenletek így egyszerűsödnek:

$$v_z = v_{0z} = \text{állandó}$$

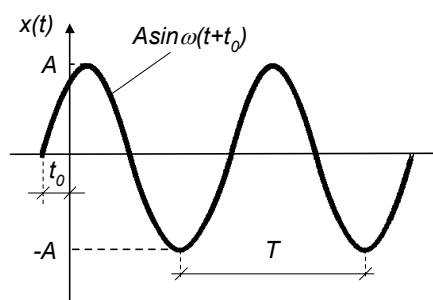
$$z(t) = z_0 + v_{0z} t.$$

**KÍSÉRLET:** Mikola-cső: folyadékkal töltött, lezárt csőben buborék van. A csövet ferdén tartva a buborék egyenletes mozgást végez. Igazolás: metronómmal egyenlő időtartamokat jelölünk ki, és minden időjelnél az üvegcsővön megjelöljük a buborék helyét. A jelek egyenlő távolságra lesznek egymástól.

### Egyenes vonalú mozgás változó gyorsulással, a harmonikus rezgőmozgás

Egyenes vonalú, változó gyorsulású mozgás nagyon sokféle lehet. Az egyik legfontosabb ilyen mozgás a rezgőmozgás. Az egyenes mentén rezgő tömegpont úgy mozog, hogy mozgásirányát időről-időre ellenkezőre változtatja.

A rezgőmozgás speciális esete a *harmonikus rezgőmozgás*, amikor a pontnak az egyenesen (pl. az  $x$ -tengelyen) elfoglalt helyzete időben szinusz (koszinusz) függvény szerint változik (ábra).



Ez a mozgás azért fontos, mert (többé-kevésbé pontosan) a valóságban is létezik, és mert segítségével bármilyen rezgőmozgás leírható.

**KÍSÉRLET:** mependített acéllap végének rezgőmozgását alatta egyenletesen mozgatott kormozott üveglapra rajzoltatjuk, és kivetítjük. Ha sikerült kis csillapítást elérni, akkor a kapott görbe valóban szinuszos jellegű, tehát közelítőleg harmonikus rezgés. (A valódi rezgés csillapított!)

Ha a mozgás egyenese az  $x$ -tengely, akkor az ábrán látható esetben (tehát amikor az időmérés kezdete nem egyezik azzal az időpillanattal, amikor a pont a  $+x$  irányban mozogva áthalad az  $x=0$  helyzeten) a harmonikus rezgés kitérése az idő függvényében az

$$x(t) = A \sin \omega(t + t_0)$$

függvénnyel írható le. Itt  $A$  a legnagyobb kitérés, amit a rezgés amplitúdójának neveznek, a  $t_0$  mennyiséggel pedig azt vesszük figyelembe, hogy a  $t=0$  időpillanatban a kitérés nem nulla, hanem  $x_0 = x(0) = A \sin \omega(t_0)$ . A kifejezés tovább alakítható, ha bevezetjük az  $\omega t_0 = \delta$  jelölést:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta).$$

A  $\delta$  mennyiség azt adja meg, hogy a tömegpont a rezgésének milyen fázisában van az időmérés kezdetén ( $t=0$ ), ezért  $\delta$ -t gyakran kezdőfázisnak nevezik. Mivel az időmérés kezdete tőlünk függ,  $\delta$  értéke tetszőleges lehet, ez az oka annak, hogy a harmonikus rezgés leírására a  $\sin$  és a  $\cos$  függvény egyformán jól használható (ha pl. a fenti kifejezésben az időmérés kezdetét úgy választjuk meg, hogy  $\delta = \omega t_0 = \pi/2$ , akkor a  $\sin$  helyett kezdőfázis nélküli  $\cos$  függvényt kapunk).

Milyen a harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont sebessége és gyorsulása?

A kitérés időfüggését megadó

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

függvényből a tömegpont sebessége és gyorsulása differenciálással kapható:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t).$$

Vagyis ez egy olyan mozgás, ahol a gyorsulás nagysága a kitéréssel arányos, iránya pedig azzal ellentétes.

### Görbe vonalú mozgás állandó gyorsulással:

Ilyen pl. a hajítás, ahol az állandó nehézségi gyorsulás ( $g$ ) érvényes.

Ha a gyorsulás állandó, akkor  $t_0=0$  esetén:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2.$$

Általában

$$\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$$

$$\mathbf{v}_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

$$\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0).$$

Egyszerűsítés: válasszuk ki az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{v}_0$  vektorok által meghatározott síkot, és vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy pl. az  $xz$  sík ezzel párhuzamos legyen. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(a_x, 0, a_z) \\ \mathbf{v}_0(v_{0x}, 0, v_{0z}) \\ \mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

Forgassuk úgy a rendszert, hogy a  $z$ -tengely a gyorsulás irányába mutasson, ekkor

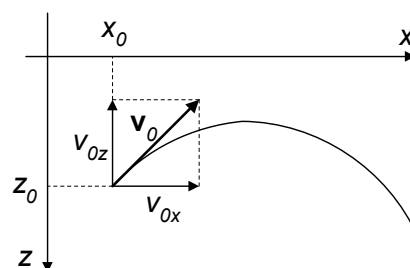
$$\begin{aligned}\mathbf{a}(0, 0, a_z) \\ \mathbf{v}_0(v_{0x}, 0, v_{0z}) \\ \mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

Ezek után a koordináta-rendszert addig toljuk az  $y$ -tengely irányában, amíg  $y_0=0$  lesz, így ekkor a test kezdeti helyvektora és kezdeti sebessége is az  $xz$  síkban van, és

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(0, 0, a_z) \\ \mathbf{v}_0(v_{0x}, 0, v_{0z}) \\ \mathbf{r}_0(x_0, 0, z_0).\end{aligned}$$

A gyorsulás integrálásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}v_x = v_{0x} & \quad x(t) = x_0 + v_{0x}t, \\ v_y = v_{0y} = 0 & \quad y(t) = y_0 = 0, \\ v_z = v_{0z} + a_z t & \quad z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \\ (t_0 = 0).\end{aligned}$$



A fenti egyenletek írják le a hajításokat, csak ekkor az  $a_z = g$  értéket kell behelyettesíteni.

A egyenletekből látszik, hogy a mozgást jellemző adatoknak csak  $z$  és  $x$  komponense lesz, vagyis *síkmozgás* jön létre.

A mozgás jellege a kezdősebesség-vektortól függ. Nehézségi erőterben történő mozgás (hajítás) esetén:

<i>általában:</i>	ferde hajítás,
$v_{0z} = 0, v_{0x} \neq 0$ :	vízszintes hajítás,
$v_{0x} = 0, v_{0z} \neq 0$ :	függőleges hajítás,
$v_{0x} = v_{0z} = 0$ :	szabadesés.

A koordinátákat megadó egyenletekből az időt kiküszöbölve megkapjuk a  $z(x)$  függvényt, azaz a pálya egyenletét

$$z(x) = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x + \frac{a_z}{2v_{0x}^2} x^2,$$

ami – a tapasztalatnak megfelelően – parabola.

### Görbe vonalú mozgás változó gyorsulással, a körmozgás

A sebesség az általános definíció alapján:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt},$$

a gyorsulás pedig formálisan:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}.$$

Konkrét kifejezések természetesen csak akkor kaphatók, ha ismerjük a mozgást.

Vizsgáljunk egy egyszerű, de gyakorlatilag fontos esetet, a *körmozgást*, amelynél a pálya kör alakú, és próbáljunk konkrét kifejezést kapni a gyorsulásra.

Az ábrán a pálya egy  $r$  sugarú kör, amelyen feltüntettünk egy kis elmozdulást, és berajzoltuk az elmozdulás két végpontján érvényes sebességvektorok különbségét. A sebességvektor megváltozását bontuk fel egy *tangenciális* (érintő irányú)  $d\mathbf{v}_T$ - és egy arra merőleges  $d\mathbf{v}_N$  és összetevőre. Ha az elmozdulás végtelenül kicsi, akkor a  $d\mathbf{v}_N$  összetevő merőleges a pályagörbére, ezt az összetevőt *normális* összetevőnek nevezik. A két összetevő nagysága:

$$dv_N = v d\varphi \quad \text{illetve} \quad dv_T = dv$$

A megfelelő gyorsulás-komponensek:

$$a_N = \frac{dv_N}{dt} = v \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{illetve} \quad a_T = \frac{dv_T}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Így a gyorsulás a pályára merőleges, normális ( $\mathbf{u}_N$ )- és a pálya érintőjének irányába ( $\mathbf{u}_T$ ) mutató, tangenciális egységvektorokkal kifejezve:

$$\mathbf{a} = v \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{u}_N + \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T$$

(mivel a sebességváltozás normális komponense a kör középpontja felé mutat, az itt bevezetett  $\mathbf{u}_N$  egységvektor is ilyen irányú).

Az ábrából látható, hogy

$$d\varphi = \frac{ds}{r} \quad \text{azaz} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{r} v.$$

Így a gyorsulás

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{r} \mathbf{u}_N + \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T.$$

A normális gyorsuláskomponens neve *centripetális gyorsulás*, amely a kör középpontja felé mutat, és a sebesség irányváltozásából származik, az érintőleges komponens pedig a *pályamenti gyorsulás*, amely a sebesség nagyságának változásából származik.

A mozgás jellemezhető a ponthoz húzott sugár és egy önkényesen választott sugár (ábra) közötti szög változásával is:  $\varphi = \varphi(t)$ . Bevezetve a szögelfordulás ( $\varphi$ ) ütemét jellemző szögsebességet ( $\omega$ ):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

a gyorsulásra azt kapjuk, hogy

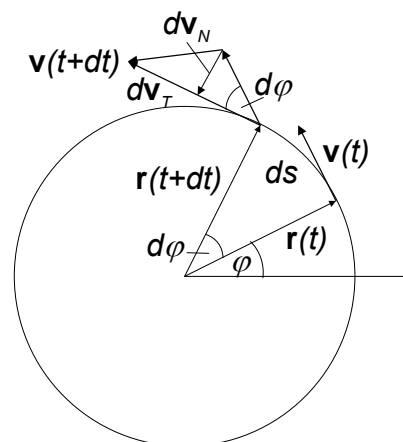
$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + v\omega \mathbf{u}_N.$$

\*\*\*\*\*

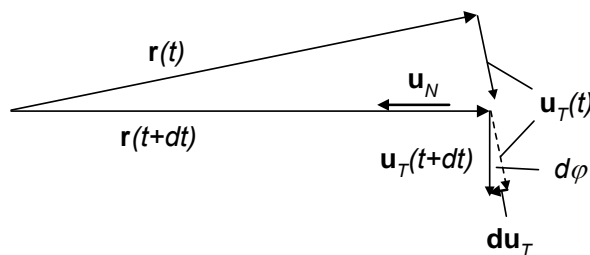
A gyorsulás általános kifejezését közvetlenül a sebesség differenciálásával is megkaphatjuk. Tudjuk, hogy a sebesség mindig a pálya érintőjének irányába mutat, ezért kifejezhető a sebesség  $v$  nagyságával és a pálya érintőjének irányába mutató (időben változó irányú)  $\mathbf{u}_T(t)$  egységvektorral is:  $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{u}_T(t)$

Ebből a gyorsulás:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \mathbf{u}_T(t) + v(t) \frac{d\mathbf{u}_T(t)}{dt}.$$



Bebizonyítható, hogy az érintő irányú egységvektor idő szerinti differenciálhányadosa a pályára merőleges, a pálya homorú oldala felé mutató vektor (ábra), amelynek nagysága  $\frac{d\varphi}{dt}$ . Itt  $d\varphi$  az egységvektor szögelfordulása  $dt$  idő alatt. Ezzel a gyorsulás



$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + v \frac{d\varphi(t)}{dt} \mathbf{u}_N.$$

Ha a pálya kör, akkor  $d\varphi$  egyben a helyvektor szögelfordulásával is egyenlő, ezért a  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  szögsebesség bevezetésével az

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + v\omega \mathbf{u}_N$$

eredményt kapjuk.

\*\*\*\*\*

A szögsebesség változási sebességének jellemzésére bevezethető a *szöggyorsulás* ( $\beta$ )

$$\beta = \frac{d\omega}{dt},$$

és a szögjellemzőkkel a sebesség és a gyorsulás is kifejezhető. Ehhez először vegyük figyelembe, korábbi eredményünket:  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$ . Másrészt ennek

alapján  $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt}$  (körmozgásnál  $r = \text{állandó}$ ). Így végül azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} = r\omega \mathbf{u}_T$$

$$\mathbf{a} = r\omega^2 \mathbf{u}_N + r\beta \mathbf{u}_T.$$

Vagyis:

$$v_T = v = r\omega \quad v_N = 0$$

$$a_T = r\beta \quad a_N = r\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}.$$

Mivel a szögjellemzők közötti összefüggések pontosan ugyanolyanok, mint a koordinátákkal korábban felírt kinematikai jellemzők összefüggései, az ott elmondottak itt is alkalmazhatók:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \beta(t) dt$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt.$$

Állandó szöggyorsulás (azaz állandó pályamenti gyorsulás) esetén az integrálás könnyen elvégezhető, és azt kapjuk, hogy

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta(t - t_0)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \beta(t - t_0)^2.$$

Vagyis a körmozgást végző pont mozgása ilyenkor az egyenes vonalú, állandó gyorsulású mozgással analóg módon írható le.

## Anyagi pont dinamikája

Mi a mozgás oka?

*Arisztotelész*<sup>1</sup>: a mozgás fenntartásához külső hatás kell. (Ezt a feltevést a felületés megfigyelés alátámasztja, hiszen egy test mozgásban tartásához általában tényleg erőt kell kifejteni.)

*Galilei*<sup>2</sup>: egyenes vonalú egyenletes mozgás és nyugalom külső hatás nélkül zajlik, a *mozgásállapot megváltozásához* kell külső hatás. (A részletesebb vizsgálat során kiderült, hogy a testek megállását külső hatás okozza, amelynek csökkentésekor a test egyre hosszabb ideig marad mozgásban. Ebből extrapolálható, hogy ha nincs külső hatás, akkor a test nem áll meg.)

Alapkérdések:

Hogyan jellemezhető számszerűen a külső hatás?

Milyen a külső hatás és a mozgásállapot megváltozása közti kapcsolat?

Külső hatás okozhat alakváltozást vagy sebességváltozást. A külső hatás nek alapján mérhető.

### ***Erő és tömeg, a dinamika alaptörvényei***

Az erő és tömeg bevezetésének a külső hatás által okozott változások típusa szerint két fő útját választhatjuk, most röviden vázoljuk a két lehetőséget.

#### **Erő- és tömegdefiníció a külső hatás alakváltoztató képessége alapján**

*Alakváltozás* alapján történő mérésnél pl. egy a hatás és a tömegpont közé helyezett – tehát a hatásnak kitett – rugalmas test (rugó) megnyúlása lehet a *hatás mértéke*. Elég kézenfekvő, hogy a hatásnak *iránya* van: különböző irányú hatások esetén egy test különböző irányokban indul el. A hatás irányát a közbeiktatott rugó tengelyének irányával adhatjuk meg.

Ahhoz, hogy a hatást mérni tudjuk, tudnunk kell, hogy milyen összefüggés van a hatás nagysága és a mérésre használt rugalmas test megnyúlása között: ez az ún. *skálatörvény*. A skálatörvényt önkényesen választhatjuk meg, de a szokásos (és célszerű) választás az, hogy – nem túl nagy hatások esetén – a hatás nagyságát arányosnak tekintjük az általa okozott megnyúlással, vagyis lineáris skálatörvényt használunk. Nulla értékűnek azt a hatást tekintjük, amely nem okoz megnyúlást.

A hatás egysége önkényesen választható (pl. a nehézségi erőterben felfüggesztett, jól definiált test által a felfüggesztő testre kifejtett hatás), amihez a közbeiktatott rugalmas mérő test meghatározott kitérése tartozik. Ezután minden olyan hatást, amely a mérő testen ugyanekkora kitérést okoz, egységnyi hatásnak tekintünk.

A fenti módon definiált, mérhető, iránnyal is rendelkező mennyiség az *erő*, jelölése rendszerint **F**.

#### ***Newton*<sup>3</sup> II. törvénye**

A következő lépés a (most már mérhető) erő és a tömegpont gyorsulása közötti összefüggés kimérése. A mérések szerint földi körülmények között jó közelítéssel

<sup>1</sup> ARISZTOTELÉSZ (i.e.384–i.e.322) görög filozófus

<sup>2</sup> Galileo GALILEI (1564-1642) olasz fizikus, matematikus, csillagász

<sup>3</sup> Isaac NEWTON (1643-1727) angol természettudós



érvényes, hogy az erő által létrehozott gyorsulás az erővel egyirányú, nagysága pedig arányos az erő nagyságával:

$$\mathbf{F} \sim \mathbf{a}.$$

Ebből következik, hogy adott test esetén az  $F/a$  hányados állandó, a test jellemzője, gyorsítással szembeni ellenállásának, tehetetlenségének mértéke. Ez a *tehetetlen tömeg*, amelyet  $m$  betűvel szokás jelölni:

$$m = \frac{F}{a}.$$

(Megjegyezzük, hogy van egy másik tömeg is, az ún. súlyos tömeg, ami a gravitációs kölcsönhatásban való részvételt jellemzi. Ez, bár alapvetően más jellemzőnek tűnik, a tapasztalat szerint mégis arányos a tehetetlen tömeggel. Ezzel kapcsolatos témák: gravitációs kölcsönhatás, Eötvös-kísérlet, általános relativitáselmélet.)

Az erő és sebességváltozás kapcsolatát megadó törvény tehát (a Földön nyugvó rendszerben közelítőleg)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

alakba írható, amit *Newton II. törvénye* néven ismerünk.

A gyorsulást idő- és távolságmérés segítségével határozhatjuk meg, az erő mérése rugóval, a tömeg mérése a fenti összefüggés alapján történik.

A fenti eljárás során először az erő mérési utasítását adtuk meg, és ennek segítségével származtattuk a tömeget, az egységeket azonban eddig nem rögzítettük. Mivel az  $F = ma$  összefüggésben két új mennyiség szerepel, az egyiknek az egységét önkényesen megválaszthatjuk, a másik egység ezután már az összefüggésből következik. A gyakorlatban először a tömeg egységét rögzítették. A tömeg egységeként  $1\text{ l}$  térfogatú  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os tiszta víz tömegét választották, és ezt  $1\text{ kg}$ -nak nevezik. Ezután az erő egysége – amit *Newtonról* neveztek el – már származtatható:  $1$

*erőegység* =  $1\text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\text{ Newton} = 1\text{ N}$ . Eszerint az az erő  $1\text{ N}$  nagyságú, amely pl.  $1$

$\text{kg}$  tömegű testet  $1\text{ m/s}^2$  gyorsulással mozgat. Ez azt jelenti, hogy az erőmérő eszköz (rugó) skáláját ennek az egységnek a felhasználásával kell elkészítenünk.

Az, hogy egy test gyorsításához erő kell, látványos, kvalitatív kísérletekkel szemléltethető.

#### **KÍSÉRLETEK:**

- ◆ Cérnaszálra felfüggesztett fahengert az aljára erősített cérnaszál meghúzásával próbálunk gyorsítani. Ha az alsó cérnaszálát hirtelen, nagy erővel megrántjuk, vagyis a fahengert nagy gyorsulással akarjuk mozgatni, akkor a fahengerre kifejtendő – az alsó cérnaszálban ébredő – erő olyan nagy, hogy az alsó (gyorsító) cérnaszál nem bírja ki, és elszakad. Ha az alsó cérnaszálát lassan, egyre nagyobb erővel húzzuk (a hengert kis gyorsulással akarjuk mozgatni), akkor az alsó cérnaszálban fellépő erő kicsi, viszont a hengert tartó cérna előbb-utóbb elszakad, mert a rá áttevődő erőt (húzóerő + a henger súlya) nem bírja ki.
- ◆ Nehezebb tárgyat (pl. pezsgősüveg) papírlapra helyezünk, majd a papírlapot lassan húzni kezdjük. Ekkor az üveg a papírlappal együtt mozog. Ha a papírlapot hirtelen megrántjuk, akkor az üveg nem követi, és a papírlapot ki tudjuk húzni az üveg alól. Magyarázat: a gyors rántás esetén az üveg csak akkor tudná követni a papírt, ha ugyanolyan gyorsulással mozogna, ehhez azonban nagy erőre lenne szükség, amit a súrlódás nem képes biztosítani. Lassú indításnál a súrlódási erő elegendő az üveg gyorsításához.

A kísérletek jól mutatják, hogy a testek tehetetlenek, gyorsításukhoz erő kell.

**Newton III. törvénye**

Tapasztalati tény, hogy két egymással kölcsönhatásban álló (egymásra erőt kifejtő) test mindegyike ugyanakkora nagyságú, ellentétes irányú (azonos támadásvonalú) erőt fejt ki a másikra (ábra):

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

Ez *Newton III. törvénye*, amelynek lényeges fizikai tartalma az, hogy az erőhatás mindig *kölcsönhatás* eredménye: nem tudunk kifejtteni semmilyen hatást úgy, hogy ne lépne fel rajtunk az ellenhatás.

Ha a testekre az egymásra hatáson kívül semmilyen más erő nem hat, akkor a III. törvény és a II. törvény kombinációjából azt kapjuk, hogy fennállnak az

$$m_1 \mathbf{a}_1 = -m_2 \mathbf{a}_2, \quad m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt},$$

összefüggések, illetve a tömeget állandónak tekintve, a

$$\frac{d(m_1 \mathbf{v}_1)}{dt} = -\frac{d(m_2 \mathbf{v}_2)}{dt}$$

összefüggés. Ebből következik, hogy az  $m\mathbf{v}$  mennyiség változása a kölcsönható testeken azonos nagyságú és ellentétes irányú, vagyis

$$\frac{d}{dt}((m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2)) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{állandó}.$$

Látható, hogy az  $m\mathbf{v}$  mennyiség itt különleges szerepet játszik: a kölcsönható testekre ennek a mennyiségnek az összege nem változik, ezért külön fizikai mennyiségként vezették be. A

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

mennyiség az  $m$  tömegpont *lendülete* vagy *mozgásmennyisége* (gyakran az impulzus elnevezést is használják)

Ezzel a fenti eredmény így írható:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{állandó},$$

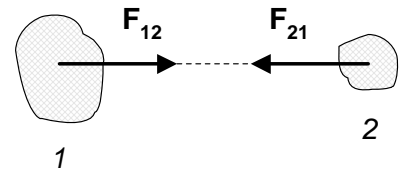
vagyis, ha a két test csak egymással áll kölcsönhatásban, akkor összes lendületük (mozgásmennyiségük) nem változik. Ez a *lendület-megmaradás* (mozgásmennyiség-megmaradás, impulzus-megmaradás) *törvénye* két egymással kölcsönhatásban álló tömegpont esetén.

**KÍSÉRLET\_1:**

- ◆ Két szembeállított, egymás felé gurulni képes zsámolyon álló két személy egy kötélt két végét fogva egymást el akarja húzni. Bármilyen módon húzzák egymást (csak az egyik húz, a másik csak tartja a kötelet, csak a másik húz, az egyik csak tartja a kötelet vagy mindketten húzzák a másikat) *mindkét zsámoly elmozdul*, mégpedig nagyjából ugyanúgy. Az egyik test a másikra nem tud úgy erőt kifejtteni, hogy a másik ne fejtene ki rá erőt.

**KÍSÉRLET\_2:**

- ◆ Két kiskocsi közé rugót helyezünk, amit összenyomunk, és a rugót összenyomott állapotban cérnaszállal rögzítjük. A cérnaszállat elégetve a rugó *mindkét kocsi meglöki*. Ha az egyik kocsi tömege lényegesen nagyobb, mint a másiké, akkor ez a kocsi lassabban indul (kisebb távolságra megy el). Eredetileg a két kocsi összes lendülete nulla volt, ezért a cérnaszáll elégetése után is nullának kell lennie. Emiatt a két kocsi lendületváltozása ellenkező irányú (és – amit itt pontosan nem tudunk igazolni – azonos nagyságú).



**KÍSÉRLET\_3:**

- ◆ Műanyag zsinórra csúsztható tartóban rögzítve szódavíz-patron helyezünk, majd a patron erre szolgáló tűs eszközzel kiszúrjuk. A  $CO_2$  gáz nagy sebességgel kiáramlik a patronból, a patron pedig ellenkező irányban végigcsúszik a zsinóron (rakéta). Eredetileg nulla lendületű rendszerben belső kölcsönhatással lendületet létrehozva (gáz kiáramlása), ellenkező irányú lendületnek kell keletkeznie (patron mozgása).

A lendülettel Newton II. törvénye (a tömeget állandónak tekintve) átírható még az

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

alakba is. Ebből a felírásból látható, hogy ha egy tömegpontra nem hat erő, akkor a lendülete megmarad (ami nyilvánvaló, hiszen ilyenkor a sebessége állandó).

***Az erőhatások függetlenségének elve (Newton IV. törvénye)***

Newton II. törvényét eddig úgy fogalmaztuk meg, hogy a tömegpontra egyetlen erő hat. Külön vizsgálendő az az eset, amikor a tömegpont nem egyetlen erő hatásának van kitéve, hanem több test fejt ki rá erőt egyidejűleg.

A kísérletek azt mutatják, hogy ilyenkor az egyes erőkre külön-külön teljesül Newton II. törvénye, vagyis az egyes erők egymástól függetlenül fejtik ki a hatásukat a tömegpontra. Ez az *erőhatások függetlenségének elve* (gyakran nevezik Newton IV. törvényének is).

Ennek következménye, hogy ha pl. egy tömegpontra két erő hat, akkor az egyik erő által okozott gyorsulás

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{m},$$

függetlenül attól, hogy működik-e másik erő, a másik erő által okozott gyorsulás pedig

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_2}{m}.$$

Mivel a gyorsulás vektormennyiség, a pont eredő gyorsulása:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_1}{m} + \frac{\mathbf{F}_2}{m} = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}{m},$$

vagyis a tömegpont úgy mozog, mintha a rá ható erők vektori összege hatna rá. Több erő együttes hatása esetén – ennek megfelelően – Newton II. törvénye az erők vektori összegére, az ún. *eredő erőre* érvényes:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + \dots + m\mathbf{a}_n = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{F}_{\text{eredő}} = m\mathbf{a}.$$

Az tehát, hogy az erők egymástól függetlenül fejtik ki hatásukat, azzal egyenértékű, hogy *az erők vektorként viselkednek, vektorként összegezhetőek*, mint a gyorsulások.

Ha tehát egy tömegpontra több erő hat egyidejűleg, akkor a II. Newton-törvénnyel kapcsolatos összes fenti megállapításunk érvényes marad, csak a tömegpontra ható erők helyére az erők vektori összegét, az eredő erőt kell beírni.

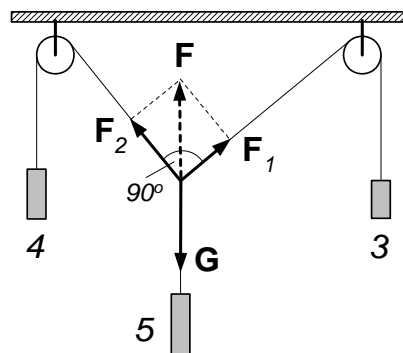
A IV. törvényből az is látszik, hogy egy eredetileg nyugvó tömegpont nem csak akkor marad *egyensúlyban* (nyugalomban), ha nem hat rá erő, hanem akkor is, ha a *rá ható erők eredője nulla*. A fenti esetben a tömegpont helyén ható erők dinamikai szempontból egymás hatását kioltják. Ezt gyakran úgy fogalmazzák meg, hogy ebben az esetben az egy pontban ható *erők egyensúlyban vannak*.

**KÍSÉRLETEK:**

- ◆ Ha az erő a többi hatástól függetlenül fejt ki hatását egy tömegpontra, akkor a különböző hatásokra bekövetkező mozgások is egymástól függetlenül mennek végbe. Két egyforma golyó egyikét vízszintesen elhajítva, a másikat pedig ugyanakkor elejtve, a két golyó egyszerre koppan a talajon. A golyók függőleges irányú mozgása ugyanúgy megy végbe, bár az egyik vízszintes irányban is mozog.
- ◆ Ugyanezt igazolja az a kísérlet, amikor egy nehezzel ellátott posztó darabot elejtünk, és ugyanakkor a posztódarab eredeti helye felé kilövünk egy nyilat. A nyíl mindig eltalálja a posztódarabot. Könnyen belátható, hogy ez csak úgy lehetséges, hogy a nyíl vízszintes és függőleges mozgása egymástól függetlenül zajlik.

**KÍSÉRLET:**

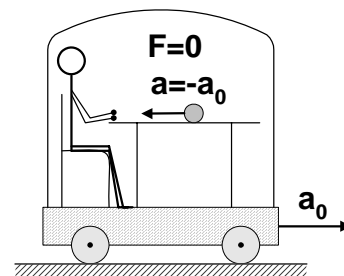
- ◆ Két azonos magasságban elhelyezett csigán egy kötelet vetünk át, és a kötel egyik végére 3 egységnyi-, a másik végére 4 egységnyi-, a közepére pedig 5 egységnyi tömeget erősítünk (ábra). A súlyokat elengedve, azok beállnak egy egyensúlyi helyzetbe, amelyben a két csiga közti kötélszakasz a középső súlynál megtörik. Bármilyen kezdő állapotból hagyjuk magára a rendszert, a két csiga közti kötélszakasz két része *egymással derékszöget zár be*. A függőlegesen lefelé mutató **G** (súly) erőt tehát – az adott súlyok esetében – az **F<sub>1</sub>** és **F<sub>2</sub>** erő csak akkor tudja kompenzálni, ha egymásra merőlegesek.



A merőleges beállást könnyen értelmezhetjük, ha feltételezzük, hogy az erők vektorként viselkednek<sup>1</sup>. A választott súlyok (erők) esetén fennáll az  $F^2 = F_1^2 + F_2^2$  összefüggés ( $F_1=3$  egység,  $F_2=4$  egység, és  $F=5$  egység), ami a derékszögű beállítás miatt megfelel a vektorábrából kapható összefüggésnek. Ez azt jelenti, hogy a **G** súllyal valóban a két másik erő vektori összege tart egyensúlyt  $F_1 + F_2 = -G$ . Az erők tehát vektorként összegezhetőek.

**Newton I. törvénye, az inerciarendszer fogalma**

A dinamika alaptörvényeit a Földhöz képest nyugvó vonatkoztatási rendszerekben végzett kísérletek többé-kevésbé alátámasztják. Könnyen belátható azonban, hogy vannak olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekben a törvények biztosan nem teljesülnek. Ennek demonstrálására végezzük el az alábbi gondolatkísérletet. Egy megfigyelő egy lefedett kocsiban ül, amelyből a



<sup>1</sup> A kísérlet értelmezéséhez tudni kell, hogy a testek súlya arányos a tömegükkel, továbbá, hogy a csigán átvett kötéltre akasztott súlyok a csiga másik oldalán is a súlyokkal azonos erőt fejtenek ki, amelynek iránya a kötel irányával egyezik.

környezetét nem látja (ábra). A kocsi van egy vízszintes, sima asztallap, amelyen egy sima felületű, gömb alakú golyó áll. Ha a kocsit óvatosan gyorsítjuk – úgy, hogy a megfigyelő ne érezze a gyorsulást – akkor a megfigyelő azt fogja tapasztalni, hogy a golyó gyorsul, és álló helyzetből elindulva az ölébe esik. Newton II. törvénye szerint, a megfigyelő ezt úgy értelmezi, hogy a golyóra fellépett egy erő. Ilyen erőt azonban nem talál (a külső szemlélő tudja, hogy nincs is ilyen erő), ezért nem érti, hogy a golyó miért gyorsult. (A külső szemlélő azt állapítja meg, hogy hozzá képest a golyó nem gyorsul, és helyben marad, a kocsi ülő megfigyelő azért látja gyorsulni a golyót, mert a kocsi gyorsul, és kiszalad a golyó alól.)

Vagyis egy gyorsuló testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben olyan testeket is gyorsulni látunk, amelyekre ható erők eredője nulla, ilyen rendszerben tehát Newton II. törvénye (eredeti formájában) nem érvényes.

Emiatt szükség van annak lerögzítésére, hogy milyenek azok a vonatkoztatási rendszerek, ahol a Newton-törvények használhatók. Amikor *Newton I. törvénye* (a *tehetetlenség törvénye*) azt mondja ki, hogy *minden test megtartja nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását, amíg valamilyen külső hatás nem éri*, lényegében azt fogalmazza meg, hogy olyan rendszerekkel foglalkozunk, amelyekben a fenti állítás, azaz a tehetetlenség törvénye igaz. Az ilyen rendszereket *tehetetlenségi- vagy inerciarendszereknek* nevezik.

Az I. törvény tehát azt fogalmazza meg, hogy

- ◆ inerciarendszerek léteznek, és
- ◆ a többi Newton-törvények – eredeti formájukban – inerciarendszerekben érvényesek.

A fentiek alapján az inerciarendszer kiválasztásának módszere elvileg abban áll, hogy megfigyelünk egy *magára hagyott* testet, és megnézzük, hogy gyorsul-e vagy nem. A dolog, sajnos nem ilyen egyszerű, ugyanis nem könnyű azt megállapítani, hogy a megfigyelt testre valóban nem hat semmilyen erő.

A Föld szigorúan véve nem inerciarendszer (forog és kering, tehát bármely pontjának gyorsulása van), de különleges pontosságot igénylő esetektől eltekintve, közelítőleg annak tekinthető.

## Erő- és tömegdefiníció a külső hatás mozgásállapot-változtató képessége alapján

A külső hatás másik – könnyen észlelhető – eredménye az, hogy megváltoztatja a testek mozgásállapotát (azaz gyorsulást okoz). Ennek felhasználásával a tömeg definícióját lehet egyszerűbben megadni.

### *A tehetetlen tömeg bevezetése*

Mozgásállapot-változás alapján a tömeg (és az erő) definíciója úgy történhet, hogy egymással kölcsönhatásban álló két testnek a kölcsönhatás által okozott sebességváltozását ( $\Delta \mathbf{v}_1$  és  $\Delta \mathbf{v}_2$ ) mérjük meg különböző esetekben.

A mérésekből kiderül, hogy a két test sebességváltozása mindig ellenkező irányú, a változások nagyságának aránya pedig ugyanazon két test esetén mindig ugyanakkora, függetlenül a két test kezdeti sebességétől.

$$\Delta \mathbf{v}_1 = -K_{21} \Delta \mathbf{v}_2, \quad \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{\Delta v'_1}{\Delta v'_2} = \dots = K_{21} = \text{állandó}.$$

Az ütközésben a tapasztalat szerint mindig a "kisebb" ill. "könnyebb" test sebességváltozása nagyobb, ennek megfelelően a sebességváltozás-arány nő, ha a 2 test méretét növeljük (pl. ütköző kocsik esetén a kocsihoz rakott test mellé további

testeket helyezünk), és csökken, ha az  $I$  test méretét növeljük. Durván szólva: a  $K_{21}$  mennyiség arányos a 2 és 1 testek "anyagmennyiségének" hányadosával. Ennek alapján bevezethetünk egy mennyiséget, ami az egyes testeknek az ütközésben tanúsított viselkedését jellemzi. Ezt a mennyiséget a testek tehetetlen tömegének nevezzük,  $m$ -mel jelöljük, és úgy definiáljuk, hogy a két kölcsönható test tömegének hányadosa az ütközésben meghatározható  $K_{21}$  mennyiséggel egyenlő:

$$K_{21} = \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Az ütközéses kísérlet alapján tehát csak a két kölcsönható test tömegének arányát tudjuk definiálni. Ahhoz, hogy egy test tömegét meghatározzuk, választani kell egy testet, amelynek tömegét önkényesen egységnyinek tekintjük:  $m_0 = I$  tömegegység.

Az ismeretlen tömegű testet ezzel a testtel ütköztetve, megmérjük a  $K = \frac{\Delta v_0}{\Delta v}$

mennyiséget, és ebből az ismeretlen tömeg a  $K = \frac{m}{m_0}$  összefüggés alapján:

$$m = K m_0 = K \text{ tömegegység}.$$

#### ***A lendület és az erő bevezetése, a Newton-törvények származtatása***

A tömeg bevezetése után az ütközésre vonatkozó tapasztalatainkat az

$$m_1 \Delta \mathbf{v}_1 = -m_2 \Delta \mathbf{v}_2,$$

$$m_1 (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1) = -m_2 (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2)$$

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$$

összefüggésekkel írhatjuk le, ahol a vesszőtlen sebességek az ütközés előtti, a vesszős sebességek az ütközés utáni sebességeket jelentik. Az utolsó összefüggés az  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  mennyiség megmaradásának tételét fejezi ki. Ezt a mennyiséget nevezzük most is *lendületnek*.

Az ütközési kísérletben két kölcsönhatásban álló test mozgását vizsgáltuk. Gyakran azonban csak a kölcsönható testek egyikének mozgása érdekel bennünket, ezért felmerül a kérdés, hogyan lehet egy test mozgásállapot-változását meghatározni úgy, hogy a másik test jelenlétét külső (erő)hatásnak tekintjük. Ehhez először azt kell tisztázni, hogy milyen összefüggés van a test mozgásállapot-változása és a hétköznapi értelemben rá gyakorolt erő között.

Ha egy vízszintes terepen lassan felénk gördülő kocsit meg akarunk állítani, és nem számít, hogy ezt mennyi idő alatt tesszük meg, akkor a célt viszonylag kis erőfeszítés árán elérhetjük, ha a kocsival együtt hátrálva hosszabb idő alatt lassítjuk le. Ha azonban a megállításra csak rövid idő áll rendelkezésre (pl. a kocsit vérszesen közeledik a falhoz), akkor a megállítást nagy erőfeszítést kíván. Másrészt az erőkifejtés mindkét esetben függ attól is, hogy mekkora a megállítandó kocsi tömege (kis tömegnél nyilván kisebb a szükséges erőfeszítés). Vagyis a mozgásállapot-változtatáshoz szükséges erőfeszítést egyrészt a lendületváltoztatás nagysága, másrészt a változtatásra fordított idő szabja meg. Az erőfeszítés nagysága a tapasztalat szerint arányos a

lendületváltoztatással és fordítva arányos a változtatás idejével, vagyis a  $\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$

hányadossal jellemezhető.

Ha egy  $m$  és egy  $M$  tömegű tömegpont kölcsönhatását vizsgáljuk, akkor a fentiek alapján a kölcsönhatás során fennáll a

$$\Delta(m\mathbf{v}_m) = -\Delta(M\mathbf{v}_M)$$

összefüggés. Az egyenletet  $\Delta t$ -vel osztva, majd végtelenül kicsi időtartamra áttérve, a

$$\frac{d(m\mathbf{v}_m)}{dt} = -\frac{d(M\mathbf{v}_M)}{dt},$$

illetve

$$\frac{d(\mathbf{p}_m)}{dt} = -\frac{d(\mathbf{p}_M)}{dt}$$

összefüggést kapjuk. Ez azt jelenti, hogy az  $m$  tömeg lendületváltozásának sebessége, ami a változáshoz szükséges "erőfeszítést" adja meg, kifejezhető a  $M$  tömeg adataival. Ezek alapján az  $m$  tömegre ható  $\mathbf{F}_m$  erőt úgy definiálhatjuk, hogy

$$\mathbf{F}_m = -\frac{d\mathbf{p}_M}{dt}.$$

Az erőnek ezt a definícióját használva, az  $m$  tömegre felírhatjuk az

$$\mathbf{F}_m = \frac{d\mathbf{p}_m}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_m}{dt} = m\mathbf{a}_m$$

összefüggést, ami azt fejezi ki, hogy a tömegpontra ható erő arányos a tömegpont gyorsulásával. Ez *Newton II. törvénye*.

Mivel két test kölcsönhatására a fentiek szerint mindig érvényes, hogy

$$\frac{d(\mathbf{p}_1)}{dt} = -\frac{d(\mathbf{p}_2)}{dt},$$

az erő fenti definíciója alapján teljesül a

$$-\mathbf{F}_{21} = \frac{d(\mathbf{p}_1)}{dt} = -\frac{d(\mathbf{p}_2)}{dt} = \mathbf{F}_{12}$$

összefüggés, ami *Newton III. törvénye*.

Ha egy  $m$  tömegű tömegponttal egyidejűleg több tömegpont ( $m_1, m_2, m_3, \dots$ ) áll kölcsönhatásban, akkor a tapasztalat szerint az egyes kölcsönhatásokra továbbra is érvényesek a két tömegpont kölcsönhatására vonatkozó korábbi megállapításaink, vagyis *a kölcsönhatások egymást nem befolyásolják*. Ha az egyes kölcsönhatásokra vonatkozó  $m(\Delta\mathbf{v})_i = -\Delta(m_i\mathbf{v}_i)$  egyenleteket összeadjuk, akkor megkapjuk a  $m$  tömegpont teljes sebességváltozására vonatkozó összefüggést:

$$m\Delta\mathbf{v} = -\sum_i \Delta(m_i\mathbf{v}_i).$$

Itt  $(\Delta\mathbf{v})_i$  a  $m$  tömegnek az  $i$ -edik tömeggel való kölcsönhatásából származó sebességváltozása, a teljes sebességváltozás pedig ezek vektori összege:  $\Delta\mathbf{v} = \sum_i (\Delta\mathbf{v})_i$ . A fenti egyenletet  $\Delta t$ -vel osztva, majd végtelenül kicsi időtartamra áttérve, az

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \sum_i \left( -\frac{d(m_i\mathbf{v}_i)}{dt} \right) = \sum_i \mathbf{F}_i$$

egyenletet kapjuk, ahol  $\mathbf{F}_i$  az  $i$ -edik tömeg által a  $m$  tömegre kifejtett erő. Vagyis a  $m$  tömegpont mozgására Newton II. törvényét ilyenkor a tömegpontra ható erők vektori összegével kell felírni, ami *Newton IV. törvénye*.

## A mozgásegyenlet és alkalmazásai

Newton II. törvénye összefüggést ad a tömegpontra ható erők és a tömegpont gyorsulása között. Mivel ez az összefüggés teszi lehetővé a mozgás leírását, *mozgásegyenletnek* is nevezik. A mozgásegyenletet két célra használhatjuk fel.

A legkézenfekvőbb és leggyakoribb felhasználás az, hogy a tömegpontra ható erő(k) ismeretében a mozgásegyenlet segítségével meghatározzuk a mozgó pont helyvektorának időfüggését, vagyis matematikailag leírjuk a mozgást.

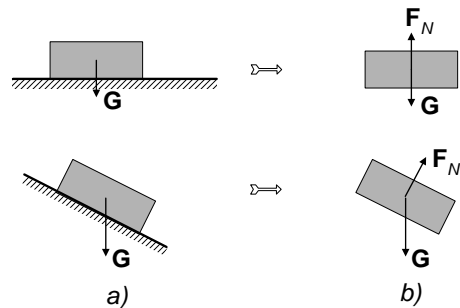
A mozgásegyenlet egy másik lehetséges felhasználása az, hogy ismert mozgáshoz meghatározzuk azt az erőt, amely az adott mozgást létrehozza.

### Az erőhatások legfontosabb típusai

Ahhoz, hogy a mozgásegyenletet megoldjuk, ismernünk kell a tömegpontra ható erőket. Most röviden foglalkozunk néhány fontos erőtypussal, amelyeket a klasszikus fizikai mozgásproblémák megoldásánál gyakran használnak.

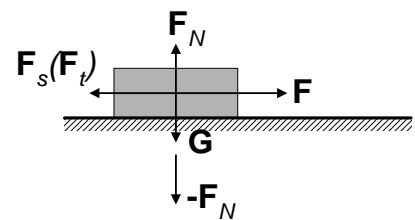
#### Kényszererő

Az erőknek egy sajátos, konkrét kölcsönhatási típustól független – és gyakran előforduló – fajtája lép fel akkor, ha egy test mozgását valamilyen külső kényszerítő körülmény korlátozza. Ez történik például akkor, amikor egy testet valamilyen külső hatás olyan felülethez nyom, amelyen nem tud áthatolni. A gyakorlatban előforduló ilyen eset, hogy a testre a nehézségi erő hat, és mozgását egy vízszintes sík felület vagy egy lejtő jelenléte korlátozza. Az ilyen felület megakadályozza, hogy a test a felület alá kerüljön, vagyis a test nem mozdulhat el a síkra merőlegesen lefelé (a) ábra). Az ilyen mozgást korlátozó külső feltételeket *kényszereknek* nevezzük. A kényszer működését az említett esetekben úgy foghatjuk fel, hogy a testre egy  $F_N$  „tartó erő” lép fel, amit *kényszererőnek* nevezünk. A test mozgását ilyenkor úgy írhatjuk le, hogy a kényszer (az áthatolhatatlan sík) hatását a mozgásegyenletben az  $F_N$  kényszererővel vesszük figyelembe (b) ábra).



#### Súrlódási erő

Ha egy kényszernek kitett testre a kényszerfeltétel által megengedett elmozdulás irányában ható erő is működik, akkor fellép egy sajátos fékező erő, az ún. *súrlódási erő*. Ennek közismert példája az az eset, amikor a vizsgált testet egy külső hatás egy felülethez nyomja (pl. az ábrán a  $G$  nehézségi erő), és működik a felülettel párhuzamos erő ( $F$ ) is. Ilyenkor a felület egy az elmozdulást fékező, súrlódási erőt fejt ki. Kis erőnél a test odatapad a felülethez, és nem mozdul el, mert egy ún. *tapadási erő* ( $F_t$ ) kompenzálja a külső erőt (*tapadási súrlódás*). A tapadási erőnek azonban van egy – az érintkező felületek minőségétől függő – maximális értéke ( $F_t^{max}$ ), ezért ha ennél nagyobb erőt fejtünk ki, akkor a test csúszni kezd. A csúszás közben fellép egy állandó fékező erő, az ún. *csúszási súrlódási erő* ( $F_s$ ), amely mindig a mozgásiránnyal ellentétes (*csúszási súrlódás*).



A tapadási erő maximális értéke és a csúszási súrlódási erő is közelítőleg arányos a testet a felülethez nyomó erővel ( $F_N$ ).

Az álló test esetén fellépő maximális tapadási erőt az

$$F_t^{max} = \mu_t F_N,$$

a mozgó test esetén fellépő csúszási súrlódási erőt pedig az



$$\mathbf{F}_s = \mu \mathbf{F}_N$$

alakban írhatjuk fel, ahol  $\mu_t$  illetve  $\mu$  a felületek minőségétől függő szám, az ún. *tapadási-* illetve *csúszási súrlódási együttható*. A tapasztalat szerint  $\mu_t > \mu$ , vagyis a tapadási erő maximális értéke mindig nagyobb, mint a csúszási súrlódási erő.

### *Gravitációs kölcsönhatás, a súlyos tömeg*

A tapasztalat szerint bármely két test között fellép egy olyan kölcsönhatás, amelynél a testekre ható erő – azonos anyagú és állapotú testeket feltételezve – a kölcsönható testek térfogatával arányos. Ezt a kölcsönhatást *gravitációs kölcsönhatásnak* nevezik. A Földön egy test súlyát a Föld és a test között fellépő gravitációs kölcsönhatás okozza.

Ha a két test kölcsönhatást okozó anyagi tulajdonságát  $m_{s1}$ -gyel illetve  $m_{s2}$ -vel jelöljük, akkor két pontszerűnek tekinthető (azaz a távolságukhoz képest elhanyagolható méretű) test között fellépő erő nagyságát a Newton által megállapított törvény szerint az

$$F_g = \gamma \frac{m_{s1} m_{s2}}{r^2}$$

összefüggés adja meg, ahol  $r$  a két pontszerű test távolsága. Az erő vonzó, és a két testet összekötő egyenes mentén hat. Az  $m_s$  tulajdonságot a kölcsönható test *súlyos tömegének* nevezik. Az összefüggésben két ismeretlen mennyiség van: az  $m_s$  súlyos tömeg és a  $\gamma$  arányossági tényező, az ún. *gravitációs állandó*. A törvény igaznak bizonyult nem pontszerű, de *gömb alakú* testekre is, ha távolságukat a centrumuk távolságával azonosnak tekintjük.

Ha önkényesen definiáljuk, hogy mennyi az  $m_s$  súlyos tömeg egysége (pl. azt mondjuk, hogy *1 liter* víz súlyos tömegét tekintjük egységnyinek), és ezt az egységet *1 kg*-nak nevezzük, akkor az egységnyi tömegek között meghatározott távolságban fellépő erőt megmérve, kiszámítható a  $\gamma$  arányossági tényező egysége és nagysága (ezt a mérést először Cavendish<sup>1</sup> végezte el). A jelenleg használt *kg*-definíció esetén a mérések szerint  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$ .

A tapasztalat szerint a Föld felszínéhez közel a testekre ható gravitációs erő jó közelítéssel  $F_g \approx G = mg$  alakban adható meg, ahol  $g$  egy adott helyen minden testre ugyanaz az érték. (Megjegyezzük, hogy egy test adott helyen mért súlya nem pontosan a gravitációs erővel egyenlő, mert a Föld forgása miatt fellépő ún. centrifugális erő ezt kissé módosítja. Ezzel később foglalkozunk.)

\*\*\*\*\*

Az  $F_g \approx G = mg$  összefüggés a gravitációs törvénnyel összhangban van. A Föld ( $M$ ) és a test ( $m$ ) között fellépő erő a gravitációs törvény alapján (a Földet gömbnek tekintve, és a tömegét a középpontban elképzelve)

$$F_g = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2},$$

ahol  $R$  a Föld sugara,  $h$  a testnek a Föld felszínétől mért magassága. Ha a test a felszín közelében van, akkor  $R+h \approx R$ , tehát a gravitációs erő az

$$F_g = \gamma \frac{M}{R^2} m$$

<sup>1</sup> Henry CAVENDISH (1731-1810) angol fizikus, kémikus, csillagász

alakba írható. A  $g$  mennyiséget ezek szerint közelítőleg a  $g \approx \gamma \frac{M}{R^2}$  összefüggés adja meg, ami csak a Föld adataitól és a gravitációs állandótól függ (az adatok behelyettesítésével  $9,81 \text{ m/s}^2$  értéket kapunk).

\*\*\*\*\*

A testekre ható erő ( $F$ ) a testeket gyorsítja ( $a$ ), és ennek alapján bevezettük a tehetetlen tömeget az  $m_t = \frac{F}{a}$  összefüggéssel. Ez a tömeg adott anyagú test esetén szintén a térfogattal arányosnak mutatkozik. Felmerül a kérdés, hogy a két teljesen különböző módon bevezetett tömeg azonos vagy különböző.

A közelítő vizsgálat alapján a két tömeg azonosnak látszik, ugyanis a tapasztalat szerint a Földön a gravitációs erő által gyorsított test gyorsulása ( $a_g$ ) nem függ a test anyagától és méretétől, és ugyanaz a  $g$  érték, mint amit a testre ható gravitációs erő méréséből kapunk:

$$F_g = m_s g \quad \text{illetve} \quad F_g = m_t a_g \approx m_t g.$$

Ennek megfelelően

$$m_s g \approx m_t g \quad \Rightarrow \quad \frac{m_s}{m_t} \approx 1.$$

A kérdés azonban elvi jelentőségű, ezért pontos vizsgálatnak is alávetették. Az első komoly mérést ezzel kapcsolatban Eötvös Loránd<sup>1</sup> végezte el, és nagy pontossággal megállapította a súlyos és tehetetlen tömeg azonosságát: a kétféle tömeg hányadosa a mérési hiba figyelembe vételével csak a 9-edik tizedes jegyben térhet el az 1-től.

#### *Elektrosztatikus kölcsönhatás*

Egymáshoz képest nyugalomban lévő, elektromosan töltött testek között a töltésük miatt fellép egy ún. *elektrosztatikus kölcsönhatás*, amelynek eredményeként a két test között vonzó vagy taszító erő lép fel, attól függően, hogy töltésük ellentétes- vagy azonos előjelű. A Coulomb<sup>2</sup> által megállapított törvény szerint két pontszerűnek tekinthető töltés között fellépő erő nagysága:

$$F_{\text{elszt}} = K_e \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

ahol  $Q_1$  és  $Q_2$  a töltések nagysága,  $K_e$  a töltés egységétől függő állandó,  $r$  pedig a töltések közötti távolság. A törvény formailag megegyezik a gravitációs kölcsönhatást leíró törvénnyel, ezért a kétféle kölcsönhatás között számos analógia áll fenn. A töltés jelenleg használatos egysége ( $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$ ) esetén az állandó  $K_e = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$ .

#### *A mozgás leírása az erő ismeretében*

Ha ismerjük a tömegpontra ható erőket, akkor a mozgásegyenlet segítségével meghatározhatjuk a tömegpont gyorsulását:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}_{\text{eredő}}(t)}{m}.$$

A gyorsulásból a korábban megismert módon kiszámíthatjuk a tömegpont sebességének és helyvektorának időfüggését

$$\mathbf{a}(t) \xrightarrow{\text{integrálás}} \mathbf{v}(t) \xrightarrow{\text{integrálás}} \mathbf{r}(t)$$

<sup>1</sup> EÖTVÖS Loránd (1848-1919) magyar fizikus

<sup>2</sup> Charles Auguste COULOMB (1736-1806) francia fizikus, hadmérnök

Ezt az eljárást a *mozgásegyenlet megoldásának* vagy a mozgásegyenlet *integrálásának* nevezzük, aminek során – ha ismerjük a kezdeti feltételeket – eljutunk a mozgás teljes leírásához.

Példaként vizsgáljunk meg, néhány mozgást, amelyet ismert erőhatás okoz. Ezekben az esetekben a valóságban többnyire nem pontszerű testek mozgásáról van szó. Később látni fogjuk, hogy bizonyos esetekben (haladó mozgás) a kiterjedt testek mozgása is leírható a tömegpontra vonatkozó összefüggésekkel. Az alábbiakban mindig azt tételezzük fel, hogy ez az egyszerűsítés alkalmazható.

#### Mozgás állandó erő hatására

Ilyenkor  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F} = \text{állandó}$ , tehát  $\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}(t)}{m} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{a} = \text{állandó}$ , amiből a sebesség és a helyvektor időfüggése a már ismert módon kapható meg. Ilyen erő lép fel a Föld felszínéhez közeli testekre, amely függőlegesen lefelé hat, és nagysága  $G = mg$ .

#### Mozgás súrlódással

A csúszó testek mozgását a fentiek alapján egyszerűen leírhatjuk. Mivel a csúszási súrlódási erő mindig a testnek a felülethez viszonyított sebességével ellentétes irányú, az  $x$ -tengely mentén súrlódva mozgó,  $m$  tömegű test mozgásegyenlete  $F_N$  nagyságú nyomóerő esetén

$$F_x = F - \mu F_N = ma_x.$$

Itt  $F$  a testre ható  $x$ -irányú állandó erő (ábra). Eszerint

$$a_x = \frac{F - \mu F_N}{m} = \text{állandó},$$

amiből a sebesség és a helykoordináta időfüggése a már ismert módon megkapható.

Az  $F_N$  erőt mindig a konkrét körülmények határozzák meg. Gyakori eset, hogy érintkezési felületre merőleges komponense csak a nehézségi erőnek van, ilyenkor a nyomóerő éppen ez a komponens lesz. Vízszintes érintkezési síknál (ábra) ezért  $F_N = mg$ , így a gyorsulás:

$$a_x = \frac{F}{m} - \mu g.$$

Lejtőn mozgó test esetén a helyzet annyival bonyolultabb, hogy ekkor a felületeket összenyomó erő nagysága nem azonos a nehézségi erővel (ábra). A test  $y$ -irányban nem mozog, tehát az  $\mathbf{F}_e$  eredő erő  $y$ -komponensére a mozgásegyenlet alapján fennáll, hogy

$$F_{ey} = F_N - G_N = ma_y = 0,$$

így

$$F_N = G_N = G \cos \alpha = mg \cos \alpha.$$

A mozgásegyenlet  $x$ -komponense pedig

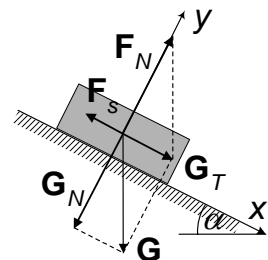
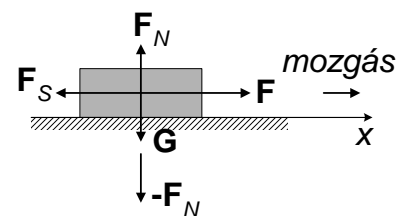
$$F_{ex} = G_T - F_s = ma_x$$

vagyis

$$mg \sin \alpha - F_s = ma_x.$$

Figyelembe véve a súrlódási erőre vonatkozó összefüggést és a nyomóerőre kapott kifejezést, a gyorsulás  $x$ -komponense

$$a_x = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$



*Mozgás közegellenállással*

Vizsgáljuk meg most azt, hogy egy levegőben közegellenállással mozgó, szabadon eső test sebessége hogyan változik az időben.

A közegellenállás nem túl nagy sebességeknél arányos a test sebességével és azzal ellentétes irányú:

$$\mathbf{F}_{ke} = -k\mathbf{v}.$$

A mozgás függőleges egyenes mentén zajlik, így a koordinátarendszerünk z-tengelyét függőlegesen lefelé irányítva a mozgásegyenlet:

$$ma_z = mg - kv_z.$$

Az egyenletből világosan látszik, hogy a test sebessége nem érhet el akármekkora értéket, hiszen egy idő után a növekvő sebesség miatt a fékező erő nagysága eléri az állandó nehézségi erő értékét. Ekkor az eredő erő nulla lesz, a test nem gyorsul tovább:  $a_z = 0$ . Ekkor a mozgásegyenlet a  $0 = mg - kv_z$  alakot ölti, amiből az állandósult

sebesség megkapható:  $v_z^{all} = \frac{mg}{k}$ . (Ez a probléma ún. aszimptotikus megoldása.)

\*\*\*\*\*

A mozgásegyenlet megoldásával természetesen nem csak a végsebesség, hanem a sebesség (illetve a z-koordináta) időfüggése is megkapható. Ehhez írjuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$m \frac{dv_z}{dt} = mg - kv_z,$$

$$\frac{dv_z}{dt} = g - \frac{k}{m} v_z,$$

$$\frac{dv_z}{g - \frac{k}{m} v_z} = dt.$$

Ez az egyenlet (ami egy ún. szétválasztható differenciálegyenlet) a két oldal integrálásával könnyen megoldható. Szabadesést feltételezve ( $v_0 = 0$ ), a végeredmény:

$$v_z(t) = \frac{mg}{k} \left( 1 - \exp\left\{-\frac{k}{m}t\right\} \right).$$

A sebesség a  $t \gg \frac{m}{k}$  esetben egy állandósult  $v_z(\infty) = \frac{mg}{k}$  értékhez tart.

\*\*\*\*\*

*Mozgás gravitációs erő hatása alatt*

A gravitációs kölcsönhatás ismeretében leírhatjuk egy tömegnek ( $m$ ) egy másik tömeg ( $M$ ) jelenlétében történő mozgását. Ennek tipikus példája a bolygók Nap körüli mozgása. Mivel a Nap tömege ( $M$ ) sokkal nagyobb, mint a bolygóé ( $m$ ), a probléma úgy tárgyalható, mintha a Nap nem mozogna. Ekkor a bolygó Naphoz viszonyított helyét megadó  $\mathbf{r}$  helyvektorra felírható az

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

mozgásegyenlet, amelyből a bolygó pályája, keringési ideje és a Kepler által megállapított törvényszerűségek levezethetők (itt  $\frac{\mathbf{r}}{r}$  a Naptól a bolygó felé mutató egységvektor).

A Föld felszínéhez közel a gravitációs erő függőlegesen lefelé ható, állandó erő, amelynek nagyságát közelítőleg az ismert,  $G=mg$  összefüggés adja meg. A mozgásegyenlet ilyenkor

$$m\mathbf{a} = \mathbf{G}.$$

Ha a koordinátarendszert úgy választjuk meg, hogy a  $z$ -tengely függőlegesen lefelé mutat, akkor az egyenletben szereplő erő-vektor komponensei:  $\mathbf{G}(0,0,mg)$ . Így a gyorsulásra az  $\mathbf{a}(0,0,g)$  eredmény adódik, amiből – a kezdősebesség ismeretében – a már tárgyalt hajítások egyenleteit kapjuk.

### ***Ismert mozgást létrehozó erő meghatározása a mozgásegyenlet alapján***

Előfordul, hogy a mozgást magát már ismerjük (pl. állandó gyorsulású mozgás, körmozgás, rezgőmozgás), és kíváncsiak vagyunk, hogy ilyen mozgás létrehozásához milyen erőre van szükség.

#### *Állandó gyorsulású mozgás*

Ha a gyorsulás állandó, akkor az  $\mathbf{F}_e = m\mathbf{a}$  mozgásegyenlet alapján az eredő erőnek is időben állandónak kell lennie, vagyis ilyen mozgást  $\mathbf{F}_e = \text{állandó}$  erő hoz létre.

#### *Körmozgás*

A körmozgás esetén a pálya egy adott helyén egy érintő irányú  $\mathbf{a}_T = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T$  és egy centrum felé mutató  $\mathbf{a}_N = r\omega^2 \mathbf{u}_N$  gyorsuláskomponens lép fel. Gyorsuló körmozgás létrehozásához tehát a tömegpontra az adott helyen egy érintő irányú  $\mathbf{F}_T = m\mathbf{a}_T = m \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T$  és egy centrum felé mutató  $\mathbf{F}_N = m\mathbf{a}_N = mr\omega^2 \mathbf{u}_N$  erőkomponens szükséges. Utóbbi, a körpálya középpontja felé mutató erőt *centripetális erőnek* ( $\mathbf{F}_{cp}$ ) nevezik. Ennek nagysága  $F_{cp} = F_N = mr\omega^2 = m \frac{v^2}{r}$ . Ha a sebesség nagysága nem változik (egyenletes körmozgás), akkor a körmozgás egyedül az állandó nagyságú (de változó irányú!) centripetális erő hatására alakul ki. Ez az az erő, amely a körpályán való haladáshoz szükséges irányváltást létrehozza.

#### *Harmonikus rezgőmozgás*

Egy egyenes (pl. az  $x$ -tengely) mentén harmonikus rezgőmozgást végző tömegpontnál a helyvektor időfüggése definíció szerint:  $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ , amiből a gyorsulásra azt kapjuk, hogy  $a_x = -\omega^2 x$ . A mozgásegyenlet alapján tehát ilyen mozgást  $F_x = ma_x = -m\omega^2 x = -Dx$  alakú erő hoz létre (itt bevezettük a  $D = m\omega^2$  jelölést). Ez az erő a kitéréssel arányos és mindig azzal ellentétes irányú (tehát az egyensúlyi helyzet felé mutat).

### **Mozgásleírás különböző vonatkoztatási rendszerekből**

Egy test mozgásának leírása általában úgy történik, hogy annak mindenkori helyzetét egy többé-kevésbé önkényesen választott testhez, egy ún. *vonatkoztatási rendszerhez* viszonyítva adjuk meg. A helyzet meghatározásához általában a vonatkoztatási rendszer egy pontjához rögzített *koordinátarendszert* veszünk fel, és a test mozgását jellemző adatokat ebben a koordinátarendszerben adjuk meg.

Könnyen belátható, hogy ha ugyanazt a testet két különböző, egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerből figyeljük meg, akkor a mozgását jellemző *adatok* egy részét (pl. helyzetvektor, sebesség, lendület, energia) eltérőnek találjuk. Felmerül a kérdés, hogy az adatok közötti összefüggéseket megadó *fizikai törvények* is különbözőek-e a különböző vonatkoztatási rendszerekben. Leegyszerűsítve: a kérdés az, hogy használhatja-e a robogó vonaton utazó megfigyelő ugyanazokat a fizikai törvényeket, amelyeket a Földhöz képest nyugvó laboratóriumban érvényesnek talált.

A kérdés vizsgálatát érdemes két részre bontani: először az egyszerűbb esetet nézzük meg, amikor egymáshoz képest (állandó sebességgel) mozgó *inerciarendszerekkel* foglalkozunk, majd ezután térünk át egymáshoz képest *gyorsuló rendszerek* tárgyalására.

### **Mozgásleírás egymáshoz képest mozgó inerciarendszerekből**

Vizsgáljunk két olyan rendszert, amelyek egymáshoz képest állandó sebességgel mozognak, és mindkettőben érvényes a "tehetetlenség törvénye" (Newton I. axiómája), vagyis két inerciarendszerről van szó. Próbáljuk meg leírni ugyanannak a tömegpontnak a mozgását a két rendszerből nézve, és keressük meg a leírások közötti összefüggéseket.

Számos tapasztalat sugallja azt, hogy a különböző inerciarendszerekből nézve a mechanikai jelenségek ugyanúgy zajlanak le, és a különböző rendszerekben a mechanika törvényei azonos matematikai alakban érvényesek (természetesen csak akkor, ha adott rendszerben alkalmazva a törvényeket a bennük szereplő összes fizikai mennyiség helyébe ugyanabban a rendszerben mért adatokat helyettesítünk be). Ez a tapasztalatok alapján elfogadott alaptétel a *klasszikus mechanika relativitási elve*. A relativitás elvének fontos következménye, hogy az inerciarendszerek a mechanikai folyamatok leírása szempontjából egyenértékűek, vagyis mechanikai kísérletek segítségével nem lehet köztük különbséget tenni, így valamiféle "abszolút", kitéüntetett inerciarendszert sem lehet találni.

Ha egy test mozgását két egymáshoz képest mozgó  $K$  és  $K'$  inerciarendszerekből vizsgáljuk, akkor a test mozgását jellemző adatokra általában eltérő értékeket kapunk, de a két rendszerben mért adatok között összefüggések állnak fenn. Ezek az összefüggések a rendszerek egymáshoz viszonyított mozgása által meghatározott *koordináta-transzformációk* segítségével kaphatók meg, és ismeretükben egy fizikai törvényt átranszformálhatunk egyik rendszerből a másikba az alábbi módon.

A  $K$  rendszerben felírt fizikai törvényben szereplő fizikai mennyiségeket a transzformációs összefüggések segítségével kifejezzük a  $K'$  rendszer megfelelő mennyiségeivel, és így megkapjuk a kérdéses fizikai mennyiségek közötti összefüggést (a fizikai törvényt) a  $K'$  rendszerben. Ha ez az összefüggés matematikai alakját tekintve azonos a  $K$  rendszerben felírt összefüggéssel, akkor azt mondhatjuk, hogy *a transzformáció összhangban van a relativitás elvével*.

Ha a relativitás elvét, mint tapasztalati ténytet elfogadjuk, akkor csak vele összhangban álló transzformációt használhatunk. Elvileg elképzelhető, hogy olyan – fizikailag indokolható – transzformációt fogadunk el, amely nincs összhangban a relativitás elvével (a törvények

alakja a transzformációnál megváltozik), ekkor azonban nem tarthatjuk fenn a relativitás elvét.

Nézzük meg most, hogy a klasszikus mechanikában használt ún. *Galilei<sup>1</sup>-féle transzformáció* összhangban van-e a mechanikában elfogadott relativitási elvvel.

### ***A Galilei-transzformáció és a relativitás elve a klasszikus mechanikában***

A Galilei-transzformáció összefüggései a hétköznapi szemléleten alapulnak, és az alábbi egyszerű megfontolásokkal kaphatók. Az ábra  $P$  pontjában lévő tömegpont mindenkor helyzetét a  $K$  koordináta-rendszerből a mindenkor  $\mathbf{r}(t)$ -, a  $K'$  rendszerből pedig a mindenkor  $\mathbf{r}'(t)$  helyvektorral adhatjuk meg ( $t$  az idő). Ha a két rendszer relatív helyzetét megadó vektor  $\mathbf{r}_{K'}(t)$ , akkor a két rendszerben érvényes helyvektorok kapcsolata

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}_{K'}(t).$$

Ha a  $K'$  rendszer a  $K$  hoz képest állandó  $\mathbf{w}$  sebességgel mozog (inerciarendszerekről van szó), akkor

$$\mathbf{r}_{K'}(t) = \mathbf{w}t + \mathbf{r}_0,$$

ahol  $\mathbf{r}_0$  a két rendszer origójának relatív helyzetét megadó vektor a  $t=0$  időpillanatban. Ezzel a fenti kifejezés így alakul

$$\mathbf{r}_{K'}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{w}t + \mathbf{r}_0,$$

ami a koordinátákkal kifejezve

$$x = x' + w_x t + x_0$$

$$y = y' + w_y t + y_0$$

$$z = z' + w_z t + z_0$$

$$t' = t.$$

Ez a klasszikus mechanika *Galilei-féle transzformációja*.

A fenti gondolatmenet fontos mozzanata, hogy az időt nem transzformáltuk, azaz természetesnek vettük, hogy a két rendszerben az idő azonos:

$$t' = t.$$

A sebességek közötti összefüggés a helyvektorok kapcsolatát megadó egyenlet idő szerinti differenciálásával kapható

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}'(t) + \mathbf{w},$$

ahol  $\mathbf{v}$  a vizsgált tömegpont  $K$  rendszerbeli sebessége,  $\mathbf{v}'$  annak  $K'$  rendszerbeli sebessége. Komponensekkel kifejezve:

$$v_x = v'_x + w_x$$

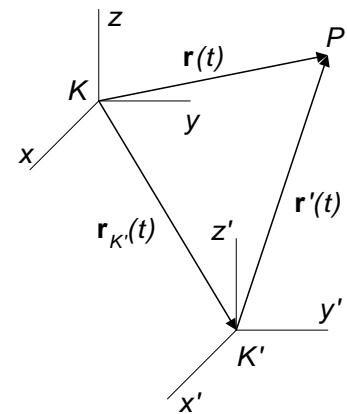
$$v_y = v'_y + w_y$$

$$v_z = v'_z + w_z.$$

Vagyis a hétköznapi tapasztalattal egyezésben azt kapjuk, hogy ugyanazon test sebességét egymáshoz képest mozgó megfigyelők különbözőnek találják.

A gyorsulások összefüggését a sebességre vonatkozó egyenlet idő szerinti differenciálásával kapjuk:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t).$$



<sup>1</sup> Galileo GALILEI (1564-1642) olasz fizikus, matematikus, csillagász

A különböző inerciarendszerekből mért gyorsulások tehát azonosnak adódnak. Ez azt jelenti, hogy egy inerciarendszerhez képest egyenletesen mozgó rendszer szintén inerciarendszer.

Ezek után nézzük meg, hogy a Galilei-transzformáció összhangban van-e a relativitás elvével a mechanikai törvények esetében.

Először vizsgáljuk meg a tömegpontra vonatkozó közismert Newton-féle mozgástörvényt. A  $K$  rendszerben érvényes

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

törvényben szereplő mennyiségeket transzformáljuk át a  $K'$  rendszerbe.

A klasszikus fizikában feltételezett erő-törvények esetén egy tömegpontra ható erő csak annak a többi testhez viszonyított helyzetétől, azokhoz viszonyított relatív sebességétől és az időtől függhet. Mivel ezek a mennyiségek a fenti transzformáció szerint a két rendszerben azonosnak adódnak, így az erők is azonosak maradnak az egyik rendszerből a másikba való átmenetnél:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ . Másrészt láttuk, hogy  $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ . Ha viszont a testek közötti kölcsönhatások és a gyorsulás a két rendszerben azonos, akkor az  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{a}$  közötti arányosság is érvényben marad, és a tömeg is azonos. Ez azt jelenti, hogy a mozgástörvénynek a  $K'$  rendszerbe áttranszformált alakja

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}',$$

ami azonos a  $K$ -beli alakkal (ráadásul itt maguk a mennyiségek is azonosak maradnak).

Minthogy a mechanika törvényei lényegében a kölcsönhatás törvényéből és a dinamika alapegyenletéből származtathatók, általánosan is kijelenthető, hogy a Galilei-transzformáció a mechanika törvényeit változatlanul hagyja egyik inerciarendszerből a másikba történő transzformáció során. Másként fogalmazva ez azt jelenti, hogy a Galilei-transzformáció a klasszikus mechanikában összhangban van a relativitás elvével.

Nem bizonyításként, csupán szemléltető példaként nézzük meg, hogyan teljesül ez az állítás a mechanika egy másik alapvető törvénye az lendület-megmaradási törvény esetén.

Vizsgáljunk két tömegpontot, amelyek mozgásuk során kölcsönhatásba lépnek, pl. ütköznek egymással. A testek tömege  $m$  és  $M$ , ütközés előtti sebességeik egy  $K$  rendszerben  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{V}$ , ütközés utáni sebességeik ugyanezt  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{U}$ . A  $K$  hoz képest  $\mathbf{w}$  sebességgel mozgó  $K'$  rendszerben jelöljük ugyanezeket a sebességeket  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{U}'$  -vel. Tegyük fel, hogy a lendület-megmaradás tétele alkalmazható a folyamatra és írjuk fel azt a  $K$  rendszerben:

$$m\mathbf{v} + M\mathbf{V} = m\mathbf{u} + M\mathbf{U}$$

Transzformáljuk át a sebességeket a Galilei-transzformáció segítségével a  $K'$  rendszerbe és írjuk be ebbe az egyenletbe. Ekkor az alábbi összefüggésre jutunk

$$m(\mathbf{v}' + \mathbf{w}) + M(\mathbf{V}' + \mathbf{w}) = m(\mathbf{u}' + \mathbf{w}) + M(\mathbf{U}' + \mathbf{w}),$$

amiből rendezés után kapjuk

$$m\mathbf{v}' + M\mathbf{V}' = m\mathbf{u}' + M\mathbf{U}'.$$

A transzformáció után tehát a lendület-megmaradás tételét a  $K'$  rendszerben valóban ugyanolyan alakban kaptuk meg, mint a  $K$  rendszerben.

Hasonló módon lehetne demonstrálni a Galilei-transzformációnak a relativitás elvével való összhangját más mechanikai törvények esetén is.



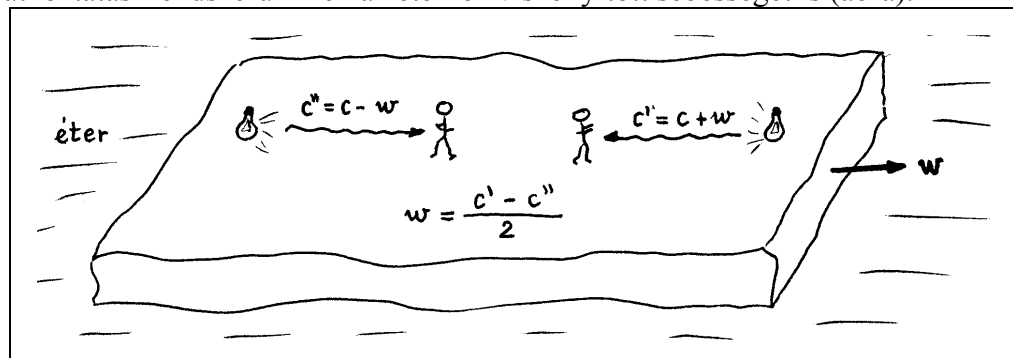
### *A Galilei transzformáció és a relativitás elve az elektromágnességtanban, a speciális relativitáselmélet alap gondolata*

Az elektromágnességtan alapegyenletei, a Maxwell<sup>1</sup>-egyenletek, a fizikának ugyanolyan alapvető törvényei, mint a Newton-törvények. E törvények kidolgozása idején a fizikai jelenségeket a mechanikai szemlélet alapján próbálták értelmezni, ezért semmi kétely nem merült fel abban a vonatkozásban, hogy a mennyiségeket és törvényeket a fizikának ezen a területén is a Galilei-transzformáció segítségével kell egyik rendszerből a másikba transzformálni. Úgy gondolták, hogy létezik egy sajátos közeg, az ún. *éter*, amely mindent kitölt, és az elektromágneses jelenségek ennek a közegnek a mechanikai jellegű állapotváltozásaival függnek össze. Természetesnek tűnt, hogy a Maxwell-egyenletek az éterhez rögzített koordináta-rendszerben érvényesek, és hogy a fény, mint elektromágneses hullám nem más, mint egy ebben a közegben keltett zavar tovaterjedése, ami teljesen analóg a mechanikai hullámokkal. Ennek megfelelően a fény terjedési sebességét is az éterhez viszonyított sebességnek tekintették.

A mechanikai hullám-analógia alapján az is természetesnek látszott, hogy az éterhez képest  $\mathbf{w}$  sebességgel mozgó rendszerben a fény terjedési sebességét a megfigyelő Galilei-transzformációnak megfelelő

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{w}$$

értékűnek találja ( $\mathbf{c}$  a fény terjedési sebessége az éterhez viszonyítva). Ebből viszont az következik, hogy az éterhez képest mozgó rendszerben a fény terjedési sebessége függ a fény haladási irányától. A legnagyobb sebességet akkor mérhetjük, ha a fény haladási iránya ellentétes a  $\mathbf{w}$  sebesség irányával (ekkor a sebesség nagysága  $c' = c + w$ ), a legkisebb érték viszont akkor adódik, ha a fényterjedés iránya megegyezik a  $\mathbf{w}$  sebességvektor irányával (ekkor a sebesség nagysága  $c'' = c - w$ ). Ha  $\mathbf{w}$  irányát fénysebesség-mérésekkel kísérletileg megkeressük, akkor elvileg meghatározhatjuk a vonatkoztatási rendszerünknek az éterhez viszonyított sebességét is (ábra).



A fenti gondolatmenet alapján a múlt század végén Michelson<sup>2</sup> és Morley<sup>3</sup> végzett el egy kísérletsorozatot abból a célból, hogy meghatározzák a Földnek az éterhez viszonyított sebességét (a  $\mathbf{w}$  sebességgel mozgó rendszer ekkor maga a Föld). A kísérlet kivitelezése (aminek részleteivel itt nem foglalkozunk) praktikus okokból más volt, mint a fenti gondolat-kísérleté, de elvét tekintve a két eljárás azonos.

A kísérlet végeredménye úgy foglalható össze, hogy a különböző irányban haladó fénysugaraknál a fényterjedési sebességek között nem sikerült különbséget kimutatni (így természetesen a  $\mathbf{w}$  sebesség meghatározása sem sikerült). Ezt az eredményt még lehetett volna úgy értelmezni, hogy a kísérlet idején a Föld az éterhez képest éppen

<sup>1</sup> James Clerk MAXWELL (1831-1879) skót fizikus és matematikus

<sup>2</sup> Albert Abraham MICHELSON (1852-1931) Nobel-díjas (1907) német származású amerikai fizikus

<sup>3</sup> Edward Williams MORLEY (1838-1923) amerikai kémikus, fizikus

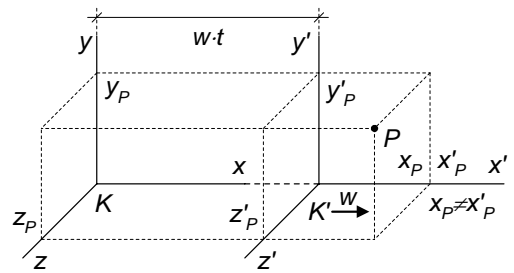
nyugalomban volt, de a kísérletet az év különböző időpontjaiban (azaz a Föld különböző haladási irányai esetén) megismételve ugyanezt az eredményt kapták.

Ez az eredmény azt a – klasszikus fizika alapján elképzelhetetlen – következtetést sugallta, hogy a fény bármely inerciarendszerben minden irányban ugyanolyan  $c$  sebességgel terjed. Ha ez így van, akkor viszont a fény terjedésére nem alkalmazható a Galilei-transzformáció, ami komoly problémákat sejtet az elektromágnesés tan törvényeit illetően. A fény ugyanis elektromágneses hullám, amelynek terjedését a Maxwell-egyenletek írják le. Ha terjedésére nem alkalmazható a Galilei-transzformáció, akkor várható, hogy ez a transzformáció az elektromágnesés tan törvényeit sem viszi át változatlan alakban egyik inerciarendszerből a másikba. A helyzet valóban ez, vagyis az *elektromágnesés tanban a Galilei-transzformáció nincs összhangban a relativitás elvével.*

### A Lorentz<sup>1</sup>-transzformáció

A Maxwell-egyenletek matematikai elemzésével természetesen megtalálható az a transzformáció, amely változatlan alakban viszi át azokat egyik rendszerből a másikba a  $c = c'$  tény figyelembevételével. Ezt a transzformációt Lorentz találta meg, és ma *Lorentz-transzformáció* néven ismerjük.

A Lorentz által megtalált transzformációs képleteket itt az egyszerűség kedvéért a két koordináta-rendszer speciális választása esetén adjuk meg (ábra). A speciális választás azt jelenti, hogy a két rendszer  $x$  tengelye közös, és a  $K'$  rendszer a  $K$  hoz képest  $w$  sebességgel mozog az  $x$  tengely mentén annak pozitív irányában, továbbá az időt mindkét rendszerben attól a pillanattól mérik, amikor a két origó ( $O$  és  $O'$ ) azonos helyen volt (ekkor  $t=t'=0$ ).



Először emlékeztetőül írjuk fel erre az esetre a Galilei-transzformációt:

$$x' = x - w t \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

Az elektromágnesés tan egyenleteit változatlanul hagyó – matematikai úton megtalált – Lorentz-transzformáció képletei ezzel szemben

$$x' = \frac{x - w t}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - \frac{w}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

A relativitás elvének teljesítése tehát megköveteli, hogy az időt is transzformáljuk, másrészt a térkoordináták közötti összefüggés a Galilei-transzformáció megfelelő összefüggésétől egy a  $w$  relatív sebességtől függő

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

faktorban különbözik.

Könnyen belátható (pl. a lendület-megmaradási törvényre való alkalmazás kapcsán), hogy a Lorentz-transzformáció a mechanika törvényeit nem viszi át változatlanul

<sup>1</sup> Hendrik Antoon LORENTZ (1853-1928) Nobel-díjas (1902) holland elméleti fizikus

egyik inerciarendszerből a másikba: vagyis ez a transzformáció a mechanikában nincs összhangban a relativitás elvével.

Az előzőekben vázolt helyzetet az alábbi táblázattal szemléltethetjük, ahol a fizika két nagy területén a két transzformációnak a relativitás elvéhez való viszonyát tüntettük fel (a "+" jel azt jelenti, hogy a transzformáció alkalmazása során a relativitás elve teljesül-, a "-" jel pedig azt, hogy nem teljesül).

	<b>GALILEI- transzformáció</b>	<b>LORENTZ- transzformáció</b>
<b><i>MECHANIKA</i></b>	+	-
<b><i>ELEKTROMÁGNESÉGTAN</i></b>	-	+

Ezek után elvileg az alábbi lehetőségek között választhatunk:

a) Beletörődünk abba, hogy a különböző jellegű fizikai folyamatokban (mechanikai, elektromágneses) ugyanazok a fizikai mennyiségek különbözőképpen transzformálódnak két rendszer között, ami lényegében azt jelenti, hogy általános formájában feladjuk a relativitás elvét.

b) Fenntartjuk a relativitás elvét, és elfogadjuk a józan észnek" megfelelő Galilei-transzformációt, de ekkor hibásnak kell minősítenünk a Maxwell-egyenleteket. Az elektromágneségtan törvényeit tehát úgy kell átalakítanunk, hogy azokat a Galilei-transzformáció változatlanul hagyja.

c) Fenntartjuk a relativitás elvét, és elfogadjuk a Lorentz-transzformációt, de ekkor a mechanika törvényeit kell elvetnünk, és úgy átalakítanunk, hogy a Lorentz-transzformáció változatlanul hagyja azokat.

Miután nincs olyan tapasztalat, amely arra utalna, hogy a relativitás elve ne lenne érvényes, az a) lehetőséget elvethetjük. A b) lehetőséget azért nem választhatjuk, mert ismerünk olyan jelenséget (fény terjedése), amelyre a Galilei-transzformáció nem érvényes. Így marad a c) lehetőség.

A század első éveiben ehhez a következtetéshez többen is eljutottak (Lorentz, Poincaré<sup>1</sup>, Einstein<sup>2</sup>), de Einstein volt az aki általános fizikai elmélet formájába öntötte a c) pontban megfogalmazott követelményeket. Ő vette észre, hogy a tapasztalati tényekkel egyező elmélet két alapvető fizikai elvből levezethető:

- ◆ A fizikai folyamatokat leíró törvények minden inerciarendszerben azonos matematikai alakban érvényesek. Más szóval, minden fizikai folyamatra érvényes a *relativitás elve*.
- ◆ A vákuumban terjedő fény sebessége minden inerciarendszerben azonos, *univerzális fizikai állandó*.

Ebből a két alapelvből levezethető a Lorentz-transzformáció, és segítségükkel elvégezhető a mechanika törvényeinek szükséges átalakítása. Az így létrejött, a fenti két elvvel összhangban álló fizikai elmélet a *speciális relativitáselmélet*. Nevében a "speciális" jelző arra utal, hogy csak speciálisan választott koordináta-rendszerekben, nevezetesen *inerciarendszerekben* érvényes.

A Lorentz-transzformáció fontos tulajdonsága, hogy a fénysebességhez képest kis  $w$  relatív sebességeknél a Galilei-transzformációba megy át, vagyis nem túl nagy sebességeknél továbbra is érvényesek a klasszikus mechanika törvényei.

<sup>1</sup> Jules Henri POINCARÉ (1854-1912) francia matematikus, elméleti fizikus.

<sup>2</sup> Albert EINSTEIN (1879-1955) Nobel-díjas (1921) német származású, 1933-ban Amerikába emigrált fizikus

A fenti két alapelv elfogadása egyben azt is jelenti, hogy az "éter" nem tekinthetjük fényhordozó közegnek, hiszen a fénysebesség a mozgásállapottól független, és nem tekinthetjük valamiféle kitértetett vonatkoztatási rendszernek sem, mivel a relativitás elve érvényes. Ezzel viszont elveszítette értelmét az éter létének feltételezése is.

### Mozgásleírás egymáshoz képest gyorsuló rendszerekből, a tehetetlenségi erők

Egymáshoz képest nem túl nagy sebességgel mozgó inerciarendszerekben a Newton törvények változatlan alakban használhatók. Mi a helyzet egy inerciarendszerhez képest gyorsuló rendszerben?

