

DIFERENCIJALNI

I

**INTEGRALNI
RAČUN**

2

PREDAVANJA

Branko Červar

2012./13.

Sadržaj

1	INTEGRAL	1
1.1	NEODREĐENI INTEGRAL	1
1.1.1	POJAM I OSNOVNA SVOJSTVA NEODREĐENOGL INTEGRALA	2
1.1.2	OSNOVNE INTEGRACIJSKE METODE	7
1.1.3	INTEGRIRANJE NEKIH KLASA ELEMENTARNIH FUNKCIJA	13
1.1.4	INTEGRIRANJE FUNKCIJSKOG REDA	21
1.1.5	ZADACI ZA VJEŽBU	24
1.2	ODREĐENI INTEGRAL	28
1.2.1	POJAM I OSNOVNA SVOJSTVA ODREĐENOGL INTEGRALA	28
1.2.2	NEKI PRIBLIŽNI INTEGRACIJSKI POSTUPCI . .	39
1.2.3	NEPRAVI INTEGRAL	45
1.2.4	NEKOLIKO PRIMJENA ODREĐENOGL INTEGRALA	50
1.2.5	ZADACI ZA VJEŽBU	61
2	PROSTOR \mathbb{R}^n	67
2.1	<i>n</i> -DIMENZIONALNI EUKLIDSKI PROSTOR . . .	67
2.2	METRIČKA I TOPOLOŠKA STRUKTURA EUKLIDSKOG PROSTORA	71
2.3	NIZOVI U \mathbb{R}^n	80
2.4	KOMPAKTNOST U \mathbb{R}^n	85
2.5	POTPUNOST PROSTORA \mathbb{R}^n	88

2.6 ZADACI ZA VJEŽBU	90
3 SKALARNE FUNKCIJE	92
3.1 REALNE FUNKCIJE OD n REALNIH VARIJABLI	92
3.2 NEPREKIDNOST FUNKCIJE	102
3.3 LIMES FUNKCIJE	106
3.4 JEDNOLIKO NEPREKIDNE FUNKCIJE	111
3.5 ZADACI ZA VJEŽBU	117
4 DERIVABILNE FUNKCIJE	121
4.1 PARCIJALNA DERIVACIJA	121
4.2 DERIVACIJA KOMPOZICIJE FUNKCIJA	131
4.3 ZADACI ZA VJEŽBU	139
5 DIFERENCIJABILNE FUNKCIJE	142
5.1 TEOREM O SREDNJOJ VRIJEDNOSTI	142
5.2 DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJE	145
5.3 DIFERENCIJAL FUNKCIJE	149
5.4 DIFERENCIJALNE FORME	155
5.5 ZADACI ZA VJEŽBU	159
6 IMPLICITNO ZADANE FUNKCIJE	162
6.1 TEOREM O IMPLICITNIM FUNKCIJAMA	162
6.2 SUSTAVI JEDNADŽBI	167
6.3 ZADACI ZA VJEŽBU	170
7 TAYLOROVA FORMULA	173
7.1 TAYLOROVA FORMULA	173
7.2 LOKALNI EKSTREMI FUNKCIJE	177
7.3 VEZANI EKSTREMI	185
7.4 ZADACI ZA VJEŽBU	187
8 DIFERENCIRANJE POD ZNAKOM INTEGRALA	190
8.1 DIFERENCIRANJE POD ZNAKOM INTEGRALA	190
8.2 ZADACI ZA VJEŽBU	194

UVOD

Predavanja iz predmeta DIR2 održana školske godine 2012./2013. Ona prate propisani sadržaj: 1. Neodređeni integral (primitivna funkcija, osnovna svojstva neodređenog integrala, integracijske metode, integriranje nekih klasa funkcija); 2. Određeni integral realne funkcije jedne realne varijable (definicija i osnovna svojstva, osnovni teoremi integralnog računa, približna integracija, nepravi integrali, neke primjene); 3. Osnovna svojstva prostora \mathbb{R}^n (metrika, konvergencija nizova, potpunost); 4. Skalarne funkcije n realnih varijabla (zadavanje, limes i neprekidnost); 5. Diferencijalni račun skalarnih funkcija n -realnih varijabla i neke primjene (parcijalne derivacije, diferencijabilnost, parcijalne derivacije viših redova, egzaktnе diferencijalne forme, Taylorova formula, lokalni ekstremi, vezani ekstremi, implicitno zadane funkcije).

Preporučena literatura:

- [1] S. Kurepa, *Matematička analiza 2: Diferenciranje i integriranje*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [2] S. Kurepa, *Matematička analiza 3: Funkcije više varijabli*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1981.
- [3] N. Uglešić: *Viša matematika II*,
http://www.pmfst.hr/zavodi/matematika/visa_matematika.pdf

Dopunska literatura:

- [1] S. Lang, *A first Course in Calculus*, 5th ed., Springer, 1986.
- [2] M. Lovrić, *Vector Calculus*, Addison-Wesley Publ. Ltd., Don Mills, Ontario, 1997.
- [3] Š. Ungar, *Matematička analiza III*, Matematički odjel PMF, Zagreb 1994.

Poglavlje 1

INTEGRAL

1.1 NEODREĐENI INTEGRAL

Infinitezimalni račun, kako smo već spomenuli, vuče korijene iz Newtonovih i Leibnizovih radova o problemima "trenutne" brzine i krivuljine tangente. Od tada pa do danas, skoro triipolstoljetna teorija, primjena i praksa pokazuju da se mnogi tehničko-tehnološki, a i inačici problemi svode na probleme infinitezimalnoga računa. Među njima, pak, mnogi se svode na ovo pitanje:

Je li dana realna funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivacija neke realne funkcije $g : X \rightarrow \mathbb{R}$?

Nadalje, ako je odgovor na to pitanje potvrđan, zadatak je

Odrediti funkciju g , tj. riješiti jednadžbu (u skupu realnih funkcija \mathbb{R}^X) $g' = f$, pri čemu se za dani f traži g .

Pokazat ćemo da ta jednadžba ili nema rješenja ili ih ima beskonačno mnogo. Skup svih pripadnih rješenja ćemo nazvati (neodređenim) *integralom* funkcije f i pritom ćemo govoriti da smo funkciju f *integrirali*. Pokazat će se da je integriranje tehnički neusporedivo složeniji račun-postupak od deriviranja, premda se, na neki način, radi o obratnomu računu.

Ovdje ćemo, jednostavnosti radi i kad to ne bude imalo zasebnog utjecaja, nazivom **interval** i oznakom I obuhvatiti sve mogućnosti:

$$\langle a, b \rangle, \langle a, b], [a, b), [a, b], \langle \cdot, b \rangle, \dots, \langle \cdot, \cdot \rangle = \mathbb{R}.$$

Štoviše, ponekad će I označavati i neku uniju disjunktnih intervala, jer će, najčešće, definicijska područja promatranih funkcija biti ili intervali ili razlike nekih intervala i prebrojivih podskupova od \mathbb{R} .

1.1.1 POJAM I OSNOVNA SVOJSTVA NEODREĐENOG INTEGRALA

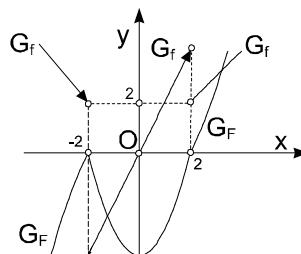
DEFINICIJA 1.1 Neka su dani interval (ili njihova unija) I , prebrojiv podskup $A \subset I$ funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, pri čemu je $I \setminus A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$. Svaku neprekidnu funkciju $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ sa svojstvom $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I \setminus A$, nazivamo **primitivnom funkcijom** za funkciju f na intervalu I .

PRIMJER. Funkcija $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 2, & x < -2 \\ x^2 - 4, & -2 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2, & x \geq 2 \end{cases}$,

je primitivna funkcija za funkciju

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ 2x, & -2 < x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$

jer je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ (v. crtež). (Ovdje je $I = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $A = \{-2, 2\}$.)



Primijetimo da je ista funkcija F primitivna funkcija i za sljedeće funkcije $f_{1,2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -2 \\ 2x, & -2 < x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ 2x, & -2 \leq x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$

kao i za mnoge druge koje se smiju razlikovati od f , f_1 ili f_2 po vrijednostima u točkama -2 i 2 . \square

PRIMJER. Za funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, su između ostalih i ove funkcije primitivne (na $I = \mathbb{R}$):

$$F_1(x) = x^2, F_2(x) = x^2 - 3, F_3(x) = x^2 + \sqrt{5} \quad (A = \emptyset).$$

Funkcija $x \mapsto G(x) = \arcsin x$ je primitivna za funkciju

$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ na } I = X = \langle -1, 1 \rangle \quad (A = \emptyset).$$

(Primijetimo da se ovdje za I smije uzeti i $[-1, 1]$, $\langle -1, 1]$, $[-1, 1]$ redom, s pripadnim suženjima od \arcsin , čim je $A = \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}$ redom.)

Funkcija $x \mapsto H(x) = \frac{1}{x}$ je primitivna za funkciju

$$x \mapsto h(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ na } I = X = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (A = \emptyset).$$

Napokon, primijetimo i to da je funkcija $F_1(x) = x^2$ primitivna ne samo za funkciju

$f(x) = 2x$ nego i za funkcije

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, f_2(x) = \begin{cases} 2x, & x \notin \mathbb{N} \\ 0, & x \in \mathbb{N} \end{cases}. \quad \square$$

Jedan od temeljnih teorema matematičke analize jest onaj o dovoljnim uvjetima za obstojnost primitivne funkcije. Mi ćemo ga iskazati i dokazati (u posebnom slučaju) u idućemu odjeljku po uvođenju pojma *određenog integrala*. A ovdje ćemo dokazati da je, grubo govoreći, dostatno poznavati jednu (bilo koju) primitivnu funkciju za danu funkciju f da bi se znale i "sve" ostale njezine primitivne funkcije. No, to podrazumijeva pretpostavku da su te primitivne funkcije derivabilne (na cijelom intervalu) i da im se derivacije podudaraju (ali *ne* nužno s $f|_I$ u svakoj točki!).

TEOREM 1.2 *Ako za danu funkciju $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, postoji primitivna funkcija $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq X$, onda je svaka funkcija $G : I \rightarrow \mathbb{R}$, $G = F + c_r|_I$, gdje je c_r konstantna funkcija u (bilo koji) $r \in \mathbb{R}$, primitivna za funkciju f . Štoviše, ako su $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilne primitivne funkcije za f i pritom je $F' = G'$, onda je $G = F + c_r|_I$, za neki $r \in \mathbb{R}$. (Sažeto: "Derivabilna primitivna funkcija je jednoznačno određena do na aditivnu konstantu".)*

DOKAZ. Jasno, dostatno je dokazati drugu tvrdnju. Neka su F i G bilo koje dvije derivabilne primitivne funkcije za f na I i neka je $F' = G'$. Tada

je funkcija $H : I \rightarrow \mathbb{R}$, $H = G - F$, derivabilna i $H' = c_0|_I$. Promatrajmo bilo koje dvije točke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Suženje $H|_{[x_1, x_2]}$ ima derivaciju jednaku nulkonstanti $c_0|_I$ pa je $H|_{[x_1, x_2]}$ neka konstantna funkcija $c_r|_{[x_1, x_2]}$. Prema tomu, $(G - F)|_{[x_1, x_2]} = c_r|_{[x_1, x_2]} \Rightarrow G(x) = F(x) + r$, $x \in [x_1, x_2]$. Budući da su F i G neprekidne funkcije i $x_1, x_2 \in I$ bilo koje točke, to je $G = F + c_r|_I$. ■

DEFINICIJA 1.3 Za danu funkciju $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, skup svih njegovih primitivnih funkcija na intervalu (ili njihovoj uniji) I nazivamo **neodređenim integralom** funkcije f na intervalu I i označujemo s $\int f(x)dx$.

U skladu s Teoremom 1.2, ima smisla pisati

$$\int f(x)dx = F(x) + c, x \in I \setminus A,$$

gdje F neka (bilo koja) primitivna funkcija za f na I , a c oznaka za opću konstantu. Uobičajilo se funkciju f nazvati **integrandom** (ili **podintegralnom funkcijom**), x - **integracijskom varijablom**, a c - **integracijskom konstantom**.

