

# Equações Diferenciais Ordinárias

Notas de aulas - 21 de Maio de 2003

---

*Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil*

Prof. Ulysses Sodré

Copyright ©2002 Ulysses Sodré. Todos os direitos reservados.

email: <ulysses@sercomtel.com.br>

email: <ulysses@matematica.uel.br>

Material compilado no dia 21 de Maio de 2003.

Este material pode ser usado por docentes e alunos desde que citada a fonte, mas não pode ser vendido e nem mesmo utilizado por qualquer pessoa ou entidade para auferir lucros.

Para conhecer centenas de aplicações da Matemática, visite a Home Page:

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/>

Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam e a prova das coisas que não se vêem. Porque por ela os antigos alcançaram bom testemunho. Pela fé entendemos que os mundos foram criados pela palavra de Deus; de modo que o visível não foi feito daquilo que se vê. HEBREUS 11:1-3, Bíblia Sagrada.

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Conceitos fundamentais em equações diferenciais</b>	<b>1</b>
1.1	Definição de Equação Diferencial Ordinária . . . . .	1
1.2	Ordem e Grau de uma Equação Diferencial . . . . .	1
1.3	Classes de diferenciabilidade . . . . .	2
1.4	Operadores diferenciais lineares . . . . .	2
1.5	Equação Diferencial Ordinária Linear de ordem $n$ . . . . .	3
1.6	Solução de uma Equação Diferencial . . . . .	3
1.7	Existência e unicidade de solução para uma EDO . . . . .	4
1.8	Problema de Valor Inicial (PVI) . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem</b>	<b>5</b>
2.1	As formas normal e diferencial de primeira ordem . . . . .	5
2.2	Equações separáveis de primeira ordem . . . . .	6
2.3	Modelos Matemáticos e Equações Diferenciais . . . . .	6
2.4	Crescimento Populacional: Modelo de Malthus . . . . .	7
2.5	Crescimento Populacional: Modelo de Verhulst . . . . .	9
2.6	Equações homogêneas de primeira ordem . . . . .	10
2.7	Equações Exatas de primeira ordem . . . . .	12
2.8	Teorema de Existência e Unicidade de solução de um PVI . . . . .	15
2.9	Simplificação de equações lineares de primeira ordem . . . . .	15
2.10	Complementos de Análise na reta . . . . .	15
2.11	Método do Fator Integrante . . . . .	17
2.12	Equações não lineares de primeira ordem redutíveis a lineares . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem</b>	<b>24</b>
3.1	Equações lineares de segunda ordem . . . . .	24

3.2	Equações Lineares homogêneas de segunda ordem . . . . .	24
3.3	Teorema de Existência e Unicidade de solução de um PVI . . . . .	24
3.4	Equações Lineares de 2a. ordem com coeficientes constantes . . . . .	25
3.5	Solução da equação homogênea associada . . . . .	26
3.6	Método de d'Alembert para obter outra solução . . . . .	27
3.7	Equação equidimensional de Euler-Cauchy . . . . .	29
3.8	Método dos Coeficientes a Determinar . . . . .	36
3.9	Método da Variação dos Parâmetros (Lagrange) . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Redução da ordem de uma equação diferencial</b>	<b>42</b>
4.1	Equação do tipo $y^{(n)} = f(x)$ . . . . .	42
4.2	Equação que não tem o termo em $y$ . . . . .	43
4.3	Equação que não tem os termos em $y$ e em $y'$ . . . . .	43
4.4	Equação que não tem os termos em $y, y'$ e $y''$ . . . . .	44
4.5	Equação que não tem $y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}$ . . . . .	44
4.6	Equação que não tem a variável independente $x$ . . . . .	44
4.7	EDO $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , $F$ homogênea só nas variáveis $y^{(k)}$ . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Aplicações de equações diferenciais ordinárias</b>	<b>46</b>
5.1	Decaimento Radioativo . . . . .	46
5.2	Lei do resfriamento de Newton . . . . .	48
5.3	Elementos de Eletricidade . . . . .	49
5.4	Circuitos Elétricos RLC . . . . .	50

# 1 Conceitos fundamentais em equações diferenciais

## 1.1 Definição de Equação Diferencial Ordinária

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação da forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

envolvendo uma função incógnita  $y = y(x)$  e suas derivadas ou suas diferenciais.  $x$  é a variável independente,  $y$  é a variável dependente e o símbolo  $y^{(k)}$  denota a derivada de ordem  $k$  da função  $y = y(x)$ .

Exemplos:

1.  $y'' + 3y' + 6y = \sin(x)$
2.  $(y'')^3 + 3y' + 6y = \tan(x)$
3.  $y'' + 3y y' = e^x$
4.  $y' = f(x, y)$
5.  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

## 1.2 Ordem e Grau de uma Equação Diferencial

A ordem da equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da função incógnita que ocorre na equação. Grau é o valor do expoente para a derivada mais alta da equação, quando a equação tem a “forma” de um polinômio na função incógnita e em suas derivadas, como por exemplo:

$$A y^{(3)} + B y^{(2)} + C y^{(1)} + D y^{(0)} = 0$$

Exemplos:

1.  $y'' + 3y' + 6y = \sin(x)$  e  $y'' + 3y y' = e^x$  têm ordem 2 e grau 1.
2.  $(y'')^3 + 3(y')^{10} + 6y = \tan(x)$  tem ordem 2 e grau 3.
3.  $y' = f(x, y)$  e  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  têm ordem 1 e grau 1.

### 1.3 Classes de diferenciabilidade

Uma função real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pertence à classe de diferenciabilidade  $C^n(\mathbb{R})$ , se:

1.  $f$  é contínua;
2. Todas as derivadas  $f^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) são funções contínuas

Quando  $n = 0$ , identificamos a classe da funções reais contínuas com  $C^0(\mathbb{R})$ .

Exemplos:

1. A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = |x|$  pertence à classe  $C^0(\mathbb{R})$  mas não pertence à classe  $C^1(\mathbb{R})$ .
2. A função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = |x|^3$  pertence à classe  $C^3(\mathbb{R})$  mas não pertence à classe  $C^4(\mathbb{R})$ .
3. A função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = e^x$  pertence à classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

### 1.4 Operadores diferenciais lineares

Demonstra-se que o conjunto  $\mathcal{F} = C^n(\mathbb{R})$  de todas as funções reais  $n$  vezes continuamente diferenciáveis, é um **espaço vetorial** sobre  $\mathbb{R}$ . Para cada  $f \in \mathcal{F}$ , definimos o operador diferencial  $D : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  por

$$D(f) = f'$$

sendo  $D^0(f) = f$ . Para cada  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , definimos o operador diferencial recursivo  $D^k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  por

$$D^k(f) = D[D^{k-1}(f)] = f^{(k)}$$

que representa a derivada de ordem  $k$  da função  $f \in \mathcal{F}$ .

Demonstra-se que são **lineares** estes operadores diferenciais  $D^k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , isto é, para quaisquer  $f, g \in \mathcal{F}$  e para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$D^k(af + bg) = a D^k(f) + b D^k(g)$$

Exemplo: O operador  $L = x^5 D^2 + e^x D + \sin(x)I$  é linear sobre o espaço vetorial  $\mathcal{F} = C^2(\mathbb{R})$ , pois para quaisquer  $f, g \in \mathcal{F}$  e para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ , vale a identidade

$$L(af + bg) \equiv a L(f) + b L(g)$$

## 1.5 Equação Diferencial Ordinária Linear de ordem n

Uma equação diferencial linear de ordem  $n$  é da forma

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_n(x) y = b(x)$$

onde as funções  $b = b(x)$  e  $a_k = a_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ), são funções conhecidas sendo  $a_0 = a_0(x)$  não identicamente nula e todas estas funções devem depender somente da variável  $x$ . A função (incógnita) desconhecida é  $y = y(x)$ .

Em virtude das informações da seção anterior, é possível definir o operador diferencial linear

$$L = a_0(x) D^{(n)} + a_1(x) D^{(n-1)} + a_2(x) D^{(n-2)} + \dots + a_n(x) I$$

e assim a equação diferencial acima terá a forma simplificada

$$L(y) = b(x)$$

e este é o motivo pelo qual, a equação diferencial acima recebe o nome de linear.

## 1.6 Solução de uma Equação Diferencial

Uma solução para uma equação diferencial é uma função que satisfaz identicamente à equação. A solução mais geral possível que admite uma

equação diferencial é denominada solução geral, enquanto que outra solução é chamada uma solução particular.

Exemplos:

1.  $y(x) = e^{-x}$  é uma solução particular de  $y' + y = 0$ .
2.  $y(x) = Ce^{-x}$  é a solução geral de  $y' + y = 0$ .
3.  $y(x) = \sin(x)$  é uma solução particular de  $y'' + y = 0$ .
4.  $y(x) = A \sin(x) + B \cos(x)$  é a solução geral de  $y'' + y = 0$ .
5.  $y(x) = 777$  é uma solução particular de  $y'' + 3y' = 0$ .

## 1.7 Existência e unicidade de solução para uma EDO

Três perguntas importantes sobre soluções para uma EDO.

1. Dada uma equação diferencial, será que ela tem solução?
2. Se tiver solução, será que esta solução é única?
3. Existe uma solução que satisfaz a alguma condição especial?

Para responder a estas perguntas, existe o Teorema de Existência e Unicidade de solução que nos garante resposta para algumas das questões desde que a equação tenha algumas características.

Alertamos que descobrir uma solução para uma Equação Diferencial é algo

“similar” ao cálculo de uma integral e nós sabemos que existem integrais que não possuem primitivas, como é o caso das integrais elípticas. Dessa forma, não é de se esperar que todas as equações diferenciais possuam soluções.



## 1.8 Problema de Valor Inicial (PVI)

Uma equação diferencial satisfazendo algumas condições adicionais é denominado Problema de Valor Inicial (PVI).

Exemplo:

$$\begin{aligned}e^x y' + 2y &= \arctan(x) \\ y(0) &= \pi\end{aligned}$$

Se são conhecidas condições adicionais, podemos obter soluções particulares para a equação diferencial e se não são conhecidas condições adicionais poderemos obter a solução geral.