#### *Transzformációs összefüggések egymáshoz képest gyorsuló, translációs mozgást végző rendszerekben*

A legegyszerűbb eset az állandó gyorsulású translációs (haladó) mozgás.

Vegyük fel a  $K$  inerciarendszerben (pl. a terem) a koordinátatengelyeket úgy, hogy a hozzá képest translációs mozgást végző  $K'$  rendszer (pl. egy kocsis) a  $K$  rendszer  $x$ -tengelye mentén mozogjon, a  $K'$  rendszerbeli  $x'$ -tengely pedig essen az  $x$ -tengelyre (ábra). A  $K'$  rendszer a közös  $x, x'$ -tengely mentén  $a_0$  állandó gyorsulással mozog a  $K$ -hoz képest.

Az általános Galilei-transzformáció szerint (most a  $w$  relatív sebesség nem állandó!):

$$x(t) = x'(t) + x_{K'}(t)$$

$$v_x(t) = w(t) + v_{x'}(t)$$

$$a_x(t) = a_0 + a_{x'}(t).$$

Eszerint egy tömegpont gyorsulása a  $K'$  rendszerben

$$a_{x'} = a_x - a_0,$$

vagyis a  $K'$  nem inerciarendszer, hiszen a  $K$ -ban nem gyorsuló tömegpont ( $a_x = 0$ ) a  $K'$ -ben gyorsul ( $a_{x'} = -a_0 \neq 0$ ).

A fenti egyenletből  $m$ -mel való szorzással kapjuk, hogy

$$ma_{x'} = ma_x - ma_0 = F_x - ma_0,$$

ahol  $F_x = ma_x$  a  $K$  rendszerben a tömegpontra ható erő. Látszik, hogy  $K'$ -ben Newton II. törvénye nem érvényes ( $F_x = 0$  esetén  $a_{x'} = -a_0 \neq 0$ ).

Használhatóvá válik a törvény, ha feltételezzük, hogy a  $K'$ -ben a tömegpontra

$$F_x' = F_x - ma_0$$

erő hat, vagyis a  $K$ -ban működő erőt ki kell egészíteni egy

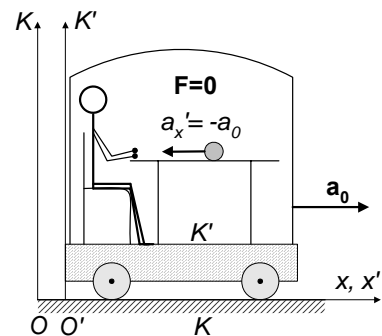
$$F_{ix} = -ma_0$$

ún. *tehetetlenségi erővel*. Ezzel az

$$F_x' = ma_{x'}$$

egyenletet kapjuk, amiből az  $F_x = 0$  esetben a tényleges  $a_{x'} = -a_0$  gyorsulást kapjuk.

Ha a koordinátarendszerek nem a tárgyalt speciális relatív mozgást végzik, akkor a fenti gondolatmenet mindegyik koordinátára alkalmazható, és  $\mathbf{a}_0$  relatív gyorsulás és  $\mathbf{F}$  erő esetén, a kapott eredmények vektori formában érvényesek:



$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$$

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0$$

$$\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_0.$$

### ***Tehetetlenségi erők forgó rendszerben***

Egy inerciarendszerhez képest egyenletesen forgó rendszerben szintén be kell vezetnünk tehetetlenségi erőket, hiszen az inerciarendszerben nyugvó tömegpont a forgó rendszerből nézve körpályán mozog, tehát akkor is gyorsul, ha nem hat rá erő.

Ezt a tehetetlenségi erőt legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, ha egy olyan tömegpontot vizsgálunk, amely a forgó testhez rögzített koordináta-rendszerben nyugszik (ábra). Ennek a tömegpontnak az inerciarendszerből nézve  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{cp} = mr\omega^2\mathbf{u}_N$

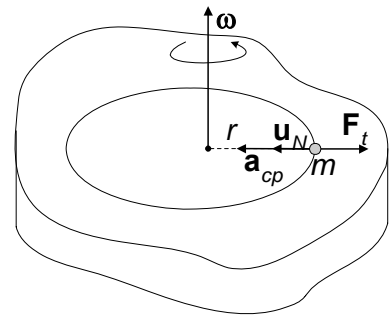
gyorsulása van, tehát

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{cp} = mr\omega^2\mathbf{u}_N$$

erő hat rá. Mivel a forgó rendszerben nyugszik, itt egy ezzel ellentétes, ugyanilyen nagyságú

$$\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_{cp} = -mr\omega^2\mathbf{u}_N$$

tehetetlenségi erőt kell feltételeznünk. A kísérletek azt mutatják, hogy forgó rendszerekben ilyen tehetetlenségi erő valóban fellép, és *centrifugális erőnek* nevezik.



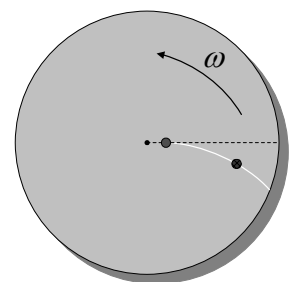
### **KÍSÉRLETEK:**

- ◆ Rugóra függesztett, vízszintes síkban körbeforgatott golyó a tengelyt jól mérhető erővel húzza (rugós erőmérő).
- ◆ Rugalmas lemezekből készített gömb alakú test forgatáskor a tengelyre merőlegesen kidomborodik (a tengely mentén összelapul), ún. geoid alakot vesz fel (ilyen a forgó Föld alakja is).
- ◆ Vízszintes rúdra mozgathatóan felszerelt, cérnával összekötött golyókat a rúdra merőleges tengely körül  $\omega$  szögsebességgel megforgatva, a golyók akkor maradnak egyensúlyban, ha a tengelytől mért távolságaik ( $r_1, r_2$ ) és a tömegeik ( $m_1, m_2$ ) között fennáll az  $m_1r_1\omega^2 = m_2r_2\omega^2$  összefüggés.
- ◆ Vízszintes tengely körül megforgatott kerékpárlánc merev kerékként gurul, vagy megforgatott kör alakú papírlap olyan merev lesz, hogy vágni lehet vele.

A tapasztalat szerint forgó rendszerben nem csak a centrifugális erő lép fel.

### **KÍSÉRLETEK:**

- ◆ Függőleges tengely körül forgatható, vízszintes kormozott lapra a tengelytől néhány centiméterre egy golyót rögzítünk, amit egy szerkezettel forgás közben szabaddá teszünk. A golyó a lapon nem sugárirányban kifelé mozog, hanem az ábra szerinti görbe mentén, amit a koromrétegbe be is rajzol. Itt oldalirányú erőnek is fel kell lépni.
- ◆ A forgó Földhöz rögzített hosszú inga lengési síkja lassan elfordul, ami ugyanennek a hatásnak tulajdonítható.



**Transzformációs összefüggések egymáshoz képest forgó rendszerekben**

A forgó rendszerben fellépő tehetetlenségi erők meghatározásához meg kell keresni a megfelelő transzformációs képleteket. Ehhez előzetesen néhány új fogalmat kell bevezetnünk.

**A szögelfordulás- és szögsebesség-vektor**

Először a körmozgást végző tömegpont mozgásának jellemzésére bevezetjük a pont helyvektorának egy elemi  $dt$  idő alatt bekövetkező elfordulását jellemző elemi szögelfordulás-vektort (az ábrán  $d\boldsymbol{\varphi}$ ), amelynek nagysága a  $d\varphi$  szögelfordulással

egyenlő vagyis  $d\varphi = \frac{dr}{r}$ .

A  $d\boldsymbol{\varphi}$  vektor irányát úgy definiáljuk, hogy az merőleges a körpálya síkjára (tehát  $d\boldsymbol{\varphi} \perp \mathbf{r}$  és  $d\boldsymbol{\varphi} \perp d\mathbf{r}$ ), és a az ábrán látható irányba mutat („jobbkez-szabály”).

A fenti definíció alapján látható, hogy

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r},$$

hiszen  $d\mathbf{r}$  párhuzamos a  $d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$  vektorral, nagysága pedig éppen  $dr = r d\varphi$ .

A tömegpont pálya menti sebességét az elmozdulásnak az időtartammal való osztásával kapjuk:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \times \mathbf{r}.$$

A korábban skalárként bevezetett szögsebességet általánosítva, definiáljuk a szögsebesség-vektort az

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$$

összefüggéssel. Az így kapott  $\boldsymbol{\omega}$  szögsebesség-vektor párhuzamos a szögelfordulás-vektorral, tehát szintén merőleges a körpálya síkjára, iránya az ábrán látható.

A szögsebesség-vektor segítségével a tömegpont pálya menti sebességét a

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

összefüggés adja meg. Ez a vektor valóban a körpálya érintőjének irányába mutat, nagysága pedig valóban a körmozgásnál korábban kapott  $v = \omega r$  értékkel egyenlő.

Hasonló megfontolással kapjuk, hogy a centripetális gyorsulás

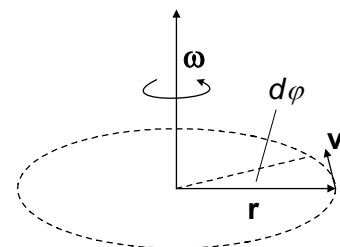
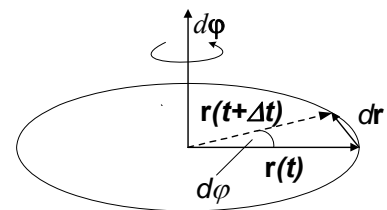
$$\mathbf{a}_N = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Ez a vektor valóban a kör középpontja felé mutat, és nagysága is azonos a körmozgásnál a centripetális gyorsulásra kapott értékkel

$$a_N = \omega v = r\omega^2.$$

**Vektor megváltozása inerciarendszertől és forgó rendszertől nézve.**

Ahhoz, hogy a transzformációs összefüggéseket megkapjuk, meg kell találnunk az általános összefüggést egy vektornak egy  $K$  inerciarendszertől és egy hozzá képest forgó  $K'$  rendszertől észlelt megváltozása között.



A részletes számolás eredménye az, hogy egy  $\mathbf{b}$  vektornak a  $K$  rendszerben észlelt megváltozása és az  $\omega$  szögsebességgel forgó  $K'$  rendszerben tapasztalt megváltozása között a

$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$$

összefüggés áll fenn. Vagyis tetszőleges  $\mathbf{b}$  vektor változási sebessége a  $K$  rendszerből nézve úgy kapható meg, hogy a  $K'$  rendszerből mért változási sebességéhez hozzáadjuk a forgásból származó változási sebességet, amit az  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$  vektor ad meg.

\*\*\*\*\*

A fenti összefüggés levezetése általános esetben kissé hosszadalmas, ezért itt egy egyszerűsített esetet mutatunk be, amikor a vizsgált  $\mathbf{b}$  vektor  $l$  kezdőpontja a  $K'$  rendszer  $O$  origójában van (ábra). A számítást ennek a  $\mathbf{b}$  vektornak egy rövid  $\Delta t$  idő alatt bekövetkező  $\mathbf{b}(t) \rightarrow \mathbf{b}(t + \Delta t)$  megváltozására végezzük el. A változás során a vektor  $2$  végpontja a  $2'$  helyzetbe kerül, tehát a vektor térbeli helyzete és hossza is módosulhat, de egyszerűsítő feltevésünk miatt a vektor  $1$  végpontja helyben marad.

A  $\Delta t$  idő alatt a  $K'$  rendszer  $\Delta\varphi$  szöggel elfordul, amit a  $\Delta\boldsymbol{\varphi}$  szögelfordulás-vektorral adhatunk meg.

A  $K$  rendszerbeli megfigyelő szerint a  $\mathbf{b}$  vektor  $2$  végpontjának elmozdulását – ami esetünkben a vektor megváltozásával egyenlő – az ábrán berajzolt  $\Delta\mathbf{b}_K$  vektor adja meg.

A forgó  $K'$  rendszerbeli megfigyelő szempontjából a  $2$  pont, amelyhez a  $\mathbf{b}$  vektor megváltozását viszonyítani tudja, a forgás következtében a  $2^*$  helyre került (ez a pont a  $K'$  rendszerhez van rögzítve). Emiatt a forgó

rendszerbeli megfigyelő a  $\mathbf{b}$  vektor végpontjainak elmozdulását a  $\Delta\mathbf{b}_{K'}$  vektorral adja meg. A  $K'$  rendszer  $2$  pontjának a rendszer forgása miatt bekövetkező  $2 \Rightarrow 2^*$  elmozdulását az ábrán a  $\Delta\mathbf{b}_{rot}$  vektor mutatja.

Az ábra alapján a  $\mathbf{b}$  vektor  $2$  végpontjának  $2 \Rightarrow 2'$  elmozdulása – vagyis esetünkben a  $\mathbf{b}$  vektor megváltozása – a  $K$  rendszerből nézve kifejezhető a vektor  $K'$  rendszerbeli megváltozásával és egy a rendszer forgásából származó járulékkal:

$$\Delta\mathbf{b}_K = \Delta\mathbf{b}_{K'} + \Delta\mathbf{b}_{rot}.$$

Most már csak a forgásból adódó vektort kell kifejezni a forgást jellemző szögsebességgel.

Ha a  $\Delta t$  időtartam kicsi, akkor ennek a vektornak a nagyságára az ábra alapján felírhatjuk, hogy

$$\Delta\mathbf{b}_{rot} \approx r \Delta\boldsymbol{\varphi}.$$

A  $\Delta t$  időtartamot egyre rövidítve, és differenciálisan kicsi mennyiségekre áttérve az összefüggést a

$$d\mathbf{b}_{rot} = r d\boldsymbol{\varphi}$$

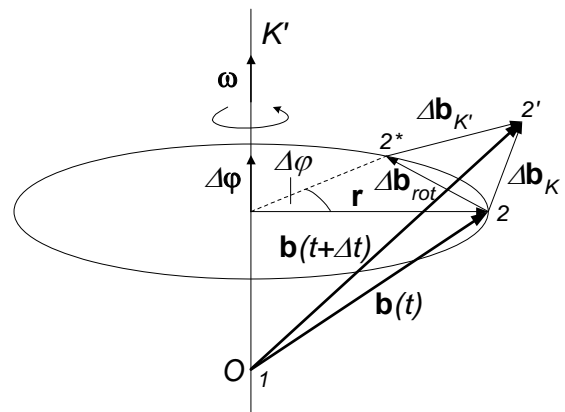
alakba írhatjuk, másrészt azt is megállapíthatjuk, hogy a  $\Delta\mathbf{b}_{rot}$  vektor a  $\Delta t$  időtartam rövidítésével az ábrán a forgástengelyre merőleges síkban berajzolt segédkör érintőjébe megy át. Ennek alapján ezt a vektort differenciális változás esetén az alábbi módon írhatjuk fel:

$$d\mathbf{b}_{rot} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}.$$

Ezt az összefüggést felhasználva, a  $\mathbf{b}$  vektor megváltozására felírt kifejezés differenciális alakban a következőképpen alakul

$$d\mathbf{b}_K = d\mathbf{b}_{K'} + d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{b}.$$

A vektor megváltozásának sebességére ebből – a  $dt$  időtartammal való osztás után – azt kapjuk, hogy



$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K'} + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \times \mathbf{b}.$$

Itt a vektorok megváltozásának sebességénél a zárójel mellett feltüntetett index mutatja, hogy a változást melyik rendszerből vizsgáljuk.

Ha figyelembe vesszük, hogy  $\frac{d\varphi}{dt} = \boldsymbol{\omega}$  a szögsebesség-vektor, akkor végül azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

A speciális eset kicsit hosszadalmasabb számolással általánosítható, ha – a fenti megfontolások alkalmazásával – a  $\mathbf{b}$  vektor  $l$  végpontjának elmozdulását is figyelembe vesszük. Az általános számítás ugyanezt az eredményt adja, tehát a fenti összefüggés tetszőleges  $\mathbf{b}$  vektorra érvényes.

\*\*\*\*\*

### A transzformációs összefüggések

A részletes számolás eredményeként kapott

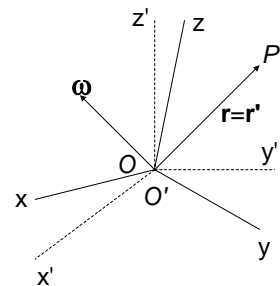
$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$$

összefüggést felhasználva most megkeressük egy  $K$  inerciarendszer és a hozzá képest forgó  $K'$  rendszer mennyiségei közötti összefüggéseket.

A számolás során speciális esetet vizsgálunk: a két koordináta-rendszer origója mindvégig egybeesik, vagyis translációt nem tételezünk fel (ábra). Ebből következik, hogy a  $P$  pont helyvektorára fennáll, hogy

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K'}.$$



Alkalmazzuk a tetszőleges vektor változására kapott kifejezést az  $\mathbf{r}'$  vektorra (ez az általános összefüggésben a  $\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{r}'$  helyettesítést jelenti):

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

Itt felhasználtuk azt, hogy az  $\mathbf{r}'$  vektor változási sebessége a  $K'$  rendszerből nézve

$$\mathbf{v}' = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K'}.$$

Mivel speciális esetünkben a tömegpont  $K$  rendszerbeli  $\mathbf{v}$  sebességére fennáll, hogy

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K},$$

kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

A  $K$  rendszerbeli gyorsulást a sebesség differenciálásával kapjuk meg:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{|K} + \left(\frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt}\right)_{|K}.$$

Ismét felhasználva a vektor változására kapott általános kifejezést, azt kapjuk, hogy



$$\mathbf{a} = \left( \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_{|K} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{|K},$$

illetve

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_{|K} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left[ \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right].$$

A kifejezést tovább alakítva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_{|K} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'] = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_{|K} \times \mathbf{r}'.$$

Ha a forgó rendszer szögsebessége állandó, akkor az utolsó, ún. Euler<sup>1</sup>-féle gyorsulás nulla, és az

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

összefüggést kapjuk. Az utolsó tag nem más, mint a korábban felírt centripetális gyorsulás, a második tag neve pedig *Coriolis<sup>2</sup>-gyorsulás*:

$$\mathbf{a}_{cp} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

### ***Tehetetlenségi erők forgó rendszerben, a centrifugális- és a Coriolis-erő***

Láttuk, hogy egy tömegpont gyorsulása egy  $K$  inerciarendszerben ( $\mathbf{a}$ ) és egy hozzá képest állandó  $\boldsymbol{\omega}$  szögsebességgel forgó  $K'$  rendszerben ( $\mathbf{a}'$ ) más. A két mennyiség közötti összefüggést átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}').$$

Ennek megfelelően, ha a  $K'$  rendszerben a Newton-féle mozgásegyenletet használni akarjuk, akkor az

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \mathbf{F} - m2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

összefüggés alapján a forgó  $K'$  rendszerben be kell vezetnünk az

$$\mathbf{F}_t = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

tehetetlenségi erőt. Ennek első tagja az

$$\mathbf{F}_C = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$$

*Coriolis-erő*, amely merőleges a mozgó tömegpont  $K'$  rendszerbeli sebességére, második tagja pedig az

$$\mathbf{F}_{cf} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

*centrifugális erő*, amely sugárirányban kifelé mutat.

A centrifugális erőt a hétköznapi tapasztalatból is ismerjük (kanyarodó jármű), de hatását számos egyszerű kísérlet és tudományos tapasztalat is mutatja. Néhány ilyen kísérlet és értelmezése a *forgó rendszerben* a következő:

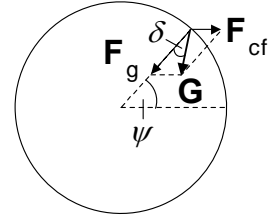
- ◆ Rugóra függesztett, vízszintes síkban körbeforgatott golyó által megnyújtott rugó a centrifugális erőt mutatja.
- ◆ A körbeforgatott hajlékony abroncs geoid alakját a forgó rendszerben úgy értelmezhetjük, hogy a centrifugális erő a tengelytől kifelé viszi az abroncs részecskéit, egészen addig, amíg a deformációval növekvő rugalmas erők egyensúlyt nem tartanak vele.

<sup>1</sup> Leonhard EULER (1707-1783) svájci matematikus, fizikus

<sup>2</sup> Gustave CORIOLIS (1792-1843) francia gépészmérnök, matematikus

- ◆ A Földről nézve a centrifugális erő az oka annak, hogy a Föld nem gömb alakú, hanem a sarkokon kissé belapult, ún. geoid.
- ◆ A Földön mért  $g$  "nehézségi" gyorsulás a gravitációs- és a centrifugális erő együttes fellépésének eredménye. Mivel azonos szögsebességnél a kerületi sebesség a sugár függvénye, a centrifugális erő a forgástengelytől mért távolságtól, vagyis az ábrán a  $\psi$  szögtől függ:  $F_{cf} = mr\omega^2 = mR\omega^2 \cos\psi$  ( $R$  a Föld sugara). Emiatt változik a Földön mért  $g$  "nehézségi" gyorsulás, ha észak-déli irányban haladunk:  $g = \frac{G}{m} = g_s \frac{\sin\psi}{\sin(\delta + \psi)}$ , ahol

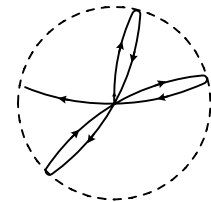
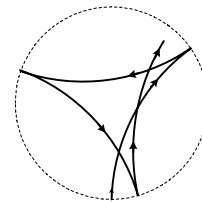
$$g_s = \frac{F_g}{m}.$$



- ◆ A centrifugális erő fellépésével magyarázható a centrifuga működése is (ha benne ülünk). A centrifugába tett részecskékre fellép a centrifugális erő, amely nagy fordulatszámnál a nehézségi erőnél sokkal nagyobb. Mivel ez – a nehézségi erőhöz hasonlóan – a tömeggel arányos erő, hatása a forgástengelyre merőleges irányban ugyanaz, mint a nehézségi erőé függőlegesen. Ezért a nagyobb sűrűségű anyagok a tengelytől távolabb, a kisebb sűrűségűek a tengelyhez közelebb gyűlnek össze.

A fenti összefüggések segítségével a Coriolis-erőre vonatkozó kísérleteink és tapasztalataink a forgó rendszerből szintén értelmezhetők.

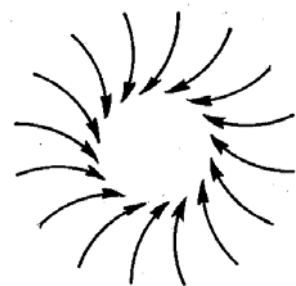
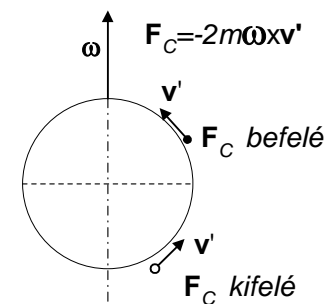
- ◆ A függőleges tengely körül forgatható, vízszintes kormozott lapon sugárirányban elinduló golyó mozgásirányának megváltozását a sebességre merőleges Coriolis-erő okozza.
- ◆ Az inga lengési síkjának elfordulása a Földön szintén az ingasúly sebességére merőleges Coriolis-erővel értelmezhető. Különböző kezdeti feltételek mellett az inga mozgása eltérő (ábra), de a lengési sík minden esetben elfordul.



a)

b)

- ◆ Ugyanez az oka, hogy a Földön kilőtt lövedék eredeti irányától eltér (pl. Dél–Észak irányú mozgásnál az északi féltekén jobbra, a délin balra; *l.* az ábrát).
- ◆ Hasonlóan értelmezhető, hogy a Föld felé szabadon eső test az eredeti mozgásirányától keletre tér el. Az eltérés nem nagy:  $100\text{ m}$ -ről eső test esetén kb.  $1,5\text{ cm}$ .
- ◆ Ugyancsak a Coriolis-erő okozza, hogy a Földön Kelet–Nyugat irányban mozgó testekre lefelé ható erő lép fel (súlyuk megnő), Nyugat–Kelet irányban mozgó testekre felfelé ható erő lép fel (súlyuk lecsökken). Ez az Eötvös-effektus. A látszólagos tömegváltozás nagyságrendje:  $1\text{ m/s}$  sebességű,  $70\text{ kg}$ -os testnél kb.  $1\text{ g}$ .
- ◆ A Coriolis-erőnek szerepe van a légköri jelenségek alakulásában is. Egy alacsonyabb nyomású helyre minden oldalról beáramló légtömegek eredetileg sugárirányban a hely felé mozognak, de a Coriolis-erő eltéríti őket, így örvénylő mozgás jön létre (ábra).



### Az Eötvös-kísérlet

A tehetetlen- és súlyos tömeg azonosságának kérdése igen fontos elvi probléma. Az első igazán pontos vizsgálatot ezzel kapcsolatban Eötvös Loránd<sup>1</sup> végezte el. Az Eötvös-féle kísérlet azon alapult, hogy a Földön a testekre ható nehézségi erő (**G**) két olyan erő eredője, amelyek közül az egyik a test súlyos tömegével- (tömegvonzás: **F<sub>g</sub>**), a másik pedig a test tehetetlen tömegével (centrifugális erő: **F<sub>cf</sub>**) arányos:

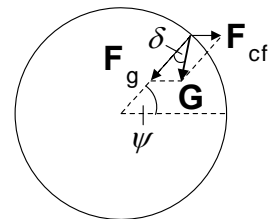
$$F_g = m_s g_s$$

$$F_{cf} = m_t r \omega^2$$

(itt  $g_s$  az  $m_s$  súlyos tömeggel arányos, tömegvonzásból származó erő arányossági tényezője,  $\omega$  a Föld forgásának szögsebessége,  $r$  pedig a vizsgált – körpályán mozgó – pont pályájának sugara).

A Föld adott helyén, amelyet az ábrán látható  $\psi$  szöggel jellemezhetünk, a centrifugális erő és a tömegvonzásból származó erő hányadosa az alábbi összefüggéssel adható meg:

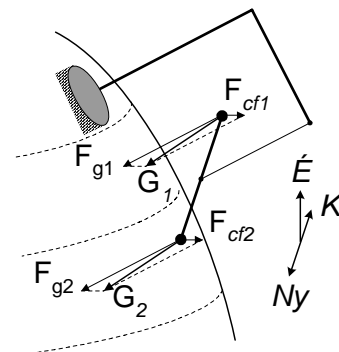
$$\frac{\sin \delta}{\sin(\delta + \psi)} = \frac{F_{cf}}{F_g} = \frac{m_t r \omega^2}{m_s g_s}$$



Ebből következik, hogy adott földrajzi helyen a **G** eredő erő irányát meghatározó  $\delta$  szög függ a tehetetlen- és súlyos tömeg hányadosától.

Eötvös készített egy igen érzékeny torziós mérleget, amelynek rúdját Kelet-Nyugati irányba állította (ábra). A rúd egyik végére platina súlyt, a másikra a lehető legpontosabban azonos tömegű, más anyagú testet rögzített.

Ha a két testre a súlyos és tehetetlen tömeg hányadosa nem azonos, akkor a két testre ható eredő erő (**G<sub>1</sub>** és **G<sub>2</sub>**) iránya eltérő, ezért ezeknek az erőknek a vízszintes komponense is különböző lesz. Emiatt a torziós mérlegre egy forgatónyomaték lép fel, ami azt addig forgatja el, amíg a számban ébredő – a szögelfordulással arányos – ellenkező irányú rugalmas forgatónyomaték ki nem kompenzálja. Ha az elfordulást megmérjük, akkor ki



tudjuk számítani a forgatónyomatékat, abból pedig meghatározhatjuk a súlyos és tehetetlen tömeg hányadosának eltérését a két test esetén. A mérésnél természetesen a kiinduló egyensúlyi helyzetben nem ismerjük az elfordulás szögét, hiszen csak az egyensúlyt tudjuk megállapítani. Ezért az egyensúly beállta után az eszközt függőleges tengely körül 180°-kal el kell fordítani, és ekkor az inga rúdja a fellépő ellenkező irányú forgatónyomaték miatt az eszközhöz képest elfordul. Ezt az elfordulást már észlelni tudjuk.

Eötvös ezzel a módszerrel különböző anyagú testeket hasonlított össze az etalonként használt platina súllyal, az eszköz elfordításakor azonban egyetlen testnél sem észlelte az inga rúdjának elfordulását. Vagyis azt az eredményt kapta, hogy – a mérési hiba határain belül – a különböző testeknél a súlyos- és tehetetlen tömeg hányadosa azonos. A kísérleti eszköz egyre tökéletesebb változatával végrehajtott mérései alapján Eötvös

végül (1908-ban) azt állapította meg, hogy az  $\frac{m_t}{m_s}$  hányadosok egymástól illetve az

<sup>1</sup> EÖTVÖS Loránd (1848-1919) magyar fizikus

egységtől való eltérése legfeljebb  $5 \cdot 10^{-9}$  lehet (több, mint fél évszázaddal később korszerűbb eszközökkel, kissé eltérő módszerrel a mérés pontosságát Dicke<sup>1</sup> megjavította, és megállapította, hogy az eltérés maximális értéke kb.  $10^{-11}$  lehet). A súlyos- és tehetetlen tömeg azonossága az általános relativitáselmélet egyik alapvető feltételezése.

---

<sup>1</sup> Robert Henry DICKE (1916-1997) amerikai fizikus

## Munka és energia

A mozgásegyenlet megoldásához a tömegpontra ható erő időfüggésének ismerete szükséges, ami igen komoly nehézségeket okoz. Az erőhatásokat megadó erőtvények ugyanis általában az erő helyfüggését adják meg, így az erő időfüggésének megadásához ismerni kellene a helyvektor időfüggését, vagyis tudni kellene a mozgásegyenlet megoldását.

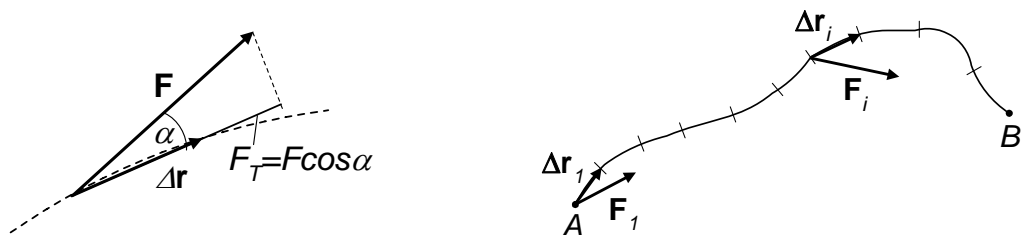
A probléma megoldását az teszi lehetővé, hogy az erő helyfüggésének ismeretében bevezethető egy olyan mennyiség, amelyre (bizonyos feltételek mellett) megmaradási törvény érvényes. Ehhez a mennyiséghez a *munka* bevezetésével juthatunk el.

### A munka fogalma

Egy tömegpontra ható  $\mathbf{F}$  erő akkor végez munkát, ha az erő működése közben (de nem feltétlenül annak kizárólagos hatására) a tömegpont elmozdul. A végzett elemi munkát ( $\Delta W$ ) egy elemi  $\Delta \mathbf{r}$  elmozdulás során az erő és az elmozdulás skaláris szorzataként definiáljuk (baloldali ábra):

$$\Delta W = \mathbf{F} \Delta \mathbf{r}.$$

Látható, hogy mechanikai definíciója szerint a munka előjeles mennyiség, továbbá mechanikai értelemben egy erő nem végez munkát, ha nincs elmozdulás, vagy ha az elmozdulás merőleges az erőre.



Véges  $AB$  elmozdulásnál az elmozdulás során változhat az erő nagysága és iránya is, ezért az elmozdulást elemi szakaszokra kell bontani (jobboldali ábra), és a munkát közelítőleg az elemi munkák összege adja meg. A munka pontos értékét úgy kapjuk meg, hogy a felosztást finomítva, megkeressük az összeg határértékét:

$$W_{AB} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{r}_i = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Ennek a határértéknek a jelölésére szolgál a fenti integrál, amelyet az erő  $AB$  görbére vonatkozó vonalintegráljának neveznek.

Állandó erő és egyenes pályán történő  $s$  nagyságú elmozdulás (út) esetén ebből megkapjuk az egyszerűbb, közismert

$$W = F s \cos \alpha$$

alakot, ahol  $\alpha$  az erő- és elmozdulásvektor által bezárt szög.

### Munkatétel, mozgási energia

Ha egy tömegpontra erő hat, akkor ennek eredményeként a tömeg gyorsulni fog, és az erő közben munkát végez. A munka fogalmának hasznossága akkor derül ki, ha megnézzük, milyen összefüggés van az erő munkája és a test sebessége között?

Számítsuk ki, hogy mekkora munkát végez egy tömegponton a rá ható erők  $\mathbf{F}_e$  eredője, ha a tömegpont az 1 helyzetből egy 2 helyzetbe megy át. A mozgásegyenletet és a skaláris szorzat koordinátás alakját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$W = \int_1^2 \mathbf{F}_e d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} dt = m \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2,$$

vagyis az eredő erő munkája az  $\frac{1}{2} m v^2$  mennyiség megváltozásával egyenlő. Az összefüggés

fordítva is érvényes: a felgyorsított test (ideális esetben) ugyanakkora munkát tud elvégezni a lefékeződése árán, mint amekkora munkával felgyorsítottuk. Más szóval a befektetett munka visszanyerhető, a test a munka révén jól meghatározott munkavégző képességre tett szert.

Az  $E_m = \frac{1}{2} m v^2$  mennyiséggel egyértelműen meghatározott munkavégző képességet a tömegpont *mozgási energiájának* nevezik. Ezzel a definícióval élve tehát azt mondhatjuk, hogy a tömegpontra ható eredő erő munkája a tömeg mozgási energiájának megváltozásával egyenlő:

$$W_e = \int_1^2 \mathbf{F}_e d\mathbf{r} = \Delta E_m.$$

Ezt a törvényt gyakran *munkatételnek* nevezik.

### Konzervatív erőter, helyzeti energia

Egy tömegpontnak munkavégző képessége nem csak a mozgása következtében lehet, hanem egy külső erőter jelenléte miatt is.

Közismert például, hogy a nehézségi erőter hatására egy tömeg felgyorsulhat, és ennek következtében munkát tud végezni. Ezt a munkavégző-képességet a jelenlévő külső erőter által a tömeg végzett munka teszi lehetővé, munkavégző képességről azonban csak akkor beszélhetünk, ha az egyértelműen megadható.

Ha egy tömeget a nehézségi erőterben az  $O$  pontból (ábra) állandó sebességgel függőlegesen felemelünk a  $h$  magasságban lévő  $P$  pontba, akkor  $F = F_z = mg$  nagyságú, felfelé mutató erőt kell kifejtenünk, és eközben

$$W^{OP} = \int_0^h F_z dz = \int_0^h mg dz = mgh$$

munkát végzünk a nehézségi erő ellenében. Ugyanakkor a lefelé mutató nehézségi erő ( $z$ -komponense  $G_z = -F_z = -mg$ ) az emelés közben

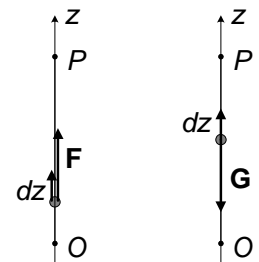
$$W_{neh}^{OP} = -W^{OP} = -mgh$$

munkát végez.

A tömeget a  $P$  pontban elengedve, a nehézségi erő az eredetileg általunk végzett munkával azonos nagyságú munkát végez a testnek az  $O$  pontba való visszatérése közben, és – a veszteségektől eltekintve – a tömeg

$$W_{neh}^{PO} = W^{OP} = -W_{neh}^{OP} = \frac{1}{2} m v^2$$

mozgási energiára tesz szert. Eszerint a nehézségi erőterben a kiszemelt  $O$  vonatkoztatási ponthoz viszonyítva  $h$  magasságra emelt tömegnek meghatározott munkavégző képessége, *energiája* van az erőter jelenléte miatt. A példából az is kiderül, hogy ez az energia az utolsó egyenletben szereplő bármelyik munkával megadható, az egyértelműség követelménye miatt azonban jobb az erőter által végzett munkát használni (a tömeget az erőterrel szemben



elmozdító erő lehet nagyobb is, mint az erőtér által kifejtett erő, így a folyamat során a tömeg mozgási energiára is szert tehet).

Egy testnek ilyen munkavégző képessége természetesen *más erőtér esetén is lehet*. Az egyedüli követelmény az, hogy adott pontban lévő testhez egyértelműen hozzárendelhető legyen az erőtér által végzett munka. Ez a fenti példa alapján azt jelenti, hogy a vonatkoztatási pont és a tömegpont helye közötti elmozdulásnál az erőtér munkája nem függhet az úttól (ez nem minden erő esetén teljesül: pl. súrlódási erő). Az ilyen erőket (erőtereket), amelyeknél a munkavégzés csak az elmozdulás kezdő és végpontjától függ, és így független az úttól, *konzervatív erőknek (erőtereknek)* nevezzük. Az elnevezés onnan származik, hogy – mint látni fogjuk – ilyen erőtérben mozgó tömeg teljes mechanikai energiája megmarad, "konzerválódik".

Konzervatív erőtérben ( $\mathbf{F}_k$ ) tehát általánosan bevezethetjük egy pontszerű testnek egy  $O$  vonatkoztatási ponthoz viszonyított energiáját tetszőleges  $P$  pontban az alábbi módon:

$$E_h^O(P) = -W_k^{OP} = -\int_O^P \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}.$$

Ez az energia a testnek a vonatkoztatási ponthoz viszonyított helyzetétől függ, ezért *helyzeti (vagy potenciális) energiának* ( $E_h$ ) nevezzük.

A konzervatív erő munkája csak a kezdő- és végponttól függ. Ez a definíció lehetőséget ad a konzervatív erőtér egy másik meghatározására is: ha egy pontból kiindulva valamilyen pályán visszatérünk a kiindulópontba, és ezen a zárt görbén kiszámítjuk a konzervatív erő összes munkáját, akkor a fenti definíció értelmében nullát kell kapnunk, azaz az erőtér akkor konzervatív, ha teljesül a

$$\oint_L \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} = 0$$

feltétel.

Itt az integráljelen elhelyezett kis kör azt jelöli, hogy az integrálást (összegzést) egy zárt görbe ( $L$ ) mentén végeztük el. (Ezt a műveletet a matematikában „körintegrálnak” nevezzük.)

A nehézségi erőtér a tapasztalat szerint konzervatív, így az általános definíció alapján a vonatkoztatási ponthoz képest  $h$  magasságban az  $m$  tömeg helyzeti energiája (a bevezetőben mutatott példával összhangban)

$$E_h = -W_{neh}^{OP} = \int_0^h mg dz = mgh.$$

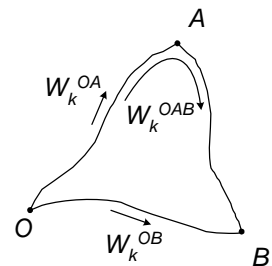
A fentiekből kitűnik, hogy a helyzeti energia – a mozgási energiával szemben – egy állandó erejéig határozatlan, hiszen nagysága a vonatkoztatási pont megválasztásától függ.

A vonatkoztatási ponttól való függés azonban gyakorlatilag nem okoz problémát, mert a fizikai folyamatok leírásánál általában az energia megváltozása fontos, a helyzeti energia *megváltozása* pedig nem függ a vonatkoztatási pont megválasztásától. Ezt az állítást az alábbi ábra alapján a következőképpen láthatjuk be. A helyzeti energia megváltozása az  $AB$  elmozdulás során:

$$\Delta E_h^{AB} = E_h^O(B) - E_h^O(A) = -(W_k^{OB} - W_k^{OA}) = -\int_O^B \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} - \left( -\int_O^A \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} \right).$$

Konzervatív erőtér munkája azonban nem függ az úttól, ezért a közvetlen  $OB$  elmozdulás során végzett munka ugyanaz, mint az  $OAB$  úton végzett munka:

$$\int_O^B \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} = \int_O^A \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}.$$



Ezt az összefüggést figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\Delta E_h^{AB} = -\int_O^A \mathbf{F}_k d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r} + \int_O^A \mathbf{F}_k d\mathbf{r} = -\int_A^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r},$$

vagyis a helyzeti energia megváltozása csak az  $A$  és  $B$  pontok helyzetétől függ, és nem függ az  $O$  vonatkoztatási ponttól.

### Az általános energia-munka összefüggés, az energiamegmaradás tétele tömegpontra

Ha a tömegpont konzervatív ( $\mathbf{F}_k$ )- és nem konzervatív ( $\mathbf{F}_{nk}$ ) erők együttes hatása alatt mozdul el az  $A$  pontból a  $B$  pontba, akkor a munkatétel szerint írhatjuk, hogy

$$\int_A^B (\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_{nk}) d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F}_{nk} d\mathbf{r} = W_k + W_{nk} = \Delta E_m,$$

ahol  $W_k$  és  $W_{nk}$  a konzervatív- illetve nem konzervatív erők munkája.

Tudjuk viszont, hogy a konzervatív erők munkájára fennáll, hogy

$$W_k = -\Delta E_h,$$

tehát az alábbi egyenletet kapjuk:

$$W_{nk} = \Delta E_m + \Delta E_h,$$

vagyis a helyzeti- és mozgási energia megváltozásának összege a nem konzervatív erők munkájával egyenlő. Mivel a helyzeti ( $E_h$ )- és mozgási ( $E_m$ ) energia

$$E = E_m + E_h$$

összegét rendszerint a tömegpont *teljes (mechanikai) energiájának* nevezik, a fenti állítás így is megfogalmazható:

$$\Delta E = W_{nk},$$

vagyis a *tömegpont teljes mechanikai energiájának megváltozása a nem konzervatív erők munkájával egyenlő*.

Ha a tömegpontra csak konzervatív erők hatnak, vagy a rá ható nem konzervatív erők összes munkája nulla, akkor a tömegpont mechanikai energiája nem változik meg:

$$\Delta E = 0.$$

Ez az *energia-megmaradás törvénye tömegpontra*.

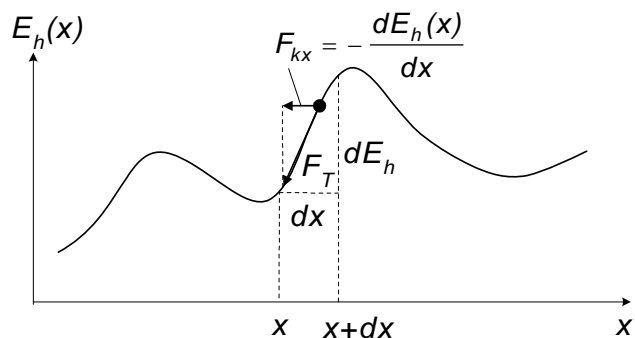
### Példák és alkalmazások

#### *Erő és helyzeti energia*

Egy pontszerű test helyzeti energiája a helynek egyértelmű függvénye. Vizsgáljunk először egy egyszerű egydimenziós esetet, amikor a helyzeti energia csak  $x$ -irányban változik. Ebben az esetben a helyzeti energia helyfüggését az  $E_h = E_h(x)$  függvény adja meg (ábra). Egy elemi  $dx$  elmozdulás során a helyzeti energia megváltozása

$$dE_h = \frac{dE_h}{dx} dx.$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy a helyzeti energia megváltozása a konzervatív erő (esetünkben a nehézségi erő) munkájával is kifejezhető:





$$dE_h = -F_{kx} dx.$$

A két kifejezés összehasonlításából látható, hogy

$$F_{kx} = -\frac{dE_h(x)}{dx},$$

vagyis az erő  $x$ -komponense a helyzeti energia-görbe meredekségéből megkapható.

\*\*\*\*\*

Általános (három dimenziós) esetben tetszőleges erőterben a test helyzeti energiája az  $E_h = E_h(x, y, z)$  függvénnyel adható meg, aminek elemi megváltozása egy  $d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$  elemi elmozdulásnál

$$dE_h = \frac{\partial E_h}{\partial x} dx + \frac{\partial E_h}{\partial y} dy + \frac{\partial E_h}{\partial z} dz.$$

Másrészt a helyzeti energia megváltozása kifejezhető a konzervatív erő elemi munkájával is:

$$dE_h = -\mathbf{F}_k d\mathbf{r} = -(F_{kx} dx + F_{ky} dy + F_{kz} dz).$$

A két kifejezés összehasonlításából kapjuk, hogy

$$F_x = -\frac{\partial E_h}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_h}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_h}{\partial z},$$

vagyis az erő a helyzeti energia helyfüggésének ismeretében kiszámítható.

\*\*\*\*\*

*Homogén gravitációs térben* lévő  $m$  tömeg helyzeti energiája a magasság függvénye. Ez a függvény függőlegesen felfelé irányított  $z$ -tengely esetén:

$$E_h(z) = mgz$$

(a) ábra).

A tömegpontra ható erő  $z$ -komponense a fentiek szerint

$$F_z = -\frac{dE_h(z)}{dz} = -mg,$$

ami valóban a lefelé mutató gravitációs erőt adja.

*Megfeszített rugóhoz rögzített tömegpont* helyzeti energiája, ha az  $x$  tengely nullpontja a tömegnek a rugó megfeszítetlen állapotához tartozó helyzetében van:

$$E_h(x) = -\int_0^x (-Dx) dx = \frac{1}{2} Dx^2.$$

Természetesen a helyzeti energia deriváltja most is visszaadja az erőt

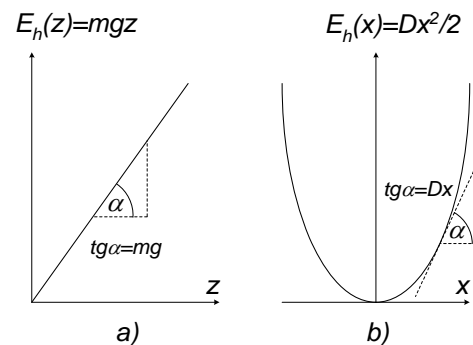
$$F_x = -\frac{dE_h(x)}{dx} = -Dx$$

(b) ábra).

*Az  $x$ -tengely mentén rezgő pont* esetén az energia mozgási energiából és rugalmas helyzeti energiából áll:

$$E_m = \frac{1}{2} mv_x^2, \quad E_h = \frac{1}{2} kx^2.$$

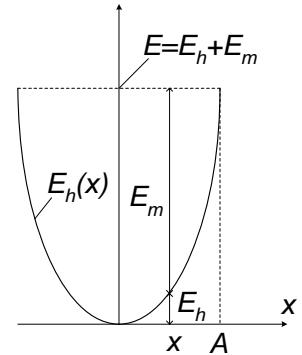
Ha az energia megmarad, akkor



$$E_m + E_h = E = \text{állandó.}$$

Mivel az  $x_{\max} = A$  maximális kitérésnél a rezgő tömegpont sebessége nulla, ekkor a teljes energiája helyzeti energia:

$E = E_h = \frac{1}{2} A^2$ . Ennek ismeretében a helyzeti energia-grafikonból megállapítható a helyzeti- és mozgási energia megoszlása bármilyen  $x$  kitérésnél (ábra).



### Helyzeti energia és egyensúlyi állapot

A helyzeti energia helyfüggése alapján azt is megállapíthatjuk, hogy egy test hol lehet *egyensúlyi helyzetben*, és ez az egyensúly milyen jellegű (stabilis vagy labilis). Tegyük fel, hogy egy pontszerűnek tekinthető test mindig azonos irányban (pl. Kelet felé) halad emelkedő és süllyedő szakaszokból álló pályán (pl. egy dombos vidéken haladó autó). Vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy az  $x$ -tengely a haladási irányba (Kelet) mutasson. Ekkor a nehézségi erőterben a test helyzeti energiája az  $x$ -koordináta függvényében pontosan az emelkedéseknek és süllyedéseknek megfelelően változik (ábra), hiszen a helyzeti energia arányos a magassággal.

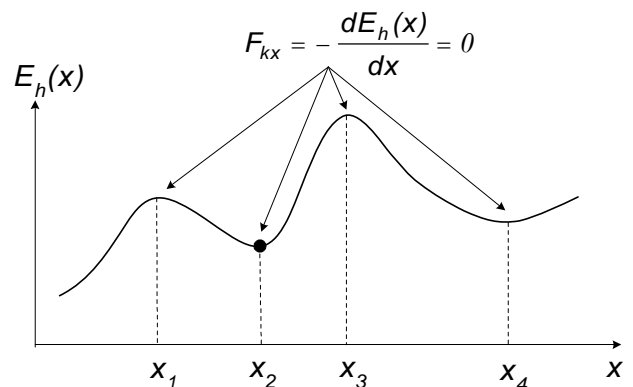
Ha a testre (a kényszererőn kívül) csak a nehézségi erő hat, akkor a lehetséges *egyensúlyi helyzetei* a helyzeti energia helyfüggését megadó görbéről leolvashatók. Egyensúlyban az eredő erő  $x$ -komponensének nullának kell lenni, azaz:

$$F_{kx} = -\frac{dE_h(x)}{dx} = 0,$$

vagyis ezeken a helyeken a görbének szélsőértéke van.

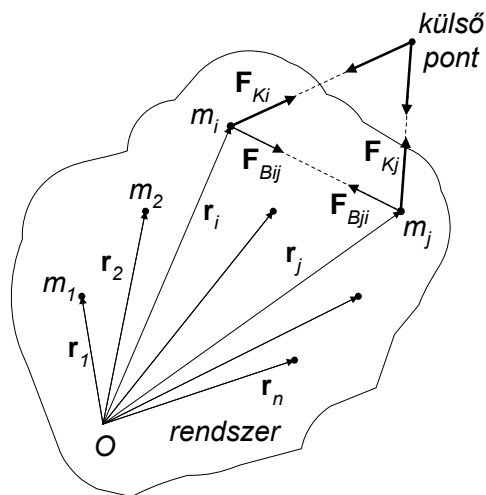
Belátható, hogy az ábrán páratlan számmal jelölt helyeken

(maximumok, ahol  $\frac{d^2 E_h(x)}{dx^2} < 0$ ) az egyensúly labilis, vagyis a testet kimozdítva az egyensúlyból, a fellépő erő az egyensúlyi helyzetből elviszi a testet, a páros számú helyeken (minimumok, ahol  $\frac{d^2 E_h(x)}{dx^2} > 0$ ) pedig az egyensúly stabilis, a kimozdításkor fellépő erő a testet visszaviszi az egyensúlyi helyzetbe.



## Tömegpont-rendszer mozgása

Bonyolultságban a tömegpont után következő, és gyakorlati szempontból is igen fontos eset, amikor több tömegpontból álló rendszert, ún. *tömegpont-rendszert* (rövidebben: *pontrendszert*) vizsgálunk. Az ábrán az általunk kiválasztott rendszerhez a körberajzolt területen lévő pontok tartoznak, ezeket a pontokat sorszámoztuk: az  $i$ -edik pont tömegét  $m_i$ -vel, helyzetvektorát  $\mathbf{r}_i$ -vel jelöljük. A tömegpontokra ható erőket célszerű két csoportba osztani: a rendszerhez tartozó pontok között fellépő erőket *belső erőknek*, a rendszeren kívül eső testek által a rendszer pontjaira kifejtett erőket pedig *külső erőknek* nevezzük. Jelöljük a  $j$ -edik pont által az  $i$ -edik pontra kifejtett (belső) erőt  $\mathbf{F}_{Bij}$ -vel, az  $i$ -edik pontra ható külső erők eredőjét pedig  $\mathbf{F}_{Ki}$ -vel.



### A tömegpontrendszer mozgása, tömegközéppont

A pontrendszer mozgása leírható, ha külön-külön minden pontra felírjuk a mozgásegyenletet:

$$\mathbf{F}_{K1} + \sum_{j=2}^n \mathbf{F}_{B1j} = m_1 \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{F}_{K2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \mathbf{F}_{B2j} = m_2 \mathbf{a}_2$$

.....

$$\mathbf{F}_{Ki} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{Bij} = m_i \mathbf{a}_i$$

.....

$$\mathbf{F}_{Kn} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n \mathbf{F}_{Bnj} = m_n \mathbf{a}_n .$$

Látható, hogy ez elég bonyolult leírási mód, ami a pontrendszerről, mint egészről nem sokat mond.

A teljes rendszer egyfajta jellemzését adja az az egyenlet, amit a fenti egyenletek összeadásával kapunk:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{Ki} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{Bij} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i .$$

Newton III. törvénye alapján könnyen belátható, hogy a belső erők összege nulla, így a rendszerre ható külső erők eredőjét  $\mathbf{F}_K$ -val jelölve, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\mathbf{F}_K = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i .$$

Jó lenne, ha a pontrendszerre a fenténél egyszerűbb, a tömegpont mozgásegyenletéhez hasonló összefüggést kaphatnánk, vagyis az egyenlet jobboldalát a pontrendszerre jellemző "egyetlen gyorsulás" és az  $m = \sum_i m_i$  össztömeg szorzataként írhatnánk fel. Ilyen egyenletre juthatunk,

ha a pontrendszer helyzetének globális jellemzésére bevezetjük egy speciális pontot, amit az alábbi módon definiálhatunk. Alakítsuk át a fenti mozgásegyenletet

$$\mathbf{F}_K = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) = m \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right),$$

és vegyük észre, hogy a zárójelben lévő mennyiség helyzetvektor jellegű. Tekintsük ezt a tömegpontok helyzete által egyértelműen meghatározott sajátos helyvektort a pontrendszer *tömegközéppontjának* ( $\mathbf{r}_{TK}$ ), amely eszerint

$$\mathbf{r}_{TK} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m} .$$

Kimutatható, hogy ez a pont valóban a pontrendszer tömegeloszlásának egyfajta centruma, ami homogén nehézségi erőterben azonos a rendszer súlypontjával.

A fenti mozgásegyenletben a tömegközéppont helyzetvektorának második időderiváltja, vagyis a tömegközéppont gyorsulása ( $\mathbf{a}_{TK}$ ) szerepel, így a rendszer mozgását leíró egyenlet az alábbi egyszerű alakot ölti

$$\mathbf{F}_K = m \mathbf{a}_{TK} .$$

Eszerint a *pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer egész tömege a tömegközéppontban lenne elhelyezve, és erre a külső erők eredője hatna.*

Mivel a kiterjedt, merevnek tekinthető testek pontrendszerként is felfoghatók, ez az eredmény azt mutatja, hogy egy ilyen test haladó mozgása úgy írható le, mintha a test pontszerű lenne, és tömege a tömegközéppontjában lenne összesűrítve. Vagyis a fenti eljárást követve, *kiterjedt testek haladó mozgásának leírására a már megismert tömegpont-mozgásegyenlet használható.*

### **A lendület (mozgásmennyiség)-megmaradás tétele pontrendszerben**

A lendületre vonatkozó összefüggéshez úgy juthatunk el, hogy a tömegközéppont mozgásegyenletét a lendületváltozás segítségével írjuk fel. Ehhez szükségünk lesz a tömegközéppont sebességének kifejezésére:

$$\mathbf{v}_{TK} = \frac{d\mathbf{r}_{TK}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{m} .$$

Ebből látható, hogy a pontrendszer lendületösszege ( $\mathbf{p}_R$ ) kifejezhető a rendszer össztömegének és a tömegközéppont sebességének szorzatával:

$$\mathbf{p}_R = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_{TK}$$

Eszerint a tömegközéppont ebből a szempontból is úgy viselkedik, mint egy olyan tömegpont amelynek tömege a pontrendszer össztömegével egyenlő.

A mozgásegyenlet ezzel így írható át:

$$\mathbf{F}_K = m\mathbf{a}_{TK} = m \frac{d\mathbf{v}_{TK}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_{TK}) = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{v}_i \right),$$

vagyis a külső erők eredője egyenlő a rendszer összes lendületének változási sebességével:

$$\mathbf{F}_K = \frac{d\mathbf{p}_R}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{v}_i \right).$$

Ebből következik, hogy ha a külső erők eredője nulla ( $\mathbf{F}_K = 0$ ), akkor:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) = 0,$$

azaz

$$\mathbf{p}_R = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{állandó}.$$

Vagyis, ha a pontrendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor a rendszer összes lendülete nem változik. Ez a *lendületmegmaradás törvénye pontrendszerre* (használatos még a mozgásmennyiség-megmaradás illetve impulzusmegmaradás elnevezés is).

A törvény jelentősége, többek között az, hogy mechanikai problémák megoldásánál olyan egyenletet ad, amelyből ismeretlen sebesség határozható meg, anélkül, hogy integrálnunk kellene a mozgásegyenletet. (Ennek a megmaradási törvénynek speciális esetét láttuk korábban két kölcsönható testre).

### **Pontrendszer energiája, a mechanikai energia megmaradásának tétele pontrendszerben**

A pontrendszer energiájának vizsgálatánál az egyes pontokra felírt munkatételből indulhatunk ki. Ha a rendszer az 1 állapotából a 2 állapotba megy át, akkor a munkatétel az  $i$ -edik pontra:

$$W_{ei} = \Delta E_{mi} = E_{mi2} - E_{mi1},$$

ahol  $W_{ei}$  az  $i$ -edik pontra ható erők eredőjének munkája. Ha ezeket az egyenleteket összeadjuk, akkor a baloldalon a pontrendszerre ható összes erők munkáját, a jobboldalon pedig a pontrendszer teljes mozgási energiájának megváltozását kapjuk:

$$W_e = \Delta E_m = E_{m2} - E_{m1}.$$

Ha különválasztjuk a külső- és belső erők munkáját ( $W_K$  és  $W_B$ ), ezeken belül pedig a konzervatív- és nem konzervatív erők munkáját ( $W_{K,k}$ ,  $W_{K,nk}$ ,  $W_{B,k}$ ,  $W_{B,nk}$ ), akkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} + W_{K,k} + W_{B,k} = E_{m2} - E_{m1}.$$

Felhasználva, hogy a konzervatív erők munkája a helyzeti energia megváltozásának negatívja, átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} = E_{m2} - E_{m1} + E_{hB2} - E_{hB1} + E_{hK2} - E_{hK1},$$

ahol a helyzeti energia-tagoknál a  $B$  és  $K$  index a belső kölcsönhatásokból, illetve a külső testekkel való kölcsönhatásból származó helyzeti energiára utal. Az összefüggést átrendezéssel áttekinthetőbb alakba írhatjuk:

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} = (E_{m2} + E_{hB2} + E_{hK2}) - (E_{m1} + E_{hB1} + E_{hK1}),$$

ahol a zárójelben lévő tagok a rendszer összes mechanikai energiáját jelölik a rendszer kezdeti (1) és végső (2) állapotában. Ha az összes mechanikai energiát  $E_R$ -rel jelöljük

$$E_R = E_m + E_{hB} + E_{hK},$$

akkor az energiaváltozás általános összefüggését tömören így írhatjuk:

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} = E_{R2} - E_{R1} = \Delta E_R,$$

vagyis a rendszer energiájának megváltozása a nem konzervatív erők munkájával egyenlő. Az eredmény tehát ugyanaz, mint a tömegpont esetén, azzal a különbséggel, hogy itt az energia és munka kifejezései bonyolultabbak, mint a tömegpontnál.

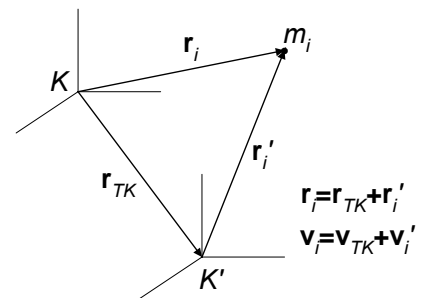
Ha a nem konzervatív erők munkája nulla (például úgy, hogy nincsenek ilyen erők), akkor

$$\Delta E_R = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{R2} = E_{R1},$$

vagyis a rendszer összes mechanikai energiája nem változik. Ez az *energia-megmaradás tétele pontrendszerre*. Jelentősége gyakorlati szempontból ugyanaz, mint a lendület-megmaradás törvényéé: olyan egyenletet ad, amelyből pl. ismeretlen sebesség határozható meg, anélkül, hogy integrálnunk kellene a mozgásegyenletet.

A pontrendszer mozgási energiájának kifejezését tovább vizsgálva, egy újabb fontos mennyiséghez juthatunk el. Vizsgáljuk a pontrendszer mozgási energiáját egy  $K$  koordináta-rendszerből és a hozzá képest egyenletesen mozgó  $K'$  rendszerből, amelyet a pontrendszer tömegközéppontjához rögzítettünk (ábra). Írjuk fel a pontrendszer mozgási energiáját a  $K$  rendszerben, és fejezzük ki azt a  $K'$  rendszerbeli adatokkal:

$$\begin{aligned} E_m &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{TK}) \cdot (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{TK}) \end{aligned}$$



(itt alkalmaztuk az ábrán is feltüntetett Galilei transzformációt).

A műveleteket elvégezve azt kapjuk, hogy

$$E_m = \frac{1}{2} \sum_i m_i (v_i'^2 + v_{TK}^2 + 2\mathbf{v}'_i \mathbf{v}_{TK}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{TK}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{TK} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i.$$

Az utolsó tagban szereplő összeg arányos a tömegközéppont sebességével a  $K'$  rendszerben, mivel azonban a  $K'$  rendszer a pontrendszer tömegközéppontjához van rögzítve, ez a sebesség nulla:

$$E_m = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{TK}^2.$$

Ebből rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2,$$

vagyis a pontrendszer mozgási energiája felírható a tömegközéppontba képzelt össztömeg mozgási energiájának és a tömegközéppontban lévő megfigyelő által észlelt sebességekkel ( $v'_i$ ) számított mozgási energiák összegeként.

Ezzel a rendszer összes mechanikai energiája

$$E_R = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + E_{hK} + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + E_{hB}.$$

Ha a rendszer tömegközéppontjával együtt mozgunk (vagyis  $K=K'$ ), akkor a tömegközéppont áll, tehát az első tag nulla. Ha ezenkívül a rendszerre külső erők nem hatnak, akkor a külső helyzeti energia (második tag) is nulla. A tömegpont-rendszer energiája ekkor

$$E_B = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + E_{hB},$$

amit a rendszer belső energiájának neveznek. Az elnevezés logikus, hiszen ez a külső hatásoktól mentes rendszer tömegközéppontjában „ülő” megfigyelő által észlelt mozgási

energia és a pontrendszer tagjai között fellépő belső kölcsönhatásokból származó helyzeti energia összege.

### Perdület és forgatónyomaték, a perdületmegmaradás tétele pontrendszerben

A lendület és az energia bevezetését az indokolja, hogy ezekre a mennyiségekre bizonyos körülmények között megmaradási törvény érvényes. Ugyanez az oka a *perdület* (*impulzusmomentum*) ( $\mathbf{N}$ ) bevezetésének is.

Egy pontrendszer  $\mathbf{r}_i$  helyvektorú,  $\mathbf{p}_i$  impulzusú  $i$ -edik tömegpontjának  $\mathbf{N}_i$  perdülete az  $O$  vonatkoztatási pontra (ábra):

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

A definícióból látszik, hogy a perdület függ a vonatkoztatási ponttól, tehát egyértelmű megadásához ezt is meg kell adni.

Ha a mozgó pontra ható erők  $\mathbf{F}_i$  eredője nem nulla, akkor a sebesség- és általában a perdület is változik. Ezt a változást megkaphatjuk a fenti egyenlet differenciálásával:

$$\frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

A jobboldal első tagja két párhuzamos vektor ( $\mathbf{v}_i$  és  $\mathbf{p}_i$ ) vektorszorzata, ezért ez a tag nulla, a második tagban pedig a lendület időderiváltja az eredő erővel egyenlő, ezért

$$\frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

A jobboldalon megjelenő mennyiséget az  $\mathbf{F}_i$  erő  $O$  pontra vonatkozó *forgatónyomatékának* ( $\mathbf{M}_i$ ) nevezzük. Ezzel a perdület megváltozása és az eredő forgatónyomaték között az alábbi összefüggést kapjuk

$$\frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \mathbf{M}_i.$$

Egy pontrendszer perdülete ( $\mathbf{N}_R$ ) az egyes pontok perdületeinek vektori összege, az eredő forgatónyomaték ( $\mathbf{M}_R$ ) pedig az egyes pontokra ható forgatónyomatékok vektori összege, vagyis a pontrendszerre vonatkozó egyenletet a pontokra vonatkozó egyenletek összeadásával kaphatunk. A korábban követett eljáráshoz hasonlóan, itt is szétválasztjuk a külső- és belső erők forgatónyomatékát:

$$\sum_i \frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{N}_R}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Ki} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Bi} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Ki} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{Bij}.$$

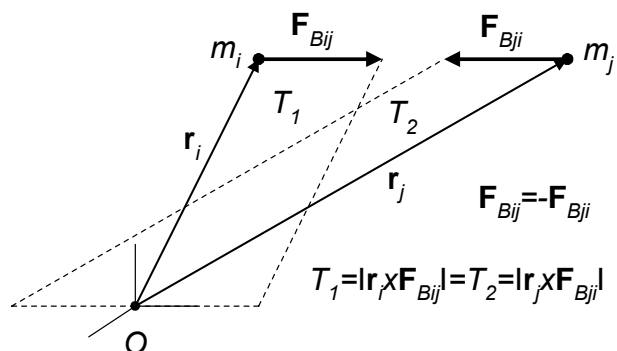
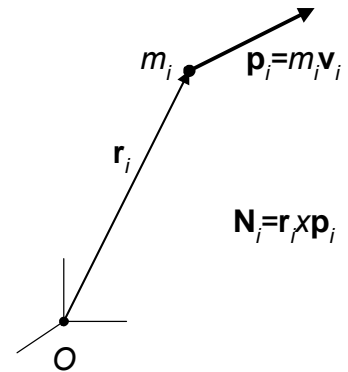
Newton III. törvénye és a forgatónyomaték definíciója alapján belátható (ábra), hogy a belső erők forgatónyomatékainak összege nulla lesz, így a rendszerre a

$$\frac{d\mathbf{N}_R}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Ki} = \mathbf{M}_K$$

egyenletet kapjuk, ahol  $\mathbf{M}_K$  a külső erők forgatónyomatékainak összege.

Ha a külső forgatónyomatékok eredője nulla, akkor a fenti egyenlet szerint

$$\frac{d\mathbf{N}_R}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}_R = \text{állandó},$$



vagyis a perdület nem változik. Ez a *perdület megmaradásának tétele pontrendszerre*.



## Merev test mozgása

Eddig olyan idealizált "testek" mozgását vizsgáltuk, amelyek a tömegpont modelljén alapultak. Ez azzal az előnnyel járt, hogy nem kellett foglalkozni a test kiterjedésével kapcsolatos mozgási lehetőségekkel, a forgással és a deformációval. Egy fokkal közelebb jutunk a valósághoz, de még mindig viszonylag egyszerűen leírható mozgást kapunk, ha kiterjedt testet vizsgálunk, amelyet azonban az egyszerűség kedvéért merevnek tekintünk, vagyis elhanyagoljuk a test alakváltozásait. A kiterjedt, de alakját nem változtató test a *merev test*.

### A merev test kinematikájának alapjai

#### A merev test általános mozgása

A merev test mozgásának leírását a mozgás leírásához szükséges adatok, az ún. *szabadsági fokok* ( $f$ ) számának vizsgálatával kezdjük.

Egy tömegpont mozgását egy helyvektorral, vagyis 3 skalár adattal jellemezhetjük, a tömegpont szabadsági fokainak száma tehát  $f=3$ .

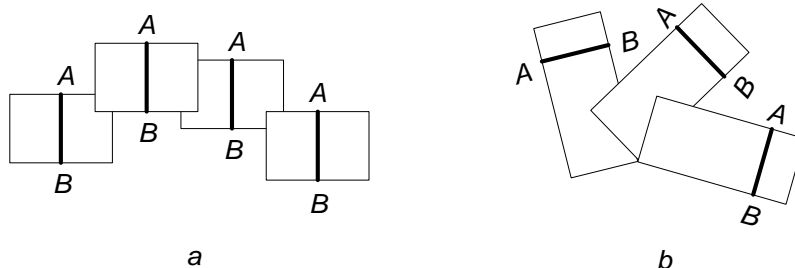
Egy merev test helyzetét akkor ismerjük, ha megadjuk három – nem egy egyenesbe eső – pontjának helyzetét, vagyis összesen 9 adatot, pl. a három pont derékszögű koordinátáit. (Ha egy pontot adunk meg, akkor ekörül tetszőlegesen foroghat a test, ha még egy pontot megadunk, akkor a pontokon áthaladó tengely körül még mindig foroghat, egy harmadik, a tengelyen kívül eső pont megadása rögzíti a test helyzetét.)

A valóságban azonban ennél kevesebb adat is elegendő, hiszen a test merevsége azt jelenti, hogy bármely két pontjának távolsága állandó. Így a három pont közötti három távolságot kifejezve pl. a pontok koordinátaival, a 9 koordináta között 3 összefüggést kapunk. A 9 adat közül tehát csak 6 független, ezért a szabad merev test szabadsági fokainak száma  $f=6$ .

Ha a merev test nem mozoghat szabadon, hanem mozgását valamilyen kényszer korlátozza (pl. egy kerék egy felületen gurul, vagy a test egy pont körül vagy rögzített tengely körül forog), akkor a szabadsági fokok száma a kényszertől függő mértékben csökken (a felsorolt példákban rendre  $f=5$ ,  $f=3$  és  $f=1$ ).

A merev test lehetséges mozgásai közül a legegyszerűbb a *haladó mozgás*, vagy más néven *transzláció*, amikor a test minden pontja ugyanolyan pillanatnyi sebességgel mozog, vagyis az egyes pontok mozgása egymással párhuzamos pályákon zajlik. Ez egyben azt is jelenti, hogy a testben felvett egyenes térbeli helyzete a mozgás során nem változik, önmagával párhuzamosan mozdul el (pl. az AB szakasz az *a* ábrán). Így mozog egy egyenes pályán haladó szán, vagy az "óriáskerék" kabinja. Mivel ilyenkor az összes pont ugyanúgy mozog, elég egyetlen pont mozgását jellemezni.

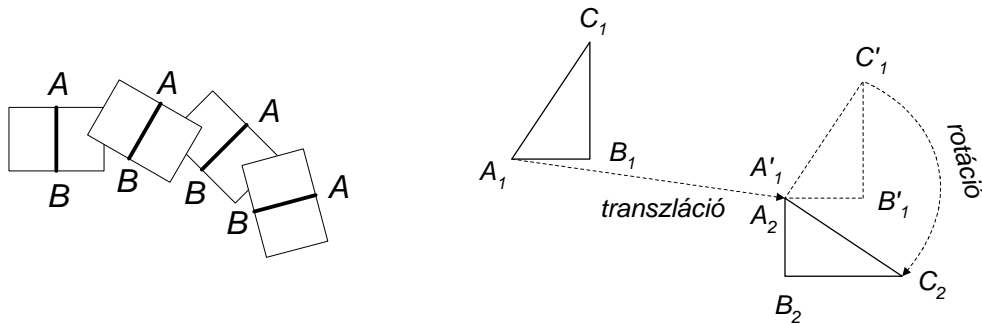
A merev test mozgása tulajdonképpen tömegpontoszerű apró részek mozgásaként is felfogható,



ezért haladó mozgásának leírására használhatók a tömegpontra vonatkozó összefüggések, így például a tömegközépponti tétel is.

A merev test másik – a tömegponthoz képest új – mozgási módja a *tengely körüli forgás* vagy más néven *rotáció*. Eközben a test különböző pontjai különböző sebességgel mozognak, és a testben felvett egyenes térben elfordul (*b* ábra).

A merev test mozgása közben általában mindkét mozgási mód egyidejűleg jelenik meg (baloldali ábra). Ez figyelhető meg pl. egy elgurított kerék, egy elhajított test vagy egy



kanyarodó jármű esetében. A szemlélet is azt sugallja, de be is bizonyítható, hogy a *merev test tetszőleges mozgása elemi transzlációk és rotációk egymásutánjaként fogható fel*. Ezt az eljárást egy síkidomnak a saját síkjában történő elmozdulása (az 1 helyzetből a 2 helyzetbe) kapcsán a jobboldali ábra szemlélteti: az  $A_1 \rightarrow A_2$  transzlációval, és az azt követő  $A_2 (A'_1)$  körüli forgatással tetszőleges elmozdulás létrehozható.

\*\*\*\*\*

A merev test mozgásának transzlációra és rotációra történő felbontását könnyen bemutathatjuk, ha egy pontjának mozgását egy külső  $K$  koordináta-rendszerből és a test tömegközéppontjához rögzített  $K^{TK}$  rendszerből is megvizsgáljuk (ábra).

A helyvektorok között ekkor fennáll az

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{TK} + \mathbf{r}_i^{TK}$$

összefüggés, amiből a sebességekre azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{TK} + \mathbf{v}_i^{TK}$$

Mivel a tömegközéppont és az  $i$ -edik pont távolsága adott, a pont  $\mathbf{v}_i^{TK}$  pillanatnyi

sebessége merőleges lesz az  $\mathbf{r}_i^{TK}$  helyvektorra, így ez a sebesség a két vektorra

merőleges  $\boldsymbol{\omega}$  szögsebesség-vektorral adható meg:

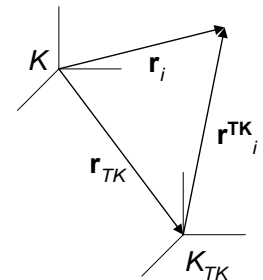
$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{TK} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^{TK}).$$

Ez azt jelenti, hogy a merev test bármely pontjának mozgása felbontható a tömegközéppont transzlációs mozgására és a tömegközépponton átmenő tengely körüli forgásra. A megfelelő forgástengely helyzete azonban a pont tényleges sebességétől függ, vagyis a mozgás során változik, ezért ez a felbontás csak elemi elmozdulásokra igaz. Mivel a fenti gondolatmenet a test bármelyik pontjára érvényes, azt is kimondhatjuk, hogy az egész merev test mozgása a tömegközéppont elemi transzlációinak és a tömegközépponton átmenő tengely körüli elemi forgásoknak az egymásutánjaként fogható fel.

\*\*\*\*\*

## A merev test mint pontrendszer

A merev testet kis részekre felosztva (ábra), közelítőleg pontokból állónak tekinthetjük, és a pontrendszerre vonatkozó összefüggéseket használhatjuk. A pontos leíráshoz úgy jutunk el, hogy a felosztást egyre finomítjuk és megnézzük, hogy eközben a pontrendszerre felírt



mennyiségek milyen határértékhez tartanak. A merev testre vonatkozó mennyiségekként illetve összefüggésekként a határértéket fogadjuk el (bebizonyítható, hogy ezek a határértékek léteznek, de ezzel itt nem foglalkozunk).

A felosztás alapján a test teljes térfogatát és teljes tömegét a

$$V = \sum_i \Delta V_i \quad m = \sum_i \Delta m_i$$

összefüggések adják meg. A teljes tömeg a sűrűséggel is kifejezhető az  $m = \rho \Delta V$  összefüggés felhasználásával. Mivel a sűrűség a helytől is függhet, az  $i$ -edik térfogatelem közelítő tömegét a térfogatelemben érvényes átlagos  $\rho_i$  sűrűséggel a  $\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$  összefüggés adja meg. Ezzel a teljes tömeg közelítő értéke

$$m \approx \sum_i \rho_i \Delta V_i,$$

a pontos érték pedig a felosztás finomításával kapható meg

$$m = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \rho_i \Delta V_i = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Itt az egyenlet jobboldalán álló ún. térfogati integrállal itt nem foglalkozunk részletesebben. Egyelőre elég, ha végtelenül finom felosztáson történő összegzésnek tekintjük, amelyben  $dV$  az  $\mathbf{r}$  helyvektorral megadott pont körül felvett elemi térfogatot jelent.

A pontrendszeréknél bevezetett tömegközéppont helyvektorát folytonos tömegeloszlás esetére ugyanezzel a módszerrel általánosíthatjuk:

$$\mathbf{r}_{TK} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{r}_i \Delta m_i}{\sum_i \Delta m_i} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{r}_i \rho_i \Delta V_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Ezzel a modellel elértük azt, hogy a pontrendszerre érvényes kinematikai és dinamikai törvényeket változatlan formában lehet alkalmazni, csak végül mindig át kell térni a végtelenül finom felosztásnak megfelelő határértékre.

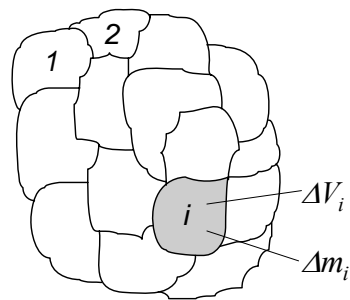
### **Merev test dinamikája**

A merev test mozgásának leírására szolgáló egyenletekhez a legegyszerűbben úgy juthatunk el, ha igen kis – pontszerűnek tekinthető – részekre osztjuk, és speciális, egymáshoz képest rögzített helyzetű pontokból álló pontrendszerként tárgyaljuk. Mivel a pontrendszerre vonatkozó törvényeket ismerjük, ezzel a módszerrel a merev testre vonatkozó összefüggésekhez is eljuthatunk.

Mivel a merev test mozgása translációra és rotációra bontható, a mozgás leírása is két részből áll. A transláció leírása a pontrendszeréknél érvényes tömegközépponti tétellel lehetséges: a külső erők a tömegközéppontban egyesített teljes tömegre hatnak, és a tömegközéppont mozgását a tömegpontra érvényes mozgásegyenlet írja le.

A továbbiakban a translációval részletesebben nem foglalkozunk, hanem elsősorban a – tömegpont mozgásához képest új – forgást vizsgáljuk.

A forgómozgás vizsgálatát is több lépésben, az egyszerűtől a bonyolult felé haladva végezzük el.



## Rögzített tengely körül forgó merev test mozgása

Először a legegyszerűbb esettel foglalkozunk, amikor a test egy rögzített tengely körül foroghat. Ez az eset egyszerűsége mellett azért is fontos, mert módot ad a legfontosabb alapfogalmak bevezetésére, és gyakorlati szempontból is fontos.

### Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete és mozgásegyenlete, a tehetetlenségi nyomaték

A pontrendszerek vizsgálatánál láttuk, hogy a rendszer perdületének bevezetésével egy mozgásegyenletet tudunk felírni:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}_K, \quad \text{illetve merev testre} \quad \frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}.$$

(itt csak külső forgatónyomaték van, így a megkülönböztető „K” index felesleges).

Írjuk fel ezért először a merev test perdületét. Vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy a z-tengely a rögzített forgástengelyre essen (ábra). A testet osszuk fel térfogatelemekre, és a számítást az így kapott "közelítő pontrendszeren" végezzük el. Az egyes térfogatelemek körpályán mozognak, az i-edik tömegelem perdülete:

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i.$$

Mivel a vektorszorzatban szereplő vektorok merőlegesek egymásra, a perdület nagysága

$$N_i = r_i \Delta m_i v_i.$$

A rögzített tengely miatt a perdületet csak a forgatónyomaték z-komponense tudja változtatni (a másik két komponens a tengely kikompenzálja), ezért a mozgásegyenletnek és a perdületnek csak a z-komponensét érdemes felírni:

$$N_{iz} = N_i \cos \vartheta_i = r_i \Delta m_i v_i \cos \vartheta_i.$$

Mivel a tengelytől mért távolság és a helyvektor hossza között fennáll az  $R_i = r_i \cos \vartheta_i$  összefüggés, végül az

$$N_{iz} = N_i \cos \vartheta_i = R_i \Delta m_i v_i = \Delta m_i R_i^2 \omega_z$$

összefüggést kapjuk (itt felhasználtuk, hogy a körmozgásnál  $v = R\omega$ ), aminek az az előnye, hogy benne az egyes tömegek sebességei helyett a közös szögsebesség szerepel.

A teljes test perdületének z-komponense ennek alapján közelítőleg:

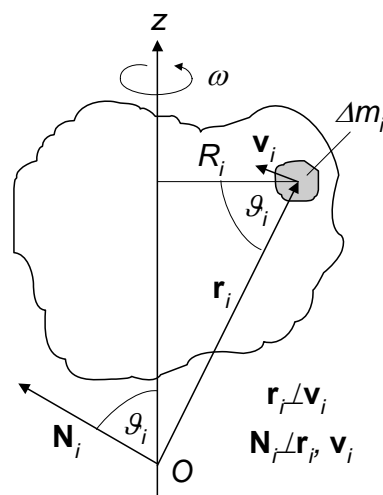
$$N_z \approx \sum_i N_{iz} = \sum_i \Delta m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum_i \Delta m_i R_i^2.$$

Az összeget pontszerűnek tekinthető térfogatelemek esetén a testnek az adott tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékának* nevezik, és rendszerint  $\theta$ -val jelölik:

$$\theta_z \approx \sum_i \Delta m_i R_i^2.$$

A tehetetlenségi nyomaték adott össztömeg esetén alapvetően a test tömegének a rögzített tengely körüli eloszlásától függ, vagyis nagyságát a test tömege, alakja és a tengely helyzete egyaránt befolyásolja.

A tehetetlenségi nyomaték fenti kifejezése pontos eredményt csak tömegpontokból álló testnél ad. A merev test rendszerint nem tekinthető ilyennek, ezért általában



végtelen finom felosztáson történő összegzéssel, vagyis integrálással számítható ki ( $l$  később).

A tehetetlenségi nyomaték ismeretében a rögzített tengely körül forgó merev test perdületének  $z$ -komponense az egyszerű

$$N_z = \Theta_z \omega_z$$

alakba írható.

A pontrendszeréknél kapott mozgásegyenlet ennek alapján:

$$\frac{dN_z}{dt} = \frac{d(\Theta_z \omega_z)}{dt} = M_{Kz} = M_z.$$

Ha a tehetetlenségi nyomaték időben állandó, akkor a mozgásegyenlet a

$$\Theta_z \frac{d\omega_z}{dt} = \Theta_z \beta_z = M_z$$

alakot ölti, ahol  $\beta_z$  a szöggyorsulás.

Az egyenletről a forgatónyomatékok és a tehetetlenségi nyomaték ismeretében a szöggyorsulás, abból integrálással a szögsebesség, újabb integrálással pedig a szögelfordulás időfüggése meghatározható.

A fenti mozgásegyenlet egy másik fontos következménye, hogy ha a külső forgatónyomatékok eredője nulla, akkor a perdület megmarad, és érvényes a

$$\Theta_z \omega_z = \text{állandó}$$

összefüggés. Ezt az összefüggést számos egyszerű kísérlettel lehet szemléltetni.

#### KÍSÉRLETEK:

A kísérleteket függőleges tengely körül forgatható székre ültetett személy végzi.

- ◆ A kísérletező mindkét kinyújtott kezébe súlyzókat adunk, majd forgásba hozzuk. Ha a kísérletező a súlyzókat behúzza, akkor forgása felgyorsul (kisebb az " $R$ " és így a  $\theta$ , ezért nagyobb lesz az  $\omega$ ), a súlyzókat újra kinyújtva, a forgás lelassul. Ugyanez az oka annak, hogy a kinyújtott karokkal lassan forgó korcsolyázó gyors forgásba tudja hozni magát (piruett) kezeinek behúzásával.
- ◆ A kísérletező kezébe függőleges tengelyű biciklikereket adunk. Ha a kereket a tengelye körül megforgatja, akkor a forgószerk ellenkező irányban forogni kezd, ha a kereket megállítja, a forgószerk megáll (perdület-megmaradás).
- ◆ Ha a kísérletező kezébe forgó kereket adunk, akkor nem történik semmi, de ha a forgó kerék tengelyét  $180^\circ$ -kal elfordítja, akkor a szerk a kerék forgásirányával ellentétesen forogni kezd.

#### A tehetetlenségi nyomaték kiszámítása, a Steiner tétel

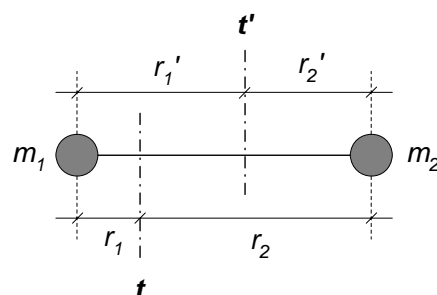
A tehetetlenségi nyomatékokat a fenti definíció alapján csak akkor lehet kiszámítani, ha a merev test valóban pontszerűnek tekinthető részekből áll. Közelítőleg ez az eset áll fenn pl., ha egy súlyzószerű testben a súlyzó nyelének tömege elhanyagolható a súlyoké mellett, és a súlyok mérete elhanyagolható a távolságuk mellett. Ebben az esetben az ábrán látható  $t$  tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2.$$

Látható, hogy egy másik ( $t'$ ) tengelyt választva, a tehetetlenségi nyomaték általában más lesz:

$$\Theta' = m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2,$$

vagyis a tehetetlenségi nyomaték nem egyszerűen



a test jellemzője, hanem azt a test és a tengelynek a testhez viszonyított helyzete együttesen határozza meg.

Hasonlóan egyszerű a tehetetlenségi nyomaték számítása, ha a test teljes tömege ( $m$ ) egy nagy sugarú ( $R$ ) körvonal vagy hengerfelület mentén helyezkedik el, és a tömegelemek a sugárhoz képest elhanyagolható vastagságú rétegben (gyűrű vagy cső) található. Ilyenkor az összegzésben szereplő tömegek közel azonos távolságra vannak a forgástengelytől, ezért közelítőleg igaz, hogy

$$\Theta \approx \sum_i \Delta m_i r_i^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2 .$$

A testek azonban többnyire nem ilyenek, ezért ez a módszer általában nem használható. Az általános számítási eljárás a végtelenül finom felosztásra, majd integrálásra való áttérése alapján:

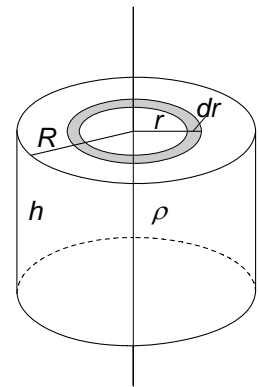
$$\Theta = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \rho_i \Delta V_i = \int_V r^2 \rho(\mathbf{r}) dV .$$

Ha a test homogén, akkor a sűrűség mindenütt ugyanannyi, és az egyszerűbb

$$\Theta = \rho \int_V r^2 dV$$

alakot kapjuk.