PRIMJER.

$$(a) \int \sin x dx = -\cos x + c, \text{ jer je } (-\cos x + c)' = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

$$(b) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c,$$

jer je $(\arcsin x + c)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

$$(c) \int 2|x| dx = \int \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} dx = \begin{cases} x^2 + c, & x \geq 0 \\ -x^2 + c, & x < 0 \end{cases},$$

$$\text{jer je } \left(\begin{cases} x^2 + c, & x \geq 0 \\ -x^2 + c, & x < 0 \end{cases} \right)' = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} = 2|x|, x \in \mathbb{R}.$$

(Funkcija $x \mapsto 2|x|$ nije derivabilna u točki $x = 0$, dok njezina primitivna funkcija to jest. Ta derivacija je 0, jer postoje derivacije slijeva i zdesna i obje iščezavaju.)

$$(d) \int \begin{cases} 2, & x < 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases} dx = \begin{cases} 2x + c, & x < 3 \\ x + c, & x > 3 \end{cases},$$

$$\text{jer je } \left(\begin{array}{ll} 2x + c, & x < 3 \\ x + c, & x > 3 \end{array} \right)' = \begin{cases} 2, & x < 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}.$$

(U ovomu primjeru nije svaka primitivna funkcija definirana u točki $x = 3$. Naime, tek je posebnim izborom konstanata $c_2 = c_1 + 3$ (c je opća oznaka!) moguće udovoljiti uvjetu o neprekidnosti primitivne funkcije u točki $x = 3$. U takvomu slučaju, ipak, primitivna funkcija nije derivabilna u toj točki, jer joj je derivacija slijeva u točki 3 jednaka 2, a ona zdesna - 1.) \square

Istinitost sljedećega teorema je očigledna.

TEOREM 1.4 *Neka je $\int f(x)dx = F(x) + c$, tj. $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I \setminus A$ (oznake iz Definicija 1.1 i 1.3) Tada na $I \setminus A$ vrijedi:*

- (a) $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$
("deriviranjem integrala dobivamo integrand");
- (b) $d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$
("diferenciranje poništava integriranje");
- (c) $\int dF(x)) = F(x) + c$
("integriranje poništava diferenciranje do na konstantu").

Naredni teorem tvrdi da je neodređeni integral primjer linearog operatorka (funkcionala).

TEOREM 1.5 *Neka funkcije $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, dopuštaju primitivne funkcije na intervalu $I \subseteq X$, te neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ konstante. Tada i funkcija $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ dopušta primitivnu funkciju na I i vrijedi*

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x)) dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \dots + \lambda_n \int f_n(x)dx + c \quad (1)$$

tj. neodređeni integral čuva (do na aditivnu konstantu) linearu kombinaciju.

DOKAZ. Neka je F_i bilo koja primitivna funkcija za f_i na I , tj. $\int f_i(x)dx = F_i(x) + c_i$, $i = 1, \dots, n$. Budući da je $F'_i(x) = f(x)$ za svaki $x \in I \setminus A_i$ i $A_i \subset I$ prebrojiv, $i = 1, \dots, n$, to je

$$(\lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_n F_n)'(x) = (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)(x), \quad x \in I \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i).$$

Primijetimo da je i skup $A \equiv \bigcup_{i=1}^n A_i \subset I$ prebrojiv. Slijedi da je (neprekidna) funkcija $\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_n F_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija za funkciju $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$. Prema tomu (i k je oznaka za konstantu),

$$\begin{aligned} \int (\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x)) dx &= \lambda_1 F_1(x) + \cdots + \lambda_n F_n(x) + k = \\ \lambda_1 \left(\int f_1(x) dx - c_1 \right) + \cdots + \lambda_n \left(\int f_n(x) dx - c_n \right) + k &= \\ \lambda_1 \int f_1(x) dx + \cdots + \lambda_n \int f_n(x) dx + c, \quad c \equiv k - (\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n). \blacksquare \end{aligned}$$

Napomenimo da u buduće u jednakostima sličnima onoj u Teoremu 1.5, opću konstantu c (c_1, c_2, k, \dots) najčešće ne ćemo zapisivati, tj. u takvim "jednakostima" ćemo dopuštati da se lijeva i desna strana smiju razlikovati do na aditivnu konstantu.

Teorem 1.5 očito povlači:

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm g(x)) dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx; \\ \int (\lambda f(x)) dx &= \lambda \int f(x) dx. \end{aligned}$$

PRIMJER. $\int (4 \cos x + \frac{1}{2}x^3 - 3) dx \stackrel{(1)}{=} 4 \int \cos x dx + \frac{1}{2} \int x^3 dx - 3 \int dx = 4 \sin x + \frac{1}{8}x^4 - 3x + c.$ (Jer je $\sin' x = \cos x$, $(\frac{x^4}{4})' = x^3$ i $(x)' = 1$). \square

Neka čitatelj provjeri (deriviranjem) točnost ove **tablice osnovnih integrala** (na definicijskim područjima podintegralnih funkcija):

$$\int 0 \cdot dx = c; \tag{2}$$

$$\int dx = x + c; \tag{3}$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1; \tag{4}$$

$$\int x^{-1} dx \equiv \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c; \tag{5}$$

$$\int e^x dx = e^x + c; \tag{6}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad 0 < a \neq 1; \quad (7)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c; \quad (8)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c; \quad (8')$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c; \quad (9)$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c; \quad (9')$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c; \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \operatorname{tgh} x + c; \quad (10')$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c; \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\operatorname{ctgh} x + c; \quad (11')$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c_1 = -\operatorname{arcctg} x + c_2; \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2; \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c_1, |x| < 1 \\ \operatorname{arcth} x + c_2, |x| > 1 \end{cases} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c; \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsh} x + c_1 = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + c_2; \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arch} x + c_1 = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c_2. \quad (16)$$

Neodređene integrale od (2) do (16) nazivamo **tabličnim integralima**.

1.1.2 OSNOVNE INTEGRACIJSKE METODE

Neodređene integrale elementarnih funkcija što se mogu prikazati kao linearne kombinacije podintegralnih funkcija iz tablice gore, lako određujemo primjenom Teorema 1.5. U takvim slučajevima kažemo da smo funkciju **integrirali izravno** (ili **neposredno**).

PRIMJER.

$$(a) \int \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = 2 \int x^{\frac{7}{6}} dx \stackrel{(4)}{=} \frac{12}{13} x^2 \sqrt[6]{x} + c;$$

$$(b) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \stackrel{(1)}{=} \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} \stackrel{(11),(10)}{=} -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + c. \quad \square$$

Skup svih izravno integrabilnih funkcija proširujemo primjenom dvaju jednostavnih postupaka:

- uvođenjem nove varijable (supstitucija) i
- prepoznavanjem diferencijala nekog umnoška (parcijalna integracija).

Supstitucija se sastoji u tomu da se nekom dopustivom zamjenom integracijske varijable ili podintegralnog izraza polazni integral svede na neke od onih tabličnih. O tomu govore dva naredna teorema.

TEOREM 1.6 *Neka za funkciju f postoji neka primitivna funkcija na intervalu I . Nadalje, neka je $\varphi : J \rightarrow I$, J - interval, strogo monotona i derivabilna surjekcija. Tada je*

$$\int f(x) dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + c, \quad (17)$$

gdje je Φ primitivna funkcija za funkciju $\phi \equiv (f\varphi) \cdot \varphi'$ na J . Drugačijim zapisom,

$$\int ((f\varphi) \cdot \varphi')(t) dt \equiv \int \phi(t) dt = \Phi(t) + c.$$

DOKAZ. Budući da stroga monotonost realne funkcije povlači injektivnost, to je funkcija φ bijektivna. Postoji, dakle, inverzna funkcija $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$ za koju se lako dokaže da je, također, strogo monotona. Primijetimo da neprekidnost i stroga monotonost funkcije φ povlače neprekidnost inverzne funkcije φ^{-1} . Nadalje, budući da je φ i derivabilna zaključujemo da je i φ^{-1} derivabilna. Ukratko, stroga monotonja i derivabilna surjekcija φ ima inverznu funkciju φ^{-1} koja je, također, strogo monotonja i derivabilna. Po pretpostavci, postoji neka primitivna funkcija F za f na I . Tada je $F'(x) = f(x)$, $x \in I \setminus A$. Neka je $B = \varphi^{-1}[A] \subset J$, pa je i B prebrojiv skup.

Dokažimo da je $F\varphi \equiv \Phi$ primitivna funkcija za $(f\varphi) \cdot \varphi' \equiv \phi$ na intervalu J !
Zaista, za svaki $t \in J \setminus B$ je

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= (F\varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \\ f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) &= ((f\varphi) \cdot \varphi')(t) = \phi(t),\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili derivaciju funkcijске kompozicije. Primjetimo da je $\Phi\varphi^{-1} = (F\varphi)\varphi^{-1} = F$ pa je $\Phi\varphi^{-1}$ primitivna funkcija za f na I . ■

Teorem 1.6 jamči da se, pod navedenim uvjetima, zadani integral smije rješavati zamjenom $x = \varphi(t)$ i $dx = \varphi'(t)dt$, tj.

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \equiv \int \phi(t)dt = \\ \Phi(t) + c &= \Phi(\varphi^{-1}(x)) + c = F(x) + c.\end{aligned}$$

Dakako, temeljna zamisao je u tomu da se nađe zamjenska funkcija φ , koja će polučiti funkciju ϕ , tako da integral $\int \phi(t)dt$ bude "tehnički" bitno jednostavniji (što bliži nekom tabličnom integralu) od polaznoga (netabličnog) $\int f(x)dx$. Naravno, idealno je ako se "iz prve" za $\int \phi(t)dt$ dobije neki tablični integral.

PRIMJER.

$$\begin{aligned}(a) \int \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx &=_{[x=t^6; dx=6t^5dt]}= \int \frac{1 + t^2}{t^3} \cdot 6t^5 dt = \int 6(t^4 + t^2) dt \stackrel{(1)}{=} \\ &6 \int t^4 dt + 6 \int t^2 dt \stackrel{(4)}{=} 6 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + c =_{[t=\sqrt[6]{x}]}= \frac{6}{5} \cdot \sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} + c; \\ (b) \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} &=_{[x=\sin t; dx=\cos tdt]}= \int \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} \stackrel{(10)}{=} \\ \tg t + c &=_{[t=\arcsin x]}= \tg(\arcsin x) + c = \\ \tg(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}) + c &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c; \\ (c) \int \frac{dx}{x^2+2x+2} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =_{[x=t-1; dx=dt]}= \\ \int \frac{dt}{t^2+1} &\stackrel{(12)}{=} \operatorname{arctg} t + c =_{[t=x+1]}= \operatorname{arctg}(x+1) + c.\end{aligned}$$

(Podrazumijeva se, bez izričitog naglašavanja, da primjer pod (a) ima smisla samo za $x > 0$, a primjer pod (b) - samo za $|x| < 1$. S tim u svezi, primjetimo da funkcije $t \mapsto t^6$ i \sin nisu monotone, ali njihova suženja na \mathbb{R}^+ i $(-1, 1)$, redom, jesu strogo monotona.) □

TEOREM 1.7 Neka je G primitivna funkcija za funkciju g na intervalu J , tj. $G'(t) = g(t)$, $t \in J \setminus B$, te neka je $\psi : I \rightarrow J$, I - interval, strogo monotona i derivabilna surjekcija. Tada je

$$\int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x) dx = G(\psi(x)) + c. \quad (18)$$

Drugim riječima, ako je $f(x)dx = g(\psi(x))d\psi(x)$ za svaki $x \in I$, pri čemu funkcije g i ψ imaju navedena svojstva, onda funkcija $f = (g\psi) \cdot \psi'$ ima na I primitivnu funkciju $F = G\psi$, tj.

$$\int f(x)dx \equiv \int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x) dx = G(\psi(x)) + c.$$

DOKAZ. Teorem 1.7 je preformulacija prethodnoga Teorema 1.6: umjesto $x = \varphi(t)$ uvodi se zamjenska funkcija $t = \psi(x) = \varphi^{-1}(x)$. ■

PRIMJER.

- (a) $\int \sqrt{2x+3} dx = \int \frac{1}{2} \sqrt{2x+3} \cdot 2 dx =_{[t=2x+3; dt=2dx]} =$
 $\int \frac{1}{2} \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+3)^3} + c.$
- (b) $\int \cos 5x dx = \int \frac{1}{5} \cos 5x \cdot 5 dx =_{[t=5x; dt=5dx]} =$
 $\frac{1}{5} \int \cos t dt = \frac{1}{5} \sin t + c = \frac{1}{5} \sin 5x + c.$
- (c) $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^r} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x dx}{(1+x^2)^r} =_{[t=1+x^2; dt=2xdx]} =$
 $\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^r} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln |t| + c, & r = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-r+1}}{-r+1} + c, & r \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c, & r = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{-r+1}}{-r+1} + c, & r \neq 1 \end{cases}.$

(d) Odredimo, po Teoremu 1.7, primitivnu funkciju F za f ako je g opća potencija $t \mapsto g(t) = t^r$.

Po (4) i (5) je, redom, $G(t) = \frac{t^{r+1}}{r+1}$ kad je $r \neq -1$ i $G(t) = \ln |t|$ kad je $t = -1$.

Dakle,

$$\int f(x)dx \equiv \int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x) dx = G(\psi(x)) + c = \begin{cases} \frac{\psi(x)^{r+1}}{r+1} + c, & r \neq -1 \\ \ln |\psi(x)| + c, & r = -1 \end{cases}.$$

Ili, u praktičnijem zapisu,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c,$$

$$\int f(x)^r f'(x) dx = \frac{f(x)^{r+1}}{r+1} + c, r \neq -1.$$
□

Parcijalna integracija se sastoji u tomu da se pogodnim izborom realnih funkcija $x \mapsto g(x)$ i $x \mapsto h(x)$, takvih da je $g(x)h'(x)dx = f(x)dx$, i primjenom diferencijala na produktnu funkciju $x \mapsto g(x)h(x)$, integral $\int f(x)dx$ ili bitno pojednostavni ili da postane nepoznanim u lako rješivoj jednadžbi.