## 2 Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

### 2.1 As formas normal e diferencial de primeira ordem

Uma grande quantidade de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem pode ser escrita na sua forma normal, dada por:

$$y' = f(x, y)$$

ou quando a função  $f = f(x, y)$  pode ser escrita como o quociente de duas outras funções  $M = M(x, y)$  e  $N = N(x, y)$ , temos:

$$y' = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

É vantajoso manter o sinal negativo antes da fração, na forma

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

pois usando o fato que  $dy = y'(x)dx$ , poderemos escrever

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Exemplos:

1. A equação diferencial  $y' = \cos(x + y)$  está em sua forma normal.
2. A equação diferencial  $y' = \frac{x}{y}$  está em sua forma normal, mas pode ser reescrita na sua forma diferencial  $x dx - y dy = 0$ .

## 2.2 Equações separáveis de primeira ordem

Seja uma equação diferencial  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ . Se  $M$  é uma função apenas da variável  $x$ , isto é  $M = M(x)$  e  $N$  é uma função apenas da variável  $y$ , isto é  $N = N(y)$ , então a equação dada fica na forma

$$M(x) dx + N(y) dy = 0$$

e ela é chamada equação separável. Isto é motivado pelo fato que é possível separar as funções de modo que cada membro da igualdade possua uma função com apenas uma variável. Desse modo, podemos realizar a integração de cada membro por um processo “simples”.

Exemplo: A equação diferencial  $y' = \frac{x}{y}$  na sua forma normal, pode ser reescrita na sua forma diferencial  $x dx - y dy = 0$  ou ainda na forma

$$x dx = y dy$$

Integrando cada termo independentemente, teremos:

$$\frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{y^2}{2} + C_2$$

e reunindo as constantes em uma constante  $C$ , teremos:

$$x^2 - y^2 = C$$

e esta relação satisfaz à equação diferencial dada.

## 2.3 Modelos Matemáticos e Equações Diferenciais

Muitos problemas práticos, podem ser modelados pela Matemática, de acordo com as quatro etapas abaixo (não muito bem definidas):

1. Construção de um modelo para descrever algum fenômeno físico;
2. Estabelecimento de um procedimento matemático adequado ao modelo físico;
3. Realização de cálculos numéricos aproximados com o uso do Modelo Matemático pré-estabelecido;
4. Comparação das quantidades numéricas obtidas através do Modelo Matemático com aquelas que se esperava obter a partir da formulação do modelo criado para resolver o problema.

Após estas etapas, costuma-se analisar os resultados e na verificação da adequação dos mesmos, aceita-se o modelo e na inadequação dos resultados, reformula-se o modelo, geralmente introduzindo maiores controles sobre as variáveis importantes, retirando-se os controles sobre as variáveis que não mostraram importância.

## 2.4 Crescimento Populacional: Modelo de Malthus

Problemas populacionais nos levam fatalmente às perguntas:

1. Qual será a população de um certo local ou meio ambiente em alguns anos?
2. Como poderemos proteger os recursos deste local ou deste meio ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies?

Para apresentar uma aplicação de equações diferenciais relacionado com este problema, consideraremos o modelo matemático mais simples para tratar sobre o crescimento populacional de algumas espécies, conhecido como o Modelo de Crescimento Exponencial de Malthus, que estabelece que a taxa de variação da população em relação ao tempo, aqui denotada por  $\frac{dN}{dt}$ , é proporcional à população presente. Em outras palavras, se

$N = N(t)$  mede a população, nós temos

$$\frac{dN}{dt} = k N$$

onde a taxa  $k$  é uma constante. É simples verificar que se  $k \geq 0$ , nós teremos crescimento e se  $k \leq 0$ , nós teremos decaimento.

Esta equação linear tem solução

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

onde  $N_0$  é a população inicial, isto é  $N(0) = N_0$ . Podemos concluir o seguinte:

1. Se  $k > 0$ , a população cresce e continua a expandir para  $\infty$ .
2. Se  $k < 0$ , a população se reduzirá e tenderá a 0, o que significa que ocorrerá extinção da população.

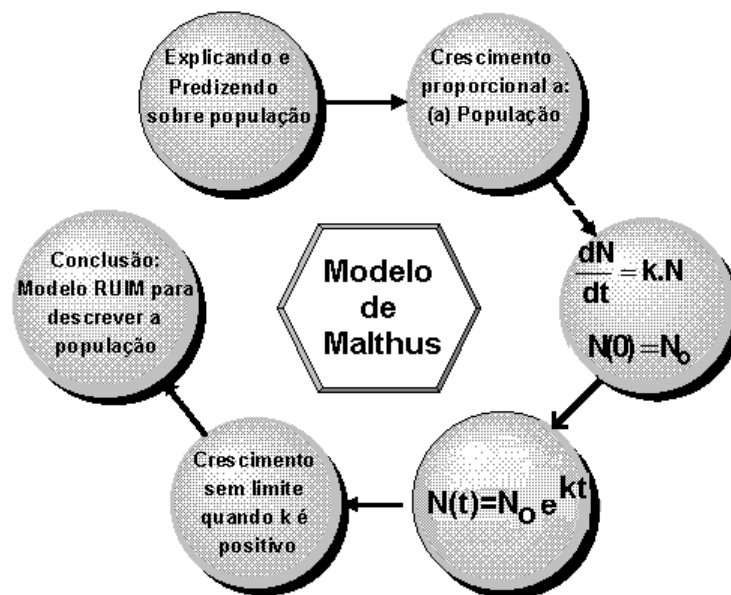


Figura 1: Modelo de Malthus: Curva exponencial

O primeiro caso não é adequado e o modelo pode não funcionar bem a longo prazo. O argumento principal para isto vem das limitações do

ambiente. A complicação é que o crescimento populacional é eventualmente limitado por algum fator, usualmente dentre aqueles recursos essenciais. Quando uma população está muito distante de seu limite de crescimento ela pode crescer de forma exponencial, mas quando está próxima de seu limite o tamanho da população pode variar.

## 2.5 Crescimento Populacional: Modelo de Verhulst

Existe um outro modelo proposto para remediar este problema do modelo exponencial. Ele é chamado o Modelo Logístico ou modelo de Verhulst-Pearl. A equação diferencial para este modelo é

$$\frac{dN}{dt} = k N \left( 1 - \frac{N}{L} \right)$$

onde  $L$  é o limite máximo para a população (também chamado a capacidade do ambiente).

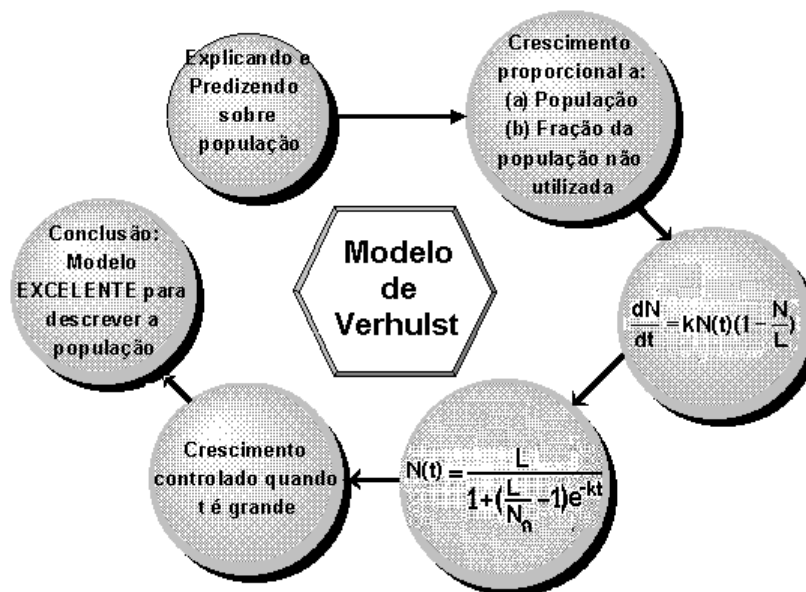


Figura 2: Modelo de Verhulst: Curva logística

Se  $N = N(t)$  é muito pequeno quando comparado com a capacidade do ambiente  $L$ , a expressão em parênteses é próxima de  $a$  e o modelo se

reduz ao modelo exponencial de Malthus. Este é um exemplo de uma equação diferencial **não linear** separável. As soluções constantes são  $N = 0$  e  $N = L$ . As soluções não constantes podem ser obtidas pela separação das variáveis, seguido do uso de integração com o uso da técnica das frações parciais.

Com algumas manipulações algébricas, teremos:

$$N(t) = \frac{L C e^{kt}}{L + C e^{kt}}$$

onde  $C$  é uma constante e  $L$  é o limite do ambiente. Considerando  $N(0) = N_0$  e assumindo que  $N_0$  não é igual a 0 nem igual a  $L$ , obtemos:

$$N(t) = \frac{L N_0}{N_0 + (L - N_0) e^{-kt}}$$

Com cálculos simples de limites podemos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = L$$

Esta solução já diz mais que a outra, mas este modelo ainda não satisfaz pois não nos informa quando uma população estará extinta. Mesmo que  $N_0$  seja pequena, a população sempre tenderá para a capacidade  $L$  do ambiente. Embora este modelo ainda possua falhas, ele é apropriado para a análise de crescimento populacional de cidades, assim como de populações de *lactobacilos* e outros.

## 2.6 Equações homogêneas de primeira ordem

Uma função  $f = f(x, y)$  é denominada homogênea de grau  $k$  se, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , vale a relação

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

Uma função  $f = f(x, y)$  é homogênea de grau 0 se, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , vale a relação

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

Exemplos:

1. A função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  é homogênea de grau 2.
2.  $g(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$  e  $h(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  são funções homogêneas de grau 0.

Uma forma simples de observar a homogeneidade de uma função polinomial é constatar que todos os monômios da função possuem o mesmo grau. No caso de uma função racional (quociente de polinômios), os membros do numerador devem ter um mesmo grau  $m$  e os membros do denominador devem também ter um mesmo grau  $n$ , sendo que o grau da expressão do denominador pode ser menor ou igual que o grau da expressão do numerador.

Uma equação diferencial de primeira ordem na forma normal  $y' = f(x, y)$  é dita homogênea se  $f = f(x, y)$  é uma função homogênea de grau zero.