Bonyolult alakú test vagy általános helyzetű forgástengely esetén ennek az integrálnak a kiszámítása nagyon bonyolult is lehet, ha azonban a test szimmetrikus, és a forgástengely szimmetriatengely is, akkor egyszerűbb a számítás. Egyszerű példaként egy henger alakú homogén testnek a hengerpaláستtal párhuzamos szimmetriatengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát számítjuk ki. A számítás azért egyszerű, mert a térfogatelemet egy vékonyfalú csőnek választva (ábra), a fenti térfogati integrál sugár szerinti integrállá alakítható. A kiszemelt térfogatelem  $dV = 2r\pi h dr$ , így a tehetetlenségi nyomaték:



$$\Theta = \rho \int_V r^2 dV = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} mR^2 .$$

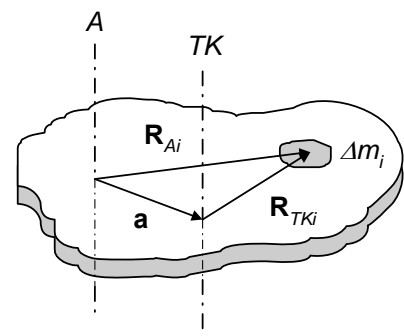
Adott test esetén a tehetetlenségi nyomaték attól függ, hogy a forgástengely hogyan helyezkedik el a testhez képest. Gyanítható azonban, hogy a különböző tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok nem függetlenek egymástól. Egy ilyen összefüggést ad meg egymással párhuzamos tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok között az ún. *Steiner-tétel*.

Az ábra egy testnek olyan szeletét mutatja, amely merőleges a tömegközépponton átmenő  $TK$ - és a vele párhuzamos  $A$  tengelyre. Az  $i$ -edik tömegelem helyzetét a két tengelyhez viszonyítva az  $\mathbf{R}_{Ai}$  és az  $\mathbf{R}_{TKi}$  vektorok, a két tengely relatív helyzetét az  $\mathbf{a}$  vektor mutatja; mindhárom vektor merőleges a tengelyekre. A tömegelem tehetetlenségi nyomatéka a két tengelyre:

$$\Theta_{Ai} = R_{Ai}^2 \Delta m_i$$

$$\Theta_{TKi} = R_{TKi}^2 \Delta m_i$$

Mivel  $\mathbf{R}_{Ai} = \mathbf{a} + \mathbf{R}_{TKi}$ , azt kapjuk, hogy



$$\begin{aligned}\Theta_{Ai} &= R_{Ai}^2 \Delta m_i = (\mathbf{a} + \mathbf{R}_{TKi})^2 \Delta m_i = a^2 \Delta m_i + R_{TKi}^2 \Delta m_i + 2\mathbf{a}\mathbf{R}_{TKi} \Delta m_i = \\ &= a^2 \Delta m_i + \Theta_{TKi} + 2\mathbf{a}\mathbf{R}_{TKi} \Delta m_i.\end{aligned}$$

Itt  $|\mathbf{a}| = a$  a két párhuzamos tengely távolsága.

A teljes tehetetlenségi nyomatékot úgy kapjuk meg, hogy ezt az összeget a testben felvett párhuzamos szeletek minden tömegelemére kiszámítjuk, és összeadjuk:

$$\Theta_A = a^2 \sum_i \Delta m_i + \Theta_{TK} + 2\mathbf{a} \sum_i \mathbf{R}_{TKi} \Delta m_i = a^2 m + \Theta_{TK} + 2\mathbf{a} \sum_i \mathbf{R}_{TKi} \Delta m_i.$$

Az utolsó tag a test tömegközéppont-vektorának a tengelyekre merőleges összetevőjét adja meg a tömegközépponti rendszerben, értéke tehát nulla, így végül azt kapjuk, hogy

$$\Theta_A = a^2 m + \Theta_{TK},$$

ahol  $m$  a test teljes tömege.

Vagyis egy tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot kiszámíthatjuk, ha ismerjük a vele párhuzamos, tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot. Ez a *Steiner-tétel*.

### **Rögzített tengely körül forgó merev test energiája**

A rögzített tengely körül forgó test mechanikai energiája a forgásból származó mozgási energiával egyenlő. Ez a térfogatelemekre osztás technikájával könnyen kiszámítható:

$$E_f = \sum_i E_{mi} = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i R_i^2 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2.$$

Az egyidejűleg haladó- és forgómozgást végző test mozgási energiáját a korábban a pontrendszerre kapott összefüggéssel kaphatjuk meg:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{TK} \omega^2.$$

Itt  $v_{TK}$  a tömegközéppont sebessége a koordináta-rendszerünkhöz képest,  $v_i'$  az  $i$ -edik tömegelem sebessége a tömegközépponti rendszerben (ezért szerepel itt a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték).

A teljes mozgási energia tehát a tömegközéppontba képzelt össztömeg haladó mozgásából származó mozgási energiából és a tömegközépponti tengely körüli forgásból származó forgási energiából áll.

Ha külső konzervatív erőterben a testnek helyzeti energiája is van (belső helyzeti energia merev testnél nincs), akkor ez hozzáadódik a mozgási energiához.

$$E = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{TK} \omega^2 + E_h.$$

Ahogy a pontrendszernél, úgy itt is igaz, hogy a mechanikai energia megváltozása a nem konzervatív erők munkájával egyenlő (itt csak külső erők vannak):

$$\Delta E = W_{nk}.$$

Ha a nem konzervatív erők munkája nulla, akkor a mechanikai energia megmarad:

$$E = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{TK} \omega^2 + E_h = \text{állandó}.$$

### **Rögzített tengely körüli forgás és a haladó mozgás analógiája**

Ha a rögzített tengely ( $z$ ) körül forgó merev test tehetlenségi nyomatéka nem változik, akkor a mozgásegyenlet a

$$\Theta_z \frac{d\omega_z}{dt} = \Theta_z \beta_z = M_z$$

alakba írható. Ebből a  $\varphi$  szögelfordulás időfüggésére az alábbi egyenletet kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy  $\omega_z = \frac{d\varphi(t)}{dt}$

$$M_z = \Theta_z \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}.$$

Ez az egyenlet formailag teljesen azonos az  $x$ -tengely mentén zajló haladó mozgásra felírt

$$F_x = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Newton-féle mozgásegyenlettel, csak az erő helyett forgatónyomaték, a tömeg helyett tehetetlenségi nyomaték, a koordináta helyett pedig szögelfordulás szerepel benne. Az egyenlet megoldása az említett mennyiségek átírása után nyilván ugyanolyan, mint a haladó mozgás esetén. Így például állandó forgatónyomaték esetén

$$\beta_z = \frac{M_z}{\Theta_z}$$

$$\omega_z(t) = \int_{t_0}^t \beta_z dt = \omega_0 + \beta_z(t - t_0)$$

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \omega_z(t) dt = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \beta_z(t - t_0)^2,$$

tehát a haladó mozgás összefüggéseivel azonos alakú összefüggéseket kapunk.

Láttuk, hogy a forgási energia kifejezése is megerősíti ezt a felismerést, hiszen az

$$E_f = \frac{1}{2} \Theta_z \omega_z^2$$

kifejezés az említett mennyiségek cseréjével a haladó mozgás mozgási energia-kifejezésével azonos.

Az  $x$ -tengely menti haladó mozgás minden összefüggése átírható a  $z$ -tengely körüli forgómozgás összefüggésévé (és viszont), ha végrehajtjuk az alábbi cseréket:

$$F_x \Leftrightarrow M_z$$

$$m \Leftrightarrow \Theta_z$$

$$a_x \Leftrightarrow \beta_z$$

$$v_x \Leftrightarrow \omega_z$$

$$x \Leftrightarrow \varphi.$$

### ***Merev test mozgásegyenletének néhány alkalmazása***

A mozgásegyenlet alkalmazására három egyszerű esetet vizsgálunk meg, az egyik a torziós inga, a másik a fizikai inga, a harmadik pedig egy lejtőn legördülő henger vagy gömb.

#### ***Torziós inga***

A torziós inga egy rugalmas szálla felfüggesztett test, például egy korong (ábra), ami a szála csavarásával elindítva, függőleges tengely körül lengőmozgást végez. A korong tehetetlenségi nyomatéka a szálla, mint tengelyre vonatkozóan  $\Theta$ . A kitérés után a szállaiban fellépő rugalmas erők egy visszatérítő forgatónyomatékot eredményeznek, ami arányos a szögelfordulással ( $\varphi$ ) és azzal ellentétesen forgat:



$$M_z = -D^* \varphi_z.$$

A korong mozgásegyenlete ezzel

$$M_z = -D^* \varphi_z = \Theta \beta_z = \Theta \frac{d^2 \varphi_z}{dt^2},$$

ami rendezés után a harmonikus rezgés egyenletének korábban megismert alakját ölti

$$\frac{d^2 \varphi_z(t)}{dt^2} + \frac{D^*}{\Theta} \varphi_z(t) = 0.$$

Ennek megoldása

$$\varphi_z(t) = \varphi_{0z} \cos(\omega_z t + \alpha),$$

ahol  $\omega_z = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$ . Vagyis a korong lengése ilyen

körfrekvenciájú harmonikus rezgés lesz.

### Fizikai inga

A fizikai inga egy vízszintes (az ábrán  $O$ -val jelölt, a rajz síkjára merőleges) tengely körül forgatható test, amelynek tömegközéppontja ( $TK$ ) a tengely alatt helyezkedik el.

Ha a tengelyt és a súlypontot összekötő egyenes nem függőleges, akkor a súlyerő egy visszatérítő forgatónyomatékot fejt ki, ami a kitéréssel ( $\varphi$ ) ellentétesen forgat:

$$\mathbf{M} = \mathbf{s} \times \mathbf{F}_g.$$

Ha a  $z$ -tengelyt az  $O$  pontból az ábra síkjára merőlegesen kifelé irányítjuk, akkor a forgatónyomaték  $z$ -komponense:

$$M_z = -s F_g \sin \varphi_z = -mgs \sin \varphi_z,$$

így a mozgásegyenlet:

$$M_z = -mgs \sin \varphi_z = \Theta \frac{d^2 \varphi_z}{dt^2}.$$

Itt  $\Theta$  a testnek az  $O$  forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka.

A fenti egyenletből rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2 \varphi_z}{dt^2} + \frac{mgs}{\Theta} \sin \varphi_z = 0.$$

Tudjuk, hogy az inga lengőmozgást fog végezni, de a kapott egyenlet szerint ez nem harmonikus rezgés. Ha azonban a  $\varphi_z$  kitérés kicsi, akkor  $\sin \varphi_z \approx \varphi_z$ , és az egyenlet a harmonikus rezgés egyenletévé alakul:

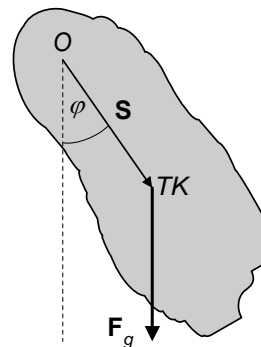
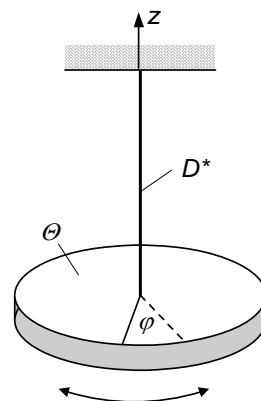
$$\frac{d^2 \varphi_z}{dt^2} + \frac{mgs}{\Theta} \varphi_z = 0.$$

A fizikai inga tehát kis kitérésnél harmonikus rezgést végez, amit a

$$\varphi_z(t) = \varphi_{0z} \cos(\omega_z t + \alpha)$$

függvény ír le, ahol a körfrekvencia  $\omega_z = \sqrt{\frac{mgs}{\Theta}}$ .

A fizikai inga speciális eseteként a vékony (elhanyagolható tömegű) fonálra felfüggesztett pontszerű  $m$  tömeggel megvalósított ún. *matematikai inga* körfrekvenciáját és lengésidejét is megkaphatjuk. Ekkor a felfüggesztési pont és a tömegközéppont távolsága (ami a fizikai ingánál  $s$ ) éppen az inga  $l$  hossza, a



tehetetlenségi nyomaték pedig  $\Theta = l^2 m$ , így  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . A frekvencia  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$ , a lengésidő pedig  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

### Lejtőn legördülő henger (gömb)

Ebben az esetben a merev test egyidejűleg forgó- és haladó mozgást is végez. A mozgás leírásához azt a korábbi eredményünket használjuk fel, hogy a mozgás a tömegközéppont haladó mozgására és a tömegközéppont körüli forgásra bontható fel. Ha a test tisztán gördül (nincs csúszás), akkor a testre a nehézségi erő ( $\mathbf{G}$ ) és a lejtővel való érintkezésnél fellépő érintőleges kontaktus erő ( $\mathbf{F}_T$ ) lép fel (ez utóbbi miatt gördül a test, és ez nem a szokásos értelemben vett súrlódási erő!). A test tömege  $m$ , sugara  $R$ , a lejtő szöge  $\alpha$  (ábra).

A tömegközéppont haladó mozgására felírhatjuk az

$$F_{ex} = G_T - F_T = ma_x$$

$$F_{ey} = F_N - G_N = ma_y$$

egyenleteket.

Ha lejtőre merőleges mozgás nincs, akkor  $a_y=0$ , amiből azt kapjuk, hogy  $F_N = G_N$ ,  $\mathbf{F}_N = -\mathbf{G}_N$

A lejtő mentén ( $x$ ) történő mozgásra a

$$G_T - F_T = G \sin \alpha - F_T = ma_x,$$

a  $G=mg$  összefüggés felhasználásával pedig az

$$mg \sin \alpha - F_T = ma_x$$

egyenletet kapjuk.

A tömegközéppontra csak az  $\mathbf{F}_T$  erőnek van forgatónyomatéka, ami a szögelfordulással azonos irányban forog, vagyis a forgatónyomaték-vektor a  $z$  tengellyel szembe mutat (a jobbsodrású rendszerben a  $z$  tengely a rajz síkjára merőlegesen kifelé mutat). Emiatt

$$M_z = -F_T R,$$

és a tömegközépponton átmenő vízszintes tengely körüli forgásra a mozgásegyenlet:

$$-F_T R = \Theta_z \beta_z.$$

A két mozgásegyenletben 3 ismeretlen szerepel ( $a_x$ ,  $\beta_z$  és  $F_T$ ), de ha a test gördül, akkor a szöggyorsulás és a tömegközéppont gyorsulása között az

$$a_x = -R\beta_z$$

összefüggés áll fenn (a mínusz jel oka: a gyorsulás a „+”  $x$ -tengely irányába mutat, a szöggyorsulás viszont a „-”  $z$ -tengely irányába), így az egyenletrendszer megoldható.

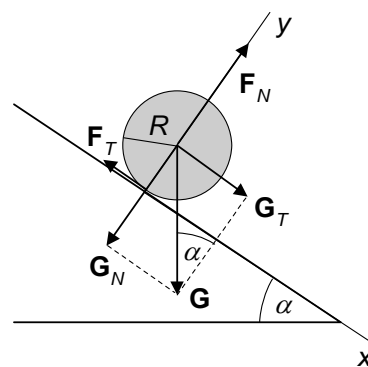
A számolás elvégzése után a tömegközéppont gyorsulására az

$$a_x = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{\Theta_z}{R^2}},$$

a szöggyorsulásra pedig a

$$\beta_z = -\frac{mg \sin \alpha}{R \left( m + \frac{\Theta_z}{R^2} \right)}$$

kifejezést kapjuk.



Ha a legördülő test homogén henger, akkor  $\Theta_z^h = \frac{1}{2}mR^2$ , így a tömegközéppont gyorsulása

$$a_x^{\text{henger}} = \frac{2}{3}g \sin \alpha,$$

vagyis a henger adataitól független.

### **KÍSÉRLET:**

Tömör hengert és vele azonos tömegű, belül üres, vékonyfalú hengert (cső) nyugalmi helyzetből egyszerre elindítunk egy lejtő azonos magasságú pontjairól, és megfigyeljük, hogy melyik ér előbb a lejtő aljára. Azt tapasztaljuk, hogy mindig a tömör henger ér le előbb, vagyis annak a gyorsulása nagyobb.

A kísérlet értelmezése érdekében számítsuk ki egy olyan  $R$  sugarú henger gyorsulását, ami belül üres, és a tömege egy a henger sugarához képest vékony héjban helyezkedik el (vékonyfalú cső). Ennek a testnek a tehetetlenségi nyomatéka jó közelítéssel  $\Theta_z^{\text{cső}} = mR^2$ , ezért a tömegközéppont gyorsulása

$$a_x^{\text{cső}} = \frac{1}{2}g \sin \alpha;$$

szintén független a henger adataitól.

Látható tehát, hogy – a hengerek adataitól függetlenül –  $a_x^{\text{henger}} > a_x^{\text{cső}}$ , ami megmagyarázza a fenti tapasztalatot: a tömör henger ér előbb a lejtő aljára.

Hasonló módon számítható ki a gyorsulás egy gömb legördülésénél is. A gömb tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka  $\Theta_z^g = \frac{3}{5}mR^2$ . Ebből  $a_x^g = \frac{5}{7}g \sin \alpha$ .

## **Merev test perdülete és szögsebessége közötti általános összefüggés, szabad tengelyek**

Láttuk, hogy a merev test perdület-vektora még rögzített tengely körüli forgásnál sem mindig párhuzamos a szögsebességvektorral (forgástengellyel), de a forgástengely irányába eső vetülete arányos a szögsebességgel. Szabad mozgásnál a perdület és szögsebesség összefüggése még bonyolultabb.

### **A tehetetlenségi tenzor, főtehetetlenségi nyomatékok**

Mint kimutatható, szabad mozgásnál is igaz az, hogy a perdületvektor komponensei lineáris kapcsolatban vannak a szögsebesség komponenseivel, de ez általában nem egyszerű arányosságot jelent. Az általános összefüggés egy derékszögű  $x, y, z$  koordinátarendszerben a következő<sup>1</sup>:

$$N_x = \Theta_{xx}\omega_x + \Theta_{xy}\omega_y + \Theta_{xz}\omega_z$$

$$N_y = \Theta_{yx}\omega_x + \Theta_{yy}\omega_y + \Theta_{yz}\omega_z$$

$$N_z = \Theta_{zx}\omega_x + \Theta_{zy}\omega_y + \Theta_{zz}\omega_z.$$

A  $\Theta_{xx}, \Theta_{xy}, \dots, \Theta_{zy}, \Theta_{zz}$  mennyiségek (9 adat) a testnek a koordinátatengelyekhez viszonyított tömegeloszlását jellemzik, és ismeretükben az origón átmenő tetszőleges irányú tengelyre kiszámítható a test tehetetlenségi nyomatéka. Ez a 9 szám együttesen adja meg az egymással általában nem párhuzamos  $\mathbf{N}$  és  $\boldsymbol{\omega}$  vektor összefüggését, és

<sup>1</sup> Részletesebben pl.: Budó Á.: Kísérleti Fizika I.

ezt a 9 számból álló mennyiséget *tehetetlenségi tenzornak* nevezik (a tenzorokról a fizikában és a matematikában később részletesen lesz szó).

Fontos tudni, hogy bármely testben található 3 egymásra merőleges irány, amelyekben felvéve a koordinátatengelyeket, érvényes, hogy

$$N_x = \Theta_{xx} \omega_x$$

$$N_y = \Theta_{yy} \omega_y$$

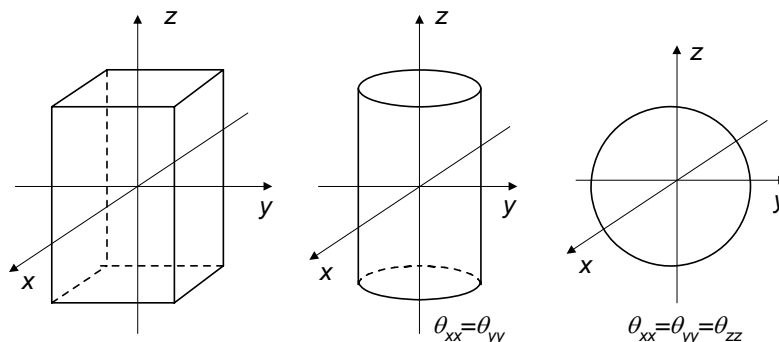
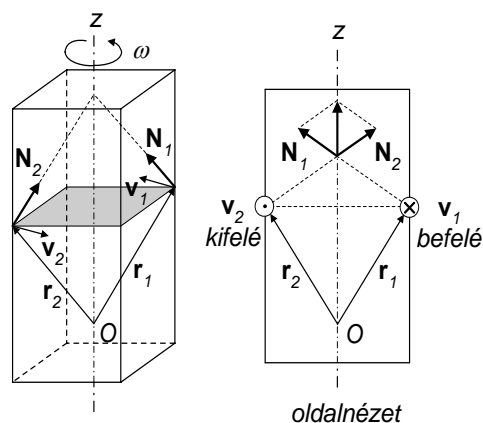
$$N_z = \Theta_{zz} \omega_z.$$

Ezeket az irányokat *főtehetetlenségi tengelyeknek*, az általuk meghatározott koordinátarendszert pedig *főtengelyrendszernek* nevezik. A definiáló egyenletekből látható, hogy ha egy test egyik főtehetetlenségi tengelye körül forog, akkor az **N** és **ω** vektor egymással párhuzamos. Ha pl. a forgástengely a z-tengely, akkor  $\omega_x = \omega_y = 0$ , ezért  $N_x = N_y = 0$ , vagyis

$$\mathbf{N} = N_z \mathbf{k} = \Theta_{zz} \omega_z \mathbf{k} = \Theta_{zz} \boldsymbol{\omega}.$$

Szemléletesen is belátható, hogy bizonyos szimmetriával rendelkező testek esetén a főtehetetlenségi tengely a szimmetriatengelyen van. Ha például a test egy szimmetriatengelyre merőleges metszetének centrum-szimmetriája van, akkor ez a tengely biztosan főtehetetlenségi tengely, hiszen az ábra alapján látható, hogy ilyen tengely körüli forgásnál a szimmetrikus térfogatelem-párok perdületvektora a tengelyre szimmetrikusan helyezkedik el, így az eredőjük és a teljes perdület is tengelyirányú lesz.

Könnyen belátható, hogy egy derékszögű hasáb három főtehetetlenségi tengelye a három egymásra merőleges "kétfogású" forgástengely, a hengeré a palásttal párhuzamos szimmetriatengely és minden erre merőleges kétfogású forgástengely, a gömbé pedig minden a középponton átmenő tengely (ábra).



Szabálytalan testnél a főtehetetlenségi tengelyek szemlélet alapján nem találhatók meg, de számítással vagy kísérlet útján meghatározhatók.

### Szabad tengelyek

A tapasztalat szerint a testek akkor is végeznek forgó mozgást, ha nincs külső beavatkozással rögzített forgástengely. Az ilyen – spontán kialakuló – forgástengelyeket *szabad tengelyeknek* nevezik.

A szabad tengely kialakulása és az, hogy milyen tengely lehet szabad tengely, jól szemléltethető az alábbi kísérletekkel.

#### KÍSÉRLETEK:

- ◆ Készítsünk egy derékszögű hasábot úgy, hogy az egyik élhossza sokkal nagyobb legyen, mint a másik kettő, és a rövidebb élhosszak között is legyen lényeges eltérés. Függesztük fel a hasábot egy drótra a hosszú oldalaira merőleges lapja közepén úgy, hogy a felfüggesztés minden irányban megengedje az elfordulást. Ezután a felfüggesztő drótot forgassuk meg. Kezdetben a hasáb a hosszú oldalával párhuzamos, függőleges tengely körül forog, de a szögsebességet növelve vízszintes helyzetbe ugrik át, és a legrövidebb oldallal párhuzamos szimmetriatengely körül forog tovább. Megjegyzés: a hosszanti tengely a hasáb legkisebb-, a vízszintesbe fordulás utáni tengely pedig a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú, tömegközépponton átmenő főtehetetlenségi tengelye.
- ◆ Hurok alakú kerékpárláncot függesztünk fel egy drótra úgy, hogy a hurok összecukódva lógjon a dróton, majd a drótot forgassuk meg. A lánc kezdetben összecukódva forog, majd a szögsebesség növelésekor egyszer csak vízszintes helyzetbe ugrik át, a hurok a forgástengelyre merőleges síkú körré tágul, és a forgástengely a kör középpontján megy át. Megjegyzés: a lánc előbb a legkisebb-, azután a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú, tömegközépponton átmenő tengely körül forog.

Az itt szerzett tapasztalatok egyeznek az általános tapasztalatokkal, amelyek szerint szabad tengely

- ◆ csak főtehetetlenségi tengely lehet,
- ◆ csak tömegközépponton átmenő tengely lehet,
- ◆ stabilis forgás csak a legnagyobb- és a legkisebb tehetetlenségi nyomatékú főtehetetlenségi tengely körül jön létre (előbbi a stabilabb).

A fenti tapasztalatok elméletileg is értelmezhetők, ha megvizsgáljuk a szabad tengely létrejöttének feltételeit. Egy tengely körül forgó test egy térfogatelemére (pl. az  $i$ -edikre) a centripetális erő hat (a nehézségi erőt most elhanyagoljuk), ami az ábra jelöléseivel:

$$\mathbf{F}_i = -\Delta m_i \omega^2 \mathbf{R}_i.$$

Ugyanennek az erőnek forgatónyomatéka is van:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

A forgáshoz szükséges eredő erő és eredő forgatónyomaték:

$$\mathbf{F} = -\sum_i \Delta m_i \omega^2 \mathbf{R}_i$$

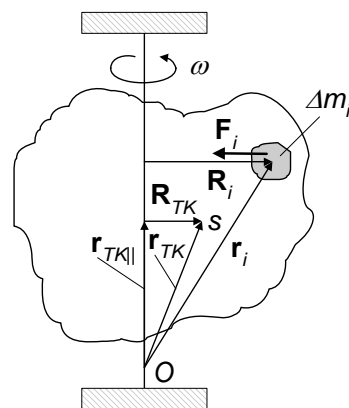
$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

Ezt az erőt és nyomatékot a tengelyek rögzítése (csapágyak) adja.

Ha a test tömegeloszlása olyan, hogy egy tengely körüli forgásnál fennállnak az

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{M} = 0$$

feltételek, akkor a tengelyre ható erők és forgatónyomatékok eredője is nulla, a test szabadon forog az adott irány körül, és *nincs szükség tengelyre*. A fenti feltételekből meghatározható, hogy milyen tengelyek jöhetnek szóba szabad tengelyként.



Az első feltétel következményének kiderítése érdekében a tömegelemek helyvektorait bontsuk a tengellyel párhuzamos ( $\mathbf{r}_{i||}$ )- és arra merőleges ( $\mathbf{R}_i$ ) összetevőkre, majd tegyük ugyanezt a tömegközéppont helyvektorával is ( $\mathbf{r}_{TK||}$  és  $\mathbf{R}_{TK}$ ). A test tömegközéppont-vektora így

$$\mathbf{r}_{TK} = \frac{I}{m} \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i = \frac{I}{m} \sum_i \Delta m_i (\mathbf{r}_{i||} + \mathbf{R}_i) = \frac{I}{m} \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_{i||} + \frac{I}{m} \sum_i \Delta m_i \mathbf{R}_i = \mathbf{r}_{TK||} + \mathbf{R}_{TK}.$$

Ezért a tömegközéppont-vektor tengelyre merőleges összetevőjét megadó vektor

$$\mathbf{R}_{TK} = \frac{I}{m} \sum_i \Delta m_i \mathbf{R}_i.$$

Ezzel az erőkre vonatkozó  $\mathbf{F} = 0$  feltétel az alábbi alakba írható:

$$\sum_i \Delta m_i \omega^2 \mathbf{R}_i = \omega^2 m \mathbf{R}_{TK} = 0.$$

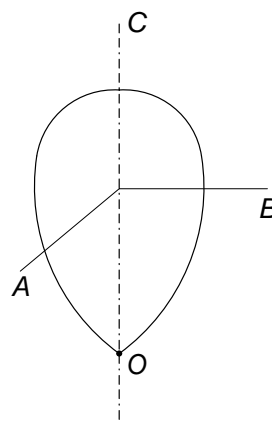
Ez csak úgy teljesülhet, ha  $\mathbf{R}_{TK} = 0$ , vagyis a tömegközéppont a tengelyen van. Szabad tengely tehát csak *tömegközépponton átmenő tengely* lehet.

Az, hogy a szabad tengelynek mindig *főtehetetlenségi tengelynek* kell lennie, a nyomatéokra vonatkozó  $\mathbf{M} = 0$  feltételből következik hosszabb számolás után, amit itt mellőzünk<sup>1</sup>.

### Merev test forgása rögzített pont körül, a pörgettyű

A szabad forgásénál kevesebb, a rögzített tengely körüli forgásénál több a szabadsági foka a mozgásnak, ha a test egy pontja rögzített, és a forgás ekörül történik. Az ilyen módon mozgó testet *pörgettyűnek* nevezik.

A pörgettyűk mozgásának leírása szempontjából fontos a forgó test alakja is. Itt csak azzal az egyszerű esettel foglalkozunk, amikor a homogén anyagú pörgettyű hengerszimmetrikus, és a forgáspont a  $C$  szimmetriatengelyen van (ábra). Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a súlypont a szimmetriatengelyen van, és a pörgettyű három főtehetetlenségi nyomatéka ( $\Theta_A, \Theta_B, \Theta_C$ ) közül kettő megegyezik ( $\Theta_A = \Theta_B \neq \Theta_C$ ). Az ilyen pörgettyűt *szimmetrikus pörgettyűnek* nevezik.



A pörgettyűk mozgásának vizsgálatánál két alapesetet érdemes megkülönböztetni:

- ◆ Ha a külső erők rögzített forgáspontra vonatkozó forgatónyomatékainak eredője nulla, akkor *erőmentes pörgettyűről* beszélünk. Nehézségi erőterben ez a feltétel rendszerint úgy valósítható meg, hogy a rögzített (alátámasztott) forgáspont a test súlypontjában van.
- ◆ Ha a külső erők forgatónyomatéka a forgáspontra vonatkozóan nem nulla, akkor a pörgettyű neve *súlyos pörgettyű*. Az elnevezés azzal függ össze, hogy nehézségi erőterben ez általában azt jelenti, hogy a forgáspont (alátámasztási pont) nem esik egybe a súlyponttal, ezért a súlyerőnek a forgáspontra vonatkozó forgatónyomatéka általában nem nulla.

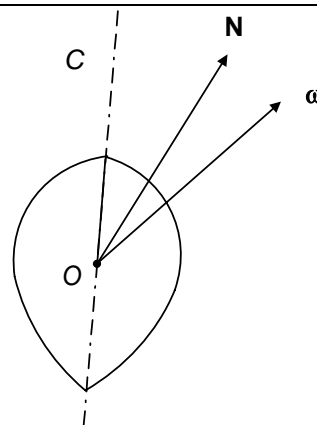
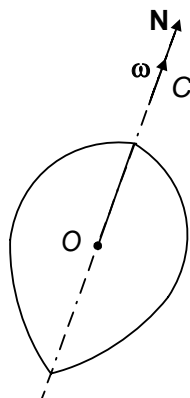
<sup>1</sup> A számolás megtalálható: Budó Á.: Kísérleti Fizika I.

**Erőmentes, szimmetrikus pörgettyű mozgása, a nutáció**

Az erőmentes szimmetrikus pörgettyű mozgásának vizsgálatát kísérlettel kezdjük:

**KÍSÉRLET:**

Súlypontjában ( $O$ ) alátámasztott pörgettyűt ferdén álló szimmetriatengelye ( $C$ ) körül gyorsan megforgatjuk (baloldali ábra). Ekkor a pörgettyű a tengelye irányát megtartva forog. A szimmetriatengelyt kissé kibillentve (a jobboldali ábrán a függőlegeshez közelítve), a tengely egy kúp mentén körbeforog. A jelenség neve: *nutáció*.



A megforgatott pörgettyű szimmetriatengelye szabad tengely, tehát akörül foroghat a test. A forgástengely az irányát azért tartja meg, mert tengelyirányú perdületet adtunk a pörgettyűnek, és ez megmarad, hiszen nincs külső forgatónyomaték. Itt tehát a  $C$  szimmetriatengely, az  $\omega$  vektor (forgástengely) és az  $\mathbf{N}$  perdületvektor iránya egybeesik.

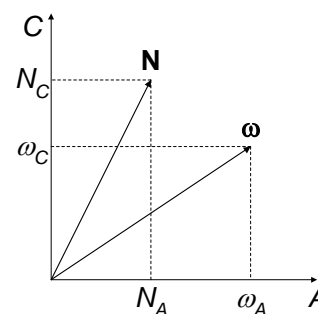
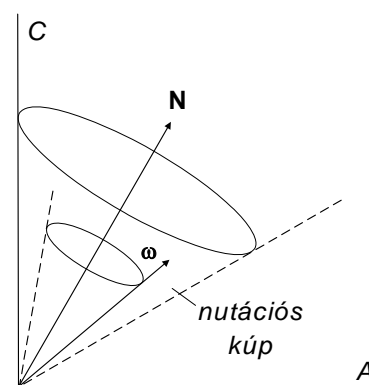
A kibillentéskor megváltozik a perdület, de a külső hatás megszűnése után az új perdület megmarad. A lökés hatására azonban a szimmetriatengely és az  $\omega$  vektor (pillanatnyi forgástengely) iránya sem egymással, sem pedig a perdületvektor irányával nem egyezik meg többé.

Az alapos megfigyelés azt mutatja, hogy a szimmetriatengely és a pillanatnyi forgástengely a perdületvektor rögzített iránya körül egy-egy kúp mentén körbeforog, úgy hogy  $C$ ,  $\omega$  és  $\mathbf{N}$  mindig egy síkban vannak (ábra). Az együttes körbeforgás oka lényegében az, hogy az  $\omega$  vektor (pillanatnyi forgástengely) most nem esik egybe a  $C$  tengellyel, ezért a  $C$  tengely kifordul az  $A$  és  $C$  által meghatározott síkból. Ez azonban csak úgy történhet, hogy az  $\mathbf{N}$  perdületvektor állandó marad. Ha a perdületet  $A$  és  $C$  tengely irányú komponensekre bontjuk (ábra), akkor azt írhatjuk, hogy

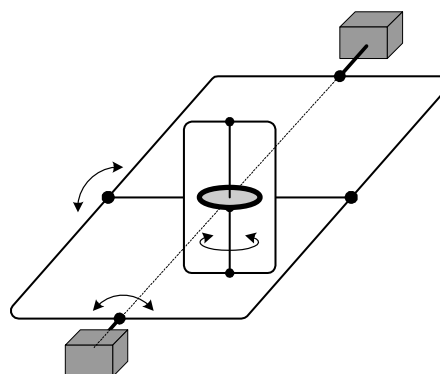
$$N_A = \Theta_A \omega_A$$

$$N_C = \Theta_C \omega_C$$

( $A$  és  $C$  főtehetetlenségi tengelyek). Mivel a  $C$  tengely elfordulása miatt  $N_C$  és  $\omega_C$  is kifordul az  $A$  és  $C$  által meghatározott síkból,  $\mathbf{N}$  állandósága miatt  $N_A$ -nak és  $\omega_A$ -nak is ugyanezt kell tennie, vagyis az  $\omega$  vektor együtt forog a  $C$  tengellyel az állandó  $\mathbf{N}$  perdületvektor körül.



Ha olyan erőmentes pörgettyűt készítünk, amely tetszőleges irányban elfordulhat (Cardano<sup>1</sup>-féle felfüggesztés; ábra), és ezt úgy hozzuk forgásba, hogy a forgástengely és a perdületvektor iránya egybeesik a szimmetriatengellyel, akkor a pörgettyű ezt a forgástengelyt akkor is megtartja, ha az alátámasztása elfordul. Az ilyen, tengelyirányát megtartó pörgettyűt *giroszkóp*nak nevezik. Ennek a viselkedésnek egy példája, hogy a Föld egyenlítőjén Kelet-Nyugat irányú, vízszintes tengely körül forgásba hozott giroszkóp tengelye a Föld forgása miatt egy negyed nap alatt függőleges irányúvá válik (valójában megtartja az irányát, és a Föld fordul el).

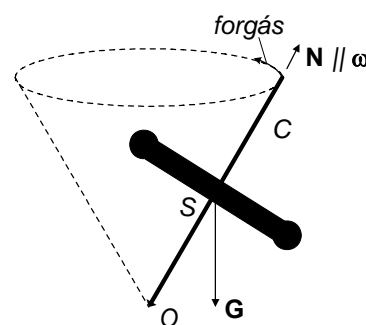


### **Súlyos, szimmetrikus pörgettyű mozgása, a precesszió**

Ha a pörgettyű forgáspontjára vonatkozó forgatónyomaték nem nulla, akkor mozgása lényegesen eltér az erőmentes pörgettyűétől. Az ilyen pörgettyű gyakori esete, hogy a külső forgatónyomaték a nehézségi erőtől származik, vagyis a pörgettyű forgáspontja ( $O$ ) nem esik egybe a súlyponttal ( $S$ ). Az ilyen pörgettyűt *súlyos pörgettyű*nek nevezik. (Megjegyezzük, hogy súlyos pörgettyűnek szigorúan véve azt a pörgettyűt nevezik, amelynél az  $S$  az  $O$  pont felett van; ha  $S$  az  $O$  pont alatt van, akkor pörgettyűs ingáról beszélünk.)

#### **KÍSÉRLET:**

Súlypontja ( $S$ ) alatt alátámasztott ( $O$ ) pörgettyűt ferdén álló szimmetriatengelye körül gyorsan megforgatjuk, és magára hagyjuk. A pörgettyű továbbra is a szimmetriatengelye körül forog, de ez a tengely kúpfelületet leírva lassan körbeforog (ábra). A jelenséget *precesszió*nak nevezik.



A szimmetriatengely körüli gyors forgatás biztosítja, hogy a  $C$  szimmetriatengely, az  $\omega$  vektor (forgástengely) és az  $\mathbf{N}$  perdületvektor iránya egybeesik ( $\omega_C \gg \omega_A$  ezért  $N_C \gg N_A$ , vagyis  $N \approx N_C$ ). Most azonban a pörgettyűre a  $\mathbf{G}$  súlyerő az  $O$  pontra vonatkozó, az ábra síkjára merőleges, befelé mutató forgatónyomatékot fejt ki. Mivel a mozgásegyenlet szerint

$$d\mathbf{N} = \mathbf{M}dt,$$

a perdület a forgatónyomaték-vektor irányában megváltozik. Mivel az  $\mathbf{N}$  perdületvektor a szimmetriatengellyel egybeesik, a szimmetriatengely iránya a perdülettel együtt változik. Esetünkben ez azt jelenti, hogy a tengely mindig a súlyerő és a tengely által meghatározott síkra merőlegesen mozdul el: a tengely csúcsa körön, a tengely maga egy kúpfelületen mozog.

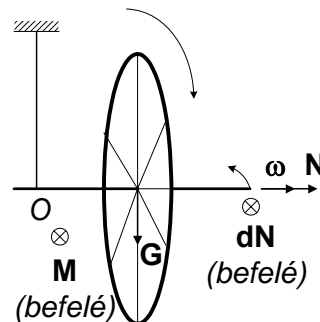
A precesszió még látványosabban bemutatható egy biciklikerek segítségével.

<sup>1</sup> Gerolamo CARDANO (1501-1576) olasz természettudós



**KÍSÉRLET:**

Egy vízszintes tengelyű biciklikereket gyorsan megforgatunk, és a tengelyt egyetlen pontján madzaggal felfüggesztjük (ábra). Ekkor a kerék továbbra is a vízszintes (szabad) tengely körül forog, de a tengely vízszintes síkban függőleges tengely körül körbeforog.



A tengely körbeforgásának szögsebessége, vagy más szóval a precesszió szögsebessége a mozgásegyenlet alapján várhatóan arányos a külső forgatónyomatóékkal, de pontos értéke is kiszámítható a mellékelt ábrák segítségével.

A precesszió szögsebessége

$$\Omega_p = \frac{d\vartheta}{dt}$$

Az ábra alapján:

$$d\vartheta = \frac{dN_C}{N_C \sin \varphi},$$

másrészt a mozgásegyenletből

$$dN_C = M dt,$$

így

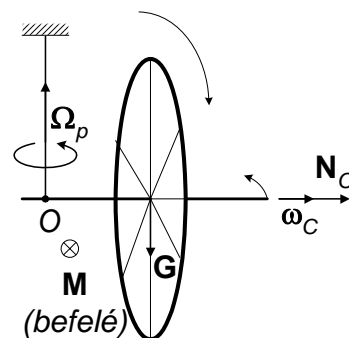
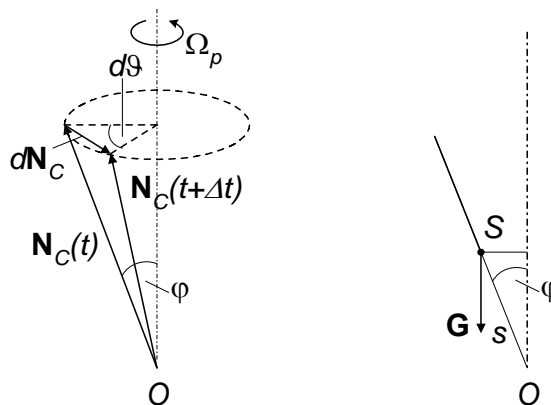
$$\Omega_p = \frac{M}{N_C \sin \varphi}.$$

Ha a nyomaték a nehézségi erőtől származik, akkor az ábra alapján

$$M = Gs \sin \varphi = mgs \sin \varphi,$$

ezért

$$\Omega_p = \frac{mgs}{N_C} = \frac{mgs}{\Theta_C \omega_C}.$$



**A pörgettyűnyomaték**

A precessziót egy a pörgettyűvel kölcsönhatásban álló test által kifejtett forgatónyomaték okozza. Newton III. törvénye értelmében a pörgettyű ugyanekkora, de ellentétes irányú forgatónyomatékot fejt ki a kölcsönható testre. Ezt a forgatónyomatékot *pörgettyűnyomatéknak* nevezik.

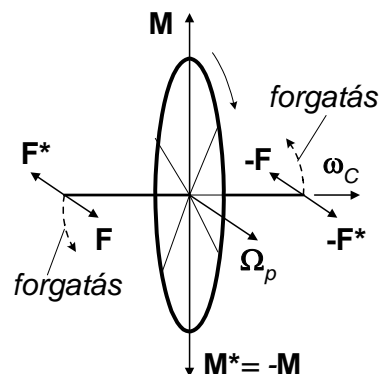
A precessziót létrehozó nyomaték a korábbiak alapján:

$$M = \Omega_p N_C \sin \varphi$$

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{N}_C = \Theta_C \boldsymbol{\Omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_C.$$

A pörgettyűnyomaték ennek megfelelően:

$$\mathbf{M}^* = -\mathbf{M} = \mathbf{N}_C \times \boldsymbol{\Omega}_p = \Theta_C \boldsymbol{\omega}_C \times \boldsymbol{\Omega}_p.$$



A pörgettyűnyomatékot mutatja az alábbi kísérlet (fenti ábra).

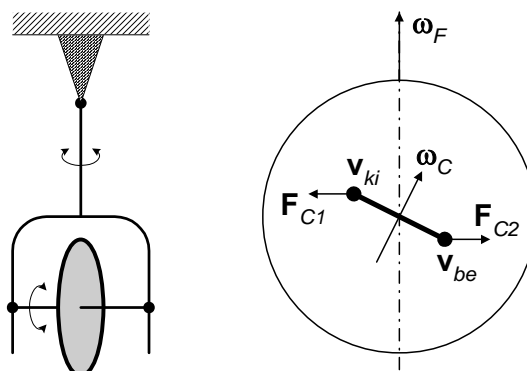
### KÍSÉRLET:

Hozzunk forgásba egy vízszintes tengelyen forgó biciklikereket, és a tengelyt próbáljuk függőleges síkban az óramutató járásával ellentétesen elfordítani (ábra). Ekkor azt érezzük, hogy a tengelynek függőleges síkban történő elforgatása csak akkor sikerül, ha a két kezünk a tengelyt megtartó erőpárt (az ábrán  $\mathbf{F}$  és  $-\mathbf{F}$ ) fejt ki. Ez az erőpár a tengelyt vízszintes síkban az óramutató járásával ellentétes irányba forgatná el (ez felfelé mutató  $\mathbf{M}$  forgatónyomaték-vektort jelent). Ez a tengely elforgatásához ( $\Omega_p$ ) – azaz a precesszióhoz – szükséges nyomaték. Ennek ellenhatásaként megjelenő erőpár (az ábrán  $\mathbf{F}^*$  és  $-\mathbf{F}^*$ ) hatását érezzük a kezünkön, ami a tengelyt vízszintes síkban az óramutató járásával egyező irányban akarja elforgatni. Ez okozza az  $\mathbf{M}^*$  pörgettyűnyomatékot.

### Alkalmazások

A pörgettyűk sajátos viselkedésének számos megnyilvánulását megfigyelhetjük, illetve felhasználhatjuk, amelyek közül néhányat itt megemlítünk.

- ♦ Az erőmentes pörgettyűnek azt a sajátosságát, hogy forgástengelyének irányát megtartja, mozgások stabilizálására lehet használni (hajókon, egysínű vasúton erre nagy tehetetlenségi nyomatékú pörgettyűt használnak, a diszkoszvető a diszkoszt pörögve hajtja el, emiatt a diszkosz függőlegeshez képest ferde síkját megtartja, így egy állandó felhajtóerő lép fel, amittől messzebbre repül a diszkosz, a lövedékek is pörögve repülnek ki a fegyver csövéből, ami szintén a mozgás stabilizálását szolgálja)
- ♦ Az erőmentes pörgettyű érdekes alkalmazása az ún. pörgettyűs iránytű, amely egy függőleges és vízszintes tengely körül szabadon elforduló pörgettyű (baloldali ábra). Ha egy ilyen pörgettyűt gyors forgásba hozunk, akkor tengelye a Földön Észak-Déli irányba áll be, vagyis iránytűként használható. Ennek oka a Föld forgásából származó Coriolis-erő. Ez a jobboldali ábra segítségével érthető meg, ahol a pörgettyű sematikus felülnézeti rajza látható. A Föld szögsebességvektora ( $\omega_F$ ) az ábrán felfelé, a pörgettyű szögsebességvektora ( $\omega_C$ ) Északkelet felé mutat. A pörgettyűnek az ábra síkjában lévő tömegelemei a tengelytől jobbra az ábra síkjára merőlegesen befelé ( $\mathbf{v}_{be}$ ) a baloldalt lévőket kifelé ( $\mathbf{v}_{ki}$ ) mozognak. Ennek megfelelően az  $\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v} \times \omega_F$  Coriolis-erő a jobboldali tömegelemekre jobb felé ( $\mathbf{F}_{C2}$ ), a baloldaliakra bal felé ( $\mathbf{F}_{C1}$ ) mutat, így egy olyan erőpár jön létre, amely a pörgettyű tengelyét az Észak-Déli irányba forgatja be (ez az egyensúlyi helyzet, mert ekkor nulla a forgatónyomaték).
- ♦ A kerékpár egyensúlyának stabilizálásában is szerepet játszik a pörgettyűhatás. Ha a kerékpár valamilyen okból a haladási irányhoz viszonyítva jobbra dől, akkor a súlypont az alátámasztástól jobbra kerül, ezért fellép egy előre mutató forgatónyomaték. Emiatt az első kerék perdülete – amely balra mutat – a haladás irányában változik meg. Így a kerék perdületvektora, és vele együtt a kerék tengelye jobbra fordul, és az alátámasztás a súlypont felé mozdul el: a pörgettyűhatás a kerékpár stabilizálódását segíti elő.



- ◆ Jobbra kanyarodó jármű kerekeinek tengelye a haladási irányhoz viszonyítva jobbra fordul, tehát a precesszió szögsebességvektora lefelé mutat. A kerék szögsebességvektora balra mutat, ezért az útra (sínre) ható pörgettyűnyomaték vektora ( $\mathbf{M}^* = \mathcal{O}_C \boldsymbol{\omega}_C \times \boldsymbol{\Omega}_p$ ) hátrafelé mutat. Ez a forgatónyomaték az út külső oldalán lévő baloldali kereket rányomja az útra, az út belső oldalán lévő jobboldali kereket pedig megemeli, ami (az egyidejűleg fellépő centrifugális erővel együtt) felboruláshoz vezethet.

## Szilárd testek alakváltozása

A mozgás leírására használt modellek közül eddig a tömegpont-, a pontrendszer- és a merev test-moddal foglalkoztunk. A merev test-modell már figyelembe veszi a valóságos testeknek azt a lényeges sajátosságát, hogy nem pontszerűek, hanem kiterjedtek, és lehetőséget ad az ezzel kapcsolatos új mozgási lehetőségek leírására is. De a valóságos testnek a merev test is eléggé durva közelítése, hiszen ez a modell változatlan alakot (és ezzel változatlan térfogatot) tételez fel, és tudjuk, hogy ha a testeket külső hatás éri, akkor az alakjuk és a térfogatuk is megváltozhat.

Valóságosabb – de egyben bonyolultabb – modellekhez jutunk, ha *alakváltozást, deformációt* is feltételezünk. A deformálható testek durván két nagy csoportba oszthatók: vannak testek, amelyek többé-kevésbé meghatározott alakkal rendelkeznek, ezek a „hétköznapi értelemben” vett *szilárd testek*<sup>1</sup>, és vannak olyanok, amelyeknek nincs saját alakjuk, ezek a *folyadékok* és a *gázok*.

A deformálható testek viselkedésének leírására alapvetően két módszer használható. Az egyik megközelítés az anyag atomos szerkezetéből indul ki, és ennek felhasználásával írja le a test viselkedését. Ez a *mikroszkopikus módszer* azonban az esetek többségében nagyon bonyolult, és legtöbbször nincs is szükség arra, hogy a jelenségeket az atomok mozgására vezessük vissza. A másik, a gyakorlatban legtöbbször használt eljárás a *makroszkopikus-,* vagy *fenomenológiai módszer,* amely feltételezi, hogy a testet alkotó anyagnak nincs belső szerkezete, a test tömege folytonosan tölti ki a test térfogatát, és a test sajátosságait tapasztalatból vett anyagi állandókkal veszi figyelembe. A deformálható testek vizsgálatánál itt a fenomenológiai módszert követjük.

Egy deformálható test mozgásának elméleti leírásánál a feladat az, hogy adott külső hatás esetén meghatározzuk a test pontjainak mozgását. A problémát az okozza, hogy ebben az esetben nem csak a testet, mint egészet kell vizsgálni, hanem a test pontjainak egymáshoz viszonyított mozgását, vagyis a test alakváltozását, deformációját is.

A test egyes pontjainak elmozdulását és sebességét elméleti úton úgy határozhatjuk meg, hogy a testet felosztjuk igen kis térfogatelemekre, és számba vesszük az egyes térfogatelemek kölcsönhatásából származó, a térfogatelemek felülete mentén működő *felületi erőket* és a térfogatelemek egészére ható, a térfogatelem térfogatával (illetve tömegével) arányos ún. *térfogati erőket*. Ezután felírjuk az egyes térfogatelemek mozgásegyenletét, majd a térfogatelemekre történő összegzéssel megkapjuk a deformálható test *mozgásegyenleteit*. Ezek általában bonyolult differenciálegyenletek, amelyeknek megoldása – a külső hatás jellegétől, a test tulajdonságaitól és a test alakjától függően – igen bonyolult lehet.

A deformálható testek közül először a merev testekhez legközelebb álló, deformálható szilárd testekkel foglalkozunk. Mivel a testnek, mint egésznek a mozgását le tudjuk írni a merev testekre kidolgozott módszerekkel, itt csak a testek alakváltozását, deformációját tárgyaljuk.

A deformálható szilárd testek alakváltozása kétféle lehet

- a *rugalmas alakváltozás* során a test külső hatásra bekövetkező alakváltozása a hatás megszűntekor megszűnik, a maradó alakváltozás elhanyagolható. Az ilyen módon viselkedő testeket *rugalmas testeknek* nevezik.
- a *maradó- vagy plasztikus alakváltozás* során a test az alakváltoztató hatás megszűnte után eredeti alakját nem nyeri vissza, az alakváltozás részben megmarad. Az alakváltozási

---

<sup>1</sup> A fizikában szilárd test alatt gyakran kristályos anyagot értenek, itt ezt a kifejezést általánosabb értelemben használjuk.

„hajlam” növekedésével az ilyen testek viselkedése egyre inkább a folyadékokéhoz hasonlít.

Az alakváltozás általános elméleti leírása általában nehéz. A leírást egyszerűbbé teszi, ha a test *rugalmas*, vagyis külső hatásra megváltoztatja az alakját, de a hatás megszűnése után az eredeti alakja visszaáll, tehát nincs maradó alakváltozás. Annak ellenére, hogy tökéletesen rugalmas test a valóságban nincs, ez a modell nagyon sok esetben jól használható a valóságos testek viselkedésének leírására, mert a maradó alakváltozás gyakran *elhanyagolható*.

További egyszerűsítést jelent, ha a test anyaga *homogén* és *izotróp*, vagyis a test tulajdonságai nem függenek sem a helytől sem az iránytól.

A továbbiakban elsősorban *ideálisan rugalmas* viselkedésű, *homogén, izotróp* testekkel foglalkozunk.

## Rugalmas alakváltozás

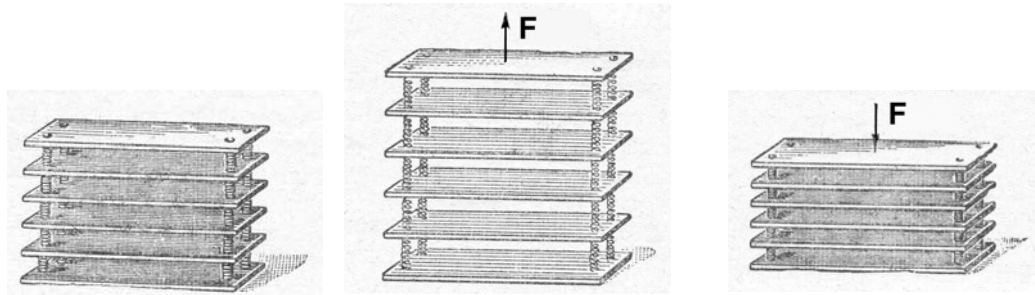
A rugalmas test alakját valamilyen külső hatás változtatja meg. A létrejött alakváltozás következtében a test belsejében *rugalmas erők* lépnek fel, ezek adják a bevezetőben említett felületi erőket, amelyek a mozgásegyenletben szerepelnek. A deformálható test mozgásegyenletei azonban még homogén, izotróp, rugalmas anyag esetében is bonyolult differenciálegyenletek.

Könnyebb a helyzet, ha csak a testnek a külső hatás következtében létrejött új *egyensúlyi állapotára* vagyunk kíváncsiak. Mivel a külső hatás által a test belsejében ébresztett rugalmas erők a külső hatás ellenében hatnak, és a deformáció növekedésével nőnek, egy bizonyos – a külső hatástól függő – alakváltozás esetén egyensúlyi állapot alakul ki. Az egyensúlyi állapotra vonatkozó alapegyenletek a mozgásegyenletekből származtathatók. Sajnos általában ezek az egyenletek is eléggé bonyolultak. Ilyen egyenletek felírásával és megoldásával foglalkozik az *elméleti rugalmasságtan*, amivel később a *Mechanika* tárgyban találkozunk.

Szerencsére vannak olyan alakváltozások, amelyeknél az új egyensúlyi állapotban a test pontjainak helyzete viszonylag egyszerű összefüggéssel kifejezhető, és az alakváltozásnak a külső hatással való összefüggése is egyszerűen megadható. Ezekben az esetekben az alakváltozás rendszerint kísérleti úton is könnyen nyomon követhető. Az egyszerű deformációk közül különösen fontos a *nyújtás* illetve *összenyomás* és a *nyírás*, mert egy homogén, izotróp rugalmas test minden alakváltozása visszavezethető erre a két alakváltozásra. További, egyszerűbb alakváltozások a minden oldalról történő összenyomás, amit *kompresszió*nak is neveznek, továbbá a *hajlítás* és a *csavarás*. A továbbiakban ezekkel az egyszerű alakváltozásokkal foglalkozunk.

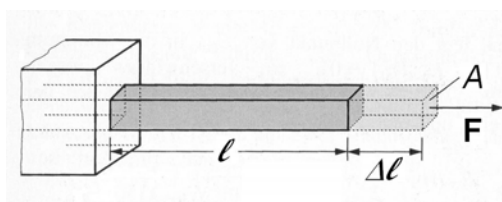
### Nyújtás és összenyomás

Ha egy hosszú, mindenütt azonos keresztmetszetű testet egyik végén rögzítünk, a másik végén pedig a keresztmetszetére merőleges erőt fejtünk ki, akkor megváltozik a testnek az erővel párhuzamos hossza. Az ekközben bekövetkező alakváltozást szemlélteti a mellékelt



ábra, ahol a rugalmas test-modell rugókkal összekapcsolt síkból áll (baloldali ábra). A síkok az alakváltozás szemléletesebbé tételét szolgálják. A modell-test alsó síkja rögzített, az erő a felső határoló síkra merőleges. A nyújtás (középső ábra) és összenyomás (jobboldali ábra) esetén a síkok egymással párhuzamosak maradnak, de megváltozik az egymástól mért távolságuk (ábra).

A nyújtás és összenyomás során bekövetkező alakváltozás és az alkalmazott erő közötti összefüggést legegyszerűbben mérés segítségével állapíthatjuk meg. Ha egy hosszú, vékony, mindenütt azonos keresztmetszetű rúd vagy szál



egyik végét befogjuk, a másikat a rúd irányában, a keresztmetszetére merőlegesen ható  $F$  nagyságú erővel meghúzzuk, akkor a rúd hossza megnő (ábra). Nem túl nagy  $\Delta\ell$  hosszváltozásnál a tapasztalat szerint a hosszváltozás arányos az erővel, az eredeti hosszal ( $\ell$ ), fordítva arányos a keresztmetszettel ( $A$ ):

$$\Delta\ell \sim \frac{F\ell}{A}.$$

Az alakváltozás jellemzésére érdemes bevezetni a relatív hosszváltozást megadó  $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$  *deformációt*, a külső hatást pedig célszerű a keresztmetszetre merőlegesen ható erő és a keresztmetszet  $\sigma = \frac{F}{A}$  hányadosával jellemezni. Ezekkel a mennyiségekkel a fenti arányosság az egyszerűbb  $\sigma \sim \varepsilon$  alakba írható. Az összefüggést általában a

$$\sigma = E\varepsilon$$

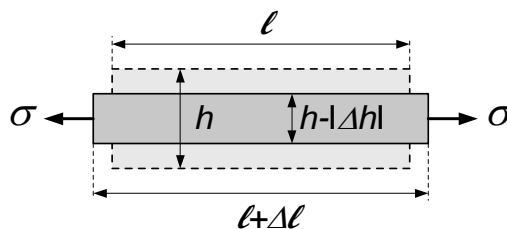
alakban használják, ahol az  $E$  arányossági tényező a *Young-modulus*<sup>1</sup>, ami kísérleti úton határozható meg. A Young-modulus adott külső körülmények (pl. adott hőmérséklet) mellett a tapasztalat szerint csak az anyagi minőségtől függ. Ugyanez az összefüggés érvényes a rúd összenyomásakor is, csak ekkor  $\Delta\ell$  rövidülést jelent.

Az itt bevezetett  $\sigma$  mennyiséget (felületre merőleges erő és a felület hányadosa) általában *normális feszültségnek* nevezik, nyújtás esetén használatos még a *húzófeszültség*-, összenyomásnál pedig a *nyomás* elnevezés. A nyomás jelölésére  $\sigma$  helyett rendszerint a  $p$  szimbólumot használják.

A rugalmas testek kismértékű alakváltozásánál általában is érvényes, hogy az alakváltozást jellemző mennyiség (deformáció) a külső hatást jellemző mennyiséggel (feszültség) *lineáris kapcsolatban* van. Ez a tapasztalati összefüggés a *Hooke-törvény*<sup>2</sup>, amely esetünkben a  $\sigma = E\varepsilon$  alakot ölti. (Az ilyen viselkedést kifejező összefüggés a gyakorlatban igen különböző konkrét alakokat ölthet, de rendszerint valamennyit Hooke-törvénynek nevezik.)

### Haránt összehúzódás és -tágulás

Ha a rúd nyújtásánál vagy összenyomásánál bekövetkező alakváltozást pontosabban megvizsgáljuk, akkor azt találjuk, hogy a rúd haránt irányú mérete is megváltozik, ami a rúd húzásánál *haránt összehúzódást*, a rúd összenyomásánál pedig *haránt tágulást* jelent (az ábrán a haránt összehúzódás látható, az áttekinthetőség kedvéért nem méretarányosan).



A tapasztalat szerint a haránt irányú méret megváltozása ( $\Delta h$ ) arányos az eredeti mérettel ( $h$ ) és a relatív hosszváltozással, csak az előjele ellenkező (nyújtásnál összehúzódás, összenyomásnál tágulás):

$$\Delta h = -\mu h \frac{\Delta\ell}{\ell} = -\mu h \varepsilon.$$

Az összefüggés szokásosan használt alakja

$$\frac{\Delta h}{h} = -\mu \frac{\Delta\ell}{\ell}.$$

<sup>1</sup> Thomas YOUNG (1773-1829) angol fizikus

<sup>2</sup> Robert HOOK (1635-1703) angol fizikus

A  $\mu$  arányossági tényező az anyagi minőségtől függő állandó, a *Poisson-szám*<sup>1</sup>.

### Térfogatváltozás nyújtásnál

Egy rúd nyújtásánál a rúd térfogata is megváltozik. Példaként egy  $\ell$  hosszúságú,  $h \times h$  keresztmetszetű hasábot vizsgálunk, amelynek méretei az alakváltozás után az  $\ell + \Delta \ell$  illetve  $h + \Delta h$  értéket veszik fel. A térfogatváltozás:

$$\Delta V = (\ell + \Delta \ell)(h + \Delta h)^2 - \ell h^2 = \ell h^2 + 2\ell h \Delta h + \ell \Delta h^2 + h^2 \Delta \ell + 2\Delta \ell h \Delta h + \Delta \ell \Delta h^2 - \ell h^2$$

amiből – a másod- és harmadrendűen kicsi tagok elhanyagolása után – a

$$\Delta V \approx 2\ell h \Delta h + h^2 \Delta \ell = \ell h^2 \left( 2 \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta \ell}{\ell} \right) = V \left( 2 \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta \ell}{\ell} \right)$$

összefüggést kapjuk.

Mivel

$$\frac{\Delta h}{h} = -\mu \frac{\Delta \ell}{\ell},$$

a térfogatváltozás

$$\Delta V \approx V \frac{\Delta \ell}{\ell} (1 - 2\mu),$$

a relatív térfogatváltozás pedig

$$\frac{\Delta V}{V} \approx (1 - 2\mu) \frac{\Delta \ell}{\ell}.$$

Ha  $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ -t kifejezzük a megnyúlást okozó feszültséggel, akkor a

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{(1 - 2\mu)}{E} \sigma$$

összefüggést kapjuk. A relatív térfogatváltozás – a várakozásnak megfelelően – arányos a feszültséggel és a nyújtást és haránt összehúzódást jellemző két rugalmas állandótól függ.

### Térfogatváltozás minden oldalról történő összenyomásnál (kompresszió)

Ha egy testet minden oldalról ható, a felület minden pontján azonos nyomásnak ( $p$ ) teszünk ki (ábra), akkor ehhez a nyomáshoz tartozik egy meghatározott egyensúlyi térfogat ( $V$ ). Ha a nyomást megnöveljük ( $p' = p + \Delta p$ ), akkor lecsökken a test térfogata ( $V' = V - \Delta V$ ). A tapasztalat szerint a térfogatváltozás arányos a  $\Delta p$  nyomásváltozással és az eredeti  $V$  térfogattal

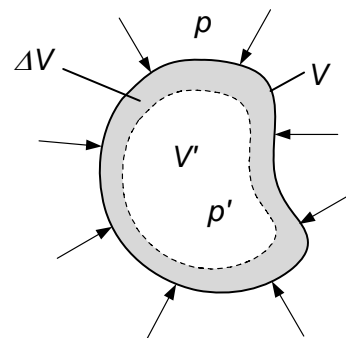
$$\Delta V \sim V \Delta p,$$

vagyis érvényes a Hooke-törvény.

Az arányossági tényező egy anyagállandó, a *kompresszibilitás*, amelynek jelölésére leggyakrabban a  $\kappa$  szimbólumot használják. Az előjeleket is figyelembe véve, a Hooke-törvény itt a

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p$$

alakba írható.



<sup>1</sup> Siméon Denis POISSON (1781-1840) francia matematikus és fizikus



A fenti összefüggést gyakran a

$$\Delta p = -\frac{1}{\kappa} \frac{\Delta V}{V} = -K \frac{\Delta V}{V}$$

alakban használják, ahol  $K = \frac{1}{\kappa}$  a *kompresziómodulus*.

Példaként egy  $\ell$  élhosszú kocka kompresszióját számítjuk ki.

Feltételezzük, hogy érvényes a *szuperpozíció elve*, így a teljes térfogatváltozást a három lapparra ható nyomás miatt fellépő térfogatváltozások összegeként számítjuk ki:

$$\Delta V = 3\Delta V_{lin} = -3V(1-2\mu)\frac{\Delta \ell}{\ell} = -3V(1-2\mu)\frac{\Delta F}{AE} = -3V(1-2\mu)\frac{\Delta p}{E}.$$

Ebből

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\frac{1-2\mu}{E}\Delta p,$$

vagyis a kompressziómodulus kifejezhető a korábban bevezetett 2 állandóval:

$$\kappa = 3\frac{1-2\mu}{E}.$$

Mivel  $\Delta p > 0$ -nál  $\Delta V < 0$ , a Poisson-számra fennáll, hogy  $\mu < \frac{1}{2}$ .

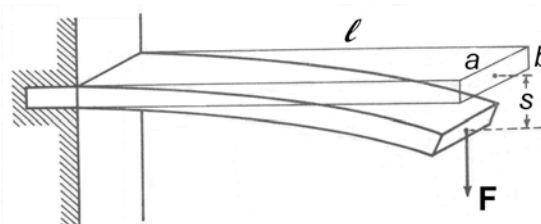
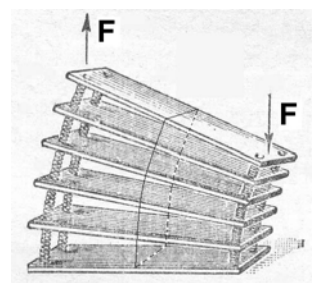
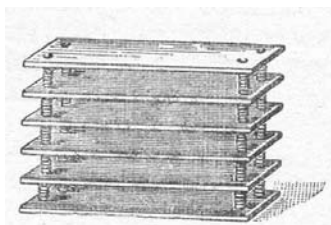
## Hajlítás

A hajlítással részletesebben nem foglalkozunk, csupán megpróbáljuk szemléltetni, hogy mi történik, ha egy egyik végén rögzített hasábot meghajlítunk. A mellékelt ábrán az alakváltozást a rugókkal összekapcsolt síkból álló modellen szemléltetjük. A hasáb alsó síkja rögzített, a hajlítást az ábrán jelzett erőkkel hozzuk létre. Ezek hatására a test meghajlik, jobboldalán a síkok távolsága lecsökken, tehát a test itt összenyomódik, a baloldalon viszont a síktávolság nő, tehát itt a test megnyúlik. Mivel a síktávolság jobbról balra egyenletesen nő, középen a síkok távolsága az eredeti, deformálatlan állapotnak felel meg (ábra). Ettől a változatlanul maradt ún. *neutrális síktól* jobbra összenyomás-, attól balra nyújtás következik be. Az ábra alapján sejthető, hogy a hajlítás nyújtásra és összenyomásra vezethető vissza. A részletesebb elemzések, amelyeket itt nem tárgyalunk, valóban igazolják ezt a sejtést.

A kísérletek és számítások azt mutatják, hogy ha egyik végén rögzített rudat a másik végén a rúdra merőleges  $F$  erővel hajlítunk (ábra), akkor a rúd végének  $s$  lehajlása az alábbi összefüggéssel számítható ki:

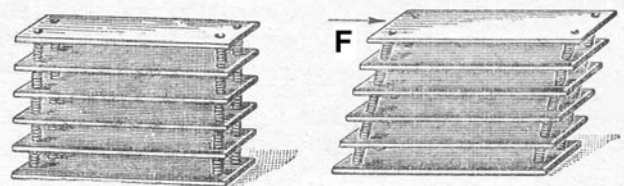
$$s = \frac{4}{E} \frac{\ell^3}{ab^3} F.$$

Látható, hogy a lehajlás kiszámításához az anyagállandók közül csak az  $E$  Young-modulusra van szükség. Ennek éppen az a magyarázata, hogy a hajlítás visszavezethető a rúd külső ívén alkalmazott nyújtásra és a belső ívén alkalmazott összenyomásra.

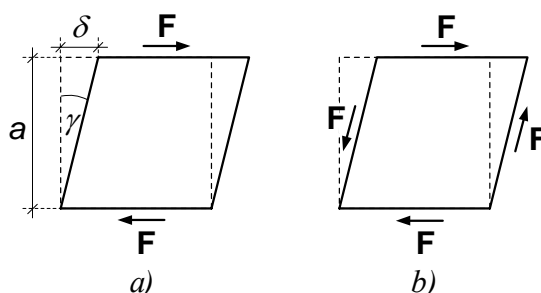


## Nyírás

A nyírást legegyszerűbben egy téglatest alakú hasábon lehet bemutatni. Egy alapjánál rögzített hasáb nyírása olyan erő hatására következik be, amely a rögzített alappal szemközti felületre hat, és a felülettel párhuzamos. Ezt az alakváltozást mutatja a korábban is használt modell segítségével a mellékelt ábra, ahol az alakváltozást a rugókkal összekapcsolt síkok elmozdulása szemlélteti. A tiszta nyírásnál a síkok egymással párhuzamosak maradnak, sőt a távolságuk sem változik, de a síkok mentén elcsúsznak egymáshoz képest. A modell-test felső síkjára ható, a síkkal párhuzamos erő a *nyíróerő*.



A hasábra ható erőket oldalnézetben mutatja a következő ábra. Az erő párhuzamos a felülettel, amire hat (a) ábra), a rögzítés hatását itt egy erővel helyettesítettük. A valóságban egyensúlyi állapotban a nyírás hatására két másik erő is fellép, mert a test csak akkor van egyensúlyban, ha az erők és a forgatónyomatékok eredője is nulla (b) ábra).



Az alakváltozást a  $\gamma = \frac{\delta}{a}$  relatív elmozdulással jellemezhetjük, amit *nyírási deformációnak* neveznek (ez kis elmozdulásnál az ábrán látható  $\gamma$  szöggel egyenlő). A külső hatás jellemzésére a felülettel párhuzamos  $F$  nyíróerő és az  $A$  felület  $\tau = \frac{F}{A}$  hányadosát használhatjuk. Azt így definiált  $\tau$  mennyiséget *nyírófeszültségnek* nevezik. A tapasztalat szerint kis deformációk esetén ebben az esetben is érvényes a Hooke-törvény, vagyis a  $\tau$  nyírófeszültség és a  $\gamma$  nyírási deformáció között lineáris összefüggés van

$$\tau = G\gamma .$$

Itt  $G$  az anyagi minőségtől függő *nyírási- vagy torziómodulus*, amelyet kísérleti úton lehet meghatározni.

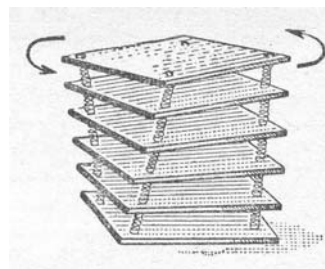
Kimutatható, hogy

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} ,$$

vagyis ez az anyagállandó is visszavezethető a korábban bevezetett kettőre.

## Csavarás

Bár a derékszögű hasáb nem a legalkalmasabb a tiszta csavarás bemutatására, szemléletessége miatt erre a célra mégis a már ismert modellt használjuk (ábra). A csavarást az ábrán látható forgatással hozhatjuk létre. Tiszta csavarás során a síkok egymással párhuzamosak maradnak, egymáshoz viszonyított távolságuk sem változik, de egymáshoz képest két irányban is elcsúsznak. Ebből sejthető, hogy a tiszta csavarás nyírásra vezethető vissza.



A csavarás legegyszerűbb esete az, amikor egyik végén rögzített hengeres test másik végére a henger tengelyével párhuzamos

forgatónyomaték hat. Ekkor a hengeres test csavaró hatásnak kitett vége elcsavarodik. A tapasztalat azt mutatja, hogy az elcsavarodás  $\varphi$  szöge arányos az  $M$  csavaró forgatónyomatékkal

$$M \sim \varphi \frac{a^4}{L}$$

(itt  $a$  a henger sugara,  $L$  a hossza). A pontos összefüggést nem túl bonyolult elméleti megfontolásokkal le is tudjuk vezetni.

Válasszuk ki a hengeres testben egy  $r$  sugarú, elemi  $dr$  vastagságú henger-héjat (ábra). Ennek deformációja a síkká kiterített,  $L$  magasságú henger-héj  $\Delta s$  elmozdulással járó nyírásának felel meg. A nyírási szög:

$$\gamma = \frac{ds}{L} = \frac{r}{L} \varphi.$$

A nyírott felület  $dA = 2r\pi dr$ , a nyíróerő

$$dF = \tau dA = G\gamma dA = G \frac{r}{L} \varphi 2r\pi dr.$$

Az elemi forgatónyomaték

$$dM = r dF = G 2\pi \frac{\varphi}{L} r^3 dr,$$

a teljes hengerre ható forgatónyomaték pedig

$$M = 2\pi G \frac{\varphi}{L} \int_0^a r^3 dr = \pi G \frac{a^4}{2L} \varphi.$$

A kapott összefüggés egyezik a tapasztalattal.

Ha a szokásnak megfelelően bevezetjük a

$$D^* = \frac{\pi G a^4}{2L}$$

jelölést, akkor a szögelfordulás és a forgatónyomaték összefüggése az egyszerűbb

$$M = D^* \varphi$$

alakba írható. (Ezt az összefüggést használtuk fel a merev testeknél tárgyalt torziós inga rezgésének tárgyalásánál.)

A  $D^*$  együttható (amit gyakran direkciós nyomatéknak neveznek) az anyagállandók közül csak a nyírési moduluszt tartalmazza, annak megfelelően, hogy a csavarást visszavezettük a nyírásra.

A rugalmas állandók összefüggése

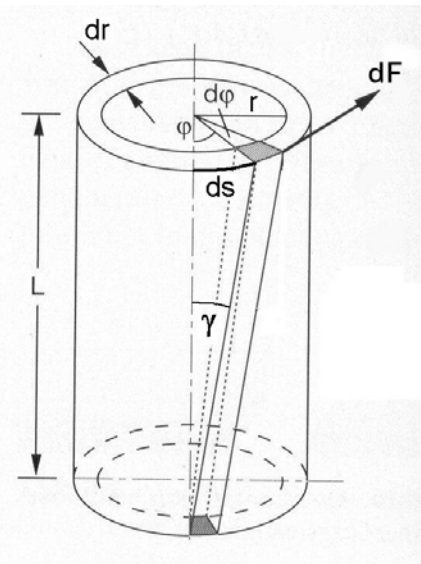
Láttuk, hogy homogén, izotróp rugalmas test esetén a bevezetett 4 rugalmas állandó ( $E$ ,  $\mu$ ,  $\kappa$ ,  $G$ ) között két összefüggés van:

$$\kappa = 3 \frac{1 - 2\mu}{E}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Ez azt jelenti, hogy az ilyen test rugalmas viselkedését két rugalmas állandó meghatározza.

A rugalmas állandók a kérdéses anyagból készült megfelelő próbatesteken mérhetők (később a laboratóriumban ilyen mérésekre sor kerül). Így például  $E$  a korábban felírt összefüggések alapján vékony rúd, vagy szál megnyúlásából- vagy egy rúd lehajlásából-,  $G$  ugyancsak az itt tárgyalt összefüggés segítségével egy rúd csavarásából- vagy egy rúdra vagy szádra



felfüggesztett korong torziós rezgéséből határozható meg (torziós inga). Az  $E$  és  $G$  ismeretében  $\mu$  és  $\kappa$  a fenti összefüggésekből kiszámítható.

## Rugalmas energia

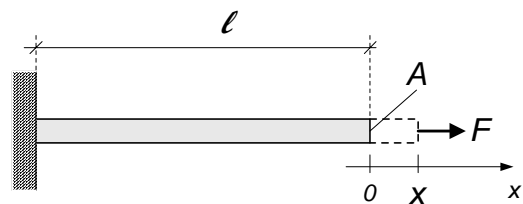
Egy test deformálásához munkát kell végezni. A rugalmas test azonban a deformáló hatás megszűnte után visszanyeri eredeti alakját, és eközben ugyanakkora munkát képes elvégezni, mint amit a deformáló erő végzett rajta. Ez azt jelenti, hogy a deformált rugalmas testnek egyértelműen meghatározott munkavégző képessége, helyzeti energiája van, amit *rugalmas energiának* neveznek. Most meghatározzuk a rugalmas energiát két speciális esetben.

Először kiszámítjuk egy mindenütt azonos keresztmetszetű rugalmas rúd megnyújtásakor végzett munkát, aminek nagysága megegyezik a megnyújtott test rugalmas energiájával. Az ábrán látható  $A$  keresztmetszetű,  $\ell$  hosszúságú rudat  $x$  értékkel megnyújtott állapotban látjuk, ekkor a rudat nyújtó erő

$$F = EA \varepsilon = EA \frac{x}{\ell} .$$

További elemi  $dx$  megnyújtáshoz

$$dW = F dx = EA \frac{x}{\ell} dx$$



munkát kell végezni.

A  $0$  és egy véges  $x$  érték közötti megnyújtás során végzett  $W$  munkát, és egyúttal az  $E_{rug}$  rugalmas energiát az elemi munkák összegzésével, vagyis integrálással kapjuk meg:

$$W = E_{rug} = \int_0^x F(x) dx = \frac{EA}{\ell} \int_0^x x dx = \frac{1}{2} \frac{EA}{\ell} x^2 .$$

Bevezetve a  $D = \frac{EA}{\ell}$  jelölést, az  $x$  távolsággal megnyújtott rúd rugalmas energiájára az

$$E_{rug} = \frac{1}{2} D x^2$$

összefüggést kapjuk. Itt feltételeztük, hogy a Hooke-törvény a deformáció során mindig érvényes.

A rugalmas energiára kapott kifejezést úgy is átalakíthatjuk, hogy a megnyúlás helyett a deformáció szerepeljen benne. Felhasználva a deformáció definícióját, az elemi munkavégzés az alábbi alakba írható:

$$dW = dE_{rug} = EA \frac{x}{\ell} dx = EA \ell \frac{x}{\ell} \frac{dx}{\ell} = EA \ell \varepsilon d\varepsilon = EV \varepsilon d\varepsilon ,$$

ahol  $V = A\ell$  a test térfogata.

A  $0$ -tól  $\varepsilon$  értékig deformált rúd rugalmas energiája tehát

$$E_{rug} = EA \int_0^\varepsilon \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 V .$$

A rugalmas energia térfogati sűrűsége

$$w_{rug} = \frac{E_{rug}}{V} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 ,$$

ami az anyagi minőségen (az  $E$  Young-moduluson) kívül csak a test  $\varepsilon$  deformációjától függ.

A rugalmas energia természetesen kifejezhető az alkalmazott feszültséggel is, ha felhasználjuk a  $\sigma = E\varepsilon$  összefüggést. Így a rugalmas energia újabb kifejezéseit kaphatjuk:

$$w_{rug} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2E} \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon .$$

Hasonló módon kaphatjuk meg a rugalmas energiát egy téglatest alakú rugalmas test nyírása esetén is. Egy  $A$  keresztmetszetű,  $h$  magasságú hasáb nyírásánál az erő

$$F = \tau A = G \gamma A ,$$

az elemi elmozdulás

$$dx = h d\gamma ,$$

így a nyíróerő elemi munkája

$$dW = F dx = GAh \gamma d\gamma = G \gamma d\gamma V$$

( $V = Ah$ ) a test térfogata).

A rugalmas energia

$$E_{rug} = GV \int_0^{\gamma} \gamma d\gamma = \frac{1}{2} G \gamma^2 V ,$$

a rugalmas energia térfogati sűrűsége pedig

$$w_{rug} = \frac{1}{2} G \gamma^2 .$$

A rugalmas energiát itt az anyag  $G$  nyírási modulusa mellett a test  $\gamma$  nyírási deformációja szabja meg. További kifejezések a  $\tau = G \gamma$  összefüggéssel kaphatók:

$$w_{rug} = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2G} \tau^2 = \frac{1}{2} \tau \gamma .$$

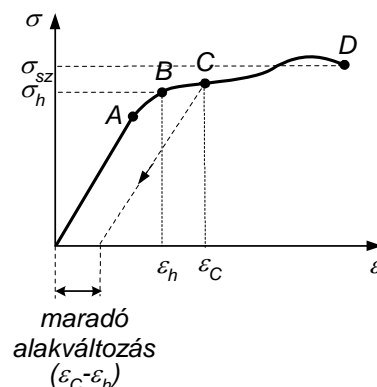
### Maradó (plasztikus) alakváltozás

Eddig feltételeztük, hogy a vizsgált test rugalmas, sőt azt is, hogy alakváltozásánál érvényes a Hooke-törvény, vagyis a deformáció arányos a deformációt okozó feszültséggel. A tapasztalat szerint ez eléggé kis deformációk esetén teljesül.

A deformáció növelésével azonban a test alakváltozása először a Hooke-törvénytől tér el, tehát a deformáció rugalmas marad, de nem arányos a feszültséggel, majd *maradó alakváltozás* lép fel.

Ha egy ismert hosszúságú és keresztmetszetű test nyújtása során mérjük az erőt és a hosszváltozást, majd kiszámítjuk a  $\sigma$  feszültséget és az  $\varepsilon$  deformációt, felrajzolhatjuk a test nyújtására vonatkozó *feszültség-deformáció* ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) görbét. Ez a görbe fontos információkat ad a vizsgált anyag alakváltozási tulajdonságaira vonatkozóan. A mellékelt ábra egy ilyen görbét mutat szemléletesen.

Az  $A$  pontig az alakváltozás követi a Hooke-törvényt, az  $A$ - $B$  szakaszon az alakváltozás még rugalmas, tehát a feszültség megszűnése után a deformáció eltűnik, de a  $\sigma$ - $\varepsilon$  arányosság már nem érvényes. A  $B$  ponthoz tartozik az a legnagyobb feszültség, amelynél a test még rugalmasan viselkedik, ezt a  $\sigma_h$  feszültséget a *rugalmasság határának* nevezik.



A feszültség további növelésekor az alakváltozás nem rugalmas, a feszültség megszűnése után az eredeti hossz már nem áll vissza. Ha például az ábrán látható  $C$  pontban a feszültséget megszüntetjük, akkor a deformáció nem szűnik meg, a test hossza visszafordíthatatlanul megváltozik, *maradó alakváltozás*, más néven *plasztikus deformáció* jön létre.

Anélkül, hogy részletekbe mennénk, megemlítjük, hogy a plasztikus deformáció mechanizmusának megértéséhez az anyag atomos szerkezetének ismeretére van szükség, mivel a plasztikus deformáció szoros kapcsolatban van az atomi szerkezetben jelenlévő és a deformáció során keletkező szerkezeti hibákkal. A deformáció során az anyagban a hibák száma egyre nő, végül a megnyújtott test elszakad ( $D$  pont). A szakadáshoz tartozó feszültség ( $\sigma_{sz}$ ) az anyag *szakítási szilárdsága*.

## Nyugvó folyadékok és gázok

A folyadékok és a gázok megjelenésüket tekintve lényegesen különböznek a szilárd testektől. A legszembeütőbb különbség az, hogy – szemben a szilárd testekkel – a folyadékoknak és gázoknak *nincs saját alakjuk*, alakjukat az őket határoló szilárd testek határozzák meg, és alakjuk a szilárd falak mozgásával könnyen megváltoztatható.

Ennek az az oka, hogy a folyadékok és gázok szomszédos részei egymáshoz képest nagyon kis behatással elcsúsztathatók, vagyis *nyíróerővel* szemben csak kicsi – gyakran elhanyagolható – ellenállást fejtenek ki.

Nyíróerő akkor lép fel, ha a folyadék- vagy gáz különböző tartományai egymáshoz képest elmozdulnak (például különböző sebességgel áramlanak), mert ilyenkor köztük súrlódás jellegű kölcsönhatás lép fel. Ennek következtében a gyorsabban haladó rész gyorsítja a lassabban haladót, a lassabban haladó pedig fékezi a gyorsabban haladót. Ezt a jelenséget *belső súrlódásnak*-, az ilyenkor fellépő nyíróerőt *belső súrlódási erőnek* nevezik.

Mivel a nyíróerőkkel szemben kifejtett ellenállás kicsi, a folyadék vagy gáz alakja mindaddig változik, amíg benne nyíróerők működnek, vagyis az egyensúlyi állapot feltétele az, hogy a nyíróerők eltűnjenek. Egyensúlyi állapot természetesen olyan folyadékokban is létrejön, amelyekben jelentős belső súrlódás van (pl. méz), de kialakulása ilyenkor több időt vesz igénybe. Mivel egyensúlyban nem lehetnek nyíróerők, a folyadékokban és gázokban egyensúlyi deformáció gyakorlatilag csak minden oldalról történő *összenyomással* hozható létre. A nyomás növekedésekor csökken a térfogat, de – nem túl nagy nyomás esetén – a többletnyomás megszűnésekor visszaáll az eredeti térfogat, vagyis a deformáció rugalmas.