TEOREM 1.8 Ako su funkcije $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, I - interval (ili njihova unija), neprekidno derivabilne, onda vrijedi

$$\int g(x)h'(x)dx = g(x)h(x) - \int h(x)g'(x)dx. \quad (19)$$

DOKAZ. Ovdje se najprije pozivamo na Teoreme 1.14 i 1.18, što ćemo ih dokazati (neovisno o ovomu) u sljedećemu odjeljku, koji jamči obstojnost primitivnih funkcija na I za gh' i hg' . Tada primjenom formule (1), pravila za derivaciju produkta i Teorema 1.4 dobivamo

$$\begin{aligned} \int g(x)h'(x)dx + \int h(x)g'(x)dx &= \int (g(x)h'(x) + g'(x)h(x))dx = \\ \int (g \cdot h)'(x)dx &= g(x)h(x), \end{aligned}$$

što je ekvivalentno formuli (19). ■

Uobičajilo se uvesti pokrate $g(x) = u$ i $h(x) = v$ pa formula (19) ima i zapis

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

PRIMJER.

$$(a) \int xe^x dx =_{[u=x; dv=e^x dx; du=dx; v=\int e^x dx = e^x]}^{(19)} xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

$$\begin{aligned} (b) \int \ln x dx &=_{[u=\ln x; dv=dx; du=\frac{dx}{x}; v=x]}^{(19)} (\ln x)x - \int x \frac{dx}{x} = \\ x \ln x - \int dx &= x \ln x - x + c. \end{aligned}$$

$$(c) \int x^2 \cos x dx =_{[u=x^2; dv=\cos x dx; du=2x dx; v=\sin x]}^{(19)}$$

$$\begin{aligned} x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx &= [u=x; dv=\sin x dx; du=dx; v=-\cos x] \stackrel{(19)}{=} \\ x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x dx \right) &= x^2 \sin x + 2x \cos x + 2 \sin x + c. \end{aligned}$$

(d) Odredimo, za svaki $n \in \mathbb{N}$, integral

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \equiv I_n.$$

Za $n = 1$ se radi o tabličnom integralu (12), tj. $I_1 = \arctg x + c$.

Neka je $n \geq 2$. Tada je

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}, \quad \text{tj.} \\ I_n &= I_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}. \end{aligned}$$

Primijenimo parcijalnu integraciju na

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}, \quad n \geq 2,$$

uzevši

$$u = x; \quad dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^n}; \quad du = dx; \quad v = \int \frac{x dx}{(1+x^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}$$

Slijedi,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{-x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} = \\ &\quad \frac{-x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Dobili smo, dakle, rekurzivnu formulu

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}. \quad (20)$$

Primjerice, za $n = 2$ i $n = 3$ je, redom,

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctg x + c, \\ I_3 &\equiv \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \\ &\quad \frac{1}{4} \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8} \arctg x + c. \end{aligned} \quad \square$$

1.1.3 INTEGRIRANJE NEKIH KLASA ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Integralni račun, tj određivanje primitivnih funkcija je, kao što smo već mogli primijetiti, tehnički složen posao. Jedna poteškoća proizlazi iz činjenice da primitivna funkcija za (i relativno jednostavnu) elementarnu funkciju ne mora biti elementarna. Druga, pak, jest sama bit integralnoga računa, tj. i kad je primitivna funkcija elementarna (tada se kaže da je integral *elementarno rješiv*), njezino je određivanje, osim u rijetkim slučajevima (tablični ili njima vrlo slični integrali) samo po sebi tehnički složen posao. Ovdje ćemo pokazati nekoliko tehnika integrirala u slučaju elementarno rješivih integrala.

(i) Integriranje racionalnih funkcija

Polinom (tj. cijelu racionalnu funkciju) $x \mapsto p(x)$ integriramo po formuli (1). Budući da se svaka racionalna funkcija

$$x \mapsto f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

može zapisati kao zbroj od polinoma (priključujući u ovomu razmatranju k njima i konstantne funkcije) i prave racionalne funkcije, neka je odmah stupanj m od p manji od stupnja n od q . Osim toga, smijemo pretpostaviti da polinomi p i q nemaju zajedničkih nultočaka (realnih ili kompleksnih). Naime, po tzv. "Osnovnom teoremu algebre", koji tvrdi da svaki (nekonstantni) polinom ima barem jednu nultočku, slijedi da svaki polinom p dopušta faktorizaciju

$$p(x) \equiv a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = a_m (x - x_1) \cdots (x - x_m),$$

gdje su $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{C}$. Ako se pritom ne želi operirati kompleksnim brojevima, onda se ne ističu linearni faktori $x - x_i$, $x_i \in \mathbb{C}$, (koji se uvijek javljaju s parovima konjugirano kompleksnih nultočaka x_i , $x_j = \bar{x}_i$), nego ih se "skriva" u pripadnim kvadratnim faktorima tipa $x^2 + bx + c$. Osim toga, višekratne nultočke se, obično, ne rastavlja, tj. tada se piše $(x - x_i)^{s_i}$ i $(x^2 + bx + c)^{k_j}$, gdje su s_i i k_j pripadne kratnosti.

Temeljna zamisao jest da se polazna (prava) racionalna funkcija $f = \frac{p}{q}$ prikaže kao zbroj jednostavnijih racionalnih funkcija, koje u nazivnicima

imaju prirodne potencije navedenih linearnih ili kvadratnih faktora iz faktorizacije od q . Pritom se rabi tzv. *metoda neodređenih koeficijenata*, koja se, u biti, temelji na činjenici da su dva polinoma jednaka onda i samo onda kad su im koeficijenti uz iste potencije jednaki. Neka je, dakle,

$$q(x) \equiv b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 =$$

$$b_n(x - x_1)^{s_1} \cdots (x - x_r)^{s_r} (x^2 + c_1 x + d_1)^{k_1} \cdots (x^2 + c_l x + d_l)^{k_l},$$

pri čemu su $s_i, k_j \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, l$, $\sum_{i=1}^r s_i + 2 \sum_{j=1}^l k_j = n$, a x_1, \dots, x_r sve realne i međusobno različite nultočke od q , dok su svi kvadratni trinomi $x^2 + c_j x + d_j$ međusobno različiti i bez realnih nultočaka. Tada, za svaki i i svaki j , postoje realni brojevi A_{is_i} , B_{jk_j} i C_{jk_j} takvi da je

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \left(\frac{1}{b_n} \frac{A_{11}}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_{1s_1}}{(x - x_1)^{s_1}} + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_{2s_2}}{(x - x_2)^{s_2}} + \cdots + \right. \\ &\quad + \frac{A_{r1}}{x - x_r} + \cdots + \frac{A_{rs_r}}{(x - x_r)^{s_r}} + \\ &\quad \left. \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 c_1 x + d_1} + \cdots + \frac{B_{1k_1}x + C_{1k_1}}{(x^2 c_1 x + d_1)^{k_1}} + \frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2 c_2 x + d_2} + \cdots + \frac{B_{2k_2}x + C_{2k_2}}{(x^2 c_2 x + d_2)^{k_2}} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2 c_l x + d_l} + \cdots + \frac{B_{lk_l}x + C_{lk_l}}{(x^2 c_l x + d_l)^{k_l}} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Koeficijenti A_{is_i} , B_{jk_j} i C_{jk_j} se određuju tako da se jednakost (21) pomnoži polinomom $q(x)$ i potom izjednače koeficijenti uz iste potencije. Kao zaključak, rastav (21) i formula (1) povlače da se integriranje (prave) racionalne funkcije, $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, svodi na izračunavanje sljedeća tri (tipična) neodređena integrala:

$$\int \frac{dx}{(x - a)^s}, \quad \int \frac{(x + b)dx}{(x^2 + cx + d)^k}, \quad \int \frac{dx}{(x^2 + cx + d)^k},$$

gdje su $s, k \in \mathbb{N}$ i $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Prvi od njih zamjenom $x - a = t$ postaje tabličnim integralom (4) ili (5). Drugi rješavamo kako slijedi:

$$\int \frac{(x + b)dx}{(x^2 + cx + d)^k} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x + c)dx}{(x^2 + cx + d)^k} - \frac{1}{2} \int \frac{(c - 2b)dx}{(x^2 + cx + d)^k}.$$

Prvi integral na desnoj strani se zamjenom $x^2 + cx + d = t$ opet svodi tablični integral (4) ili (5), a za drugi integral na desnoj strani primijetimo

da je $c^2 - 4d < 0$ pa je

$$x^2 + cx + d = \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + d - \frac{c^2}{4} = \left(d - \frac{c^2}{4}\right) \left(\left(\frac{x - \frac{c}{2}}{\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}}\right)^2 + 1\right).$$

Sada zamjenom $\frac{x - \frac{c}{2}}{\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}} = t$ dobivamo poznati integral koji smo rješavali rekurzivnom formulom (20).

Napokon, treći integral je istoga tipa kao upravo promatrani drugi integral na desnoj strani gore.

PRIMJER. Izračunajmo integral $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 6}{(x+1)(x^2 + 2x + 3)^2} dx$.

Budući da se integrira prava racinalna funkcija i kvadratni trinom $x^2 + 2x + 3$ nema realnih nultočaka, smijemo odmah prijeći na "rastavljanje na parcijalne razlomke" (21):

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 6}{(x+1)(x^2 + 2x + 3)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2x + 3)^2} / \cdot (x+1)(x^2 + 2x + 3)^2 \\ x^3 + 2x^2 + 3x - 6 &= A(x^2 + 2x + 3)^2 + (Bx + C)(x+1)(x^2 + 2x + 3) + \\ &\quad (Dx + E)(x+1) = (A+B)x^4 + (4A + 3B + C)x^3 + \\ &\quad (10A + 5B + 3C + D)x^2 + (12A + 3B + 5C + D + E)x + (9A + 3C + E) \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= 4A + 3B + C \\ 2 &= 10A + 5B + 3C + D \\ 3 &= 12A + 3B + 5C + D + E \\ 6 &= 9A + 3C + E \end{aligned}$$

Rješenje ovoga linearog sustava je $A = -2$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 3$, $E = 3$.

Prema tomu

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 6}{(x+1)(x^2 + 2x + 3)^2} dx &= \\ \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{2x+3}{x^2 + 2x + 3} dx + \int \frac{3x+3}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx &= \\ -2 \ln|x+1| + \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3} dx + \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx &= \\ + \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \ln|x+1| + \ln(x^2 + 2x + 3) + \int \frac{dx}{2\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right)} + \\
& + \frac{3}{2} \cdot \frac{(x^2 + 2x + 3)^{-1}}{-1} = \\
& \ln \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} + \sqrt{2} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2(x^2 + 2x + 3)} + c.
\end{aligned}$$

(Neka čitatelj provjeri ovaj ishod deriviranjem!) \square

(ii) Integriranje kompozicije trigonometrijske i racionalne funkcije

Ovaj tip neodređenog integrala se obično označuje s

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

gdje je R opća oznaka za razlomački izraz. U trivijalnom slučaju $\int \sin x dx$ i $\int \cos x dx$ dobivamo dva tablična integrala (8) i (9). Nadalje, po Teoremu 1.7 dobivamo

$$\begin{aligned}
\int \tg x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c; \\
\int \ctg x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c; \\
\int \sin x \cdot \cos x dx &= \frac{1}{2} \sin^2 x + c.
\end{aligned}$$

U općem slučaju se integral $\int R(\sin x, \cos x) dx$ svodi na integral racionalne funkcije, tj. na $\int \frac{p(t)}{q(t)} dt$, p i q polinomi, koji se onda rješava tehnikom iz prethodnoga razmatranja (pod (i)). Najopćenitija zamjenska funkcija jest

$$x \mapsto \psi(x) = \tg \frac{x}{2} \equiv t \quad (x \equiv \varphi(t) = 2 \arctg t).$$

Ona povlači:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tg x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \ctg x = \frac{1-t^2}{2t}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Ako je funkcija R "parna", tj. ako je

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

moguće je to svođenje provesti zamjenskom funkcijom

$$\psi = \tg, \quad \text{tj.} \quad t = \tg x \quad (x = \arctg t)$$

koja povlači:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \ctg x = \frac{1}{t}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}. \tag{23}$$

Napokon, u najjednostavnijim slučajevima

$$\int R(\sin x) \cos x dx \quad \text{i} \quad \int R(\cos x) \sin x dx$$

rabimo, redom, zamjenske funkcije $\psi = \sin$ i $\psi = \cos$, tj.