Exemplos de equações diferenciais homogêneas:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad y' = \frac{x^2}{y^2}, \quad y' = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Pode-se resolver uma Equação diferencial homogênea, transformando-a em uma equação de variáveis separáveis com a substituição  $y(x) = x v(x)$  ou de uma forma mais simples  $y = x v$ , onde  $v = v(x)$  é uma nova função incógnita. Assim,  $dy = x dv + v dx$  e uma equação da forma  $y' = f(x, y)$  pode ser transformada em uma equação separável da forma

$$x \frac{dv}{dx} + v = f(x, xv)$$

e após simplificações obtemos uma equação com variáveis separáveis.

Exemplo: Para resolver a equação diferencial homogênea

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

tomamos  $y = x v$ ,  $y' = x v' + v$  e substituímos na equação homogênea para obter:

$$x v' + v = \frac{1 + v^2}{v}$$

Separando a fração, obtemos

$$x v' + v = \frac{1}{v} + v$$

e cancelando os termos iguais, obtemos

$$x v' = \frac{1}{v}$$

Como  $v'(x) = \frac{dv}{dx}$ , podemos escrever

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

assim

$$v dv = \frac{dx}{x}$$

Integrando ambos os membros, teremos:

$$v^2 = 2 \ln x + C$$

assim temos a relação

$$y^2 = x^2[2 \ln x + C]$$

## 2.7 Equações Exatas de primeira ordem

Na sequência, utilizaremos a notação  $M_x = \frac{\partial M}{\partial x}$  para a derivada parcial da função  $M = M(x, y)$  em relação à variável  $x$ . Uma equação na forma diferencial  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  será exata, se existir uma função  $F = F(x, y)$  cuja diferencial exata  $dF = F_x dx + F_y dy$  coincide com  $Mdx + Ndy = 0$ , isto é:

$$dF = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

Exigindo algumas propriedades de diferenciabilidade das funções  $M$  e  $N$ , temos um outro critério para a garantia que esta equação é exata.

Diremos que a equação  $Mdx + Ndy = 0$  é exata se  $M_y = N_x$ .

Exemplos:



1. A forma diferencial  $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$  é exata pois existe uma função diferenciável  $F(x, y) = x^3y^2$  cuja diferencial exata coincide com o membro da esquerda da equação dada, isto é,  $dF = 0$ . Outra forma de verificar isto é mostrar que  $M_y = N_x = 6x^2y$ . Neste caso, a solução da equação diferencial exata é dada por  $F(x, y) = C$ , isto é  $x^3y^2 = C$ .
2. A forma diferencial  $xdx + ydy = 0$  é exata.
3. A forma diferencial  $M(x)dx + N(y)dy = 0$  é exata.
4. A forma diferencial  $ydx - xdy = 0$  **não** é exata.

**Método de resolução:** Para resolver uma EDO da forma  $Mdx + Ndy = 0$ , devemos verificar se esta EDO é exata e em caso positivo, garantir que existe uma função  $F = F(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

Na sequência, tomamos a relação  $F_x = M(x, y)$  e integramos em relação à variável  $x$  para obter

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y)$$

onde  $g = g(y)$  é uma função apenas da variável  $y$ .

Agora, derivamos parcialmente esta última função  $F = F(x, y)$  em relação à variável  $y$ :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + g'(y)$$

e identificamos esta derivada com a função  $N = N(x, y)$ , para obter a expressão de  $g = g(y)$ . A solução da EDO exata será dada por

$$F(x, y) = C$$

**Exercício:** Para resolver a EDO  $(3x^2 + 2y)dx + (2x + 2y)dy = 0$ , devemos mostrar que esta EDO é exata. Identificamos então

$$M(x, y) = 3x^2 + 2y \quad \text{e} \quad N(x, y) = 2x + 2y$$

e mostramos que  $M_y = 2y = N_x$ , para garantir que existe  $F = F(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y$$

Integramos a primeira relação com respeito à variável  $x$  para obter

$$F(x, y) = \int (3x^2 + 2y)dx = x^3 + 2xy + g(y)$$

onde  $g = g(y)$  depende apenas de  $y$  e derivamos parcialmente esta última função  $F = F(x, y)$  com respeito a  $y$ , para obter:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 2xy) + g'(y) = 2x + g'(y)$$

Identificamos agora esta derivada com  $N = N(x, y)$ :

$$2x + g'(y) = 2x + 2y$$

Temos então que  $g'(y) = 2y$ , donde segue que  $g(y) = y^2 + K$ . Assim,

$$F(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 + K$$

e a solução da EDO exata será dada por

$$x^3 + 2xy + y^2 = C$$

## 2.8 Teorema de Existência e Unicidade de solução de um PVI

O teorema de existência e unicidade de solução garante que a equação diferencial linear de primeira ordem com uma condição adicional

$$a_0(x) y' + a_1(x) y = d(x), \quad y(x_0) = y_0$$

possui uma única solução se, as funções  $a_0 = a_0(x)$ ,  $a_1 = a_1(x)$  e  $d = d(x)$  são contínuas e  $a_0 = a_0(x)$  não é identicamente nula em um intervalo aberto real contendo o ponto  $x_0$ .

## 2.9 Simplificação de equações lineares de primeira ordem

Consideremos uma equação diferencial da forma

$$a_0(x) y' + a_1(x) y = b(x)$$

Se as condições necessárias para resolver esta equação estão satisfeitas e  $a_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in \text{Dom}(a_0)$ , então dividimos todos os termos da equação por  $a_0 = a_0(x)$  para obter uma forma mais simples

$$y' + p(x) y = q(x)$$

## 2.10 Complementos de Análise na reta

Sobre um intervalo compacto  $[a, b]$ , toda função real crescente (ou decrescente) é integrável, mas também sabemos que toda função contínua é integrável, embora existam funções descontínuas que possuem integral.

**Primeiro Teorema do valor médio para integrais:** Se  $f = f(x)$  é uma função limitada sobre um intervalo compacto  $[a, b]$  tal que existem  $m \in \mathbb{R}$  e  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , então

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

**Segundo Teorema do valor médio para integrais:** Se  $f = f(x)$  é uma função contínua sobre um intervalo compacto  $[a, b]$ , então existe  $t \in [a, b]$  tal que

$$f(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

**Teorema:** Se  $f = f(x)$  é uma função limitada sobre  $[a, b]$  e contínua no ponto  $x \in (a, b)$ , então

1. a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é diferenciável e além disso

$$F'(x) = f(x)$$

2. a função  $f = f(x)$  é integrável sobre  $[a, b]$

**Teorema Fundamental do Cálculo:** Se  $f = f(x)$  é uma função contínua sobre  $[a, b]$  e para todo  $x \in [a, b]$  podemos definir a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

então, para todo  $x \in (a, b)$  tem-se que

$$F'(x) = f(x)$$

### Consequências do Teorema Fundamental do Cálculo

1. Toda função contínua tem uma primitiva.
2. Se a função  $G = G(x)$  é uma primitiva para  $f = f(x)$  então

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Esta última consequência, realiza a conexão entre integrais definidas e indefinidas (primitiva) para funções reais.

**Exercício:** Seja  $p = p(x)$  uma função contínua e a função definida por

$$I(x) = \exp \left[ \int_0^x p(t)dt \right]$$

Mostrar que  $I'(x) = I(x)p(x)$ .

### 2.11 Método do Fator Integrante

Um bom método geral para resolver uma equação da forma

$$y' + p(x)y = q(x)$$

é multiplicar todos os membros da equação por um Fator Integrante, que é uma função  $I = I(x)$  tal que:

$$I(x)y'(x) + I(x)p(x)y(x) = I(x)q(x)$$

de tal modo que o termo da esquerda da nova equação seja exatamente a derivada da função  $I(x)y(x)$ , isto é:

$$\frac{d}{dx}[I(x) y(x)] = I(x) y'(x) + I(x) p(x) y(x)$$

mas, para que isto ocorra, devemos exigir que  $I = I(x)$  satisfaça

$$I(x) y'(x) + I'(x) y(x) = I(x) y'(x) + I(x) p(x) y(x)$$

assim, basta tomar

$$I'(x) y(x) = I(x) p(x) y(x)$$

Admitindo que  $y = y(x)$  não seja identicamente nulo, temos que:

$$I'(x) = I(x) p(x)$$

Desse modo, devemos primeiramente resolver esta última equação diferencial, para obter uma solução como

$$I(x) = \exp\left(\int_0^x p(t) dt\right)$$

Observamos que a variável *muda* de integração foi alterada para evitar erros na obtenção de tal função.

Para simplificar um pouco, tomaremos

$$P(x) = \int_0^x p(t) dt$$

para podermos escrever o *fator integrante*  $I = I(x)$ , como

$$I(x) = \exp[P(x)]$$

Multiplicando os membros desta equação por  $I(x) = \exp[P(x)]$ , obtemos:

$$\exp[P(x)] y' + p(x) \exp[P(x)] y(x) = q(x) \exp[P(x)]$$

O membro da esquerda é a derivada da função  $y(x) \exp[P(x)]$  em relação à variável  $x$  e poderemos escrever

$$\frac{d}{dx} (y(x) \exp[P(x)]) = q(x) \exp[P(x)]$$

e realizando a integral indefinida em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$y(x) \exp[P(x)] = \int q(x) \exp[P(x)] dx + C$$

Dessa forma, temos uma expressão para  $y = y(x)$  dada por

$$y(x) = \exp[-P(x)] \left[ \int q(x) \exp[P(x)] dx + C \right]$$

Exemplo: Para a equação  $y' + 2xy = x$ ,  $p(x) = 2x$  e  $q(x) = x$ , assim, a solução depende de  $P(x) = x^2$  e

$$y(x) = e^{-x^2} \left[ \int e^{x^2} x dx + C \right]$$

logo

$$y(x) = e^{-x^2} \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} + C \right] = \frac{1}{2} + C e^{-x^2}$$

## 2.12 Equações não lineares de primeira ordem redutíveis a lineares

Resolver equações diferenciais *não lineares* é muito difícil, mas existem algumas delas que mesmo sendo não lineares, podem ser transformadas em equações lineares. Os principais tipos de tais equações são:

### 1. A Equação de Bernoulli da forma

$$y' + \varphi(x) y = \psi(x) y^n \quad (1)$$

onde  $\varphi = \varphi(x)$  e  $\psi = \psi(x)$  são funções contínuas.