A folyadékok és gázok – számos hasonló tulajdonságuk mellett – egymástól is különböznek. Alapvető különbség például az, hogy míg a folyadékoknak van megfigyelhető *szabad felszíne*, a gázoknál ilyen felszint nem találunk. További, lényeges különbség az, hogy a folyadékok *sűrűsége* azonos körülmények között sokkal nagyobb, mint a gázoké. Ezzel szorosan összefügg az a tapasztalat, hogy a folyadékok térfogata külső nyomással nagyon nehezen változtatható (kompresszibilitásuk kicsi), a gázok ezzel szemben könnyen *összenyomhatók* (kompresszibilitásuk nagy). Az is fontos eltérés, hogy a gázok fizikai jellemzői erősen függenek a *hőmérséklettől*, míg a folyadékok esetében ez a hőmérsékletfüggés lényegesen gyengébb.

Nagyon sok tapasztalat mutatja, hogy a folyadékok szabad felszíne sajátos, a folyadék belsejétől eltérő viselkedést mutat, ami gyakorlatilag is fontos *felületi jelenségekhez* vezet. Ezek jelenségek bizonyos esetekben befolyásolják a folyadékok viselkedését, de ezzel a problémával külön fejezetben foglalkozunk.

A folyadékok és gázok viselkedésének elméleti leírása hasonló módszerekkel történhet, mint a deformálható szilárd testeké, és hasonlóan bonyolult differenciálegyenletek megoldását teszi szükségessé. Itt csak a legegyszerűbb – de gyakorlatilag igen fontos – esetekkel foglalkozunk. Ezekben az esetekben a felületi jelenségek általában nem játszanak lényeges szerepet, ezért vizsgálatukkal itt nem foglalkozunk.

Először adott külső hatásnak kitett, nyugalomban lévő folyadékok és gázok egyensúlyának feltételeit vizsgáljuk meg. A mechanikának ezzel foglalkozó területét a folyadékok esetében *hidrosztatikának*-, a gázok esetében *aerosztatikának* nevezik. Mivel a folyadékok és gázok az egyensúly szempontjából hasonlóan viselkednek, a két terület megkülönböztetését gyakran elhagyják, és egyszerűen hidrosztatikáról beszélnek.

A továbbiakban mi is együtt tárgyaljuk a folyadékokat és a gázokat, és az egyszerűbb szóhasználat kedvéért a továbbiakban a „*folyadékok és a gázok*” kifejezés helyett sok esetben a *közeg* szót használjuk, folyadékról vagy gázzal külön többnyire csak akkor beszélünk, ha a köztük fennálló különbséget akarjuk hangsúlyozni.



### Nyomás a közeg egy pontjában

Mivel nyugvó közegben egyensúlyi állapotban nyírófeszültségek nincsenek, a közeget határoló- vagy a közeg belsejében kiválasztott felületen csak nyomófeszültség, azaz nyomás lép fel. Emiatt az egyensúly vizsgálata szempontjából a belső súrlódás nem játszik szerepet, az alábbi megállapítások tehát súrlódásos folyadékokra is érvényesek.

Számos tapasztalat mutatja, hogy a folyadék belsejében egy kiválasztott pontban elhelyezett felületen a nyomás nem függ a felület helyzetétől. Erre a következtetésre egyszerű elméleti megfontolással is eljuthatunk.

### Nyomás a közeg egy pontjában

Válasszunk ki a közegben egy elemi, hasáb alakú részt (ábra), és írjuk fel ennek a részecskének az egyensúlyi feltételét abban az esetben, ha a közeg a nehézségi erő hatása alatt áll. Vegyük fel a koordináta-rendszerünket az ábrán látható módon, ahol a  $z$ -tengely függőlegesen felfelé mutat.

A kiválasztott hasáb alakú rész annyiban speciális, hogy három oldala a három koordináta-síkba esik, de a negyedik oldal általános helyzetű.

A hasáb egyensúlyának feltétele az, hogy az egyes oldalakra ható nyomásokból származó felületi erők és a hasábra ható tömeg-erő (ami esetünkben a nehézségi erő) eredője nulla legyen:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_g = \mathbf{0}.$$

Az egyes erők az ábra jelöléseivel az alábbi módon írhatók fel.

$$\mathbf{F}_1 = p_x \frac{\Delta y \Delta z}{2} \mathbf{i} \quad \mathbf{F}_2 = p_y \frac{\Delta x \Delta z}{2} \mathbf{j} \quad \mathbf{F}_3 = p_z \frac{\Delta x \Delta y}{2} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_4 = p \Delta A \mathbf{u}_N \quad \mathbf{F}_g = -\rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6} g \mathbf{k}.$$

Itt  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  a három koordináta egységvektor,  $\Delta A$  az általános helyzetű felület nagysága,  $\mathbf{u}_N$  egy erre a felületre merőleges, a hasáb belseje felé mutató egységvektor,  $\rho$  a közeg sűrűsége,  $g$  pedig a nehézségi gyorsulás nagysága.

Ahhoz, hogy valóban használható összefüggést kapjunk, ki kell fejeznünk az  $\mathbf{F}_4$  erőben szereplő  $\Delta A \cdot \mathbf{u}_N$  vektort a  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  oldalhosszakkal és a koordináta egységvektorokkal.

Ezt legegyszerűbben az ábrán látható  $\mathbf{w}_1$  és  $\mathbf{w}_2$  vektorok vektoriális szorzatából kaphatjuk meg:

$$\Delta A \mathbf{u}_N = \frac{\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2}{2}.$$

Az ábra alapján

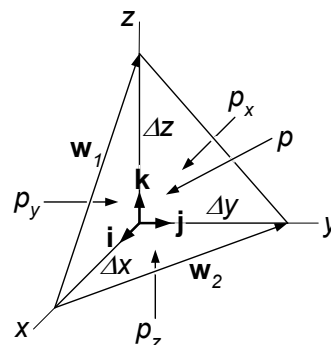
$$\mathbf{w}_1 = -\Delta x \mathbf{i} + \Delta z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{w}_2 = -\Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}$$

A vektorszorzat kiszámítása után azt kapjuk, hogy

$$\Delta A \mathbf{u}_N = \frac{1}{2} (-\Delta y \Delta z \mathbf{i} - \Delta x \Delta z \mathbf{j} - \Delta x \Delta y \mathbf{k}).$$

Ezzel a lapra ható erő



$$\mathbf{F}_4 = p \frac{-\Delta y \Delta z \mathbf{i} - \Delta x \Delta z \mathbf{j} - \Delta x \Delta y \mathbf{k}}{2},$$

és az egyensúlyi feltétel

$$p_x \frac{\Delta y \Delta z}{2} \mathbf{i} + p_y \frac{\Delta x \Delta z}{2} \mathbf{j} + p_z \frac{\Delta x \Delta y}{2} \mathbf{k} - p \frac{\Delta y \Delta z \mathbf{i} + \Delta x \Delta z \mathbf{j} + \Delta x \Delta y \mathbf{k}}{2} - \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6} g \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Ebből egyszerű átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$(p_x - p) \frac{\Delta y \Delta z}{2} \mathbf{i} + (p_y - p) \frac{\Delta x \Delta z}{2} \mathbf{j} + (p_z - p) \frac{\Delta x \Delta y}{2} \mathbf{k} - \rho g \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6} \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Ha a hasábot egyre zsugorítjuk, vagyis  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ , akkor a térfogati erőből származó tag sokkal gyorsabban tart nullához, mint a felületi tagok, ezért elhanyagolható, így az egyensúlyi feltétel a

$$(p_x - p) \frac{dy dz}{2} \mathbf{i} + (p_y - p) \frac{dx dz}{2} \mathbf{j} + (p_z - p) \frac{dx dy}{2} \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

alakot ölti.

Mivel  $dx, dy, dz$  tetszőleges, az egyenlőség általában csak úgy állhat fenn, ha

$$p_x - p = 0, \quad p_y - p = 0, \quad p_z - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = p_y = p_z = p,$$

vagyis a vizsgált pontban az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  normálisú és az általános helyzetű,  $\mathbf{u}_N$  normálisú síkok mindegyikén azonos a nyomás.

Ez azt jelenti, hogy a közeg adott pontjában a nyomás az *iránytól függetlenül* azonos, és ezt az esetleg fellépő térfogati erő sem befolyásolja.

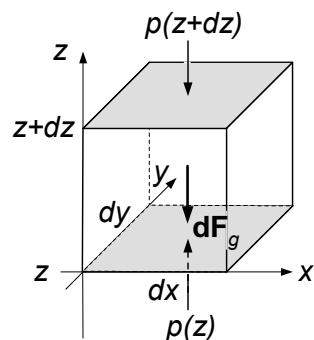
Kérdés, hogy milyen a nyomás a közeg különböző pontjaiban, vagyis hogyan függ a nyomás a helytől.

### A nyomás helyfüggése külső erőterben

A kísérletek tanúsága szerint egy nehézségi erőterben lévő folyadékban a nyomás a felszíntől mért mélység növekedésével nő, mégpedig a mélységgel arányosan. Sejthető, hogy ez a jelenség a nehézségi erővel áll kapcsolatban, konkrétan a folyadék súlyából származó nyomás következménye. Ez a jelenség gázokban is fellép, csak itt a nyomás a mélységgel sokkal lassabban változik (a gázok sűrűsége sokkal kisebb, mint a folyadékoké).

A tapasztalati úton megállapított törvényszerűséghez egyszerű elméleti megfontolásokkal is eljuthatunk. Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk a nyomás helyfüggését egy folyadék- vagy gázállapotú közegben a nehézségi erő jelenlétében, és vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy a  $z$ -tengely függőlegesen felfelé mutasson (ábra). Írjuk fel az ábrán látható téglatest alakú elemi hasáb egyensúlyának feltételét.

Az egyensúlyt a hasáb lapjaira ható nyomásból származó felületi erők és a hasáb tömegére ható nehézségi erő szabja meg. Mivel esetünkben a térfogati erőnek csak a  $z$ -komponense különbözik nullától, a vízszintes normálisú oldallapokon az egyensúlyt a térfogati erő nem befolyásolja, azt a felületi erők határozzák meg. A szemben lévő, azonos felületű oldallapok szemben lévő pontjaiban a nyomás azonos, a nyomóerő tehát a szemben lévő lapokon azonos nagyságú, de egymással ellentétes irányú, így a vízszintes irányú felületi erők egymást kompenzálják. Ez azt jelenti, hogy a térfogati erőre merőleges irányban a nyomás nem változik, a térfogati erőre merőleges felületen a nyomás mindenütt azonos.



Foglalkozzunk ezek után a függőleges erők egyensúlyával. Ennek feltétele az, hogy a felületi- és térfogati erők  $z$ -komponenseinek összege nulla legyen:

$$dF_z^{felületi} + dF_z^{térfogati} = 0$$

Mivel a térfogati erő a  $z$ -tengellyel párhuzamos, várható, hogy a nyomás függ a  $z$ -koordinátától, tehát  $p = p(z)$ . A hasáb felső,  $z + dz$  koordinátájú lapján a nyomás  $p(z + dz)$ , az alsó,  $z$ -koordinátájú lapján  $p(z)$ , így a felületi erők eredője

$$dF_z^{felületi} = p(z) dx dy - p(z + dz) dx dy = -(p(z + dz) - p(z)) dx dy$$

$$dF_z^{felületi} = -\frac{dp(z)}{dz} dz dx dy = -\frac{dp(z)}{dz} dV,$$

ahol  $dV = dx dy dz$  a hasáb térfogata.

A térfogati erő  $z$ -komponense esetünkben

$$dF_z^{térfogati} = -\rho g dx dy dz = -\rho g dV,$$

így az egyensúlyi feltétel

$$\rho g dV + \frac{dp(z)}{dz} dV = 0.$$

Ebből következik, hogy a nyomás  $z$ -irányú változását meghatározó összefüggés

$$\rho g + \frac{dp(z)}{dz} = 0$$

vagy a szokásosan használt alakban

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho g.$$

\*\*\*\*\*

Ha a koordináta-rendszer választásánál nem a fenti módon járunk el, akkor a térfogati erőnek általában mindhárom komponense különbözik nullától:  $d\mathbf{F}^{térf} (dF_x^{térf}, dF_y^{térf}, dF_z^{térf})$ . Ekkor a fenti gondolatmenet szerint a nyomás mindhárom irányban függ a helytől:  $p = p(x, y, z)$ , és az egyensúlyi feltétel a fentihez hasonló módon adható meg

$$dF_x^{térf} = \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} dV \quad dF_y^{térf} = \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y} dV \quad dF_z^{térf} = \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} dV.$$

Ez vektori alakban rövidebben is felírható a gradiens vektor segítségével:

$$\mathbf{f}^{térf} = \frac{d\mathbf{F}^{térf}}{dV} = \mathbf{grad} p.$$

\*\*\*\*\*

A fenti megfontolásokból két fontos dolog következik.

Az egyik az, hogy a közegben a nyomás csak a *térfogati erővel párhuzamos irányban* változik a helyvel.

A másik az, hogy ha nincs térfogati erő, akkor

$$\frac{dp(z)}{dz} = 0 \Rightarrow p(z) = \text{állandó},$$

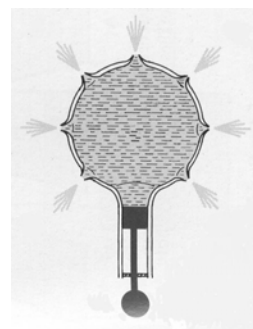
vagyis ilyenkor a közeg minden pontján ugyanakkora a nyomás, más szóval *a nyomás nem függ a helytől*. Ez azt jelenti, hogy ha a közeget valamilyen (nem térfogati) erővel

összenyomjuk, akkor a megnövekedett nyomás a közeg minden pontján ugyanakkora lesz. Ezt a tapasztalat által is igazolt törvényt *Pascal<sup>1</sup>-törvénynek* nevezik.

Pascal-törvény szemléltetésére szolgál a következő egyszerű kísérlet.

**KÍSÉRLET:**

Egy dugattyús hengerhez csatlakozó gömb felületén egyenletes eloszlásban lyukakat fúrunk (ábra). Ezután az edényt megtöltjük vízzel, és a dugattyút hirtelen az edény belseje felé nyomjuk. Ekkor a víz kispriccel a lyukakon át. Megfigyelhető, hogy a víz minden lyukon ugyanolyan erővel spriccel ki, vagyis a dugattyúnál kifejtett nyomás a gömbfelület minden pontján megjelenik.



A Pascal-törvényen alapul például a nagy terhek emelésére szolgáló *hidraulikus emelő* működése: egy kis- és egy nagy felületű dugattyút tartalmazó edényben a folyadékot a kis felületű dugattyúval kis erővel összenyomva a nyomás a nagy felületű dugattyúnál változatlanul megjelenik, így ez dugattyú a felületek arányában megnövekedett erő kifejtésére képes.

A fenti egyensúlyi feltétel ismeretében könnyen meghatározhatjuk a nyomás helyfüggését egy nehézségi erő hatása alatt álló közegben, hiszen csak a

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho g$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk. Ez a már ismert, szétválasztható típusú egyenlet, amit a

$$dp = -\rho g dz$$

alakba írva integrálhatunk.

Ha a  $z = 0$  koordinátájú pontban a nyomást  $p(0) = p_0$ -vel jelöljük, akkor a kiszámítandó integrálok:

$$\int_{p_0}^{p(z)} dp = -\int_0^z \rho g dz .$$

Feltételezve, hogy a vizsgált térrészben a sűrűség és a nehézségi gyorsulás nem függ a helytől, az integrálás könnyen elvégezhető, és azt kapjuk, hogy

$$p(z) - p_0 = -\rho g z ,$$

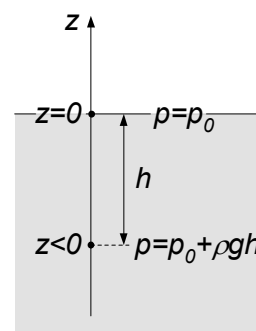
azaz

$$p(z) = p_0 - \rho g z .$$

A gyakorlatban legtöbbször az a kérdés merül fel, hogy egy folyadékban mennyi a nyomás a folyadék felszínétől mért  $h$  mélységben (ábra). Ha a  $z$ -tengely függőlegesen felfelé mutat, és a  $z = 0$  pont a folyadék felszínén van, akkor a folyadékban lévő pont  $z < 0$  koordinátájára fennáll, hogy  $h = -z$ . Ha tehát a nyomás helyfüggését a felszíntől mért mélységgel akarjuk megadni, akkor az összefüggést a

$$p(h) = p_0 + \rho g h$$

alakba írhatjuk. Itt  $p_0$  a folyadék felszínén mért nyomás (pl. a felszín felett lévő levegő nyomása).



<sup>1</sup> Blaise PASCAL (1623-166) francia matematikus, fizikus, filozófus.

Az összefüggésben szereplő

$$p = \rho gh$$

mennyiséget *hidrosztatikai nyomásnak* nevezik.

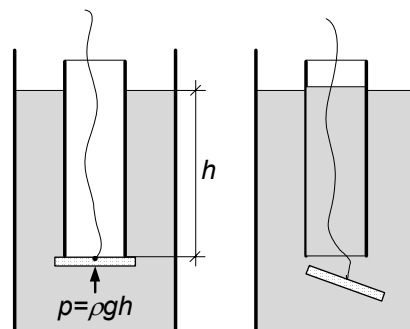
Ez a nyomás a  $h$  mélységben lévő pont feletti folyadékoszlop súlyából származik, hiszen egy  $A$  felületű,  $h$  magasságú folyadékoszlop súlya  $G = \rho Ahg$ , így az oszlop alján a nyomás

$$p = \frac{G}{A} = \rho gh.$$

Ezt mutatja a következő, egyszerű kísérlet.

**KÍSÉRLET:**

Mindkét végén nyitott üveghenger alsó végéhez fonál segítségével egy jól záró lapot illesztünk, majd a fonalat megfeszítve a hengert egy szélesebb, vízzel telt üvegedénybe merítjük (ábra). Ha a fonalat elengedjük, akkor a záró lap nem esik le, és a henger továbbra is üres marad. Ha ezután a hengert óvatosan feltöltjük vízzel, akkor a záró lap mindaddig a helyén marad, amíg a vízszint az üveghengerben alacsonyabb, mint a külső vízszint. A külső vízszint elérése után a záró lap leesik.

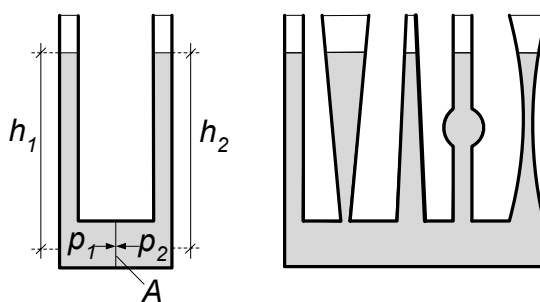


A vízbemerítés után a lapot az alulról ható  $p = \rho gh$  hidrosztatikai nyomás tartja meg. Ha a hengerbe vizet töltünk, akkor a záró lapra hat a vízoszlop lefelé ható nyomása is. Ezért, ha a betöltött víz magassága nagyobb, mint a külső vízszint magassága, akkor a vízoszlop lefelé ható nyomása nagyobb lesz, mint a felfelé ható hidrosztatikai nyomás, és a lap leesik.

Láttuk, hogy a folyadék egy pontjában a hidrosztatikai nyomás arányos a pont felett elhelyezkedő folyadékoszlop magasságával. Ennek egyik következménye a *közlekedő edények* működése.

**KÍSÉRLET:**

Egy nem túl vékony, szájával felfelé, függőlegesen tartott U-alakú csőbe folyadékot töltve, a folyadékszint mindkét oldalon ugyanolyan magasra áll be (ábra). Ugyanez az eredmény akkor is, ha több egymással összekötött („egymással közlekedő”) függőleges csőben vizsgáljuk a kialakult szinteket. Az egyes csövek alakjától függetlenül minden csőben ugyanolyan magas a folyadék szintje.



A magyarázat az, hogy egyensúly csak akkor állhat fenn, ha a vízszintes összekötő szakaszokon kiválasztott keresztmetszet bármely pontján a nyomás mindkét oldalon azonos. Ebből következik, hogy a pont felett a folyadékoszlop magasságának mindkét oldalon meg kell egyeznie, hiszen a nyomás arányos a folyadékoszlop magasságával. Az U-alakú cső esetén például a kiválasztott pontban az egyensúly feltétele

$$p_1 = \rho gh_1 = p_2 = \rho gh_2,$$

vagyis

$$h_1 = h_2.$$

Természetesen, ha a cső két szárában nem azonos folyadék van, akkor a két csőben a szintmagasság sem lesz azonos, hiszen ekkor a sűrűségek is különbözőek, de a magasságok most is a  $p_1 = p_2$  egyensúlyi feltételből állapíthatók meg.

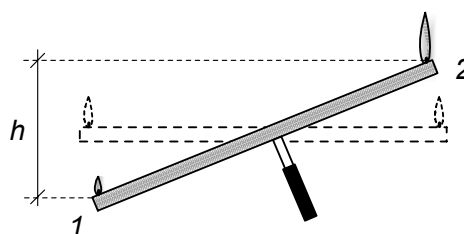
A folyadékot tartalmazó U-alakú cső nyomásmérésre használható. Ha a mérendő, nagyobb nyomású térrészt a cső egyik szárához csatlakoztatjuk, akkor a folyadékszint ebben a szárban lesüllyed, a másikban pedig megemelkedik. A folyadékszintek közötti magasságkülönbségnek megfelelő folyadékoszlop hidrosztatikai nyomása éppen a mérendő nyomásnak felel meg. Így a kialakult magasságkülönbségből közvetlenül megkapható a mérendő nyomás értéke.

A közeg súlyából származó nyomás gázokban is fellép csak a gáz kis sűrűsége miatt sokkal kisebb mint folyadékokban. Azt, hogy ilyen nyomás valóban létezik, jól mutatja az alábbi kísérlet.

**KÍSÉRLET:**

Mindkét végén lyukas csőbe (ábra) gázt vezetünk és a cső vízszintes helyzetében a lyukakon kiáramló gázt meggyújtjuk. Ekkor a gáz a két lyuknál azonos magasságú lánggal ég.

Ha a csövet az ábrán látható módon függőleges síkban elforgatjuk, akkor a magasabban lévő lyuknál a láng lényegesen magasabb, mint az alacsonyabban lévőnél.



A gázláng ott magasabb, ahol a gáz nyomása nagyobb, ezért a kísérletből azt a következtetést vonhatnánk le, hogy a gázban felfelé haladva nő a nyomás, ami ellentmondani látszik a hidrosztatikai nyomásról mondottaknak. A magyarázat az, hogy a láng magassága nem egyszerűen a gáz nyomásától függ, hanem a gáz és a környező levegő nyomásának különbségétől. A kísérletből tehát csak az következik, hogy felfelé haladva ez a nyomáskülönbség nő. Ennek pedig az az oka, hogy a levegő sűrűsége nagyobb, mint a gázé, ezért a levegő hidrosztatikai nyomása gyorsabban csökken a magassággal, mint a gázé, tehát a magassággal egyre nagyobb lesz a két nyomás közti különbség.

A jelenség számításal is egyszerűen követhető. Ha az alsó végnél a nyomások  $p_{g1}$  és  $p_{t1}$ , akkor a nyomáskülönbség ott  $\Delta p_1 = p_{g1} - p_{t1}$ . A nyomások a  $h$ -val magasabban lévő felső végnél  $p_{g2} = p_{g1} - \rho_g gh$  illetve  $p_{t2} = p_{t1} - \rho_t gh$ , így a nyomáskülönbség ott  $\Delta p_2 = p_{g2} - p_{t2} = p_{g1} - p_{t1} + (\rho_t - \rho_g)gh = \Delta p_1 + (\rho_t - \rho_g)gh$ . Mivel a levegő sűrűsége, nagyobb, mint a gázé,  $\rho_t - \rho_g > 0$ , ezért  $\Delta p_2 > \Delta p_1$ .

Ez az oka annak, hogy ha a gázhálózatban kicsi a nyomás, akkor a magasabban lakók járnak jobban, mert ott még lehet használni a gázt, amikor a földszinten már alig jön gáz a csapból. (Csökkent víznyomás esetén mindez fordítva igaz, hiszen a víz sűrűsége nagyságrendekkel nagyobb, mint a levegőé.)

A térfogati erő jelenlétével szorosan összefügg az a kérdés, hogy milyen egy nyugalomban lévő folyadék szabad felszínének alakja. Egyelőre olyan esetekkel foglalkozunk, amelyeknél a korábban említett felületi jelenségek nem játszanak lényeges szerepet. A tapasztalat szerint ez a helyzet, ha a felszint a folyadékot tartalmazó edény falától távol vizsgáljuk.

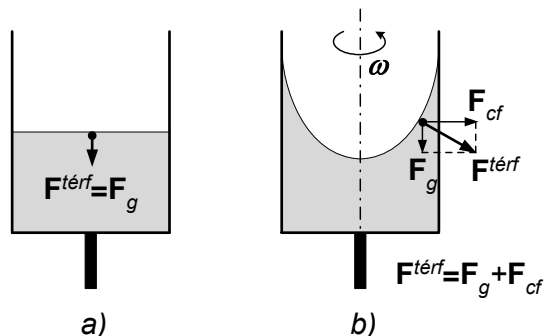
Mivel nyugvó folyadékban egyensúlyi állapotban a nyíróerők eltűnnek, az egyensúly kialakulása során a folyadék felszíne addig változik, amíg a jelenlévő térfogati erőnek nincs a

felülettel párhuzamos összetevője. Ez azt jelenti, hogy egyensúlyban a *felszín merőleges a térfogati erőre*. Ez a megállapítás *mindenféle térfogati erőre* érvényes.

Emiatt vízszintes a Földön a nyugvó víz felszíne (merőleges a nehézségi erőre), de ez az oka annak is, hogy egy hengeres edényben körbeforgatott víz felszíne nem sík.

**KÍSÉRLET**

Függőleges tengely körül forgatható hengeres edénybe vizet töltünk, amelynek felszíne a szokásos vízszintes sík (a) ábra). Ha a hengert a tengelye körül gyorsan körbeforgatjuk, akkor a víz felülete jól láthatóan megváltozik. Az új felület síkmetszetét szemlélteti a b) ábra.



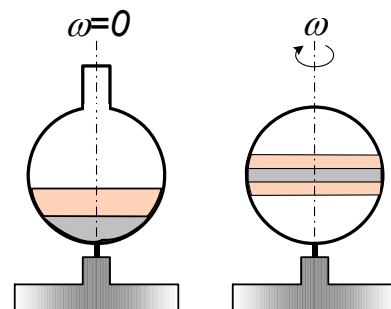
A jelenség magyarázata a forgó rendszerből nézve az, hogy az ábrán látható kis térfogatelemre az  $F_g$  nehézségi erőn kívül fellép az  $F_{cf}$  centrifugális erő is, ami szintén a tömeggel arányos térfogati erő. A felszín mindenütt a térfogati erők  $F^{terf} = F_g + F_{cf}$  eredőjére merőleges. Ennek iránya azért változik helyről-helyre, mert a centrifugális erő nagysága függ a forgástengelytől mért távolságtól.

Ha a centrifugális erőt növeljük (növekvő fordulatszám), akkor a nehézségi erő szerepe egyre kisebb lesz, és el lehet érni, hogy a nehézségi erő szerepét szinte teljesen átveszi a centrifugális erő.

**KÍSÉRLET:**

Gömb alakú, függőleges tengely körül forgatható edénybe higanyt és festett vizet rétegezzük egymásra. Az edény nyugalmi helyzetében a higany helyezkedik el alul, hiszen a sűrűsége sokkal nagyobb, mint a vízé.

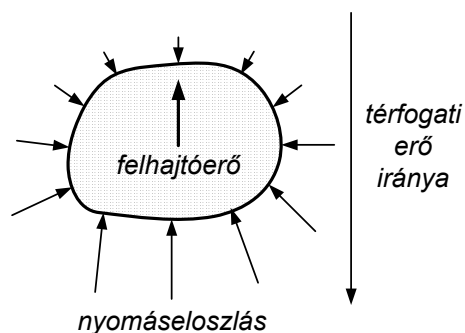
Ha az edényt megforgatjuk, akkor a higany az edény oldalához tapadva, övet képezve helyezkedik el, a víz pedig fölre tégezódik.



A forgatás után a centrifugális erő lép a nehézségi erő helyébe: a „lefelé” irány most sugárirányban kifelé mutat, ezért tapad a falhoz a higany, a víz pedig kisebb sűrűsége miatt „felette”, tehát a centrumhoz közelebb helyezkedik el. Ez a jelenség teszi lehetővé, hogy egy több összetevőt tartalmazó folyadékban a különböző sűrűségű összetevőket forgatással szétválasszuk. Az erre a célra készült eszközök a *centrifugák*.

**Felhajtóerő és úszás**

Mint láttuk, egy térfogati erő hatása alatt álló közegben hidrosztatikai nyomás lép fel, amely a térfogati erő irányában haladva a távolsággal arányosan nő. Ennek az a következménye, hogy a folyékony vagy gáznemű közegben elhelyezett szilárd testre a térfogati erővel ellentétes irányú erő lép fel. Mivel ennek a jelenségnek elsősorban a nehézségi erőterében van jelentősége, ahol ez az erő „felfelé” mutat, *felhajtóerőnek* nevezik. A felhajtóerő létrejöttét szemlélteti vázlatosan a mellékelt ábra.



A felhajtóerő közvetlenül is megmérhető, de létezését meggyőzően mutatja többek között az a tapasztalati tény, hogy a nehézségi erő hatása alatt álló közegben egyes szilárd testek lebegnek vagy éppen emelkednek, folyadékok esetén pedig a folyadék felszínén úsznak.

Ha egy téglalapot alakú hasábot úgy helyezünk el, hogy a hasáb 2 oldala a nehézségi erőre merőleges, akkor a felhajtóerő könnyen kiszámítható. Az alábbi ábrán a koordináta-rendszert úgy vettük fel, hogy a  $z$ -tengely a nehézségi erő irányába mutat. Az oldallapokra ható nyomások egymást kiegyenlítik, ezért az eredő erőnek csak  $z$ -komponense van. Ha a hasáb teljesen bemerül a folyadékba, akkor ez az erő

$$F_z^{felh} = (p(z) - p(z+h))ab.$$

Felhasználva a hidrosztatikai nyomásra korábban kapott összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_z^{felh} &= (p_0 + \rho g z - (p_0 + \rho g(z+h)))ab = \\ &= -\rho g h a b g = -\rho V g = -m_{folyadék} g, \end{aligned}$$

ahol  $p_0$  a folyadékra kívülről ható nyomás,  $V = abh$  a test térfogata,  $\rho$  pedig a folyadék sűrűsége. Eszerint a felfelé mutató felhajtóerő nagysága a test térfogatával azonos térfogatú folyadék súlyával egyenlő.

Ha a test csak részben merül be a folyadékba, akkor a felhajtóerő függ a bemerülés mértékétől. Ha az előbbi példában a test  $h$  magasságából csak  $h'$  magasságú rész merül a folyadékba, akkor a felső lapra ható, lefelé irányuló nyomás a folyadékra kívülről ható  $p_{le} = p_0$  nyomás, az alsó lapra ható, felfelé irányuló nyomás pedig  $p_{fel} = p_0 + \rho g h'$ , így a felhajtóerő

$$F_z^{felh} = (p_0 - (p_0 + \rho g h'))ab = -\rho g h' ab = -\rho V' g = -m'_{folyadék} g.$$

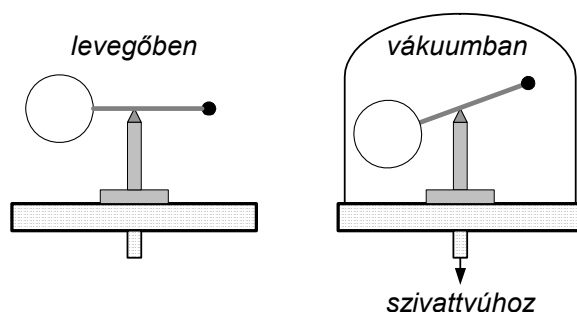
Itt  $V'$  a test folyadékba merülő részének térfogata,  $m'_{folyadék}$  az ezzel egyenlő térfogatú - folyadék tömege.

A felhajtóerő nagysága tehát a test folyadékba merülő részével egyenlő térfogatú - vagyis a test által kiszorított - folyadék súlyával egyenlő. Ez *Arkhimédész<sup>1</sup> törvénye*.

Felhajtóerő gázokban is hat egy testre, csak sokkal kisebb, mint folyadékban, hiszen a gázok sűrűsége csak töredéke a folyadékokénak. A felhajtóerő létezését igazolja például a hőlégballon működése vagy az alábbi látványos kísérlet.

#### KÍSÉRLET:

Levegőben kiegyenlített karos mérleg egyik karján egy nagy méretű üres üveggömb-, a másikon kisméretű rézgömb van (ábra). A mérleget egy szivattyú burája alá tesszük, és ott légritka teret hozunk létre. Ekkor a mérleg egyensúlya felborul: a kis rézgömb többé nem tud egyensúlyt tartani a nagy üveggömbbel, és felemelkedik, miközben az üveggömb lesüllyed.



A jelenség magyarázata az, hogy levegőben az egyes testekre ható súlyerőt lecsökkenti a felhajtóerő, az egyensúly tehát úgy jön létre, hogy a testekre a súly és a felhajtóerő

<sup>1</sup> ARKHIMÉDÉSZ (i.e. 287- i.e. 212) szirakúzi matematikus és fizikus



különbsége hat. Amikor a levegőt kiszivattyúzzuk, megszűnik a felhajtóerő, ami a két test esetében – a különböző térfogatok miatt – különböző, ezért az egyensúly megbomlik. Mivel a nagy méretű üveggömbre ható felhajtóerő nagyobb volt, mint a kis rézgömbre ható, megszűnése azt eredményezi, hogy az üveggömbre ható erő nagyobb lesz, tehát az üveggömb lesüllyed, a rézgömb felemelkedik.

Ehhez az eredményhez elméleti úton is eljuthatunk. A mérleg két karjának hosszát azonosnak feltételezve, az egyensúly feltétele az, hogy az egyes testekre ható erők nagysága azonos legyen. Az üveggömbre ható eredő erő levegőben

$$F_{\ddot{u}g} = F_{\ddot{u}g} - F_{\ddot{u}felh} = F_{\ddot{u}g} - \rho_f V_{\ddot{u}g} g ,$$

a rézgömbre ható erő pedig

$$F_{rg} = F_{rg} - F_{rfelh} = F_{rg} - \rho_r V_{rg} g$$

( $\rho_f$  a folyadék sűrűsége).

Az egyensúly feltétele az, hogy

$$F_{\ddot{u}g} = F_{rg} ,$$

azaz

$$F_{\ddot{u}g} - \rho_f V_{\ddot{u}g} g = F_{rg} - \rho_r V_{rg} g .$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$F_{\ddot{u}g} - F_{rg} = \rho_r g (V_{\ddot{u}g} - V_{rg}) .$$

Tudjuk, hogy  $V_{\ddot{u}g} > V_{fg}$ , amiből következik, hogy  $F_{\ddot{u}g} > F_{rg}$ , tehát a felhajtóerők nélkül az üveggömbre ható erő a nagyobb.

Nehézségi erőterben a felhajtóerő a testre ható súlyerővel ellentétes irányú, ezért egy folyékony vagy légnemű közegbe merített szilárd test viselkedését ennek a két erőnek az eredője határozza meg. Ha koordináta-rendszerünk  $z$ -tengelyét az erők egyenesében vesszük fel, és felfelé irányítjuk (ábra), akkor az eredő erő  $z$ -komponense

$$F_{e,z} = F_{felh} - F_g = \rho_f g V - \rho_{sz} g V = (\rho_f - \rho_{sz}) g V ,$$

ahol  $\rho_f$  a folyadék-  $\rho_{sz}$  a szilárd test sűrűsége,  $V$  pedig a szilárd test térfogata.

Ez azt jelenti, hogy a test felemelkedik, ha  $\rho_{sz} < \rho_f$ , lesüllyed, ha  $\rho_{sz} > \rho_f$  és lebeg, ha  $\rho_{sz} = \rho_f$ .

Ha a szilárd test sűrűsége kisebb, mint a folyadéké, akkor a test kiemelkedik a folyadékból, és eközben csökken a rá ható felhajtóerő. A kiemelkedés addig folytatódik, amíg a felhajtóerő egyenlő lesz a test súlyával

$$F_{felh} = \rho_f g V' = F_g = \rho_{sz} g V ,$$

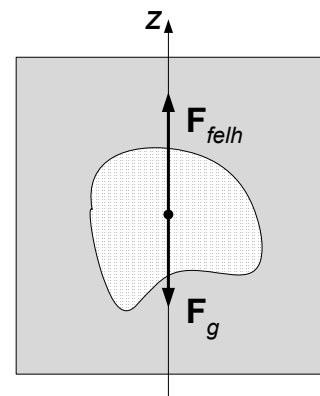
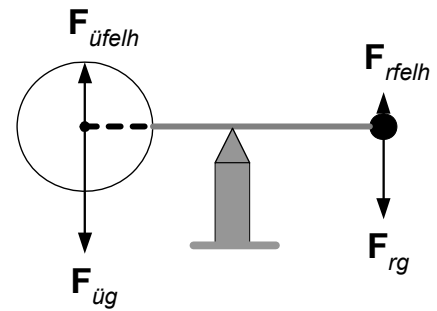
ahol  $V'$  a test folyadékba merülő részének térfogata.

Az egyensúly feltétele tehát

$$\rho_f V' = \rho_{sz} V ,$$

aminek teljesülése esetén a test úszik a folyadékban.

Az úzás teljes leírásához hozzátartozik annak meghatározása is, hogy az úzó test – a fenti feltétel teljesülése mellett – milyen helyzetben úszik. Az egyensúlyi helyzet elméleti meghatározása – különösen bonyolultabb alakú test esetén – általában eléggé nehéz feladat, ezzel itt nem foglalkozunk.



## Folyadékok és gázok áramlása

Nyugvó folyadékok és gázok esetén megtehetjük azt, hogy a kétféle közeget a tárgyalás során nem különböztettük meg egymástól. Ez az egyszerűsítés az áramlások leírásánál nem mindig engedhető meg. Ennek oka az, hogy a folyadékok és gázok *kompresszibilitása* és *sűrűsége* jelentősen *eltér* egymástól, és a gázok esetén ezek a jellemzők erősen *függnek a hőmérséklettől*. Ezek az eltérések azt eredményezik, hogy bizonyos körülmények között (pl. nagy sebességű áramlásnál) a kétféle anyag eltérően viselkedik.

További eltérés a nyugvó közegekhez képest az, hogy áramló közegben általában a *belső súrlódást* is figyelembe kell venni, hiszen az áramlásban egymáshoz képest mozgó folyadékrészek is előfordulhatnak. Áramló közegben valamilyen mértékű *belső súrlódás* mindig van, a valóságos közegek mindig *súrlódásosak*, legfeljebb bizonyos esetekben a vizsgált probléma szempontjából a *belső súrlódás elhanyagolható*, vagyis a folyadék vagy gáz *súrlódásmentesnek* tekinthető.

Az áramlások elméleti leírásánál kétféle eljárást alkalmaznak. Az egyik lehetséges eljárás az, hogy a közeget elemi részecskékre osztva az egyes részecskék mozgását vizsgáljuk, és megadjuk ezeknek a részecskéknél a pályáját. A másik eljárás az, hogy a közeg pontjainak sebességét vizsgáljuk, és megadjuk a sebességvektornak a helytől és időtől való függését. Ez utóbbi módszer az egyszerűbb, és a gyakorlatban is leginkább ezt használják.

A mechanikának az áramlásokkal foglalkozó ágát a folyadékok esetében *hidrodinamikának*- a gázok esetében *aerodinamikának* nevezik. A folyadékok és gázok áramlását csak abban az esetben lehet együtt tárgyalni, ha az áramlás sebessége nem túl nagy, és a hőmérséklet állandónak tekinthető. Ennek ellenére előfordul, hogy az elnevezésben nem tesznek különbséget a két eset között, és a teljes területre a hidrodinamika elnevezést használják.

A továbbiakban, az egyszerűbb és leginkább elterjedt módszert követve, az áramlásokat mi is a sebességek megadásával jellemezzük, de csak a legegyszerűbb esetekkel foglalkozunk.

### Az áramlás általános jellemzése

Az áramló közegek viselkedésének leírásához szükségünk van olyan mennyiségekre, amelyekkel jellemezni tudjuk az áramlásokat. Most ezekkel foglalkozunk.

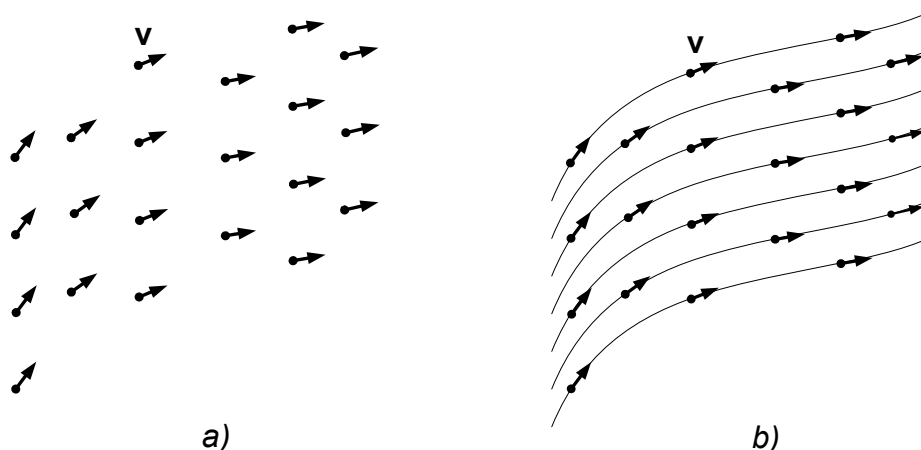
#### Sebességtér, áramvonalak

A folyadék mozgásának leírásához az *áramlási tér* tetszőleges  $\mathbf{r}(x, y, z)$  pontjában, tetszőleges  $t$  időpillanatban ismernünk kell a  $\mathbf{v}$  sebességvektort, vagyis a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(x, y, z, t)$$

függvényt. Ez a függvény a tér minden pontjához hozzárendel egy vektort, vagyis egy vektorteret definiál. Ennek megfelelően, az ilyen módon jellemzett áramlási teret *sebességtérnek* is nevezik.

A sebességtér szemléletesen úgy jeleníthető meg, hogy adott időpillanatban az áramlási tér minél több pontjába berajzoljuk a sebességvektorokat. Így egy sebességvektor-térképet kapunk, amely az egyes pontokban megmutatja a sebességvektor nagyságát és irányát (*a* ábra).



Ennél áttekinthetőbb és hasznosabb ábrázolást kapunk, ha a berajzolt sebességvektorokhoz ún. simulógörbéket szerkesztünk, amelyeknek a sebességvektorok az érintői (*b* ábra). Az így kapott görbék az *áramvonalak*.

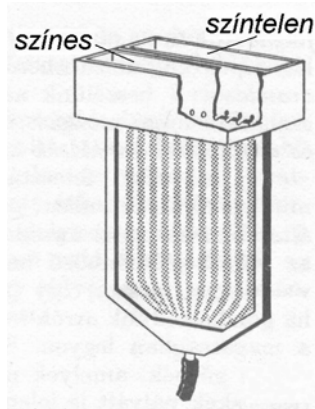
Az áramvonalkép egy adott időpillanatban jól jellemzi az áramlási térben a sebességek irányváltozásait, ha azonban a sebességek időben is változnak, az áramvonalkép pillanatról-pillanatra változik. Az áramvonalak tehát olyan áramlásoknál hasznosak, amelyeknél a sebesség csak a helytől függ, adott helyen időben nem változik. Ilyen, időben állandó áramlásban az áramvonal egyben a folyadékrészecskék pályáját is mutatja.

Az áramvonalak szerkezetének kimutatására többféle módszert is kidolgoztak, amelyek különböző áramlási viszonyok között alkalmazhatók. Látványos áramvonalképek készítésére alkalmas a Pohl<sup>1</sup>-féle áramvonal-készülék.

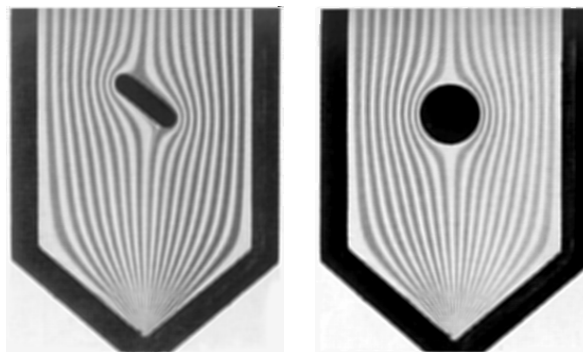
<sup>1</sup> Robert Wichard POHL (1884-1976) német fizikus

**KÍSÉRLET:**

Két víztartály egyikébe színezett-, a másikba pedig színtelen vizet töltünk, majd a tartályokból a színtelen vizet két egymáshoz közel, függőlegesen elhelyezett üveglap közé folytatjuk. A lassan lefelé áramló vízrétegbe vékony csövekből álló csősoron át színes vizet engedünk ki (ábra). Így egy színes és színtelen vízfonalakból álló áramlás jön létre. Ha az áramlás elég lassú, akkor a különböző színű vízfonalak egymás mellett mozognak, egymással nem keverednek, és az áramvonalaknak megfelelő alakot vesznek fel.



Ilyen áramvonal-készülékkel készített képeket mutat a mellékelt ábra, amelyen az áramlás útjába helyezett hosszúkás- illetve kör alakú akadály körül kialakult áramvonalkép látható. Ez a kísérlet tulajdonképpen az ábra síkjára merőlegesen elhelyezett, hosszú síklap- illetve henger hatását modellezi. A kapott ábra a síklap illetve henger körül kialakult áramlás síkmetszetének tekinthető.



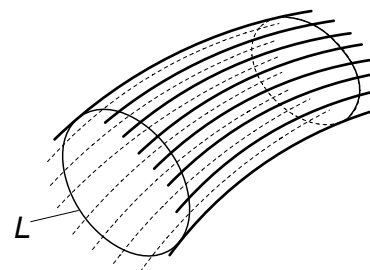
Az áramlás leírásához hasznos az *áramcső* fogalmának bevezetése. Az áramcső az áramlási térben felvett kis zárt görbén (az ábrán  $L$ ) áthaladó áramvonalak által alkotott cső. A közegnek az áramcsőben áramló részét *áramfonalnak* nevezik. Az áramcsőben a közeg úgy áramlik, hogy az áramlási sebességnek nincs az áramcső „falára” merőleges komponense, a közeg az áramcsőből nem lép ki.

Ez a helyzet egy merev falú cső esetében is, és bizonyos esetekben egy csőben áramló közeg mozgása áramcsőben történő áramlásnak tekinthető. Ez számunkra azért fontos, mert a továbbiakban elsősorban olyan eseteket vizsgálunk, amikor a közeg csőben áramlik.

A folyadékok és gázok áramlásának leírásához, a sebességek megadása mellett, a közeg különböző pontjaiban fennálló  $p$  nyomás és  $\rho$  sűrűség ismerete is hozzátartozik. Általában ezek a mennyiségek is változhatnak időben, vagyis a

$$p = p(x, y, z, t) \quad \text{és} \quad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

függvényeket kell meghatározni.



Az áramlás elméleti leírása tehát azt jelenti, hogy a közegre ható erők és a közeget határoló falak vagy csövek (vagyis a határfeltételek) ismeretében meghatározzuk a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) \quad p = p(x, y, z, t) \quad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

függvényeket. Ehhez az áramló közegre mozgásegyenleteket kell felírni, fel kell használni a tömegmegmaradást kifejező kontinuitási tételt és a közeg állapotegyenletét, amely a nyomás és a sűrűség közötti összefüggést adja meg. Egy ilyen feladat megoldása általában nem könnyű, ezzel a mechanika speciális fejezetei (pl. áramlástan) foglalkoznak. Itt elsősorban a legegyszerűbb áramlásokkal foglalkozunk, amelyek kísérletileg is könnyen tanulmányozhatók, és amelyeknek elméleti leírásához nincs szükség a mozgásegyenletek megoldására.

### Tömegáram-erősség, tömegáram-sűrűség

Az előző pontban tárgyalt mennyiségekkel az áramlás teljes mértékben jellemezhető, de az áramlással kapcsolatban gyakran felmerül az a gyakorlati kérdés, hogy egy kiválasztott felületen (pl. egy cső keresztmetszetén) adott idő alatt mennyi folyadék vagy gáz áramlik át, vagyis milyen az áramlás „erőssége”. Ennek érdekében, hogy erre a kérdésre válaszolni tudjunk, célszerű bevezetni az áramlás irányára merőleges felületen egy irányban átfolyt tömeg ( $\Delta m$ ) és az átfolyási idő ( $\Delta t$ ) hányadosát:

$$I_m^{\text{átl}} = \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Az így definiált  $I_m^{\text{átl}}$  mennyiség a  $\Delta t$  időtartamra vonatkozó átlagos *tömegáram-erősség* ( $SI$  egysége  $I \frac{kg}{s}$ ). Ha az áramerősséget ismerjük, akkor tetszőleges  $\Delta t$  idő alatt átáramlott tömeg

kiszámítható:  $\Delta m = I_m^{\text{átl}} \Delta t$ .

Ha az áramlás erőssége időben változik, akkor célszerű az áramerősséget egy adott időpillanatban megadni, vagyis érdemes bevezetni a pillanatnyi tömegáram-erősséget, amit az

$$I_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

összefüggéssel adhatunk meg.

Az áramerősség a keresztmetszetre vonatkozó átlagos mennyiség, hiszen a keresztmetszet különböző részein különböző lehet a tömegáramlás üteme. A keresztmetszeten belüli lokális tömegáramlás jellemzésére vezették be a *tömegáram-sűrűséget*, amelynek nagyságát közelítőleg egy az áramlás irányára merőleges, nagyon kis  $\Delta A_N$  nagyságú felületeleмен átfolyó kis  $\Delta I_m$  áram és a felület hányadosa adja meg:

$$j_m \approx \frac{\Delta I_m}{\Delta A_N}.$$

Ennek számértéke az egységnyi felületen egységnyi idő alatt áthaladt tömeggel egyenlő ( $SI$  egysége  $I \frac{kg}{s \cdot m^2}$ ).

A felület egy pontjában a tömegáram-sűrűség pontos értékét a már ismert módon kapjuk:

$$j_m = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta I_m}{\Delta A_N} = \frac{dI_m}{dA_N}.$$

Az áramsűrűség segítségével az elemi  $dA_N$  felületen átfolyó tömegáram a

$$dI_m = j_m dA_N$$

alakba írható.

Ha a felület nem merőleges az áramlás irányára, akkor ki kell számítani a felület

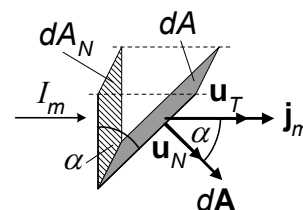
$$dA_N = dA \cos \alpha$$

merőleges vetületét (ábra).

Ezzel a felületeleмен átfolyó elemi tömegáram

$$dI_m = j_m dA \cos \alpha.$$

Ha bevezetjük az áram irányába mutató  $\mathbf{u}_T$  egységvektort, akkor az



áramsűrűséget vektor alakba írhatjuk  $\mathbf{j}_m = j_m \mathbf{u}_T$ , így az áramsűrűség az áram irányát is megadja. Ha még bevezetjük a felületelemre merőleges  $\mathbf{u}_N$  egységvektort is, akkor az elemi tömegáram a

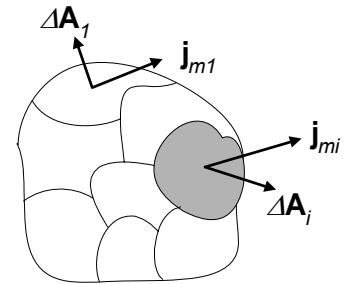
$$dI_m = j_m \mathbf{u}_T dA \mathbf{u}_T = \mathbf{j}_m dA \mathbf{u}_T$$

alakba írható. Vezessük be a felület nagyságának és állásának jellemzésére a  $d\mathbf{A} = dA \mathbf{u}_N$  *felületvektort*, amivel az elemi felületen átfolyó elemi tömegáram:

$$dI_m = \mathbf{j}_m d\mathbf{A}.$$

Egy véges  $A$  felületen átfolyó teljes  $I_m$  áramot ennek alapján úgy kaphatjuk meg, hogy a felületet olyan kis részekre osztjuk (ábra), amelyek már síknak tekinthetők (van egyértelmű felületvektoruk), és amelyekben belül az áramsűrűség már nem változik lényegesen. Az  $A$  felületen átfolyó áramot közelítőleg az egyes felületelemeken átfolyó elemi áramok

$$I_m \approx \sum_i \mathbf{j}_{m_i} \Delta \mathbf{A}_i$$



összege adja. Az áram pontos értékét a fenti összeg határértéke adja, ha a felosztást finomítjuk, és ezzel a felületelemek nagyságát nullához közelítjük:

$$I_m = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{j}_{m_i} \Delta \mathbf{A}_i.$$

Ennek a határértéknek a jelölésére a matematikában az

$$I_m = \int_A \mathbf{j}_m d\mathbf{A}$$

szimbólumot használják, és a  $\mathbf{j}_m$  vektor  $A$  felületre vonatkozó *felületi integráljának* nevezik. A felületi integrált később matematikában bővebben tárgyalják, számunkra ez a szimbólum most csak egy nagyon finom felosztáson történő összegzést jelent.

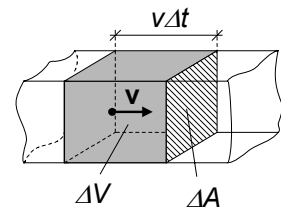
\*\*\*\*\*

Mindaz, amit az áramerősségről, áramsűrűségről eddig elmondtunk, mindenféle áramlás esetén érvényes, csak az áramló mennyiséget kell megváltoztatni. Így pl. a töltésáramlásra, vagyis az elektromos áramra vonatkozó összefüggések úgy kaphatók meg, hogy az  $m$  tömeg helyett mindenütt a  $Q$  elektromos töltést írjuk be az összefüggésekbe.

\*\*\*\*\*

Egy folyadék vagy gáz áramlása esetén az áramlás jellemzésére az áramerősség és áramsűrűség helyett legtöbbször a közeg sebességét használják. Ezért célszerű a fenti összefüggéseket a sebességgel is kifejezni. Ehhez vizsgáljuk meg, hogy az ábrán látható felületen  $\Delta t$

idő alatt mennyi  $\Delta m$  tömeg áramlik át, ha ismerjük a közeg  $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$



sűrűségét és az áramlás-, vagyis a közegben kiválasztott pontszerű tömegelem  $v$  sebességét. A  $\Delta A$  felületen  $\Delta t$  idő alatt azok a tömegelemek jutnak át, amelyek a felülettől nincsenek messzebb, mint  $v\Delta t$ , vagyis amelyek benne vannak az ábrán bejelölt  $\Delta V$  térfogatban. Eszerint az átmenő tömeg  $\Delta m = \rho \Delta V = \rho v \Delta A \Delta t$ ,

így az elemi felületen átmenő elemi tömegáram-erősség

$$\Delta I_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v \Delta A,$$

a tömegáram-sűrűség nagysága pedig

$$j_m = \frac{\Delta I_m}{\Delta A} = \rho v .$$

Mivel az áramsűrűség vektor az áramlási sebesség irányába mutat, az összefüggés vektori alakban is érvényes:

$$\mathbf{j}_m = \rho \mathbf{v} .$$

Ezzel egy nagyobb  $A$  felületen átfolyó tömegáram

$$I_m = \int_A \mathbf{j}_m d\mathbf{A} = \int_A \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} .$$

Ha a sűrűség a felület mentén mindenütt azonos, akkor az összegzésből a  $\rho$  sűrűség kiemelhető, és ekkor a tömegáramra azt kapjuk, hogy

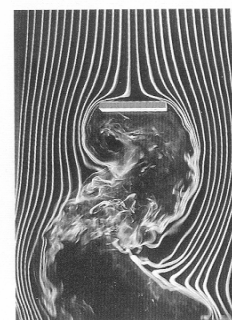
$$I_m = \rho \int_A \mathbf{v} d\mathbf{A} .$$

### Az áramlások fajtái

Az hogy egy közegben milyen áramlás jön létre, a körülményektől (erők, határfeltételek) és a közeg tulajdonságaitól függ. A tárgyalás egyszerűsítése érdekében célszerű az áramlásokat bizonyos – az áramlás leírása szempontjából fontos – szempontok szerint csoportosítani.

- 1.) Az egyik ilyen szempont, hogy a közeg sűrűsége az áramlás során változik vagy nem, vagyis hogy a közeg *összenyomható* vagy *összenyomhatatlannak* tekinthető. Összenyomható közeg esetén a sűrűség a nyomás ismeretében az állapotegyenletről határozható meg. Így például állandó hőmérsékletű gázban erre a célra a  $\rho \sim p$  Boyle–Mariotte-törvény használható. Vannak azonban olyan áramlások is, amelyeknél a közeg sűrűsége az áramlás során gyakorlatilag nem változik, a közeg összenyomhatatlannak tekinthető, ilyenkor  $\rho = \text{állandó}$ . Az, hogy egy közeg összenyomhatatlannak tekinthető vagy nem, függ az áramló közegtől és az áramlás sebességétől. Az összenyomhatatlanság feltételét különösen gondosan meg kell vizsgálni gázok áramlása esetén, hiszen a gázok kompresszibilitása nagy. A gázok nem túl nagy nyomások és nem túl nagy áramlási sebességek esetén összenyomhatatlannak tekinthetők (atmoszférikus nyomáson durván néhányszor  $10 \text{ m/s}$  sebességig). Nyilvánvaló, hogy az összenyomhatatlan közeg áramlásának leírása egyszerűbb.
- 2.) Az áramlás leírása szempontjából az is fontos, hogy a közegben a belső súrlódás számottevő vagy elhanyagolható, vagyis hogy az áramlás *súrlódásos* vagy *súrlódásmentesnek* tekinthető. A súrlódásmentes közegeket *ideális* közegeknek is nevezik. A *súrlódásos* áramlások két nagy csoportra oszthatók.

- Az egyik esetben az áramlásban az áramvonalak egymás mellett helyezkednek el, és nem metszik egymást, a közeg párhuzamosan haladó rétegekből áll. Az ilyen áramlást *lamináris* vagy *réteges* áramlásnak nevezik (baloldali ábra). Lamináris áramlás akkor jön létre, ha a belső súrlódás elég nagy ahhoz, hogy a szabályos áramlást külső hatások ne tudják megzavarni.
- A másik esetben (jobboldali ábra) az áramvonalak és az eredetileg párhuzamosan haladó rétegek összekeverednek, és ún. *turbulens* áramlás jön létre.



A *súrlódásmentes* áramlásokat szintén két nagy csoportra szokás felosztani.

- A közeg részecskéi az áramlás során általában haladó- és forgó mozgást is végeznek, ilyenkor az áramvonalképben rendszerint örvény jellegű alakzatok jelennek meg, ez az ún. *örvényes* áramlás.
- Vannak olyan áramlások amelyekben a közeg részecskéi csak haladó mozgást végeznek, ilyenkor az áramlást *örvénymentesnek* nevezik (az áramvonalképben ekkor nincsenek örvényalakzatok).

3.) A leírás szempontjából szintén fontos kérdés, hogy az áramlási tér pontjaiban a sebességek időben változnak vagy minden helyen időben állandóak. Ha a sebesség nem csak a helytől függ, hanem adott helyen időben is változik, akkor az áramlás *időben változó*, más szóval *instacionárius*. Ha a sebesség és vele együtt a nyomás és a sűrűség az áramlási tér minden pontjában időben állandó, csak a helytől függ

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) \quad p = p(x, y, z) \quad \rho = \rho(x, y, z),$$

akkor az áramlást *időben állandónak*, más szóval *stacionáriusnak* nevezik. A stacionárius áramlások tárgyalása jóval egyszerűbb, mint az időben változóké.



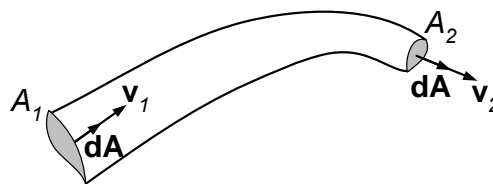
### Az időben állandó (stacionárius) áramlás alaptörvényei

Az áramlások közül legegyszerűbben az időben állandó áramlások tárgyalhatók, ezért először ilyen áramlásokkal foglalkozunk. Mivel a mozgásegyenletek még ebben az esetben is bonyolultak, ezek megkerülésével kell megkísérelnünk, hogy az áramlásra vonatkozó alapvető összefüggésekhez jussunk el.

A pontrendszerek tárgyalásánál láttuk, hogy a mozgásegyenletek megoldásának fáradságos munkáját bizonyos esetekben el lehet kerülni, ha felhasználjuk a pontrendszerekre érvényes megmaradási törvényeket. Ez az eljárás az áramlások esetén is alkalmazható. Itt az áramló közeg két jellemző mennyiségét a *tömeget* és az *energiát* vizsgáljuk meg, mert az ezekre vonatkozó megmaradási törvényekből az áramlásokra vonatkozó fontos törvényeket kaphatunk.

#### A kontinuitási egyenlet

Először vizsgáljuk meg az áramlási viszonyokat egy *áramlási csőben*. Válasszuk ki az áramlási csőnek az  $A_1$  és  $A_2$  keresztmetszetekkel határolt szakaszát (ábra), és vizsgáljuk meg az áramlási csőnek ebbe a térfogatába időegység alatt bemenő- és kimenő tömeget. Mivel az áramlási cső falán keresztül nincs áramlás, és ismereteink szerint tömeg nem tűnhet el és nem keletkezhet, a kiválasztott térfogatban a tömeg csak azért változhat, mert az  $A_1$  keresztmetszeten a közeg beáramlik a térfogatba, és az  $A_2$  keresztmetszeten pedig kiáramlik a térfogatból. Ha az áramlás időben állandó, akkor a kiszemelt térfogatban az anyag nem halmozódhat fel, hiszen ez a sűrűség időbeli változását eredményezné, ami ellentmond az időben állandó áramlás definíciójának. Mindebből az következik, hogy az egyik keresztmetszeten adott idő alatt bemenő tömegnek meg kell egyeznie a másikon ugyanennyi idő alatt kimenő tömeggel.



Ez érvényes az időegység alatt be- és kimenő tömegekre, vagyis a tömegáramokra is. Ha tehát az 1 keresztmetszeten befolyó tömegáramot  $I_{m1}$ -vel-, a 2 keresztmetszeten kifolyó tömegáramot  $I_{m2}$ -vel jelöljük, akkor a tömegmegmaradás törvényét az

$$I_{m1} = I_{m2}$$

összefüggéssel adhatjuk meg.

Az összefüggés ebben az alakjában túl általános. Fejezzük ki az áramokat az áramlási sebességekkel a korábban megismert

$$I_m = \int_A \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

összefüggés segítségével. Ha a felületvektort mindkét keresztmetszeten az áramlás irányában vesszük fel, akkor az  $A_1$  keresztmetszeten a csőszakaszba befelé folyó áram nagysága

$$I_{m1} = \int_{A_1} \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_{A_1} \rho \mathbf{v} dA,$$

az  $A_2$  keresztmetszeten kifelé folyó áram nagysága pedig

$$I_{m2} = \int_{A_2} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_{A_2} \rho \mathbf{v} dA.$$

Itt felhasználtuk, hogy a felületvektorok párhuzamosak a sebességekkel.

Ennek alapján a tömeg megmaradását kifejező egyenlet az

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 dA = \int_{A_2} \rho_2 v_2 dA$$

alakot ölti.

Ha az áramcső eléggé vékony, akkor feltételezhető, hogy a sűrűség és a sebesség az áramcső egy keresztmetszetének minden pontján azonos. Ilyenkor az integrálból (összegzésből) a  $\rho v$  mennyiség mindkét keresztmetszetenél kiemelhető, azaz

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 dA = \rho_1 v_1 \int_{A_1} dA = \rho_1 v_1 A_1 \quad \text{és} \quad \int_{A_2} \rho_2 v_2 dA = \rho_2 v_2 \int_{A_2} dA = \rho_2 v_2 A_2.$$

Így azt kapjuk, hogy egy vékony áramcső tetszőleges két keresztmetszetére fennáll, hogy

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2,$$

vagyis a vékony áramlási cső mentén

$$\rho v A = \text{állandó}.$$

Ezt az összefüggést, amely a tömegmegmaradás törvényét és az áramlás folytonosságát fejezi ki, *kontinuitási egyenletnek* nevezik.

Ha a közeg összenyomhatatlannak tekinthető, akkor  $\rho_1 = \rho_2$ , tehát

$$v_1 A_1 = v_2 A_2.$$

Mivel  $v A = \frac{1}{\rho} I_m = \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} = \frac{dV}{dt} = I_V$  a *térfogati áram erőssége* (számérték szerint a vizsgált felületen időegység alatt áthaladt folyadék- vagy gáztérfogat), összenyomhatatlan közeg esetén nem csak a tömegáramok-, hanem a térfogati áramok is megegyeznek a két keresztmetszetenél.

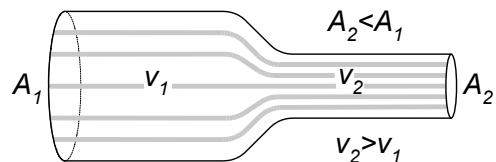
A kontinuitási egyenlet gyakorlati szempontból is fontos összefüggés, mert nagyon sok esetben merev falú csövekben történő áramlásoknál is használható<sup>1</sup>.

A kontinuitási egyenletből például következik, hogy egy változó keresztmetszetű csőben áramló összenyomhatatlan folyadék vagy gáz esetén a cső két keresztmetszetére érvényes, hogy

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1,$$

ha tehát  $A_2 < A_1$ , akkor  $v_2 > v_1$ , vagyis a közeg a kisebb átmérőjű szakaszokon felgyorsul. Ezt a számos tapasztalat által igazolt jelenséget kvalitatív módon úgy lehet értelmezni, hogy a közegnek a kisebb átmérőjű helyen gyorsabban kell haladnia, hogy adott idő alatt ugyanannyi tömeg menjen át itt, mint a nagyobb átmérőjű helyen.

Ha egy változó keresztmetszetű csőben történő áramlást modellezünk a korábban megismert áramvonal-készülékkel, akkor kiderül, hogy a keskenyebb, nagyobb sebességű helyeken az áramvonalak összesűrűsödnek (ábra). Ennek az az oka, hogy az áramvonalak folytonos vonalak, amelyek nem szakadhatnak meg. Ez azt jelenti, hogy az áramvonalak nem csak a sebesség irányáról, hanem a sebesség nagyságáról is tájékoztatást adnak: nagyobb áramvonal-sűrűség nagyobb sebességet jelent.

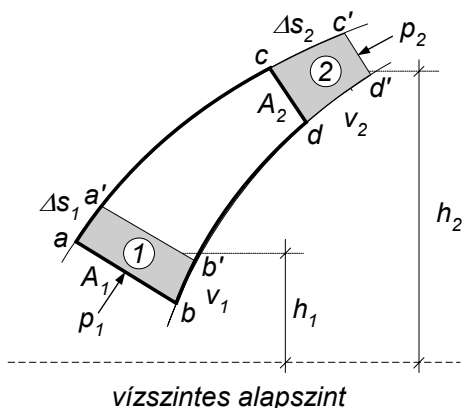


<sup>1</sup> Sűrűsödéses áramlásnál a cső keresztmetszete mentén a sebesség változik, ilyenkor az összefüggésbe az átlagos sebességet kell beírni.

## Bernoulli<sup>1</sup>-egyenlet

Most vizsgáljuk meg a másik megmaradó mennyiséget, az energiát, egy nehézségi erőterben áramló közeg esetén. Feltételezzük, hogy a közeg *összenyomhatatlan*, az áramlás *időben állandó* és *súrlódásmentes*.

Ismét válasszuk ki egy áramcsőnek az  $A_1$  és  $A_2$  keresztmetszettel lezárt részét (ábra), és számítsuk ki, hogy mennyivel változik meg a kiválasztott térfogatban lévő közeg energiája, ha a térfogat elmozdul. Az elmozdulás során a térfogatelem  $ab$  keresztmetszete az  $a'b'$  helyzetbe-,  $cd$  keresztmetszete pedig a  $c'd'$  helyzetbe kerül. Mivel az áramlás időben állandó, az elmozdulás során a térfogat  $a'b'$  és  $cd$  közötti része változatlan marad, tehát az energiaváltozás számításánál nem kell figyelembe venni. Az energiaváltozás szempontjából a folyamat úgy fogható fel, hogy az  $ab$ - $a'b'$  térfogatelem az 1 helyzetből az ugyanakkora térfogatú  $cd$ - $c'd'$  térfogatelem helyére, a 2 helyzetbe kerül. Mivel a közeg összenyomhatatlan, az 1 és 2 térfogatelem térfogata megegyezik, tehát  $dV = A_1 ds_1 = A_2 ds_2$ .



Erre a térfogatelemre az  $1 \Rightarrow 2$  elmozdulás közben hat a nehézségi erő és a keresztmetszeteken fellépő nyomásokból származó felületi erők (a közeget ideálisnak tekintjük, tehát belső súrlódásból származó erőkkel nem számolunk). A térfogatelem sebessége eközben  $v_1$ -ről  $v_2$ -re változik.

A helyzeti- és mozgási energia összegének megváltozása a kiválasztott térfogatra ható erők munkájával egyenlő, először tehát ki kell számítanunk az egyes erők munkáját.

Az  $A_1$  felületre ható erő  $F_1 = p_1 A_1$ , ennek munkája a  $\Delta s_1$  elmozdulás során

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta s_1 = p_1 A_1 \Delta s_1 = p_1 \Delta V .$$

Az  $A_2$  felületre ható erő munkája hasonlóan kapható:

$$\Delta W_2 = -F_2 \Delta s_2 = -p_2 A_2 \Delta s_2 = -p_2 \Delta V .$$

Az összes munka

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V .$$

A helyzeti energia megváltozása, miközben a térfogatelem súlypontja  $h_1$  magasságból  $h_2$  magasságba emelkedik

$$\Delta E_h = \rho \Delta V g (h_2 - h_1) .$$

Ha az áramcső eléggé vékony, akkor a sebesség egy keresztmetszet minden pontján azonosnak tekinthető, így a mozgási energia megváltozása

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) .$$

A teljes energiaváltozás

$$\Delta E = \Delta E_h + \Delta E_m = \rho g \Delta V (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

A munkavégzés és az energiaváltozás között fennálló

$$\Delta W = \Delta E$$

összefüggésből az következik, hogy

<sup>1</sup> Daniel BERNOULLI (1700-1782) svájci matematikus és fizikus

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2).$$

Az egyenlet átrendezésével azt kapjuk, hogy egy vékony áramlási cső tetszőleges két keresztmetszetére érvényes, hogy

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2.$$

Ez azt jelenti, hogy vékony áramlási cső mentén

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{állandó}.$$

Ez a *Bernoulli-egyenlet*, ami *összenyomhatatlan közeg sűrűdésmentes, időben állandó* áramlására érvényes. Mivel feltételeztük, hogy a közeg jellemzői azonosak egy keresztmetszet minden pontján, az egyenlet szigorúan véve végtelenül vékony áramcső-, vagyis egy *áramvonal mentén* érvényes.

A Bernoulli-egyenlet – nem túl nagy áramlási sebességeknél – merev falú csőben történő áramlásnál is alkalmazható, és a

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

kontinuitási törvénnyel együtt alkalmas a sebesség és a nyomás kiszámítására ismert geometriájú cső tetszőleges helyén, ha a sebességet és a nyomást ismerjük egy helyen.

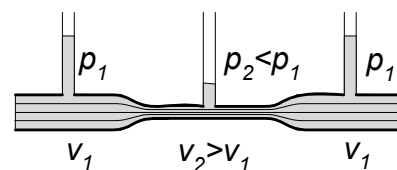
A közegben fennálló  $p$  nyomás és a  $v$  áramlási sebesség közötti kapcsolat különösen jól látszik, ha vízszintes csőben történő áramlást vizsgálunk. Ekkor ugyanis  $h_1 = h_2$ , tehát az egyenlet a

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

alakban érvényes. Az összefüggésből látszik, hogy ha  $v_2 > v_1$ , akkor  $p_2 < p_1$ , vagyis a nagyobb sebességű helyeken a közegben kisebb a nyomás. Ezt egyszerű kísérlettel igazolhatjuk.

**KÍSÉRLET:**

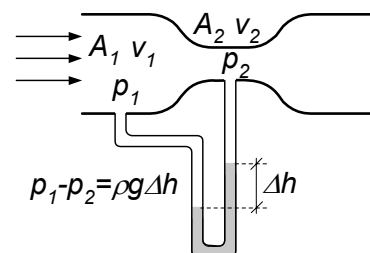
Egy változó keresztmetszetű, vízszintes csőben folyadékot áramoltatunk. A cső különböző helyeihez függőleges csöveket csatlakoztatunk, amelyekben a folyadékszint magassága (hidrosztatikai nyomása) méri a folyadékban uralkodó nyomást. A nyomás a keskenyebb csőszakaszokon kisebb, mint a szélesebb részekben.



A jelenség a kontinuitási egyenlet és a Bernoulli-egyenlet segítségével magyarázható. A kontinuitási egyenlet szerint a keskenyebb csőszakaszon nagyobb a sebesség ( $v_2 > v_1$ ), a Bernoulli-egyenlet szerint pedig a nagyobb sebességű helyeken kisebb a nyomás ( $p_2 < p_1$ ).

Az a tény, hogy az áramlás nagyobb sebességű részein a környezethez képest lecsökken a nyomás, számos gyakorlati szempontból is fontos jelenség kiváltó oka lehet (pl. szél által letépett tető, egymás mellett haladó járművek között fellépő vonzó hatás, vízlégszivattyú működése).

A sebesség és nyomás közötti kapcsolat felhasználható arra, hogy az áramlási sebesség mérését nyomásmérésre vezessük vissza. Az egyik ilyen eszköz (Venturi-cső) vázlatja az ábrán látható. A speciálisan kialakított csövet az áramlás útjába



helyezik és megméri a cső két különböző keresztmetszetű részében kialakult  $p_1 - p_2$  nyomáskülönbséget. Ebből a keresztmetszetek ismeretében, a kontinuitási- és Bernoulli-egyenlet segítségével a  $v$  áramlási sebesség megkapható.

A nagy sebességű helyeken bekövetkező nyomáscsökkenés egyszerű kísérletekkel demonstrálható, amelyek néha eléggé meglepő eredményeket produkálnak.

**KÍSÉRLETEK:**

Egy tölcsér szélesebb vége elé tett gyertya lángja nem az áramlás irányába-, hanem a tölcsér felé hajlik.

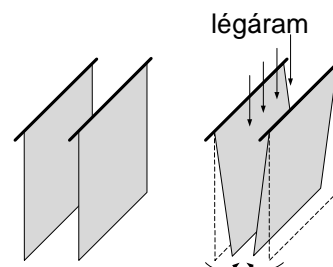
A tölcsér szélesebb végébe tett pingpong labdát a másik végébe erősen belefújva nem tudjuk kifújni a tölcsérből.

A magyarázat az, hogy a tölcsér falánál áramló levegőben kisebb a nyomás, mint a környező levegőben, így a környező levegő a lángot is és a pingpong labdát is a tölcsér felé nyomja.

Hasonló eredményre jutunk az alábbi kísérletnél is, de az áramlási viszonyok itt áttekinthetőbbek.

**KÍSÉRLET:**

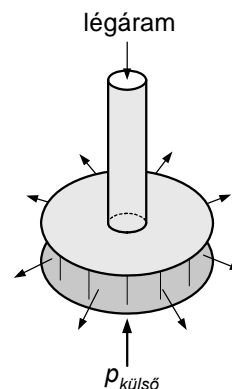
Két könnyű sík lapot vízszintes tengelyekre függesztünk fel, amelyek körül szabadon lenghetnek. A lapokat egymáshoz közel helyezük el, és a lapok közé felülről erősen befújunk. Ekkor a lapok – a várakozással ellentétben – nem távolodnak egymástól, hanem egymás felé lendülnek (ábra).



Ennél is meglepőbb az a kísérlet, amit aerodinamikai paradoxonként tartanak számon.

**KÍSÉRLET:**

Az ábrán látható eszköz felső része egy függőleges cső és egy vele egybeépített, közepén lyukas korong. Az alsó rész a felső koronggal azonos méretű, vele párhuzamos, de hozzá nem rögzített korong (nem lyukas), amely vékony vezető rudakon függőleges irányban szabadon elmozdulhat. Ha a csőbe erősen belefújunk, akkor a levegő a csőn át a két korong közötti térbe jut és a korongok között áramlik ki. A befújáskor az alsó korong gyorsan elmozdul *felfelé*, és szinte hozzátapad a felső koronghoz. Ha a fújást abbahagyjuk, az alsó korong leesik az eredeti helyzetébe.



A két utóbbi kísérlet eredményének magyarázata is az, hogy a légáramlás helyén a nyomás lecsökken, és a mozgatható lapokat a környező levegő nagyobb nyomása a kisebb nyomású hely, tehát a légáramlat helyé felé nyomja.

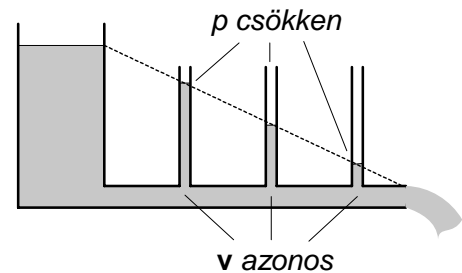
## Súrlódásos áramlások

A valóságos folyadékokban és gázokban mindig van belső súrlódás, ami az áramlásokban fontos szerepet játszhat. Ez nem csak abban nyilvánul meg, hogy a belső súrlódás elhanyagolása jelentős hibákhoz vezethet, hanem abban is, hogy vannak olyan jelenségek, amelyek a belső súrlódás figyelembe vétele nélkül nem is érthetők meg. Most néhány belső súrlódással kapcsolatos áramlási jelenséget vizsgálunk meg.

### Súrlódásos áramlás és Bernoulli-egyenlet

A belső súrlódás egyik következménye az, hogy a mechanikai energia egy része elvész, ezért a mechanikai energia megmaradását kifejező Bernoulli-egyenlet súrlódásos áramlásokban nem érvényes.

Ez szemléletesen bemutatható, ha egy nagyméretű edényből egyenletes keresztmetszetű, vízszintes csövön kiáramló folyadékban megmérjük a nyomást a cső különböző helyein (ábra). A nyomás mérésére itt a cső különböző helyeibe beépített függőleges csöveket használunk. Az áramló folyadék adott helyén uralkodó nyomás olyan magas folyadékoszlopot emel fel, amelynek hidrosztatikai nyomása egyenlő a folyadék nyomásával. Mivel a hidrosztatikai nyomás arányos a folyadékoszlop magasságával ( $p = \rho gh$ ), a függőleges csövekben mérhető magasságok jól mutatják a nyomáseloszlást az áramló folyadékban.



Mivel a tömegmegmaradás miatt a csőben mindenütt azonos a sebesség, a Bernoulli-egyenlet szerint a nyomásnak is mindenütt azonosnak kellene lenni (a cső vízszintes). A valóságban azonban a nyomás a csőben az edénytől távolodva fokozatosan csökken, vagyis a *Bernoulli-egyenlet nem érvényes*.

Mivel a problémát az elvesztett mechanikai energia okozza, a Bernoulli-egyenlet súrlódásos áramlásban csak akkor használható, ha az energiavesztés elhanyagolható a teljes mechanikai energiához képest. A gyakorlatban a törvényt súrlódásos áramlásoknál úgy alkalmazzák, hogy megbecsülik a veszteségeket, és ezek hatását az egyenletben egy kiegészítő taggal veszik figyelembe.

\*\*\*\*\*

Kimutatható, hogy ez a feltétel csőben áramló közeg esetén akkor teljesül, ha  $\frac{\rho R \bar{v}}{\eta} \gg 1$ , ahol  $\rho$  a közeg

sűrűsége,  $R$  a cső sugara,  $\bar{v}$  az áramlás átlagos sebessége,  $\eta$  pedig a belső súrlódás nagyságát jellemző mennyiség, a közeg viszkozitása (lásd alább). Látható, hogy a viszkozitás mellett fontos szerepet játszik a cső sugara és az áramlási sebesség is. Ezt az összefüggést azonban óvatosan kell alkalmazni, ha ugyanis a baloldalon álló mennyiség túl nagy, akkor az áramlás turbulenssé válik, és a Bernoulli-egyenlet végképp érvényét veszti.

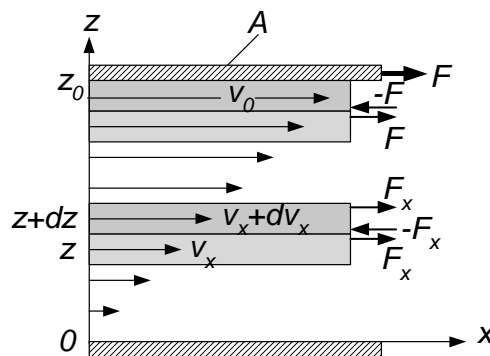
\*\*\*\*\*

### A Newton-féle súrlódási törvény

A belső súrlódás közvetlen következménye az, hogy a közeg különböző sebességgel mozgó részei között nyíróerők lépnek fel, a gyorsabban haladó rész igyekszik magával vinni a lassabban mozgót, a lassúbb pedig fűkezi a gyorsabban mozgót.

Ezt a jelenséget figyelhetjük meg akkor, ha pl. glicerinnél vagy sűrű mézből kiemelünk egy fémlapot. A fémlapra rátapad a folyadék, és magával visz egy felfelé vékonyodó folyadékréteget, ugyanakkor a lapon visszahúzó erőt érzünk. A szilárd felület nem mozog a folyadékhoz képest, súrlódás csak a folyadék részei között lép fel, ezért nevezik belső súrlódásnak.

A belső súrlódás egyszerűen tanulmányozható az ábrán látható elrendezés segítségével. Itt két egymáshoz közel elhelyezett,  $A$  felületű, párhuzamos síklapot látunk oldalnézetben. A lapok között vékony folyadékréteg van. Az alsó lapot az  $xy$  síkban rögzítjük, a tőle  $z_0$  távolságban lévő felső lapot pedig  $x$ -irányban egyenletes  $v_0$  sebességgel mozgatjuk. Ehhez erőt ( $F$ ) kell kifejtenünk, ami a folyadékban fellépő belső súrlódási erő legyőzéséhez szükséges. Nem túl nagy sebességnél a kialakult áramlás lamináris. A kísérletet különböző sebességekkel, lemeztávolságokkal és felületekkel elvégezve, azt találjuk, hogy



$$F = \eta \frac{v_0}{z_0} A,$$

ahol  $\eta$  az anyagi minőségtől függő, a belső súrlódásra jellemző állandó, amit *viszkozitásnak* neveznek ( $SI$  egysége:  $1 \frac{Ns}{m^2}$ ).

A sebesség a folyadékban az alsó lapnál mérhető  $v_x = 0$  értékről fokozatosan nő a felső lap  $v_x = v_0$  értékére, vagyis a sebesség függ a  $z$ -koordinátától:  $v_x = v_x(z)$ .

Az erőre kapott összefüggés bármilyen rétegvastagság esetén fennáll, ezért várható, hogy ha a folyadék belsejében vizsgálunk meg egy nagyon vékony réteget, akkor annak a mozgatásához szükséges  $F_x$  nyíróerőt, amit a szomszédos réteg fejt ki (ábra), ugyanilyen összefüggés adja meg

$$F_x(z) = \eta \frac{dv_x}{dz} A.$$

A folyadékban kiválasztott tetszőleges  $dz$  vastagságú réteg állandó sebességgel mozog, tehát a rá ható erők eredője nulla. Mivel ez a kiválasztott réteg szomszédjaira is igaz, a nyíróerő nem függhet a helytől, és azonos a felső lap húzásához szükséges erővel, vagyis:

$$F_x = \eta \frac{dv_x}{dz} A = \eta \frac{v_0}{z_0} A.$$

Ez csak úgy lehetséges, hogy a sebesség hosszegységre eső változását megadó  $\frac{dv_x}{dz}$  *sebesség-gradiens* is mindenütt azonos, és egyenlő a teljes sebesség-gradienssel

$$\frac{dv_x(z)}{dz} = \frac{v_0}{z_0},$$

a sebesség lineárisan változik a réteg mentén:

$$v_x(z) = \frac{v_0}{z_0} z.$$

A rétegek érintkezési felületén ható

$$F_x = \eta \frac{dv_x}{dz} A$$

nyíróerőnek megfelelő nyírófeszültség

$$\tau = \frac{F_x}{A} = \eta \frac{dv_x}{dz}.$$

A tapasztalat szerint ezek az összefüggések nem csak az itt tárgyalt speciális esetben igazak, hanem a legtöbb közönséges folyadékban és gázban általában is érvényesek. Ha egy közeg tetszőleges helyén kiválasztunk egy elemi felületet, akkor a felület két oldalán elhelyezkedő közegrészek között az ott fennálló sebesség-gradienssel arányos nyíróerő- illetve nyírófeszültség lép fel.

A belső súrlódási erő és az érintkezési felületre merőleges (pl. z-irányú) sebesség-gradiens között fennálló

$$F = \eta \frac{dv}{dz} A$$

összefüggést *Newton-féle súrlódási törvénynek* nevezik.

Belső súrlódás szempontjából a különböző folyadékok eltérő módon viselkednek. Azokat a folyadékokat, amelyekre érvényes a Newton-féle súrlódási törvény, *newtoni folyadékoknak* nevezik. Ilyenek pl. a tiszta folyadékok és a valódi oldatok.