$$t = \sin x, \quad dt = \cos x dx, \quad (24)$$

$$t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx \quad (24')$$

PRIMJER.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x} &\stackrel{(22)}{=} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2t}{1+t^2}} = \\ \int \frac{t^2+1}{t^3+3t} dt &= \dots = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{3} \int \frac{2tdt}{t^2+3} = \\ \frac{1}{3} \ln |t(t^2+3)| + c &= \frac{1}{3} \ln \left| \tg \frac{x}{2} \cdot \left(\tg^2 \frac{x}{2} + 3 \right) \right| + c. \end{aligned}$$

Budući da funkcija sin ima samo prebrojivo diskretnih nultočaka, promatrani se integral može izračunati i ovako:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x} &= \int \frac{\sin x dx}{(2 + \cos x) \sin^2 x} = \\ \int \frac{\sin x dx}{(2 + \cos x)(1 - \cos^2 x)} &\stackrel{(24')}{=} \int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)} = \dots \\ \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} &= \dots = \\ \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(t+2)^2(t-1)}{(t+1)^3} \right| + c &= \\ \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(\cos x+2)^2(\cos x-1)}{(\cos x+1)^3} \right| + c. \end{aligned} \quad \square$$

NAPOMENA 1.9

- (a) Primijetimo da se izračunavanjem neodređenog integrala različitim metodama (ili samo različitim zamjenskim funkcijama) mogu dobiti "različite" primitivne funkcije. Ali, kao što znamo, one se mogu razlikovati u najviše prebrojivo mnogo točaka i do na aditivnu konstantu. To npr. znači da su na svakom intervalu $I \subset \mathbb{R}$, na kojemu su oba rezultata iz prethodnog primjera definirana, ona i međusobno *jednaka do na aditivnu konstantu*.
- (b) Posve slično integriranju kompozicije trigonometrijske i racionalne funkcije, integrira se i kompozicija hiperbolne i racionalne funkcije

$$\int R(\sinh x, \cosh x).$$

(iii) Integriranje nekih klasa iracionalnih funkcija

Primitivna funkcija za iracionalnu funkciju nije, općenito, elementarna funkcija, tj. neodređeni integral $\int f(x)dx$ iracionalne funkcije f nije, općenito, elementarno rješiv. Ovdje ćemo razmatrati samo neke elementarno rješive tipove neodređenih integrala iracionalnih funkcija. Najprije promotrimo najjednostavnije tipične slučajeve. Prvi tip je integral

$$\int R\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx, \quad m_i, n_i, k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, k.$$

(R je, kao i do sada, opća oznaka za racionalni izraz.) Ovaj se integral svodi na integral racionalne funkcije zamjenskom funkcijom

$$t \mapsto \varphi(t) = t^n \equiv x, \quad n = V(n_1, \dots, n_k).$$

(V označuje najmanji zajednički višekratnik). Istom se tehnikom izračunava i drugi tipični integral (poopćenje prvoga)

$$\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx, \quad m_i, n_i, k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, k,$$

stavljajući

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \quad n = V(n_1, \dots, n_k).$$

PRIMJER.

$$\begin{aligned} \int \frac{8 - \sqrt[3]{\frac{64x-1}{x}}}{\sqrt[3]{(\frac{64x-1}{x})^2}} dx &= \left[n=6; \frac{64x-1}{x}=t^6; x=\frac{1}{64-t^6}; dx=\frac{6t^5 dt}{(64-t^6)^2} \right] = \\ \int \frac{8 - t^3}{t^4} \cdot \frac{6t^5 dt}{(64-t^2)^2} &= -6 \int \frac{tdt}{(t-2)(t+2)^2(t^2+2t+4)(t^2-2t+4)^2} = \\ -6 \int \left(\frac{A_1}{t-2} + \frac{A_2}{t+2} + \frac{A_3}{(t+2)^2} + \frac{B_1t+C_1}{t^2+2t+4} + \frac{B_2t+C_2}{t^2-2t+4} + \frac{B_3t+C_3}{(t^2-2t+4)^2} \right) dt &= \dots \end{aligned}$$

□

Sada se pozabavimo integralom

$$\int (x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Zamjenskom funkcijom

$$x \mapsto \psi(x) = \frac{2ax+b}{\sqrt{|b^2-4ac|}} \equiv t$$

svodimo ga na jedan od ovih:

$$(a) \int R(t, \sqrt{1-t^2}) dt; \quad (b) \int R(t, \sqrt{t^2-1}) dt; \quad (c) \int R(t, \sqrt{t^2+1}) dt.$$

Proslijediti možemo na nekoliko načina. Primjerice, zamjenama

$$(a) t = \sin z; \quad (b) t = \frac{1}{\sin z}; \quad (c) t = \operatorname{tg} z$$

dobivamo integrale racionalnih funkcija (od) trigonometrijskih funkcija - (ii), a tzv. *Eulerovim zamjenama*

$$(a) \sqrt{1-t^2} = z(1-t); \quad (b) \sqrt{t^2-1} = t+z; \quad (c) \sqrt{t^2+1} = t+z$$

odmah dobivamo integrale racionalnih funkcija - (i).

Sljedeći tipični integral što ga promatramo jest

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}} dx,$$

pri čemu je p bilo koji polinom, a q reducirani kvadratni polinom zadani bilo kojim od pravila $1-x^2$, x^2-1 , x^2+1 . Poznate činjenice iz diferencijalnoga računa jamče da se pripadna primitivna funkcija može odrediti rješavanjem jednadžbe

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}} dx = (A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x + A_0) \sqrt{q(x)} + B \int \frac{dx}{\sqrt{q(x)}},$$

gdje je n stupanj od p , po nepoznanicama (neodređenim koeficijentima) A_0, \dots, A_{n-1}, B . Očito, polazni integral se tada svodi na tablični integral $\int \frac{dx}{\sqrt{q(x)}}$. Postavljena jednadžba se rješava tako da joj se obje strane deriviraju, pomnože s $\sqrt{q(x)}$ te izjednače koeficijenti uz iste potencije dobivenih polinoma.

Ovomu tipu pripada i integral

$$\int \frac{p(x)}{x^m \cdot \sqrt{q(x)}} dx, \quad m \in \mathbb{N},$$

jer se zamjenom $x = \frac{1}{t}$ na njega svodi.

PRIMJER.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 6x + 10}} &= \int \frac{dx}{x + \sqrt{(x+3)^2 + 1}} =_{[x+3=t; x=t-3; dx=dt]} = \\ \int \frac{dt}{t-3+\sqrt{t^2+1}} &= [\sqrt{t^2+1}=t+z; t=\frac{1-z^2}{2z}; dt=-\frac{z^2+1}{2z^2}dz] = \\ \int \frac{-\frac{z^2+1}{2z^2}dz}{\frac{1-z^2}{2z}-3+\frac{1-z^2}{2z}+z} &= \dots = \frac{1}{6} \int \left(1 + \frac{z+3}{z(3z-1)}\right) dz = \dots = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} \left(z + \frac{10}{3} \ln |3z - 1| - \ln |z| \right) + c,$$

gdje je $z = \sqrt{t^2 + 1} - t = \sqrt{x^2 + 6x + 10} - x - 3$. \square

PRIMJER.

$$\int x^2 \sqrt{4x^2 + 9} dx = \int \frac{x^2(4x^2 + 9)}{\sqrt{4x^2 + 9}} dx = \int \frac{4x^4 + 9x^2}{\sqrt{4x^2 + 9}} dx =$$

$$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{4x^2 + 9} + E \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}.$$

Deriviranjem dobivamo

$$x^2 \sqrt{4x^2 + 9} =$$

$$(3Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{4x^2 + 9} + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 9}} + \frac{E}{\sqrt{4x^2 + 9}},$$

pa množenjem s $\sqrt{4x^2 + 9}$ i sređivanjem slijedi

$$4x^4 + 9x^2 = 16Ax^4 + 12Bx^3 + (27A + 8C)x^2 + (18B + 4D)x + (9C + E).$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobivamo linearni sustav s jedinstvenim rješenjem: $A = \frac{1}{4}$, $B = 0$, $C = \frac{9}{32}$, $D = 0$, $E = -\frac{81}{32}$.

Prema tomu,

$$\int x^2 \sqrt{4x^2 + 9} dx = \left(\frac{x^3}{4} + \frac{9x}{32} \right) \sqrt{4x^2 + 9} - \frac{81}{32} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}} = \dots =$$

$$\frac{1}{32} (8x^3 + 9x) \sqrt{4x^2 + 9} - \frac{81}{64} \ln |2x + \sqrt{4x^2 + 9}| + c. \quad \square$$

Razmotrimo, napokon, tzv. **binomni integral**, tj.

$$\int x^s (a + bx^r)^p dx, \quad p, r, s \in \mathbb{Q}. \quad (25)$$

Općenito, on nije elementarno rješiv. Skup svih elementarno rješivih binomnih integrala karakterizira ovaj teorem:

TEOREM 1.10 *Binomni integral (25) je elementarno rješiv onda i samo onda, ako je barem jedan od brojeva p , $\frac{s+1}{r}$, $\frac{s+1}{r} + p$ cijeli broj.*

DOKAZ. Dokazati nužnost je vrlo zahtjevno, a i zašlo bi izvan okvira ovih skriptata. Stoga ćemo dokazati samo (bitno jednostavniju) dovoljnost.

Primijenimo prvo supstituciju $t = x^r$, što povlači

$$\int x^s (a + bx^r)^p dx =_{[x=t^{\frac{1}{r}}; dx=\frac{1}{r}t^{\frac{1}{r}-1}dt]} = \frac{1}{r} \int t^{\frac{s}{r}} (a + bt)^p t^{\frac{1}{r}-1} dt =$$

$$\frac{1}{r} \int (a + bt)^p t^{\frac{s+1}{r}-1} dt = \frac{1}{r} \int \left(\frac{a + bt}{t} \right)^p t^{\frac{s+1}{r}+p-1} dt.$$

Ako je p cijeli broj onda zamjena $t = z^n$, n - (najmanji) nazivnik od $\frac{s+1}{r}$, svodi taj integral na integral racionalne funkcije; ako je, pak, $\frac{s+1}{r}$ cijeli broj onda zamjena $a + bt = z^n$, n - (najmanji) nazivnik od p , svodi taj integral na integral racionalne funkcije; ako je, napokon, $\frac{s+1}{r} + p$ cijeli broj onda zamjena $\frac{a+bt}{t} = z^n$, gdje je n (najmanji) nazivnik od p , vodi k integralu racionalne funkcije. ■

PRIMJER.

$$\begin{aligned} & \int \sqrt[3]{3x - x^3} dx = \\ & \int x^{\frac{1}{3}} (3 - x^2)^{\frac{1}{3}} dx = \left[p = \frac{1}{3}, r = 2, s = \frac{1}{3}; \quad t = x^2, x = \sqrt{t}, dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \right] = \\ & \frac{1}{2} \int \left(\frac{3-t}{t} \right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 1} dt = \left[\frac{s+1}{r} + p = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \in \mathbb{Z} \right] = \\ & \frac{1}{2} \int \left(\frac{3-t}{t} \right)^{\frac{1}{3}} dt = \left[\frac{3-t}{t} = z^3, t = \frac{3}{z^3+1}, dt = \frac{-9z^2 dz}{(z^3+1)^2} \right] = -\frac{9}{2} \int \frac{z^3}{(z^3+1)^2} dz = \\ & \frac{9}{2} \int \left(\frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{Cz+D}{z^2-z+1} + \frac{Ez+F}{(z^2-z+1)^2} \right) dz \dots \quad \square \end{aligned}$$

1.1.4 INTEGRIRANJE FUNKCIJSKOG REDA

Pod **integralom** (konvergentnog) **funkcijskog reda** $\sum f_n$ smatramo neodređeni integral (ako postoji) pripadne sume $x \mapsto s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Budući da, općenito, s nije elementarna funkcija, to je izračunavanje integrala $\int s(x) dx \equiv \int (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) dx$ vrlo netrivijalni zadatak. Ipak, u posebnom slučaju jednoliko konvergentnog reda $\sum f_n$ neprekidnih funkcija f_n , integral funkcijskoga reda se dopušta integriranje "član po član". Ako su pritom preslikavanja f_n elementarno integrabilna, zadatak postaje i praktično rješiv. Dokažimo prvo odgovarajući teorem.

TEOREM 1.11 *Ako su $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ preslikavanja, $n \in \mathbb{N}$, i funkcijski red $\sum f_n$ jednoliko konvergira prema funkciji $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, onda s dopušta primitivnu funkciju na $[a, b]$ i ona se može dobiti integriranjem "član po član", tj.*

$$\int s(x) dx \equiv \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x) dx + c.$$

Posebice, za potencijski red $\sum a_n x^n$ na njegovu konvergencijskom intervalu vrijedi

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + c.$$

U općemu slučaju se lako zaključi da funkcija s dopušta primitivnu funkciju. Naime, neprekidnost svih funkcija f_n i jednolika konvergencija povlače neprekidnost funkcije s pa je ona integrabilna funkcija. Dokazati valjanost same formule o integrabilnosti "član po član", u općemu je slučaju poprilično složeno. Zato ćemo ovdje razmatrati samo poseban slučaj potencijskog reda. Prvo se dokaže da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ima isti konvergencijski polumer ρ kao i polazni red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nadalje, lako se vidi da konvergencija brojevnoga reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ (ili reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\rho)^n$) povlači konvergenciju brojevnoga reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \rho^{n+1}$ (ili reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (-\rho)^{n+1}$). Prema tomu, funkcijski red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ konvergira u svim točkama u kojima konvergira potencijski red $\sum a_n x^n$. No potencijski red možemo derivirati "član po član" pa je $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na konvergencijskom intervalu $(-\rho, \rho)$. Dakle, funkcija $S : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, jest primitivna funkcija funkcije $s : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na intervalu $(-\rho, \rho)$.