Nesse caso, a idéia é realizar uma substituição na equação acima, de modo a transformá-la em uma EDO linear.

Primeiramente dividimos ambos os membros da equação (1) por  $y^n$ , para obter:

$$y^{-n} y' + \varphi(x) y^{1-n} = \psi(x) \quad (2)$$

Multiplicamos agora a equação (2) por  $(1 - n)$ , para obter

$$(1 - n) y^{-n} y' + (1 - n) \varphi(x) y^{1-n} = (1 - n) \psi(x) \quad (3)$$

Tomando  $z = y^{1-n}$  e derivando em relação a  $x$ , obtemos:

$$z' = (1 - n) y^{-n} y'$$

Substituindo as expressões de  $z$  e  $z'$  em (3), obtemos:

$$z' + (1 - n) \varphi(x) z = (1 - n) \psi(x)$$

que é uma EDO linear da forma

$$z' + p(x) z = q(x)$$

onde  $p(x) = (1 - n) \varphi(x)$  e  $q(x) = (1 - n) \psi(x)$ .



A solução dessa EDO será escrita como

$$z(x) = \exp\left(-\int_0^x p(u)du\right) \left( \int q(x) \exp\left(\int_0^x p(u)du\right) dx + K \right)$$

Ao final, devemos voltar à variável original, com  $y = z^{\frac{1}{1-n}}$ .

Exemplo: Para a EDO de Bernoulli  $y' + y = e^x y^2$ , segue que  $n = 2$  e a substituição adequada é  $z = y^{1-2} = y^{-1}$ . Assim  $y = 1/z$  e temos que  $y' = (-1) z^{-2} z'$ . Substituindo estas relações na EDO dada, obteremos

$$(-1) z^{-2} z' + z^{-1} = e^x z^{-2}$$

Multiplicando esta equação por  $-z^2$ , obteremos a EDO linear:

$$z' - z = -e^x$$

Com  $p(x) = -1$  e  $q(x) = -e^x$ , obtemos a solução desta EDO:

$$z(x) = e^{-\int_0^x (-1)du} \left( \int -e^x [e^{\int_0^x (-1)du}] dx + K \right)$$

ou seja:

$$z(x) = e^x \left( \int -e^x e^{-x} dx + K \right)$$

que pode ser simplificada como:

$$z(x) = e^x (K - x)$$

A solução da EDO de Bernoulli é:

$$y(x) = \frac{1}{e^x (K - x)}$$

## 2. A Equação de Riccati da forma

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

que é uma EDO não linear. Um fato grave aqui é que, não será possível resolver tal equação se não pudermos apresentar uma solução particular para a mesma.

Consideremos  $y_p = y_p(x)$  uma solução particular de

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

Assim, vamos construir uma nova função  $z = z(x)$  definida por

$$z = \frac{1}{y - y_p}$$

Com alguns cálculos simples, obtemos:

$$z' + [q(x) + 2y_p r(x)]z = r(x)$$

que é uma equação linear na variável  $z$ . Após resolvida esta última, voltamos à variável original  $y = y(x)$  através da relação

$$y = y_p + \frac{1}{z}$$

Exemplo: Para resolver a equação de Riccati  $y' = -2 - y + y^2$ , tomaremos  $y(x) = 2$  como uma solução particular da equação dada e realizaremos as substituições  $z = \frac{1}{y - 2}$  e  $y' = -\frac{z'}{z^2}$  para obter a equação linear em  $z$ :

$$z' + 3z = -1$$

cuja solução é:

$$z(x) = -\frac{1}{3} + C e^{-3x}$$

e com poucos cálculos podemos voltar à variável  $y$  para obter a solução procurada.

Pergunta: Você conheceria uma outra solução particular para esta equação de Riccati?

Exercício: Para resolver a EDO não linear  $2xyy' + (x-1)y^2 = x^2e^x$  poderemos usar a substituição  $y^2 = xz$ , onde  $z = z(x)$ . Derivando em relação à variável  $x$ , obteremos  $2yy' = z + xz'$ , logo  $2xyy' = xz + x^2z'$  e a EDO ficará na forma

$$xz + x^2z' + (x-1)xz = x^2e^x$$

que poderá ser escrita na forma simples

$$z' + z = e^x$$

cuja solução é

$$z(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x$$

e substituir em  $y^2 = xz$ . Dessa forma, obteremos

$$y^2(x) = x\left[Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x\right]$$

e assim podemos explicitar  $y = y(x)$  para obter a solução da EDO dada.

### 3 Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

#### 3.1 Equações lineares de segunda ordem

Uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem é uma equação da forma

$$a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = d(x)$$

onde  $a = a(x)$ ,  $b = b(x)$ ,  $c = c(x)$  e  $d = d(x)$  são funções conhecidas somente da variável independente  $x$ .

Exemplos de equações diferenciais lineares de segunda ordem:

$$x^2 y'' + \sin(x) y' + e^x y = u(x) \quad \text{e} \quad y'' - 7y' + 12y = \cos(x)$$

#### 3.2 Equações Lineares homogêneas de segunda ordem

Para equações lineares de segunda ordem, se  $d = d(x)$  é diferente de zero, a equação linear será dita não homogênea e se  $d = d(x) = 0$  a equação linear será dita homogênea. Muito cuidado aqui, pois mudamos a definição de equação homogênea!

Exemplos: As equações diferenciais ordinárias  $x^2 y'' + \sin(x) y' + e^x y = 0$  e  $y'' - 7y' + 12y = 0$  são lineares e homogêneas.

Observação: Não confundir a palavra **homogênea** empregada aqui com a homônima usada no estudo de equações diferenciais homogêneas de primeira ordem relacionada com funções homogêneas de grau zero.

#### 3.3 Teorema de Existência e Unicidade de solução de um PVI

O teorema de existência e unicidade de solução garante que a equação diferencial linear de **segunda** ordem com **duas** condições adicionais da-

das abaixo:

$$\begin{aligned} a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y &= d(x) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \end{aligned}$$

possui uma única solução, desde que as funções  $a = a(x)$ ,  $b = b(x)$ ,  $c = c(x)$  e  $d = d(x)$  sejam contínuas e  $a = a(x)$  seja não identicamente nula num intervalo real que contenha o ponto  $x_0$ .

### 3.4 Equações Lineares de 2a. ordem com coeficientes constantes

Como toda função constante real é contínua, então, dentre as equações diferenciais lineares, existe um grupo de equações muito importante que é formado pelas equações cujas funções coeficientes de  $y$ ,  $y'$  e  $y''$  são constantes e neste caso, escrevemos simplesmente:

$$L(y) \equiv a y'' + b y' + c y = d(x)$$

Para resolver este tipo de equação linear não homogênea:

1. Devemos obter a solução geral  $y_h = y_h(x)$  da equação linear homogênea associada

$$L(y) \equiv a y'' + b y' + c y = 0$$

Assim, devemos ter que  $L(y_h) = 0$ .

2. Por algum processo matemático, obter uma solução particular  $y_p = y_p(x)$  para a equação original, o que significa que  $L(y_p) = d(x)$ .
3. A solução geral  $y = y(x)$  para a EDO dada será, a soma da solução geral da equação homogênea associada, obtida em (1) com a solução particular obtida em (2), isto é:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Com esta forma, temos que

$$L(y) = L(y_h + y_p) = L(y_h) + L(y_p) = d(x)$$

### 3.5 Solução da equação homogênea associada

Para resolver a equação homogênea com coeficientes constantes, devemos obter a equação característica associada à mesma, dada por:

$$a r^2 + b r + c = 0$$

Obter as raízes da equação característica equivale a obter os autovalores do operador diferencial linear:

$$L = a D^2 + b D + c I$$

Como a equação característica é uma equação do segundo grau, ela possui exatamente duas raízes no conjunto dos números complexos.

Detalhando um pouco mais, observamos que quando os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  são reais, existem três possibilidades para a obtenção das raízes:

1. **Duas raízes reais e distintas:** Se  $r$  e  $s$  são raízes reais e distintas as duas autofunções (autovetores) associadas a estes autovalores em relação ao operador  $L$ , formam o conjunto:

$$\{e^{rx}, e^{sx}\}$$

2. **Duas raízes reais e iguais:** Se  $r$  é um autovalor real (multiplicidade 2), as duas autofunções (autovetores) associadas a estes autovalores em relação ao operador  $L$ , formam o conjunto:

$$\{e^{rx}, xe^{rx}\}$$

3. **Duas raízes complexas conjugadas:** Se  $r$  e  $s$  são raízes complexas conjugadas, digamos  $r = a + ib$  e  $s = a - ib$ , as duas autofunções (autovetores) associadas a estes autovalores em relação ao operador  $L$ , formam o conjunto:

$$\{e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx)\}$$

É possível demonstrar que, o conjunto formado por qualquer um dos pares de funções apresentados nos três casos é linearmente independente (LI) no espaço vetorial de todas as funções reais sobre o corpo dos números reais. Mais importante ainda é que, toda combinação linear destas funções também será solução da equação diferencial linear:

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

Se  $\{y_1, y_2\}$  é qualquer um dos conjuntos acima citados, a solução geral da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem será dada por:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

### 3.6 Método de d'Alembert para obter outra solução

Dada uma EDO linear homogênea de segunda ordem da forma:

$$L(y) = a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = 0$$

e uma solução conhecida  $y_1 = y_1(x)$ , o método de d'Alembert, proporciona uma forma de construir uma segunda solução  $y_2 = y_2(x)$  para esta equação de modo que o conjunto  $\{y_1, y_2\}$  das soluções de  $L(y) = 0$  seja LI.

O método consiste em construir a segunda função  $y_2 = y_2(x)$  através da multiplicação da solução conhecida  $y_1 = y_1(x)$  por uma função incógnita  $v = v(x)$  que será a solução de uma equação que aparecerá quando substituirmos  $y_2 = y_2(x)$  na EDOL dada, aceitando que  $L(y_1) = 0$ , isto é:

$$y_2(x) = v(x) y_1(x)$$

Ao invés de trabalhar com a teoria, mostraremos o funcionamento do método com dois exemplos.