Nem newtoni folyadékok pl. a kolloid oldatok, szuszpenziók, és általában a többfázisú folyadékok. Ezeknek a folyadékoknak a leírására a fenti törvény általában nem használható.

### Lamináris áramlás csőben

Láttuk, hogy sík lemezek között áramló közeg áramlási sebessége függ a helytől. Gyakorlati szempontból még fontosabb tudni, hogy milyen a sebességeloszlás egy csőben áramló közegben, ha az áramlás lamináris. Abból a tapasztalati tényből kiindulva, hogy a cső falánál a sebesség nulla, azt várjuk, hogy a sebességnek maximuma van a cső középvonalában. A kérdés az, hogy hogyan változik a sebesség a cső falára merőleges irányban.

A sebességeloszlást elméleti úton úgy határozhatjuk meg, hogy felírjuk az ábrán látható, egyenletes keresztmetszetű,  $R$  sugarú,  $\ell$  hosszúságú csőben kiválasztott  $r$  sugarú henger mozgásegyenletét. Ehhez számba kell vennünk a hengerre ható erőket. Az  $x$ -tengely irányába mutat a  $p_1$  nyomásból származó

$$F_{1x} = p_1 A = p_1 r^2 \pi$$

erő, az  $x$ -tengellyel szembe mutat a  $p_2$  nyomásból származó

$$F_{2x} = -p_2 A = -p_2 r^2 \pi$$

erő, végül a henger palástfelületén fellép az  $x$ -tengellyel szembe mutató

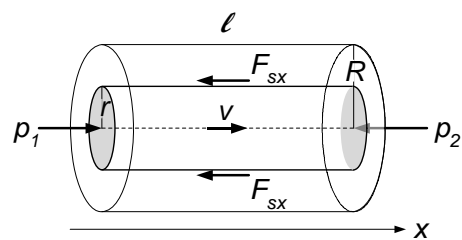
$$F_{sx} = \eta \frac{dv_x}{dr} A_p = \eta \frac{dv_x}{dr} 2r\pi\ell$$

belső súrlódási erő (a sebesség a sugár növekedésével csökken, tehát ez az erőkomponens negatív lesz). Itt  $A_p$  a henger palástjának felülete.

Az eredő erő ennek alapján

$$F_{xe} = F_{1x} + F_{2x} + F_{sx} = (p_1 - p_2)r^2\pi + \eta \frac{dv_x}{dr} 2r\pi\ell.$$

Mivel a közeg állandó sebességgel áramlik a csőben, a kiválasztott tömeg gyorsulása nulla, ezért az eredő erőnek nullának kell lenni, tehát





$$(p_1 - p_2)r^2 \pi + \eta \frac{dv_x}{dr} 2r\pi l = 0,$$

azaz

$$(p_1 - p_2)r + 2\ell\eta \frac{dv_x}{dr} = 0.$$

Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{dv_x}{dr} = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\ell\eta} r.$$

Az egyenlet könnyen integrálható:

$$v_x(r) = -\frac{(p_1 - p_2)r^2}{2 \cdot 2\ell\eta} + C = -Kr^2 + C.$$

Itt bevezettük a  $K = \frac{(p_1 - p_2)}{4\ell\eta}$  jelölést. Meg kell határoznunk még a  $C$  állandót.

Tudjuk, hogy a cső falánál a sebesség nulla, tehát

$$v_x(R) = -KR^2 + C = 0,$$

így az állandó

$$C = KR^2.$$

Ezt behelyettesítve, és  $K$  helyébe visszaírva az eredeti kifejezést, a sebességeloszlásra azt kapjuk, hogy

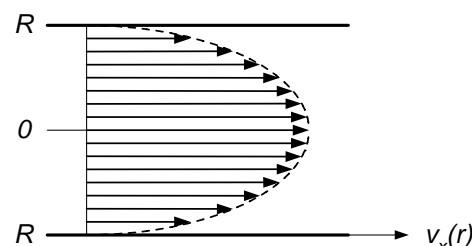
$$v_x(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\ell\eta} (R^2 - r^2).$$

Ez egy forgási paraboloid egyenlete, amelynek szimmetriatengelye a henger középvonalában ( $r = 0$ ) van. A cső falánál a sebesség nulla  $v_x(R) = 0$ , a cső

középvonalában  $v_x(0) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\ell\eta} R^2$ . A

sebességeloszlás síkmetszetét sematikusán a mellékelt ábra mutatja.

A kísérletek azt mutatják, hogy newtoni folyadékok lamináris áramlására a kapott sebességeloszlási törvény helytálló.



### Hagen<sup>1</sup>-Poiseuille<sup>2</sup>-törvény

Gyakran szükség van arra, hogy kiszámítsuk, mekkora a tömegáram egy egyenletes keresztmetszetű csőben áramló közeg esetén.

Ha a közeg ideális, akkor ez a feladat könnyen megoldható, hiszen a közeg minden pontja azonos  $v$  sebességgel mozog, így egy  $A$  felületű csőben folyó tömegáram  $I_m = \rho v A$ .

Más a helyzet akkor, ha az áramlás sűrűdéses, mert akkor a sebesség a cső keresztmetszete mentén változik. Az áramerősség a sebességeloszlás ismeretében ebben az esetben is kiszámítható, csak a csőben mozgó közeg keresztmetszetét olyan  $dA$  felületelemekre kell felosztani, amelyeken belül a sebesség mindenütt azonosnak tekinthető. Egy ilyen felületelemen folyó elemi áram a  $dI_m = \rho v dA$  összefüggéssel számítható ki, a teljes áram pedig az elemi áramok összegzésével kapható meg.

<sup>1</sup> Gotthilf HAGEN (1797-1884) német fizikus és hidraulikai mérnök

<sup>2</sup> Jean POISEUILLE (1797-1869) francia orvos, fiziológus

Egyszerűen elvégezhető ez a számítás egy hengeres cső esetén, mert ekkor a sebességeloszlás hengersizmetrikus. Az elemi felületet célszerű körgyűrű formájában felvenni, amint az a mellékelt ábrán látható. Itt az elemi felület

$$dA = 2r\pi dr,$$

a sebesség az  $r$  sugárnál a korábbi jelöléssel

$$v(r) = K(R^2 - r^2),$$

így a körgyűrűn átfolyó elemi áram

$$dI_r = \rho v(r) dA = \rho K(R^2 - r^2) 2r\pi dr.$$

Az  $R$  sugarú csőben folyó tömegáram erősségét az elemi áramok összegzésével, azaz integrálással kapjuk:

$$I_m = 2\pi\rho K \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = 2\pi\rho K \left\{ \int_0^R R^2 r dr - \int_0^R r^3 dr \right\} = 2\pi\rho K \left\{ \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right\} = \frac{\pi\rho K}{2} R^4.$$

Beírva a  $K = \frac{(p_1 - p_2)}{4\ell\eta}$  kifejezést, azt kapjuk, hogy

$$I_m = \frac{\pi\rho}{8\eta} \frac{(p_1 - p_2)}{\ell} R^4.$$

A tömegáram helyett gyakran a térfogati áramot használják, amit a sűrűséggel való osztással kapunk:

$$I_V = \frac{\pi}{8\eta} \frac{(p_1 - p_2)}{\ell} R^4.$$

A csőben áramló közeg áramerősségére vonatkozó fenti összefüggéseket *Hagen–Poiseuille-törvénynek* nevezik.

A törvény szerint a csőben folyó áram erőssége arányos az áramot létrehozó nyomáskülönbséggel. Az elektromos áramnál bevezetett ellenállás mintájára gyakran bevezetik a

$$\frac{(p_1 - p_2)}{I_V} = \frac{8\eta\ell}{\pi R^4}$$

mennyiséget, amit a cső áramlással szemben tanúsított *ellenállásának* jellemzésére használnak. Látható, hogy a cső ellenállása nagyon erősen függ a cső sugarától, a cső sugarának csökkenésével igen gyorsan nő.

Az áramlás jellemzésére gyakran *átlagos sebességet* használnak, amit például a

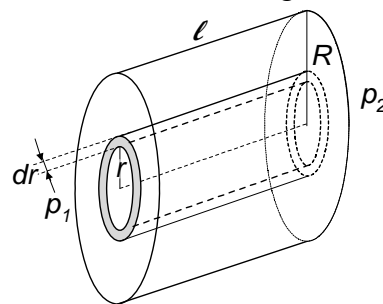
$$\bar{v} = \frac{I_V}{A} = \frac{I_V}{R^2\pi} = \frac{R^2}{8\eta} \frac{(p_1 - p_2)}{\ell}$$

összefüggéssel definiálnak.

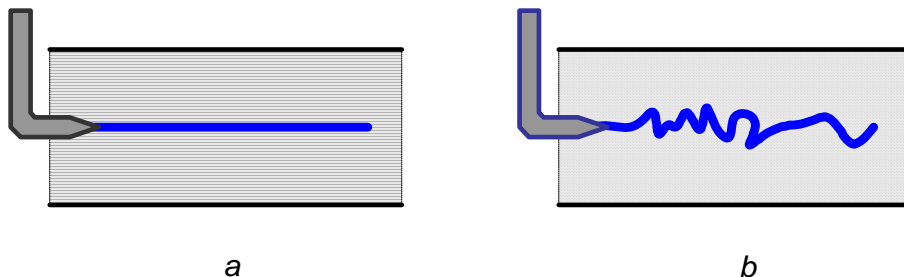
A Hagen–Poiseuille-törvény lehetőséget ad a viszkozitás meghatározására, hiszen ha ismerjük a cső geometriai adatait, megmérjük a nyomáskülönbséget és az áramerősséget, akkor a viszkozitás kiszámítható. A viszkozitás egyéb mérési módszereivel a laboratóriumban találkozunk.

## Turbulens áramlások

Ha egy csőben az áramlás sebességét növeljük, akkor az áramlás turbulenssé válik. A közeg részecskéi ilyenkor a haladó mozgás mellett forgómozgást is végeznek, az áramvonalak összekeverednek, örvények jelennek meg, az áramlás nagyon bonyolulttá válik.



Ezt jól mutatja egy folyadékáramba vékony csövön bevezetett színes folyadékfonal viselkedésének megváltozása, amit az alábbi ábra szemléltet. Lamináris áramlásban a színes fonal az áramvonalakkal párhuzamos egyenest rajzol ki (a ábra), az áramlási sebességet növelve a színes fonal „összegabalyodik” (b ábra), és megmutatja, hogy az áramlás turbulenssé vált.



A turbulenssé válás az áramlásokra vonatkozó ún. *hasonlósági elmélet* szerint egy dimenzió nélküli szám bizonyos értékénél következik be. Ezt a számot *Reynolds<sup>1</sup>-számnak* nevezik, és *csőben* történő áramlás esetén értékét az

$$R = \frac{\rho r v}{\eta}$$

összefüggés adja meg ( $r$  a cső sugara,  $\rho$  a közeg sűrűsége,  $v$  az áramlás átlagos sebessége). Az elmélet szerint az áramlás sima falú, hengeres csőben akkor válik turbulenssé, ha a Reynolds-szám nagyobb, mint az  $R_k \approx 1200$  kritikus érték, vagyis ha

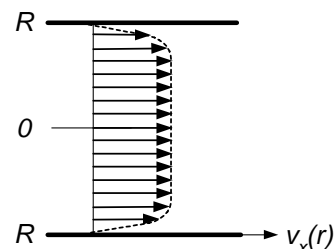
$$\frac{\rho r v}{\eta} > 1200 .$$

Ebből megkaphatjuk, hogy adott közeg és adott csőszugár esetén mekkora az a  $v_k$  kritikus áramlási sebesség, amely felett az áramlás turbulens lesz:

$$v_k \approx 1200 \frac{\eta}{\rho r} .$$

A fenti feltételből egyrészt az látható, hogy a viszkozitás növelésével a kritikus sebesség nő (viszkózus közegben nehezebben alakul ki turbulencia), másrészt, adott közeg esetén annál nagyobb sebességnél válik turbulenssé az áramlás, minél vékonyabb a cső (vékonyabb csőben nehezebben alakul ki turbulencia). A nagyságrendek szemléltetésére:  $20^\circ\text{C}$ -os víz áramlása esetén például  $r = 1\text{ cm}$  sugarú csőben  $v_k \approx 0,12\text{ m/s}$ , de  $r = 1\text{ mm}$ -nél már  $v_k \approx 1,2\text{ m/s}$ .

Turbulens áramlásban a laminárishoz képest lényegesen megváltoznak az áramlási viszonyok. Egy csőben például a sebességeloszlás lényegesen különbözik a lamináris áramlásra kiszámított eloszlástól. Az ábra a kiátlagolt sebességeloszlást mutatja szematikusan egy kis viszkozitású közeg (pl. víz vagy levegő) ilyen áramlásában. Látható, hogy a sebesség gyakorlatilag csak a fal közelében lévő vékony határrétegben változik, a faltól távol a sebesség a helytől alig függ, az áramlás gyakorlatilag súrlódásmentes.



Az elmélet szerint a belső súrlódást ilyenkor az áramlásban elhelyezkedő felületek (pl. csőfal, akadály) mentén egy vékony *határrétegben* kell figyelembe venni, ahol örvények alakulnak ki, a felülettől távolabbi helyeken a közeg ideális közegként viselkedik.

A Hagen–Poiseuille-törvény ilyenkor nem érvényes, a tapasztalat és a számítások szerint a cső ellenállása általában sokkal nagyobb, mint lamináris áramlásban.

<sup>1</sup> Osborne REYNOLDS (1842-1912) ír fizikus és mérnök

## Folyadékban vagy gázban mozgó testekre ható erők

Számos tapasztalat mutatja, hogy egy nyugvó<sup>1</sup> közeg a benne mozgó testre, ill. egy áramló közeg a benne nyugvó testre erőt gyakorol. Ennek a jelenségnek nyilvánvalóan komoly gyakorlati jelentősége van, ezért az erő ismerete nagyon fontos.

Egy közegben mozgó testre ható erő meghatározása a hidrodinamika legbonyolultabb problémái közé tartozik, amelyeknek megoldásánál alapvető szerepet játszanak a kísérletek. A relativitás elvéből következik, de mérésekkel is kimutatható, hogy a nyugvó közeg a benne  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgó testre ugyanolyan erőt gyakorol, mint a  $\mathbf{v}$  sebességgel áramló közeg a benne nyugvó testre. Ez teszi lehetővé, hogy az erő vizsgálatánál a közegben mozgó test helyett a laboratóriumban nyugvó testet vizsgáljunk áramló közegben.

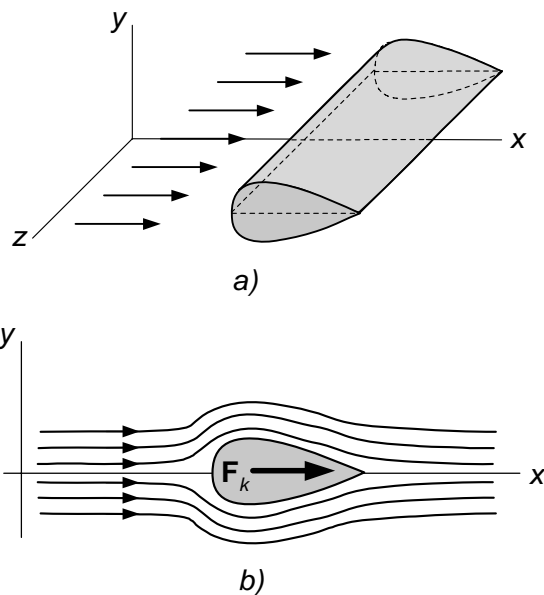
Az áramlások kísérleti vizsgálatánál nagyon fontos szerepet játszik a Reynolds-szám. Ha egy túlságosan nagyméretű test viselkedését szeretnénk megvizsgálni folyadék- vagy gázáramban, akkor kézenfekvőnek tűnik, hogy a nagyméretű test helyett a test geometriailag hasonló, kicsinyített modelljét vizsgáljuk. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy ugyanolyan áramlásban a kicsinyített modell egészen másképp viselkedik, mint az eredeti. A hasonlósági elmélet szerint két áramlás dinamikailag csak akkor hasonló, ha az áramlásokban a *Reynolds-szám megegyezik*. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy a kicsinyített modell dinamikai szempontból akkor viselkedik ugyanúgy, mint az eredeti test, ha biztosítjuk ezt a hasonlósági feltételt. A kicsinyítésnek sajnos határt szab az, hogy  $R \sim rv$ , tehát a Reynolds-szám azonosságának biztosításához a méret csökkenését a sebesség növelésével kell kompenzálni, és a sebesség csak egy bizonyos határig növelhető. Ennek részben technikai okai vannak, de gázállapotú közeg esetén komoly nehézséget okoz, hogy a sebesség növelésénél a közeg tulajdonságai lényegesen megváltoznak (a levegő pl. a  $330 \text{ m/s}$  sebességhez közeledve összenyomható közegként kezd viselkedni).

### Közegellenállás

Egy a közeghez képest mozgó testre ható erőnek mindig van egy olyan összetevője, amely a test sebességével ellentétes irányú, tehát a test mozgását akadályozza. A közeg által a testre kifejtett ilyen erőt *közegellenállásnak*, vagy *hidrodinamikai ellenállásnak* nevezik.

A kísérletek azt mutatják, hogy egy áramlásban elhelyezett (tehát a közeghez képest mozgó) testre ható erő nagysága és iránya függ a test alakjától, a testnek az áramláshoz viszonyított helyzetétől és az áramlás sebességétől.

A közegellenállás tisztán akkor tanulmányozható, ha olyan testet választunk, amelynek legalább egy szimmetria síkja van, és az áramlásba is „szimmetrikusan” helyezzük el, amint az pl. a mellékelt *a)* ábrán látható. Itt az áramlás  $x$ -irányú, a  $z$ -irányban nagyon hosszúnak gondolt test pedig



<sup>1</sup> A továbbiakban a jelenségeket a Föld felszínéhez rögzített vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk, és a „nyugvó” „mozgó”, „áramló” jelzőket ebben az értelemben használjuk.

szimmetrikus az  $xz$  síkra. Ilyenkor az várható, hogy – nem túl nagy sebességeknél – a test körül létrejött áramlás is ugyanilyen szimmetriájú ( $b$ ) ábra), és emiatt a testre ható erők ( $\mathbf{F}_k$ ) csak  $x$ -komponense van.

A tapasztalat szerint a közegellenállás két részből tevődik össze.

Egyik összetevője közvetlenül a belső súrlódással van kapcsolatban. A közeg sebessége a test felületén nulla, attól távolodva fokozatosan nő, és a gyorsabban haladó részek erőt fejtenek ki a lassabban mozgó részekre és végső soron a testre is. Ez az ún. *súrlódási-* vagy *felületi ellenállás*. Kis sebességeknél a közegellenállás gyakorlatilag ebből a súrlódási ellenállásból származik, ami arányos a test és a közeg relatív sebességével

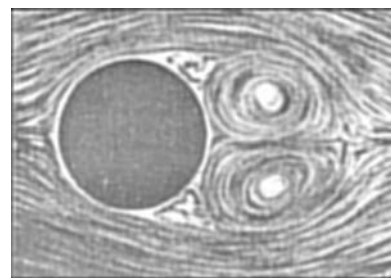
$$F_s = k\eta v,$$

ahol  $k$  a test alakjától és méretétől függő arányossági tényező. Gömb alakú test esetén  $k = 6\pi r$ , így a súrlódási ellenállás ekkor

$$F_s = 6\pi r\eta v.$$

Ez a *Stokes<sup>1</sup>-törvény*, aminek ismeretében leírható egy közegben eső golyó mozgása, és a golyó sebességének mérésével meghatározható a közeg viszkozitása.

A közegellenállás másik összetevője egyrészt abból ered, hogy az áramlás a test homlokfelületének közvetlen közelében lelassul, az áramvonalak itt megritkulnak, és a nyomás megnő (Bernoulli-egyenlet). Ez az áramlás irányába mutató erőt okoz. Nagyobb sebességeknél ehhez még az is hozzájárul, hogy a testnek az áramlással szembeeső végén örvények keletkeznek, amelyek szintén az áramlás irányába eső erőt eredményeznek. A mellékelt ábrán egy henger alakú test mögött kialakult örvények láthatók.

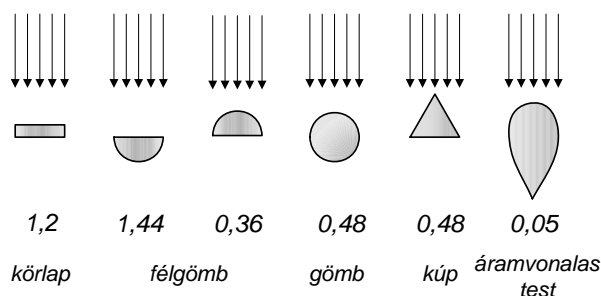


Ez a két hatás hozza létre a *nyomási-* vagy *alakellenállást*. Az alakellenállás erősen függ a test alakjától és a test és a közeg relatív sebességétől, legtöbb esetben a sebesség négyzetével arányos. Egy  $A$  homlokfelületű test és  $\rho$  sűrűségű közeg esetén ez az erő az

$$F_{ny} = c \frac{1}{2} \rho v^2$$

alakba írható, ahol  $c$  a test alakjától függő állandó, amit *alakellenállási tényezőnek* neveznek. Az ábrán feltüntetett számok az alakellenállási tényező értékét mutatják különböző alakú testek esetén.

Látható, hogy ez a tényező a jobboldali „csepp alaknál” a legkisebb. Ennek a testnek azért kicsi az ellenállása, mert a test mögött gyakorlatilag nincs örvényképződés, ezért az ilyen testet *áramvonalasnak* nevezik.

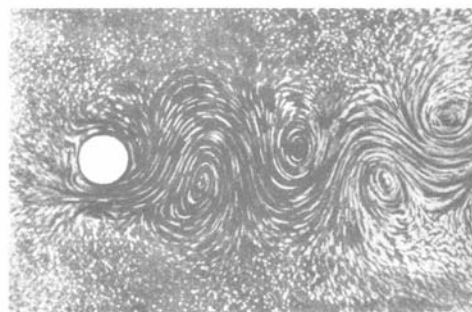


A test mögött kialakuló áramlás

jellege a Reynolds-számtól (adott közeg és geometria esetén a sebességtől) függ. A Reynolds-szám növekedésével a test mögött örvények jelennek meg, amelyek a testről leszakadnak, az áramlás továbbsodorja azokat, de mindig újra keletkeznek. Nagy

<sup>1</sup> Georg STOKES (1819-1903) angol matematikus és fizikus

Reynolds-számoknál (nagy sebességeknél) a mozgó test mögött az örvények nem szimmetrikusan válnak le a testről, hanem váltakozva a test egyik- és másik oldalán, és így egy jellegzetes örvénysor, ún. *Kármán<sup>1</sup>-féle örvényút* jön létre.



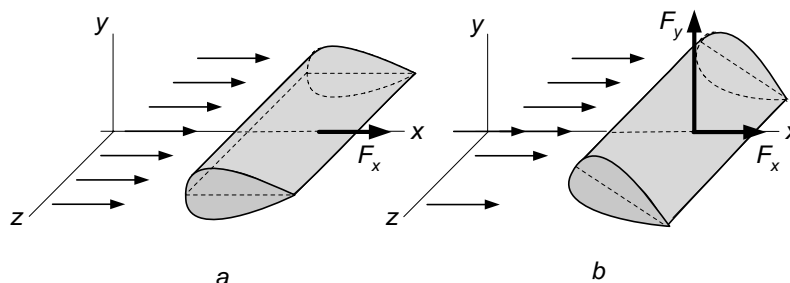
A Kármán-féle örvényút látható a mellékelt képen egy henger körül kialakult valóságos áramlásban.

A leszakadó örvények miatt lobog a szélben a zászló, és emiatt adnak hangot a szélben a kifeszített drótok és kötelek.

### ***Dinamikai felhajtóerő***

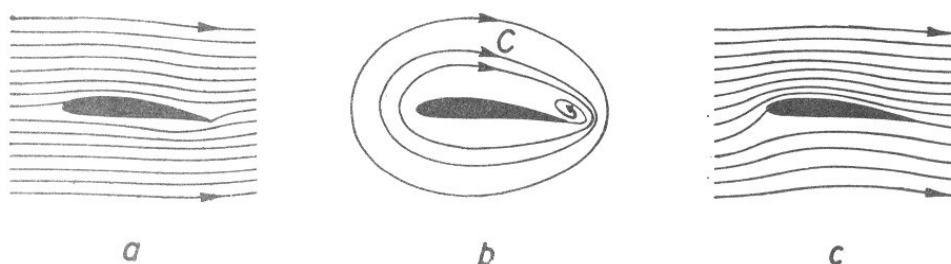
Eddig olyan esetekkel foglalkoztunk, amikor az áramlás – a benne elhelyezett szimmetrikus test szimmetrikus elhelyezkedése miatt – tükrözési szimmetriával rendelkezett. Láttuk, hogy ilyenkor az áramlás irányával ellentétes közegellenállás lép fel. Ha ez a fajta szimmetria nem áll fenn (vagy azért, mert a test nem szimmetrikus, vagy mert nem megfelelő helyzetben van), akkor a közegellenállás mellett az áramlás irányára merőleges erő is fellép.

Ezt mutatja vázlatosan a mellékelt ábra egy repülőgépszárnyhoz hasonló, tükörszimmetriával rendelkező test esetén. Az *a* ábrán látható a „szimmetrikus” helyzet, amikor a testre ható erők eredőjének csak *x*-komponense van. Ha a test a *b* ábrán látható ferde helyzetbe kerül, akkor fellép egy *y*-irányú erő is, amit *dinamikai felhajtóerőnek* neveznek (az elnevezés azzal függ össze, hogy a repülőgép szárnyán ez az erő felfelé irányul). A felhajtóerő közvetlen oka az, hogy aszimmetrikus test vagy



egy szimmetrikus test aszimmetrikus elhelyezkedése esetén az áramlás sebessége a test felett nagyobb, mint alatta, ezért a Bernoulli-egyenletnek megfelelően alul nagyobb a nyomás, mint felül.

Ennek a helyzetnek a kialakulása meglehetősen bonyolult folyamatok eredménye. Egy repülőgép-szárnyhoz hasonló test esetén a jelenséget kvalitatív módon a következőképpen lehet értelmezni. A test körül kialakult áramlásban (*a*) ábra) a belső



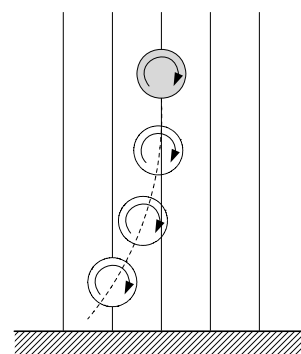
<sup>1</sup> KÁRMÁN Tódor (1881-1963) magyar származású amerikai mérnök és fizikus

súrlódás miatt a test csúcsos végén egy óramutató járásával ellentétes irányú örvény keletkezik, és a perdületmegmaradás tétele miatt létrejön a testet körülvevő, ellenkező (tehát az óramutató járásával azonos) irányú, zárt áramvonalakkal jellemezhető áramlás, amit *cirkulációnak* neveznek (*b* ábra). A cirkuláció az áramlási sebességet a test felett megnöveli, alatta pedig lecsökkenti (*c* ábra), így keletkezik az a nyomáskülönbség, ami egy felfelé irányuló emelőerőt eredményez. Az ábra azt szemlélteti, hogy a kialakuló áramlást az eredeti áramlás és a cirkuláció szuperpozíciójával lehet előállítani.

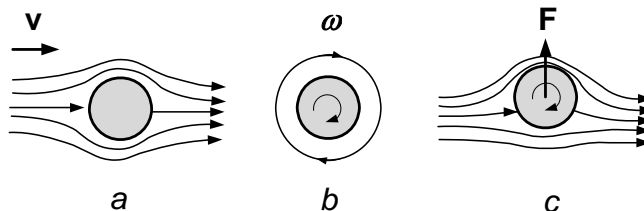
Szintén a belső súrlódás miatt kialakuló cirkulációval értelmezhető a *Magnus*<sup>1</sup>-*effektus*, amely egyszerű kísérlettel bemutatható.

**KÍSÉRLET:**

Egy üres papírhengert forgassunk meg a tengelye körül, és a forgó hengert engedjük leesni. A henger pályája jól láthatóan eltér a függőlegestől. Az ábrán oldalnézetben látjuk a jelenséget: ha a hengert az óramutató járásával egy irányban forgatjuk meg, akkor a henger a függőlegestől balra-, ellenkező forgatás esetén attól jobbra térül el.



Az effektus kvalitatív magyarázata a következő. Ha a henger egy közegben mozog az úgy is felfogható, hogy a henger áll és a közeg áramlik. Amíg a henger nem forog, addig az áramvonalak szimmetrikusak, erőhatás nincs (*a* ábra). Ha a henger forog, akkor a belső súrlódás miatt magával ragadja a közeget, és így cirkulációt hoz létre (*b* ábra), ami az áramlási sebességet felül megnöveli, alul pedig lecsökkenti (*c* ábra). Emiatt egy felfelé mutató erő jön létre, ami a test és a közeg relatív sebességére merőleges. Ha a test mozog a közeghez képest, akkor ez az erő a testet eltéríti eredeti mozgási irányától.



<sup>1</sup> Gustav MAGNUS (1802-1870) német kémikus és fizikus

## Felületi jelenségek

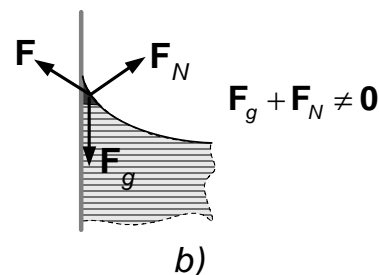
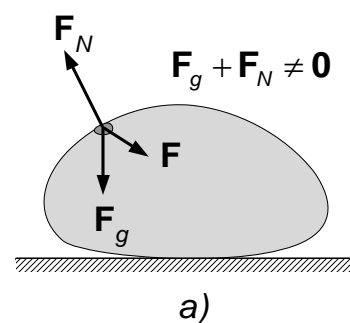
Számos tapasztalat mutatja, hogy egy folyadék szabad felszíne másképpen viselkedik, mint azt a hidrosztatika törvényei alapján várnánk. Ezt alátámasztó, könnyen megfigyelhető jelenségek például:

- víz felszínére óvatosan elhelyezett borotvapenge vagy könnyű fémpénz nem süllyed el,
- a folyadék bizonyos körülmények között stabil cseppeket képez,
- a folyadék felszíne az edény falánál nem vízszintes, hanem görbült,
- folyadékba mártott vékony csőben a folyadékszint nem azonos az edénybeli folyadékszinttel (emelkedés vagy süllyedés).

Úgy látszik tehát, hogy a felület közelében egy folyadékrezecske az eddig számba vett erők – a felületre merőleges nyomóerő és a tömegezők – mellett egyéb erők is fellépnek.

Csak így lehet például értelmezni, hogy egy sík, vízszintes felületen a higany stabil cseppet képez, hiszen a felületnél kiválasztott folyadékrezecske (a) ábra) a nehézségi erő ( $F_g$ ) és a felületre merőleges nyomóerő ( $F_N$ ) hatása alatt nem lehet egyensúlyban. Az egyensúlyhoz szükség van egy a folyadék belseje felé irányuló további erőre ( $F$ ) is.

Ugyanígy, a felületnél fellépő különleges erő fellépésével magyarázhatjuk, hogy egy üvegedény falánál az edényben lévő víz felkúszik az edény függőleges falára (b) ábra). Itt az egyensúlyhoz a folyadék és a szilárd fal találkozásánál lévő folyadékrezecske a fal felé irányuló erőnek kell fellépni.



Anélkül, hogy a jelenség molekuláris tárgyalásába belemennék, megjegyezzük, hogy ezek az erők a felületnél elhelyezkedő molekulák aszimmetrikus helyzetéből adódnak. A csepp kialakulásánál például a felület egyik oldalán sűrűn elhelyezkedő folyadékmolekulák vannak, amelyeknek vonzó hatása sokkal nagyobb, mint a felület másik oldalán ritkán elhelyezkedő levegőmolekuláké. Ilyen aszimmetria következménye a folyadéknak az edényfalra való felkúszása is, csak a folyadék és a szilárd fal érintkezésénél a tárgyalt esetben a szilárd fal molekulái által kifejtett erők nagyobbak<sup>1</sup>. Ebből az értelmezésből az is kiderül, hogy egy folyadék határfelületi viselkedése nem egyszerűen a folyadék tulajdonságaitól függ, hanem attól is, hogy milyen anyag van a határfelület másik oldalán. A felületi jelenségek kvalitatív módon könnyen értelmezhetők a molekuláris kép alapján, de a jelenségek számszerű leírása ezzel a módszerrel nagyon nehéz.

A felületi jelenségek a molekuláris erők számba vétele nélkül is tárgyalhatók, ha a jelenségeket megfigyelve, méréseket végezve a felület viselkedését jellemző mennyiségeket vezetünk be. A továbbiakban ezt a fenomenológiai eljárást követjük, a molekuláris képet csak a jelenségek kvalitatív értelmezésénél használjuk.

<sup>1</sup> Hasonló aszimmetria minden határfelületnél jelen van, és emiatt a felület viselkedése az érintkező anyagok mindegyikében eltér a tömbi viselkedéstől. Egy szilárd test felülete is mutat felületi jelenségeket, de a szilárd anyagok sokkal kötöttebb atomelrendeződése miatt ezek szabad szemmel nem figyelhetők meg.



### A felületben működő erők

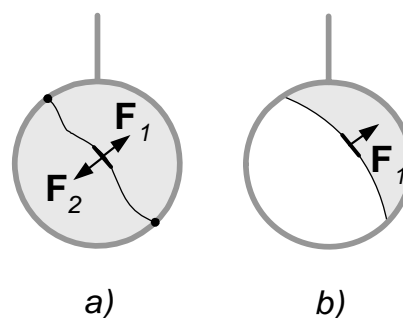
Említettük, hogy a felületi jelenségek a molekuláris kölcsönhatások számbavételével nehezen tárgyalhatók, a felületi jelenségek leírására más módszert kell keresnünk. Egyszerűbben érhetünk célhoz, ha a folyadék felületében működő, közvetlenül tanulmányozható *felületi erőket* vizsgáljuk meg, és ezek segítségével értelmezzük a felület sajátos viselkedését.

Ha a víz felszínén úszó tűt vagy alumínium pénzérmét alaposabban megfigyeljük, akkor láthatjuk, hogy a felület az úszó tárgyak alatt besüllyed, mint egy megfeszített rugalmas hártya. Ez a hártyaszerű viselkedés még világosabban látszik, ha létrehozunk egy vékony folyadékréteget, ami szinte csak felületből áll, és ezzel a hártyával végzünk kísérleteket.

#### KÍSÉRLET:

Kör alakú drótkeret két átellenes pontja közé cérnaszálát kötünk úgy, hogy a céna laza maradjon (a) ábra). Ha a keretet szappanoldatba mártjuk, akkor a kereten sík folyadék-hártya jön létre, és a cérnaszál ebbe a hártyába beágyazódik. Ha a keretet forgatjuk, akkor a cérnaszál a hártyában ide-oda úszik, láthatóan bármilyen helyzetben egyensúlyban van.

Ha a hártyát a cérnaszál egyik oldalán kiszúrjuk, akkor a maradék hártyarész összehúzódik, és megfeszíti a cérnaszálát.



A kísérletet úgy értelmezhetjük, hogy a vizsgált sík felületen kiválasztott tetszőleges vonaldarab mindkét oldalára (a cérnaszál egy vonaldarabjára is) fellép *egy felületi erő*, ami merőleges a vonaldarabra, és a felület síkjában működik. Mivel a vonaldarab mindkét oldalán ugyanolyan folyadékfelület van, a két erő egymás hatását kompenzálja, ezért egyensúly van (a) ábra: a cérnaszál egyensúlyban marad). Ezt az erőt úgy tudjuk közvetlenül észlelhetővé tenni, hogy a kiválasztott vonaldarab egyik oldalán megszüntetjük a folyadék-hártyát, így a másik oldalra ható erő egyedül marad, és a vonaldarabot a megmaradt felületrész irányába húzza (b) ábra).

A kísérletekből azt a következtetést is levonhatjuk, hogy a felületi erő a felületet csökkenteni igyekszik, a felület viselkedése egy megfeszített rugalmas hártyához hasonlít. A felületben működő, a felület méretét csökkenteni igyekvő feszültséget *felületi feszültségnek* nevezik.

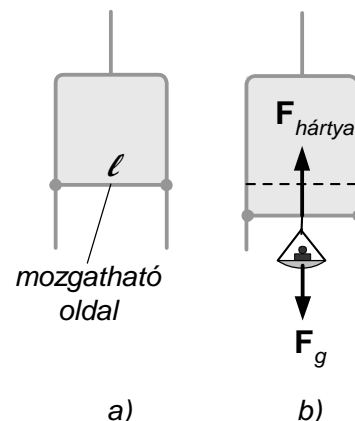
#### Felületi feszültség, felületi energia

A felületi feszültség jellemzéséhez a felületben fellépő erőket kell tanulmányozni. Ezeknek az erőknek közvetlen vizsgálatára a legalkalmasabb egy folyadék-hártya, amelynek segítségével az erők természetéről számszerű információkat is szerezhetünk.

Nagyon vékony folyadék-hártyát sűrű szappanoldatból, vagy speciális, erre a célra kifejlesztett folyadékból készíthetünk. Ezek a folyadékok egy drótkereten vékony hártyát képeznek, amit a felületi jelenségek vizsgálatára használhatunk. Közismert, hogy ezek az anyagok vékony hártyát képeznek egy vékony cső végén is, amiből befújással buborékok hozhatók létre. A buborékok szintén alkalmasak bizonyos felületi jelenségek vizsgálatára.

**KÍSÉRLET:**

Egy drótkeretet, amelynek egyik oldala szabadon csúsztatható (a) ábra) szappanoldatba mártunk. A keletkező vékony, sík hártya egy meghatározott méretnél egyensúlyban van. Ha a mozgatható oldalra erőt fejtünk ki (pl. súlyt akasztunk rá), akkor a hártya megnyúlik (b) ábra), ha az erőt megszüntetjük, akkor eredeti méretére húzódik össze.



Ez a kísérlet is azt mutatja, hogy vékony folyadékréteg felülete rugalmas hártyaként viselkedik, megnyújtásához erőt kell kifejteni. Ebben az elrendezésben a felületet visszahúzó erőt meg is lehet mérni, hiszen az egyensúlyban egyenlő a súly által kifejtett erővel.

Ilyen hártyával végzett kísérletek azt mutatják, hogy a két párhuzamos felületet tartalmazó hártya  $l$  hosszúságú határoló oldalára fellépő  $F_{\text{hártya}}$  erő arányos a mozgattott oldal hosszával, de nem függ a hártya felületének nagyságától

$$F_{\text{hártya}} = 2 \sigma l.$$

A 2 szorzót azért írtuk be, mert ez az erő két felület megnyújtásához szükséges. Az egyik felületet határoló vonalra ható felületi erő tehát

$$F_f = \sigma l.$$

Itt  $\sigma$  a folyadék anyagától, és a folyadék felületével érintkező anyagtól függő arányossági tényező.

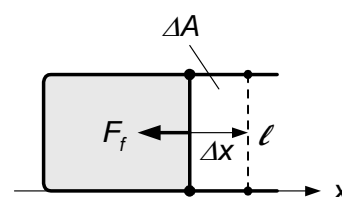
A felülettel kapcsolatos ismert jelenségeket és a különböző kísérletek eredményeit úgy tudjuk értelmezni, ha feltételezzük, hogy egy felületen kiválasztott elemi  $\Delta l$  hosszúságú vonaldarab mindkét oldalára ható  $\Delta F_f$  felületi erőt a

$$\Delta F_f = \sigma \Delta l$$

összefüggéssel adjuk meg. A  $\sigma$  arányossági tényezőt *felületi feszültségnek* nevezik<sup>1</sup> (SI egysége:  $\frac{N}{m} = \frac{kg}{s^2}$ ). Számértéke az egységnyi hosszúságú vonaldarabra ható erő nagyságával egyenlő.

Fontos tudni, hogy a felületi feszültséget nem egyszerűen a kérdéses folyadék tulajdonságai határozzák meg, hanem az függ a folyadék felületét körülvevő anyagtól is. Vagyis rendkívül pontatlan például az a kifejezés, hogy a „víz felületi feszültsége  $0,075 N/m$ ”. Ha a vízfelületet levegő veszi körül, akkor a felületi feszültség valóban  $0,075 N/m$ , de ha olaj, akkor  $0,021 N/m$ .

A kísérleteknek van egy másik értelmezési lehetősége is, ami azon a tapasztalaton alapul, hogy a felület megnöveléséhez munkát kell végezni, ami ideális esetben a felület összehúzódsakor visszanyerhető. Ebből kiindulva feltételezhetjük, hogy a felületnek energiája van, ami a felület növelésével nő. A *felületi energia* és a felület nagysága közötti összefüggéshez úgy juthatunk el, hogy kiszámítjuk a felületben működő erő által végzett munkát a felület megnövelésekor. Ha a mozgatható oldalú drótkerettel végzett kísérletünkben a mozgatható oldalt  $\Delta x$  távolsággal elmozdítjuk (ábra), akkor a felületi erő munkája



<sup>1</sup> Az elnevezés nem szerencsés, mert ugyanígy nevezik a felületben fellépő feszültséget is.

$$\Delta W_f = -F_f \Delta x ,$$

így a felületi energia

$$\Delta E_f = -\Delta W_f = F_f \Delta x .$$

A felületi erőre kapott korábbi kifejezést felhasználva az energiaváltozásra azt kapjuk, hogy

$$\Delta E_f = \sigma \Delta A = \sigma \Delta A ,$$

ahol  $\Delta A$  a felület nagyságának megváltozása. Ebben a felfogásban a felületi feszültség egysége  $\frac{J}{m^2}$  (ez természetesen megegyezik a korábban bevezetett  $\frac{N}{m}$  egységgel), számértéke pedig az egységnyi felületváltozással járó energiaváltozás nagyságával egyenlő.

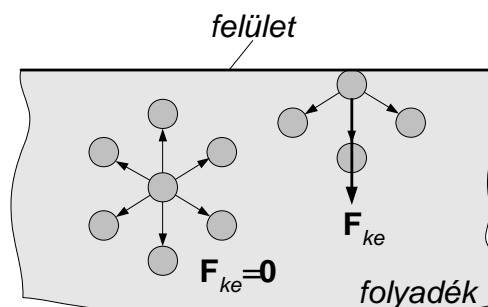
A felülettel arányos felületi energia létezése egyszerű fizikai magyarázatot ad arra, hogy a folyadékok a felületüket csökkenteni igyekeznek: a felület csökkenésével csökken a folyadék energiája.

A felület csökkenési tendenciáját számos kísérlet mutatja.

#### KÍSÉRLETEK:

- Ha egy vékony csővel szappanbuborékot fújunk, és a csövet nyitva hagyjuk, akkor a buborék összehúzódik.
- A síkidom alakú drótkereten sík hártya jön létre, de bonyolultabb drótvázakon is olyan hártyák alakulnak ki, amelyeknek a felülete az adott váz esetén a lehető legkisebb.

A felület csökkenési tendenciája a molekuláris kép segítségével szemléletesen is magyarázható. Egy folyadékban a molekulák egymást vonzzák. Ezt a jelenséget *kohézió*-nak, a fellépő vonzóerőt pedig *kohéziós erő*nek nevezik. A szomszédos molekuláktól származó kohéziós erők a folyadék belsejében átlagosan kompenzálják egymást ( $\mathbf{F}_{ke} \approx \mathbf{0}$ ), a felületen viszont ezeknek az eredője a folyadék belseje felé mutat ( $\mathbf{F}_{ke} \neq \mathbf{0}$ ), amint azt a mellékelt ábra szemlélteti. Ez azt jelenti, hogy a kohéziós erő a felületi molekulákat a folyadék belseje felé igyekszik elmozdítani.



A folyadék molekuláira a felületet körülvevő anyag molekulái is vonzóerőt fejtenek ki, ez a jelenség az *adhézió*, az ebből származó erő az *adhéziós erő*. Ha a folyadék felületét olyan anyag veszi körül, amely által kifejtett adhéziós erőknek a folyadék molekuláira kifejtett hatása elhanyagolható (pl. levegő) a kohéziós erőkhez képest, akkor a felületen lévő folyadékrezecskék a kohéziós erők hatására a folyadék belseje felé igyekeznek elmozdulni, vagyis a felület valóban csökkenni igyekszik.

A kohéziós erők egyúttal a felületre egy ún. *kohéziós nyomást* fejtenek ki. Ezt közvetlenül megmérni nem lehet, de közvetett adatok szerint ez a nyomás nagyon nagy, víz esetében nagyságrendben az atmoszférikus nyomás 10.000-szerese. Ez megmagyarázza, hogy a folyadékok kompresszibilitása kicsi, hiszen külső hatás nélkül is összenyomott állapotban vannak.

#### Görbületi nyomás

Eddig főleg olyan esetekkel foglalkoztunk, amikor a folyadék felülete illetve az azt modellező folyadékhártya sík volt. Ilyenkor egy felületelem szegélyére ható felületi erők a felület

síkjában vannak, tehát az eredőjük is ugyanebben a síkban van. Más a helyzet, ha a felület görbült. Ekkor a felületelemre ható felületi erők a felület érintősíkjában vannak, és eredőjüknek van a felületre merőleges összetevője is. Egy ilyen görbült felületelemre ható felületi erőket mutat vázlatosan a mellékelt ábra. A jobb áttekinthetőség kedvéért a felület metszetét is feltüntettük.

Ez azt jelenti, hogy egy görbült felületen mindig a homorú oldal felé mutató eredő erő lép fel. Az ebből az erőből származó, a homorú oldal irányában ható nyomást *görbületi nyomásnak* nevezik.

A görbületi nyomásra általános összefüggést lehet kapni úgy, hogy a felület kiválasztott helyén összegezzük egy felületelemre ható erőket, amiből a nyomás megkapható. A számítás eredménye az, hogy a görbületi nyomás a határfelület olyan helyén, ahol a legnagyobb és legkisebb görbületnek megfelelő két, ún. fő görbületi sugár  $R_1$  és  $R_2$  :

$$p_g = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Ha a felület a kiválasztott helyen gömbfelület részének tekinthető, akkor  $R_1 = R_2 = R$ , vagyis

$$p_g = \frac{2\sigma}{R}.$$

A gömbfelületre vonatkozó összefüggéshez energia-megfontolásokkal egyszerűbb úton is eljuthatunk. Ehhez először vizsgáljunk meg egy olyan esetet, ami méréssel is könnyen nyomon követhető: számítsuk ki, hogy mekkora munka kell ahhoz, hogy egy gömb alakú buborék sugarát – tehát a felületét is – megnöveljük, és mennyivel nő eközben a buborék felületi energiája.

Tudjuk, hogy a buborékban a felületet csökkenteni igyekvő, befelé mutató  $p_g$  görbületi nyomás jön létre. Tegyük fel, hogy az  $R$  sugarú gömb sugarát  $\Delta R$  értékkel megnöveljük, Ekkor a görbületi nyomás miatt végzendő munka nagysága

$$\Delta W_g = p_g A \Delta R = p_g 4 R^2 \pi \Delta R,$$

az eközben létrejött energianövekedés pedig

$$\Delta E_f = 2\sigma \Delta A = 2\sigma [4(R + \Delta R)^2 \pi - 4R^2 \pi]$$

(a 2 szorzó a hártya két felülete miatt kell).

Mivel az energiaváltozás és a munka nagyságának meg kell egyeznie, azt kapjuk, hogy

$$p_g 4 R^2 \pi \Delta R = 2\sigma [4(R + \Delta R)^2 \pi - 4R^2 \pi].$$

Ebből egyszerű átalakítások után a

$$p_g R^2 \Delta R = 2\sigma (2R\Delta R - \Delta R^2)$$

illetve a

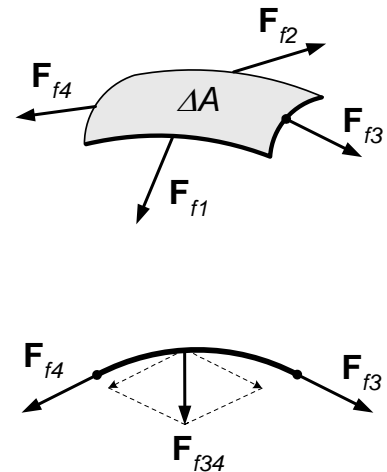
$$p_g R^2 = 2\sigma (2R - \Delta R)$$

összefüggést kapjuk.

Ha a sugár megváltozása nagyon kicsi, ( $\Delta R \ll R$ ), akkor végül a görbületi nyomásra a

$$p_g = \frac{4\sigma}{R}$$

összefüggést kapjuk.

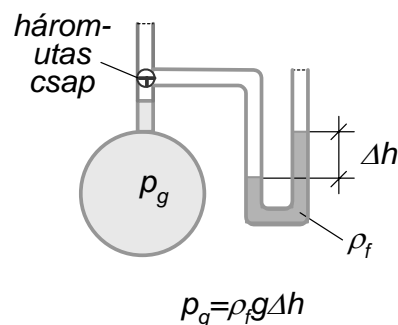


Ez az összefüggés a buborékban uralkodó túlnyomás mérésével kísérletileg is ellenőrizhető. A mérés elvét a mellékelt ábra mutatja.

A buborékban uralkodó nyomásra kapott összefüggés két felülettel határolt folyadékrétegre vonatkozik. Ha a fenti számítást egyetlen görbült felülettel határolt folyadék esetére végezzük el, akkor a felületi energia megváltozása feleakkora lesz, mint két felületnél, amiből következik, hogy a görbületi nyomás is feleakkora:

$$p_g = \frac{2\sigma}{R}.$$

Ezzel az összefüggéssel kiszámítható például, hogy egy folyadékcseppben mekkora a görbületi nyomás. Látható, hogy minél kisebb a csepp sugara, annál nagyobb a cseppet összenyomó görbületi nyomás. Példaként két adat: levegőben  $1\text{ mm}$  átmérőjű vízcseppben a *többlet-nyomás*  $p_g \approx 300\text{ Pa}$ , ami elhanyagolható az atmoszférikus nyomás ( $\approx 10.000\text{ Pa}$ ) mellett, de egy  $1,5\ \mu\text{m}$  átmérőjű higanycseppben  $p_g \approx 1.300.000\text{ Pa}$ , ami az atmoszférikus nyomásnak több, mint  $100$ -szorosa. Mindkét nyomás elhanyagolható a folyadékokban görbület nélkül is jelenlévő kohéziós nyomáshoz képest.

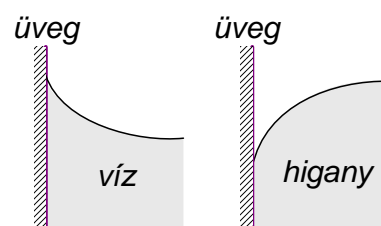


## Kapilláris jelenségek

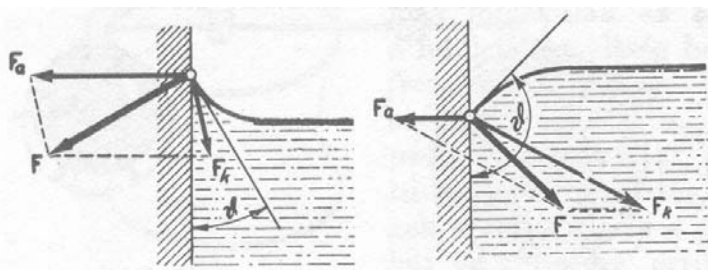
A felület különleges viselkedésének gyakorlati szempontból is fontos megnyilvánulása az, hogy folyadék és szilárd anyag vagy két különböző folyadék érintkezésénél a hidrosztatika törvényeinek ellentmondó jelenségek lépnek fel. Mivel ezeknek a jelenségeknek legszembetűnőbb és talán legfontosabb esete az, hogy a folyadékok nagyon vékony csövekben, ún. kapillárisokban rendellenesen viselkednek, ezeket a jelenségeket összefoglaló néven *kapilláris jelenségeknek* nevezik.

### Illeszkedési szög

Ha egy üvegedénybe töltött víz felszínét az edény falánál alaposan megvizsgáljuk, akkor azt találjuk, hogy a víz egy bizonyos magassáig felkúszik az edény falára, az edénybe öntött higany felszíne viszont eltávolodik az edény falától, és alacsonyabban helyezkedik el, mint az edény közepén (ábra). Rövidebben megfogalmazva: a víz a tiszta<sup>1</sup> üvegedényt *nedvesíti*, a higany viszont *nem nedvesíti*. A nedvesítés magyarázata az, hogy a víz- és az üveg molekulái között fellépő adhéziós erők

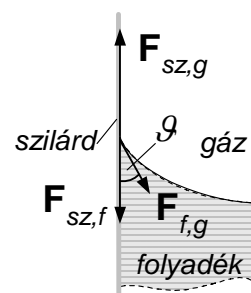


nagyobbak, mint a víz molekulái között fellépő kohéziós erők. A higany viselkedésének oka pedig az, hogy a higany molekulái között nagyobbak a kohéziós erők, mint a higany és az üveg molekulái között fellépő adhéziós erők. Ennek eredményeképpen a víz-üveg-levegő határvonalnál elhelyezkedő folyadékreszciskékre nagyobb vonzóerőt fejt ki az üvegfal, mint a víz és a levegő, ezért a részecskék a falhoz tapadnak, a higany-üveg-levegő határvonalnál elhelyezkedő folyadékreszciskékre viszont nagyobb vonzóerőt fejt ki a higany, mint az üvegfal és a levegő, ezért a részecskék a higany belseje felé mozdulnak el. A két esetben működő adhéziós- és kohéziós erőket, a folyadékfelület alakját és a kialakult  $\vartheta$  illeszkedési szöget mutatja sematikusán a mellékelt ábra (a nehézségi erő és a levegő által kifejtett erő az illeszkedés szempontjából elhanyagolható).



A szilárd falnál kialakuló folyadékfelület alakja abból a feltételből számítható ki, hogy a folyadék felületének mindenütt merőlegesnek kell lenni a felületnél kiválasztott folyadékreszciskére ható  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_k$  eredő erőre, ahol  $\mathbf{F}_a$  az adhéziós-,  $\mathbf{F}_k$  pedig a kohéziós erő. A felszín alakjának kiszámításához ismernünk és összegeznünk kellene a molekulák között ható adhéziós- és kohéziós erőket, amelyeket általában nem ismerünk. Az illeszkedési szög azonban egyszerűen meghatározható a felületi erők segítségével, amelyeket a felületi feszültségek ismeretében ki tudunk számítani.

A három közeg (folyadék-szilárd-levegő) közös érintkezési pontjait megadó, a mellékelt ábra síkjára merőleges vonal mentén minden közeg-párnál fellép a vonalra merőleges, a határfelületet csökkentő erő, ami az adott határfelület érintője irányába mutat.



<sup>1</sup> Ha az üveg felülete zsíros, akkor nincs nedvesítés.

Ha a folyadékra ható térfogati erőket (itt a nehézségi erőt) elhanyagoljuk, akkor az egyensúlyi illeszkedési szöget a felületi erők egyensúlya határozza meg. A folyadék és gáz határán működő erőnek a falra merőleges komponensét a fal kompenzálja, az egyensúly másik feltétele pedig az, hogy a fallal párhuzamos összetevők eredője nulla legyen, vagyis

$$F_{sz,g} - F_{sz,f} - F_{f,g} \cos \vartheta = 0.$$

A vonalra ható felületi erők nagysága a közeg-párokra vonatkozó felületi feszültség és a vonal  $l$  hosszának ismeretében kiszámítható:

$$F_{sz,g} = \sigma_{sz,g} l \quad F_{sz,f} = \sigma_{sz,f} l \quad F_{f,g} = \sigma_{f,g} l.$$

Ezzel a függőleges irányú erőkomponensek egyensúlyi feltételéből azt kapjuk, hogy

$$\sigma_{sz,g} - \sigma_{sz,f} - \sigma_{f,g} \cos \vartheta = 0,$$

amiből az illeszkedési szög:

$$\cos \vartheta = \frac{\sigma_{sz,g} - \sigma_{sz,f}}{\sigma_{f,g}}.$$

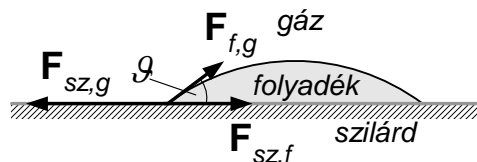
Mivel a  $\cos$  függvény értéke maximálisan 1 lehet, egyensúly csak akkor alakulhat, ha

$$|\sigma_{sz,g} - \sigma_{sz,f}| \leq \sigma_{f,g}.$$

Abban az esetben, ha emellett  $\sigma_{sz,g} > \sigma_{sz,f}$ , akkor  $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ , a folyadék a falra felkúszik, a falat

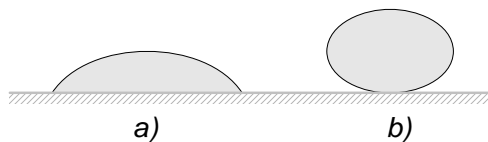
nedvesíti (pl. víz az üveget), ha pedig  $\sigma_{sz,g} < \sigma_{sz,f}$ , akkor  $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ , a folyadék a fal mellett lesüllyed, a falat nem nedvesíti (pl. higany az üveget).

Tapasztalatból tudjuk, hogy különböző folyadékokból képződött cseppek egy szilárd, sík felületen különböző alakot vesznek fel: pl. a vízcsepp egy tiszta üvegfelületen szétterül, a higanycsepp pedig a felülettől elválk, azon gurulni is tud. Ezt a különbséget szintén a határfelületi viselkedéssel tudjuk értelmezni. Az ábrán feltüntettük a felületi feszültségek miatt fellépő erőket, amelyeknek egyensúlyi feltételét korábban már meghatároztuk:



$$\cos \vartheta = \frac{\sigma_{sz,g} - \sigma_{sz,f}}{\sigma_{f,g}}.$$

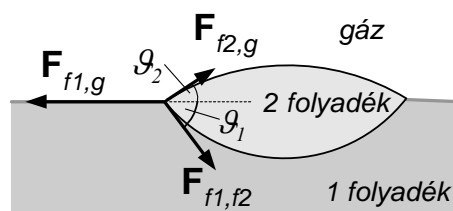
Eszerint a folyadékcsepp nedvesít, ha  $\sigma_{sz,g} > \sigma_{sz,f}$ , ilyenkor a csepp egyensúlyban a felületen kissé szétfolyik, míg a  $\sigma_{sz,g} < \sigma_{sz,f}$  esetben a folyadék a felületet nem nedvesíti, és a felülettől elválk. A két esetben kialakult cseppalakot a mellékelt ábra a) és b) része szemlélteti.



Abban az esetben, ha  $\frac{\sigma_{sz,g} - \sigma_{sz,f}}{\sigma_{f,g}} > 1$  (pl. a többi felületi feszültséghez képest nagyon nagy a

$\sigma_{sz,g}$  érték), akkor nem alakul ki egyensúly, a folyadék teljesen szétfolyik a felületen.

Érdekes és gyakorlati szempontból is fontos az az eset, amikor egy folyadék egy másik folyadék felületén úszik. Az ilyenkor kialakuló viszonyokat mutatja szematikusan az ábra. A fenti gondolatmenetet követve az egyensúlyi feltételére most azt kapjuk,



hogy

$$\sigma_{f1,g} - \sigma_{f2,g} \cos \vartheta_2 - \sigma_{f1,f2} \cos \vartheta_1 = 0.$$

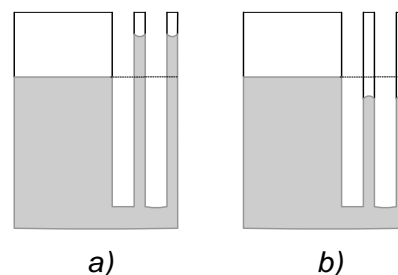
Ennek alapján vizsgáljuk meg, hogy mi történik egy vízfelületre került olajcseppel. Ebben az esetben a felületi feszültségek:

$$\sigma_{f1,g} = 0,073 \frac{N}{m} \quad \sigma_{f2,g} = 0,038 \frac{N}{m} \quad \sigma_{f1,f2} = 0,021 \frac{N}{m}.$$

Mivel  $\sigma_{f1,g} > \sigma_{f2,g} + \sigma_{f1,f2}$  az egyensúlyi feltétel nem teljesülhet, az olajcsepp tehát teljesen szétfolyik a víz felületén.

### Kapilláris emelkedés és süllyedés

Egy edény falánál kialakuló illeszkedési viszonyok és az ebből eredő görbületi nyomás következtében vékony csövekben (kapillárisokban) a folyadékok nem követik a közlekedőedényekre vonatkozó törvényeket: vékony csőben egy nedvesítő folyadék szintje magasabb-, nem nedvesítő folyadéké pedig alacsonyabb, mint nagy felületű edényben. Az előbbi jelenséget *kapilláris emelkedésnek* (a) ábra), utóbbit *kapilláris süllyedésnek* (b) ábra) nevezik. Tiszta üveg kapillárisban kapilláris emelkedést mutat például a víz, és kapilláris süllyedést mutat a higany.



Egyszerű becsléssel kiszámíthatjuk az emelkedés- illetve süllyedés mértékét. A számítást a kapilláris emelkedés példáján mutatjuk be a mellékelt – az áttekinthetőség kedvéért eltorzított – ábra segítségével.

Ha a folyadék a csőben  $h$  magasságba emelkedett fel, akkor a folyadékoszlop súlya miatt egy lefelé ható erő működik, amelynek nagysága a felemelt folyadékoszlop súlyával egyenlő:

$$G \approx \rho_f g h r^2 \pi.$$

Ezt az erőt ellensúlyozza a görbült felület homorú oldala felé, tehát felfelé mutató emelőerő. Ennek számításánál feltételezzük, hogy a csőben a folyadék görbült felülete egy  $R$  sugarú gömbfelület része, de a gömb sugara nem egyezik meg a cső  $r$  sugarával (vagyis az illeszkedési szög nem nulla). Az emelőerőt a görbületi nyomás segítségével becsüljük meg, feltételezve, hogy ez a nyomás a cső keresztmetszetével azonos sík felületre hat (a felület valójában görbült és ezt szigorúan véve figyelembe kellene venni):

$$F_{emelő} \approx p_g r^2 \pi.$$

Egyensúlyban  $F_{emelő} = G$ , vagyis

$$p_g \approx \rho_f g h.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy a kapilláris nyomás  $p_g = \frac{2\sigma}{R}$ , és  $R = \frac{r}{\cos \vartheta}$ , akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{2\sigma \cos \vartheta}{r} \approx \rho_f g h.$$

Ebből az emelkedési magasság



$$h \approx \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho_f g r}$$

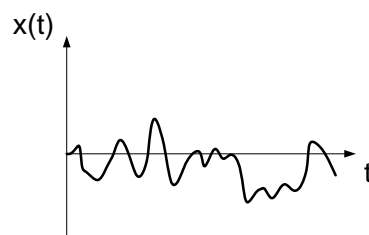
Ez az összefüggés a felületi feszültség durva mérésére is alkalmas, hiszen a többi mennyiség több-kevesebb pontossággal megmérhető, így a felületi feszültség kiszámítható (pontosabb mérési módszerekkel a laboratóriumban találkoznak).

## Rezgések

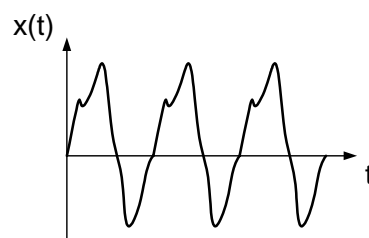
A *rezgés* általános értelemben valamilyen mennyiség értékének bizonyos határok közötti – periodikus vagy nem periodikus – ingadozását jelenti. Mivel az ilyen típusú jelenségek rendkívül gyakoriak, a rezgésekkel külön is érdemes foglalkozni.

Fontos, hogy a fizikában rezgés alatt nem csak a hétköznapi értelemben rezgésnek nevezett – általában mechanikai mozgással összekapcsolt – jelenségeket értjük, hanem bármilyen mennyiség "rezgés-típusú" változását. Rezgés lehet például egy tömegpont mozgása, az áram ingadozása egy elektromos áramkörben, az elektromos- vagy mágneses erőter változása.

A rezgés során ingadozó mennyiség időbeli változása nagyon bonyolult lehet. Egy ilyen bonyolult esetet mutatunk be a mellékelt ábrán, ahol egy – az  $x$ -tengely mentén rezgő – tömegpont kitérésének időfüggése ( $x(t)$ ) látható.



A gyakorlatban szűkebb értelemben rezgésnek egy mennyiség többé-kevésbé periodikus ingadozását nevezik. A mennyiség időbeli változása még ebben a leegyszerűsített esetben is nagyon bonyolult és sokféle lehet. A következő ábrán egy ilyen periodikus, de eléggé bonyolult rezgés kitérés-idő függvénye látható.



A bonyolult rezgések leírását jelentősen megkönnyíti az a matematikából ismert tény, hogy bármilyen periodikus függvény felírható megfelelően választott szinusz és/vagy<sup>1</sup> koszinusz, más néven *harmonikus függvények* összegeként. (Ez az eljárás emlékeztet egy függvénynek

hatványsor alakjában történő felírására, csak itt a sor tagjai nem a változó hatványai, hanem annak harmonikus függvényei.) Matematikai módszerekkel az is kimutatható, hogy ha a rezgés nem periodikus, akkor harmonikus függvények integráljaként állítható elő.<sup>2</sup> Ez azt jelenti, hogy bármilyen bonyolult rezgés előállítható olyan, ún. *harmonikus rezgések* összegeként, amelyeknek időfüggését harmonikus függvény adja meg. Ez az egyik oka annak, hogy a rezgések tanulmányozásánál kitüntetett szerepet kap a harmonikus rezgés sajátosságainak megismerése. A harmonikus rezgés azonban azért is fontos, mert nagyon sok valóságos rezgés közelítőleg harmonikus rezgésnek tekinthető (más szavakkal ez azt jelenti, hogy a fent említett összegzésben a rezgést leíró függvény egyetlen taggal jól közelíthető).

Annak ellenére, hogy a rezgés során változó mennyiség természete és a rezgés mechanizmusa az egyes esetekben más és más, a különböző rezgések formális leírása hasonló. A különböző rezgési jelenségek azonban a fizika más és más területéhez kapcsolódnak, ezért azokat részletesebben a megfelelő helyen tárgyaljuk. Elsőként a hétköznapi tapasztalatainkhoz legközelebb álló mechanikai rezgésekkel foglalkozunk, amelyeknek tárgyalása egyben mintául szolgál más típusú rezgések leírásához is.

<sup>1</sup> Az összeg általában mindkét függvényt tartalmazza, ha azonban az előállítandó függvény páros, akkor csak koszinusz-, ha pedig páratlan, akkor csak szinusz függvények szerepelnek az összegben.

<sup>2</sup> A rezgéseknek harmonikus rezgésekre történő felbontásáról később még lesz szó.

## **Szabad mechanikai rezgések**

*Szabad rezgésről* akkor beszélünk, ha a rezgésre képes rendszert a rezgés elindulása után magára hagyjuk. Ilyen rezgés jön létre például, ha egy rugóra felfüggesztett tömeget az egyensúlyi helyzetéből kimozdítunk, és magára hagyjuk, vagy egy kondenzátort és tekercset tartalmazó elektromos rezgőkörben a kondenzátort feltöltjük és a rendszert magára hagyjuk.

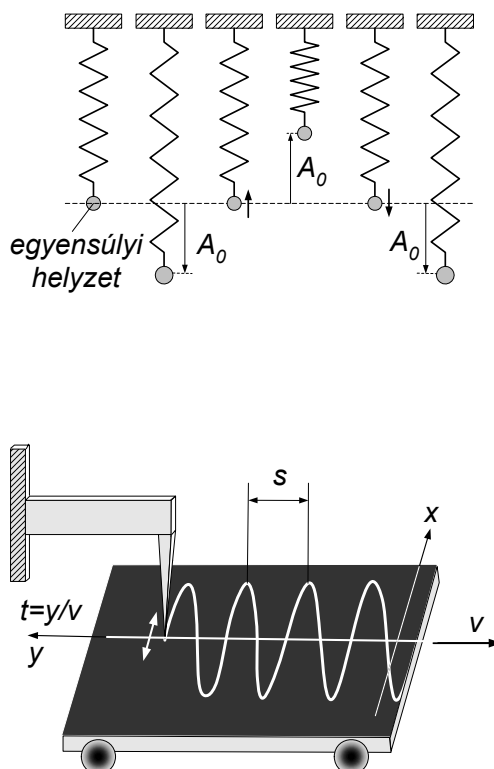
Az alábbiakban szabad mechanikai rezgéseket vizsgálunk. Először az energiaveszteség nélkülinek feltételezett ideális, harmonikus rezgésekkel-, majd az energiaveszteség miatt csillapodó rezgésekkel foglalkozunk.

### **Szabad harmonikus rezgések**

Definíció szerint a *harmonikus rezgés* egy mennyiség olyan változása, amelynek időfüggése harmonikus (szinusz- vagy koszinusz) függvénnyel írható le. Kísérletileg szabad harmonikus rezgést nem könnyű bemutatni, mivel a valóságban a szabad rezgések kisebb-nagyobb mértékben mindig csillapodnak. Közelítőleg harmonikus rezgést azonban többféleképpen is megvalósíthatunk.

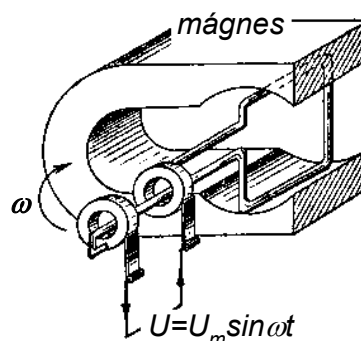
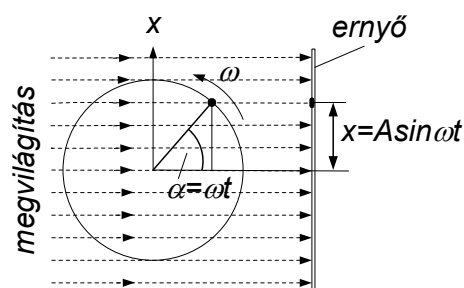
#### **KÍSÉRLETEK:**

- Jó közelítéssel harmonikus rezgést végez egy rugóra felfüggesztett tömeg, ha az egyensúlyi helyzetéből kitérítjük, és elengedjük (ábra). Az egyensúlyi helyzettől lefelé  $A_0$  maximális távolságra kitérített tömeg a megnyújtott rugó hatására felfelé indul, majd felfelé elérve az  $A_0$  kitérést, megfordul, és lefelé halad, amíg újra eléri az induló helyzetet.
- A rezgés időfüggése is könnyen bemutatható, ha a rezgő testre egy írószerkezetet teszünk, és egy sík lapot egyenletes sebességgel elhúzzunk a rezgő test alatt. Ekkor az írószerkezet által különböző időpontokban felírt nyomok a síklap különböző helyeire kerülnek, és kirajzolják a kitérés időfüggését. Az ábrán egy rezgő acéllap végére szerelt tű karcot nyomot egy kormozott üveglapon, amit a rezgésre merőlegesen  $v$  sebességgel mozgatunk. A görbén egy adott  $y$  helyhez tartozó időt a  $t = \frac{y}{v}$  összefüggés adja meg, egy teljes periódus ideje, a rezgésidő az ábra jelöléseivel:  $T = \frac{s}{v}$ .



**KÍSÉRLETEK:**

- Ha egy körmozgást végző tömeget a körpálya síkjával párhuzamosan megvilágítunk, akkor az árnyéka a vetítés irányára merőleges ernyőn harmonikus rezgőmozgást végez (ábra).
- Harmonikus rezgést kapunk akkor is, ha mágneses erőterben egy drótkeretet egyenletesen forgatunk az erőterre merőleges tengely körül (ábra). Ekkor a keletkezett indukált feszültség időben harmonikus függvény szerint változik, amit katódsugár oszcilloszkóp segítségével könnyen bemutathatunk.



A harmonikus rezgések tanulmányozását azzal kezdjük, hogy felírjuk az ilyen rezgést leíró függvények különböző alakjait, ezután mechanikai példán bemutatjuk a harmonikus rezgés alapegyenletét, majd konkrét mechanikai- és elektromos rezgéseket tárgyalunk, végül foglalkozunk a rezgések során bekövetkező energiaátalakulásokkal.

**A harmonikus rezgést leíró függvény alakjai**

Az  $x$ -tengelyen mozgó tömegpont akkor végez harmonikus rezgőmozgást, ha koordinátájának időfüggését az

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad \text{vagy} \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

típusú függvény írja le<sup>1</sup>, ahol  $A$  a legnagyobb kitérés értéke, amit a rezgés *amplitúdójának* neveznek,  $\omega_0$  a rezgés  $T_0$  *rezgésidejét* (egy periódus hosszát)

meghatározó körfrekvencia ( $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ),  $\varphi$  pedig az időmérés kezdetétől függő

*fázisállandó*.

A rezgések jellemzésére gyakran használt  $f_0$  *frekvencia számértéke* az egységnyi idő alatt lezajló rezgési periódusok száma, amely a fenti jellemzőkkel az

$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$  összefüggésben van. A továbbiakban általában a körfrekvenciát

használjuk, de ebből a vele arányos frekvencia a fenti összefüggés segítségével mindig megkapható.

Korábban már szó volt arról, hogy a harmonikus rezgés nem csak rezgőmozgást jelent. Harmonikus rezgésről beszélünk akkor is, ha egy áramkörben mért  $I$  áramerősség- vagy  $U$  feszültség időbeli változása például az

$$I(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$U(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

összefüggésekkel adható meg (itt  $I_m$  és  $U_m$  az áramerősség- illetve feszültség maximális értékét megadó *áramerősség- illetve feszültség-amplitúdó*).

<sup>1</sup> A két függvény a harmonikus rezgés leírása szempontjából egyenértékű, csak egy állandó fázisszöggel különböznek egymástól:  $\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) = \sin(\omega_0 t + \varphi)$ .

Ha a szögek összegének szinuszára (koszinuszára) vonatkozó ismert trigonometriai összefüggést alkalmazzuk, akkor a fenti kifejezéseket fázisszög bevezetése nélkül is felírhatjuk. Ez például az  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$  rezgés esetében az alábbi módon történhet:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) = A \sin \omega_0 t \cos \varphi + A \cos \omega_0 t \sin \varphi.$$

Bevezetve a  $B = A \cos \varphi$ ,  $C = A \sin \varphi$  jelöléseket, a harmonikus rezgést leíró függvény az alábbi (az eredetivel egyenértékű) alakba írható:

$$x(t) = B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t.$$

\*\*\*\*\*

Gyakran előfordul, hogy a számolások egyszerűsítése érdekében a harmonikus rezgés leírására komplex függvényt használunk. Ez első pillanatban különösnek tűnik, hiszen a fizikai mennyiségeket valós számokkal adjuk meg. A komplex függvények használata a rezgések esetében azt jelenti, hogy a számolásoknál komplex mennyiségekkel dolgozunk, de a számolás végén kapott komplex végeredményből leválasztjuk a valódi fizikai eredményt megadó valós függvényt. Erre a számolástechnikai trükkre az ad lehetőséget, hogy egyrészt egy komplex szám a komplex számsíkon egy vektorként fogható fel, és harmonikus függvények lineáris kombinációjaként állítható elő (ábra)

$$z = A \cos \alpha + i A \sin \alpha,$$

másrészt az ún. Euler-összefüggés segítségével exponenciális alakban is felírható:

$$z = A \cos \alpha + i A \sin \alpha = A e^{i\alpha}$$

( $i = \sqrt{-1}$  a komplex egység). Az exponenciális alak többek között azért egyszerűsíti a számolásokat, mert ennek a függvénynek a differenciálhányadosa és integrálja önmaga konstans-szorosásával egyenlő.

Egy harmonikus rezgést a fentiek alapján az

$$\tilde{x}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + i A \sin(\omega_0 t + \varphi) = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

komplex függvénnyel jellemezhetünk, hozzáteve, hogy a rezgést fizikai értelemben leíró függvény a komplex függvény

$$x(t) = \text{Re } \tilde{x}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

valódi része vagy

$$x(t) = \text{Im } \tilde{x}(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

képzetes része.

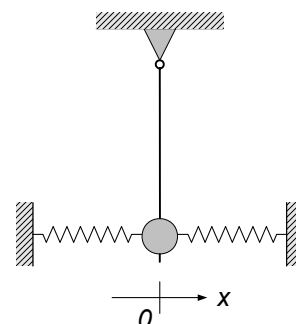
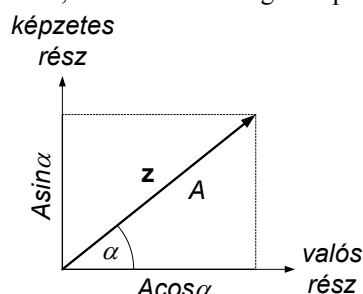
Az exponenciális alakkal számolva, végeredményül komplex függvényt kapunk, de kimutatható, hogy ennek valós vagy képzetes része megegyezik azzal az eredménnyel, amit (sok esetben jóval bonyolultabb módon) valós, harmonikus függvénnyel számolva kaptunk volna.

\*\*\*\*\*

### Tömegpont egydimenziós, harmonikus rezgése, a harmonikus rezgés differenciál-egyenlete

Egydimenziós a rezgés, ha a rezgő tömegpont egy egyenes mentén mozog. Kísérletileg jól megvalósítható ez a mozgás – a már említett – rugóra felfüggesztett tömeg függőleges mozgásával, vagy az ábrán látható elrendezéssel, amely kiküszöböli a nehézségi erő hatását, és kis kitéréseknél jó közelítéssel vízszintes irányú mozgást hoz létre.

Egy egyenes, pl. az  $x$ -tengely mentén mozgó tömegpont kitérését az



$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

vagy az

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

összefüggéssel adhatjuk meg.

Ha kiszámítjuk a rezgő pont gyorsulását, akkor kiderül, hogy milyen erő hozhat létre ilyen mozgást. A szinusz függvényt használva, a gyorsulás

$$a_x = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x,$$

a koszinusz függvényt használva pedig

$$a_x = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x.$$

Vagyis akár a szinusz-, akár a koszinusz függvényt használjuk a harmonikus rezgés leírására, a gyorsulásra ugyanazt a kifejezést kapjuk: a gyorsulás arányos a kitéréssel, és mindig azzal ellentétes irányú. Ebből – a mozgásegyenlet alapján – következik, hogy a harmonikus rezgőmozgást létrehozó erő is ugyanilyen jellegű:  $F_x = ma_x = -m\omega_0^2 x$ . Mint várható, a mozgást létrehozó erőre kapott kifejezés nem függ attól, hogy melyik függvényt használjuk. Ha bevezetjük a  $D = m\omega_0^2$  jelölést, akkor az erő az egyszerűbb  $F_x = -Dx$  alakba írható. Ennek az erőnek két fontos jellegzetessége van. Egyrészt ez az erő a mindenkor kitéréssel ellentétes irányú, tehát mindig a rezgés centrumaként felfogható egyensúlyi helyzet felé mutat (vagyis ún. *centrális erő*), emiatt jöhet létre rezgőmozgás. Másrészt ez az erő arányos a kitéréssel (vagyis ún. *lineáris erő*), ez ahhoz szükséges, hogy a rezgés harmonikus legyen. A megfeszített vagy összenyomott ideális rugó éppen ilyen erőt fejt ki, ezért végez a rugóhoz rögzített tömeg harmonikus rezgőmozgást.

A mozgásra felírható

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

mozgásegyenlet a lineáris erő behelyettesítésével az alábbi alakot ölti

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -m\omega_0^2 x \quad \text{illetve} \quad m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -Dx.$$

Az egyenleteket  $m$ -mel végigosztva, végül az időfüggő helykoordinátára a

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad \text{illetve} \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{D}{m} x(t) = 0$$

egyenletet kapjuk.

Az egyenlet matematikailag egy *differenciálegyenlet*, amely a meghatározandó függvény mellett annak differenciálhányadosát is tartalmazza. Az egyenletnek eleget tevő  $x(t)$  függvény(ek) megkeresése, vagyis a differenciálegyenlet megoldása matematikai módszerekkel lehetséges. Ezekkel itt nem foglalkozunk, számunkra most csak az egyenlet alakja fontos.

Matematikai elemzés nélkül is belátható, hogy ennek az egyenletnek megoldása a harmonikus rezgést leíró  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$  vagy  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  függvény, hiszen a differenciálegyenletet ebből vezettük le. (Egyébként ugyanerre a következtetésre jutunk akkor is, ha az egyenlet eredetéről semmit nem tudva, matematikai módszerekkel keressük meg a megoldást.)

A differenciálegyenletet formailag vizsgálva megállapíthatjuk, hogy ha összeadjuk a keresett függvény második deriváltját és a függvénynek egy állandóval

megszorzott értékét, akkor eredményül nullát kapunk. Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy ennek az egyenletnek megoldása pl. a harmonikus rezgést leíró

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{illetve} \quad x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} t + \varphi\right)$$

függvény, ahol  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ , a rezgés körfrekvenciája.

Vegyük észre, hogy a megoldás-függvényben az idő szorzója, vagyis a rezgés körfrekvenciája ( $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ ) azonos a differenciálegyenletben a függvény

szorzójaként szereplő állandó ( $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ ) négyzetgyökével.

Ebből az az általános következtetés adódik, hogy ha egy folyamatban egy  $f(t)$  mennyiség változására fizikai megfontolások alapján egy

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + Kf(t) = 0,$$

alakú differenciálegyenletet kapunk, akkor minden további matematikai elemzés nélkül állíthatjuk, hogy a mennyiség változása harmonikus rezgés, amit az

$$f(t) = f_m \sin(\sqrt{K}t + \varphi) = f_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

vagy az

$$f(t) = f_m \cos(\sqrt{K}t + \varphi') = f_m \cos(\omega_0 t + \varphi').$$

függvénnyel írhatunk le. Itt  $f_m$  a mennyiség maximális értéke,  $\omega_0 = \sqrt{K}$  pedig a rezgés körfrekvenciája. (A komplex leírásnál a függvény alakja:  $\hat{f}(t) = f_m e^{i(\omega_0 t + \varphi)}$ )

Használhatjuk még az

$$f(t) = f_1 \sin \sqrt{K}t + f_2 \cos \sqrt{K}t = f_1 \sin \omega_0 t + f_2 \cos \omega_0 t$$

alakot is.

Mivel a fenti differenciálegyenlet megoldása harmonikus függvény, az ilyen típusú egyenletet a *harmonikus rezgés differenciálegyenletének* vagy a *harmonikus rezgés alapegyenletének* nevezik.

\*\*\*\*\*

*Megjegyzés:* A megoldások bármelyik alakját vizsgáljuk, azt találjuk, hogy azokban két olyan mennyiség szerepel, amelyek matematikai úton nem határozhatók meg egyértelműen, értéküket csak a rezgési folyamat fizikai körülményeinek ismeretében tudjuk megadni ( $f_m$  és  $\varphi$  illetve  $f_1$  és  $f_2$ ).

Az  $f(t) = f_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$  típusú megoldásnál ilyen mennyiségpár az  $f_m$  amplitúdó és a  $\varphi$  fázisszög. Ha ez a megoldás például egy tömegpont harmonikus rezgését írja le, akkor az amplitúdót az határozhatja meg, hogy az időmérés kezdetén mekkora a tömegpont sebessége, a fázisszög pedig attól függ, hogy az időmérés kezdetén milyen a kitérés. A megoldás tehát csak akkor teljes, ha ezeket az ún. *kezdeti feltételeket* ismerjük.

\*\*\*\*\*

### *Példa*

Most az ún. *fonálinga* (vagy *matematikai inga*) példáján bemutatjuk, hogy egy jelenség vizsgálatánál fizikai megfontolások alapján hogyan juthatunk el olyan egyenletre, amelyből ránézésre megállapítható, hogy harmonikus rezgésről van szó vagy nem.

Egyszerűen tárgyalható eset az  $l$  hosszúságú fonálon függő  $m$  tömegű pontszerű test (matematikai- vagy fonálinga) lengése. A tömegpont ilyenkor  $l$  sugarú körpályán mozog, körmozgását a  $\vartheta$  szög változásával jellemezhetjük ( $l$ . a mellékelt ábrán), a mozgásegyenlet pedig

$$G_T = -mg \sin \vartheta(t) = ma_T = ml\beta = ml \frac{d^2 \vartheta}{dt^2},$$

vagyis

$$\frac{d^2 \vartheta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \vartheta(t) = 0.$$

Mivel az egyenletben a  $\vartheta(t)$  függvény helyett annak szinusza áll, megállapíthatjuk, hogy az inga mozgását leíró differenciálegyenlet nem olyan alakú, mint a harmonikus rezgés alapegyenlete, vagyis az inga mozgása általában nem harmonikus rezgés.

Ha azonban az inga kitérése (vagyis a  $\vartheta$  szög) kicsi, akkor  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ , és így az egyenlet a

$$\frac{d^2 \vartheta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \vartheta(t) = 0,$$

alakot ölti, ami már harmonikus rezgést ír le. A megoldás

$$\vartheta(t) = \vartheta_m \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

ahol a körfrekvencia  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Ebből kapjuk a közismert rezgésidő-összefüggést:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Egy ilyen szabadon rezgő rendszer esetén a rezgés  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  frekvenciáját – de gyakran magát az  $\omega_0$  körfrekvenciát is – a rendszer *sajátfrekvenciájának* nevezik.

### A harmonikus rezgés energiaviszonyai

Egy fizikai mennyiség változásai – így a rezgések is – általában energiaátalakulásokkal járnak. Most a mechanikai- és elektromágneses harmonikus rezgés energiaviszonyait vizsgáljuk meg.