PRIMJER. Razvijmo u potencijski red (ne rabeći Maclaurinovu formulu) funkciju $\arctg|_{[-1,1]} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Prisjetimo se, prvo, sume geometrijskoga reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \equiv 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1.$$

Drugo, derivacija $\arctg' x = \frac{1}{1+x^2}$, pa je

$$\arctg' x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Prema tomu,

$$\begin{aligned} \arctg x &= \int \arctg' x dx + c = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx + c \stackrel{T.1.11}{=} \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n} dx + c = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Budući da je $\arctg 0 = 0$, to je $c = 0$. Postavlja se pitanje, konvergira li funkcijski red i u točkama $x = 1$ i $x = -1$, redom, prema funkcijskim vrijednostima $\arctg(-1) (= -\frac{\pi}{4})$ i $\arctg 1 (= \frac{\pi}{4})$ ili prema nekim drugim točkama

(?). Budući da funkcijski red (funkcija) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ konvergira i u točkama $x = -1$ i $x = 1$ (tj. možemo tu funkciju je neprekidno proširiti na $[-1, 1]$), te jer je funkcija arctg neprekidna, posebice u točkama -1 i 1 , smijemo napokon zaključiti da je

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]. \quad \square$$

Integriranjem funkcijskih, posebice potencijskih, redova mogu se izračunati mnogi elementarno nerješivi integrali.

PRIMJER. Izračunajmo neodređeni integral funkcije

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2};$$

Vrijedi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Prema tomu,

$$\int e^{-x^2} dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \right) dx \stackrel{\text{T.4.2.8}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + c. \quad \square$$

PRIMJER. Izračunajmo neodređeni integral funkcije

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Sjetimo se da je

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pa je

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Uočimo da funkcijski red na desnoj strani konvergira i u točki $x = 0$ i to prema broju 1. Budući da je i $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, to funkcijski red $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ konvergira prema (neprekidnoj) funkciji

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Po Definiciji 1.1, funkcije f i g imaju istu primitivnu funkciju na \mathbb{R} . Slijedi,

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int f(x) dx = \int g(x) dx =$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right) dx \stackrel{\text{T.1.11}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + c. \quad \square$$

1.1.5 ZADACI ZA VJEŽBU

1. Odredite onu primitivnu funkciju F za funkciju \sin koja u točki $x = \pi$ ima vrijednost 7.
2. Koristeći osnovna svojstva i tablicu osnovnih integrala izračunajte:

(a) $\int x \sqrt[3]{x} dx;$
 (b) $\int \frac{x^3 - 2x + 4}{x} dx;$
 (c) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt[3]{x} dx;$
 (d) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx;$
 (e) $\int (2x - 3 \sin x + \cos x) dx;$
 (f) $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$
 (g) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx;$
 (h) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x} dx;$
 (i) $\int \operatorname{cth}^2 x dx;$
 (j) $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$

3. Metodom supstitucije izračunajte integrale:

(a) $\int \sqrt{2x - 3} dx;$
 (b) $\int \frac{1}{2 + \sqrt[3]{x-1}} dx;$
 (c) $\int \frac{1}{x^2 + 3} dx;$
 (d) $\int \frac{1}{\sqrt{2 - 3x^2}} dx;$
 (e) $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx$
 (f) $\int \cos(1 - 3x) dx;$

(g) $\int \frac{1}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})} dx;$

(h) $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx;$

(i) $\int \operatorname{tg} x dx;$

(j) $\int \frac{1}{\sin x} dx;$

(k) $\int \frac{x}{5 + x^4} dx;$

(l) $\int \frac{1}{x \ln^5 x} dx;$

(m) $\int \sin^5 x \cos x dx;$

(n) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$

4. Metodom parcijalne integracije izračunajte integrale:

(a) $\int \ln x dx;$

(b) $\int x \ln^2 x dx;$

(c) $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx;$

(d) $\int x^2 e^{-x} dx;$

(e) $\int x \sin x dx;$

(f) $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx;$

(g) $\int \cos(\ln x) dx;$

(h) $\int \arcsin x dx;$

(i) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$

(j) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx;$

(k) $\int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx;$

(l) $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

5. Primjenom parcijalne integracije dokažite sljedeće rekurzivne formule:

(a) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx, \quad n \in \mathbb{N};$

$$(b) \int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6. Odredite rekurzivne relacije za intergrale:

$$(a) I_n = \int \sin^n x dx;$$

$$(b) I_n = \int \frac{1}{\cos^n x} dx;$$

$$(c) I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

7. Izračunajte integrale:

$$(a) \int \frac{1}{x^2 + 3x} dx;$$

$$(b) \int \frac{1}{3 + x - x^2} dx;$$

$$(c) \int \frac{3x + 2}{2x^2 + x - 3} dx;$$

$$(d) \int \sqrt{x^2 + x + 2} dx;$$

$$(e) \int \frac{3x + 1}{\sqrt{2x^2 - x + 1}} dx;$$

$$(f) \int \frac{x}{x^4 - 2x^2 - 1} dx.$$

8. Izračunajte integrale racionalnih funkcija:

$$(a) \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} dx;$$

$$(b) \int \frac{x + 1}{x(x - 1)^3} dx;$$

$$(c) \int \frac{x^2}{1 - x^4} dx;$$

$$(d) \int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx.$$

9. Izračunajte integrale:

$$(a) \int \frac{1}{5 + 4 \cos x} dx;$$

$$(b) \int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 3} dx;$$

$$(c) \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx;$$

$$(d) \int \frac{1}{(2 + \sin^2 x) \cos x} dx;$$

$$(e) \int \sin^2 x \cos^4 x dx;$$

$$(f) \int \sin 5x \cos x dx.$$

10. Izračunajte integrale:

- (a) $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx;$
 (b) $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx;$
 (c) $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} dx;$
 (d) $\int \sqrt[3]{x-x^3} dx;$
 (e) $\int x \sqrt{x^2-2x+2} dx;$
 (f) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}} dx;$
 (g) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} dx.$

11. Provjerite točnost ove formule (pod uvjetom $|a| \neq |b|$):

$$\int (\cos ax \cdot \cos bx) dx = \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x + \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x + c.$$

Koja se formula dobiva u slučaju $|a| = |b|$?

12. Provjerite točnost ovoga računa:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c.$$

13. Smije li se funkcijски red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ integrirati "član po član" na \mathbb{R} ?

14. Izračunajte integral funkcijskoga reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n(x) = \frac{1}{n^4 + x^2}$.

1.2 ODREĐENI INTEGRAL

Pojam određenog integrala je, povijesno, tjesno povezan s problemom izračunavanje ploštine "krivocrtnog" ravninskog lika. On (*ne i njegov naziv*), dakle, davno prethodi pojmu neodređenog integrala. Temeljnu ideju (na konkretnim primjerima) nalazimo već kod starogrčkoga genija Arhimeda. Sam naziv je došao mnogo poslije i tek kad se shvatila duboka povezanost tih dvaju pojmoveva, koju su, dakako, otkrili I. Newton i G.W. Leibniz. Grubo govoreći, *konkretno* izračunavanje površine "krivocrtnog" ravninskog lika, kao i mnštvo srodnih problema u matematici, fizici i tehnici, svodi se na izračunavanje vrijednosti neodeđenog integrala (primitivne funkcije) - odatle naziv *određeni integral*, iako na prvi pogled, po definicijama, ta dva pojma nemaju "ništa" zajedničko.

1.2.1 POJAM I OSNOVNA SVOJSTVA ODREĐENOOG INTEGRALA

Za točno definiranje određenog integrala trebamo, prvo, malo tehničke pripreme. Najprije ćemo taj pojam definirati za neke omeđene (realne) funkcije definirane na *segmentu* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. U tu svrhu, svaki konačni skup $D \equiv \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ sa svojstvom $\{a, b\} \subseteq D$, $n \in \mathbb{N}$, nazvat ćemo **rastavom** (ili **razdiobom**) promatranoga segmenta $[a, b]$. Jednostavnosti radi, pretpostavljat ćemo da navedeni zapis poštuje uređaj na \mathbb{R} , tj. da je

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Neka

$$\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}([a, b])$$

označuje skup svih rastava D segmenta $[a, b]$. Primjetimo da je relacija \subseteq ("biti podskup") relacija parcijalnog uređaja na \mathcal{D} . Ako su $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ i $D_1 \subseteq D_2$, kažemo da D_2 **profinjuje** (ili da je **profinjenje od**) D_1 . Uočimo da je parcijalno uređeni skup (\mathcal{D}, \subseteq) **usmjeren**, tj. da za svaki par $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ postoji neki $D \in \mathcal{D}$ koji profinjuje D_1 i D_2 . (Takav je, primjerice, $D = D_1 \cup D_2$.)

PRIMJER. Skup $D_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ je rastav segmenta $[0, 1]$, a skup $D_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ je drugi rastav toga segmenta. Njihova unija $D_1 \cup D_2 \equiv D =$

$\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ je treći rastav koji profinjuje oba prethodna.

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Svakom rastavu

$$D \equiv \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a, b])$$

možemo pridijeliti broj, tzv. **integralnu sumu** (funkcije f),

$$S(f; D; \xi_1, \dots, \xi_n) \equiv S_\xi(f; D) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

pri čemu su točke $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, odabранe po volji, a ξ je pokrata za uređeni n -slog (ξ_i). Jasno, drugačijim odabirom točaka ξ_i dobivamo, za istu funkciju i isti rastav, novu integralnu sumu.

DEFINICIJA 1.12 Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Reći ćemo da je funkcija f **integrabilna** (u Riemannovu smislu ili **R-integrabilna**) ako postoji broj $J(f) \equiv J \in \mathbb{R}$ takav da, za svaki $\varepsilon > 0$, postoji neki rastav D_0 segmenta $[a, b]$ sa svojstvom da, za svaki rastav D što profinjuje D_0 i svaku integralnu sumu $S_\xi(f; D)$, bude $|S_\xi(f; D) - J| < \varepsilon$. Ili, simbolički, f je integrabilna ako

$$(\exists J \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists D_0 \in \mathcal{D})(\forall D \in \mathcal{D})(\forall S_\xi(f; D))$$

$$D \supseteq D_0 \Rightarrow |S_\xi(f; D) - J| < \varepsilon.$$

Broj J nazivamo (Riemannovim) **određenim integralom** funkcije f .

Za funkciju $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je **integrabilna na segmentu** $[a, b] \subseteq X$ ako je njezino suženje $f \equiv g|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija.

Uobičajilo se određeni integral $J \equiv J(f)$ označavati kao

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{ili} \quad \int_{[a,b]} f(x) dx \quad \text{ili, kraće,} \quad \int_{[a,b]} f.$$

(Poslije ćemo se uvjeriti da ta oznaka ima svoj puni smisao!) Pritom se kaže da je a (b) **donja (gornja)** integralova granica, a segment $[a, b]$ - **integracijsko područje**.

Primijetimo da nije sasvim očito je li Definicija 1.12 posve korektna. Naime, nije izravno vidljivo da je broj J jedinstven. Zato ćemo to sada provjeriti. Pretpostavimo da i broj K ima svojstvo što ga ima broj J iz Definicije 1.12. Tada, za svaki $\varepsilon > 0$, postoji neki dostatno fini rastav D sa svojstvom $(\forall S_\xi(f; D)) \quad |S_\xi(f; D) - J| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |S_\xi(f; D) - K| < \frac{\varepsilon}{2}$. Slijedi da je, za svaki $\varepsilon > 0$, $|K - J| < \varepsilon$, dakle, $K = J$.