Exemplo 1: Para usar o método de d'Alembert para resolver a equação

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$$

assumiremos que a função  $y_1(x) = x^2$  seja uma solução (Isto é fácil de verificar). Tomando

$$y_2(x) = v(x) x^2$$

obtemos

$$y_2'(x) = v'(x) x^2 + 2x v(x)$$

e

$$y_2''(x) = v''(x) x^2 + 4x v'(x) + 2v(x)$$

o que significa que

$$x^4 v''(x) = 0$$

ou seja

$$v''(x) = 0$$

Esta última EDO, tem solução geral

$$v(x) = ax + b$$

e como estamos procurando apenas uma função simples (que pode ser um caso particular) com esta propriedade, mas que não seja identicamente nula, tomaremos  $a = 1$  e  $b = 0$  e assim

$$v(x) = x$$

e a nossa segunda solução será

$$y_2(x) = x x^2 = x^3$$

A solução geral da EDO dada será

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3 = x^2 [C_1 + C_2 x]$$

Exemplo 2: Com o método de d'Alembert, resolveremos a equação

$$t^2 y'' + 3t y' + y = 0$$

assumindo que  $y_1(t) = \frac{1}{t}$  seja uma solução (Verifique isto!). Tomaremos

$$y(t) = v(t) \frac{1}{t}$$



para obter

$$y'(t) = \frac{1}{t} v'(t) - \frac{1}{t^2} v(t)$$

e

$$y''(t) = \frac{1}{t^2} [t v''(t) - 2v'(t) + 2\frac{1}{t}v(t)]$$

Substituindo estas derivadas, bem como a função  $y = y(t)$  na EDO com coeficientes variáveis teremos:

$$t v''(t) + v'(t) = 0$$

e tomando  $v'(t) = p(t)$ , teremos a EDO linear de primeira ordem

$$t p'(t) + p(t) = 0$$

cuja solução geral é

$$p(t) = \frac{K}{t}$$

Voltando à variável introduzida anteriormente, teremos

$$v'(t) = \frac{K}{t}$$

cuja solução é:

$$v(t) = C + D \ln t$$

e voltando à função tomada inicialmente, com  $C = 0$  e  $D = 1$ :

$$y_2(x) = \frac{1}{t} \ln t$$

e a solução geral da EDO dada será

$$y(x) = \frac{1}{t} [C_1 + C_2 \ln t]$$

### 3.7 Equação eqüidimensional de Euler-Cauchy

Uma equação eqüidimensional de Euler (Cauchy) é uma equação diferencial ordinária (EDO) linear da forma

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$$

onde  $n$  é um número natural que fornece a ordem da equação com  $a_n \neq 0$ , os  $a_k$  são números reais para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  e a função  $g = g(x)$  é contínua sobre um intervalo aberto real.

A importância da equação de Euler ocorre quando estamos procurando obter soluções  $u = u(x, y)$  para a equação diferencial parcial de Laplace de segunda ordem sobre uma região **circular**

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

Acontece que o estudo desta equação no **círculo** fica complicado com o uso de coordenadas retangulares  $(x, y)$ , mas se realizarmos uma mudança de variáveis para coordenadas polares  $(r, \theta)$ , definidas por

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta)$$

obteremos a equação de Laplace em coordenadas polares

$$\frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial \theta^2} = 0$$

e deveremos procurar soluções da forma  $u = u(r, \theta)$ .

Para resolver esta última equação, usaremos o método de separação das variáveis que adota  $u(r, \theta) = R(r) T(\theta)$  para obter uma outra equação

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} T(\theta) + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} T(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \frac{d^2 T(\theta)}{d\theta^2} = 0$$

que pode ser separada em duas partes

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} \equiv \frac{-T''(\theta)}{T(\theta)}$$

sendo que a primeira só contém a variável  $r$  e a segunda só contém a variável  $\theta$ . É fácil mostrar que ambas as expressões devem coincidir com uma constante, digamos  $\lambda$ , assim poderemos escrever

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = \lambda = \frac{-T''(\theta)}{T(\theta)}$$

A primeira igualdade conduz a uma equação de Euler:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0$$

Na sequência, mostraremos como resolver equações de Euler homogêneas. Para as equações de Euler não homogêneas, devemos usar o método da variação dos parâmetros.

Para resolver uma equação de Euler da forma

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

procuraremos obter números  $r$  reais ou complexos de modo que a função

$$y = y(x) = x^r$$

seja solução da EDO linear dada.

Uma outra forma alternativa (que não será usada neste trabalho) é considerar a mudança de variável  $x = e^t$  para transformar a EDO de Euler em uma EDO linear com coeficientes constantes.

Assim, obteremos  $n$  soluções LI para a EDO linear dada. Dessa forma

$$y' = r x^{r-1} \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

e em geral

$$y^{(k)} = A(r, k) x^{r-k}$$

onde  $A(r, k)$  é o arranjo de  $r$  elementos tomados  $k$  a  $k$ , definido por:

$$A(r, k) = r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)$$

Para facilitar os nossos trabalhos, consideraremos o caso geral de uma equação de Euler de ordem  $n = 2$ , isto é:

$$a x^2 y'' + b x y' + c y = 0$$

Substituindo a função  $y(x) = x^r$  como as suas derivadas, obteremos:

$$x^r [ar(r-1) + br + c] = 0$$

Como procuramos soluções LI, devemos obter valores de  $r$  que satisfaçam à equação **indicial**

$$a r(r - 1) + b r + c = 0$$

que simplificada, pode ser escrita na forma

$$a r^2 + (b - a) r + c = 0$$

Como esta equação indicial é do segundo grau, temos três possibilidades:

**1. Duas raízes reais e distintas:** Neste caso

$$y_1(x) = x^r \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^s$$

logo a solução da homogênea será:

$$y(x) = C_1 x^r + C_2 x^s$$

Exemplo: Para a equação de Euler

$$L(y) = x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0$$

a equação indicial associada é:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

cujas raízes são  $r=1$  e  $r=2$ , garantindo que o conjunto  $\{x^1, x^2\}$  é LI, logo a solução geral será dada por

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^2$$

**2. Duas raízes reais e iguais:** Aqui, uma solução terá a forma

$$y_1(x) = x^r$$

e a segunda será obtida pela multiplicação por  $\ln x$ , isto é:

$$y_2(x) = x^r \ln x$$

logo, a solução da homogênea de Euler, será

$$y(x) = C_1 x^r + C_2 x^r \ln x = x^r [C_1 + C_2 \ln x]$$

Exemplo: Seja a equação de Euler

$$L(y) = x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0$$

Quando tomamos

$$y(x) = x^r$$

podemos escrever

$$L(x^r) = (r^2 - 4r + 4) x^r$$

e desse modo, a equação indicial associada

$$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$$

possui uma raíz dupla  $r = 2$ . Uma primeira solução será

$$y_1(x) = x^2$$

e uma segunda solução terá a forma

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x) = x^2 \ln x$$

Retomaremos a expressão já obtida anteriormente e realizaremos um detalhamento para justificar esta multiplicação por  $\ln x$ .

Aplicando o operador diferencial linear  $L$  à função  $x^r$ , obteremos

$$L(x^r) = (r - 2)^2 x^r$$

Aplicando agora, sobre o resultado anterior, o operador diferencial linear  $D_r$  para a derivada da função em relação à variável  $r$ , teremos:

$$D_r L(x^r) = D_r[(r - 2)^2 x^r]$$

Como os operadores diferenciais  $D_r$  e  $L$  comutam, então podemos reescrever esta última expressão como

$$LD_r(x^r) = D_r[(r - 2)^2 x^r]$$

Como estamos realizando a derivada em relação à variável  $r$ , nosso trabalho será um pouco maior e neste caso

$$D_r(x^r) = D_r[e^r \ln x] = \ln x D_r[e^r \ln x] = x^r \ln x$$

o que garante que

$$L[\ln x \ x^r] = 2(r - 2) x^r + (r - 2)^2 x^r \ln x$$

Neste caso, o autovalor é  $r = 2$ , assim substituindo  $r = 2$  na última expressão, obteremos

$$L[x^2 \ln x] = 0$$

Como o operador  $L$  aplicado a esta função fornece um resultado nulo, significa que esta é uma outra solução para a equação de Euler, assim, justificamos a razão pela qual devemos multiplicar a solução anterior por  $\ln x$ , isto é

$$y_2(x) = x^2 \ln x$$

Como o conjunto formado pelas funções  $\{y_1, y_2\}$  é linearmente independente, podemos escrever a solução geral como:

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x = x^2 [C_1 + C_2 \ln x]$$

Exemplo: Para a equação de Euler de terceira ordem

$$x^3 y^{(3)} + 6x^2 y'' + 7x y' + y = 0$$

tomaremos  $y(x) = x^r$  para obter

$$x^r (r^3 + 3r^2 + 3r + 1) = 0$$

A equação indicial (característica) é

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$$

que tem a raiz tripla  $r = -1$ , garantindo uma primeira solução

$$y_1(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

De forma similar ao exemplo acima, multiplicamos  $y_1$  por  $\ln x$  para obter

$$y_2(x) = \frac{1}{x} \ln x$$

e multiplicamos  $y_2$  por  $\ln x$  para obter:

$$y_3(x) = \frac{1}{x} (\ln x)^2$$

e a solução geral desta equação de Euler será

$$y(x) = \frac{1}{x} [C_1 + C_2 \ln x + C_3 (\ln x)^2]$$

### 3. Duas raízes complexas conjugadas

Se as raízes são dadas por:

$$r_1 = a + bi, \quad r_2 = a - bi$$

poderíamos tentar usar as funções complexas, como:

$$y_1(x) = x^{a+bi}, \quad y_2(x) = x^{a-bi}$$

mas isto nem sempre é adequado, pois estamos procurando funções reais válidas para  $x > 0$ . Trabalharemos então com as partes real e imaginária do número complexo  $r = a + bi$  para obter a solução da equação de Euler. Usaremos então

$$y(x) = x^{a+bi} = x^a x^{bi} = x^a \exp(i b \ln x)$$

e pela relação de Euler

$$y(x) = x^a [\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)]$$

ou seja

$$y(x) = [x^a \cos(b \ln x)] + i[x^a \sin(b \ln x)]$$

Desse modo, tomamos as partes real e imaginária desta última função como sendo as soluções LI procuradas, que são as funções reais:

$$y_1(x) = x^a \cos(b \ln x), \quad y_2(x) = x^a \sin(b \ln x)$$

e a solução geral da equação de Euler homogênea será

$$y(x) = C_1 x^a \cos(b \ln x) + C_2 x^a \sin(b \ln x)$$

ou seja

$$y(x) = x^a [C_1 \cos(b \ln x) + C_2 \sin(b \ln x)]$$

Exemplo: Para a equação de Euler

$$L(y) = x^2 y'' + x y' + 4y = 0$$

a equação indicial associada é

$$r^2 + 4 = 0$$

cujas raízes são  $r_1 = 2i = 0 + 2i$  e  $r_2 = -2i = 0 - 2i$ , logo

$$y_1(x) = x^0 \cos(\ln x^2) = \cos(2 \ln x)$$

$$y_2(x) = x^0 \sin(\ln x^2) = \sin(2 \ln x)$$

e a solução geral da EDO linear homogênea associada será

$$y(x) = C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \sin(2 \ln x)$$

### 3.8 Método dos Coeficientes a Determinar

O método dos coeficientes a determinar fornece uma solução particular para uma equação linear não homogênea

$$a y'' + b y' + c y = d(x)$$

Se conhecemos a função  $d = d(x)$ , nosso objetivo será obter uma solução particular  $y_p = y_p(x)$  que possa ser escrita como combinação linear de um conjunto linearmente independente de funções. O problema fica mais fácil quando esta função  $d = d(x)$  tem alguma das formas abaixo.

#### 1. Polinômio de grau $n$ na variável independente

A solução procurada deverá estar na forma:

$$y_p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$



## 2. Múltiplo de uma função exponencial

A solução procurada deverá estar na forma:

$$y_p(x) = k e^{rx}$$

## 3. Combinação linear das funções $\cos(kx)$ e $\sin(kx)$

Solução procurada na forma:

$$y_p(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

## 4. Soma das formas anteriores

A solução procurada deverá estar na forma:

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

onde  $y_1 = y_1(x)$  é a solução obtida na primeira forma e  $y_2 = y_2(x)$  é a solução obtida na segunda forma.

## 5. Produto das formas anteriores

A solução procurada deverá estar na forma:

$$y_p(x) = y_1(x) y_2(x)$$

onde  $y_1 = y_1(x)$  é a solução obtida na primeira forma e  $y_2 = y_2(x)$  é a solução obtida na segunda forma.

**Observação importantíssima:** Se as funções sugeridas já apareceram na solução geral da equação homogênea associada, então a sugestão para a nova função deverá ser a mesma função sugerida, multiplicada por  $x$ . Caso a função não sirva, multiplique por  $x^2$  e se ocorrer falha, vá aumentando o expoente de  $x$ .

Exemplos: Consideremos o operador diferencial linear  $L$  com coeficien-

tes constantes e uma equação diferencial linear  $L(y) = d(x)$ .

$L(y) = d(x)$	Forma da solução procurada
$L(y) = 3x^2$	$y(x) = a x^2 + b x + c$
$L(y) = 7e^{3x}$	$y(x) = a e^{3x}$
$L(y) = 17 \cos(3x)$	$y(x) = a \cos(3x) + b \sin(3x)$
$L(y) = 7 \sin(2x)$	$y(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x)$
$L(y) = 7 \sin(2x) + 8 \cos(2x)$	$y(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x)$
$L(y) = 3e^{5x} + (x^2 + 7x + 3)$	$y(x) = a e^{5x} + [b x^2 + c x + d]$
$L(y) = 3e^{5x}(x^2 + 7x + 3)$	$y(x) = e^{5x} [a x^2 + b x + c]$
$L(y) = 3e^{5x} \sin(2x)$	$y(x) = e^{5x} [a \cos(2x) + b \sin(2x)]$

A equação  $L(y) = 7 \sin(3x) + 8 \cos(2x)$  exige algo da forma

$$y(x) = a \cos(3x) + b \sin(3x) + c \cos(2x) + d \sin(2x)$$

### 3.9 Método da Variação dos Parâmetros (Lagrange)

O método da Variação dos Parâmetros é muito mais poderoso que o método dos coeficientes a determinar, para a obtenção de uma solução particular de uma equação diferencial ordinária linear da forma

$$a y'' + b y' + c y = d(x)$$

uma vez que resolve equações com coeficientes variáveis. O processo leva em consideração a solução obtida a partir da equação linear homogênea associada e trata a constante obtida como uma possível função do parâmetro  $x$ .

Sequencialmente, mostraremos como funciona o método para equações diferenciais lineares de primeira, segunda e terceira ordem.

#### 1. Funcionamento do método para uma EDO de primeira ordem

Mesmo sabendo que existe uma forma mais fácil para resolver o problema, consideraremos a equação  $y' - 2y = 5$ . A equação homogênea associada é

$$y' - 2y = 0$$

cuja solução geral é

$$y(x) = A e^{2x}$$

Com a suposição que  $A$  seja uma função de  $x$ , isto é que  $A = A(x)$  e procuraremos descobrir (pelo menos) uma tal função para que

$$y(x) = A(x) e^{2x}$$

seja uma solução particular da equação original dada.

Para que isto ocorra, devemos realizar a derivada para escrever:

$$y'(x) = A'(x) e^{2x} + 2 A(x) e^{2x}$$

Substituindo esta última expressão na equação dada, teremos:

$$A'(x) e^{2x} + 2A(x) e^{2x} - 2 A(x) e^{2x} = 5$$

Simplificando esta última equação, chegaremos a:

$$A'(x) = 5 e^{-2x}$$

que por integração nos garante que:

$$A(x) = -\frac{5}{2} e^{-2x}$$

logo, a solução particular será:

$$y(x) = A(x) e^{2x} = -\frac{5}{2} e^{-2x} e^{2x} = -\frac{5}{2}$$

Dessa forma, a solução geral da equação  $y' - 2y = 5$  é:

$$y(x) = C e^{-2x} - \frac{5}{2}$$

## 2. Funcionamento do método para uma EDO de segunda ordem

Seja a equação diferencial de segunda ordem  $L(y) = d(x)$ , sendo que a solução de  $L(y) = 0$  será dada por:

$$y(x) = A y_1(x) + B y_2(x)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes reais.

O método consiste em supor que  $A$  e  $B$  possam variar com a variável independente  $x$ , isto é, que  $A = A(x)$  e  $B = B(x)$  de tal forma que

$$y(x) = A(x) y_1(x) + B(x) y_2(x)$$

seja uma solução da equação original e a partir daí, deverá ser imposta uma condição de nulidade para a expressão:

$$A'(x) y_1(x) + B'(x) y_2(x) = 0$$

que juntamente com a equação diferencial dada, força que:

$$A'(x) y_1'(x) + B'(x) y_2'(x) = d(x)$$

A partir daí, monta-se um sistema de equações, que será escrito sem as variáveis (para ficar mais fácil), mas deve ficar claro que todas as funções envolvidas dependerão de  $x$ :

$$\begin{aligned} A'(x) y_1 + B'(x) y_2 &= 0 \\ A'(x) y_1' + B'(x) y_2' &= d(x) \end{aligned}$$

Pela regra de Cramer podemos obter  $A' = A'(x)$  e  $B' = B'(x)$  e o passo seguinte é integrar estas funções para obter  $A = A(x)$  e  $B = B(x)$  e finalmente obter uma solução particular para a equação original dada.

### 3. Funcionamento do método para uma EDO de terceira ordem

Seja uma equação diferencial linear de terceira ordem  $L(y) = d(x)$ , com a solução de  $L(y) = 0$  dada por:

$$y(x) = A y_1(x) + B y_2(x) + C y_3(x)$$

sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  constantes reais.

O método faz a suposição que  $A$ ,  $B$  e  $C$  possam variar com a variável independente  $x$ , isto é que  $A = A(x)$ ,  $B = B(x)$  e  $C = C(x)$  de modo que

$$y(x) = A(x) y_1(x) + B(x) y_2(x) + C(x) y_3(x)$$

seja uma solução da equação original e a partir daí, devem ser impostas duas condições de nulidade:

$$\begin{aligned}A'(x) y_1 + B'(x) y_2 + C'(x) y_3 &= 0 \\A'(x) y_1' + B'(x) y_2' + C'(x) y_3' &= 0\end{aligned}$$

que juntamente com a equação diferencial, força que:

$$A'(x) y_1'' + B'(x) y_2'' + C'(x) y_3'' = d(x)$$

A partir daí, monta-se um sistema com 3 equações:

$$\begin{aligned}A'(x) y_1 + B'(x) y_2 + C'(x) y_3 &= 0 \\A'(x) y_1' + B'(x) y_2' + C'(x) y_3' &= 0 \\A'(x) y_1'' + B'(x) y_2'' + C'(x) y_3'' &= d(x)\end{aligned}$$

Pela regra de Cramer, obtemos  $A' = A'(x)$ ,  $B' = B'(x)$  e  $C' = C'(x)$  e o passo seguinte deve ser integrar estas funções para obter  $A = A(x)$ ,  $B = B(x)$  e  $C = C(x)$  para finalmente obter uma solução particular para a equação original dada.

Exemplo: Para a equação diferencial  $y'' + 4y = \sin(x)$ , a solução da equação homogênea associada é

$$y(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$$

Montamos então o sistema:

$$\begin{aligned}A'(x) \cos(2x) + B'(x) \sin(2x) &= 0 \\-2A'(x) \sin(2x) + 2B'(x) \cos(2x) &= \sin(x)\end{aligned}$$

Usando a regra de Cramer, obtemos  $A'$  e  $B'$

$$\begin{aligned}A'(x) &= -\frac{1}{2} \sin(2x) \sin(x) \\B'(x) &= \frac{1}{2} \cos(2x) \sin(x)\end{aligned}$$

Integrando  $A'$  e  $B'$  sem a necessidade de acrescentar a constante de integração porque estamos procurando por apenas uma solução, obtemos as funções  $A = A(x)$  e  $B = B(x)$ .