#### Energiaátalakulások egydimenziós mechanikai rezgésnél

Egy  $D$  állandójú rugalmas erő hatására az  $x$ -tengely mentén rezgő  $m$  tömegpont energiája

$$E = E_h + E_m = \frac{1}{2} Dx^2 + \frac{1}{2} mv_x^2.$$

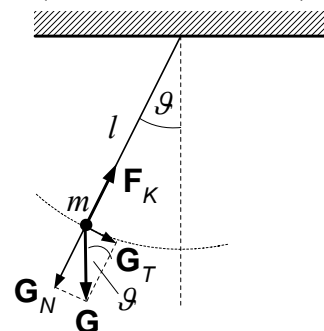
Írjuk be az összefüggésbe a helykoordináta- és a sebesség

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v_x(t) = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = v_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

időfüggését ( $v_m = \omega_0 A$  a sebesség maximális értéke). Ekkor az időfüggő helyzeti- és mozgási energia összegére azt kapjuk, hogy

$$E(t) = \frac{1}{2} DA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} mv_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$





A sebesség maximális értéke és a rezgés amplitúdója közötti kapcsolat:

$$v_m^2 = \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{m} D^2 A^2 \quad (\text{itt felhasználtuk a } D = m\omega_0^2 \text{ összefüggést}).$$

Ezzel a teljes energia az alábbi alakba írható:

$$E(t) = \frac{1}{2} D A^2 (\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)) = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m v_m^2 = \text{állandó}.$$

Eszerint a rezgés során mind a helyzeti-, mind pedig a mozgási energia változik, de ez csupán helyzeti energia  $\Leftrightarrow$  mozgási energia átalakulásokat jelent, miközben a két energia összege mindig ugyanannyi.

Fontos eredmény, hogy a rezgő tömegpont energiája a rezgés amplitúdójával szoros összefüggésben áll, az egyik mennyiség egyértelműen meghatározza a másikat. Az összefüggés jellegzetessége az, hogy az energia arányos az amplitúdó- vagy a sebességamplitúdó négyzetével.

## A csillapódó rezgés

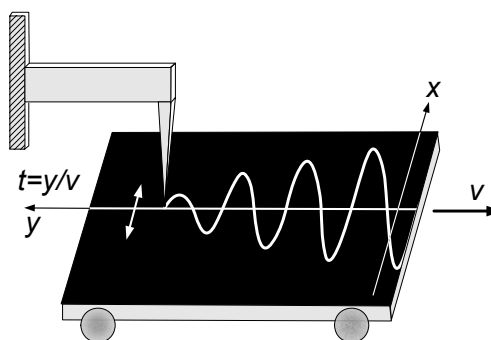
Az előbb tárgyalt rezgések mindegyike ideális rezgés, mert a rezgés során nincs energiavesztés. A valóságos rezgéseknél a mechanikai energia a rendszerből fokozatosan eltávozik, amiből – az energiára vonatkozó előbbi megállapításaink alapján – következik, hogy a rezgés amplitúdója is csökken. Az ilyen csökkenő amplitúdójú rezgéseket *csillapodó* (vagy *csillapított*) rezgéseknek nevezik.

### *Csillapodó, egydimenziós mechanikai rezgés*

A mechanikai rezgéseknél a csillapodás azt jelenti, hogy a rezgő tömegpont maximális kitérései egyre csökkennek, és a rezgés előbb-utóbb megszűnik. Ezt a jelenséget könnyű kísérlettel is bemutatni, hiszen a szabad rezgések kisebb-nagyobb mértékben mindig csillapodnak.

#### **KÍSÉRLETEK:**

- Ha a kormozott üveglappal korábban elvégzett kísérletben a kormot karcoló tűt úgy állítjuk be, hogy erősebben súrlódjon, akkor a rezgés jól láthatóan csillapodóvá válik (ábra).
- Ha egy rugón függő testet folyadékba merítve rezgetünk, akkor rezgése a nagy közegellenállás miatt erősen csillapodik.



A csillapodó rezgés sajátosságait kísérletekkel fel lehet deríteni, de a kitérés időfüggését – legalábbis egyszerűbb esetekben – fizikai megfontolásokkal elméletileg is meg lehet határozni. Ehhez azt kell figyelembe venni, hogy a csillapodás oka mindig az, hogy a rezgést létrehozó rugalmas erő mellett egy a rezgést fékező, csillapító erő ( $F_{cs}$ ) is működik. Ennek megfelelően az  $x$ -tengelyen rezgő tömeg mozgásegyenlete ilyenkor

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -Dx(t) + F_{cs}.$$

Az egyik leggyakoribb ilyen erő egy közegben mozgó testre ható közegellenállás, ami *gyakran arányos a mozgás sebességével*, és azzal ellentétes irányú:

$$F_{cs} = -kv_x(t) = -k \frac{dx(t)}{dt}.$$

Most egy ilyen erő által csillapodó rezgést vizsgálunk meg.

Ennek a csillapító erőnek a figyelembe vételével a rezgő test mozgásegyenlete az alábbi alakba írható

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -Dx(t) - k \frac{dx(t)}{dt}.$$

Végigosztva  $m$ -mel, felhasználva az  $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$  összefüggést, és bevezetve a  $2\beta = \frac{k}{m}$  jelölést, végül a

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

differenciálegyenletet kapjuk, ami szemmel láthatóan nem harmonikus rezgés egyenlete (az egyenletben megjelent a függvény első deriváltja is). Ez az eredmény várható volt, hiszen a csillapító erő miatt a rezgés amplitúdója csökken, a csökkenő amplitúdójú rezgés pedig nem írható le egyetlen harmonikus függvénnyel.

A fenti egyenlet matematikai megoldása nem egyszerű feladat, ezért itt az ún. *próbafüggvény* eljárást alkalmazzuk. Ennek lényege az, hogy a kísérleti tapasztalatok alapján megpróbáljuk kitalálni a megoldást, majd ezt a feltételezett megoldást az egyenletbe behelyettesítjük, és megnézzük, hogy milyen feltételek mellett lesz ez valóban megoldás.

A csillapodó rezgésre vonatkozó kísérletek alapján felrajzolhatjuk egy ilyen rezgés jellegzetes kitérés-idő függését, amit szematikusan az alábbi ábra mutat. Az ábrán szaggatott vonallal az amplitúdó időbeli változását ( $A(t)$ ) is feltüntettük.

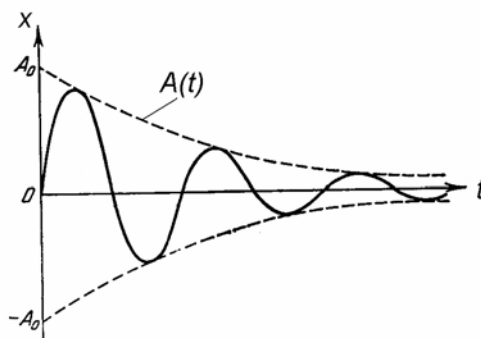
A kísérleti görbék (sebességgel arányos csillapító erő esetén) azt sugallják, hogy a kitérés időfüggése tulajdonképpen egy torzított harmonikus függvény, amely egy időfüggő (időben csökkenő) amplitúdó és egy harmonikus függvény szorzata:

$$x(t) = A(t) \sin(\omega t + \varphi).$$

A kísérletek alapján ennél konkrétabb feltevessel is élhetünk, ugyanis a tapasztalat szerint a sebességgel arányos csillapító erő esetén az amplitúdó csökkenése jól leírható egy exponenciális függvénnyel:  $A(t) = A_0 e^{-at}$ . Itt  $a$  egyelőre ismeretlen állandó. Ezzel a feltételezett megoldás az

$$x(t) = A_0 e^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$$

alakot ölti. A probléma csak az, hogy nem tudjuk az  $a$  állandó értékét, és azt sem, hogy mennyi a harmonikus rész  $\omega$  körfrekvenciája. Ahhoz, hogy kiderüljön, hogy egy ilyen függvény valóban lehet megoldása a rezgést leíró differenciálegyenletnek, be kell helyettesíteni az egyenletbe. Ebből az is kiderül, hogy milyen  $a$  és  $\omega$  érték mellett lehet megoldás a fenti függvény.



\*\*\*\*\*

A behelyettesítéshez ki kell számítani a függvény deriváltjait:

$$\frac{dx}{dt} = -A_0 a e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) + A_0 e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= A_0 a^2 e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) - A_0 a e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi) - A_0 a e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi) - \\ &- A_0 e^{-at} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Ezeket és az eredeti  $x(t)$  függvényt behelyettesítve a differenciálegyenletbe, az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned} &A_0 a^2 e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) - A_0 a e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi) - A_0 a e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi) - \\ &- A_0 e^{-at} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) - 2\beta A_0 a e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) + 2\beta A_0 e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi) + \\ &+ \omega_0^2 A_0 e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Rendezzük az egyenletet az alábbi módon:

$$\begin{aligned} &(A_0 a^2 e^{-at} - A_0 e^{-at} \omega^2 - 2\beta A_0 a e^{-at} + \omega_0^2 A_0 e^{-at}) \sin(\omega t + \varphi) + \\ &+ (-A_0 a e^{-at} \omega - A_0 a e^{-at} \omega + 2\beta A_0 e^{-at} \omega) \cos(\omega t + \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Az egyenlet baloldalán szereplő kifejezésnek *mindig* nullával kell egyenlőnek lenni, ami – tekintve, hogy az időfüggő  $\cos$  és  $\sin$  függvények  $0$  és  $1$  között bármilyen értéket felvehetnek – csak úgy teljesülhet, ha ezeknek a függvényeknek a szorzója nulla, vagyis

$$\begin{aligned} &A_0 a^2 e^{-at} - A_0 \omega^2 e^{-at} - 2\beta A_0 a e^{-at} + \omega_0^2 A_0 e^{-at} = 0 \\ &- A_0 a e^{-at} \omega - A_0 a \omega e^{-at} + 2\beta A_0 e^{-at} \omega = 0. \end{aligned}$$

Egyszerűsítés után ebből az  $a$  és  $\omega$  állandókra az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} &a^2 - \omega^2 - 2\beta a + \omega_0^2 = 0 \\ &- 2a\omega + 2\beta\omega = 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből azt kapjuk, hogy

$$a = \beta = \frac{k}{2m}.$$

vagyis az exponenciálisan csökkenő amplitúdó kitevőjében szereplő állandó éppen a csillapítást meghatározó állandóval arányos.

Ezt felhasználva, az első egyenletből megkapjuk a harmonikus rész körfrekvenciáját:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

\*\*\*\*\*

A feltételezett megoldásnak a differenciálegyenletbe való behelyettesítésével valóban megkapjuk a keresett két állandót, és ezzel a megoldás

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi),$$

ahol  $\beta = \frac{k}{2m}$  és  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Eszerint az idővel exponenciálisan csökkenő amplitúdó kitevőjében szereplő állandó éppen a csillapítást meghatározó  $k$  állandóval arányos, a harmonikus rész körfrekvenciája pedig kisebb, mint a tömegpont csillapítatlan, harmonikus rezgésének megfelelő  $\omega_0$  körfrekvencia.

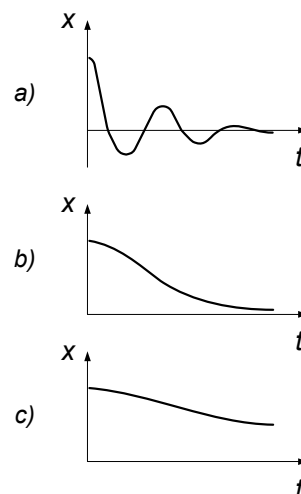
Ez a megoldás visszaadja a csillapodó rezgés kísérletekből már ismert sajátosságait: minél nagyobb a csillapításra jellemző  $\beta$  állandó (vagyis minél nagyobb a csillapítás), annál gyorsabban csökken a rezgés amplitúdója, és annál nagyobb a rezgés körfrekvenciájának eltérése a csillapítatlan rezgés körfrekvenciájától. Nagyon kis  $\beta$  érték (kis csillapító hatás) esetén a rezgés közelítőleg harmonikus,

körfrekvenciája közelítőleg megegyezik az ideális, csillapítatlan rezgés körfrekvenciájával.

Megjegyezzük, hogy a fenti megoldás csak akkor érvényes, ha a csillapítás nem túl nagy. Ez a körfrekvencia kifejezéséből látszik, hiszen fizikailag értelmes körfrekvenciát csak akkor kapunk, ha a csillapítást jellemző  $\beta = \frac{k}{2m}$  állandóra

fenáll a  $\beta^2 < \omega_0^2$  feltétel. Ha ez nem teljesül, akkor nem alakul ki több periódusból álló – szokásos értelemben vett – rezgés.

A csillapítás különböző eseteit kísérletekkel vizsgálva, három jellegzetes esetet találunk, amelyeket a mellékelt ábrán szemléltetünk. Az *a)* ábra a  $\beta^2 < \omega_0^2$  esetnek megfelelő csillapodó rezgést mutat, a *b)* ábrán az ún. *aperiodikus határesetet* látjuk, amikor rezgés már éppen nem jön létre, vagyis a szélső helyzetből induló tömegpont az egyensúlyi helyzet másik oldalára már nem tér ki (ez a  $\beta = \omega_0 \Rightarrow \omega = 0$  esetnek felel meg), a *c)* ábra pedig a nagy csillapításnak ( $\beta^2 > \omega_0^2$ ) megfelelő *aperiodikus mozgást* mutatja, amikor a kitérés nagyon lassan közeledik az egyensúlyi helyzet felé.

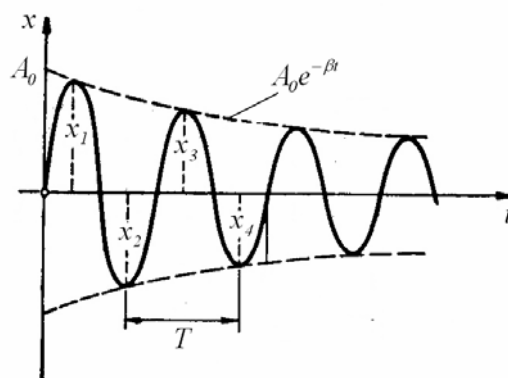


\*\*\*\*\*

A csillapodó rezgés fenti differenciálegyenlete mindenféle fizikai megfontolás nélkül, pusztán matematikai módszerekkel is megoldható. A számolás eredménye ugyanaz, mint amit a fenti – kevésbé egzakt módszerrel – kaptunk. A matematikai megoldásból kijön az aperiodikus határeset és az aperiodikus mozgás időfüggése is.

\*\*\*\*\*

A rezgések csillapodása gyakorlati szempontból is fontos jelenség (nem kívánatos rezgésnél a gyors csillapodás, szándékosan előidézett rezgésnél a lassú csillapodás elérése a cél), ezért a csillapodás jellemzésére a  $\beta$  állandó mellett egyéb – többnyire szemléletes – mennyiségeket is bevezettek. Az egyik ilyen jellemző a *K csillapodási hányados*, amely két egymás utáni rezgési amplitúdó hányadosa (ábra):



$$K = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_4} = \frac{x_n}{x_{n+2}} = \frac{e^{-\beta t_n}}{e^{-\beta(t_n+2T)}} = e^{\beta T}.$$

Gyakran használják a csillapodási hányados természetes logaritmusát, az ún. *logaritmikus dekrementumot* is:

$$A = \ln K = \beta T.$$

A harmonikus rezgés vizsgálatánál láttuk, hogy a rezgés energiája és amplitúdója között szoros összefüggés áll fenn:

$$E = \frac{1}{2}DA^2.$$

Ha az amplitúdó időben változik, akkor ennek megfelelően változik a rezgés energiája is. A csillapodó rezgésnél a súrlódás jellegű fékező erő miatt csökkenő rezgési energia időfüggését az amplitúdócsökkenés segítségével kaphatjuk meg:

$$E(t) = \frac{1}{2}DA^2(t) = \frac{1}{2}DA_0^2 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t},$$

ahol  $E_0 = \frac{1}{2}DA_0^2$ , a rezgés kezdeti energiája. Látható, hogy a sebességgel arányos

csillapító erő esetén a rezgési energia is exponenciálisan csökken.

Ha a kis csillapítású rendszert tekintjük „jónak”, akkor a rezgő rendszer annál jobb, minél lassabban fogy az energiája. Ezért a rendszer jóságát jellemezni lehet az energia csökkenési sebességével, amit a

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} = -2\beta E$$

mennyiség ad meg. Látható, hogy ez a mennyiség a csillapításra jellemző  $\beta$ -val arányos. A rendszer jóságának jellemzésére azonban ez a mennyiség mégsem használható, mert függ a rendszer aktuális energiájától is. Ezért erre a célra a relatív energiaváltozási sebességet használják, amelynek segítségével definiálják a rezgő rendszer *jósági tényezőjét* ( $\tilde{Q}$ ).

A definíció szerint a jósági tényező a teljes rezgési energia és az  $1$  radián fázisszög-változás alatt bekövetkező energiaveszteség hányadosa. Az  $1$  radián fázisszög-változás  $\Delta t = \frac{1}{2\pi}T$  idő alatt következik be ( $T$  a periódusidő), így az erre

az időre eső energiaveszteség nagysága kis csillapításnál ( $\omega \approx \omega_0$ ) közelítőleg

$$|\Delta E_{1rad}| \approx \left| \frac{dE}{dt} \right| \Delta t = \left| \frac{dE}{dt} \right| \frac{T}{2\pi} = \frac{2\beta TE}{2\pi} = \frac{2}{\omega} \beta E \approx \frac{2\beta E}{\omega_0}.$$

Ezzel a  $\tilde{Q}$  jósági tényezőre azt kapjuk, hogy

$$\tilde{Q} = \frac{E}{|\Delta E_{1rad}|} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Látható, hogy az így definiált jósági tényező – az eredeti céllal összhangban – annál nagyobb, minél kisebb a csillapítás ( $\beta$ ).

A jósági tényező kapcsolatba hozható a logaritmikus dekrementummal is, hiszen

$$\tilde{Q} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T_0} = \frac{\pi}{\Lambda}.$$

Végül, ha a  $\beta$  csillapítást a rendszer adataival fejezzük ki, akkor a

$$\tilde{Q} = \frac{m\omega_0}{k}$$

kifejezést kapjuk.

### ***Kényszerrezgések, rezonancia***

Gyakorlatilag is igen fontos eset az, amikor egy rezgésre képes rendszer rezgései valamilyen külső, periodikus hatás (kényszer) működése közben zajlanak le. Az ilyen rezgéseket – szemben a korábban tárgyalt szabad rezgésekkel – *kényszerrezgéseknek* nevezik.

A külső kényszer sokféle lehet, itt a legegyszerűbb esetet vizsgáljuk, amikor a külső hatás mértéke időben szinusz vagy koszinusz függvény szerint változik.

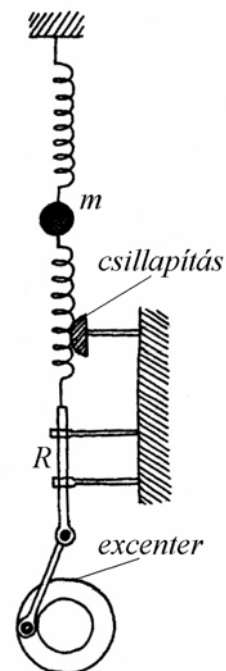
#### **Kényszerrezgés mechanikai rezgő rendszerben**

##### ***A kényszerrezgés jellegzetességei, a rezonanciafrekvencia***

A legegyszerűbb eset egy pontszerűnek tekinthető test kényszerrezgése, amit egy egyszerű kísérleti elrendezéssel modellezhetünk.

##### **KÍSÉRLET:**

- A kísérlet vázlatja az ábrán látható. A két függőleges rugó között elhelyezkedő  $m$  tömeget az egyensúlyi helyzetéből kitérítve és elengedve a tömeg szabad rezgése jön létre. Kényszerrezgést úgy tudunk megvalósítani, hogy az ábrán látható excenter forgatásával az  $R$  rudat és így az alsó rugó végét periodikusan fel-le mozgatjuk. Ezáltal a rendszerre rákényszerítjük a rúd végének rezgését, és az  $m$  tömeg kényszerrezgést végez. A rugóhoz érintett súrlódó testtel a rezgést csillapítani is tudjuk.



Ha az excenter szögsebességét, vagyis a kényszerrezgés (kör)frekvenciáját növeljük, akkor jól megfigyelhető, hogy kezdetben az  $m$  tömeg rezgésének amplitúdója kicsi, majd egyre nő, és sokszorosán meghaladja a rezgető rúd végének amplitúdóját. Egy bizonyos szögsebességnél az amplitúdónak maximuma van, a szögsebesség további növelésével az  $m$  tömeg rezgésének amplitúdója csökken, és igen nagy szögsebességeknél gyakorlatilag már nincs rezgés.

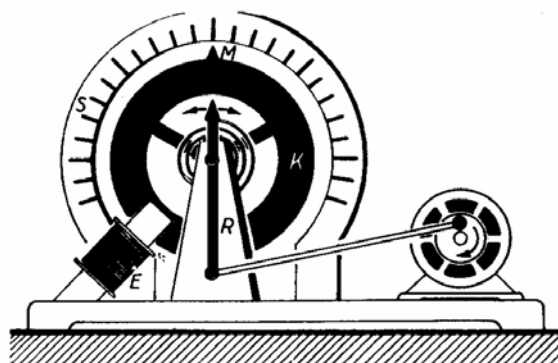
Jól megfigyelhető a csillapítás hatása is: minél erősebben szorítjuk a rugóhoz a csillapító testet, annál kisebb lesz a maximális amplitúdó. Ha a csillapítás kicsi, akkor a maximális amplitúdó a tömegpont szabad rezgéséhez közeli frekvencián következik be.

Hasonló kísérletet végezhetünk el egy torziós rezgést végző testtel.

**KÍSÉRLET:**

- Az alábbi ábrán látható, rézből készült, forgatható korongra (az ábrán fekete) egy spirálrugó van szerelve, ami miatt a korong az egyensúlyi helyzetéből (az ábrán a mutató  $M$  helyzete) való kitéréskor szabad torziós (forgási) rezgésbe jön. Kényszerített torziós rezgést itt is egy excenteres megoldással az  $R$  rúd segítségével tudunk létrehozni. A csillapítást itt az  $E$  elektromágnes mágneses erőterével tudjuk szabályozni, amely a mozgó rézkorongban örvényáramokat kelt, és ezzel fékezi a korong mozgását, vagyis csillapítja a rezgést.

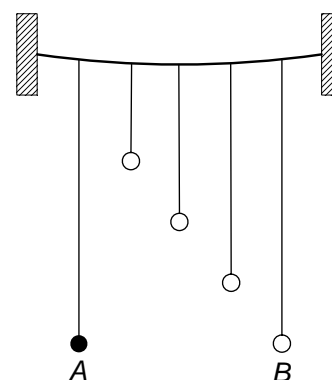
Az excenter frekvenciájának növelésével itt is az előző kísérletben már tapasztalt jellegzetességeket találjuk: az amplitúdó függ a kényszer frekvenciájától, és egy bizonyos frekvenciánál maximuma van. A csillapítás növelése csökkenti a maximális amplitúdót, kis csillapításnál a maximum itt is a korong szabad rezgésének frekvenciája közelében van.



Bár a részletekre vonatkozóan kevés információt ad, egyszerűsége és szemléletessége miatt érdemes megnézni még az alábbi, ingákkal megvalósított kísérletet is.

**KÍSÉRLET:**

- Közös fonálra felfüggesztünk különböző hosszúságú, könnyű ingákat (üres körök), és egy nagyobb tömegű ingát ( $A$ ), amelynek hosszúsága – tehát lengési frekvenciája – megegyezik a többi inga egyikével ( $B$ ). Ha a nehéz  $A$  ingát lengésbe hozzuk, akkor az a kótél közvetítésével meglengeti a többi ingát is. Azt tapasztaljuk, hogy jelentős amplitúdóval csak az azonos hosszúságú  $B$  inga leng, vagyis az, amelynek a sajátfrekvenciája megegyezik a kényszerítő inga frekvenciájával.



A fenti kísérletek közös tanulsága az, hogy a rezgésre kényszerített rendszer amplitúdója függ a kényszer frekvenciájától, és maximuma van a rendszer sajátfrekvenciája közelében. A maximum léte azt mutatja, hogy egy bizonyos – a rendszer adataitól függő – frekvencián a rendszer „rezonál” a külső kényszerre, ezért ezt a jelenséget *rezonanciának* nevezik.

Ezek után nézzük meg, hogy hogyan lehet a rezonancia jelenségét a fizikai törvények segítségével értelmezni.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egy csillapodó rezgést végző tömegpontra egy

$$F_k = F_0 \sin \omega_k t$$

külső kényszerítő (gerjesztő) erő hat. Ekkor mozgásegyenlete így módosul:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -Dx(t) - k \frac{dx(t)}{dt} + F_0 \sin \omega_k t.$$

Az  $m$  tömeggel osztva és alkalmazva a csillapodó rezgésnél használt jelöléseket, a kitérés időfüggését megadó  $x(t)$  függvényre az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \omega_k t.$$

Az egyenlet még a csillapodó rezgés egyenleténél is bonyolultabb, de a tapasztalatok alapján itt is megpróbálhatjuk „kitalálni” a megoldást.

A tapasztalat szerint egy ilyen rendszer egy bonyolult berezgési folyamat után a gerjesztő erő frekvenciáján rezeg, a gerjesztő erő tehát *rákényszeríti* a rendszerre a frekvenciáját.

A berezgési folyamat oka az, hogy ha egy rendszert az egyensúlyi helyzetéből kimozdítunk, mindig elindul a rendszer sajátrezgése is, ami összetevődik a kényszerrezgéssel. A sajátrezgés azonban a csillapítás miatt egy idő után elhal, és csak az állandósult kényszerrezgés marad.

\*\*\*\*\*

Matematikailag ez azt jelenti, hogy az egyenlet általános megoldása két rezgést leíró függvény összege lesz, amelyeknek egyike az egyszerű csillapodó rezgés frekvenciáját, a másik pedig a gerjesztő erő frekvenciáját tartalmazza.

\*\*\*\*\*

A berezgési folyamat elhalása után a tömegpont *harmonikus rezgést* végez a gerjesztő erő  $\omega_k$  körfrekvenciájával, tehát a kitérés időfüggését harmonikus függvénnyel írhatjuk le. Ilyen lehet például az

$$x(t) = A \sin(\omega_k t - \varphi)$$

függvény. Itt egyelőre ismeretlen a rezgés  $A$  amplitúdója, továbbá a rezgő rendszer és a gerjesztő erő rezgése közötti  $\varphi$  fáziskülönbség (a fázisszög negatív előjele azért célszerű, mert a rezgés általában késik a gerjesztő erőhöz képest).

Az ismeretlen állandókat ugyanúgy határozhatjuk meg, mint a csillapodó rezgés esetén tettük: a feltételezett megoldást behelyettesítjük a rezgés differenciálegyenletébe, és megvizsgáljuk, hogy ez az említett mennyiségek milyen értékeinél lesz valóban megoldás.

\*\*\*\*\*

A számolást a deriváltak kiszámításával kezdjük:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \omega_k \cos(\omega_k t - \varphi)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -A \omega_k^2 \sin(\omega_k t - \varphi).$$

Behelyettesítés és a  $b = \frac{F_0}{m}$  jelölés bevezetése után az alábbi egyenletet kapjuk.

$$-A \omega_k^2 \sin(\omega_k t - \varphi) + 2\beta A \omega_k \cos(\omega_k t - \varphi) + \omega_0^2 A \sin(\omega_k t - \varphi) = b \sin \omega_k t.$$



Az  $\omega_k t - \varphi$  különbség szögfüggvényeit ezután – ismert trigonometriai összefüggések segítségével

– olyan alakra hozzuk, hogy mindenütt a  $\sin \omega_k t$  és a  $\cos \omega_k t$  jelenjen meg:

$$-A\omega_k^2 \cos \varphi \sin \omega_k t + A\omega_k^2 \sin \varphi \cos \omega_k t + 2\beta A\omega_k \cos \varphi \cos \omega_k t + \\ + 2\beta A\omega_k \sin \varphi \sin \omega_k t + \omega_0^2 A \cos \varphi \sin \omega_k t - \omega_0^2 A \sin \varphi \cos \omega_k t = b \sin \omega_k t$$

Rendezés után az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$(A\omega_k^2 \sin \varphi + 2\beta A\omega_k \cos \varphi - \omega_0^2 A \sin \varphi) \cos \omega_k t - \\ - (A\omega_k^2 \cos \varphi - 2\beta A\omega_k \sin \varphi - \omega_0^2 A \cos \varphi + b) \sin \omega_k t = 0.$$

Mivel az egyenletnek mindig teljesülnie kell, az időfüggő részek együtthatóinak kell nullának lenni, azaz

$$A\omega_k^2 \sin \varphi + 2\beta A\omega_k \cos \varphi - \omega_0^2 A \sin \varphi = 0 \\ -A\omega_k^2 \cos \varphi + 2\beta A\omega_k \sin \varphi + \omega_0^2 A \cos \varphi - b = 0.$$

A fenti egyenletrendszer lehetőséget ad a keresett két ismeretlen ( $A$  és  $\varphi$ ) meghatározására. A  $\varphi$  fázisszögnek csak egy szögfüggvénye ( $\operatorname{tg} \varphi$ ) határozható meg (úgy hogy az 1. egyenletet elosztjuk  $\cos \varphi$ -vel), az  $A$  amplitúdó ezután hosszabb számolással közvetlenül megkapható a 2. egyenletből. A számolást itt nem végezzük el, a végeredményt alább megadjuk.

\*\*\*\*\*

A számolásból kiderül, hogy a fent feltételezett

$$x(t) = A \sin(\omega_k t - \varphi)$$

kifejezés csak akkor megoldása az egyenletnek, ha az amplitúdó és a fáziskülönbség is függ az  $\omega_k$  kényszerfrekvenciától, az alábbi módon

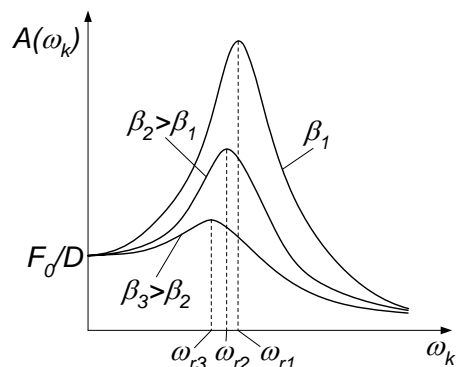
$$A = A(\omega_k) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_k^2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \omega_k}{\omega_0^2 - \omega_k^2}.$$

A kapott eredmény első tanulsága az, hogy a gerjesztő erő  $\omega_k$  körfrekvenciáját változtatva, változik a rezgés  $A$  amplitúdója (ez egyezik a kísérleti tapasztalatokkal). Az amplitúdó a körfrekvencia csökkentésekor az

$A(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{D}$  értékhez tart, ami  $D$  rugóállandó esetén megfelel az  $F_0$  erő által

okozott sztatikus kitérésnek.

Az igazi érdekesség azonban akkor derül ki, ha részletesebben is megvizsgáljuk az amplitúdó frekvenciafüggését megadó fenti  $A(\omega_k)$  függvényt. A kényszerfrekvenciájának növelésekor az amplitúdó először növekszik, majd igen nagy frekvenciákon nullához tart (utóbbi annak a következménye, hogy a tömeg már nem képes követni az erő változásait). A függvény vizsgálatából kiderül, hogy az amplitúdónak egy bizonyos körfrekvenciánál maximuma van (ábra), ami egybevág a kísérleti tapasztalatokkal. A rezonancia jelensége tehát a fizikai törvények segítségével számszerűen is leírható, és felrajzolható az amplitúdó frekvenciafüggését megadó görbe, amit rezonanciagörbének, a maximális



amplitúdóhoz tartozó  $\omega_r$  körfrekvenciának megfelelő  $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$  frekvenciát pedig a rendszer rezonanciafrekvenciájának nevezik.

A kísérletek azt mutatják, hogy ha a  $\beta$  csillapítás kicsi, akkor az amplitúdó igen meredeken változik a rezonancia helyénél (a rezonancia „éles”), a rezonancia a rendszer sajátfrekvenciája közelében következik be ( $\omega_r \approx \omega_0$ ), és a rezgés amplitúdója igen nagy lehet. A csillapítás növelésével csökken a rezonanciafrekvencia, csökken az amplitúdó maximuma, és a rezonancia görbe laposabbá válik (ez is látszik a fenti ábrán).

Mindezeket a tapasztalatokat számítással is alátámaszthatjuk.

Az amplitúdófüggvény maximumához tartozó  $\omega_r$  körfrekvenciát a matematikából ismert módon, a

$$\frac{dA(\omega_k)}{d\omega_k} = 0$$

összefüggésből kaphatjuk meg. A számolás eredménye az, hogy rezonancia az

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

körfrekvenciánál (vagyis az  $f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  frekvenciánál) van. A fenti összefüggésekből látszik, hogy a  $\beta$  csillapítás növelésekor a rezonanciafrekvencia a számítások szerint is csökken.

Az amplitúdó maximumát a rezonanciafrekvencia behelyettesítésével kapjuk:

$$\begin{aligned} A_{max} = A(\omega_r) &= \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_r^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_r^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \\ &= \frac{F_0}{m\sqrt{4\beta^2\omega_0^2 - 4\beta^4}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}. \end{aligned}$$

Kis csillapításnál  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ , ezért ilyenkor az amplitúdó maximuma közelítőleg az

$$A_{max} \approx \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}$$

kifejezéssel adható meg, vagyis az amplitúdó maximumát (adott kényszererőnél) lényegében a csillapítás határozza meg.

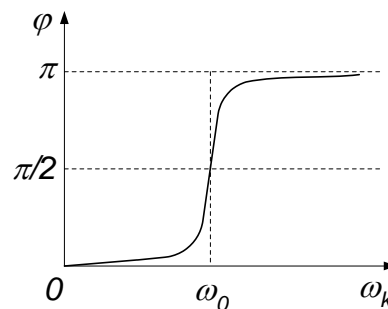
A csillapítás növelésével az amplitúdó-maximum csökkenthető, ha viszont a csillapítást csökkentjük, akkor az amplitúdó-maximum nő. Ez az oka annak, hogy kis csillapítású rezgő rendszereket a rezonanciafrekvencián rezgetve igen nagy rezgési amplitúdó alakulhat ki, ami bizonyos esetekben hasznos, de néha katasztrófákhoz is vezethet. Hasznos a rezonancia pl. akkor, ha egy gyenge rezgést akarunk felerősíteni, pl. azért, hogy megmérjük a frekvenciáját. A rezonancia káros lehet rezgő vagy forgó alkatrészeket tartalmazó gépeknél, hiszen a nagy amplitúdójú rezgés a gép deformációjához vagy töréséhez vezethet. Ezért ügyelni kell arra, hogy a forgás vagy rezgés frekvenciája a gép rezonanciafrekvenciáitól<sup>1</sup> távol legyen. A rezonancia káros hatásának talán legmeghökkenőbb esete az észak amerikai Tacoma folyó felett átívelő völgyhíd összeomlása a széllelkések által okozott rezonancia miatt.

<sup>1</sup> Kiterjedt testeknek több rezonanciafrekvenciája van.

A kényszerítő erő és a rezgés közötti fáziskülönbségre kapott

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega_k}{\omega_0^2 - \omega_k^2}$$

összefüggésből látszik, hogy a fázisszög függ a gerjesztő erő frekvenciájától. Adott csillapításnál a frekvenciát csökkentve  $\operatorname{tg} \varphi$  és egyúttal  $\varphi$  is nullához tart, vagyis „lassú” kényszernél a rendszer még szinte késedelem nélkül követni tudja a kényszert, a frekvencia növelésekor azonban a rendszer egyre jobban lemarad a kényszertől:  $\operatorname{tg} \varphi$  és  $\varphi$  növekszik,  $\omega_k = \omega_0$ -nál  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , a frekvencia további növelésekor pedig a fáziskülönbség  $\pi$ -hez tart (ábra). Utóbbi esetben a rendszer és a kényszer ellentétes fázisban rezeg, ami a kísérleteknél is megfigyelhető.



\*\*\*\*\*

A rezonanciafrekvenciát megadó összefüggésből látszik, hogy a fenti megoldás nem lehet érvényes, ha a csillapítás olyan nagy, hogy fennáll a  $\beta^2 > \frac{\omega_0^2}{2}$  feltétel, hiszen ekkor a rezonanciafrekvenciára képzetes értéket kapunk, ami fizikailag nem lehetséges.

A részletes matematikai elemzés azt mutatja, hogy ilyenkor nincs rezonancia, hanem az amplitúdó a frekvencia növelésével monoton csökken.

\*\*\*\*\*

### ***A sebességrezonancia***

A kényszerrezgést végző tömegpont kitérésének meghatározása után könnyen megkaphatjuk a sebességre vonatkozó összefüggést is:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A(\omega_k)\omega_k \cos(\omega_k t - \varphi) = v_m \sin(\omega_k t - \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

Itt bevezettük  $v_m(\omega_k) = A(\omega_k)\omega_k$  sebességamplitúdót, amely szintén függ a kényszer frekvenciájától:

$$v_m(\omega_k) = \frac{\omega_k F_0}{m\sqrt{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_k^2}}.$$

Ha ezt a függvényt a

$$v_m(\omega_k) = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2}{\omega_k^2} + 4\beta^2}}$$

alakba írjuk, akkor rögtön látszik, hogy maximuma van az

$$\omega_k = \omega_0$$

körfrekvencián (itt van minimuma a nevezőnek). A  $v_m$  sebességamplitúdó tehát a rendszer sajátfrekvenciáján a legnagyobb. Ezt a jelenséget gyakran *sebességrezonanciának* nevezik.

### ***A félérték-szélesség***

A rezonanciagöréből látható, hogy a rezonanciafrekvencia közelében a rendszer amplitúdójának növekedése és csökkenése nem egy meghatározott frekvencián

következik be, hanem egy frekvenciaintervallumban. Ennek a frekvenciaintervallumnak a szélessége a rendszer adataitól függ, és igen fontos szerepet játszik. Rezonancia útján történő frekvenciamérésnél pl. az a jó, ha a mérőműszer csak egyetlen frekvenciára – de legalábbis csak egy nagyon szűk frekvenciaintervallumra – reagál, vagyis a rezonanciagörbe „éles”. Ha viszont nem akarunk jelentős berezgéseket, akkor a széles, lapos görbe a kívánatos. Ez indokolja egy olyan mennyiség bevezetését, ami a rezonancia élességét, a görbe alakját jellemzi.

Mivel a rezonancia során a rezgő tömeg energiája is változik, és ez a változás a rezgő tömeg és a környezet közötti energiaátadást jellemzi, a rezonancia szempontjából igen fontos a rezgő tömeg energiájának a kényszer frekvenciájától való függése. Ez a függés az  $E(\omega_k) = \frac{1}{2}mv_m^2(\omega_k) = \frac{1}{2}DA^2(\omega_k)$  összefüggésből kapható meg:

$$E(\omega_k) = \frac{1}{2}mv_m^2(\omega_k) = \frac{F_0^2 \omega_k^2}{2m(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_k^2}.$$

A függvény vizsgálatából megállapítható, hogy a rezgő tömeg energiája – a kitérés amplitúdójához hasonlóan – szintén rezonanciaszerűen függ a kényszer frekvenciájától. Az összefüggésből látszik, hogy a tömegpont energiája az  $\omega_k = \omega_0$  körfrekvencián legnagyobb. Ekkor a rezgési energia értéke

$$E_{max} = E(\omega_0) = \frac{F_0^2}{8m\beta^2}.$$

Az energia-rezonanciagörbe „szélességét”, vagyis a rezonancia „élességét” úgy szokás jellemezni, hogy az  $E_{max}$  magasságú rezonanciagörbén (ábra) megadják annak a két körfrekvenciának ( $\omega_1$  és  $\omega_2$ ) a különbségét, ahol a függvény értéke  $E_{max}/2$ . Ezt a

$$\Delta\omega_f = \omega_2 - \omega_1$$

körfrekvencia-tartományt a rezonanciagörbe *félérték-szélességének* nevezik.

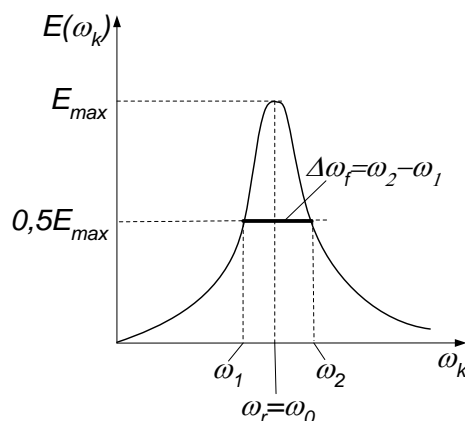
A félérték-szélességet meghatározó két körfrekvencia-értéket az

$$E(\omega_k) = \frac{1}{2}E(\omega_0)$$

egyenletből számíthatjuk ki. Kis csillapításnál ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) ebből azt kapjuk, hogy  $\omega_1 \approx \omega_0 - \beta$  és  $\omega_2 \approx \omega_0 + \beta$ , amiből a félérték-szélesség

$$\Delta\omega_f = \omega_2 - \omega_1 \approx 2\beta \approx \frac{\omega_0}{\tilde{Q}}.$$

Látható, hogy a félérték-szélesség annál kisebb, minél kisebb a  $\beta$  csillapítás, illetve minél nagyobb a rendszer  $\tilde{Q}$  jósági tényezője. (Ebből az összefüggésből az is látható, hogy a jósági tényező a félérték-szélességgel a  $\tilde{Q} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_f}$  alakba írható. Ezt



azért érdemes megemlíteni, mert néha ezt az összefüggést használják a jósági tényező bevezetésére.)

Ha a csillapítást kifejezzük a rendszer adataival, akkor a félérték-szélességre azt kapjuk, hogy

$$\Delta\omega_f \approx \frac{k}{m}.$$

\*\*\*\*\*

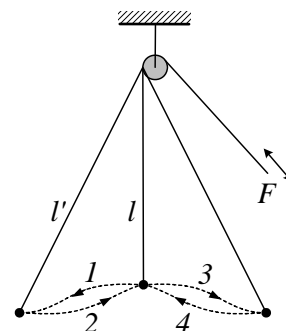
Megjegyezzük, hogy ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az amplitúdórezonancia görbéjének szélességét az  $A_{max}/\sqrt{2}$  értéknél számítjuk ki. Ennek az oka, hogy az energia arányos az amplitúdó négyzetével, így az energia- és az amplitúdó maximális értékei között fennáll az  $E_{max} = cA_{max}^2$  összefüggés ( $c$  egy állandó). Ennek megfelelően az  $A_{max}/\sqrt{2}$  amplitúdóérték  $c(A_{max}/\sqrt{2})^2 = 0,5cA_{max}^2 = 0,5E_{max}$  energia-amplitúdónak felel meg.

\*\*\*\*\*

## Parametrikus rezonancia

Egy rendszerben nem csak úgy növelhető a rezgés amplitúdója, hogy egy külső hatással közvetlenül a rezgés amplitúdóját növeljük meg, hanem úgy is, hogy a rezgő rendszer egy paramétereit periodikusan változtatjuk.

Ez történik pl. akkor, ha egy inga hosszát megfelelő ütemben változtatjuk. A mellékelt ábrán látható elrendezésben az inga fonala egy csigán van átvetve, így a fonál hossza az  $F$  vég meghúzásával illetve visszaengedésével könnyen változtatható. Nyilvánvaló, hogy ez a beavatkozás nem közvetlenül a kitérést változtatja, hiszen a létrehozott elmozdulás arra merőleges. (A kitérés közvetlen változtatása az lenne, ha az inga tömegét – változatlan fonálhossz mellett – minden periódusban meglöknénk az éppen aktuális mozgásirányban.)



A kísérletezés során kiderül, hogy az inga kis lengéseit csak akkor tudjuk növelni, ha a fonál hosszát megfelelő ütemben változtatjuk, például az inga szélső helyzetében visszaengedjük, egyensúlyi helyzetében pedig meghúzzuk. Az inga hosszváltozásainak menetét az ábrán láthatjuk, ahol az egymás utáni lépéseket megszámoztuk. Mivel ilyenkor a kiválasztott paraméter (itt az inga hossza) periodikus változásának az inga lengési frekvenciájához kell igazodnia, ez tulajdonképpen a rezonancia egy sajátos esete, amit *parametrikus rezonanciának* neveznek.

A konkrét esetben arról van szó, hogy a fonál meghúzásakor és visszaengedésekor az inga tömegén ellentétes előjelű munkát végzünk. Mivel pedig az egyensúlyi helyzetben a fonalerő nagyobb, a fonál meghúzásakor végzett – a rezgő tömeg energiáját növelő – munka nagyobb, mint a visszaengedésnél végzett ellenkező előjelű – a tömeg energiáját csökkentő – munka. Emiatt a fonál hosszának változtatásakor a rezgési energia és így az amplitúdó is nő. A paraméter változtatásának frekvenciája ebben az esetben kétszerese a rendszer sajátfrekvenciájának, hiszen egy periódusban kétszer húzzuk meg- és engedjük vissza a fonalat.

A parametrikus rezonancia másik példája a hintázás. Anélkül, hogy a hintázás mechanikájának bonyolult részleteibe belemennénk, megállapíthatjuk, hogy itt a testhelyzetünk (pontosabban a tömegközéppontunk helyzetének) megfelelő ütemben

történő változtatásával a rendszer perdületét változtatjuk periodikusan, ami szintén a rezgési energia növekedését eredményezi. (A kitérés közvetlen változtatása itt az az eset, amikor a hintán ülő nem mozog, hanem a hinta kitérését megfelelő ütemű, a pálya érintőjének irányába mutató lökésekkel kívülről növeljük meg.)

A két esetben az a közös, hogy a rendszer egy paraméterének megfelelő ütemű változtatásával növelni tudjuk a rezgési energiát.

### Harmonikus rezgések összetevése és felbontása

Gyakran előfordul, hogy egy rezgésre képes rendszerben több, közelítőleg harmonikus rezgés egyszerre jelenik meg, és meg kell határoznunk a létrejött eredő rezgést, ezért a harmonikus rezgések összetevésének vizsgálata fontos feladat. A fordított feladat is nagy jelentőségű, amikor egy bonyolult rezgést kell harmonikus összetevőkre bontani.

#### Harmonikus rezgések összetevése

A rezgések összetevésének néhány jellegzetes és gyakorlatilag is fontos esete az azonos- és különböző frekvenciájú, azonos irányú, továbbá az egymásra merőleges harmonikus rezgések összetevése.

##### Egyirányú, azonos frekvenciájú harmonikus rezgések összetevése

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor egy rezgő rendszerben egyidejűleg két egyirányú harmonikus rezgés lép fel. A kérdés az, hogy milyen lesz az eredő rezgést megadó függvény.

A két rezgés amplitúdója és fázisa eltérő lehet, de az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a rezgések körfrekvenciája ( $\omega$ ) azonos. A két rezgés kitérésének időfüggését ekkor az alábbi összefüggésekkel adhatjuk meg:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Ha feltételezzük, hogy a két rezgés egymást nem befolyásolja (vagyis érvényes a szuperpozíció elve), akkor a rezgések eredője bármely pillanatban egyszerűen a két rezgés pillanatnyi értékeinek összege:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

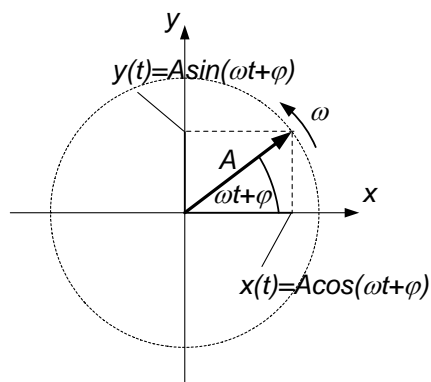
Ebből az alakból nehéz megállapítani az eredő rezgés jellegét, ezért célszerű úgy átalakítani, hogy csak egyetlen trigonometriai függvényt tartalmazzon. Az átalakítást két módszerrel végezhetjük el: trigonometriai összefüggések alapján vagy az ún. *forgó vektoros* módszerrel. Itt az utóbbi eljárást alkalmazzuk, mert egyszerűbb, szemléletesebb, és más problémák tárgyalásánál is hasznos.

A forgó vektoros módszer azon alapszik, hogy egy egyenletes körmozgást végző pontnak a körpálya síkjával párhuzamos vetülete harmonikus rezgést végez. Ezért, ha a rezgés  $A$  amplitúdójával azonos hosszúságú vektort az ábrán látható módon,  $\omega$  állandó szögsebességgel körbeforgatunk, akkor a vektor végpontjának bármelyik tengelyre vett vetülete  $\omega$  körfrekvenciájú harmonikus rezgést végez. Ha az időmérést abban a pillanatban kezdjük, amikor a vektor az  $x$ -tengellyel  $\varphi$  szöget zár be, akkor a  $t$  időpillanatban a vektor végpontjának a tengelyekre vett vetülete

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

A továbbiakban az  $x$ -tengelyre vett vetületet használjuk.

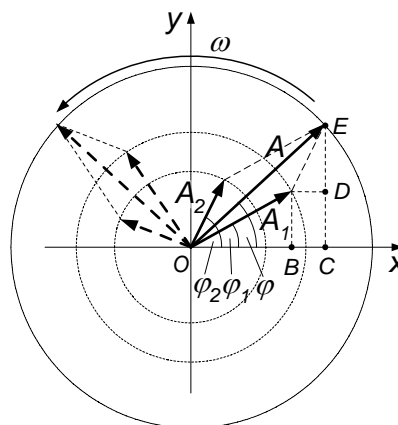


Ha a korábban említett

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

rezgéseket akarjuk összegezni, akkor a megfelelő fázisszöggel mindkét rezgés forgó vektorát felrajzoljuk. Az ábrán a két vektort a  $t=0$  pillanatban tüntettük fel. Az eredő rezgés forgó vektorát a két összetevő vektor vektori összege adja meg, hiszen az ábra alapján megállapítható, hogy minden pillanatban  $x = x_1 + x_2$ , ahol  $x_1 = OB$ ,  $x_2 = BC$  és  $x = OC$ .



Mivel az eredő vektor az összetevő vektorokkal együtt  $\omega$  szögsebességgel forog, végpontjának vetülete ugyanilyen körfrekvenciájú harmonikus rezgésnek felel meg. Ez azt jelenti, hogy az eredő rezgés harmonikus, és

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

alakban írható fel, ahol egyelőre nem ismerjük az  $A$  amplitúdót és a  $\varphi$  fázisállandót. Ezekre az ábra alapján az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

\*\*\*\*\*

Az ábra jelöléseivel az amplitúdóra az

$$\begin{aligned} A^2 &= (OC)^2 + (CE)^2 = (OB + BC)^2 + (CD + DE)^2 = \\ &= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2 = \\ &= A_1^2 \cos^2 \varphi_1 + A_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &+ A_1^2 \sin^2 \varphi_1 + A_2^2 \sin^2 \varphi_2 + 2A_1A_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

összefüggést kapjuk, amiből a fenti egyenlet gyökvonással kapható.

A fázisszög tangensére fennáll, hogy

$$\text{tg } \varphi = \frac{CE}{OC} = \frac{CD + DE}{OB + BC} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2},$$

ami azonos a fent felírt összefüggéssel.

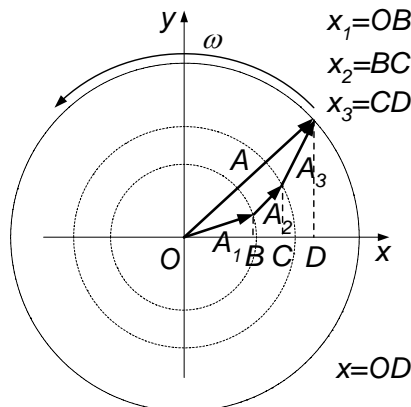
\*\*\*\*\*

Megjegyezzük, hogy a forgóvektoros módszer több egyirányú, azonos körfrekvenciájú rezgés összegzésére is alkalmas. Ilyenkor a vektorokat a paralelogramma módszer helyett a vektoroknak egymás után történő felrajzolásával célszerű összegezni, amint azt 3 vektor esetére a mellékelt ábra mutatja. A vetületekre most is fennáll minden pillanatban, hogy

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t).$$

Mivel az eredő vektor együtt forog az összetevőkkel, végpontja harmonikus rezgést végez a közös körfrekvenciával.

\*\*\*\*\*





**Azonos irányú, különböző frekvenciájú rezgések összetevése, lebegés**

Két azonos irányú, különböző  $\omega_1$  és  $\omega_2$  frekvenciájú rezgés összegzése jóval bonyolultabb, mint az azonos frekvenciájúaké.

Ez jól érzékelhető, ha az összegzésre a forgó vektoros eljárást akarjuk alkalmazni. Ilyenkor az összetevőket ábrázoló vektorok eltérő szögsebességgel forognak, ezért a rezgések közötti fáziskülönbség és az eredő rezgés amplitúdója is változik az időben (az ábrán  $\Delta\varphi \Rightarrow \Delta\varphi'$  illetve  $A \Rightarrow A'$ ).

Ha az egyszerűség kedvéért azt az esetet vizsgáljuk, amikor a két rezgés amplitúdója azonos ( $A_1 = A_2 = A$ ), akkor a forgó vektoros módszer is egyszerűbb, de most ehelyett egy másik módszert alkalmazunk, ami a szögfüggvények összegére vonatkozó trigonometriai összefüggésen alapul.

Ha a két rezgés között nincs fáziskülönbség, akkor a rezgéseket leíró függvények

$$x_1(t) = A \cos \omega_1 t$$

$$x_2(t) = A \cos \omega_2 t,$$

két rezgés eredője pedig

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t.$$

Felhasználva a

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = 2 \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$$

trigonometriai összefüggést, az eredőre azt kapjuk, hogy

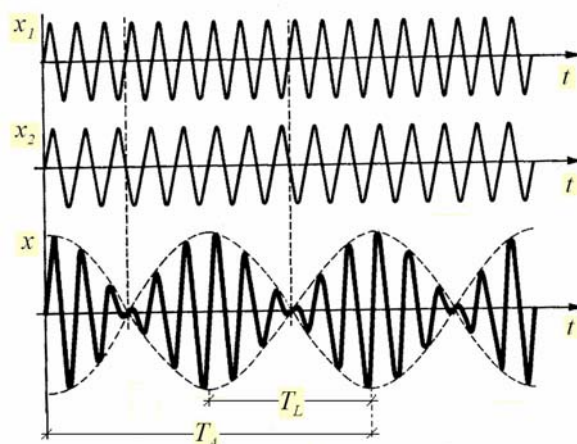
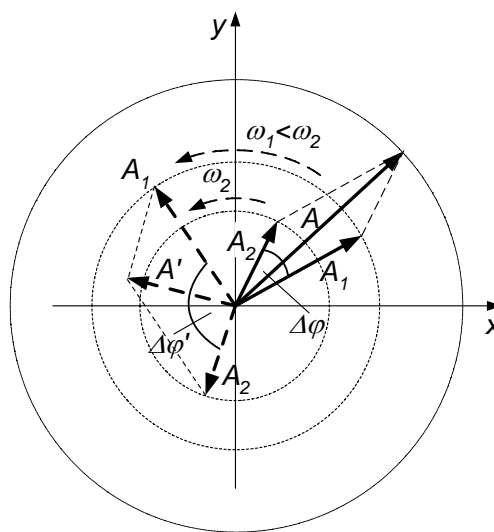
$$x(t) = 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

A fenti kifejezés úgy is felfogható, mint egy  $\omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  frekvenciájú harmonikus

rezgés, és egy  $\omega_A = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$  frekvenciával periodikusan változó  $A(t) = 2A \cos \omega_A t$

amplitúdó szorzata:  $x(t) = 2A \cos \omega_A t \cos \omega' t$ .

Ez különösen jól érzékelhető abban a gyakorlatilag is fontos esetben, amikor a két rezgés frekvenciája csak kissé különbözik egymástól. Ilyenkor ugyanis  $\omega_A \ll \omega'$ , így az amplitúdó lassan változik, és változása jól nyomon követhető (ábra). Az ábrán feltüntettük a két összetevő rezgést ( $x_1$  és  $x_2$ ) és az összegződésük eredményeként előálló eredő rezgést ( $x$ ) is,



amelynek amplitúdója jól láthatóan ingadozik.

Az ilyen periodikusan változó amplitúdójú („lüktető”) rezgést *lebegésnek*-, a maximális kitérés ismétlődési frekvenciáját ( $f_L$ ) pedig a *lebegés frekvenciájának* nevezik.

Ha a két frekvencia közel azonos, akkor érdemes bevezetni  $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$  és az  $\omega_1 = \omega$  jelölést, amivel  $\omega_2 = \omega + \Delta\omega \approx \omega$  hiszen a feltételezés szerint  $\Delta\omega \ll \omega$ .

Ezzel  $\omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \frac{2\omega}{2} = \omega$ ,  $\omega_A = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\Delta\omega}{2}$ , és így az eredő rezgés időfüggését megadó összefüggés az alábbi módon alakul

$$x(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \omega t.$$

A lebegés frekvenciájának kiszámításához használjuk fel az ábra jelöléseit. Látható, hogy a lebegés  $T_L$  periódusideje éppen fele a koszinusz függvénnyel megadott  $A(t)$  amplitúdó  $T_A$  periódusidejének:

$$T_L = \frac{T_A}{2}.$$

Ebből következik, hogy a lebegés körfrekvenciája

$$\omega_L = \frac{2\pi}{T_L} = \frac{4\pi}{T_A} = \frac{4\pi}{2\pi} \omega_A = 2\omega_A.$$

Mivel az amplitúdófüggvény körfrekvenciája  $\omega_A = \frac{\Delta\omega}{2}$ , a lebegés körfrekvenciája

$$\omega_L = \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega.$$

Az  $\omega = 2\pi f$  összefüggést felhasználva, ebből azt kapjuk, hogy

$$f_L = f_2 - f_1 = \Delta f,$$

vagyis a lebegés frekvenciája a két összetevő rezgés frekvenciájának különbségével egyenlő.

Ennek alapján a lebegést fel lehet használni frekvenciák eltérésének megállapítására illetve frekvenciamérésre. Egy hegedűhúr hangolásánál például segíthet, ha megfigyeljük a húr hangjának és a referencia hangnak a lebegését, és a hangolást addig folytatjuk, amíg a lebegés megszűnik. Ez jelzi, hogy a két hang magassága (frekvenciája) megegyezik.

A lebegést több egyszerű kísérlettel bemutathatjuk, amelyek közül itt kettőt ismertetünk.

#### **KÍSÉRLETEK:**

- Hatásosan bemutatható a lebegés két kissé különböző frekvenciájú hangvilla egyidejű megszólaltatásával. Ekkor valóban halljuk a hang intenzitásának periodikus változását, lüktetését.  
A kissé eltérő frekvenciát legegyszerűbben úgy állíthatjuk elő, hogy két azonos hangvilla egyikét – egy ráerősített kis súllyal – „elhangoljuk”.
- A lebegés elektromos rezgések esetén könnyen bemutatható katódsugár oszcilloszkóp segítségével, ahol külön látjuk az összetevő rezgések- és az eredő rezgés (lebegés) képét is, ahogy azt a fenti ábrán már bemutattuk.

#### **Merőleges rezgések összetevése**

Ha egy rendszerben egyidejűleg két egymásra merőleges irányú rezgés van jelen, akkor ezeket az eredő rezgés két merőleges komponenseként foghatjuk fel, az eredő

rezgést tehát az így meghatározott vektor végpontjának mozgása adja meg. Vizsgáljunk először két azonos frekvenciájú, különböző amplitúdójú rezgést

$$x(t) = A \cos \omega t$$

$$y(t) = B \cos(\omega t + \delta),$$

amelyek között  $\delta$  fáziseltolódás van.

Az eredő rezgés pályaequationét az idő kiküszöbölésével kapjuk meg. Fejezzük ki az első egyenletből  $\cos \omega t$ -t, és helyettesítsük be a második egyenletbe, amelyet az összeg koszinuszának kifejtésével és a  $\sin \omega t = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t}$  összefüggés felhasználásával átalakítunk:

$$\cos \omega t = \frac{x}{A},$$

$$y = B \cos \omega t \cos \delta - B \sin \omega t \sin \delta = B \cos \omega t \cos \delta - B \sin \delta \sqrt{1 - \cos^2 \omega t},$$

$$y = B \frac{x}{A} \cos \delta - B \sin \delta \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Az utolsó egyenlet rendezésével a pálya egyenlete az alábbi alakra hozható:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Ez egy ellipszis egyenlete, vagyis az eredő rezgés általában az  $xy$ -síkban elhelyezkedő ellipszis mentén zajlik. Az ellipszis alakja és helyzete függ a rezgések  $A$ ,  $B$  amplitúdóitól és a köztük lévő  $\delta$  fáziskülönbségtől.

A legegyszerűbb eset az, amikor a két rezgés fázisa azonos vagy ellentétes ( $\delta = n\pi$ , ahol  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Ekkor az egyenlet az

$$\left( \frac{x}{A} \pm \frac{y}{B} \right)^2 = 0$$

alakot ölti, ami azt jelenti, hogy az eredő rezgés az

$$y = \pm \frac{B}{A} x$$

egyenesek mentén  $\omega$  körfrekvenciával zajló harmonikus rezgés (a „+” jel az azonos-, a „-” jel az ellenkező fázisú rezgésekre vonatkozik).

Egy másik egyszerű eset, amikor a fáziskülönbség  $\pi/2$  páratlan számú többszöröse:

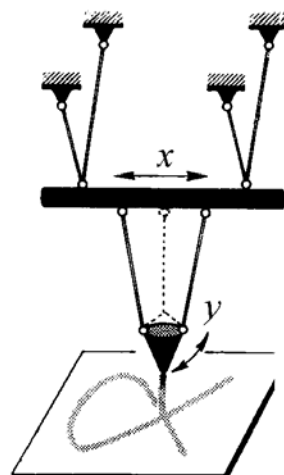
$\delta = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$ . Ekkor az

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

összefüggést kapjuk, vagyis ekkor az ellipszis tengelyei a koordinátatengelyeken vannak. Azonos amplitúdók esetén a pálya ilyenkor kör alakú.

A merőleges rezgések összetevése kísérletileg is bemutatható mind mechanikai- mind pedig elektromágneses rezgések esetén.

A mechanikai rezgés vizsgálatára alkalmas eszköz többféleképpen megvalósítható. Ezek közül egyik lehetséges megoldás a következő.



**KÍSÉRLET:**

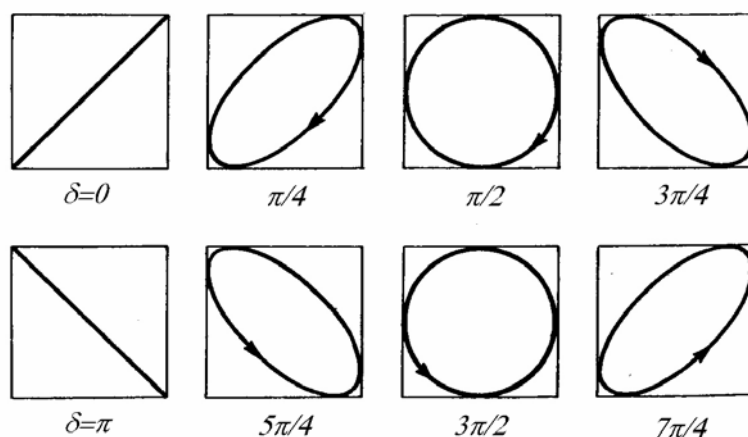
- Az ábrán egy olyan berendezést látunk, amellyel megvalósítható, hogy az eszköz alsó részén látható tölcser egyidejűleg két egymásra merőleges irányban ( $x$  és  $y$ ) rezgjen. A tölcser egyúttal írószerkezetként is szolgál, amely a belőle kifolyó tinta vagy homok segítségével egy papírlapra felrajzolja az eredő rezgések megfelelő mozgást végző tölcser pályáját.

Egyszerűbben megvalósítható az összegzés elektromos rezgések esetén.

**KÍSÉRLET:**

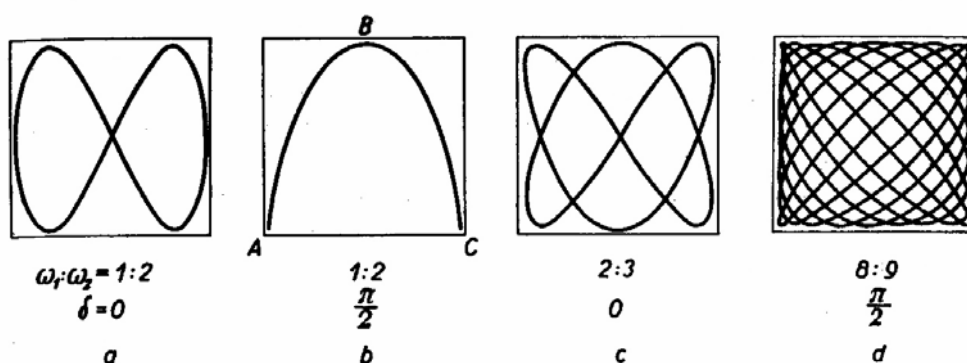
- Elektromos rezgések esetén az összegzése legegyszerűbben katódsugár oszcilloszkóppal végezhető el. Merőleges rezgések úgy állíthatók elő, hogy az egyik váltakozó feszültséget (rezgést) a függőleges- a másikat pedig a vízszintes eltérítő lemezparra kapcsoljuk. Ennek a módszernek az az előnye, hogy itt az összegzés paraméterei egyszerűen változtathatók, és így a fent tárgyalt különböző esetek könnyen megvalósíthatók.

A fenti kísérletek segítségével (de elméleti úton is) megvizsgálhatók az összegzés különböző esetei. Két merőleges rezgés összegzésénél kapott pályagörbét mutatunk be az alábbi ábrán azonos frekvenciájú, azonos amplitúdójú rezgéseknél.



További számítások és kísérleti vizsgálatok azt mutatják, hogy ha a merőleges rezgések körfrekvenciája különböző ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ), akkor a pálya többnyire igen bonyolult alakú, és általában nem zárt görbe.

Ha a frekvenciák aránya egész számok arányával adható meg, akkor a pálya zárt, de általában szintén bonyolult görbe. A görbe alakja ilyenkor a frekvenciák arányától függ. Ezeket a jellegzetes görbéket gyakran *Lissajous-görbéknek* nevezik. Az alábbi ábrán néhány ilyen – az eredő rezgés pályáját megadó – Lissajous-görbe látható különböző frekvencia-arányok ( $\omega_1 : \omega_2$ ) és fáziskülönbségek ( $\delta$ ) esetén.



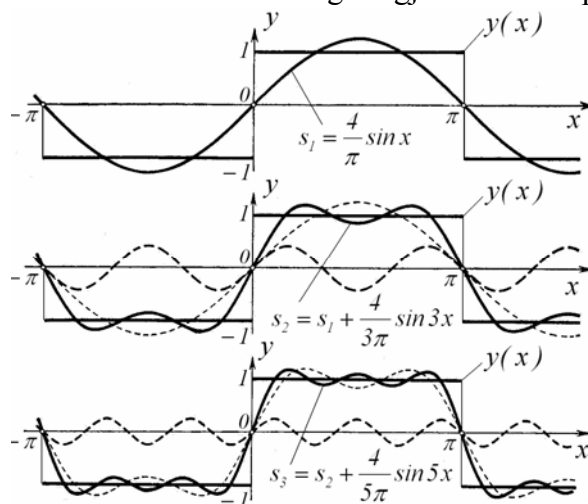
Az ilyen görbék felvétele legegyszerűbb katódsugár oszcilloszkóppal, de a fent vázolt mechanikai rendszerrel is lehetséges.

Látható, hogy a zárt pályagörbe érinti a befoglaló négyszög oldalait, és az egyik függőleges és az egyik vízszintes oldalon az érintési pontok számának aránya megegyezik a körfrekvenciák (frekvenciák)  $\omega_1 : \omega_2$  arányával. (A *b* ábrán az egy ciklusnak megfelelő útvonal: *ABCBA*, vagyis a „zárt hurok” a vízszintes oldalt kétszer érinti.) Ezt az összefüggést a gyakorlatban (elsősorban elektromágneses rezgések esetén) frekvenciamérésre lehet használni. Az ismeretlen frekvenciájú rezgést az egyik lemezpárra kapcsoljuk, és összeadjuk az erre merőleges másik lemezpárra kapcsolt, ismert frekvenciájú rezgéssel. A kapott Lissajous-görbe segítségével az ismeretlen frekvencia kiszámítható.

### Rezgések felbontása harmonikus rezgések összegére

Említettük, hogy egy nem harmonikus, periodikus rezgés felbontható harmonikus rezgések összegére. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy különböző körfrekvenciájú és amplitúdójú harmonikus rezgéseket (vagyis szinusz és koszinusz függvényeket) adunk össze, aminek eredményeképpen megkapjuk a nem harmonikus rezgést leíró függvényt. A függvény pontos előállításához egy végtelen sort – ún. *Fourier-sort* – kell felírunk, ha azonban közelítő leírással is megelégszünk, akkor véges számú tagból álló összeget is használhatunk. Ez az eljárás fizikailag azt jelenti, hogy egy nem harmonikus rezgést harmonikus rezgések összegeként állíthatunk elő. Az összeg tagjaiban szereplő harmonikus rezgések *amplitúdóit és körfrekvenciáit* az előállítandó periodikus függvénynek „megfelelően” kell megválasztani.

Egy függvénynek Fourier-sorral történő előállítására jól kidolgozott matematikai módszerek állnak rendelkezésre. Ennek részleteivel itt nem foglalkozunk, de szemléltetés céljából bemutatunk egy példát arra, hogy egy periodikus – de nem harmonikus – függvényt hogyan lehet egyre pontosabban előállítani, amint egyre több, megfelelően választott harmonikus függvényt adunk össze. A példa egy ún. „négyzet-görbe”, amelynek egy



periódusát láthatjuk az ábrán (jelölése:  $y(x)$ ). Az ábra felső részén vastag vonallal feltüntettük az első közelítésként használt  $s_1$  részösszeget, ami egyetlen szinusz függvény. Ez elég durván közelíti a négyzögfüggvényt. Ha ehhez hozzáadunk egy megfelelően választott újabb szinusz-tagot, akkor az így kapott  $s_2$  részösszeg már valamivel jobb közelítést ad (ábra középső része, vastag vonal). A harmadik tag hozzáadása után kapott  $s_3$  részösszeg láthatóan még jobban közelíti az  $y(x)$  függvényt (ábra alsó része, vastag vonal). Az eljárást tovább folytatva, az összeg egyre jobb közelítést ad. A vizsgált példa esetében a teljes sor az alábbi módon írható fel:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \sin(2k+1)x,$$

ahol  $a_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$  és  $k$  egész szám.

Ha az előállítandó függvény nem periodikus (rezgések esetén például egy egyszeri kitérés), akkor a fenti eljárással nem tudjuk előállítani, de harmonikus függvények integrálja segítségével ilyenkor is megoldható a feladat. Ez lényegét tekintve csak annyiban különbözik a diszkrét tagokból álló összegzéstől, hogy ilyenkor a harmonikus függvény argumentumában szereplő  $2k+1$  szám – az előbbi példában  $1, 3, 5, \dots$  – nem diszkrét értékeket vesz fel, hanem folytonosan változik, és az összegzés helyett a folytonos  $k$  változó szerint integrálunk. (Rezgések esetén ez azt jelenti, hogy nem diszkrét körfrekvenciájú harmonikus rezgéseket adunk össze, hanem folytonosan változó körfrekvenciára „összegzünk”, azaz integrálunk).

## Csatolt rezgések

Eddig olyan rezgő rendszerekkel foglalkoztunk, amelyekben a rezgést egyetlen mennyiséggel lehet jellemezni. A mechanikai rezgések esetén ez azt jelenti, hogy egydimenziós rezgéseket vizsgáltunk, ahol a rezgő tömeg egyetlen koordinátája változott a rezgés során, vagyis a rezgő tömegnek egyetlen szabadsági foka volt.

Bonyolultabb a rezgés leírása, ha a rezgő tömegnek több szabadsági foka van. Ilyen esettel is találkoztunk, amikor két egymásra merőleges rezgés összetevését vizsgáltuk. Ebben az esetben a tömeg egyidejűleg két egymásra merőleges egyenes mentén rezeghet, más szóval a rendszernek két szabadsági foka van. Ugyanilyen két szabadsági fokú rendszert kapunk, ha egy inga lengésénél megengedjük, hogy az inga ne csak egy síkban, hanem két egymásra merőleges síkban lengjen. Fontos körülmény, hogy a két egymásra merőleges rezgés mindkét említett esetben egymástól független, az egyik szabadsági foknak megfelelő rezgés a másik szabadsági foknak megfelelő rezgést nem befolyásolja, így például egymásnak nem tudnak energiát átadni.

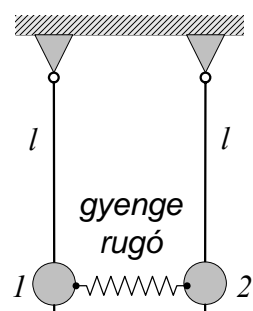
Ennél jóval bonyolultabbak azok a több szabadsági fokú rendszerek, amelyeknél az egyes szabadsági fokoknak megfelelő rezgések egymást befolyásolják, egymásnak energiát tudnak átadni. Az ilyen rezgések között tehát valamilyen *csatolás* működik, ezért ezeket *csatolt rezgéseknek* nevezik.

### Kettős inga mozgása

A csatolt rezgések egy szemléletes és viszonylag egyszerű esetét valósítja meg az ún. *kettős inga*, amelynek vázlatát az ábrán látható.

#### KÍSÉRLET:

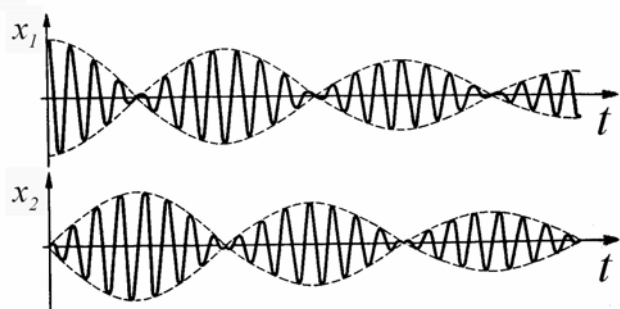
Két azonos lengésidejű (tehát azonos  $l$  hosszúságú) ingát ( $1$  és  $2$ ) nem túl erős rugóval összekötünk egymással, majd pl. az  $1$  ingát a két felfüggesztési ponton átmenő függőleges síkban balra kitérítjük, és elengedjük. Ekkor az  $1$  inga lengésbe jön, de a rezgés amplitúdója fokozatosan csökken, miközben a  $2$  inga ugyanebben a síkban egyre nagyobb kitéréssel lengeni kezd. Amikor az  $1$  inga megáll, a  $2$  inga maximális amplitúdóval leng. Ezután a két inga szerepet cserél, most a  $2$  inga amplitúdója csökken, és az  $1$  inga amplitúdója nő. Ez a folyamat addig folytatódik, amíg a csillapodás miatt a teljes rezgési energia elfogy.



A kísérletben szereplő rendszer két ingából áll, amelyek egy megadott síkban lengenek, ezért mindegyik ingának egy szabadsági foka van, így az egész rendszernek összesen két szabadsági foka van. A kísérletből világosan látszik, hogy a két szabadsági foknak megfelelő lengések, vagyis a két inga lengései egymást befolyásolják, a két inga között periodikus energiacsere zajlik. Az ingák között a csatolást a rugó hozza létre.

Ha az ingák kitérésének időfüggését felrajzoljuk, akkor az ábrán látható görbéket kapjuk.

A két inga amplitúdójának periodikus



változását befolyásolja a két ingát összekötő rugó erőssége, amit a  $D$  rugóállandóval jellemezhetünk. Erősebb rugó esetén is hasonló rezgést tapasztalunk, de a két inga között gyorsabban zajlik az energiaátadás, vagyis az amplitúdóváltozás frekvenciája nagyobb lesz. Gyenge rugó, vagyis kis rugóállandó esetén azt mondjuk, hogy a két inga közötti *csatolás laza*, nagy rugóállandónál pedig *szoros csatolásról* beszélünk.

Az ingák kitérését megadó görbék szemmel láthatóan ugyanolyanok, mint a lebegés korábban megismert kitérés-idő görbéje, vagyis a csatolt ingák mindegyike lebegést végez. Laza csatolás esetén a lebegés frekvenciája kicsi, ami azt jelenti, hogy itt két egymáshoz közeli frekvenciájú rezgés összegződéséről van szó. A kísérleti görbékből meghatározható, hogy milyen két frekvenciáról van szó, sőt a vizsgálatok azt is megmutatják, hogy ez a két frekvencia a rendszer meghatározott speciális rezgéseit tartalmazza, amelyeket a rendszer *normálrezgéseinek* neveznek.

A kettős inga két normálrezgését a mellékelt ábra mutatja. Az első rezgés úgy jön létre, hogy mindkét ingát ugyanabban az irányban, ugyanolyan mértékben kitérítjük (az ábrán jobbra), és elengedjük. Ekkor a két inga közötti rugó nem feszül meg, a két inga között tehát nincs csatolás, és mindkettő az ingák

közös  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  saját körfrekvenciájával

rezeg.

A második normálrezgés úgy valósítható meg, hogy a két ingát egymással ellentétes irányban, ugyanolyan mértékben térítjük ki, és elengedjük. Ekkor az ingák közötti csatolás működik, és a rugó jelenléte miatt az ingák  $\omega_1$ -nél nagyobb frekvenciával rezegnek. Mivel a rugó középső pontja a rezgés során helyben marad, ez a frekvencia egy rögzített végű rugóhoz kapcsolt inga frekvenciájával egyenlő. Ennek alapján a rezgés körfrekvenciája

$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}}$ , ahol  $m$  a rezgő tömegek nagysága.

A lebegés frekvenciája a két normálrezgés körfrekvenciájának különbségével egyenlő:

$$\Delta\omega_L = \omega_2 - \omega_1.$$

### A kettős inga mozgásegyenletei

A kettős inga mozgását leíró egyenleteket kis kitérések esetén viszonylag egyszerűen megkaphatjuk az ingák tömegeire felírt mozgásegyenletek segítségével. Ekkor feltehetjük, hogy a tömegek csak az  $x$ -tengely mentén mozognak, és az ingák rúdjának  $\vartheta$  szögelfordulása arányos az  $x$ -irányú kitéréssel, hiszen ekkor  $\vartheta = \frac{i}{l} \approx \frac{x}{l}$  (itt  $i$  a  $\vartheta$  szöghöz tartozó körív hossza.)

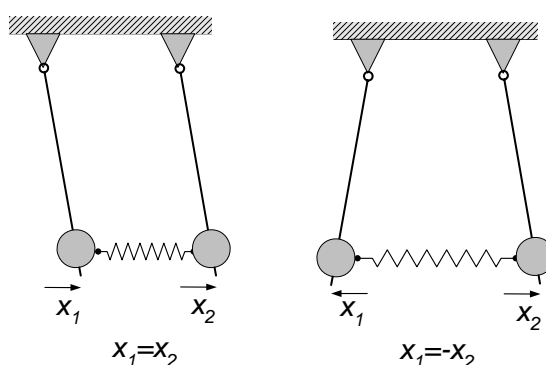
A fenti egyszerűsítés miatt a szabadon lenő inga eredeti

$$m \frac{d^2 \vartheta(t)}{dt^2} = -m \frac{g}{l} \vartheta(t)$$

mozgásegyenlete helyett a

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -m \frac{g}{l} x(t)$$

egyenletet használhatjuk.





Ezt az egyenletet ki kell egészíteni a csatoló rugó által az egyes tömegekre kifejtett erővel. Ez a két inga esetén a következőképpen határozható meg. Ha az 1 test kitérése  $x_1$ , a 2 test kitérése pedig  $x_2$ , akkor az ábrán használt koordinátatengely-irányítás mellett a rugó megnyúlása  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Ennek megfelelően az 1 tömegrre ható rugóerő

$$F_1 = D(x_2 - x_1)$$

a 2 tömegrre ható rugóerő pedig

$$F_2 = -D(x_2 - x_1).$$

Ezeknek az erőknek a beírása, és  $m$ -mel való osztás után a két tömegrre érvényes mozgásegyenlet:

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l} x_1(t) + \frac{D}{m} (x_2(t) - x_1(t))$$

$$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l} x_2(t) - \frac{D}{m} (x_2(t) - x_1(t)).$$

Ez két egyenlet szolgál a meghatározandó két kitérés-függvény meghatározására. A megoldást jelentősen megnehezíti, hogy mindkét egyenletben szerepel mindkét függvény. Vagyis nem egyszerű differenciálegyenletekről, hanem differenciálegyenlet rendszerről van szó. Szerencsére az egyenletrendszer egy átalakítással mégis viszonylag egyszerűen megoldható.

Először írjuk fel a két egyenlet összegét és különbségét:

$$\frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} = -\frac{g}{l} (x_1 + x_2)$$

$$\frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2} = -\frac{g}{l} (x_1 - x_2) - \frac{2D}{m} (x_1 - x_2)$$

(itt az egyszerűség kedvéért az időfüggést nem jelöltük).

Ha bevezetjük az  $y_1 = x_1 + x_2$  és az  $y_2 = x_1 - x_2$  jelölést, és az egyenleteket átrendezzük, akkor azonnal látszik, hogy erre a két függvényre két harmonikus rezgést leíró differenciálegyenletet kapunk:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{g}{l} y_1 = 0$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + \left( \frac{g}{l} + \frac{2D}{m} \right) y_2 = 0.$$

Tudjuk, hogy ezeknek az egyenleteknek a megoldása

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{illetve} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}}$$

körfrekvenciájú harmonikus rezgés, amit pl. koszinusz függvénnyel írhatunk le:

$$y_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

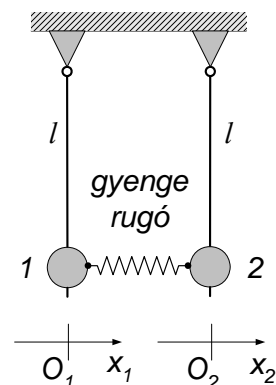
$$y_2(t) = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Az  $y_1$  és  $y_2$  függvények definícióját felhasználva, az alábbi összefüggéseket kapjuk

$$x_1 + x_2 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_1 - x_2 = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

A két egyenlet összeadásával illetve kivonásával az egyes ingák lengését leíró függvényeket is megkaphatjuk



$$x_1(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Látható, hogy – a várakozásnak megfelelően – mindkét inga lengése lebegés, ami a fenti  $\omega_1$  és  $\omega_2$  körfrekvenciájú normálrezgések összeadódásának eredménye.

Ha a rendszer szabadsági fokainak számát növeljük, akkor a tapasztalat szerint nő a normál rezgések száma is. Kimutatható, hogy a normálrezgések száma megegyezik a szabadsági fokok számával. Ha például a kettős ingához még egy ingát csatolunk, akkor a szabadsági fokok száma, és a normálrezgések száma is 3 lesz. A szabadsági fokok további növelésével az igen nagy szabadsági fokú, kiterjedt testek rezgései is modellezhetők.

A csatolt mechanikai rezgésekkel kapcsolatban még két megjegyzést teszünk.

- Egy ilyen rendszerben az egyik rezgő tömeg rezgése a csatolás révén tulajdonképpen átterjed a többire, ami a később tárgyalandó hullámterjedés alapfolyamata.
- Rezgő rendszerek kölcsönhatásával korábban, a kényszerrezgés tárgyalásánál már foglalkoztunk. A kényszerrezgés abban különbözik a csatolt rezgéstől, hogy ott a rezgő rendszernek a kényszerrezgést okozó rezgésre való visszahatása elhanyagolható.

## Hullámok

A különböző fizikai mennyiségek változása – pl. egy rezgés – igen gyakran a létrehozásának helyétől távolabb is kivált hatásokat: a létrehozott *változás* – vagy más néven *zavar* – a térben elterjed.

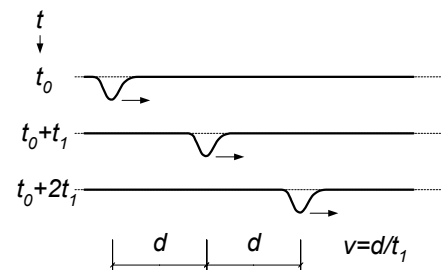
A különböző zavarok térbeli terjedését *hullámnak* (néha *hullámterjedésnek*)-, azt a helyet pedig, ahol a zavar létrejött, *hullámforrásnak* nevezik.

A hullám igen gyakori jelenség, és szoros kapcsolatban áll a rezgésekkel, hiszen a hullámban lényegében valamilyen rezgés terjed tovább a térben.

A zavarterjedésnek számtalan példája van, ezek közül egyesek szemmel látható módon mennek végbe, és egyszerű kísérletekkel bemutatathatók.

### KÍSÉRLET:

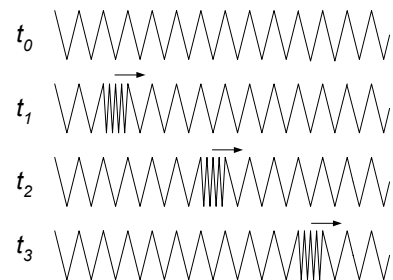
Ha egy kifeszített rugalmas kötélen ráütünk egy rúddal, tehát egy egyszeri kitérést („völgyet”) hozunk létre (ábra), akkor ez a kitérés végigszalad a kötélen, vagyis a kötélnék a ráütéstől távoli pontjai is megismétlik a létrehozott kitérést<sup>1</sup>. Megfigyelhetjük, hogy a zavar egyenletes mozgással halad a kötélen.



Ettől kissé eltérő jellegű zavarterjedést láthatunk egy csavarrugóban létrehozott deformációnál.