Izravno iz Definicije 1.12 slijedi da za svaku funkciju $f : [a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ određeni integral iščezava, tj.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

U svrhu prepoznavanja integrabilnih funkcija, ustanovljuju se odgovarajući kriteriji. Ovdje ćemo ustanoviti samo dva: jedan nužni i dovoljni i jedan dovoljni. Neka je, dakle, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena funkcija i neka je $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ bilo koji rastav segmenta $[a, b]$. Tada postoje brojevi

$$m_i \equiv \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i \equiv \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$s(f; D) \equiv \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S(f; D) \equiv \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

$i = 1, \dots, n$. Broj $s(f; D)$ ($S(f; D)$) nazivamo **donjom sumom** (Darbouxovom) **gornjom sumom** funkcije f za dani rastav D . Nadalje, postoje brojevi

$$m \equiv \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \quad M \equiv \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

i pritom je očito da za svaki rastav D i svaku integralnu sumu $S_\xi(f; D)$ vrijedi

$$m(b-a) \leq s(f; D) \leq S_\xi(f; D) \leq S(f; D) \leq M(b-a).$$

Primijetimo i da $D_1 \subseteq D_2 \in \mathcal{D}([a, b])$ povlači

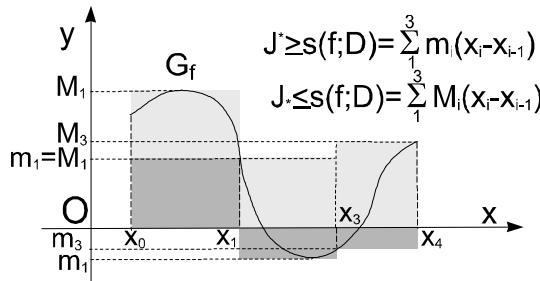
$$s(f; D_1) \leq s(f; D_2) \leq S(f; D_2) \leq S(f; D_1).$$

Uočimo da postoje i brojevi

$$J_*(f) \equiv \sup\{s(f; D) \mid D \in \mathcal{D}([a, b])\},$$

$$J^*(f) \equiv \inf\{S(f; D) \mid D \in \mathcal{D}([a, b])\}.$$

$J_*(f) \equiv J_*$ nazivamo **donjim integralom**, a $J^*(f) \equiv J^*$ **gornjim integralom** (Riemannovim) funkcije f . Pritom je (v. i crtež dolje), za svaki rastav D , $J^* - J_* \leq S(f; D) - s(f; D)$, i, očito, $J_* \leq J^*$, te $J_* \leq J \leq J^*$ čim J postoji.



TEOREM 1.13 Omeđena funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je integrabilna ako i samo ako je $J_* = J^*$. Pritom je $J = J_* = J^*$.

DOKAZ. Neka je omeđena funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna. Treba dokazati da je $J_*(f) = J^*(f)$. Odaberimo bilo koji $\delta > 0$. Po pretpostavci postoji (jedinstveni) broj $J \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists D_0 \in \mathcal{D})(\forall D \in \mathcal{D}([a, b]))(\forall S_\xi(f; D)) \\ D \supseteq D_0 \Rightarrow |S_\xi(f; D) - J| < \varepsilon.$$

To i prethodno razmatranje povlače da, za svaki $D \supseteq D_0$, smijemo integralnu sumu $S_\xi(f; D)$ zamijeniti pripadnom donjom $s(f; D)$ ili gornjom $S(f; D)$ sumom. Dakle,

$$|s(f; D) - J| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |S(f; D) - J| < \varepsilon.$$

Sada, odabравши $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, dobivamo

$$|J_* - J^*| \leq |s(f; D) - S(f; D)| \leq \\ |s(f; D) - J| + |J - S(f; D)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

pa mora biti $J_* = J^*$, dakle i $J_* = J^* = J$.

Obratno, neka za omeđenu funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vrijedi $J_*(f) = J^*(f)$. Dokazat ćemo da je f integrabilna, tj. da je $J(f) = J_*(= J^*)$. Odaberimo bilo koji $\varepsilon > 0$. Po definiciji za J_* i J^* , postoje rastavi $D_*, D^* \in \mathcal{D}([a, b])$ takvi da je

$$J_* - \frac{\varepsilon}{3} < s(f; D_*) \quad \text{i} \quad J^* + \frac{\varepsilon}{3} > S(f; D^*).$$

Neka je $D_0 = D_* \cup D^*$ pa je D rastav od $[a, b]$ koji profinjuje D_* i D^* . Budući da se profinjenjem donja (gornja) suma ne može smanjiti (povećati), to za svaki finiji rastav $D \supseteq D_0$ vrijedi

$$J_* - \frac{\varepsilon}{3} < s(f; D) \leq J^* + \frac{\varepsilon}{3},$$

dakle,

$$S(f; D) - s(f; D) < J^* + \frac{\varepsilon}{3} - (J_* - \frac{\varepsilon}{3}) = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Prema tomu, dobili smo da $J_* = J^*$ povlači sljedeće:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists D_0 \in \mathcal{D})(\forall D \in \mathcal{D}([a, b])) \\ D \supseteq D_0 \Rightarrow |s(f; D) - S(f; D)| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Budući da je svaka integralna suma između (\leq) pripadne donje i gornje sume, to je i

$$|s(f; D) - S_\xi(f; D)| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Napokon, da postoji traženi broj $J = J(f)$ i da je $J = J_*(= J^*)$ slijedi iz

$$\begin{aligned} |S_\xi(f; D) - J^*| &= |S_\xi(f; D) - J_*| \leq \\ |S_\xi(f; D) - s(f; D)| + |s(f; D) - J_*| &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$
■

TEOREM 1.14 *Ako je omeđena funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na skupu $[a, b] \setminus A$, gdje je $A \subset [a, b]$ prebrojiv, onda je f integrabilna funkcija.*

DOKAZ. U punoj općenitosti, dokaz iskazanoga teorema probija okvir ovih skripata. (Trebalo bi, naime, definirati pojmove kao što su Jordanova i Lebesgueova mjera i usvojiti neke složenije topološke činjenice, a to se sve sustavno obrađuje na višim godinama matematičkoga studija.) Ovdje ćemo dokazati samo posebni slučaj toga teorema, ali još uvjek dovoljno općenit da pokrije vrlo široku klasu realnih funkcija (obuhvaćajući, dakako, sve elementarne i mnoge neelementarne funkcije):

Svaka po dijelovima monotona funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je integrabilna.

Najprije primijetimo da po dijelovima monotonost povlači omeđenost realne funkcije f na segmentu $[a, b]$. Naime, ako je f po dijelovima monotona, onda postoji rastav

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

takav da su suženja $f|_{[a_{i-1}, a_i]}$ monotone (dakle i omeđene) funkcije, $i = 1, \dots, n$. Dokaz posebnoga slučaja našega teorema raščlanjujemo na dokaze ovih dviju tvrdnja:

- (i) *Monotona funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je integrabilna;*
- (ii) *Ako su suženja od $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na podsegmente $[a, c]$ i $[c, b]$ integrabilne funkcije, onda je i f integrabilna funkcija i vrijedi:*

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[a,c]} f(x) dx + \int_{[c,b]} f(x) dx.$$

Dokaz za (i).

Pretpostavimo da je funkcija f uzlazna. Tada je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ za svaki $x \in [a, b]$. Ako je $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ rastav od $[a, b]$, onda je $f(x_{i-1}) \leq$

$f(x) \leq f(x_i)$ za svaki $x \in [x_{i-1}, x_i]$ i svaki $i = 1, \dots, n$. Neka je, u skladu s prethodnim oznakama, $m_i \equiv f(x_{i-1})$ i $M_i \equiv f(x_i)$ ($m_{i+1} = M_i$), pa je

$$\begin{aligned}s(f; D) &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i \quad \text{i} \\ S(f; D) &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i, \quad \Delta x_i \equiv x_i - x_{i-1}.\end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}|s(f; D) - S(f; D)| &= S(f; D) - s(f; D) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \leq \\ \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) &\leq \frac{b-a}{k} (f(b) - f(a)),\end{aligned}$$

pri čemu je $\Delta x = \max\{\Delta x_i \mid i = 1, \dots, n\} \leq \frac{b-a}{k}$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Ovo povlači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i odgovarajući rastav D_0 segmenta $[a, b]$, takvi da je

$$|s(f; D) - S(f; D)| < \varepsilon.$$

Po tomu zaključujemo da su za funkciju f donji i gornji Riemannov integral jednaki, $J_* = J^*$. Sada Teorem 1.13 povlači prvu tvrdnju u slučaju uzlazne funkcije f . Posve slično se tvrdnja dokazuje kad je funkcija f silazna.

Dokaz za (ii).

Budući da su suženja $f|_{[a,c]}$ i $f|_{[c,b]}$ integrabilne funkcije, za svaki $\varepsilon > 0$ postoje rastavi $D_1 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = c\}$ od $[a, c]$ i $D_2 = \{x_k = c, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}, x_{k+n} = b\}$ od $[c, b]$ takvi da je, s uobičajenim oznakama,

$$\begin{aligned}|s(f|_{[a,c]}; D_1) - S(f|_{[a,c]}; D_1)| &= \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |s(f|_{[c,b]}; D_2) - S(f|_{[c,b]}; D_2)| &= \sum_{i=k+1}^{k+n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Primijetimo da je $D_1 \cup D_2 \equiv D$ rastav od $[a, b]$, pa zbrajanjem relacija odozgor dobivamo nejednakost

$$|J_* - J^*| \leq |s(f; D) - S(f; D)| = \sum_{i=1}^{k+n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \varepsilon. \quad (*)$$

Po Teoremu 1.13., to znači da je funkcija f integrabilna, tj. postoji $J \equiv \int_a^b f(x) dx$. Nadalje, očito je da vrijede i ove tri nejednakosti

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k m_i \Delta x_i &\leq \int_a^c f(x) dx \leq \sum_{i=1}^k M_i \Delta x_i, \\ \sum_{i=k+1}^{k+n} m_i \Delta x_i &\leq \int_c^b f(x) dx \leq \sum_{i=k+1}^{k+n} M_i \Delta x_i, \\ \sum_{i=1}^{k+n} m_i \Delta x_i &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{i=1}^{k+n} M_i \Delta x_i.\end{aligned}$$

Iz njih, po (*), lako zaključujemo da je, za svaki $\varepsilon > 0$,

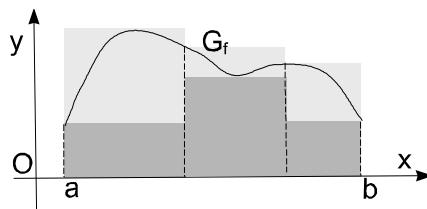
$$\left| \int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right) \right| < \varepsilon,$$

što, konačno, dokazuje tvrdnju (ii). \blacksquare

Uobičajena geometrijska interpretacija određenog integrala jest ova: Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, omeđeno (i nenegativno) preslikavanje. Po Teoremu 1.13 slijedi da je funkcija f integrabilna, a po Teoremu 1.14 - da je

$$J = \int_a^b f(x)dx = J_* = J^*.$$

Označimo slovom P ploštinu pseudotrapeza određenoga krivuljom (grafom) $y = f(x)$ i pravcima $y = 0$, $x = a$ i $x = b$. Svaku donju sumu $s(f; D)$, $D \in \mathcal{D}([a, b])$, smijemo shvatiti zbrojem ploština svih (pseudotrapezu) upisanih pravokutnika, određenih rastavom D , a svaku gornju sumu $S(f; D)$ - zbrojem ploština svih pripadnih opisanih pravokutnika (v. crtež dolje).



Očito je

$$(\forall D \in \mathcal{D}) \quad s(f; D) \leq P \leq S(f; D),$$

što onda povlači $J_* \leq P \leq J^*$. Slijedi, zbog $J_* = J^*$, formula za površinu

$$P = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

NAPOMENA 1.15 Izračun površine možemo malo pojednostavniti tako da uzmemo uniformnu razdiobu segmenta $[a, b]$ (razdioba na n jednakih dijelova). Tada je baza svakog pravokutnika $\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, a za visinu možemo uzeti funkciju vrijednost u lijevom odnosno desnom kraju diobenog segmenta $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$). Tako dobivamo da je:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x,$$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x.$$

(u L_n - lijeva integralna n -suma), odnosno desnom kraju (u D_n - desna integralna n -suma). Umjesto krajeva možemo odabrat i bilo koju točku

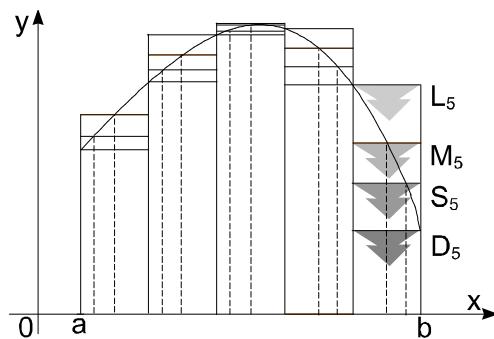
$x_i^* \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, odnosno polovište $\bar{x}_i = \frac{x_i+x_{i-1}}{2}$ i površinu P možemo aproksimirati sa

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x, \text{ (integralna } n\text{-suma)},$$

$$M_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x, \text{ (srednja integralna } n\text{-suma)},$$

tj. vrijedi

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x,$$



$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Primijetimo da ima smisla definirati i

NAPOMENA 1.16 $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad a < b.$

Pritom se kaže da određeni integral zamjenom svojih granica mijenja predznak.

Sljedeći teorem slijedi izravno iz Definicije 1.12 (usp. i opis gore).

TEOREM 1.17 Ako je funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, integrabilna na segmentu $[a, b] \subseteq X$, onda je

- (a) f integrabilna i na svakom podsegmentu $[c, d] \subseteq [a, b]$;
- (b) $\int_c^d f(x) dx = \int_c^r f(x) dx + \int_r^d f(x) dx$, $c, d, r \in [a, b]$;
- (c) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$,
pri čemu je $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, a $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

Sada ćemo iskazati i dokazati tzv. *Osnovni teorem integralnoga računa*, koji onda izravno vodi k tzv. *Newton-Leibnizovoj formuli* što izračunavanje određenog integrala svodi na određivanje primitivne funkcije, tj. pripadnoga neodređenog integrala.