Exemplo: A equação  $y''' = x^{10}$  é tal que a solução da equação homogênea associada pode ser escrita como:

$$y(x) = A + Bx + Cx^2$$

Vamos montar o sistema:

$$\begin{aligned} A'(x) + B'(x)x + C'(x)x^2 &= 0 \\ B'(x) + 2C'(x)x &= 0 \\ 2C'(x) &= x^{10} \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$C(x) = \frac{1}{22} x^{11}$$

Como  $B'(x) = -x^{10}$ , então

$$B(x) = -\frac{1}{12} x^{12}$$

A função  $A = A(x)$  é fácil de obter e finalmente obtemos a solução.

## 4 Redução da ordem de uma equação diferencial

Na sequência, apresentaremos alguns tipos especiais de equações diferenciais e algumas formas para obter as respectivas soluções por redução a outras formas mais simples.

### 4.1 Equação do tipo $y^{(n)} = f(x)$

A solução será obtida por  $n$  integrais sucessivas da função  $f = f(x)$ .

Exemplo: Para a EDO  $y''' = 2x + 7$ , realiamos a primeira integral reduzindo a ordem para

$$y'' = x^2 + 7x + C_1$$

Na sequência, tomamos duas outras integrais, para obter

$$y(x) = \frac{1}{12} x^4 + \frac{7}{12} x^3 + A x^2 + B x + C$$

## 4.2 Equação que não tem o termo em $y$

Exemplo: Para a EDO  $x y'' + y' = 0$ , tomamos  $p(x) = y'(x)$ , para obter uma EDO com a ordem uma unidade a menos na variável dependente  $p$  e na variável independente  $x$

$$x p' + p = 0$$

e a solução desta equação é

$$p(x) = \frac{K}{x}$$

Como  $p(x) = y'(x)$ , basta resolver a equação

$$y'(x) = \frac{K}{x}$$

para obter

$$y(x) = A + B \ln x$$

## 4.3 Equação que não tem os termos em $y$ e em $y'$

Exemplo: Para a EDO  $x y''' + y'' = 0$ , tomamos  $p(x) = y''(x)$ , para obter uma EDO com a ordem duas unidades a menos

$$x p' + p = 0$$

Como  $p(x) = y''(x)$  e já vimos que  $p(x) = K/x$ , basta resolver a EDO

$$y''(x) = \frac{K}{x}$$

#### 4.4 Equação que não tem os termos em $y, y'$ e $y''$

Exemplo: Se  $x y^{(4)} - y^{(3)} = 0$ , tomamos  $p(x) = y^{(3)}(x)$ , para construir uma EDO com a ordem três unidades a menos

$$x p' - p = 0$$

Como  $p(x) = y'''(x)$  e  $p(x) = K/x$ , basta resolver a EDO

$$y''' = \frac{K}{x}$$

#### 4.5 Equação que não tem $y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}$

Neste caso, tomaremos

$$p = y^{(k)}, \quad p' = y^{(k+1)}, \quad p'' = y^{(k+2)}, \quad \dots, \quad p^{(n-2)} = y^{(n)}$$

e reduziremos a EDO dada a uma outra EDO de ordem  $n - k$  na variável dependente  $p$  e na variável independente  $x$ .

#### 4.6 Equação que não tem a variável independente $x$

Tomamos  $p = y'$  para reduzir a ordem em uma unidade e observar que em virtude da falta da variável  $x$ , podemos pensar que  $p$  depende de  $y$  que por sua vez depende de  $x$ , isto é,  $p = p(y(x))$  e usando a regra da cadeia, obteremos:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = p(y) \\ y'' &= \frac{d[p(y)]}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p'(y) y'(x) = p'(y) p(y) \\ y''' &= \frac{d[y'']}{dx} = \frac{d[y'']}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d[p'(y)p(y)]}{dy} y'(x) = p^2 p''(y) + p [p'(y)]^2 \end{aligned}$$

Exemplo: Para  $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$ , tomaremos  $y' = p(y)$  e  $y'' = p(y) p'(y)$ , para obter:

$$p(y) p'(y) + p^2 = 2e^{-y}$$



Usaremos a substituição  $z(y) = p^2(y)$  para obter

$$2 p(y) p'(y) = \frac{dz}{dy}$$

para garantir que:

$$\frac{dz}{dy} + 2z(y) = 4e^{-y}$$

Como esta é uma EDO linear, devemos resolvê-la e voltar às variáveis originais.

#### 4.7 EDO $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , $F$ homogênea só nas variáveis $y^{(k)}$

Devemos observar com cuidado que a função  $F = F(y, y', \dots, y^{(n)})$  deve ser homogênea apenas nas variáveis  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , sendo que a variável  $x$  não deve ser considerada nesta análise.

Reduzimos a ordem da EDO com a substituição

$$y(x) = \exp\left(\int_0^x z(u) du\right)$$

onde  $z = z(x)$  é uma função a ser determinada. O Teorema do Valor Médio para integrais garante que a derivada em relação à variável  $x$  em ambos os termos dessa última igualdade nos fornece uma expressão que será usada na sequência:

$$y'(x) = z(x) y(x)$$

Exemplo: Para a EDO  $x^2 y y'' - (y - xy')^2 = 0$ , a função

$$F(y, y', y'') = x^2 y y'' - (y - xy')^2$$

é homogênea de grau 2 nas variáveis  $y, y'$  e  $y''$ .

Tomando

$$y(x) = \exp\left(\int_0^x z(u) du\right)$$

obtemos

$$y' = z y$$

e além disso

$$y'' = (z' + z^2) y$$

Substituindo as novas variáveis na EDO dada e simplificando, obtemos:

$$x^2(z' + z^2) - (1 - xz)^2 = 0$$

que pode ser reescrita na forma:

$$x^2 z' + 2 x z = 1$$

Após resolvermos esta última equação, voltamos às variáveis originais.

## 5 Aplicações de equações diferenciais ordinárias

### 5.1 Decaimento Radioativo

Fatos experimentais mostram que materiais radioativos desintegram a uma taxa proporcional à quantidade presente do material.

Se  $Q = Q(t)$  é a quantidade presente de um certo material radioativo no instante  $t$ , então a taxa de variação de  $Q(t)$  com respeito ao tempo  $t$ , aqui denotada por  $\frac{dQ}{dt}$ , é dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = k Q(t)$$

onde  $k$  é uma constante negativa bem definida do ponto de vista físico. Para o Carbono 14 a constante é  $k = -1,244 \text{ E-4}$  e para o caso do Rádio a constante é  $k = -1,4 \text{ E-11}$ .

Normalmente consideramos  $Q(0) = Q_0$  a quantidade inicial do material radioativo considerado. Quando não conhecemos o material radioativo, devemos determinar o valor da constante  $k$ , o que pode ser feito através da característica de “meia-vida” do material.

A “meia-vida” é o tempo necessário para desintegrar a metade do material. Portanto, se nós conhecemos a meia-vida do material, podemos obter a constante  $k$  e vice-versa. Em livros de Química podemos obter as “meias-vidas” de vários materiais radioativos.

Por exemplo, a meia-vida do Carbono-14 está na faixa entre 5538 anos e 5598 anos, numa média de 5568 anos com um erro para mais ou para menos de 30 anos. O Carbono-14 é uma importante ferramenta em Pesquisa Arqueológica conhecida como teste do radiocarbono.

Problema: Um isótopo radioativo tem uma “meia-vida” de 16 dias. Você deseja ter 30 g no final de 30 dias. Com quanto radioisótopo você deve começar?

Solução: Desde que a “meia-vida” está dada em dias, nós mediremos o tempo em dias. Seja  $Q = Q(t)$  a quantidade presente no instante  $t$  e  $Q(0) = Q_0$  a quantidade inicial. Sabemos que  $r$  é uma constante e usaremos a “meia-vida” 16 dias para obter a constante  $k$ .

Como

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

então, para  $t = 16$  teremos  $Q(16) = \frac{1}{2}Q_0$ , logo

$$\frac{1}{2} Q_0 = Q_0 e^{16k}$$

assim

$$e^{16k} = \frac{1}{2}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$k = -\frac{\ln 2}{16} = -0,043321698785$$

e dessa forma temos a função que determina a quantidade de material radioativo a qualquer momento:

$$Q(t) = Q_0 e^{0,043321698785t}$$

## 5.2 Lei do resfriamento de Newton

Sobre a condução do calor, um modelo real simples que trata sobre a troca de calor de um corpo com o meio ambiente em que o mesmo está colocado, aceita três hipóteses básicas:

1. A temperatura  $T = T(t)$  depende do tempo  $t$  e é a mesma em todos os pontos do corpo.
2. A temperatura  $T_m$  do meio ambiente permanece constante ao longo da experiência.
3. A taxa de variação da temperatura com relação ao tempo  $t$  é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio ambiente.

A montagem e resolução da equação diferencial, assume verdadeiras as hipóteses e dessa forma

$$\frac{dT}{dt} = -k (T - T_m)$$

onde  $T = T(t)$  é a temperatura do corpo no instante  $t$ ,  $T_m$  é a temperatura constante do meio ambiente e  $k$  é uma constante que depende do material com que o corpo foi construído, sendo que o sinal negativo indica que a temperatura do corpo está diminuindo com o passar do tempo, em relação à temperatura do meio ambiente.

Esta equação diferencial é separável, que pode ser transformada em:

$$\frac{dT}{T - T_m} = -k dt$$

Integrando ambos os membros em relação à variável tempo, teremos:

$$\ln(T - T_m) = -k t + k_0$$

Aplicando a função exponencial a ambos os membros e tomando as constantes embutidas em uma só, obteremos:

$$T(t) - T_m = C e^{-kt}$$

e a solução da equação diferencial será

$$T(t) = T_m + C e^{-kt}$$

Se sabemos que a temperatura inicial do corpo é  $T(0) = T_0$ , então substituindo  $t = 0$  na solução da equação, podemos obter a constante  $C$  que aparece na solução, pois

$$T_0 = T_m + C$$

A solução do PVI

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m), \quad T(0) = T_0$$

será então dada por

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m) e^{-kt}$$

### 5.3 Elementos de Eletricidade

Sem a preocupação de aprofundamento nos detalhes relacionados com a Eletricidade, iremos apresentar alguns poucos conceitos necessários ao presente trabalho de Equações diferenciais.