### KÍSÉRLET:

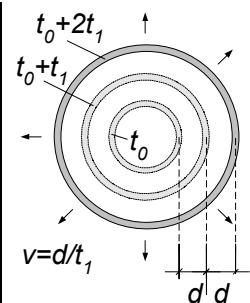
Nagyobb átmérőjű, gyenge csavarrugó egyik végét egy hirtelen mozdulattal nyomjuk össze a rugó tengelyével párhuzamosan. Ez a deformáció a rugó meneteinek sűrűsödésével jár, és ez a sűrűsödés jól láthatóan végigszalad a rugón. A zavar itt is egyenletesen terjed.



Az előbbi esetekben a zavar egy dimenzióban (kötél vagy csavarrugó mentén) terjedt. Kétdimenziós zavarterjedés legegyszerűbben egy vízfelületen mutatható be, ami rugalmas hártaként viselkedik.

### KÍSÉRLET:

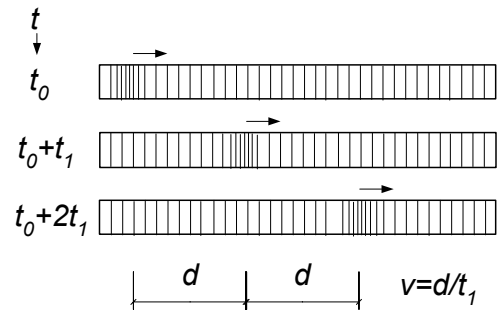
Vízfelület egy pontjában létrehozott kitérés a felületen egy táguló kör formájában minden irányban terjed (ábra), és a távolabbi pontok megismétlik a létrehozott kitérést. Ez világosan látszik, ha a víz felületén elhelyezünk egy parafa dugót: a dugó a zavar megérkezésekor megemelkedik és lesüllyed, de a zavar áthaladása után helyben marad. Ez azt is mutatja, hogy a kifelé szaladó körben – a látszat ellenére – nem a víz áramlik, hanem a létrehozott állapotváltozás (zavar) terjed.



<sup>1</sup> A ráütés helyén a völgy fokozatosan megszűnik, és elvileg ellenkező irányú kitérés is létrejön. Ez azonban a legtöbb esetben a nagy csillapítás miatt alig észlelhető. A megfigyelést zavarhatja, hogy ha a zavar eléri a kötélnél végét, akkor elindul visszafelé (visszaverődik). A leírt egyszerű zavarterjedés csak eléggé hosszú kötélen figyelhető meg tisztán. A visszaverődés hatásaival később foglalkozunk.

A zavarterjedés más esetei nem ennyire szemléletesek, de a zavarterjedés ténye legtöbbször ilyenkor is könnyen kimutatható.

A csavarrugón bemutatott esethez hasonló – de szemmel nem látható – zavarterjedés jön létre, ha egy rugalmas rúd egyik végét a rúd tengelyével párhuzamosan megütjük. Ekkor ott a rúd összenyomódik (az ábrán ezt sűrűbb vonalkézással érzékeltettük), és ez az összenyomódás szalad végig a rúdon. Ugyanez történik egy dugattyúval lezárt edényben lévő gázoszlopban, ha a dugattyút hirtelen elmozdítva, a gázt a dugattyúnál összenyomjuk. A zavar megérkezése a rúd vagy gázoszlop másik végére megfelelő elmozdulás- vagy nyomásérzékelővel észlelhető.



A háromdimenziós hullámterjedés sem szemléltethető egyszerűen, de ezzel kapcsolatban számos hétköznapi tapasztalatunk van. Egy rezgő tárgy által létrehozott hang hullámként minden irányban terjed: egy adott helyen megszólaló hangot más helyeken is hallunk. Egy fényfelvillanás elektromágneses hullámként szintén minden irányban terjed, és a felvillanás helyétől távoli pontokban is észlelhető.

A hullámterjedés mechanizmusa függ a zavar jellegétől. Egy rugalmas közeg mechanikai deformációja az anyag részei közti rugalmas kapcsolatok miatt terjed, ezeket a rugalmas közegekben létrehozott zavarokat rugalmas hullámoknak nevezik. Ilyenek pl. a kísérletekben látott kötéllhullámok vízhullámok vagy a hang. Az elektromos vagy mágneses erőtér változása miatt létrejött elektromágneses zavarok terjedése a változó mágneses- és elektromos tér egymást létrehozó hatásán alapul. Az így létrejött elektromágneses hullámok közeg nélkül is terjedhetnek. Ilyenek pl. a rádióhullámok, a fény, a röntgen- és a gamma sugárzás.

Most a *rugalmas hullámokkal* foglalkozunk. Tárgyalásunk során megismerkedünk a hullámterjedés leírására szolgáló alapvető mennyiségekkel és törvényekkel, majd foglalkozunk a rugalmas hullámokra vonatkozó speciális jelenségekkel.

Annak ellenére, hogy most kifejezetten a rugalmas hullámokról lesz szó, az itt tárgyalt anyag jól használható más hullámok tárgyalásánál is, hiszen a zavarterjedésnek vannak általános jellegzetességei, amelyeknek leírására a különböző hullámok esetén ugyanazokat a fogalmakat és módszereket alkalmazhatjuk.

## **Hullámtípusok és hullámfüggvények**

A terjedő zavar adott helyen valamilyen mennyiség időbeli változását jelenti. A kötélen esetében pl. egy *adott pontban* a zavar megérkezése után a kitérés *időben változik*. Másrészt *adott időpillanatban* a mennyiség pillanatnyi értéke *helyről-helyre más*. A kötélen haladó pulzus példájánál maradva, a kötélnél egy kiszemelt helyét megfigyelve, azt látjuk, hogy egy darabig nincs kitérés, azután a vizsgált pont kitér, majd a kitérés megszűnik. A kötéltre egy adott időpillanatban ránézve pedig azt látjuk, hogy a kötél nagy része deformálatlan, de azon a helyen, ahová a zavar éppen ebben a pillanatban megérkezett, egy kitérést látunk.

A zavarterjedés tehát csak akkor írható le, ha a vizsgált mennyiség időbeli változását és térbeli eloszlását is ismerjük. Ehhez egy *helytől és időtől függő hullámfüggvény* szükséges.

Ha a zavar a  $\psi$ -vel jelölt mennyiség változásának tovaterjedésével jár, akkor a zavarterjedés leírására használt hullámfüggvény általános matematikai alakja  $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$  ( $\mathbf{r}$  annak a pontnak a helyvektora, ahol a zavart vizsgáljuk,  $t$  az idő). A zavar lehet vektor-jellegű, amelynek iránya van (pl. elmozdulás), ilyenkor  $\psi$  a vektor nagyságát, vagy egyik komponensét jelöli, de lehet skaláris is (pl. nyomásváltozás).

### **A hullámok típusai**

A hullámok változatos formái közötti eligazodás kedvéért célszerű a hullámokat csoportosítani. Ezt többféle szempont szerint tehetjük meg, amelyek közül a legfontosabbak a következők.

A hullám lehet

*a terjedés térbeli viszonyai szerint:*

- *egydimenziós* (pl. rugalmas kitérés kötélen)
- *kétdimenziós* (pl. zavarterjedés vízfelületen)
- *háromdimenziós* (ez a leggyakoribb, pl. hang vagy fény terjedése kiterjedt közegben).

*a terjedés és a zavar irányának viszonya szerint:*

- *transzverzális hullám* (a zavart jellemző vektor iránya merőleges a terjedés irányára, pl. egy rugalmas kötél mentén, a kötéltre merőleges kitérés terjedése)
- *longitudinális hullám* (a zavart jellemző vektor iránya párhuzamos a terjedés irányával, pl. egy rugó hosszirányú összenyomásával keltett zavar terjedése a rugó mentén).

*a zavar azonos értékeinek megfelelő (azonos fázisban lévő) pontok elhelyezkedése szerint:*

- síkban terjedő hullámoknál az azonos fázisú helyek egy vonalon vannak, és a hullámokat a vonal alakja szerint is lehet csoportosítani: pl. *egyenes hullám*, *körhullám* (utóbbira példa egy vízfelületen egy pontban keltett hullámok terjedése),
- háromdimenziós hullámoknál az azonos fázisú helyek egy felületen helyezkednek el, ezeket a felületeket gyakran *hullámfelületeknek* nevezik, és a hullámfelületek alakja szerint beszélünk *síkhullámról*, *hengerhullámról*, *gömbhullámról*,
- a vonal- és síkhullám terjedése – az egydimenziós hullámokhoz hasonlóan – egyetlen (az azonos fázisú vonalakra, illetve síkokra merőleges) koordinátával leírható, bonyolultabb hullámok (pl. kör-, henger- vagy gömbhullámok) a hullámforrástól távol közelítőleg egyenes- illetve síkhullámnak tekinthetők,

- a hullám terjedése során a zavar fokozatosan újabb helyekre jut el, így az azonos fázisú felületeknek (vonalaknak) van egy speciális fajtája: ennek egyik oldalán már megjelent a zavar, a másik oldalán még nem. A hullámot tartalmazó térrészt, a *hullámteret* határoló, azonos fázisú felületet (vonalat) *hullámfrontnak* nevezik.

a terjedő zavar időfüggése szerint:

- ha a zavar időfüggését harmonikus függvény adja meg, akkor a létrejött hullámot *harmonikus hullámnak* nevezik,
- egyéb esetekben a hullám *nem harmonikus* (a nem harmonikus hullámok harmonikus hullámok összegzéseként – idegen szóval szuperpozíciójaként – foghatók fel).

### Egydimenziós hullámterjedés, a síkhullám hullámfüggvénye

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljunk először egy olyan zavart, amely egy irányban (pl. az  $x$  tengely mentén) terjed. Egy ilyen hullám a gyakorlatban pl. úgy valósítható meg, hogy egy kifeszített, rugalmas kötélen létrehozunk egy kitérést, ami a kötélen terjed tovább.

Ha az  $x=0$  helyen (például a zavar forrásánál)

a zavar időbeli változása

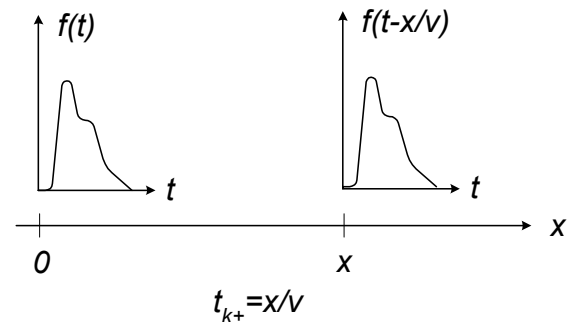
$$\psi(0,t) = f(t),$$

és a zavar adott  $c$  sebességgel terjed a térben, akkor a zavar egy pozitív  $x$  helyre

$$t_{k+} = \frac{x}{v}$$

egy negatív  $x$  helyre

$$t_{k-} = -\frac{x}{v}$$



késéssel érkezik meg. Ha feltételezzük, hogy a

terjedés közben a zavar nem változik meg, akkor az  $x$  helyen a zavar időbeli változását a

$$\psi(x,t) = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right)$$

hullámfüggvény írja le (a "-" jel az  $x$ -tengely pozitív-, a "+" jel az  $x$ -tengely negatív irányában terjedő hullámot jelent). Ez az egydimenziós hullámterjedést leíró hullámfüggvény általános alakja, amely konkrét zavarterjedés esetén meghatározott függvényalakot ölt.

A terjedési irányban felvett egyetlen koordinátával írható le egy *síkhullám* is, ahol a hullám terjedési irányára merőleges bármelyik síkban minden pont ugyanúgy viselkedik. Ezért a fenti – egydimenziós terjedésre felírt

$$\psi(x,t) = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right)$$

alakú függvény egyben a *síkhullám hullámfüggvénye* is.

A felületen terjedő *egyenes hullám* vagy az *egydimenziós* közegben terjedő hullám lényegében a *síkhullám speciális esete*: előbbi esetben az azonos fázisú helyek felületből egyenessé-, utóbbiban egyetlen ponttá zsugorodnak.

Mivel a továbbiakban az egy- és kétdimenziós közegben terjedő hullámokat legtöbbször az egyszerűbb szemléltetés kedvéért használjuk, a fenti hullámfüggvénnyel jellemzett hullámot gyakran akkor is síkhullámnak nevezzük, ha egy- vagy kétdimenziós terjedésről van szó.

## A hullámban terjedő energia

Ahhoz, hogy egy rugalmas közegben deformációt hozzunk létre, munkát kell végeznünk. Amikor ez a deformáció zavarként megjelenik egy távolabbi helyen, akkor ott is munkavégzésre van szükség. Ez csak úgy lehetséges, hogy a hullámmal nem pusztán egy állapotváltozás terjed, hanem a hullám energiát is szállít.

A hullám által szállított energiát leggyakrabban az energiaáram nagyságával ( $\Phi$ ) jellemzik, amely egy adott helyen a hullámmal átáramló  $\Delta E$  energia és az áthaladás  $\Delta t$  idejének hányadosa:

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

Az energiaáram az energiaterjedést globálisan jellemzi, mert egy teljes felületen áthaladó összes energiát adja meg. Előfordulhat azonban, hogy az energiaáram erőssége egy nagyobb felületen nem egyenletesen oszlik el, hanem helyről helyre változik. Az energiaáramlás helyi (lokális) jellemzésére vezették be az energia-áramsűrűséget. Ha a hullám terjedésére merőleges  $\Delta S$  nagyságú felületelemlen  $\Delta \Phi$  energiaáram halad át, akkor az energia-áramsűrűség (amit a hullámtanban rendszerint  $I$ -vel jelölnek):

$$I = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S}.$$

Ezt a mennyiséget a hullám *intenzitásának* nevezik.

Ha egy nagyobb  $S$  felületen az  $I$  intenzitás mindenütt ugyanakkora, akkor a teljes  $\Phi$  energiaáram:

$$\Phi = IS.$$

A hullám intenzitását a különböző hullámok esetén később kiszámítjuk, és a terjedő hullám jellemzőivel kifejezzük, most – bizonyítás nélkül – csak annyit bocsátunk előre, hogy az intenzitás arányos a hullám amplitúdójának négyzetével, azaz

$$I = CA^2,$$

ahol  $C$  a hullám egyéb jellemzőitől függő mennyiség.

Ezt azért fontos tudni, mert egy gömbhullám esetén a forrásban betáplált energia egyre nagyobb felületen oszlik el, így – ha az  $I$  energiaáram nem változik – a hullámforrástól  $r$  távolságban az energia-áramsűrűség egyre kisebb lesz. Ennek az a következménye, hogy a hullám amplitúdójának is csökkenni kell, hiszen  $r$  távolságban

$$\Phi = IS = I4r^2\pi = CA^2 4r^2\pi = \text{állandó}.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha  $A^2 \sim \frac{1}{r^2}$ , vagyis  $A(r) \sim \frac{1}{r}$ . A gömbhullám amplitúdója tehát a forrástól távolodva egyre csökken, akkor is, ha nincs semmilyen energiaelnyelő folyamat.

## Gömbhullám hullámfüggvénye

Ha a hullám homogén, izotróp közegben terjed, vagyis a terjedése nem függ a helytől és az iránytól, akkor egy pontban keltett zavar minden irányban ugyanolyan sebességgel terjed. Ennek következtében pontszerű hullámforrás esetén az azonos fázisú helyek egy gömbfelületen (felületi hullámoknál egy körön) helyezkednek el, vagyis gömbhullám (körhullám) jön létre.

A síkhullámra vonatkozó megfontolásaink alapján megpróbálhatjuk felírni a gömbhullám hullámfüggvényének általános alakját, hiszen első pillantásra úgy látszik, hogy csak az  $x$  koordinátát kell helyettesíteni a pontforrástól mért  $r$  távolsággal. Ezzel a feltevéssel az alábbi hullámfüggvényt kapjuk:

$$\psi(r,t) = f\left(t \mp \frac{r}{v}\right).$$

A „-” jel a forrástól távolodó, a „+” jel a forrás felé haladó hullámra vonatkozik.

A helyzet sajnos ennél bonyolultabb, mert láttuk, hogy a gömbhullám amplitúdója a forrástól távolodva csökken, ezért helyesebb a *gömbhullám hullámfüggvényét* a

$$\psi(r,t) = \frac{A_0}{r} f\left(t \mp \frac{r}{v}\right)$$

alakban felírni, ahol  $A_0$  az amplitúdó a forrásban.

Ha a gömbhullámot nagyon kis térrészben, vagy a forrástól nagy távolságban vizsgáljuk, akkor közelítőleg síkhullámnak tekinthetjük. Ilyenkor – ha energiaveszteségek nincsenek – az amplitúdó helyfüggése elhanyagolható.

### Egydimenziós, harmonikus síkhullám

Ha a zavar időbeli változása szinusz vagy koszinusz függvénnyel írható le, vagyis a zavar például

$$f(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

alakú harmonikus rezgés, akkor a zavarterjedést leíró függvény is ilyen lesz.

Ha a zavar egy vonalszerű közegben vagy egy kiterjedt közegben síkhullámként  $v$  sebességgel terjed az  $x$ -tengely mentén, akkor a

$$\psi(x,t) = A \cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]$$

hullámfüggvénnyel írható le, ahol  $\alpha$  fázisállandó. Az ilyen állandó amplitúdójú hullámot *harmonikus síkhullámnak* nevezik.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a síkhullám tárgyalásánál általában a pozitív  $x$ -tengely irányában terjedő hullám hullámfüggvényét írjuk fel, vagyis a

$$\psi(x,t) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]$$

alakot használjuk. Az így kapott összefüggésekből előjelváltással mindig megkapható az ellenkező terjedési iránynak megfelelő eredmény is.

Természetesen a harmonikus hullám szinusz függvénnyel is leírható, mi a továbbiakban általában a koszinusz alakot használjuk.

\*\*\*\*\*

Ahogy a harmonikus rezgést megadó függvény, úgy a harmonikus síkhullám hullámfüggvénye is felírható komplex alakban. Trigonometrikus formában ekkor a hullámfüggvény:

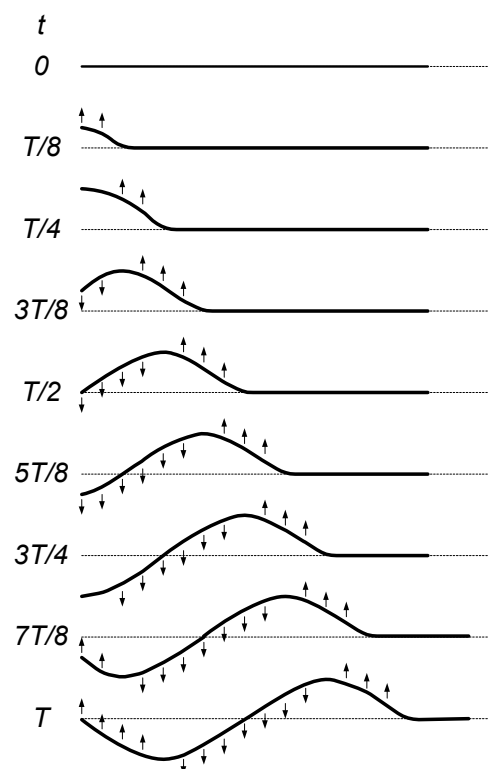
$$\psi(x,t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right) + iA \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right).$$

Ugyanez exponenciális alakban:

$$\psi(x,t) = A e^{i\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right)}.$$

\*\*\*\*\*

Rugalmas kötélen terjedő transzverzális, harmonikus hullám kialakulását mutatja szematikusan a jobboldali ábra. Itt a kötélnél alakját mutatjuk be a forrásban lezajló





rezgés egy teljes periódusának ( $T$ ) különböző időpillanataiban. A „pillanatképek” egyenlő,  $\frac{T}{8}$  időközökben készültek. Az ábrán feltüntettük a kötélen egyes részeinek pillanatnyi mozgásirányát is.

Hasonló módon kaphatjuk meg egy csavarrugóban terjedő longitudinális, harmonikus hullám terjedésének pillanatképeit is, csak ott a kitérések a terjedés irányával párhuzamosak. A mellékelt ábrán a rugó deformációjában bekövetkező változások láthatók, amelyeket  $\frac{T}{4}$  időközönként ábrázoltunk.

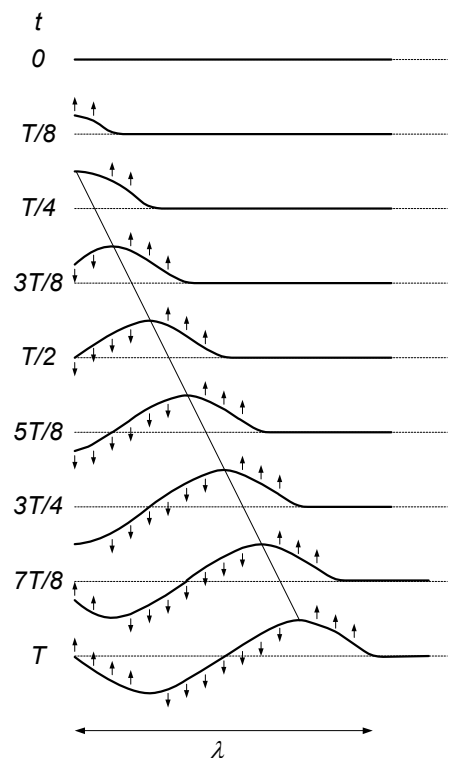
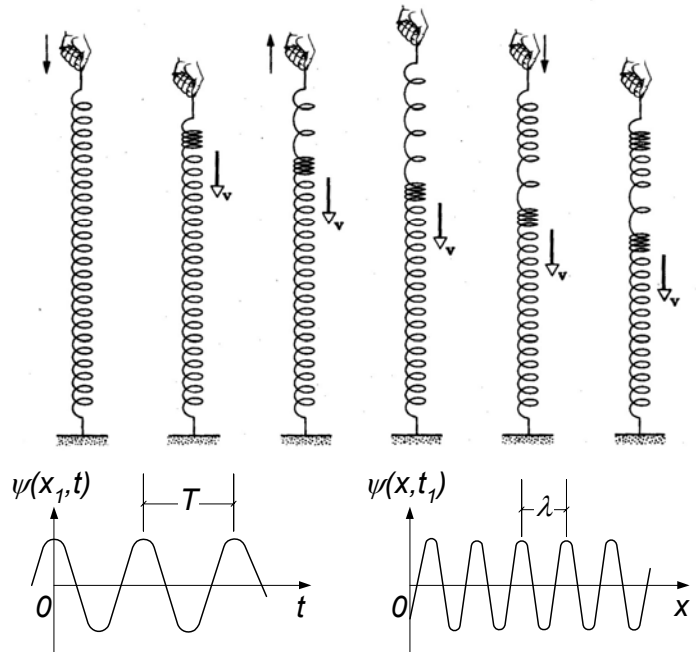
Korábban már volt szó arról, hogy a hullámfüggvény adott helyen megadja a zavar időbeli változását, adott időpillanatban pedig megadja a zavar térbeli eloszlását. Ezt mutatja egy harmonikus síkhullám esetén a mellékelt ábra, amelyen a  $\psi(x_1, t)$  függvény megadja a vizsgált mennyiség időbeli változását az  $x_1$  helyen, a  $\psi(x, t_1)$  függvény pedig a vizsgált mennyiség térbeli eloszlását a  $t_1$  időpillanatban).

A harmonikus hullám a definíció szerint egy végtelen hosszú, csillapítatlan hullámvonulat, hiszen változó amplitúdójú vagy véges hosszúságú hullámvonulat nem írható le egyetlen harmonikus függvénnyel. A gyakorlatban a harmonikus hullám közelítő megvalósítása egy nagyon kis csillapodású, igen hosszú hullámvonulat.

A hullámok vizsgálatánál a harmonikus hullám ugyanolyan fontos szerepet tölt be, mint a rezgéseknél a harmonikus rezgés. Itt is érvényes ugyanis, hogy tetszőleges hullám felfogható harmonikus hullámok szuperpozíciójaként.

### A fázissebesség

A rugalmas kötélen terjedő harmonikus hullám kialakulását bemutató, korábbi ábrát itt kiegészítve látjuk. Bejelöltük azt a  $\lambda$  távolságot, ameddig a zavar a  $T$  rezgésidő alatt eljut, és egy vonallal összekötöttük a zavar maximális értékének helyét különböző időpillanatokban megadó pontokat. Látható, hogy az idő és a befutott távolság egymással arányos, vagyis a maximumhely egyenletes sebességgel halad a terjedés irányában, és az ábrán látható esetben  $\frac{3}{4}T$  idő alatt  $\frac{3}{4}\lambda$  távolságra jutott el. Ha a  $\lambda$  távolságot ismerjük, akkor kiszámíthatjuk a



maximumhely mozgásának  $v_f$  sebességét is:  $v_f = \frac{\lambda}{T}$ . Bármilyen más fázisban lévő pont mozgását vizsgáljuk, ugyanezt a mozgási sebességet kapjuk, ez a *fázissebesség*. Nézzük meg most egy pozitív  $x$ -tengely irányában haladó síkhullámban, hogy milyen összefüggés van a hullámfüggvényben korábban zavarterjedési sebességként bevezetett  $v$  sebesség és a  $v_f$  fázissebesség között. Ehhez felhasználjuk azt, hogy adott  $\varphi$  fázisú hely adott  $t$  időpillanatban olyan  $x$  koordinátájú helyen van, amelyre

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha = \text{állandó}.$$

Az összetartozó  $x$ - $t$  értékpárookra ebből azt kapjuk, hogy

$$x = vt - \frac{v(\varphi - \alpha)}{\omega}.$$

Eszerint a pozitív  $x$ -irányban haladó harmonikus síkhullámban az azonos fázisú helyek sebessége

$$v_f = \frac{dx}{dt} = v.$$

A negatív  $x$ -irányban haladó síkhullámra természetesen azt kapjuk, hogy  $v_f = -v$ .

A fázissebesség tehát azonos a korábban "zavarterjedési sebesség"-ként bevezetett mennyiséggel.

A továbbiakban a fázissebességet index nélküli „ $v$ ”-vel jelöljük.

\*\*\*\*\*

Megjegyezzük, hogy egy nem harmonikus zavar (pl. egy rövid pulzus) terjedésénél a fázissebesség egyes esetekben megegyezik a zavar terjedési sebességével (pl. rugalmas kötélben vagy rugalmas rúdban terjedő hullámoknál), más esetekben viszont a nem harmonikus zavar terjedési sebessége és a fázissebesség nem azonos (ez a helyzet a víz felszínén keltett vízhullámoknál és egy közegben terjedő elektromágneses hullámnál). Ezzel a kérdéssel később foglalkozunk.

\*\*\*\*\*

### ***A hullámhossz és a hullámszám***

A harmonikus hullám kialakulását szemléltető ábrán  $\lambda$ -val jelöltük azt a távolságot, amelyre a zavar a  $T$  rezgésidő alatt eljut. Ezt a távolságot *hullámhossznak* nevezik.

Elnevezése érthetőbbé válik, ha egy másik definícióját használjuk, amely szerint a  $\lambda$  hullámhossz egy tetszőleges  $t$  időpillanatban azonos fázisban lévő, *szomszédos* pontok távolsága (vagyis a hullám helyfüggését megadó harmonikus függvény egy teljes periódusának hossza, amint az a fenti ábrán látható). Ezt a távolságot annak felhasználásával kaphatjuk meg, hogy az azonos fázisban lévő helyeken a hullámfüggvény értéke azonos:

$$\psi(x, t) = \psi(x + \lambda, t).$$

Ez a harmonikus síkhullámban a koszinusz (vagy szinusz) függvény argumentumára vonatkozóan azt jelenti, hogy

$$\omega\left(t - \frac{x + \lambda}{v}\right) + \alpha - \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) - \alpha = 2\pi.$$

Ebből – a korábbi definícióval összhangban – azt kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = vT.$$

A hullámhosszal összefüggő, gyakran használt mennyiség a *hullámszám* ( $k$ ), aminek definíciója:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

Ezzel a harmonikus síkhullám egyenlete átírható az alábbi alakba:

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

\*\*\*\*\*  
 Ugyanez a hullámfüggvény komplex alakban:  $\tilde{\psi}(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \alpha)}$ .  
 \*\*\*\*\*

### Síkhullám térbeli terjedésének leírása

Ha egy síkhullám az  $x$ -tengely mentén terjed, akkor leírására a

$$\psi(x, t) = f\left(t \mp \frac{x}{c}\right)$$

hullámfüggvényt használhatjuk. Speciálisan harmonikus síkhullám esetén a hullámfüggvény:

$$\psi(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) + \alpha\right) = A \cos(\omega t \mp kx + \alpha)$$

Ez a koordináta-választás azonban nem mindig lehetséges, ezért most megvizsgáljuk, hogy milyen hullámfüggvényt használhatunk, ha a síkhullám nem valamelyik koordinátatengely mentén terjed.

Az ábrán feltüntettük az azonos fázisban lévő helyek síkjait. A hullám ezekre merőlegesen terjed, terjedési irányát az  $\mathbf{u}$  egységvektor mutatja.

Egy tetszőleges  $\mathbf{r}$  helyvektorú pontban, a  $t$  időpillanatban a hullámfüggvényt úgy kaphatjuk meg, hogy kiszámítjuk a  $t=0$  időponthoz tartozó illetve az  $\mathbf{r}$  helyvektorú ponton átmenő (a  $t$  időpillanathoz tartozó) két azonos fázisú sík közötti távolságot, amelyet az ábrán  $d$ -vel jelöltünk. A

hullámfüggvény argumentumába ugyanis most a  $t \mp \frac{d}{v}$  mennyiség kerül.

Az  $\mathbf{r}$  helyvektortól függő – az előjelet is tartalmazó –  $d$  távolság az ábra jelöléseivel:

$$d(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\mathbf{u},$$

ezért a hullámfüggvény az  $\mathbf{r}$  helyvektorú pontban

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(d(\mathbf{r}), t) = f\left(t - \frac{d(\mathbf{r})}{v}\right) = f\left(t - \frac{\mathbf{r}\mathbf{u}}{v}\right)$$

Harmonikus síkhullámnál:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{\mathbf{r}\mathbf{u}}{v}\right) + \alpha\right)$$

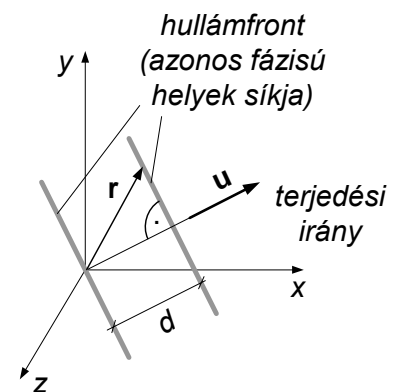
vagy

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$$

Vezessük be a  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$  hullámszám-vektort, amely a terjedési irányt mutatja, és nagysága  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Ezzel a koordinátarendszerhez képest tetszőleges irányban haladó harmonikus

hullám hullámfüggvénye:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha).$$



Általános irányú terjedésnél  $\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z$ .

Olyan gömbhullámoknál (vagy kétdimenziós esetben körhullámoknál), amelyeknek forrása az origóban van, érvényes, hogy  $\mathbf{r} \parallel \mathbf{u}$ , ezért  $d(\mathbf{r}) = \mathbf{ru} = r$ . A gömbhullámoknál (körhullámoknál) tehát a hullámfüggvény

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha).$$

Ilyenkor az azonos fázisú helyek az  $\mathbf{ru} = \text{állandó}$ , vagyis az  $r = \text{állandó}$  összefüggéssel megadott gömbfelületen (síkbeli terjedésnél körön) helyezkednek el.

\*\*\*\*\*

A sík- és gömbhullám fenti hullámfüggvényei komplex formában a

$$\tilde{\psi}(x, t) = A e^{i(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)}$$

illetve

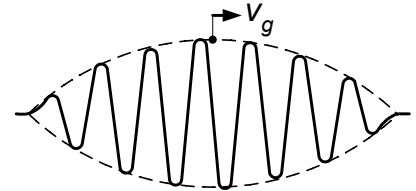
$$\tilde{\psi}(x, t) = \frac{A_0}{r} e^{i(\omega t - kr + \alpha)}$$

alakot öltik.

\*\*\*\*\*

### Nem harmonikus hullám terjedése, a csoportsebesség

Nem harmonikus hullám terjedése esetén a terjedési sebesség fogalmát pontosítanunk kell. Ennek az az oka, hogy egy ilyen hullám különböző frekvenciájú harmonikus hullámok szuperpozíciójának tekinthető, vagyis benne különböző frekvenciájú harmonikus hullámok terjednek. Az ilyen hullámok tipikus példája az ábrán látható rövid hullámvonulat, amelyet – éppen összetett volta miatt – *hullámcsoporthnak* vagy *hullámcsomagnak* neveznek.



A terjedési sebességgel kapcsolatban akkor lép fel probléma, ha – mint az gyakran előfordul – a harmonikus hullám  $v$  fázissebessége függ a frekvenciától,  $v = v(\omega)$ , így a hullámcsomagot alkotó, különböző frekvenciájú harmonikus hullámok fázissebessége eltérő. Ez a jelenség a hullámok *diszperziója*.

Diszperzió esetén az összetevő harmonikus hullámok a haladás közben egymáshoz képest eltolódnak, emiatt az összegük, és így általában a hullámcsomag alakját meghatározó burkológörbe (az ábrán szaggatott vonallal jelölve) alakja is változik. A csomag sebességét ilyenkor a burkológörbe maximumának (az ábrán fekete pont) mozgási sebességével, a *csoportsebességgel* ( $v_g$ ) adhatjuk meg.

A csoportsebesség elméleti meghatározása általában nem egyszerű feladat, de egy nagyon leegyszerűsített esetben a számolás könnyen elvégezhető, és általánosabban is érvényes eredményt kapunk.

Vizsgáljuk meg annak a hullámcsomagnak a mozgását, amely két közel azonos frekvenciájú, harmonikus síkhullám összeadásának eredményeként jön létre. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az  $x$ -tengely mentén haladó két hullám amplitúdója azonos, és nincs köztük fáziseltolódás. Ekkor az összeadandó hullámok a

$$\psi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\psi_2(t) = A \cos(\omega' t - k' x),$$

alakban írhatók fel. Itt  $\omega' = \omega + \Delta\omega$ ,  $k' = k + \Delta k$ , és  $\Delta\omega \ll \omega$ ,  $\Delta k \ll k$ . Az eredő hullámot a szuperpozíció elve alapján kaphatjuk meg:

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(t) = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega' t - k' x).$$

Az eredő hullám egyszerűbb alakba írható, ha alkalmazzuk a rezgések összetevésénél már alkalmazott

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = 2 \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$$

trigonometriai összefüggést. Ennek segítségével az alábbi eredményt kapjuk

$$\psi(x, t) = 2A \cos \frac{(\omega' - \omega)t - (k' - k)x}{2} \cos \frac{(\omega' + \omega)t - (k' + k)x}{2}.$$

A körfrekvenciákra és hullámszámokra vonatkozó fenti feltevésünk szerint  $\omega + \omega' \approx 2\omega$ ,  $k + k' \approx 2k$ , így azt kapjuk, hogy

$$\psi(x, t) = 2A \cos \left( \frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right) \cos(\omega t - kx)$$

Ez a kifejezés úgy is felfogható, mint egy  $\omega$  körfrekvenciájú,  $k$  hullámszámú,

$$v = \frac{\omega}{k}$$

fázissebességű hullám, amelynek az amplitúdója az

$$A(x,t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)$$

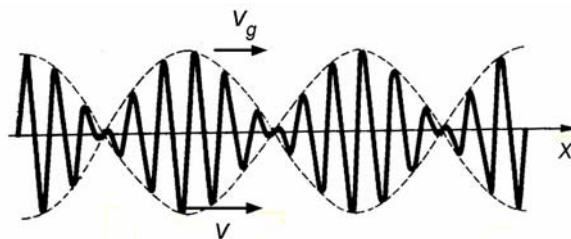
függvény szerint változik. Az ilyen, változó amplitúdójú hullámot *modulált hullámnak* nevezik.

Az amplitúdófüggvény azonban maga is egy hullámfüggvény, amely

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

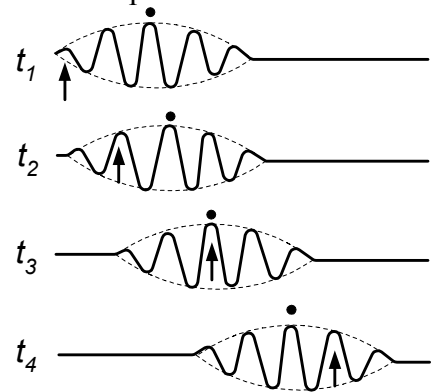
sebességgel terjedő hullámnak felel meg.

A hullámról készült sematikus „pillanatfelvétel” az alábbi ábrán látható. Az amplitúdóváltozást megadó burkológörbe (az amplitúdóhullám) egy hullámcsomag, amelyhez



a fenti  $v_g$  csoportsebesség tartozik. Az eredő hullám egy meghatározott fázisban lévő helye (az ábrán az egyik maximális amplitúdójú hely) diszperzió esetén a csoportsebességtől eltérő  $v$  sebességgel halad.

A fentihez hasonló hullám egy periódusáról különböző időpillanatokban készített pillanatfelvételek sematikus képét látjuk a következő ábrán. A szaggatottan berajzolt burkológörbe maximumának helyét fekete pont-, az eredő hullám egy kiszemelt maximumának mindenkor helyét pedig nyíl jelöli. Ebben az esetben a fázissebesség nagyobb, mint a csoportsebesség: az eredő hullám kiszemelt maximumhelye (nyíl) hagyja a csomag maximumhelyét (pont). Ez egyben azt is mutatja, hogy az eredő hullám a burkológörbe belsejében mozog.



A fenti számolás eredménye sok harmonikus összetevő esetén is érvényes marad, ha az összetevők frekvenciája egy szűk intervallumba esik:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Mivel  $\omega = kv$ , és diszperzió esetén a fázissebesség függ a körfrekvenciától illetve a hullámszámtól ( $v = v(k)$ ), a csoportsebesség és a fázissebesség összefüggésére azt kapjuk, hogy

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk}$$

Az összefüggést érdemes a hullámszám helyett a szemléletesebb hullámhosszal kifejezni.

Mivel  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  és  $dk = -2\pi \frac{1}{\lambda^2} d\lambda$ , végül a

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

összefüggést kapjuk.

Az összefüggésből látszik, hogy ha  $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ , akkor a csoportsebesség kisebb a fázissebességnél (ez a *normális diszperzió*), a  $\frac{dv}{d\lambda} < 0$  esetben pedig a csoportsebesség nagyobb, mint a fázissebesség (ez az *anomális diszperzió*).

Ha  $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ , azaz nincs diszperzió, akkor azt kapjuk, hogy  $v_g = v$ , tehát a csoportsebesség megegyezik a minden hullámhosszra azonos fázissebességgel.

A diszperzió megfigyelhető víz hullámok esetén és valamilyen közegben terjedő elektromágneses hullámoknál. Utóbbi eset igen fontos szerepet játszik pl. az optikában.

## Hullámok polarizációja

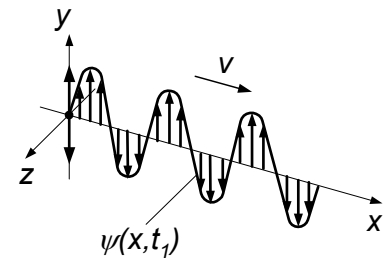
Ha a hullámban terjedő zavarnak iránya van (pl. egy kitérés), akkor a hullám lehet longitudinális vagy transzverzális, attól függően, hogy a zavar iránya párhuzamos a terjedési iránnyal vagy arra merőleges.

Longitudinális hullámban egyetlen kitüntetett irány van, a zavar- és a zavarterjedés közös iránya, a transzverzális hullámban viszont a zavar- és a zavarterjedés iránya szétválik („polarizálódik”), ezért két kitüntetett irány van.

Ha a hullámforrásban a transzverzális zavar iránya időben állandó, akkor homogén, izotróp terjedés esetén a zavar iránya a hullámban sem változik meg. Ez azt jelenti, hogy a hullám terjedési iránya és a zavar iránya minden pillanatban és minden helyen ugyanabban a síkban van.

### KÍSÉRLET:

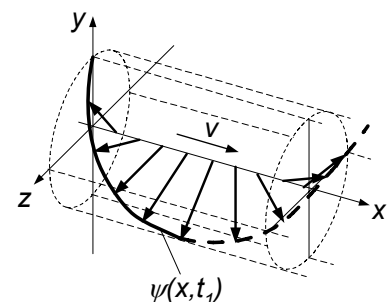
Ilyen hullámot kapunk például, ha egy rugalmas kötélen egyik végét mindig ugyanazon egyenes mentén mozgatjuk. Az ábrán az így kapott hullám pillanatképét (a  $t_1$  időpillanatban) derékszögű koordináta-rendszerben mutatjuk be: a hullám az  $x$ -tengely mentén mozog, a kitérés mindenütt  $y$ -irányú, a két kitüntetett irány és így a zavar térbeli eloszlását megadó görbe is az  $xy$ -síkban van.



Az ilyen hullámot *síkban poláros* vagy *lineárisan poláros hullámnak*, a két kitüntetett irány által megadott síkot pedig a hullám *rezgési síkjának* nevezik.

A hullám keltésénél azonban nem mindig teljesül a fenti feltétel, a hullámforrásban a transzverzális zavar iránya változhat, és ennek megfelelően változik a hullám rezgési síkjának helyzete is. A zavar irányának változása lehet véletlenszerű, de követhet valamilyen szabályszerűséget is.

Szabályszerű változásról beszélhetünk például akkor, ha a rugalmas kötélen egyik végét egy kör mentén mozgatjuk (ábra). Ekkor a kötélen többi pontja is körmozgást végez, a forrástól mért távolságnak megfelelő fáziskéséssel. Az ilyen hullámot *cirkulárisan poláros hullámnak* nevezik.



Az ábrán látható cirkulárisan poláros hullám forrásában a zavart jellemző vektor állandó szögsebességgel körbeforgog. Ez a forgó vektor minden pillanatban felbontható egy-egy változó hosszúságú  $y$ - és  $z$ -irányú vektorra, ezért a cirkulárisan poláros hullám felbontható két egymásra merőleges rezgési síkú, azonos amplitúdójú, lineárisan poláros hullámra. Az összetevő hullámok amplitúdója ekkor az említett kör sugarával egyenlő.

Ha a forrásban a zavart jellemző vektor végpontja egy ellipszis mentén mozog, akkor a keletkező hullámot *elliptikusan poláros hullámnak* nevezik. Ez a hullám mindig felbontható két egymásra merőleges rezgési síkú, különböző amplitúdójú, lineárisan poláros hullámra. Az összetevő hullámok amplitúdója ekkor az ellipszis két féltengelyének hosszával egyenlő. A cirkulárisan poláros hullám tulajdonképpen az elliptikusan poláros hullám speciális esete (a kör olyan ellipszis, amelynek két féltengelye azonos hosszúságú).

A szabálytalanul változó rezgési síkú transzverzális hullámoktól való megkülönböztetés érdekében a lineárisan-, cirkulárisan- vagy elliptikusan poláros hullámokat összefoglaló néven *poláros hullámoknak* nevezik.



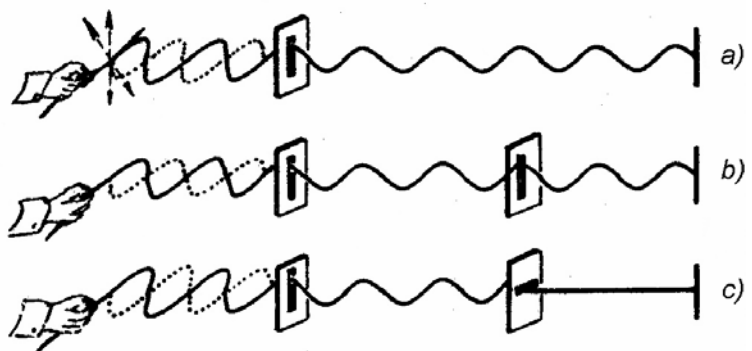
Nem lineárisan poláros, transzverzális hullámból megfelelő módszerrel kiválasztható a hullámnak egy tetszőleges síkú lineárisan poláros összetevője. Ez jól szemléltethető egy rugalmas kötélén létrehozott transzverzális hullám esetében.

### KÍSÉRLET:

Rugalmas kötél végét körbeforgatva, létrehozunk egy nagyjából cirkulárisan poláros hullámot (a) ábra), majd a kötél középpontja közelében a kötelet egy összecuskható fakerettel vesszük körül. Ezáltal a hullám egy keskeny, függőleges irányú résen kénytelen áthaladni. A rés csak a hullám függőleges összetevőjét engedi át, így tehát egy lineárisan poláros hullámot kapunk<sup>1</sup>.

Ha a rést függőleges tengely körül elforgatjuk, akkor mindig az új iránnyal párhuzamos rezgési síkú lineárisan poláros hullám jön létre, vagyis ezzel a módszerrel a nem poláros hullámból tetszőleges rezgési síkú lineárisan poláros hullámot ki tudunk választani.

Az ilyen eszközöket, amelyekkel nem lineárisan poláros hullámból lineárisan poláros hullámot állíthatunk elő, *polarizátoroknak*, azt a rezgési síkot pedig, amelyet a polarizátor átenged, a *polarizátor rezgési síkjának* nevezik. Polarizátorként a különböző hullámterjedési mechanizmusoknál más és más eszközöket alkalmaznak. Rugalmas kötéll hullámok esetén a kísérletben használt rést használhatjuk, az elektromágneses hullámoknál használt eszközökről később lesz szó.



### KÍSÉRLET:

Ha az előző kísérletben alkalmazott polarizátor mellett egy másik polarizátort is alkalmazunk, akkor a két polarizátor után megjelenő hullám jellege attól függ, hogy a két polarizátor rezgési síkja egymással milyen szöget zár be.

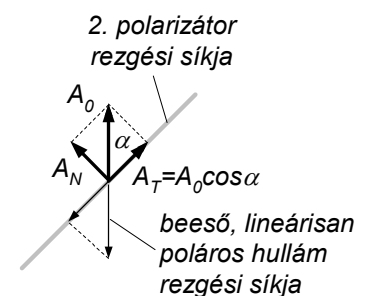
Ha a második polarizátor rezgési síkja párhuzamos az elsőével, akkor a lineárisan poláros hullám változatlanul halad át a második polarizátoron is (b) ábra).

Ha most a második polarizátort vízszintes tengely körül elkezdjük körbeforgatni, akkor a második polarizátor után megjelenő lineárisan poláros hullám rezgési síkja a polarizátorral együtt elfordul, és amplitúdója fokozatosan csökken.

Ha a két polarizátor rezgési síkja egymásra merőleges, akkor a második polarizátor után nincs hullám (c) ábra), vagyis a lineárisan poláros hullámot a rezgési síkjára merőleges polarizátor kioltja.

Mivel a kísérlet tanúsága szerint a polarizátor kioltja a rá merőleges rezgési síkú lineárisan poláros hullámot, a polarizátor forgatásakor bekövetkező amplitúdó- és intenzitáscsökkenés a következőképpen is felfogható.

A hullám az első polarizátor által meghatározott rezgési síkkal érkezik a második polarizátorhoz, amelynek rezgési síkja  $\alpha$  szöget zár be az első polarizátorral illetve a beeső



<sup>1</sup> A kísérletben megjelennek a kötél végéről visszaverődő hullámok is, amelyek sajátos hullámalakzatot, állóhullámot hozhatnak létre. Ez a következtetéseinken nem változtat. Az állóhullámokkal később foglalkozunk.

hullám rezgési síkjával. Ha a beeső lineárisan poláros hullámot (az ábrán  $A_0$ ) felbontjuk a második polarizátorral párhuzamos ( $A_N$ )- és arra merőleges rezgési síkú ( $A_T$ ) lineárisan poláros hullámokra, akkor a második polarizátor a merőleges összetevőt kioltja, és az eredeti amplitúdónak csak a második polarizátor síkjával párhuzamos összetevője halad tovább.

Az átmenő hullám amplitúdójának a két polarizátor egymással bezárt szögétől való függését az

$$A = A_T = A_0 \cos \alpha$$

összefüggés adja meg.

Mivel a hullám intenzitása arányos az amplitúdó négyzetével, a második polarizátorra eső  $I_0$  intenzitásból az átjutott  $I$  intenzitás az

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

összefüggésből kapható meg. Ebből visszakapjuk a tapasztalatból már ismert eredményt: ha a két polarizátor egymásra merőleges, vagyis  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , akkor  $A = I = 0$ , tehát nincs átmenő hullám.

Mivel a kísérletben alkalmazott második polarizátor segítségével a beérkező hullám rezgési síkját meg lehet találni, a fenti elrendezésben a második polarizátort *analizátornak* is nevezik. Ha a polarizátor és az analizátor rezgési síkja egymásra merőleges, akkor *keresztezett polarizátorokról* beszélünk. Ezzel a kifejezéssel élve, azt mondhatjuk, hogy a keresztezett polarizátorok a transzverzális hullámot kioltják, ezért alkalmazásukkal eldönthető, hogy egy hullám transzverzális vagy nem.

Mint láttuk, a polarizátor-analizátor pár az analizátor forgatásával alkalmas arra, hogy az átmenő hullám intenzitását szabályozni tudjuk. Ennek különösen az optikában van nagy jelentősége.

### Energiaterjedés rugalmas hullámban

Egy hullám létrehozásához munkát kell befektetni (rugalmas közeg deformálása). Az, hogy a hullám a forrástól távol ugyanolyan rugalmas alakváltozást hozzon létre, mint ami a forrásban létrejött, csak úgy lehetséges, hogy a hullám energiát visz magával, és a szükséges munkát ez az energia fedezi.

#### Az energiaterjedés általános leírása

A hullám által szállított energiát az energiaárammal jellemezhetjük. Ha egy felületen a hullámmal  $\Delta t$  idő alatt  $\Delta E$  energia halad át akkor az *energiaáram*:

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

A hullám által szállított energiát – a fenti általános összefüggés helyett – jó lenne a hullám és a közeg jellemző mennyiségeivel kifejezni. Ehhez először a hullámban az energia térfogati sűrűségét kell meghatároznunk. Ha ugyanis a  $w$  energiasűrűséget és a hullám  $v$  terjedési sebességét ismerjük, akkor az energiaáramot az alábbi egyszerű megfontolással kaphatjuk meg.

Az ábrán látható, a hullám terjedésére merőleges  $S$  felületen, a felületre merőlegesen  $\Delta t$  idő alatt az az energia megy át a hullámmal, ami benne van a  $v\Delta t$  magasságú,  $S$  alapterületű hasámban, vagyis a  $\Delta V = Sv\Delta t$  térfogatban. Mivel az energia térfogati sűrűsége  $w$ , az áthaladt energia:

$$\Delta E = w\Delta V = wSv\Delta t.$$

A  $\Phi$  energiaáram ezzel

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t} = wvS.$$

Ennek alapján az energia-áramsűrűség (amit a hullámtanban általában  $I$ -vel jelölnek)

$$I = \frac{\Phi}{S} = wv,$$

amit a hullám *intenzitásának* neveznek.

Ez az összefüggés általában is igaz, tehát egy hullámban terjedő energia áramsűrűsége úgy kapható meg, hogy a térfogati energiasűrűséget megszorozzuk a terjedési sebességgel.

Mivel az áramsűrűség és a terjedési sebesség iránya azonos, az áramsűrűség (intenzitás) vektori formában az alábbi módon adható meg:

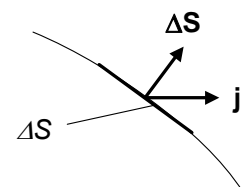
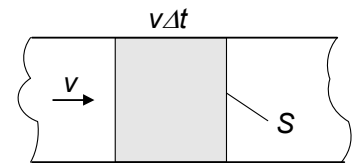
$$\mathbf{I} = w\mathbf{v}.$$

Ha egy olyan felületen átmenő energiaáramot akarunk kiszámítani, amely a terjedési sebességre nem merőleges, akkor egy elemi  $\Delta S$  felületen átmenő energiaáram

$$\Delta\Phi = \mathbf{j}\Delta\mathbf{S},$$

ahol  $\Delta\mathbf{S}$  a felületvektor. Véges  $S$  felületen átmenő energiaáram ebből integrálással (a felületelemekre történő összegzéssel) kapható meg:

$$\Phi_S = \int_S \mathbf{j}\Delta\mathbf{S}.$$



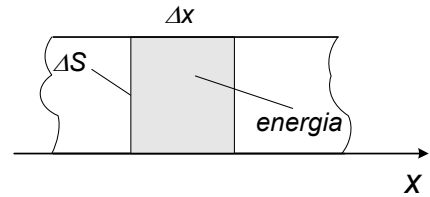
Ahhoz, hogy egy konkrét hullám intenzitását kiszámítsuk, meg kell határoznunk a hullámban az energiasűrűséget.

## Rugalmas hullám energiája, a hullám intenzitása

Az energiaviszonyokat egy rugalmas rúdban vizsgáljuk, amelyben egydimenziós, longitudinális hullám terjed. A hullám által szállított energia kiszámítására az intenzitásra kapott  $I = wv$  összefüggést alkalmazzuk. Ehhez meg kell határoznunk a hullámban az energia átlagos sűrűségét.

A vizsgált rúd keresztmetszete  $S$ , a rúd anyagának sűrűsége  $\rho$ , rugalmassági modulusa  $E$ .

Az energia kiszámításához a rúd egy elemi  $\Delta V = \Delta x \Delta S$  térfogatát (ábra) választjuk ki. A térfogatelem mechanikai energiája a mozgási és helyzeti energia összege, ezért először ezeket az energiákat írjuk fel:



$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \Delta m v_x^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta x \Delta S \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \Delta V,$$

$$\Delta E_h = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \Delta x \Delta S = \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \Delta V.$$

Felhasználva a longitudinális rugalmas hullám terjedési sebességére vonatkozó

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \rightarrow \quad E = \rho v^2$$

összefüggést, a helyzeti energiára azt kapjuk, hogy

$$\Delta E_h = \frac{1}{2} \rho v^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \Delta V.$$

Ezzel az összenergia

$$\Delta E = \Delta E_m + \Delta E_h = \frac{1}{2} \rho \Delta V \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Az energia térfogati sűrűsége:

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Ebből a kifejezésből konkrét végeredményt csak akkor kapunk, ha ismerjük a hullámfüggvényt.

Példaként számítsuk ki az energiasűrűséget a

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

harmonikus hullám esetén. Ha ezt a hullámfüggvényt behelyettesítjük az általános összefüggésbe, akkor az energiasűrűsége az, hogy

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \rho \left[ \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) + v^2 k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) \right].$$

Felhasználva az  $\omega = kv$  összefüggést, az energiasűrűség az egyszerűbb

$$w(x, t) = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$$

alakba írható. Eszerint az energiasűrűség adott helyen időben periodikusan változik, adott időpillanatban pedig a helynek periodikus függvénye.

Az időben változó energiasűrűség helyett a gyakorlatban jobban használható az energiasűrűség időbeli átlaga. A hullámban adott  $x$  helyen létrejött energiasűrűség időbeli átlaga:

$$w = \frac{I}{T} \int_0^T w(x, t) dt = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2.$$

Ismerve az energia átlagos térfogati sűrűségét, mind az átlagos energiaáramot, mind pedig az átlagos intenzitást ki tudjuk számítani:

$$\Phi = wvS = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 vS$$

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v.$$

Az átlagos energia-áramsűrűség vektor ennek alapján

$$\mathbf{l} = w\mathbf{v} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \mathbf{v}.$$

### Az intenzitás- és az amplitúdó térbeli változása egyszerű esetekben

Az energia-áramsűrűség és ezzel együtt a hullám amplitúdója változhat geometriai okokból és a közegben történő energiaveszteségek (elnyelés) miatt.

#### *Amplitúdócsökkenés gömbhullámban*

Korábban már volt szó arról, hogy egy pontforrásból kiinduló hullám esetén mindig fellép egy geometriai jellegű intenzitásváltozás, aminek az az oka, hogy ugyanaz az energiaáram a terjedés során egyre nagyobb felületen oszlik el. Mivel az intenzitás arányos az amplitúdó négyzetével, a forrástól távolodva az amplitúdónak is csökkennie kell.

A gömbhullámra elvégzett számolás eredménye az volt, hogy homogén, izotróp közegben az amplitúdónak a forrástól mért  $r$  távolsággal fordított arányban kell változnia:

$$A(r) \propto \frac{1}{r}.$$

Ugyanilyen számolás eredményeként azt kapjuk, hogy egy pontforrásból kiinduló felületi körhullámban (pl. víz hullám) az amplitúdó helyfüggése

$$A(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

jellegű.

Ezek a végeredmények csak akkor érvényesek, ha a hullám terjedése során nem lépnek fel olyan energiaelnyelő (disszipatív) folyamatok, amelyek a hullámban terjedő összenergiát csökkentik.

#### *Amplitúdócsökkenés energiaelnyelés miatt*

Az áramsűrűség változásának másik lehetséges oka, hogy a közeg a hullám energiájának egy részét elnyeli. Ilyenkor maga az energiaáram, és vele együtt az intenzitás is változik. Ha az energiaveszteség nem túl nagy, akkor egy  $x$ -irányban terjedő síkhullámban  $dx$  hosszúságú szakaszon való áthaladás közben az intenzitás változása arányos a szakasz hosszával és az eredeti intenzitással:

$$dI = I(x + dx) - I(x) = -\mu I dx.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx,$$

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x)$$

(Itt  $\mu$  a közegtől függő állandó, a *csillapítási* tényező,  $I_0$  az intenzitás az  $x = 0$  helyen).

Mivel az intenzitás arányos az amplitúdó négyzetével, ez azt jelenti, hogy a hullám amplitúdója az elnyelés következtében szintén exponenciálisan csökken:

$$A(x) = A_0 \exp\left(-\frac{\mu}{2}x\right) = A_0 \exp(-\beta x).$$

(Itt bevezettük a  $\beta = \mu/2$  jelölést.)

### Hullámok visszaverődése és törése

A hullámterjedés vizsgálatánál eddig azt tételeztük fel, hogy a hullám homogén közegben, állandó sebességgel terjed. Ha a hullám egy közeg határához ér, akkor a tapasztalat szerint onnan részben visszaverődik, részben pedig behatol a szomszédos közegbe, és terjedésében mindkét esetben változások állhatnak be.

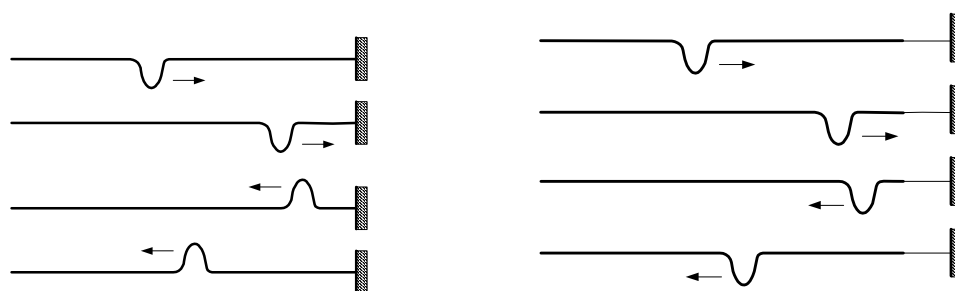
Visszaverődésnél például megváltozhat a hullám fázisa, új közegbe történő behatolásnál pedig általában megváltozik a hullám terjedési sebessége, és ezzel együtt a hullámhossza, elektromágneses hullámoknál mindkét esetben megváltozhat a hullám polarizációs állapota is. A visszaverődés és törés során a különböző típusú (rugalmas, elektromágneses) hullámok különbözőképpen viselkednek, de vannak olyan jelenségek, amelyek mindenféle hullám esetén fellépnek. Itt elsősorban ezekkel a közös jelenségekkel foglalkozunk, az egyes hullámfajtákra jellemző speciális problémákat a megfelelő helyen tárgyaljuk.

A visszaverődés és törés alapjelenségeinek bemutatására – szemléletességük miatt – elsősorban kifeszített, rugalmas kötél-, illetve vízfelületen terjedő rugalmas hullámokat használunk.

Először végezzünk el két kísérletet rugalmas kötélén terjedő hullámokkal.

#### KÍSÉRLETEK:

- Rugalmas kötél egyik végét rögzítsük a falhoz, úgy hogy ne tudjon elmozdulni, feszítsük ki, és a másik végétől indítsunk el egy pulzust (baloldali ábra). Jól megfigyelhető, hogy amikor a pulzus a kötél és a fal határához érkezik, onnan visszaverődik, de a kitérés iránya ellenkezőre változik. Ez azt jelenti, hogy a rögzített végről történő visszaverődésnél a hullám fázisában  $\pi$  nagyságú ugrás következik be.
- Módosítsuk a kötél végének rögzítését úgy, hogy szabadon elmozdulhasson. Ezt – amint a jobboldali ábrán is látszik – a fal és a rugalmas kötél közé beiktatott vékony, rugalmatlan zsinórral érhetjük el. Most a kétféle kötél határáról történő visszaverődés közben a zavar iránya nem változik meg, a szabad végről történő visszaverődésnél nincs fázisugrás.



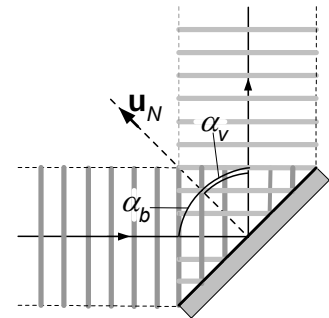
A rögzített végen bekövetkező fázisugrás oka az, hogy a falhoz érkező zavarnak a falnál el kell tűnnie, és ez csak úgy lehetséges, hogy a falnál elinduló ellentétes kitérés kompenzálja az eredeti kitérést.

Visszaverődésnél nem csak rugalmas hullámoknál léphet fel fázisugrás. A jelenség a elektromágneses hullámok esetén is megfigyelhető.

Kétdimenziós terjedésnél bekövetkező törési és visszaverődési jelenségek jól demonstrálhatók víz hullámokkal.

**KÍSÉRLET:**

Vízfelületet egy egyenes pálcával periodikusan ütögetve, egyenes hullámot hozunk létre, és a hullám útjába ferdén elhelyezünk egy egyenes akadályt, amelyen a hullám nem tud áthatolni (ábra). A hullám az akadályról jól láthatóan visszaverődik, mégpedig úgy, hogy az ábrán bejelölt  $\alpha_b$  beesési szög megegyezik az  $\alpha_v$  visszaverődési szöggel (az  $\mathbf{u}_N$  vektor az akadályra merőleges irányt, a *beesési merőlegest* jelöli).



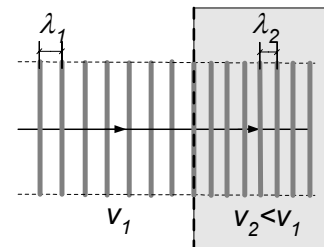
Ha az előző kísérletnél a hullám útjába a terjedésére merőleges akadályt helyezünk el, a hullám akkor is visszaverődik. Ennek tiszta szemléltetése azonban víz hullámokkal nehéz, mert a visszaverődő hullámok összetalálkoznak a beeső hullámokkal, és kölcsönhatásuk miatt a kialakult kép bonyolulttá válik (a hullámok találkozásánál fellépő jelenségekkel később foglalkozunk). A problémát úgy lehet kiküszöbölni, hogy csak egyetlen rövid pulzus terjedését vizsgáljuk.

Víz hullámokkal modellezhető az az eset is, amikor a hullám egyik közegből a másikba megy át. Ezt az teszi lehetővé, hogy a víz hullámok terjedési sebessége függ a víz mélységétől. Ha a hullámkád egyik részének aljára üveglapot teszünk, és ezzel a vízmélységet lecsökkentjük, akkor ez a rész a hullámok számára más terjedési sebességet, tehát egy „másik közeget” jelent.

A tapasztalat szerint a sekélyebb vízben a sebesség-, és ennek megfelelően a hullámhossz is kisebb (a rezgésidő a közegtől nem függ, így a  $\lambda = vT$  összefüggés szerint a terjedési sebesség és a hullámhossz egymással arányos).

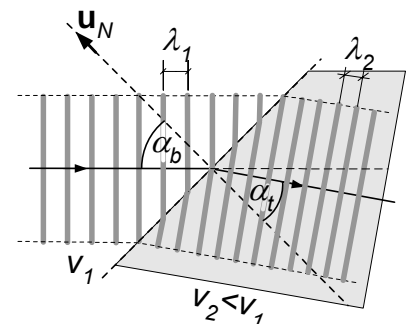
**KÍSÉRLET:**

Hullámkád egyik felében (az ábrán a jobboldali rész) a vízmélységet lecsökkentjük, így két különböző közeget hozunk létre, amelyeket egyenes határvonal választ el. A közeghatárra merőlegesen beeső egyenes hullám iránya a határvonalon való áthaladásnál nem változik meg, de a hullámhossz lecsökken.



**KÍSÉRLET:**

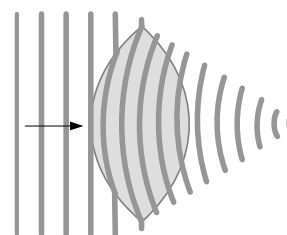
Az előző kísérletet végezzük el úgy, hogy a hullám terjedési iránya nem merőleges a közeghatárra (ábra). Az új közegbe való belépésnél most is megváltozik a hullámhossz, de emellett az azonos fázisú helyeket megadó egyenesek helyzete is módosul (és ennek megfelelően az erre merőleges terjedési irány is más lesz). A vizsgált esetben az  $\alpha_t$  törési szög kisebb, mint az  $\alpha_b$  beesési szög.





**KÍSÉRLET:**

Ha a hullámkád aljába egy domború lencse alakú üveglapot teszünk (ábra), akkor az így létrehozott „lencse” a ráeső síkhullámot egy pontban (a fókuszpontban) gyűjti össze. Ez a kísérlet lényegében az optikából ismert gyűjtőlencse vízhullám-modellje.



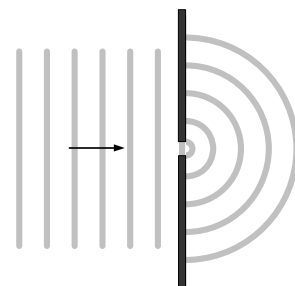
Nehezebben valósítható meg az a kísérlet, amivel az optikából ismert gömbtükör modellezhető, mert a hengeres akadályról visszaverődő hullámok összetalálkoznak a beérkező hullámokkal, és ez a képet bonyolulttá teszi. Itt is segít, ha csak egyetlen pulzust vizsgálunk.

**A Huygens-elv, a törés és visszaverődés értelmezése**

A visszaverődésnél és törésnél bekövetkező jelenségek megmagyarázhatók egy egyszerű modell- és a belőle következő szerkesztés segítségével, amelyet Huygens<sup>1</sup> dolgozott ki. A modell alapötletét az a tény adta, hogy egy pontszerű zavar gömbhullám (két dimenzióban körhullám) alakjában terjed. Mivel pedig egy hullámfront minden pontjában ugyanaz a zavar jön létre, mint a hullámforrásban, a hullámfront minden pontja elemi gömbhullámok forrásaként fogható fel. Ezt a feltevést megerősíti az alábbi kísérlet.

**KÍSÉRLET:**

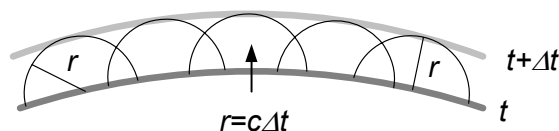
Vízfelületen létrehozott egyenes hullámok útjába olyan akadályt teszünk amelyen egy – a hullámhosszhoz képest – kis rés van, és a hullám csak ezen tud áthaladni. Az akadály túloldalán ekkor a résből kiinduló körhullámot látunk (ábra).



Ez a kísérlet azt mutatja, hogy a hullámfront kellően kicsi (pontszerű) szakasza valóban elemi gömbhullámot (a kísérletben körhullámot) kelt. Fontos megfigyelni, hogy a körhullám csak a hullámterjedés irányában jön létre, visszafelé induló körhullámot nem látunk.

A hullámterjedésnek ezen a tapasztalaton alapuló modelljét a *Huygens-elv* foglalja össze, amely szerint egy hullámfront minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki, és a mindenkor új hullámfrontot az *elemi gömbhullámok burkolófelülete* adja. A burkolófelület megrajzolásánál a gömbfelületeknek a hullám eredeti terjedési irányába eső részét kell figyelembe venni.

A mellékelt ábrán az látható, hogy a  $t$  időpillanatban érvényes hullámfrontból hogyan lehet az elemi gömbhullámok (körhullámok) segítségével megszerkeszteni a  $t + \Delta t$  időpillanatban érvényes hullámfrontot.



Példaként nézzük meg, hogy a Huygens-elv segítségével hogyan lehet számszerűen leírni a visszaverődés és törés szabályszerűségeit, amelyeket a fenti kísérletekben tapasztaltunk.

A visszaverődést az alábbi ábra *a)* részén láthatjuk, ahol egy felületre, a felület normálisával  $\alpha_0$  szög bezáró irányban egy síkhullám érkezik. Ezt abban a pillanatban ábrázoltuk, amikor a hullámfront egy pontja (*A*) éppen eléri a felületet. Az ábrán  $\Delta t$  idő múlva (amikor a hullámfront *B* pontja is elérte a felületet) megszerkesztettük a visszavert hullámfrontját a Huygens-elv segítségével. A hullám haladási iránya a visszaverődés után a

<sup>1</sup> Christiaan HUYGENS (1629-1695) holland fizikus.

felület normálisával  $\alpha_v$  szöget zár be. Az ábráról leolvasható, hogy a beeső és visszavert hullám haladási iránya szimmetrikus a beesési merőlegesre, vagyis

$$\alpha_b = \alpha_v.$$

A visszaverődés itt tárgyalt törvényén alapul az optikában használt tükrök működése.

A *b)* ábrán az *1* közegben a felületre beeső hullám átmegy a *2* közegbe, ahol

haladási irányát a felület normálisával bezárt  $\alpha_t$  *törési szöggel* adjuk meg. A két közegben a hullám terjedési sebessége eltérő:  $v_1$  és  $v_2$ . Az új hullámfrontot most a *2* közegben szerkesztettük meg. Az ábrából kiderül, hogy az új közegbe behatoló (a határfelületen átmenő) hullám törésére érvényes a

$$\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

összefüggés. Az így bevezetett  $n_{21}$  mennyiség a *2* közegnek az *1* közegre vonatkozó törésmutatója. Ezen a törvényen alapul számos optikai eszköz (pl. lencsék, prizma) működése.

A visszaverődés és törés törvényeinek megfogalmazásánál hasznos a hullám haladási irányát jellemző *sugarak* bevezetése. A sugár az a vonal amely mentén a hullám által szállított energia terjed. Ez izotróp közegben az azonos fázisú síkokra merőleges vonal, amely homogén közegben egyenes, inhomogén közegben megtört vagy görbe vonal. Így például homogén, izotróp közegben terjedő síkhullámban a sugarak az azonos fázisú síkokra merőleges, egymással párhuzamos egyenesek, gömbhullámban pedig a forrásból kiinduló sugárirányú egyenesek. A hullámnak egy véges felületen átmenő részét *sugárnyalábnak* nevezik (ez valóban a sugarak egy nyalábja).

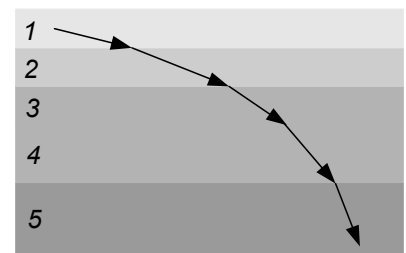
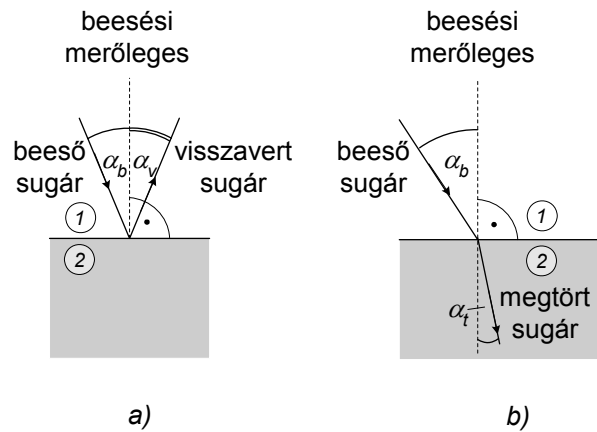
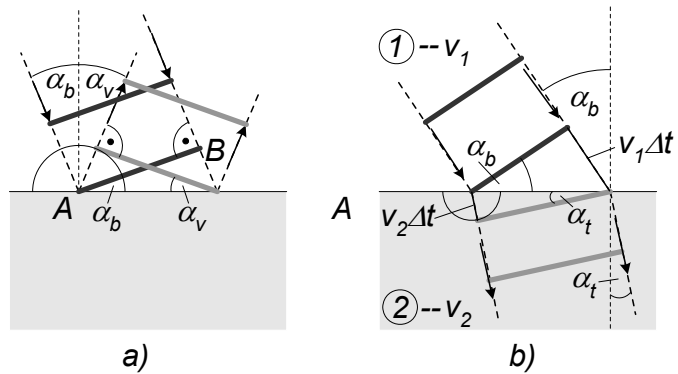
A visszaverődés és törés fent megállapított szabálya a sugarak segítségével is megfogalmazható. A visszaverődés törvénye ebben a megfogalmazásban úgy hangzik, hogy egy határoló felületre beeső sugár  $\alpha_b$  beesési szöge (*a*) ábra)

megegyezik az  $\alpha_v$  visszaverődési szöggel, és a beesési sugár a beesési merőlegessel és a visszavert sugárral egy síkban van. A törés törvénye pedig úgy fogalmazható meg, hogy a határfelületre beeső sugár  $\alpha_b$  beesési szöge (*b*) ábra) és a határfelületen átmenő sugár  $\alpha_t$

törési szöge között a már tárgyalt  $\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = n_{21}$  összefüggés

áll fenn, a beesési sugár a beesési merőlegessel és a megtört sugárral egy síkban van.

Ezek a törvények nagy mértékben megkönnyítik a törésen és visszaverődésen alapuló optikai eszközök (pl. prizmák, tükrök, lencsék) működésének megértését és tervezését.



Ha a közeg inhomogén, akkor a törésmutató változása miatt a sugarak iránya változik. Réteges közegben az irányváltozás többszörösen megtört sugarakat eredményez (ábra), folytonosan változó közegben a sugarak folyamatosan görbülő vonalak.

### Visszaverődés és törés leírása a Fermat-elv segítségével

A visszaverődés és törés törvénye megkapható az ún. *Fermat-elv* segítségével, amely szerint két pont között egy hullámban felvett sugár mindig olyan útvonalon halad, amelyen az egyik pontból a másikba a *legrövidebb idő alatt* jut el.

Ez matematikailag az ábra jelöléseivel a következőképpen fogalmazható meg.

Az  $A$  és  $B$  pontok közötti útvonalon kiválasztott  $ds$  szakasz befutásához szükséges idő

$$dt = \frac{ds}{v},$$

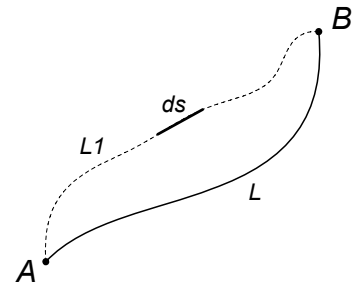
ahol  $v$  a hullám terjedési sebessége ezen a szakaszon. Az  $A$  és  $B$  közötti út befutásának ideje az  $L1$  pályán

$$\tau_{AB}^{L1} = \int_A^B \frac{1}{v} ds$$

(integrálni azért kell, mert a sebesség függhet a helytől).

A Fermat-elv szerint a hullám azon az  $L$  úton halad, amelyre

$$\tau_{AB}^L = \int_A^B \frac{1}{v} ds = \text{minimum}.$$



Ez az eddigi problémákhoz képest újszerű feladat: nem egy integrált kell meghatározni, hanem egy útvonalat, amelynél az integrál minimális (matematikailag ez egy ún. variációs számítási feladat).

\*\*\*\*\*

Az elv az optikában a fényút meghatározására használható, és más módon szokták megfogalmazni. Ha egy választott referencia közegben a hullám terjedési sebessége  $v_0$ , akkor a vizsgált közeg abszolút törésmutatója

$n = \frac{v_0}{v}$  így  $\frac{1}{v} = \frac{n}{v_0}$ . Ezzel a futási időre a

$$dt = \frac{1}{v_0} n ds$$

kifejezést kapjuk. Az itt szereplő  $n ds$  mennyiséget optikai úthossznak nevezik, és ezzel az  $A$  és  $B$  pontok közötti futási idő egy  $L$  pályán

$$\tau_{AB}^L = \frac{1}{v_0} \int_A^B n ds.$$

Mivel  $v_0$  állandó, a Fermat-elv a

$$\tau_{AB}^L = \int_A^B n ds = \text{minimum}$$

alakba írható, vagyis a hullám úgy halad, hogy az optikai úthossza a lehető legkisebb legyen.

\*\*\*\*\*

### Hullámterjedés homogén közegben

Az elv alapján könnyen belátható, hogy homogén közegben a hullám egyenes vonalban terjed, hiszen ekkor

$$\tau_{AB}^L = \int_A^B \frac{1}{v} ds = \frac{1}{v} \int_A^B ds = \text{minimum} .$$

Ekkor tehát az  $A$  és  $B$  pontokat összekötő vonal hosszának kell minimálisnak lenni, ez a vonal pedig a két pontot összekötő egyenes.

### Hullámterjedés közeghatáron történő áthaladásnál

Könnyen levezethető a Huygens-elvvel korábban már megkapott törési törvény is. Két különböző közegben lévő  $A$  és  $B$  pontok között a hullám haladási ideje az ábra jelöléseivel az alábbi módon írható fel

$$\tau_{AB} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} .$$

Az  $x$ -koordinátával kifejezve

$$\tau_{AB} = \frac{\sqrt{a^2 + (x - x_A)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (x_B - x)^2}}{v_2} .$$

A feladat a valódi útnak megfelelő  $x$  koordináta és abból az  $\alpha_b$  beesési- illetve  $\alpha_t$  törési szög meghatározása.

A Fermat-elv szerint a valódi úton  $\tau_{AB}$  minimális, vagyis

$$\frac{d\tau_{AB}}{dx} = 0 .$$

A differenciálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\tau_{AB}}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x - x_A}{\sqrt{a^2 + (x - x_A)^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{x_B - x}{\sqrt{b^2 + (x_B - x)^2}} = 0 .$$

Felhasználva, hogy

$$\sin \alpha_b = \frac{x - x_A}{\sqrt{a^2 + (x - x_A)^2}} \quad \text{és} \quad \sin \alpha_t = \frac{x_B - x}{\sqrt{b^2 + (x_B - x)^2}} ,$$

végül valóban az ismert

$$\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = \frac{v_1}{v_2}$$

törési törvényt kapjuk.

### Hullámterjedés közeghatárról történő visszaverődésnél

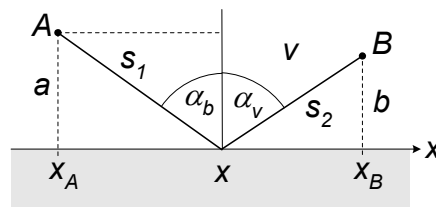
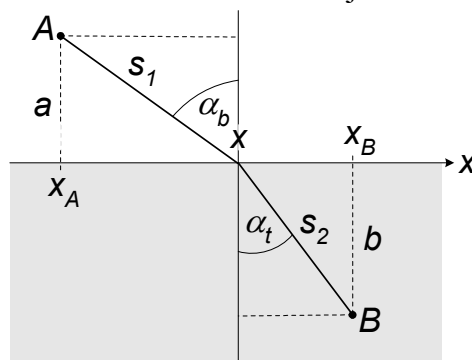
A visszaverődésre vonatkozó törvény a mellékelt ábra alapján teljesen hasonló módon kapható meg, ha az  $\alpha_t$  törési szöveget az  $\alpha_v$  visszaverődési szöggel helyettesítjük, és figyelembe vesszük, hogy a hullám a visszaverődés után is ugyanabban a közegben terjed, vagyis  $v_1 = v_2 = v$ .

Ekkor a

$$\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = 1$$

összefüggést kapjuk, amiből következik, hogy

$$\alpha_b = \alpha_v .$$



### A visszaverődési és törési törvény levezetése a hullámfüggvény segítségével

A visszaverődés és törés törvényét már levezettük a Huygens-elv és a Fermat-elv segítségével. Most bemutatjuk, hogy hogyan lehet tárgyalni a közeghatárhoz érkező hullám viselkedését a hullámfüggvény segítségével.

Vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy az 1 és 2 közeget elválasztó határfelület az  $xz$ -síkba-, a beeső hullám  $\mathbf{k}_b$  hullámszám-vektora pedig az  $xy$ -síkba essen (ábra). Az  $xy$ -síkot *beesési síknak* nevezik.

A beérkező hullámot harmonikus síkhullámnak tételezzük fel, amelynek hullámfüggvénye

$$\psi_b(\mathbf{r}, t) = A_b \cos(\omega t - \mathbf{k}_b \mathbf{r}).$$

A tapasztalat szerint, ha egy harmonikus síkhullám megérkezik a két közeget elválasztó határfelületre, akkor a beeső hullám mellett keletkezik egy visszavert- és egy áteresztett (megtört) síkhullám is, amelyeknek hullámfüggvénye

$$\psi_v(\mathbf{r}, t) = A_v \cos(\omega t - \mathbf{k}_v \mathbf{r})$$

illetve

$$\psi_t(\mathbf{r}, t) = A_t \cos(\omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r}).$$

Itt  $\mathbf{k}_v$  és  $\mathbf{k}_t$  a visszavert- és az átmenő hullám hullámszám-vektora.

Mivel a közeghatár két oldalán terjedő hullámok a felületen azonos változást okoznak, a hullámfüggvényekre a felületen fennáll, hogy

$$\psi_b(\mathbf{r}, t) + \psi_v(\mathbf{r}, t) = \psi_t(\mathbf{r}, t).$$

Mivel a zavarok a felület minden pontján, minden pillanatban azonosak, a hullámok fázisa itt nem különbözhet egymástól, vagyis

$$\omega t - \mathbf{k}_b \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k}_v \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r}.$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbf{k}_b \mathbf{r} = \mathbf{k}_v \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \mathbf{r}.$$

Az itt szereplő vektorok komponensei a következők:

$\mathbf{r}(x, 0, z)$ , mert a határfelületen vagyunk, és ez az  $xz$  síkban van,

$\mathbf{k}_b(k_{bx}, k_{by}, 0)$ , mert a koordináta-rendszer választása miatt az  $xy$  síkban van,

$\mathbf{k}_v(k_{vx}, k_{vy}, k_{vz})$ , mert ennek irányát nem tudjuk,

$\mathbf{k}_t(k_{tx}, k_{ty}, k_{tz})$ , mert ennek irányát sem tudjuk.

A fázisok egyenlőségéből két független egyenletet kapunk:

$$\mathbf{k}_b \mathbf{r} = \mathbf{k}_v \mathbf{r} \quad \text{és} \quad \mathbf{k}_b \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \mathbf{r}.$$

Behelyettesítve a vektorok komponenseit, az alábbi összefüggéseket kapjuk

$$k_{bx}x = k_{vx}x + k_{vz}z$$

$$k_{bx}x = k_{tx}x + k_{tz}z,$$

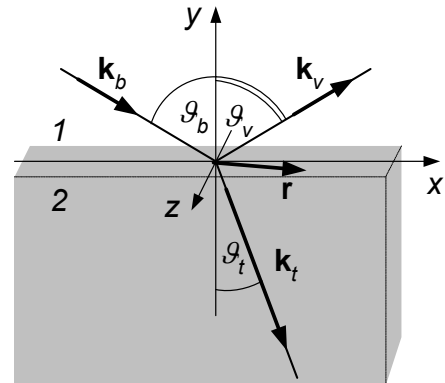
átrendezés után pedig

$$(k_{bx} - k_{vx})x - k_{vz}z = 0$$

$$(k_{bx} - k_{tx})x - k_{tz}z = 0.$$

Mivel  $x$  és  $z$  tetszőleges, ezek az egyenletek csak úgy állhatnak fenn, ha  $x$  és  $z$  együtthatói nullák. Ebből egyrészt az következik, hogy

$$k_{vz} = k_{tz} = 0,$$



tehát a visszavert és átmenő hullámok hullámszám-vektorai ( $\mathbf{k}_v$  és  $\mathbf{k}_t$ ) az  $xy$  síkban vannak. Másrészt

$$k_{bx} = k_{vx}$$

$$k_{bx} = k_{tx}$$

Utóbbi két egyenlet a

$$k_b \sin \vartheta_b = k_v \sin \vartheta_v$$

$$k_b \sin \vartheta_b = k_t \sin \vartheta_t$$

alakba is átírható.

Mivel a beeső- és a visszavert hullám is az  $I$  közegben terjed, hullámszám vektoraik megegyeznek ( $k_b = k_v = \frac{\omega}{v_1}$ ), ezért az első egyenlet azt jelenti, hogy  $\sin \vartheta_b = \sin \vartheta_v$ , tehát megkapjuk a visszaverődés ismert

$$\vartheta_b = \vartheta_v$$

törvényét.

A második egyenletből pedig a  $k_b = \frac{\omega}{v_1}$ ,  $k_t = \frac{\omega}{v_2}$  összefüggések felhasználásával a szintén a jól ismert törési törvényt kapjuk:

$$\frac{\sin \vartheta_b}{\sin \vartheta_t} = \frac{k''}{k} = \frac{v_1}{v_2}$$

Az ismert összefüggések mellett ebből a levezetésből az is kiderül, hogy ha a hullám terjedését a hullámszám-vektorokkal párhuzamos *sugarakkal* írjuk le, akkor a fenti eredményt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a beeső, a visszavert és áteresztett sugár is a beesési síkban van.