TEOREM 1.18 *Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna onda je funkcija*

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

derivabilna u svakoj točki x_0 u kojoj je funkcija f neprekidna i pritom je

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Ako je skup svih prekidnih točaka funkcije f prebrojiv, onda je F primitivna funkcija za f .

DOKAZ. Prepostavimo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 , tj. da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a, b]) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Prema tomu, na svakom segmentu $[x_0 - |\Delta x|, x_0 + |\Delta x|]$, $|\Delta x| < \delta$, po

Teoremu 1.17(iii) vrijedi

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)dt \leq f(x_0) + \varepsilon$$

(neovisno o $\text{sgn } \Delta x$). Po Teoremu 1.17(ii) je tada

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{x_0 + \Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) \leq f(x_0) + \varepsilon, \quad \text{tj.}$$

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{\Delta x} (F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

To povlači da za $|\Delta x| \rightarrow 0$, dakle i $\varepsilon \rightarrow 0$, postoji granična vrijednost

$$F'(x_0) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

Da bismo dokazali i drugu tvrdnju, tj. da je F primitivna funkcija za f , dosta je dokazati da je F preslikavanje. U tu svrhu, promatrajmo bilo koju točku $x_0 \in [a, b]$ i dokažimo $\lim_{x_0} F = F(x_0)$. Zaista,

$$\begin{aligned} \lim_{x_0} F &= \lim_{x_0 \rightarrow x_0} \int_a^x f(t)dt = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t)dt = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)dt \right) \\ &= \int_a^{x_0} f(t)dt + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt = F(x_0). \end{aligned}$$

Naime, po Teoremu 1.17(iii) je

$$m_0 \Delta x \leq \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt \leq M_0 \Delta x$$

(za neke $m_0 \geq \inf f$ i $M_0 \leq \sup f$ na $[a, b]$),
pa $\Delta x \rightarrow 0$ povlači $\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt \rightarrow 0$. ■

Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna i neprekidna u svim točkama osim, možda, u prebrojivo mnogo njih. Tada je, po upravo dokazanom teoremu, funkcija

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

primitivna za funkciju f . Primijetimo da je $F(a) = 0$ pa je $F(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$. Pokažimo da to vrijedi i za svaku inu primitivnu funkciju.

TEOREM 1.19 Neka je skup prekidnih točaka integrabilne funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ prebrojiv. Tada vrijedi Newton-Leibnizova formula:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (2)$$

pri čemu je $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bilo koja primitivna funkcija za f .

DOKAZ. Neka je F bilo koja primitivna funkcija za f . Označimo s F_1 primitivnu funkciju za f iz dokaza Teorema 1.18, tj. $F_1(x) = \int_a^x f(t) dt$. Po Teoremu 1.2, funkcije F i F_1 se razlikuju do na aditivnu konstantu, tj. $F(x) = F_1(x) + c$ za svaki $x \in [a, b]$. Prema tomu, $\int_a^b f(x) dx = F_1(b) = F_1(b) - F_1(a) = (F_1(b) + c) - (F_1(a) + c) = F(b) - F(a)$. ■

Pomoću Newton-Leibnizove formule, koju zapisujemo i u oblicima

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(x) \Big|_a^b,$$

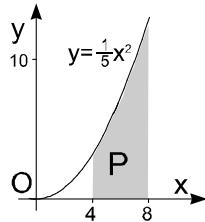
možemo lako izračunati određeni integral svake funkcije kojoj umijemo naći neodređeni integral, odnosno, primitivnu funkciju.

PRIMJER. Izračunajmo određeni integral $J = \int_{-1}^5 (3x^2 - 2x + 5) dx$.

Po dobivenoj formuli i svojstvima neodređenog integrala slijedi:

$$J = \left[x^3 - x^2 + 5x \right]_{-1}^5 = (5^3 - 5^2 + 5 \cdot 5) - ((-1)^3 - (-1)^2 + 5(-1)) = 125 - (-7) = 132. \quad \square$$

PRIMJER. Izračunajmo ploštinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljom $y = \frac{1}{5}x^2$ i pravcima $y = 0$, $x = 4$ i $x = 8$ (v. crtež).



$$P = \int_4^8 \frac{x^2}{5} dx = \frac{1}{5} \int_4^8 x^2 dx = \frac{1}{5} \left[\frac{x^3}{3} \right]_4^8 = \frac{1}{15} (8^3 - 4^3) = \frac{448}{15} \text{ (kv. jed.)}. \quad \square$$

PRIMJER. Izračunajmo integral $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

Najprije izračunajmo pripadni neodređeni integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} =_{[x=t^2; dx=2tdt; t=\sqrt{x}]} \int \frac{2t}{t-1} dt = 2 \int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = \\ 2(t + \ln|t-1|) + c = 2(\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}-1|) + c.$$

Sada, primjenom Newton-Leibnizove formule, dobivamo:

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2 (\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}-1|) \Big|_4^9 = \\ 2((3 + \ln 2) - (2 + \ln 1)) = 2(1 + \ln 2).$$

Primijetimo da se provedeni postupak može skratiti. Naime, kad god se za izračunavanje pripadnog neodređenog integrala rabi neka zamjenska funkcija, treba u tu zamjenu uključiti i integralove granice (i "zaboraviti" polaznu varijablu). U našemu primjeru bismo tako dobili

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} =_{[x=t^2; dx=2tdt; t=\sqrt{x}; x_1=4 \Rightarrow t_1=2; x_2=9 \Rightarrow t_2=3]} \\ \int_2^3 \frac{2t}{t-1} dt = \dots = \left[2(t + \ln|t-1|) \right]_2^3 = \dots = 2(1 + \ln 2). \quad \square$$

Promatrajmo neprekidnu funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, kojoj je $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija. Tada je, po Teoremu 1.18, funkcija F derivabilna pa na nju smijemo primijeniti Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti:

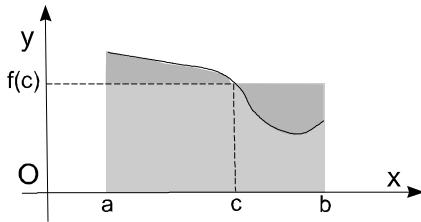
$$(\exists x_0 \in (a, b)) F(b) - F(a) = F'(x_0)(b-a), \quad \text{tj.}$$

$$(\exists x_0 \in (a, b)) \int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b-a).$$

Time smo dobili tzv. *teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa*.

TEOREM 1.20 Za svako preslikavanje $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, postoji barem jedna točka $c \in (a, b)$ takva da je

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$



NAPOMENA 1.21 Definicija određenog integrala $\int_{[a,b]} f \equiv \int_a^b f(x)dx$ omeđene funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, dopušta definirati i određeni integral suženja te funkcije na bilo koji od intervala $[a, b]$, $\langle a, b]$ ili $\langle a, b \rangle$ i to na isti način, tj.

$$\int_{[a,b)} f = \int_{\langle a,b]} f = \int_{\langle a,b \rangle} f \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{[a,b]} f.$$

NAPOMENA 1.22 Određeni integral omeđene funkcije $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, kojoj je definicijsko područje X konačna unija disjunktnih (do na "rubne" točke) segmenata ili intervala, definira se kao određeni integral trivijalnoga proširenja

$$\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \\ 0, & x \in [a, b] \setminus X \end{cases},$$

te funkcije na neki (bilo koji) segment $[a, b]$ što sadrži X . Prema tomu,

$$(X = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i], b_i \leq a_{i+1}) \Rightarrow \int_X f = \int_{[a_1, b_n]} \tilde{f} = \sum_{i=1}^n \int_{[a_i, b_i]} \tilde{f} = \sum_{i=1}^n \int_{[a_i, b_i]} f.$$

1.2.2 NEKI PRIBLIŽNI INTEGRACIJSKI POSTUPCI

Čest je slučaj da nismo u mogućnosti eksplicitno izračunati integral $\int f(x)dx$, dakle, "ni" pripadni određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ (kad postoji). (Izračunati konkretan određeni integral po definiciji je, općenito, "nemoguća" zadaća!) Osim toga, ponekad se zbog složenosti ili mukotrpnosti samog izračunavanja zadovoljavamo i relativno lako dobivenim netočnim rezultatom, ako je dostatno blizu točnoga rezultata. Kažemo da se u takvim slučajevima određeni integral procjenjuje, grublje ili finije, već prema potrebi. Jednu grubu procjenu daje formula

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

iz Teorema 1.17(iii).

PRIMJER Procijenimo integral $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$.

Funkcija $f : [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ je integrabilna jer je neprekidna. Funkcija f poprima na segmentu $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ svoju najmanju i najveću vrijednost, tj. $m \equiv \inf f = \min f$, $M \equiv \sup f = \max f$ (na $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$). Primijetimo da je f silazna funkcija jer je $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) \leq 0$, $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Slijedi da f ekstremne vrijednosti poprima na "rubu", tj. $\min f = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$, $\max f = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Napokon, po Teoremu 1.17(iii.) dobivamo procjenu

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) &\leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad \text{tj.} \\ \frac{1}{2} &\leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

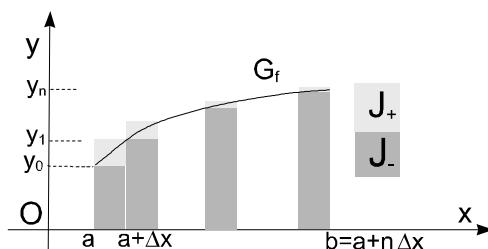
□

Bolje (finije) procjene određenog integrala (pseudotrapezove ploštine) postižu se posebno prilagođenim postupcima - numeričkim metodama, bit kojih se sastoji u dobro pogodenom odabiru jednostavnih ravninskih likova što sveukupno približno prekrivaju promatrani psedotrapez. Sada ćemo upoznati neke od tih postupaka.

(a) **Aproksimacija pravokutnicima.** Integralne sume

$$J_- = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x \quad \text{i} \quad J_+ = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (4)$$

to bolje aproksimiraju integral $J = \int_a^b f(x) dx$ što je pripadni *ekvidistantni* rastav D finiji.



Ako je funkcija f neprekidna, pozitivna i uzlazna, približna vrijednost J_- jest zbroj ploština svih pravokutnika s bazama duljine Δx upisanih u pseudotrapez $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, a približna vrijednost J_+ - zbroj

plošćina svih pravokutnika opisanih tomu pseudotrapezu (v. gornji crtež). Ako je funkcija f i monotona, očito je $J_- \leq J \leq J_+$ ili $J_+ \leq J \leq J_-$.

(b) **Trapezna formula.** Ako se sve susjedne točke $T_i = (x_i, y_i)$, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, spoje dužinama, jednadžbe tih dužina (na pripadnim pravcima) jesu

$$y - y_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}(x - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n.$$

Time se dobiva poligonalna crta koja približno "prati" funkcijski graf G_f . Slijedi da se traženi integral $J = \int_a^b f(x)dx$ može aproksimirati određenim integralom funkcije kojoj je graf upravo ta poligonalna crta. Dakle,

$$\begin{aligned} J &\approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1} + \Delta x} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}(x - x_{i-1}) + y_{i-1} \right) dx = \\ &= \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i-1}) \end{aligned}$$

ili

$$J \approx \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \equiv J_T \quad (5)$$

Dobiveni izraz za približnu vrijednost J_T nazivamo **trapeznom formulom** jer je aproksimacija dobivena upisivanjem trapeza (jednakih visina Δx) čim su y_{i-1} i y_i istog predznaka (v. idući crtež). Primjetimo da je

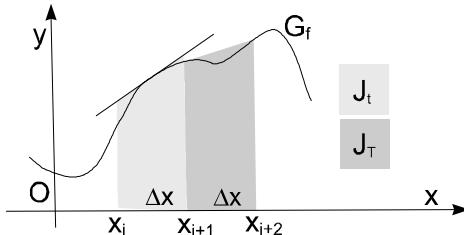
$$J_T = \frac{J_- + J_+}{2}$$

pa, prema tomu, trapezna formula, tj. J_T bolje aproksimira integral J od aproksimacija J_- ili J_+ pravokutnicima.

(c) **Tangentna formula.** Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna na (a, b) . Ako se svaki dio grafa G_f nad segmentom $[x_{i-1}, x_i]$, zamjeni pripadnim dijelom tangente u točki

$$T_{i-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, y_{i-\frac{1}{2}} \right), \quad y_{i-\frac{1}{2}} = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

dobiva se još jedna aproksimacija za $J = \int_a^b f(x)dx$, ovaj put trapezima (visine Δx) opisanim promatranomu pseudotrapezu (v. crtež dolje).