1. Se  $V_A$  e  $V_B$  são, respectivamente, os potenciais elétricos nos pontos  $A$  e  $B$  de um circuito elétrico, a **Diferença de potencial** entre os pontos  $A$  e  $B$ , denotada por  $V_{AB}$  ou  $V(t)$ , pode ser definida como a integral de linha sobre o segmento de reta ligando os pontos  $A$  a  $B$  no campo elétrico  $E = E(t)$ . Normalmente, esta diferença de potencial  $V(t)$  será indicada com o sinal negativo, isto é:

$$V_{AB} = - \int_0^t E(u) du = -V(t)$$

2. A **Intensidade da corrente elétrica** será a taxa de variação da carga elétrica  $Q$  em relação ao tempo  $t$  que atravessa uma seção transversal de um condutor. Em símbolos:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

3. A **capacitância**  $C$  de um capacitor submetido a uma carga elétrica  $Q$ , com uma diferença de potencial entre as placas indicada por  $V$ , será dada por

$$C(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}$$

4. A **lei de Ohm**, estabelece que a diferença de potencial  $V$  nos terminais de um resistor de resistência  $R$  submetido a uma intensidade da corrente  $I$ , é dada por:

$$V(t) = RI(t)$$

5. A **indutância**  $L$  de um indutor é uma constante relacionada com a diferença de potencial  $V$  e com a taxa de variação da intensidade da corrente elétrica em relação ao tempo  $\frac{dI}{dt}$ , através da expressão matemática:

$$V(t) = L \frac{dI}{dt}$$

6. Existem duas leis clássicas de Kirchhoff:

(a) **Lei das correntes:** A soma algébrica das intensidades de corrente elétrica que chegam em um nó de um circuito elétrico é igual à soma algébrica das intensidades de corrente elétrica que saem do mesmo nó neste circuito elétrico.

(b) **Lei das tensões:** A soma algébrica das diferenças de potencial em uma malha fechada é zero.

## 5.4 Circuitos Elétricos RLC

Circuitos elétricos mais complexos (redes) são basicamente formados por resistores de resistência  $R$ , indutores de indutância  $L$ , capacitores de capacitância  $C$ , carregado com uma diferença de potencial  $V_C$  e uma fonte elétrica cuja diferença de potencial é indicada  $E(t)$ .

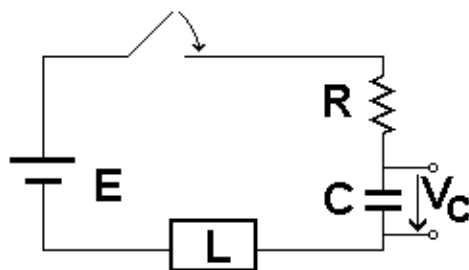


Figura 3: Circuito elétrico RLC com capacitor carregado

Se  $E = E(t)$  é a diferença de potencial da fonte de alimentação e  $I = I(t)$  é a intensidade da corrente elétrica, então

1.  $V_L$  é a diferença de potencial nos terminais do indutor:

$$V_L(t) = L \frac{dI}{dt}$$

2.  $V_R$  é a diferença de potencial nos terminais do resistor:

$$V_R(t) = R I(t)$$

3.  $V_C$  é a diferença de potencial nos terminais do capacitor:

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(u) du$$

Usando as leis de Kirchhoff, quando for fechado o interruptor, obteremos

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = E(t)$$

ou seja

$$L \frac{dI}{dt} + R I(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(u) du = E(t)$$

Se  $E(t)$  é constante e derivarmos em relação à variável  $t$ , teremos

$$L I''(t) + R I'(t) + \frac{1}{C} I(t) = 0$$

e temos uma EDO linear homogênea.

Se  $E = E(t)$  é uma função diferenciável da variável  $t$ , então

$$L I''(t) + R I'(t) + \frac{1}{C} I(t) = E'(t)$$

Existem alguns casos particulares interessantes, sendo alguns deles apenas teóricos, mas com algum fundamento matemático.

1. **Circuito RC:** Vamos considerar um circuito elétrico que possui um resistor de resistência  $R$ , um capacitor de capacitância  $C$ , uma fonte de alimentação com voltagem  $E$  constante e  $I = I(t)$  será a intensidade da corrente elétrica.

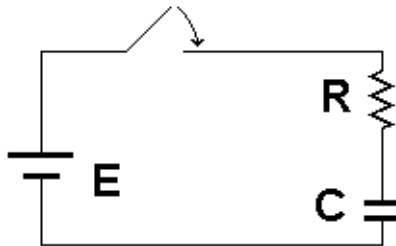


Figura 4: Circuito elétrico RC com capacitor descarregado

A diferença de potencial nos terminais do resistor é dada por  $V_R = R I(t)$  e a diferença de potencial nos terminais do capacitor é dada por

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(u) du$$

Pela lei de Kirchhoff das tensões, segue que

$$V_R(t) + V_C(t) = E$$

e a EDO linear homogênea que rege o fenômeno é

$$R I(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(u) du = E$$

Derivando esta equação em relação à variável  $t$ , obtemos

$$R I'(t) + \frac{1}{C} I(t) = 0$$



A solução desta equação é

$$I(t) = K \exp[-t/(RC)] = I(0) \exp[-t/(RC)]$$

Se o capacitor estava descarregado no instante  $t = 0$  e continua descarregado em um átimo após  $t = 0$ , então  $Q(0) = 0$  e desse modo

$$V_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^0 I(u) du = 0$$

logo  $V_R(0) + V_C(0) = E$ , o que garante que  $R I(0) = E$ , assim

$$I(0) = \frac{E}{R}$$

Substituindo  $I(0)$  na solução da equação, obtemos

$$I(t) = \frac{E}{R} \exp[-t/(RC)]$$

Aplicando esta função, podemos obter

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(u) du = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{E}{R} \exp[-u/(RC)] du$$

assim, a diferença de potencial entre os terminais do capacitor ao longo do tempo  $t$ , será dada por:

$$V_C(t) = E \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \right]$$

2. **Circuito RL:** Seja o circuito elétrico possuindo um resistor de resistência  $R$ , um indutor de indutância  $L$  e uma fonte de alimentação constante  $E$ .

Sabemos que  $V_R(t) = R I(t)$  e  $V_L(t) = L \frac{dI}{dt}$ , assim usando a lei de Kirchhoff das tensões ao circuito

podemos escrever

$$L I'(t) + R I(t) = E$$

que é uma EDO linear não homogênea de primeira ordem.

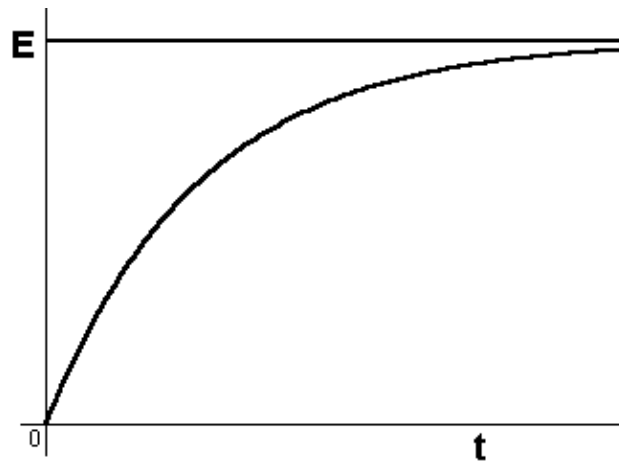


Figura 5: Diferença de potencial nos terminais do capacitor

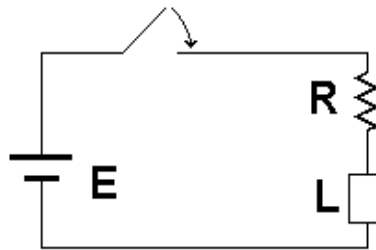


Figura 6: Circuito elétrico RL

A solução da equação homogênea associada é

$$I_h(t) = K \exp(-Rt/L)$$

Como a parte não homogênea da EDO é uma função constante, usamos o método dos coeficientes a determinar para procurar uma solução particular  $I_p = I_p(t)$  que seja constante, assim  $I_p'(t) \equiv 0$  e então,  $R I_p(t) = E$  o que garante que

$$I_p(t) = \frac{E}{R}$$

A solução da EDO é a soma da solução da homogênea associada com a solução particular, logo

$$I(t) = K \exp(-Rt/L) + \frac{E}{R}$$

Se considerarmos que  $I(0) = 0$  então

$$0 = K + \frac{E}{R}$$

logo  $K = -\frac{E}{R}$  assim

$$I(t) = \frac{E}{R} [1 - \exp(-Rt/L)]$$

Esta função tem a mesma forma que a função  $V_C = V_C(t)$  do circuito RC, apenas que a função horizontal limite deve ser traçada para  $I = E/R$ .

3. **Circuito RC:** Se o circuito elétrico possui um resistor de resistência  $R$ , um capacitor de capacitância  $C$  e a fonte de alimentação tem diferença de potencial  $E = E(t)$ , a EDO linear que rege o fenômeno é

$$R I'(t) + \frac{1}{C} I(t) = 0$$

4. **Circuito LC:** Se o circuito elétrico possui um indutor de indutância  $L$ , um capacitor de capacitância  $C$  e a diferença de potencial  $V_{AB} = -V(t)$ , a EDO linear não homogênea que rege o fenômeno é

$$L Q''(t) + \frac{1}{C} Q(t) = V(t)$$

## Referências bibliográficas

- [1] Figueiredo, D. G., Equações Diferenciais Aplicadas, IMPA, 12o. Colóquio Brasileiro de Matemática, (1979), Rio.
- [2] Kaplan, Wilfred, Cálculo Avançado, Edgard Blücher Editora e EDUSP, (1972), São Paulo, Brasil.
- [3] Kiseliov, A., Krasnov, M., Makarenko, G., Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Editorial Mir, (1973), Moscú.

- [4] Quevedo, Carlos P., Circuitos Elétricos, LTC Editora, (1988), Rio de Janeiro, Brasil.
- [5] Reza, Fazlollah, Los Espacios Lineales en la Ingenieria, Editorial Reverté, S.A., (1977), Barcelona, Espanha.
- [6] Spiegel, Murray, Análise de Fourier, Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, (1976), São Paulo, Brasil.