\*\*\*\*\*

### Intenzitásviszonyok határfelületről történő visszaverődésnél és határfelületen történő áthaladásnál

A törésre és visszaverődésre vonatkozó fenti megfontolásokból az is következik, hogy a határfelületen a beeső-, visszavert- és áteresztett hullámok amplitúdóira fennáll, hogy

$$A_b + A_v = A_t$$

Ahhoz, hogy az amplitúdókat meg tudjuk határozni, a határfelületen való áthaladásnál további fizikai összefüggésre van szükségünk. Felhasználhatjuk az energiamegmaradás tételét, amely szerint a beeső intenzitás ( $I_b$ ) megegyezik a visszavert ( $I_v$ ) és az áteresztett ( $I_t$ ) intenzitások összegével:

$$I_b = I_v + I_t$$

Behelyettesítve az intenzitásokra érvényes

$$I_b = \frac{1}{2} \rho_1 A_b^2 \omega^2 v_1$$

$$I_b = \frac{1}{2} \rho_1 A_v^2 \omega^2 v_1$$

$$I_b = \frac{1}{2} \rho_2 A_t^2 \omega^2 v_2$$

kifejezéseket, az alábbi egyenletet kapjuk

$$\rho_1 v_1 (A_b^2 - A_v^2) = \rho_2 v_2 A_t^2$$

Ez az

$$A_b + A_v = A_t$$

egyenlettel együtt lehetőséget ad az ismeretlen  $A_v$  és  $A_t$  amplitúdók meghatározására. A két közeg sűrűségét ( $\rho_1, \rho_2$ ), a hullámok terjedési sebességét a két közegben ( $v_1, v_2$ ) és a beeső hullám amplitúdóját ( $A_b$ ) ismertnek tételezzük fel.

A két egyenletből pl.  $A_v$ -re másodfokú egyenletet kapunk, amelyből a visszavert amplitúdó:

$$A_v = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A_b.$$

Ennek felhasználásával az áteresztett hullám amplitúdójára azt kapjuk, hogy

$$A_t = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A_b.$$

A hanghullámok vizsgálatánál hasznos egy közeg *hullám-impedanciájának* vagy *akusztikai keménységének* bevezetése, amelynek definíciója:

$$z = \rho v.$$

Az elnevezés onnan származik, hogy ez a mennyiség a hullámterjedésnél formálisan a váltóáramú áramkörökben használt impedanciához hasonló szerepet játszik. Ezzel az amplitúdók:

$$A_v = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$$

$$A_t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}.$$

A hullámterjedésnél fontos lehet a hullám által szállított energia visszavert illetve átment hányadának ismerete, amit az  $R$  *reflexiós-* illetve a  $T$  *transzmissziós tényezővel* szokás megadni. Ezeket az intenzitásokkal definiálják:

$$R = \frac{I_v}{I_b} = \frac{\frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 v_1 A_v^2}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 v_1 A_b^2} = \frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2}$$

$$T = \frac{I_t}{I_b} = \frac{I_b - I_v}{I_b} = 1 - \frac{I_v}{I_b} = 1 - R = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}.$$

Ezekből a kifejezésekből látható, hogy a  $z_1 \ll z_2$  illetve  $z_1 \gg z_2$  esetekben  $T \approx 0$  és  $R \approx 1$ , vagyis a hullám gyakorlatilag nem hatol be a második közegbe, hanem visszaverődik onnan. Ez az eset áll elő például, ha egy hanghullám levegő és szilárd anyag határához érkezik, hiszen az akusztikai keménységek nagyságrendje:

$z_{\text{szilárd}} \approx 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$ ,  $z_{\text{gáz}} \approx 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$ ). Ha azt akarjuk, hogy a hang behatoljon a másik közegbe, egy

átmeneti folyadékra célszerű alkalmazni  $z_{\text{folyadék}} \approx 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$ .

Ha a két közeg akusztikai ellenállása közel azonos ( $z_1 \approx z_2$ ), akkor a hullám majdnem teljesen áthalad a határon, és gyakorlatilag nincs visszavert hullám.

\*\*\*\*\*

### Hullámok találkozása, interferencia

Ha a tér egy pontjában két hullám van jelen, akkor hatásuk ott valamilyen módon összegződik. A hullámok összeadódását *interferenciának* nevezik.

Ha a szuperpozíció elve érvényes (és szélsőséges esetektől eltekintve általában érvényes), akkor adott helyen ( $\mathbf{r}$ ), a hullámok által okozott változás minden időpillanatban ( $t$ ) a két hullám által külön-külön okozott változások összege, vagyis a két hullámfüggvény egyszerűen összeadható:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2(\mathbf{r}, t).$$

Ezt a feltevést elfogadva, most az interferencia néhány egyszerű esetével foglalkozunk: megvizsgáljuk pontszerű forrásokban keltett gömbhullámok (két dimenzióban körhullámok)- és rugalmas kötélben terjedő, egydimenziós hullámok interferenciáját.

#### Egy-egy pontforrásban keltett két gömbhullám interferenciája

Általános következtetések levonására is alkalmas példaként vizsgáljuk meg két pontforrásból induló, azonos  $\omega$  körfrekvenciájú, harmonikus gömbhullám (vagy körhullám) interferenciáját.

##### Az amplitúdó térbeli eloszlása, az interferenciakép

Tegyük fel, hogy az ábrán látható  $O_1$  és  $O_2$  forrásokban létrehozott két rezgés amplitúdója különböző, és köztük  $\varphi$  fáziskülönbség van, így a rezgések időfüggését az

$$f_1(t) = A_1 \cos \omega t$$

$$f_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

függvényekkel adhatjuk meg.

Ha feltételezzük, hogy a vizsgált térrészben a hullámok amplitúdójának csökkenése még nem számottevő, akkor a két hullám hullámfüggvénye

$$\psi_1(r_1, t) = A_1 \cos(\omega t - kr_1)$$

$$\psi_2(r_2, t) = A_2 \cos(\omega t - kr_2 + \varphi)$$

alakban írható fel. Az interferencia eredményét egy tetszőlegesen választott  $P$  pontban számítjuk ki.

Az eredő hullám a  $P$  pontban a szuperpozíció elve szerint:

$$\psi(P, t) = \psi_1(r_1, t) + \psi_2(r_2, t).$$

Ez áttekinthetőbb alakban írható fel, ha felhasználjuk a rezgések összegzésénél a forgóvektoros módszerrel kapott összefüggést:

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

ahol

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

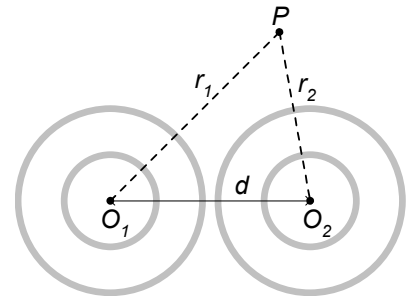
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

Most az  $\alpha_1 = -kr_1$  és  $\alpha_2 = -kr_2 + \varphi$  fázisszögek adott helyen állandók, így  $\alpha$  is az.

Ezzel az eredő hullám:

$$\psi(P, t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi)} \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

A  $P$  pontban tehát  $\omega$  körfrekvenciájú harmonikus rezgés jön létre (a kifejezés második tényezője), amelynek amplitúdója (az első tényező) a helytől függ:





$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi)} = A(P) = A(r_1, r_2).$$

Az amplitúdó maximális lesz akkor, ha a négyzetgyök alatti kifejezés maximális, vagyis ha  $\cos(kr_1 - kr_2 + \varphi) = +1$ . Ekkor  $A_{max} = A_1 + A_2$ , vagyis a két hullám amplitúdója összeadódik. A koszinusz függvény tulajdonságaiból következik, hogy maximális amplitúdó ott alakul ki, ahol

$$kr_1 - kr_2 + \varphi = \pm n2\pi,$$

vagyis a két hullám által a találkozásukig megtett utak  $\Delta s_{max} = r_1 - r_2$  különbsége:

$$\Delta s_{max} = \pm n\lambda - \frac{\varphi}{2\pi} \lambda \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Hasonlóan belátható, hogy a minimális amplitúdó  $A_{min} = A_1 - A_2$ , amely azokon a helyeken jön létre, ahol a hullámok közötti útkülönbség

$$\Delta s_{min} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{\pi} \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Ha a hullámok között nincs fáziskülönbség ( $\varphi=0$ ), akkor a két feltétel egyszerűbben megfogalmazható:

*maximális amplitúdó* ott jön létre, ahol a két hullám  $\Delta s$  útkülönbsége a *hullámhossz* egész számú többszöröse:  $\Delta s_{max} = \pm n\lambda$

*minimális amplitúdó* pedig ott, ahol az útkülönbség a *félhullámhossz* páratlan számú többszöröse:  $\Delta s_{min} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}$ .

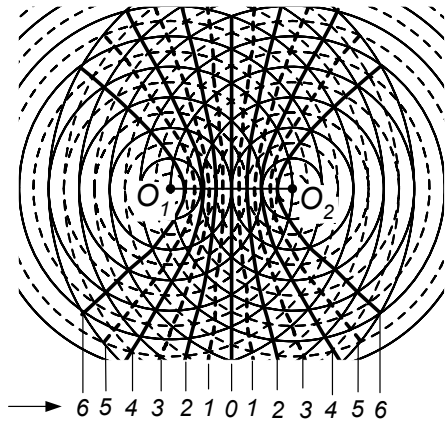
Ha a  $\varphi$  fáziskülönbség időben állandó, akkor a fenti egyenletekből azt kapjuk, hogy a maximális és minimális amplitúdójú (intenzitású) helyek síkban terjedő hullámoknál egy-egy időben állandó helyzetű hiperbola-seregen helyezkednek el, hiszen az  $r_1 - r_2 = \text{állandó}$  összefüggés hiperbola egyenlete.

Az ábrán a  $\varphi = 0$  eset látható. A két forrásból kiinduló körhullámok maximális amplitúdójú vonalait folytonos körök, a minimális amplitúdójú helyeket szaggatott vonallal rajzolt körök mutatják. Vastag vonalak jelzik az  $|r_1 - r_2| = m\frac{\lambda}{2}$  feltételnek megfelelő

hiperbolákat. A maximális amplitúdójú helyek az  $m = 0, 2, 4, 6$  értékeknek megfelelő folytonos vonalakon találhatóak. A két hullám útkülönbsége ezeken a helyeken a hullámhossz egész számú többszöröse. A minimális amplitúdójú helyek az  $m = 1, 3, 5$  értékeknek megfelelő szaggatott vonalakon helyezkednek el. Itt az útkülönbség a félhullámhossz páratlan számú többszöröse.

Ha  $\varphi \neq 0$ , de állandó, akkor is hiperbolákat kapunk, csak ezek az ábrán látható hiperbolákhoz képest eltolt helyzetűek lesznek.

Térbeli terjedés (gömbhullámok) esetén a maximális és minimális amplitúdójú helyek forgási hiperboloidokon helyezkednek el, amelyeket a fenti hiperboláknak az  $O_1 - O_2$  egyenes körül történő forgatásával kapunk meg.



**Intenzitáseloszlás a forrásoktól távol**

Az intenzitáseloszlás egyszerűen kiszámítható, ha a pontforrásoktól nagy távolságban, a forrásokat összekötő egyenessel párhuzamos egyenes (az ábrán az  $x$ -tengely) mentén vizsgáljuk, és az interferenciát csak kis  $x$ -tartományban vizsgáljuk (a  $\vartheta$  szög kicsi). Ekkor a mellékelt szematikus ábra jelöléseivel azt kapjuk, hogy

$$\sin \vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = \frac{x}{D}$$

illetve

$$\sin \vartheta \approx \frac{r_1 - r_2}{d}.$$

Ebből az

$$x \approx \frac{r_1 - r_2}{d} D$$

közelítő összefüggést kapjuk.

A maximumhelyek  $x$ -koordinátái eszerint

$$x_n^{\max} \approx \pm n \frac{\lambda}{d} D,$$

a minimumhelyeké pedig

$$x_n^{\min} \approx \pm (2n + 1) \frac{\lambda}{2d} D.$$

Ezek az összefüggések akkor használhatók, ha  $x$  és  $d$  sokkal kisebb, mint  $D$ , vagyis a források egymástól mért távolsága kicsi, a megfigyelés helye a forrásoktól távol van, és az interferenciát csak az  $O$  centrum közelében vizsgáljuk.

Az  $r_1 - r_2 \approx d \sin \vartheta$  összefüggést felhasználva az intenzitás szögfüggése az

$$I = 2I_0(1 + \cos(kr_1 - kr_2)) = 2I_0(1 + \cos(kd \sin \vartheta)) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi d \sin \vartheta}{\lambda} \right) \right)$$

alakba írható.

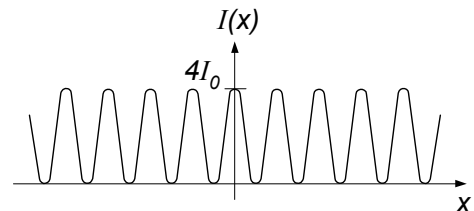
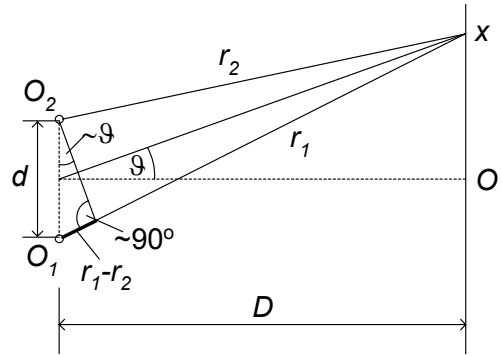
Ez tovább egyszerűsíthető, ha felhasználjuk az  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$  trigonometriai összefüggést:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \vartheta}{\lambda} \right).$$

Az  $x \approx \frac{r_1 - r_2}{d} D \approx D \sin \vartheta$  összefüggés segítségével az intenzitás helyfüggésére is kaphatunk egy egyszerűbb kifejezést:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d}{D \lambda} x \right).$$

Az intenzitás tehát az ernyőn periodikusan változik, maximális értéke az összetevő hullámok intenzitásának 4-szerese (ábra).



Ha az interferenciaképen megmérjük a maximális amplitúdójú helyek  $\Delta x$  távolságát akkor meghatározhatjuk a két forrásban keltett hullámok hullámhosszát. Erre a

$$\Delta x = x_{n+1}^{\max} - x_n^{\max} = \frac{\lambda D}{d}$$

összefüggés ad lehetőséget, amiből a hullámhosszra azt kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{d\Delta x}{D}.$$

Ha tehát ismerjük a források egymástól mért  $d$  távolságát és a megfigyelés síkjának a forrásoktól mért  $D$  távolságát, akkor a  $\Delta x$  távolság mérésével a hullámhossz meghatározható. Ez a lehetőség különösen fontos az optikában, ahol a hullámhossz közvetlen megfigyeléssel nem határozható meg. Az ábrán sematikusán azt is feltüntettük, hogy ha a két hullámforrást összekötő egyenessel párhuzamosan haladunk, akkor az amplitúdó jellegzetes – maximumok és minimumok sorozatából álló – helyfüggést mutat.

A két pontforrásból induló körhullámok interferenciája vízhullám kísérletekkel jól szemléltethető.

#### KÍSÉRLET:

Vízfelület két pontjában egyidejűleg azonos fázisú rezgéseket keltünk, és megfigyeljük a keletkező körhullámok interferenciáját (ábra). Az interferenciaképen jól láthatók azok a vonalak, amelyeken a maximális- és minimális amplitúdójú helyek találhatók (a közepre berajzolt függőleges vonal maximumhelyeket jelöl ki).



A hullámok interferenciájánál kialakuló jellegzetes, állandósult amplitúdó-helyfüggést *interferenciaképnek* nevezik. Állandósult interferenciakép azonban csak akkor alakul ki, ha a hullámok közötti fáziskülönbség időben nem változik. Az állandó fáziskülönbségű – tehát állandósult interferenciaképet létrehozó – hullámokat *koherens hullámoknak* nevezik. Interferencia természetesen akkor is létrejön, ha az interferáló hullámok fáziskülönbsége

nem állandó, de ekkor többnyire az interferenciakép is olyan gyorsan változik, hogy nem figyelhető meg.

Az eredő hullám amplitúdójának helyfüggésére vonatkozó egyenletet négyzetre emelve, az  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi)$  összefüggést kapjuk. Korábban már volt róla szó, hogy a hullám által szállított energia áramsűrűsége, az  $I$  intenzitás, az amplitúdó négyzetével arányos, vagyis a találkozó hullámokra és az eredő hullámra fennállnak az alábbi összefüggések:

$$I_1 = CA_1^2, \quad I_2 = CA_2^2, \quad I = CA^2.$$

Ezeket az összefüggéseket figyelembe véve, az amplitúdóra vonatkozó egyenletből az intenzitásokra az alábbi összefüggést kapjuk:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi).$$

Az interferenciánál tehát az eredő hullám  $I$  intenzitása nem egyszerűen az interferáló hullámok  $I_1$  és  $I_2$  intenzitásainak összege, hanem megjelenik egy – a helytől és a hullámok fáziskülönbségétől függő – *interferencia-tag*.

Ha a  $\varphi$  fáziskülönbség időben változik, azaz  $\varphi = \varphi(t)$ , akkor adott helyen ( $r_1, r_2$ ) a találkozó hullámok eredő intenzitása is függni fog az időtől

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi(t)) = I(r_1, r_2, t).$$

Ha tehát a hullámok nem koherensek, akkor az intenzitás-eloszlás időben változó lesz, vagyis nem alakul ki állandósult interferenciakép.

Ha a fáziskülönbség minden szabályszerűség nélkül, véletlenszerűen, és a megfigyelő (vagy a mérőeszköz) reakcióidejéhez képest gyorsan változik, akkor a megfigyelő az átlagos intenzitást észleli. Mivel ekkor az interferencia-tagban szereplő  $\cos(kr_1 - kr_2 + \varphi(t))$  időbeli átlaga nulla, a megfigyelt intenzitás a két hullám intenzitásának összege lesz:  $I = I_1 + I_2$ . Ilyenkor interferenciakép helyett egyenletes intenzitás-eloszlást észlelünk. (Ez az oka annak, hogy két közönséges lámpa fényének interferenciáját nem észleljük: a lámpák fényében a hullámok fáziskülönbsége véletlenszerűen változik, két ilyen lámpa nem koherens fényforrás.)

A két pontforrásban keltett gömbhullámok interferenciájával kapcsolatban még egy kérdést érdemes tisztázni. Eddig nem foglalkoztunk azzal, hogy hogyan befolyásolja az interferenciát a hullámforrások egymástól mért  $d$  távolsága. Nyilvánvaló, hogy a két hullám útkülönbsége nem lehet nagyobb, mint a  $d$  távolság. Ebből következik, hogy  $d$  csökkenésével egyre kevesebb olyan hiperbola lesz, amelyen teljesül az  $|r_1 - r_2| = m \frac{\lambda}{2}$  feltétel, vagyis csökken a maximális- és minimális amplitúdójú helyeket megadó hiperbolák száma. Ez az interferenciaképet megváltoztatja.

Ha elérjük a  $\frac{\lambda}{2} < d < \lambda$  értéket, akkor a fenti feltételnek már csak három útkülönbség felel meg: a  $-\frac{\lambda}{2}$ , a  $0$  és a  $+\frac{\lambda}{2}$ , vagyis középen lesz egy maximumhelyeket összekötő egyenes és két minimumhelyeket összekötő hiperbola. Ha a források távolságát tovább csökkentjük, és elérjük a  $d < \frac{\lambda}{2}$  értéket, akkor ez a két minimum-hiperbola is eltűnik, mert a gyengítés feltétele sehol nem teljesül.

A távolság további csökkenésénél a hullámtér bármely pontján egyre kisebb lesz a hullámok útkülönbsége, és a jellegzetes interferencia nem észlelhető: a két pontforrás olyan hullámot hoz létre, mintha csak egyetlen forrás volna.

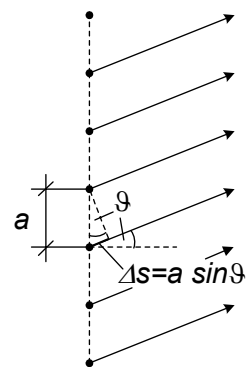
### Pontforrás-sor által keltett hullámok interferenciája

Sok pontforrásból induló, azonos frekvenciájú és amplitúdójú gömbhullámok interferenciáját abban az egyszerű esetben vizsgáljuk, amikor a pontforrások egy egyenes mentén egymástól azonos  $a$  távolságban helyezkednek el (ábra), nincs közöttük fáziskülönbség, és az interferenciát a forrásoktól nagyon nagy (elvileg végtelen) távolságban vizsgáljuk.

Ilyenkor az egyes pontokból kiinduló hullámok akkor erősítik egymást, ha az útkülönbségük a hullámhossz egész számú többszöröse. Az ábrából látható, hogy ez olyan irányokban teljesül, amelyekre fennáll, hogy

$$\Delta s_n = a \sin \vartheta_n = n\lambda,$$

Azaz 
$$\sin \vartheta_n = n \frac{\lambda}{a}.$$



Mivel a hullámok amplitúdója azonos, a maximális amplitúdó – a két pontforrás esetéhez hasonlóan – az egyes amplitúdók összege lesz. Ha  $N$  számú,  $A$  amplitúdójú pontforrás van,

akkor  $A_{max} = NA$  (Ennek megfelelően a maximális amplitúdójú irányokban az intenzitás  $I_{max} = N^2 I$  ahol  $I$  az egyes forrásokból érkező hullámok intenzitása).

A maximális amplitúdójú irányok között minimális (esetünkben nulla) amplitúdójú irányok találhatók, így a pontforrásokat összekötő egyenessel párhuzamosan haladva – a két pontforrás esetéhez hasonlóan – az amplitúdó periodikus térbeli változását tapasztaljuk.

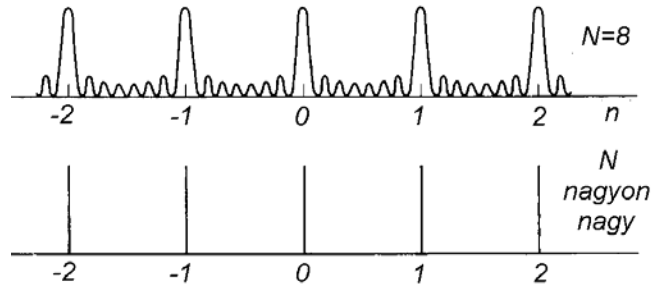
A mellékelt ábrán a különböző

$$n = \frac{a \sin \vartheta}{\lambda}$$

értékekhez tartozó

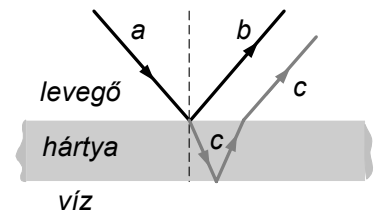
maximális intenzitások láthatók

különböző számú ( $N$ ) pontforrás esetén.



Az  $N=8$ -nak megfelelő ábra a fenti számítással nem egyezik. Ennek az az oka, hogy az eredő hullám amplitúdóját nem számítottuk ki, így csak a főmaximumok helyét tudtuk meghatározni. Ha a hullámokat valóban összegezzük (pl. a forgóvektoros módszerrel), akkor kiderül, hogy a főmaximumok között jóval kisebb amplitúdójú mellékmaximumok is vannak. Ezek intenzitása a források számának növelésével csökken: igen nagy számú forrás esetén a fenti ábra alsó részén látható, mellékmaximumok nélküli eloszlást kapjuk.

Az interferencia látványos megnyilvánulása az, hogy vékony hártáyról (pl. olajréteg a víz felületén) visszaverődő fényben színes csíkokat látunk. Ezt a hártya két oldaláról visszaverődő fényhullámok interferenciája okozza (ábra): a hártýáról a szemünkbe érkező  $b$  és  $c$  fényhullámok között útkülönbség van, ami függ attól, hogy milyen szög alatt nézünk a hártýára. Egy adott szög esetén az erősítés feltétele (az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse) csak egy bizonyos hullámhosszra (színre) teljesül, így ebből az irányból ezt a színt látjuk. A hártya különböző pontjairól – tehát különböző szög alatt – a szemünkbe érkező fénynél az erősítés feltétele különböző hullámhosszokra teljesül, ezért látunk különböző színű sávokat.



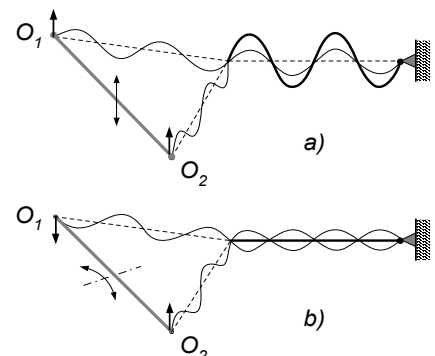
### Egy egyenes mentén egy irányban terjedő két harmonikus síkhullám interferenciája

A hullámok interferenciájának gyakori esete az, amikor az összetalálkozó két síkhullám ugyanazon egyenes mentén terjed. Vizsgáljuk meg az interferenciát abban az egyszerű esetben, amikor a közeg homogén, és a hullámok frekvenciája (és hullámhossza) azonos. Példaként ismét egy rugalmas kötélén terjedő transzverzális hullám szolgál.

#### KÍSÉRLET:

Egy Y alakban kiképezett rugalmas kötél szarát rögzítjük (ábra), és két azonos hosszúságú ágának  $O_1$  és  $O_2$  végén rezgetéssel hullámokat keltünk. A hullámok az ágak végigfutva közös szakaszon haladnak tovább, és összegződnek.

Ha az Y két végét az összekötő rúd segítségével azonos fázisban rezgetjük (a) ábra), akkor a közös szakaszon az amplitúdók összeadódnak, ellenkező fázisban történő rezgetésnél (b) ábra) a közös részen a hullámok kioltják egymást. Az ábrán az eredő hullámot vastag vonal jelzi.

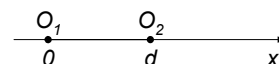


A kísérletről látszik, hogy a hullámok interferenciája egyaránt vezethet a hullám amplitúdójának növekedéséhez és csökkenéséhez (sőt eltűnéséhez)<sup>1</sup>. Az a tény, hogy két hullám összeadása a hullám megszűnését eredményezheti, a hullámok jellegzetes tulajdonsága.

A megfigyelt erősítés azzal magyarázható, hogy az azonos fázisú források esetén a két azonos utat befutott hullám azonos fázisban találkozik, így a rezgések a közös részen mindenütt azonos fázisban zajlanak, és erősítik egymást, a rezgési amplitúdók mindenütt összeadódnak. A gyengítés oka az, hogy az ellenkező fázisú forrásból jövő hullámok ellenkező fázisban találkoznak, így a rezgések mindenütt ellenkező fázisúak, és gyengítik (azonos amplitúdó esetén kioltják) egymást.

Az interferenciának ezt az esetét egyszerűen tárgyalhatjuk, ha a két pontforrásra vonatkozó számítás speciális estének tekintjük, és az interferenciát csak a két pontforrást összekötő egyenes mentén vizsgáljuk.

Ha az  $x$ -tengelyt az  $O_1 - O_2$  egyenesen vesszük fel, és a nulla pont az  $O_1$  forrás helyén van (ábra), akkor a két pontforrásra vonatkozó egyenletekből az  $r_1 = x$ ,  $r_2 = x - d$  helyettesítéssel kapjuk a síkhullámokra vonatkozó eredményt.



Eszerint az erősítés feltétele:

$$d = \pm n\lambda - \frac{\varphi}{2\pi} \lambda \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

a gyengítésé pedig

$$d = \pm(2n + 1) \frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{\pi} \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Érdekes két speciális eset megvizsgálni:

ha a hullámok között *nincs útkülönbség* (mint a korábban leírt kísérletben), akkor  $d = 0$ , tehát a hullámok akkor erősítik egymást, ha fáziskülönbségük  $\varphi = \pm n2\pi$  (a kísérletben  $n = \varphi = 0$  volt), és akkor gyengítik egymást ha  $\varphi = \pm(2n + 1)\pi$  (a kísérletben  $\varphi = \pi$  volt),

ha a hullámok között *nincs fáziskülönbség*, akkor  $\varphi = 0$ , tehát a hullámok akkor erősítik egymást, ha az útkülönbségük  $d = n\lambda$ , és akkor gyengítik egymást, ha  $d = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$ .

### Közeghatár felé haladó- és visszaverődő síkhullámok interferenciája, állóhullámok

Eddig feltételeztük, hogy az egymással kölcsönhatásba lépő hullámok olyan nagy méretű közegben terjednek, hogy a közeghatárról való visszaverődés elhanyagolható. Ez a valóságban általában nem így van (emlékezzünk az előző pontban ismertetett kísérletre, ahol ebből bonyodalmak származtak). Mivel ez elvileg és gyakorlatilag egyaránt fontos eset, most megvizsgáljuk egy határfelület felé haladó- és az onnan visszaverődő síkhullámok találkozásánál fellépő interferenciát.

A kialakuló hullámkép nagyon jól szemléltethető rugalmas kötélen terjedő hullámokkal.

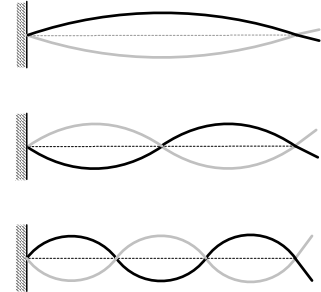
<sup>1</sup> Mint korábbi kötélexperimenteinknél is előfordult, a rögzített végről történő visszaverődés miatt itt is állóhullámok jönnek létre, amelyekkel később foglalkozunk. Ez azonban a levont következtetéseket nem befolyásolja.

**KÍSÉRLET:**

Rugalmas kötel egyik végét rögzítjük, másik végét megfogjuk, és lassú rezgésbe hozzuk. Ekkor a kötélvég felé haladó és onnan visszaverődő hullámok interferenciája általában rendszertelen hullámzást eredményez.

Ha a rezgetés frekvenciáját növeljük, akkor bizonyos frekvenciáknál sajátos hullámalakzatok jönnek létre. Vannak helyek amelyeknek a kitérése mindig nulla, ezek a *csomópontok*. A közöttük elhelyezkedő kötélszakaszokon mindenegyres pont ugyanolyan fázisban rezeg, de az amplitúdó a hely függvényében változik. Nincs rezgés a csomópontokban, és maximális amplitúdójú rezgés van a csomópontok közötti szakaszok felezőpontjában, ezeket *duzzadóhelyeknek* nevezik.

Az ábrán feltüntettünk néhány jellegzetes hullámalakzatot.



A kísérletben kialakult hullámalakzat sajátossága az, hogy – szemben a zavartalanul terjedő hullámmal – az azonos fázisú helyek nem mozognak, a kötel úgy viselkedik, mintha nem is terjedne benne hullám. Ezt a hullámalakzatot ezért *állóhullámnak* nevezik. (Az eddig tárgyalt hullámokat megkülönböztetésül gyakran *haladó hullámoknak* hívják.)

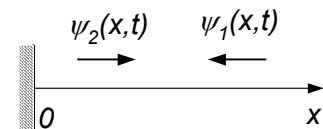
A jelenséget a közegethatár felé haladó és onnan visszavert hullámok interferenciájának vizsgálatával értelmezhetjük.

Tegyük fel, hogy a kötélen egy harmonikus síkhullám ( $\psi_1(x,t)$ ) az  $x$ -tengellyel szemben, a *rögzített kötélvég* felé mozog, és visszaverődése következtében létrejön egy másik ( $\psi_2(x,t)$ ) hullám, amely az  $x$ -tengely irányában halad (ábra). A két hullám hullámfüggvényei:

$$\psi_1(x,t) = A_1 \sin(\omega t + kx)$$

$$\psi_2(x,t) = A_2 \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Az eredő hullám a szuperpozíció elve alapján



$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = A_1 \sin(\omega t + kx) + A_2 \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Tudjuk, hogy a közegethatárnál (rögzített vég) a hullám terjedésére vonatkozóan teljesülni kell bizonyos feltételeknek, amelyeket általában *határfeltételeknek* vagy *peremfeltételeknek* neveznek. Ebben az esetben a peremfeltétel azt jelenti, hogy az  $x=0$  helyen rögzített vég van, nincs kitérés, tehát  $\psi(0,t) = 0$ . Ez viszont csak úgy lehetséges, ha  $\alpha = \pi$ , és  $A_1 = A_2$ , tehát a rögzített végről a hullám változatlan amplitúdóval, de ellenkező fázisban verődik vissza, ahogy azt a kísérleteink is mutatták. Ezzel az eredő hullám kifejezése így alakul

$$\psi(x,t) = A_1 (\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx + \pi)) = A_1 (\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)).$$

Felhasználva a  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$  összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\psi(x,t) = 2 A_1 \sin kx \cos \omega t.$$

Ennek a függvénynek az argumentumában nem jelenik meg a hullámokra jellemző „ $\omega t - kx$ ” kifejezés, tehát itt nem egy szokásos (haladó) hullám jön létre, hanem a kísérleteknél már említett állóhullám. Ez tulajdonképpen a közegnek egy rezgése, ahol a közeg egyes részei azonos fázisban rezegnek, de a rezgés  $\varphi$  amplitúdója a hely függvénye:

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \cos \omega t,$$

ahol

$$\varphi(x) = 2A_1 \sin kx = A \sin kx$$

(itt bevezettük a  $2A_1 = A$  jelölést).

Mivel véges hosszúságú kötélről van szó, foglalkoznunk kell a kötélmásik végének hatásával is, hiszen a hullám onnan is visszaverődik.

Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor a kötélmindkét vége rögzített. A kötélmásik végének rögzítése újabb peremfeltételt jelent, ami  $L$  hosszúságú kötélnél

$$\psi(L, t) = A \sin kL \cos \omega t = 0,$$

mégpedig minden időpillanatban. Ez csak úgy teljesülhet, ha az időfüggő rész együtthatója, vagyis az amplitúdó nulla:

$$\varphi(L) = A \sin kL = 0.$$

Adott hosszúságú kötélm esetén ez a feltétel csak a hullámszám megfelelő megválasztásával teljesíthető. Ez azt jelenti, hogy a mindkét végén rögzített rugalmas kötélen vagy egy rugalmas húrban olyan hullámszámú állóhullámok alakulhatnak ki, amelyekre fennáll a

$$kL = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

illetve

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

feltétel. Itt a különböző  $n$  értékeknek megfelelő hullámszámokat  $k_n$ -el jelöltük.

Ezzel az amplitúdó helyfüggését megadó összefüggés így alakul

$$\varphi_n(x) = 2A \sin n\pi \frac{x}{L}.$$

Ezt a függvényt mutatja különböző  $n$  értékek esetén a mellékelt ábra. Látható, hogy a számolásból valóban a kísérleteknek megfelelő alakzatokat kapunk.

Az állóhullám-feltétel a  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  összefüggés

felhasználásával a hullámhosszal is kifejezhető:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

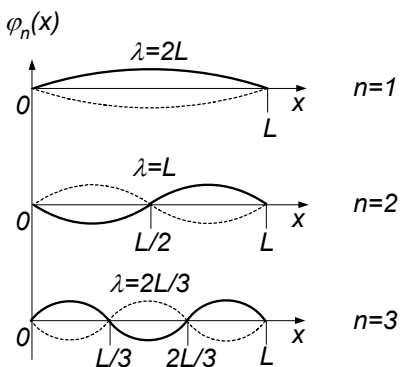
Ez azt jelenti, hogy ha egy kifeszített, két végén rögzített kötélmbe létrehozunk egy zavart, akkor abban ilyen hullámhosszú állóhullámok alakulhatnak ki.

A feltétel még egy alakban megfogalmazható, hiszen a hullámszám (hullámhossz) a rezgés körfrekvenciájával is összefüggésbe hozható:  $k = \frac{\omega}{v}$  ( $v$  a fázissebesség). Így a lehetséges frekvenciákra azt kapjuk, hogy

$$\omega_n = n \frac{\pi v}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ha tehát az említett kísérletben a kötelet lengetjük, vagyis benne kényszerrezgést hozunk létre, akkor állandósult hullámalkázat csak olyankor jön létre, ha a kötélmvégét a fenti feltételnek megfelelő frekvenciával mozgatjuk. Ezzel magyarázható, hogy a kísérletben csak bizonyos frekvenciáknál alakul ki a jellegzetes állóhullám alakzat.

A jelenség tulajdonképpen egy *rezonancia*. Ezzel kapcsolatban emlékeztetünk arra, hogy több szabadsági fokú rendszer csatolt rezgései esetén a rendszernek annyi *normálfrekvenciája* van, amennyi a szabadsági fokok száma. A fenti összefüggés a két végén rögzített kötélm normálfrekvenciáit adja meg. Amikor a rezgetéskor eltaláljuk az egyik normálfrekvenciát,





akkor rezonanciaszerűen kialakul a megfelelő állóhullám alakzat. Ezek a normálfrekvenciák tehát egyben a rendszer *rezonanciafrekvenciái* is.

A fenti körfrekvenciák felhasználásával felírhatjuk az állóhullámok hullámfüggvényeit:

$$\psi_n(x, t) = 2A \sin n\pi \frac{x}{L} \cos \omega_n t .$$

Az  $n=1$  értékhez tartozó frekvenciát *alapfrekvenciának*, az  $n>1$  értéknek megfelelő frekvenciákat *felharmonikusoknak* nevezik.

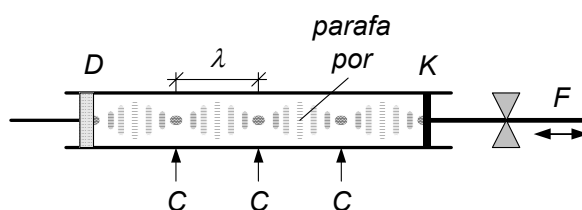
Az elmondottak értelemszerű változtatásokkal érvényesek a húros hangszerekben használt hurok transzverzális rezgéseire és a mindkét végükön zárt légoszloppal működő sípokban létrejött longitudinális hullámokra is. Az  $n=1$  értéknek megfelelő frekvenciájú hangot itt *alaphangnak* nevezik.

Légoszlopban létrejött állóhullámok jól demonstrálhatók a *Kundt-féle cső* segítségével.

### KÍSÉRLET:

Vízszintes helyzetű üvegcső aljára kevés parafa port szórunk, majd egyik végét mozgatható dugattyúval ( $D$ ) zárjuk le, másik végébe pedig egy fémhálcára ( $F$ ) erősített könnyű korongot ( $K$ ) helyezünk (ábra). A fémhálcában dörzsöléssel longitudinális hullámokat keltünk, amelyek az üvegcsőben lévő légoszlopra áterjednek. Ezt a parafa szemcsék mozgása mutatja. Ha a  $D$  dugattyút mozgatjuk, akkor találhatunk olyan helyzeteket, amikor a parafa szemcsék szabályos (periodikus) elrendezést mutatnak (ábra). Az ábrán  $C$ -vel jelölt helyeken a szemcsék összegyűlnek, a közbülső helyeken pedig szétszóródnak.

A kialakult kép magyarázata az, hogy a  $D$  dugattyú bizonyos helyzeteinél teljesül az állóhullám-feltétel, és a gázoszlopban longitudinális állóhullámok jönnek létre. Ekkor a nagy amplitúdójú rezgési helyeken (rezgési duzzadóhelyek) a parafa szemcsék szétszóródnak, a rezgési csomópontokban ( $C$ ) pedig összegyűlnek.



Rugalmas köté, húr vagy légoszlopok rezgéseinél a valóságos helyzet általában eléggé bonyolult. Egy zavart elindítva, általában az összes lehetséges frekvencián létrejön rezgés, de ezek közül az alapfrekvenciának megfelelő állóhullám marad meg a legnagyobb amplitúdóval. Emellett azonban kisebb amplitúdóval jelen vannak a felharmonikusok is. A különböző konstrukciójú húros és fúvós hangszerek hangjában más és más a felharmonikusok intenzitása, amit a fülünk hangszíntérésként érzékel. Ezért tudjuk megkülönböztetni egymástól a különböző hangszerek hangját, még akkor is, ha azonos hangmagasságú (frekvenciájú) alaphangon szólnak.

Hasonló gondolatmenettel határozhatjuk meg *egyik végén szabad* rugalmas köté vagy pálcá-, továbbá egyik végén nyitott légoszlop rezgéseinél kialakuló állóhullámokat.

A hullám amplitúdója itt sem változik meg ( $A_1 = A_2 = A$ ), továbbá  $\alpha = 0$  (a szabad végről a hullám változatlan amplitúdóval és változatlan fázissal verődik vissza), így az eredő hullám

$$\psi(x, t) = A(\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx)),$$

amiből trigonometriai átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\psi(x, t) = 2A \cos kx \sin \omega t .$$

Ha a másik vég most is rögzített, akkor az amplitúdóra vonatkozó másik peremfeltétel most is

$$\varphi(x) = 2A \cos kL = 0,$$

vagyis

$$kL = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

A lehetséges hullámszámokra, hullámhosszakra és körfrekvenciákra ebből azt kapjuk, hogy

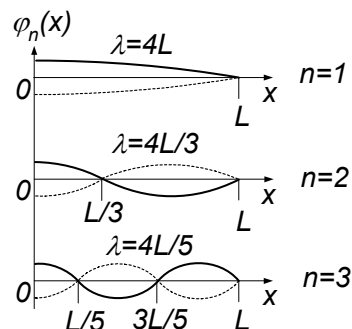
$$k_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2L}, \quad \lambda_n = \frac{4L}{(2n - 1)}, \quad \omega_n = (2n - 1) \frac{v\pi}{2L}.$$

Az egyes  $n$  értékeknek megfelelő amplitúdófüggvények most tehát a

$$\varphi_n(x) = 2A \cos\left((2n - 1) \frac{\pi x}{2L}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

függvényekkel adhatók meg.

Ezek a függvények láthatók a mellékelt ábrán különböző  $n$  értékek esetén.



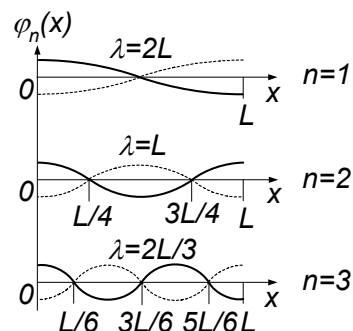
Mindkét végén szabad pálca vagy mindkét végén nyitott gázoszlop esetén a második peremnél is maximális amplitúdó jön létre, vagyis

$$\cos kL = \pm 1, \quad kL = n\pi.$$

Ez megegyezik a két rögzített vég esetén kapott feltétellel, vagyis például a lehetséges hullámhosszakra itt is azt kapjuk, hogy

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

A kialakult állóhullám azonban különbözik a két végen rögzített esettől, mert most mindkét végen maximális az amplitúdó, amint az a mellékelt ábrán látható.



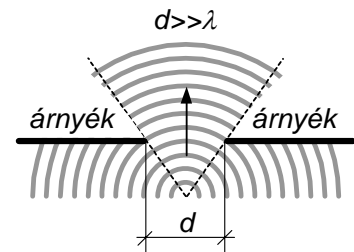
### Hullámok elhajlása (diffrakció), a Huygens–Fresnel-elv

A hullámok terjedését eddig olyan esetekben vizsgáltuk, amikor a terjedést korlátozó, vagy módosító felületek (közeghatárok) nagyméretűek voltak, a közegekben pedig – a határoktól eltekintve – a hullámterjedés homogén és izotróp volt. A hullámok terjedését azonban lényegesen befolyásolja, ha az útjukba véges méretű akadályok vagy rések kerülnek.

Ha ezeknek a mérete sokkal nagyobb, mint a hullámhossz, akkor még nincs jelentős változás. Ezt szemlélteti a következő kísérlet.

#### KÍSÉRLET:

Hullámok egy pontjában létrehozunk egy körhullámot, és egy – a hullámhosszhoz képest – nagyméretű résen bocsátjuk át. A rés után nagyjából az ábrán látható hullámképet látjuk. Ebben az esetben tehát szabályos árnyék keletkezik, a hullám jó közelítéssel egyenes vonalban terjed, az egyenesekkel határolt, geometriai árnyéktérbe nem – vagy alig – hatol be.

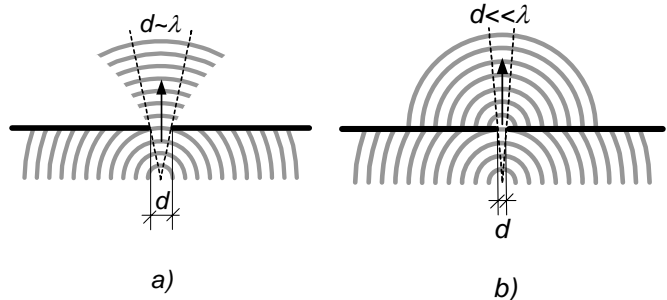


A hullámok egyenes vonalú terjedése teszi lehetővé, hogy a hullámterjedést a sugarak bevezetésével sok esetben egyszerű geometriai szerkesztésekkel tudjuk nyomon követni, és egyszerű magyarázatot adjunk számos optikai eszköz működésére (ezzel a geometriai optika foglalkozik).

Vannak azonban olyan esetek, amikor a hullám lényegesen eltér az egyenes vonalú terjedéstől. Ez történik pl. akkor, ha az előbbi kísérletben a rés méretét lecsökkentjük.

#### KÍSÉRLET:

Az előbbi kísérletben csökkentjük a rés méretét. Amikor a rés mérete közel azonos a hullámhosszal (a) ábra), akkor a hullám jelentősen behatol az árnyéktérbe, az egyenes terjedéshez képest „elhajlik”. Még jelentősebb eltérés következik be, ha a rés mérete sokkal kisebb a hullámhossznál (b) ábra), hiszen ekkor – mint azt korábban már láttuk – a rés pontforrásként viselkedik.



Már a nagyméretű rés esetén is utaltunk arra, hogy az egyenes vonalú terjedés csak jó közelítéssel valósul meg. Pontosabb megfigyelések azt is megmutatják, hogy bármilyen akadály szélénél is bekövetkeznek az egyenes vonalú terjedéstől eltérő jelenségek.

#### KÍSÉRLET:

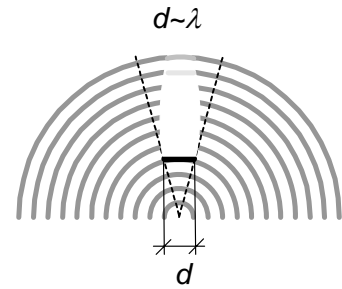
Ezt megfigyelhetjük egy hullámkádban, ha egy nagyobb hullámhosszú hullám egy akadály széle mellett halad el (ábra).



Kis méretű akadály esetén a hullám az akadály mindkét szélén behatol az árnyéktérbe.

**KÍSÉRLET:**

Hullámkádban keltett körhullám útjába a hullámhosszal összemérhető akadályt helyezünk el. A hullámok jól láthatóan behatolnak az akadály mögötti geometriai árnyéktérbe.



További vizsgálatok – amelyekről részletesebben a fényhullámoknál lesz szó – azt mutatják, hogy a hullám intenzitáseloszlása nem olyan egyszerű, mint amiről eddig szó volt. Ez legjobban fényhullámokkal mutatható be, de a jelenség hullámkádban is megfigyelhető.

**KÍSÉRLET:**

Vízfelületen létrehozott hullám útjába kis méretű rést helyezünk el. Ha résméretet és a hullámhosszt megfelelően választjuk meg, akkor a rés túloldalán a pontforrások interferenciájához hasonló hullámalakzatot látunk. Itt az egyenes terjedéstől való eltérés mellett a résen áthaladt hullámban maximális és minimális amplitúdójú helyeket mutató vonalak figyelhetők meg.



Ehhez hasonló képet kapunk akkor is, ha a hullám egymás mellett elhelyezett rések sorozatán (rácson) halad át.

Az itt bemutatott eseteken kívül is számos tapasztalat mutatja, hogy ha a hullám réseken halad át, vagy véges méretű akadályokba ütközik, akkor az egyenes vonalú terjedéstől jelentős eltérések figyelhetők meg. A hullámnak az egyenes vonalú terjedéstől való eltérését *hullámelhajlásnak* vagy *diffrakciónak*-, az ezzel kapcsolatos jelenségeket *elhajlásjelenségeknek*-, a létrejött hullámalakzatot pedig *elhajlási képnek* vagy *diffrakciós képnek* nevezik.

Az elhajlásjelenségek a Huygens-elvvel már nem értelmezhetők. Ennek alapvető oka az, hogy a Huygens-elv nem veszi figyelembe a terjedő hullám intenzitásviszonyait, így nem tudja értelmezni sem az árnyékjelenséget, sem pedig azt, hogy a hullám részlegesen behatol az árnyéktérbe. Ezt a problémát oldja meg a *Fresnel*<sup>1</sup> által javasolt módosítás, amely szerint az új hullámfrontot nem az elemi hullámok burkolófelületeként értelmezzük, hanem az *elemi hullámok interferenciájából* számítjuk ki. Ez a *Huygens–Fresnel-elv*.

A Huygens–Fresnel-elv tehát nem egyszerűen a geometriai terjedési szabályokat veszi figyelembe, hanem azt is, hogy az interferencia miatt az elemi hullámok a hullámtér egyes tartományaiban egymást erősíthetik vagy gyengíthetik (esetleg kioltják) egymást, vagyis intenzitásváltozások következhetnek be.

A Huygens–Fresnel-elv alapján elvégzett számításokból derül ki, hogy az árnyékjelenség oka az, hogy az elemi hullámok a rés túloldalán, az "árnyéktérben" – a rés méretétől függő mértékben – kioltják egymást. Ezzel egyúttal az árnyéktérbe való behatolás különböző esetei is értelmezhetők.

<sup>1</sup> Augustin Jean FRESNEL (1788-1827) francia fizikus.

Az is megmagyarázható, hogy miért jelennek meg az interferenciára jellemző hullámalakzatok. A Huygens–Fresnel-elv szerint ugyanis a hullámfront minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki, és a hullámtér egy adott pontjában az amplitúdót ezek interferenciája adja meg. Egy rés mögött tehát olyan interferenciakép jelenik meg, amely a résben elképzelt végtelen sok pontforrásból kiinduló, koherens hullámok interferenciájának felel meg.

A diffrakció különösen fontos szerepet játszik az optikában, ahol ezt a jelenséget *fényelhajlásnak* nevezik. A diffrakcióra vonatkozó optikai kísérletekkel és az egyszerűbb elhajlásjelenségek értelmezésével az elektromágneses hullámoknál foglalkozunk.

### Rugalmas hullámok dinamikai leírása

A hullám leírása akkor teljes, ha a hullámfüggvényt a hullámot létrehozó hatások és a terjedését befolyásoló határfeltételek ismeretében meg tudjuk határozni, vagyis ismerjük a hullámfüggvény meghatározására szolgáló fizikai egyenletet. Emellett a hullám által szállított energia meghatározása is fontos feladat.

Ezeknek a problémáknak a megoldásához a különböző zavarterjedési mechanizmusok esetén más és más eszközöket és alaptörvényeket kell felhasználnunk, ezért a rugalmas hullámokkal és az elektromágneses hullámokkal külön foglalkozunk. A tárgyalást a rugalmas hullámokkal kezdjük.

#### A hullámegyenlet

Első célunk az, hogy egy olyan fizikai egyenletet találjunk, amely alkalmas a hullámfüggvény meghatározására. Ezt az egyenletet *hullámegyenletnek* nevezik.

Rugalmas hullámok esetén a hullámegyenlet felírásánál abból indulhatunk ki, hogy a hullám keltésekor erőt fejtünk ki a közeg egy kis térfogatelemére, ezért a hullámegyenletet a hullámban elmozduló közeg egy kis térfogatelemére felírt mozgásegyenlet segítségével kaphatjuk meg.

##### *Hullámegyenlet egydimenziós, longitudinális rugalmas hullámok esetén*

A közeg elemi darabjára felírt mozgásegyenletben természetesen nem szerepel a hullámfüggvény, ezért a feladat az, hogy a mozgásegyenletben szereplő, helytől és időtől függő mennyiségeket a hullámfüggvénnyel fejezzük ki. Ekkor a hullámfüggvényre vonatkozó differenciálegyenletet kapunk.

Először egy  $S$  keresztmetszetű rugalmas rúdban  $x$ -irányban terjedő egydimenziós longitudinális hullámra végezzük el a számolást. A

mozgásegyenlet egy  $dm$  tömegű térfogatelemre (ábra)

$$dF_x = dm \cdot a_x.$$

Ebből úgy lesz hullámegyenlet, hogy a rúd elemi darabjára ható  $dF_x$  erőt és a gyorsulást kapcsolatba hozzuk a  $\psi$  hullámfüggvénnyel.

Első lépésként határozzuk meg adott  $x$  koordinátájú keresztmetszetre a  $t$  időpillanatban fellépő erőt, amely a rúd hosszirányú deformációjának következménye. Ehhez alkalmazzuk a Hooke-törvényt, amely egy rugalmas test megnyújtásánál vagy

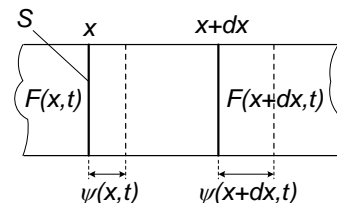
összenyomásánál a testre ható  $F$  erőt összefüggésbe hozza az  $\varepsilon = \frac{d\ell}{\ell}$  deformációval:

$$F = SE\varepsilon$$

( $E$  a Young-modulus).

Esetünkben a deformáció a kiválasztott térfogatelem relatív hosszváltozása, ami viszonylag egyszerűen kifejezhető a hullámfüggvénnyel. Egy adott  $t$  időpillanatban az ábrán látható térfogatelem két végének relatív elmozdulását éppen a hullámfüggvény  $x$ - és  $x+dx$  helyeken felvett értékeinek a különbsége adja meg, vagyis  $d\ell = \psi(x+dx, t) - \psi(x, t)$ . A térfogatelem eredeti hossza  $\ell = dx$ . Így az elemi térfogat  $\varepsilon$  deformációját az

$$\varepsilon = \frac{d\ell}{\ell} = \frac{\psi(x+dx, t) - \psi(x, t)}{dx}$$



kifejezés adja meg. Ez tulajdonképpen a  $\psi(x,t)$  függvény  $x$  szerinti differenciálhányadosa.

Mivel itt egy kétváltozós függvényt csak az egyik változója szerint differenciálunk (és közben a másik változót állandónak tekintjük), ezt a differenciálhányadost parciális deriválnak nevezik, és jelölésére a szokásos „ $d$ ” szimbólum helyett a „ $\partial$ ” szimbólumot használják. Ezzel a jelöléssel a deformáció:

$$\varepsilon = \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}.$$

A Hooke-törvény szerint az erő és a deformáció arányos egymással, vagyis

$$F_x(x,t) = SE\varepsilon(x,t) = SE \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}.$$

Ez az erő adott  $t$  időpillanatban a hely függvénye, így a rúd egy  $dx$  hosszúságú elemi darabjára ható eredő erő ebben a pillanatban

$$dF_x = F(x+dx,t) - F(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dx.$$

Az erő helyfüggését megadó összefüggés felhasználásával ebből azt kapjuk, hogy

$$dF_x = SE \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} dx.$$

Ezzel a mozgásegyenlet baloldalát sikerült a hullámfüggvénnyel kifejeznünk.

A gyorsulás a helykoordináta (itt a hullámfüggvény) második időderiváltja, azaz

$$a_x = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2},$$

így a mozgásegyenlet jobboldalán is megjelent a hullámfüggvény.

Fejezzük ki még a vizsgált térfogatelem tömegét a  $\rho$  sűrűséggel:

$$dm = Sdx\rho.$$

A fenti összefüggések felhasználásával  $dF_x = dm \cdot a_x$  mozgásegyenlet a hullámfüggvénnyel kifejezve az

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

alakot ölti.

Ez a hullámterjedést leíró *hulláme egyenlet* egy rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullám esetén.

### ***Hulláme egyenlet gázoszlopban terjedő longitudinális hullám esetén***

Az alapelv ugyanaz, mint a rúdban terjedő longitudinális hullámoknál, vagyis a gázoszlop egy elemi darabjára felírjuk a mozgásegyenletet, majd a gyorsulást és az erőt kifejezzük a hullámfüggvénnyel.

A mozgásegyenlet

$$dF_x = dm \cdot a_x,$$

ahol  $dF_x$  a kiválasztott térfogatelemre ható erő,  $a_x$  a térfogatelem gyorsulása,  $dm$  pedig a tömege.

Itt az erő az  $x$ -tengely adott helyén létrejött nyomásesésből származik, amire a  $t$  időpillanatban az

$$F(x,t) = -Sdp(x,t)$$

összefüggés érvényes.

A rugalmasságtanból tudjuk, hogy egy gáz összenyomására a

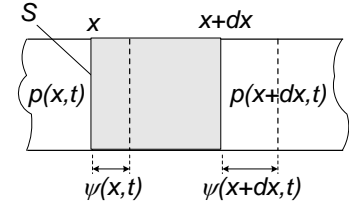
$$dp = -K \frac{dV}{V}$$

összefüggés érvényes. Mivel  $V = Sdx$ , és  $dV = Sd\psi = S \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$ , azt kapjuk, hogy

$$dp(x,t) = -K \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Egy  $x$  helyen  $t$  időpillanatban fellépő erő ennek alapján

$$F(x,t) = SK \frac{\partial \psi}{\partial x}$$



Egy kiválasztott térfogatelemre ható eredő erőt az erőnek a kiválasztott hosszön történő

$$dF_x = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dx = SK \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} dx$$

megváltozása adja meg.

A gyorsulás most is

$$a_x = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2},$$

és

$$dm = Sdx\rho_0,$$

ahol  $\rho_0$  a gáz átlagos sűrűsége.

A fenti összefüggésekkel a mozgásegyenlet az

$$SK \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} dx = Sdx\rho_0 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

alakot ölti.

Egyszerűsítések után ebből egy *gázoszlopban terjedő longitudinális hullámra* a

$$\frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

*hullámegyenletet* kapjuk.

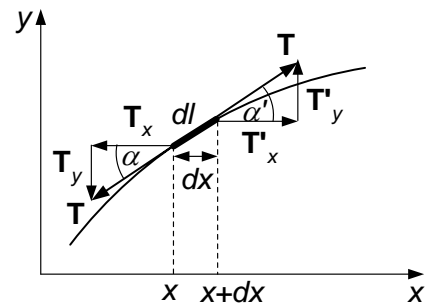
### **Hullámegyenlet rugalmas húrban terjedő, transzverzális hullámokra**

Egy  $x$ -tengelyen elhelyezkedő rugalmas húr a rezgései közben az eredeti helyzetéből arra merőlegesen kitér (ábra), és a húr mentén transzverzális hullám terjed. Az eközben létrejött  $y$ -irányú kitérés hely és időfüggését az  $y = \psi(x,t)$  hullámfüggvénnyel jellemezzük.

A hullámegyenletet most is egy elemi  $dl$  hosszúságú húrszakaszra felírt mozgásegyenletből kaphatjuk meg.

A számolás során egyszerűsítő feltevéseket teszünk: elhanyagoljuk a húrszakasz  $x$ -irányú elmozdulását, és feltesszük, hogy a húrszakasz kitérése kicsi, vagyis a kitérést jellemző szögek ( $\alpha, \alpha'$ ) is kicsik (az ábra az áttekinthetőség érdekében nagyon torz).

A húr megfeszített állapotban van, a húr érintője irányába mutató feszítő erőt az ábrán  $\mathbf{T}$ -vel jelöltük.





A  $dm$  tömegű elemi szakaszra felírt mozgásegyenlet  $y$ -irányú összetevője:

$$dF_y = dma_y$$

Most  $F_y$ -t és  $a_y$ -t kell kifejezni  $\psi$ -vel.

Az erő  $y$ -komponense:

$$dF_y = T'_y + T_y = T \sin \alpha' - T \sin \alpha.$$

Mivel  $\alpha$ ,  $\alpha'$  kicsi:  $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$  és  $\sin \alpha' \approx \operatorname{tg} \alpha'$ , így

$$dF_y \approx T(\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha) = T d(\operatorname{tg} \alpha) = T \frac{\partial(\operatorname{tg} \alpha)}{\partial x} dx.$$

De tudjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ezért

$$\frac{\partial(\operatorname{tg} \alpha)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}.$$

Ezzel az erő kifejezése így alakul

$$dF_y = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx.$$

A mozgásegyenletben szereplő többi mennyiségre felírhatjuk, hogy

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$$

$$dm = \rho dl S \approx \rho dx S$$

( $\rho$  a húr anyagának sűrűsége,  $S$  a húr keresztmetszete).

Ezeket a mozgásegyenletbe behelyettesítve, megkapjuk annak hullámfüggvénnyel kifejezett alakját:

$$\frac{T}{\rho S} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}.$$

Ez a *hullámeqyenlet* megfeszített húrban terjedő transzverzális hullámokra.

#### **Az egydimenziós hullámeqyenlet általános alakja**

Láttuk, hogy többféle hullámterjedési esetre ugyanolyan alakú hullámeqyenletet kaptunk: ezek a különböző esetekben csak az egyenletek baloldalán szereplő, anyagjellemzőket és geometriai adatokat tartalmazó állandókban különböznek egymástól. Mindezek alapján sejthető, hogy itt általános törvényszerűségről van szó. Ha az egyenletek baloldalán megjelenő állandót  $B$ -vel jelöljük, akkor a hullámeqyenlet a

$$B \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$$

alakba írható, ahol

- rúdban terjedő longitudinális hullámnál  $B = \frac{E}{\rho}$ ,
- gázoszlopban terjedő longitudinális hullámnál  $B = \frac{K}{\rho_0}$  és
- húrban terjedő transzverzális hullámnál  $B = \frac{T}{\rho S}$ .

Nézzük meg, hogy mi a fizikai jelentése ennek az állandónak. Ezt az egyenlet megoldásával, vagyis a hullámfüggvény meghatározásával deríthetnénk ki (ekkor az állandó feltehetőleg megjelenik a hullámfüggvényben). Az egyenletet – kellő matematikai ismeretek híján – egyelőre nem tudjuk megoldani, de tudjuk, hogy a rúdban elvileg terjedhet harmonikus síkhullám, ezért az egyenletnek biztosan megoldása a harmonikus síkhullámot leíró

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

hullámfüggvény is.

Helyettesítsük be ezt a függvényt a hullámeqyenletbe, és nézzük meg, hogy milyen feltételek mellett lehet megoldás. A deriválásokat elvégezve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$-Bk^2 \cos(\omega t - kx + \alpha) = -\omega^2 \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$(Bk^2 - \omega^2) \cos(\omega t - kx + \alpha) = 0.$$

Ennek az egyenletnek bármilyen  $x$ - és  $t$  értékek mellett érvényesnek kell lennie, ami csak úgy teljesülhet, hogy a hely-és időfüggő rész együtthatója nulla:

$$Bk^2 - \omega^2 = 0.$$

Felhasználva a  $k = \frac{\omega}{v}$  összefüggést, azt kapjuk, hogy a  $B$  állandó közvetlen összefüggésben van a *hullám terjedési sebességével*:

$$v = \sqrt{B}.$$

Az *egydimenziós hullámeqyenlet általános alakban* tehát az alábbi módon írható fel:

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}.$$

Az egyes konkrét esetekben csak annyi a különbség, hogy a terjedési sebesség kifejezése más, amit a hullámeqyenlet levezetése során kapunk meg. A fentiek alapján a terjedési sebesség különböző terjedési körülmények között az alábbi összefüggésekkel adható meg:

longitudinális hullám rugalmas rúdban:  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ,

longitudinális hullám (nyomás- és sűrűség hullám) gázban:  $v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$ ,

transzverzális hullám húrban:  $v = \sqrt{\frac{T}{\rho S}}$ .

A terjedési sebességet bármilyen más esetben a fentiekhez hasonló módon, a hullámeqyenlet konkrét esetre történő levezetésével kaphatnánk meg. Így például

rugalmas rúdban terjedő nyírási hullámra a  $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  kifejezést kapjuk ( $G$  a nyírási

modulus).

Gázokban és folyadékokban gyakorlatilag csak longitudinális hullámok terjednek. Szilárd anyagokban longitudinális és transzverzális hullámok is terjednek, és terjedési sebességük eltérő: általában a longitudinális hullámok terjednek gyorsabban.

Megjegyezzük, hogy a hullámegyenlet általános alakja nem csak rugalmas hullámokra érvényes, hanem például az elektromágneses hullámokra is, csak ott a hullámfüggvény nem mechanikai jellegű változást, hanem az elektromos- és mágneses erőtér változását adja meg. Későbbi tanulmányaik során, amikor az elektromágneses hullám hullámegyenletét levezetik, akkor a fenti „ $B$ ” állandóra azt kapják, hogy

$$B = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r},$$

ahol  $\varepsilon_0$  a vákuum permittivitása,  $\varepsilon_r$  a teret kitöltő anyag relatív permittivitása,  $\mu_0$  a vákuum mágneses permeabilitása,  $\mu_r$  a teret kitöltő anyag relatív mágneses permeabilitása. Az elektromágneses hullám (pl. a fény) terjedési sebessége tehát

$$c = \sqrt{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}.$$

A vákuumban terjedő fény terjedési sebessége ennek

$$\text{megfelelően } c = \sqrt{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{vákuumban } \varepsilon_r = 1 \text{ és } \mu_r = 1).$$

Behelyettesítve az

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)} \quad \text{és} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

állandókat, a vákuumbeli fényterjedés sebességének ismert értékét kapjuk:  $c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

\*\*\*\*\*

#### Térbeli hullámegyenlet

A hullámok az esetek döntő többségében nem egy dimenzióban, hanem térben terjednek. Ilyenkor a hullámfüggvény helyfüggését a helyzetvektorral adhatjuk meg:  $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ . A térbeli hullámegyenletet formálisan viszonylag egyszerűen megkaphatjuk egy harmonikus síkhullám

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

hullámfüggvényének segítségével.

Mivel az egydimenziós esetből tudjuk, hogy a hullámegyenletben a hullámfüggvény második parciális deriváltjai szerepelnek, számítsuk ki először a hely szerinti deriváltakat a fenti hullámfüggvény esetén.

Ha figyelembe vesszük, hogy  $\mathbf{k} \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ , az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} = -k_y^2 \psi(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} = -k_z^2 \psi(\mathbf{r}, t).$$

Ezeket az egyenleteket összeadva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} = -k^2 \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega^2}{v^2} \psi(\mathbf{r}, t)$$

(itt felhasználtuk a  $k = \frac{\omega}{v}$  összefüggést).

Másrészt a hullámfüggvény idő szerinti második deriváltja:

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(\mathbf{r}, t).$$

Az utóbbi két egyenletből azt kapjuk, hogy

$$v^2 \left( \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}.$$

Ha alkalmazzuk a matematikában szokásos  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \Delta$  jelölést, akkor az egyszerűbb

$$v^2 \Delta \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

alakot kapjuk.

Kimutatható, hogy ez az egyenlet nem csak a „levezetésnél” feltételezett harmonikus hullámokra igaz, hanem ez a hullámegyenlet általánosan érvényes alakja.

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

## A hullámegyenlet alkalmazása: az állóhullám-egyenlet

Korábban megvizsgáltuk egy hullámforrásból kiinduló és a véges közeg határáról visszavert hullámok interferenciáját. Láttuk, hogy bizonyos feltételek teljesülésekor (pl. egy kötélben indított hullámnál meghatározott frekvenciákon) sajátos, a haladó hullámtól különböző, állandósult hullámalakzatok jöhetnek létre, amelyekben a hullámtér egész tartományai azonos fázisban rezegnek, csak a rezgés amplitúdója változik helyről-helyre. Az ilyen hullámalakzatokat neveztük állóhullámoknak. Kézenfekvőnek látszik, hogy az általános hullámegyenlet a hullámok bármilyen fajtájának, így az állóhullámoknak a leírására is alkalmas.

A hullámfüggvény megtalálásához ismernünk kell a függvénynek a közeg határán érvényes alakját (peremfeltétel), és ismernünk kell a hullámfüggvényt egy kezdeti időpillanatban (kezdeti feltétel). A hullámegyenlet általános megoldásának megtalálása adott kezdeti- és peremfeltételek esetén általában bonyolult feladat, ezért itt csak azt tűzzük ki célul, hogy megtaláljuk azokat a megoldásokat, amelyek a korábban kísérletileg is megtalált állóhullámokat írják le.

Harmonikus hullámokkal kapcsolatos korábbi tapasztalataink szerint az állóhullámot helyfüggő amplitúdó és a közegnek nagyobb térrészre kiterjedő, azonos időfüggésű, azonos fázisú rezgése jellemzi, és azt találtuk, hogy hullámfüggvénye egy helyfüggő amplitúdó és egy harmonikus rezgést leíró időfüggő tényező szorzataként írható fel:

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

Most ismét a differenciálegyenletek „megoldásánál” korábban többször alkalmazott eljárást követjük: a differenciálegyenletbe behelyettesítjük a „kitalált megoldást”, és megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek esetén lesz a próbafüggvényünk megoldás.

Ha a fenti hullámfüggvényt behelyettesítjük a

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$$

hullámegyenletbe, akkor azt kapjuk, hogy

$$v^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos(\omega t + \alpha) = -\varphi(x) \omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Ez az egyenlet rendezéssel és a  $k = \frac{\omega}{v}$  összefüggés felhasználásával a

$$\left( \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k^2 \varphi(x) \right) \cos(\omega t + \alpha) = 0$$

alakba írható. Az egyenletnek bármely időpillanatban teljesülni kell, ami csak úgy lehetséges, hogy

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k^2 \varphi(x) = 0.$$

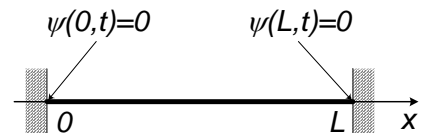
Ez a differenciálegyenlet megadja az állóhullám amplitúdójának  $\varphi(x)$  helyfüggését, és egydimenziós *állóhullám-egyenletnek* nevezik.

Ha a  $\varphi(x)$  függvényt konkrét esetekben meghatározzuk, akkor az állóhullám hullámfüggvényét is felírhatjuk az adott esetben:

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

Egyszerű példaként próbáljuk meghatározni az amplitúdó  $\varphi(x)$  helyfüggését egy mindkét végén rögzített,  $L$  hosszúságú rugalmas húrban vagy kötélben (ábra) terjedő transzverzális *harmonikus hullámra*.

A  $\varphi(x)$  függvényt



$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k^2 \varphi(x) = 0$$

állóhullám-egyenlet segítségével határozzuk meg.

Mivel az egyenlet formailag teljesen azonos a harmonikus rezgőmozgás egyenletével, megoldása is ugyanolyan, csak most a változó nem  $t$ , hanem  $x$ :

$$\varphi(x) = A \sin(kx + \beta).$$

Ezzel az állóhullám időfüggését is megadó hullámfüggvény a

$$\psi(x, t) = A \sin(kx + \beta) \cos(\omega t + \alpha)$$

alakot ölti.

A konkrét esetben érvényes állóhullám-megoldást akkor kapjuk meg, ha figyelembe vesszük a határfeltételeket.

A két végén rögzített kötél vagy húr esetén egyrészt bármely időpillanatban fennáll, hogy  $\psi(0, t) = 0$ . Ez azt jelenti, hogy  $\varphi(0) = 0$ , így a  $\varphi(x) = A \sin(kx + \beta)$  alakban felírt amplitúdó-függvény csak a  $\beta = 0$  esetben alkalmazható, tehát csak a

$$\varphi(x) = A \sin(kx)$$

alak megengedett.

Másrészt a kötél vagy húr másik vége is rögzített, tehát  $\psi(L, t) = 0$ , ami azt jelenti, hogy

$$\varphi(L) = A \sin(kL) = 0,$$

illetve

$$\sin(kL) = 0.$$

Ez ugyanaz a feltétel, mint amit korábbi megfontolásainkból kaptunk, és a következtetések is ugyanazok. Állóhullám egy mindkét végén rögzített kötélben vagy húron csak akkor jön létre, ha a hullámszám a  $kL = n\pi$  feltételnek megfelelő értékek valamelyikét veszi fel, azaz

$$k_n = n \frac{\pi}{L}$$

( $n$  egész szám).

Ezzel a hullámgömb  $n$ -től függő állóhullám-megoldása:

$$\psi_n(x, t) = A \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos(\omega t + \alpha).$$

Mint korábban is láttuk, a határfeltételek miatt a húron kialakuló hullámok frekvenciája és hullámhossza sem tetszőleges, hanem

$$\omega_n = k_n c = n \frac{\pi}{L} c \quad \text{illetve} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

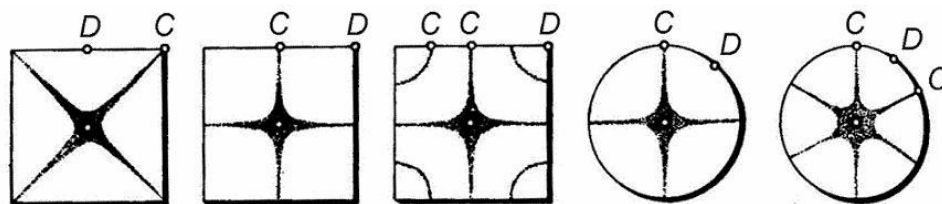
Mint már az állóhullámok korábbi tárgyalásánál is említettük, a fenti, egyetlen  $n$  értékhez tartozó megoldás csak igen speciális *kezdeti feltételek* mellett valósítható meg. Általában egy húr gerjesztésekor bonyolult hullám alakul ki, amely különböző frekvenciájú harmonikus hullámok szuperpozíciója, így az  $n = 1$  értékhez tartozó alapharmonikus mellett – rendszerint kisebb intenzitással – egyéb lehetséges frekvenciák (felharmonikusok) is megjelennek. Ezt mutatja például az, hogy egy húr hangja erősen függ attól, hogy milyen eszközzel szólaltatjuk meg és a rezgést a húr melyik pontján hozzuk létre.

A fentihez hasonló módon tárgyalhatók egyéb peremfeltételek is (pl. egyik végén szabad kötéll, mindkét végén szabad rezgő pálca, zárt és nyitott síp (levegőoszlop), stb).

A két- vagy háromdimenziós hullámegyenlettel síkon vagy térben terjedő hullámok által létrehozott állóhullámok is tárgyalhatók. Számolásokat itt nem végzünk, de bemutatunk néhány síkbeli állóhullám képet.

#### **KÍSÉRLET:**

Közepén befogott négyzet- és kör alakú, vékony fémlemezekben (ábra) hegedűhúrral transzverzális rezgéseket hozunk létre. Ennek következtében állóhullámok (Chladni-ábrák) alakulnak ki, amelyeknek kimutatására finom port használunk. A port a hullám gerjesztése előtt egyenletesen rászórjuk a lapokra, majd a hegedűvonót az ábrán látható  $D$  pontokban a lemezre merőlegesen végighúzzuk a lemezen. Közben ujjunkkal a lemez egy vagy két pontját megérintjük (az ábrán a  $C$ -vel jelölt helyek). A porszemcsék azokon a helyeken gyűlnek össze, ahol a legkisebb a rezgés amplitúdója, tehát kirajzolják az állóhullám csomóvonalait (az ábrán a sötét tartományok). A gerjesztés helyén mindig duzzadóhely van, az érintési helyeken csomópont. Látható hogy az érintés helyének (rögzített pont) változtatásával a csomóvonalak helyzetét változtatni tudjuk.



Ezek a kísérletek jól mutatják, hogy az állóhullámok konkrét alakját alapvetően meghatározza a rezgés helye és az, hogy az ujjunkkal milyen peremfeltételeket alakítunk ki.

## Doppler-effektus

Tapasztalatból tudjuk, hogy ha egy jármű nagy sebességgel közeledik felénk, és elhalad mellettünk, akkor az általa kibocsátott hang magasságát távolodáskor hirtelen mélyebbnek észleljük. A jelenség egyszerű kísérlettel sokkal meggyőzőbben is bemutatható.

### KÍSÉRLLET:

Függőleges tengely körül forgatható vízszintes karra egy sípot rögzítünk, úgy, hogy körbeforgatásakor a síp szája a körpálya érintője irányába mutat. Ha a kart és vele a sípot megforgatjuk, akkor a pálya érintőjének irányába mutató síp a rajta átáramló levegő hatására megszólal. Jól megfigyelhető, hogy amikor a síp keringése közben közeledik felénk, akkor a hangját sokkal magasabbnak halljuk, mint amikor távolodik tőlünk.

Az észlelt hangmagasságnak, általánosabban egy hullám észlelt frekvenciájának a megfigyelő vagy a hullámforrás mozgásállapotától való függését *Doppler-effektusnak*<sup>1</sup> nevezik.

Elsőként vizsgáljuk meg, azt az esetet, amikor az  $f_0$  frekvenciájú *hullámforrás* a hullámot közvetítő *közeghez képest*  $u_F$  sebességgel *mozog*. A hullám terjedési sebessége nyugvó

közegben  $v$ , hullámhossza  $\lambda_0 = \frac{v}{f_0}$ .

Ha a forrás (az ábrán az  $A$  pontban), a  $t=0$  időpillanatban kibocsát egy hullámot, akkor a hullámfront az ettől számított  $\tau$  idő alatt mindkét irányban  $v$  sebességgel mozog, és  $s = v\tau$  távolságra jut el (az ábrán a  $B$  illetve  $C$  pontokig), függetlenül attól, hogy a forrás áll vagy mozog. Ezen a távolságon kialakul  $N = \frac{s}{\lambda_0} = \frac{s}{vT} = \frac{\tau}{T} = f_0\tau$  számú teljes periódus (egy pillanatfelvételen ennyi teljes szinuszciklust látunk).

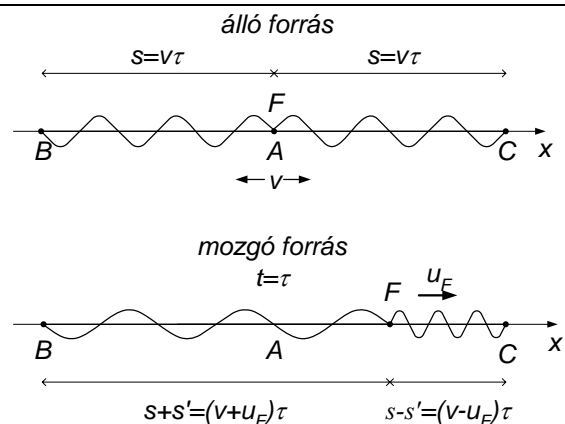
Ha a forrás az  $x$ -tengely irányában mozog, akkor  $\tau$  idő alatt  $s' = u_F\tau$  távolságot tesz meg, tehát az  $x$ -tengely irányában a  $\tau$  időtartam végén az  $N$  számú periódus az  $s - s' = (v - u_F)\tau$  hosszúságú szakaszon figyelhető meg (alsó ábra). Szemléletesen szólva, a hullámhossz ebben az irányban „összenyomódik”. A  $C$  pontnál álló megfigyelő által észlelt hullámhossz ekkor

$\lambda_C = \frac{s - s'}{N} = \frac{(v - u_F)\tau}{f_0\tau} = \frac{v - u_F}{f_0} < \lambda_0$ . A  $B$  pontban álló megfigyelő által észlelt hullámhossz

viszont nagyobb lesz, mint az álló forrás esetén mért  $\lambda_0$ , hiszen ettől a helytől a forrás távolodik, az  $N$  számú periódus az  $s + s' = (v + u_F)\tau$  szakaszra széthúzódik, és megfigyelt

értéke  $\lambda_B = \frac{v + u_F}{f_0} > \lambda_0$  lesz.

Ha megállapodunk abban, hogy a megfigyelő felé mozgó forrás sebessége pozitív ( $u_F > 0$ ), és a távolodó forrás sebessége negatív ( $u_F < 0$ ), akkor a két összefüggés összevonható a



<sup>1</sup> Christian Johann DOPPLER (1803-1853) osztrák fizikus.

$$\lambda' = \frac{v - u_F}{f_0}$$

alakba.

A mozgó forrásból érkező hullám esetén a megfigyelő az  $f' = \frac{v}{\lambda'}$  összefüggésnek megfelelő, megváltozott frekvenciát észlel:

$$f' = \frac{v}{v - u_F} f_0.$$

Vagyis a tapasztalattal egyezően, közeledő forrásnál ( $u_F > 0$ ) nagyobb-, távolodó forrásnál ( $u_F < 0$ ) kisebb frekvenciát kapunk, mint a nyugvó forrással mért  $f_0$ .

A számolás alapját képező „hullámhossz-összenyomódás” és „hullámhossz-megnyúlás” valóságosan is bemutatható vízhullámok segítségével. Ha a víz felületén mozgatható forrással keltünk körhullámokat (például egy mozgó csőből a felületre szaggatottan kiáramló levegővel), akkor – a várakozásnak megfelelően – a képen látható hullámalakzatot láthatjuk.



A második kérdés az, hogy hogyan befolyásolja az észlelt frekvenciát a *megfigyelőnek a közeghez viszonyított mozgása*. Ha a megfigyelő mozog, akkor számára a hullám terjedési sebessége más, mint ha nyugalomban lenne. Ha például a C pontban lévő megfigyelő a nyugalomban lévő forrás felé (tehát a hullám terjedési irányával szemben) mozog  $u_M$  sebességgel, akkor a hullám terjedési sebességét  $v' = v + u_M$ -nek méri, és ennek megfelelően

$$f'' = \frac{v + u_M}{\lambda_0} = \frac{v + u_M}{v} f_0$$

frekvenciát észlel. Ellenkező irányú mozgás esetén az észlelt frekvencia:

$$f'' = \frac{v - u_M}{\lambda_0} = \frac{v - u_M}{v} f_0.$$

Ha a forráshoz közeledő megfigyelő sebességét tekintjük pozitívnak ( $u_M > 0$ ), és az ellenkező irányban mozgóét negatívnak ( $u_M < 0$ ), akkor a két összefüggést összevonhatjuk az

$$f'' = \frac{v + u_M}{v} f_0$$

alakban.

A számolás során feltételeztük, hogy a megfigyelő sebessége a hullámterjedés sebességével párhuzamos.

Ha a forrás is mozog, akkor  $\lambda$  helyébe a mozgó forrásnál kapott hullámhosszt kell beírni a fenti összefüggésbe, vagyis

$$f = \frac{v + u_M}{\lambda'}.$$

Ebből a  $\lambda' = \frac{v - u_F}{f_0}$  kifejezés beírása után azt kapjuk, hogy

$$f = \frac{v + u_M}{v - u_F} f_0,$$



ahol  $u_M > 0$ , ha a megfigyelő a forrás felé mozog, és  $u_F > 0$ , ha a forrás a megfigyelő felé mozog. Ellenkező irányú mozgások esetén a megfelelő sebesség előjelet vált.

Az összefüggéseket azzal a feltevéssel kaptuk, hogy a forrás és a megfigyelő sebessége párhuzamos egymással és a hullám terjedési sebességével. Ha ez nem így van, akkor az összefüggésbe a feltételnek megfelelő sebességkomponenseket kell beírni.

További megszorítás, hogy a frekvencia nem lehet negatív, vagyis távolodó megfigyelő esetén  $|u_M| < v$  (ellenkező esetben a megfigyelő leahyja a hullámot és nem észleli azt), és távolodó forrás esetén  $|u_F| < v$  (ellenkező esetben a forrás leahyja a hullámot).

Bár a fenti összefüggés nem érvényes, ha  $|u_F| > v$ , gyakorlatilag nagyon fontos az az eset amikor egy folyadékban vagy gázban egy hullámforrásként működő test a hullámok terjedési sebességénél gyorsabban mozog. Ez a helyzet áll elő például a hang terjedési sebességénél nagyobb sebességgel haladó (szuperszonikus) repülőgépek esetén.

Ha a hullámforrás sebessége nagyobb, mint a hullámterjedés sebessége, akkor a forrás leahyja a hullámot, tehát előtte nem alakul ki hullám, csak mögötte. Az ábrán egy ilyen esetben kialakuló hullámkép látható, ahol feltüntettük a mozgó forrás által létrehozott hullámfrontok helyzetét  $\Delta t$  időközökben.

Látható, hogy a forrás mögött egy kúp alakú hullámfront jön létre, amelyet *Mach-kúp*<sup>1</sup> neveznek. A Mach-kúp legkönnyebben sima felületű vízben a víz hullámoknál gyorsabban haladó hajó mögött figyelhető meg.

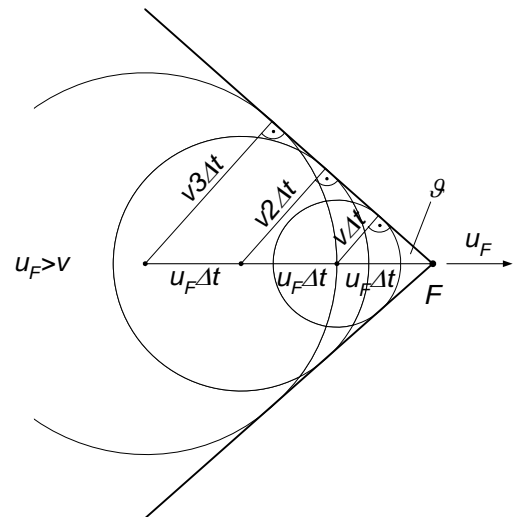
Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy a Mach kúp szögének ( $2\vartheta$ ) felére a

$$\sin \vartheta = \frac{v}{u_F}$$

összefüggés érvényes, ahol  $v$  a hullám terjedési sebessége,  $u_F > v$  pedig a forrás sebességének nagysága.

A két sebesség viszonya fontos szerepet játszik a szuperszonikus repülésben, ezért erre bevezették az  $M = \frac{u_F}{v}$  jellemzőt, amit *Mach-számnak* neveznek. A Mach-szám tehát azt adja meg, hogy a mozgó forrás (pl. repülőgép) a hullám terjedési sebességének (pl. hangsebesség) hányszorosával halad.

Mivel a hullámfront két oldalán jelentős nyomáskülönbség alakulhat ki, az ilyen hullám az áthaladása során lökésszerű hatást fejt ki (lökéshullám).



<sup>1</sup> Ernst MACH (1838-1916) osztrák fizikus.