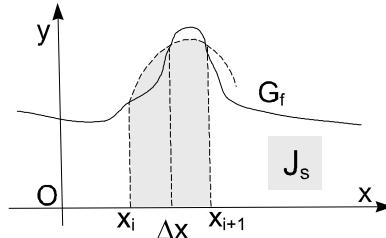


Budući da je ordinata $y_{i-\frac{1}{2}}$ srednjica i -toga trapeza, $i = 1, \dots, n$, izravno se dobiva približna formula

$$J \approx \Delta x \sum_{i=1}^n y_{i-\frac{1}{2}} \equiv J_t. \quad (6)$$

(d) **Simpsonova formula.** Aproksimirajmo sada svaki dio grafa G_f nad podsegmentom $[x_{i-1}, x_i]$ parabolnim lukom što prolazi točkama T_{i-1} , $T_{i-\frac{1}{2}}$ i T_i , $i = 1, \dots, n$ (v. crtež dolje). (Budući da je ovdje parabolina os usporedna s y -osi, jednadžba te parabole jest $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$, pa je posve određena bilo kojim trima svojim točkama.) Izračunaju li se i zbroje određeni integrali pripadnih kvadratnih polinoma, dobiva se približna vrijednost

$$J \approx \frac{\Delta x}{6} \left(y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i + 4 \sum_{i=1}^n y_{i-\frac{1}{2}} \right) \equiv J_S. \quad (7)$$



Iraz J_S nazivamo **Simpsonovom formulom**. Zanimljivo je da vrijedi

$$J_S = \frac{1}{3} (J_T + 2J_t),$$

što pokazuje da Simpsonova formula daje najbolju (od promatranih) aproksimaciju određenog integrala $J = \int_a^b f(x) dx$.

Potpunosti radi, navest ćemo (bez dokaza) i procjene pogrešaka R_{\pm} , R_T , R_t i R_S redom razmatranih postupaka. Ako funkcija f ima neprekidnu i omeđenu četvrtu derivaciju $f^{(4)}$ i $M_4 = \sup\{|f^{(4)}(x)| \mid x \in [a, b]\}$, onda je procjena pogreške Simpsonovom formulom

$$|R_S| \leq \frac{M_4}{2880} (b-a)(\Delta x)^4 = \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4} \quad (8)$$

Pogreška aproksimacijom pravokutnicima jest

$$|R_{\pm}| \leq \frac{M_1}{2} (b-a)\Delta x = \frac{M_1(b-a)^2}{2n}, \quad (9)$$

pri čemu f ima neprekidnu i omeđenu derivaciju f' i $M_1 = \sup\{|f'(x)| \mid x \in [a, b]\}$. Napokon, ima li funkcija f neprekidnu i omeđenu drugu derivaciju f'' i $M_2 = \sup\{|f''(x)| \mid x \in [a, b]\}$, onda je

$$|R_T| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)(\Delta x)^2 = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}, \quad (10)$$

$$|R_t| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)(\Delta x)^2 = \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}. \quad (11)$$

Relacije (8)-(11) potvrđuju da je, zaista, najbolja aproksimacija integrala J broj J_S pa zatim brojevi J_t , J_T i J_- (ili J_+) redom. Netočnost ovisi o $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Ako $n \rightarrow \infty$ onda $\Delta x \rightarrow 0$, pa pogotovo $(\Delta x)^k \rightarrow 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. To ponovno pokazuje da, za $n \rightarrow \infty$, R_S najbrže teži k nula jer ovisi o $(\Delta x)^4$.

PRIMJER. Izračunajmo približno integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ Simpsonovom formulom, tako da pogreška bude manja od 0,1.

Zahtjev $|R_S| < 0,1$ uvjetuje odabrati takav $n \in \mathbb{N}$ da bude

$$\frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4} = \frac{M_4}{2880n^4} < 10^{-1}, \quad \text{tj.} \quad n > \sqrt[4]{\frac{M_4}{288}}.$$

Budući da je

$$(e^{x^2})^{(4)} = 4(4x^3 + 2x^2 + 6x + 1)e^{x^2};$$

$$(e^{x^2})^{(5)} = 8(4x^4 + 2x^3 + 12x^2 + 3x + 3)e^{x^2} > 0,$$

to je funkcija $(e^{x^2})^{(4)}$ pozitivna, neprekidna i uzlazna na $[0, 1]$, pa poprima najveću vrijednost u točki $x = b = 1$. Dakle,

$$M_4 = 4(4 + 2 + 6 + 1)e^{1^2} = 52e.$$

Slijedi da treba uzeti neki

$$n > \sqrt[4]{\frac{M_4}{288}} = \sqrt[4]{\frac{M_4}{288}} \approx 0,84,$$

pa već $n = 1$ zadovoljuje. Sada Simpsonova formula daje

$$\begin{aligned} J &\approx J_S = \frac{b-a}{6} \left(y_0 + y_1 + 4y_{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{6}(e^0 + e^1 + 4e^{0,25}) \approx \frac{1+2,718+4 \cdot 1,284}{6} \approx 1,5, \end{aligned}$$

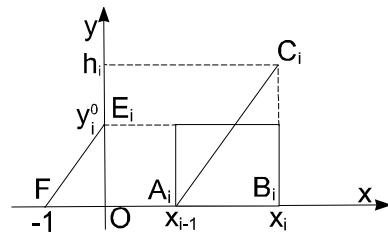
dakle, $J = 1,5 \pm 0,1$ ili $J \in \langle 1,4; 1,6 \rangle$. (Neka čitatelj provjeri sljedeći podatak: Ako je $n = 10$ onda se dobiva $J \in \langle 1,4626; 1,4628 \rangle$.) \square

Osim numeričkoga približnog integriranja, postoji i **grafičko približno integriranje**, koje, jasno, nema alternative ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zadana samo grafički. Stoga je praktičarima važno ovladati i tom tehnikom. Sam postupak počinje izborom pogodnog, ali što grubljeg, rastava $D =$

$\{x_0, \dots, x_n\}$ koji dopušta približno (ploštinski) zamijeniti svaki pseudotrapez nad $[x_{i-1}, x_i]$ jednim pravokutnikom nad $[x_{i-1}, x_i]$ visine $y_i^0 = f(x_i^0)$, $x_i^0 \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Gledano cjelovito, funkcijin graf G_f se zamjenjuje stubastom "krivuljom" određenom gornjim osnovicama dobivenih pravokutnika. Prema tomu, približna vrijednost određenog integrala $J = \int_a^b f(x)dx$ će biti

$$J \approx J_G = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} y_i^0 dx = \sum_{i=1}^n y_i^0 (x_i - x_{i-1}). \quad (12)$$

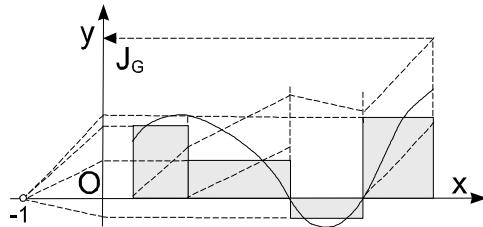
Opišimo i samu tehniku grafičkoga integriranja. Promatrajmo i -ti pravokutnik, tj. onaj nad $[x_{i-1}, x_i]$ visine y_i^0 . Trokutu s vrhovima $O = (0, 0)$, $E_i = (0, y_i^0)$, $F = (-1, 0)$ pridružimo trokut s vrhovima $A_i = (x_{i-1}, 0)$, $B_i = (x_i, 0)$, $C_i = (x_i, h_i)$, pri čemu se h_i dobiva iz uvjeta da trokuti OE_iF i $A_iB_iC_i$ budu slični (v. crtež).



Ta sličnost povlači $d(F, O) : y_i^0 = (x_i - x_{i-1}) : h_i$ pa je $h_i = y_i^0(x_i - x_{i-1})$. To znači da je h_i mjerni broj (kvadratnih) jedinica za površinu promatranoga i -tog pravokutnika. Slijedom toga, zbroj

$$\sum_{i=1}^n h_i = J_G \approx J.$$

Korisno je i sam zbroj $\sum_{i=1}^n h_i$ odrediti grafički. U tu svrhu se trokut $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ zamjenjuje sukladnim trokutom $A'_{i+1}B'_{i+1}C'_{i+1}$ usporednih stranica, pri čemu je $A'_{i+1} = C'_i$, $i = 1, \dots, n-1$, i $C'_1 = C_1$. Tada je, naime, ordinata h'_{i+1} točke C'_{i+1} jednaka zbroju $\sum_{j=1}^{i+1} h_j$ pa je, u konačnici, $h'_n = \sum_{i=1}^n h_i$ (v. sljedeći primjer). Neka čitatelj prouči primjer grafičkoga integriranje na crtežu dolje.



NAPOMENA 1.23 Primijetimo da poligonalna crta $A_1C_1C'_2 \cdots C'_n$ aproksimira graf primitivne funkcije $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(x)dx$. Pritom su "prijejomne" točke C_1, C'_2, \dots, C'_n to bliže odgovarajućim točkama na grafu G_F što je bolje aproksimiran integral $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ integralom $\int_{x_{i-1}}^{x_i} y_i^o dx$, $i = 1, \dots, n$. tj. što je bolja aproksimacija promatranih pseudotrapeza pripadnim pravokutnicima.

1.2.3 NEPRAVI INTEGRAL

Sjetimo se da smo određeni integral definirali za omeđene realne funkcije na segmentu, a potom proširili i na njihova suženja na intervalima. Sada ćemo pokušati taj pojam proširiti, kod god bude imao smisla, i na neomeđene funkcije, kao i na funkcije s neomeđenim definicijskim područjem. U svakom od tih slučajeva, govorit ćemo o **nepravom integralu**.

Najprije ćemo razmotriti najjednostavniji slučaj. Neka je, za svaki $\varepsilon > 0$, suženje $f|_{[a, b-\varepsilon]}$ (neomeđene) funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, $a \leq b - \varepsilon < b$, i neka je $\lim_b f = \infty$ (bilo $-\infty$ bilo $+\infty$). Označimo

$$J_d(f, \varepsilon) \equiv J_d(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} (f|_{[a, b-\varepsilon]})(x)dx.$$

Tada pripadni nepravi integral funkcije f definiramo kao graničnu vrijednost

$$\int_{[a, b]} f \equiv \int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_d(\varepsilon).$$

Pritom kažemo da nepravi integral $\int_{[a, b]} f$ **konvergira** čim navedena granična vrijednost postoji ($\neq \pm\infty$), a da **divergira** čim ta granična vrijednost ne postoji. Primijetimo da je, zapravo, $J_d(\varepsilon) = F(b - \varepsilon) - F(a)$ čim je F primitivna funkcija za f . Uočimo i da vrijednost $f(b)$ ne igra nikavu ulogu. Drugim riječima, posve je svejedno je li definicijsko područje funkcije f segment $[a, b]$ ili interval $[a, b]$. Pridodajmo i opći *kriterij za konvergenciju* (dokaz je jednostavan) ovakvoga nepravog integrala:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a_0, b_0 \in (b - \delta, b)) \quad \left| \int_{a_0}^{b_0} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Slično postupamo i u slučaju integrabilnosti na svakom podsegmentu $[a + \varepsilon, b]$ pod "smetnjom" $\lim_a f = \infty$. Označivši

$$J_l(f, \varepsilon) \equiv J_l(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b (f|_{[a+\varepsilon, b]})(x)dx,$$

definiramo

$$\int_{[a,b]} f \equiv \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_l(\varepsilon). \quad (13)$$

Primijetimo da je ovdje, zapravo, $J_l(\varepsilon) = F(b) - F(a + \varepsilon)$ čim je F primitivna funkcija za f . Pripadni kriterij za konvergenciju je isti kao u prethodnom slučaju, s tim da se odabiru $a_0, b_0 \in \langle a, a + \delta \rangle$.

Treći slučaj nastupa kad je "smetnja" u nekoj točki $c \in \langle a, b \rangle$, $\lim_{c \pm 0} f = \infty$ (bilo slijeva ili zdesna u c). Tada se problem svodi na dva prethodna slučaja, tj. promatraju se suženja od f na $[a, c]$ i na $[c, b]$, pa ako pripadni nepravi integrali konvergiraju onda i nepravi integral $\int_{[a,b]} f$ konvergira. Pripadna formula se, u slučaju $\lim_{c-0} f = \infty$ i $\lim_{c+0} f = \infty$, tj. $\lim_c f = \infty$, može zapisati ovako:

$$\int_{[a,b]} f \equiv \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx. \quad (14)$$

Napokon, sada je očito kako postupiti u "općem" slučaju, tj. kad postoji (najviše) *konačno* mnogo točaka $c_i \in [a, b]$ u kojima je $\lim_{c_i \pm 0} f = \infty$, $i = 1, \dots, n$.

Razmotrimo sada mogućnost integriranja na neomeđenom definicijskom području. Pretpostavimo, prvo, da je, za svaki $b \in \mathbb{R}$, $b \geq a$, suženje $f|_{[a,b]}$ funkcije $f : [a, \cdot) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Označimo

$$J(f, b) \equiv J(b) = \int_a^b (f|_{[a,b]})(x) dx.$$

Nepravi integral funkcije f tada definiramo kao graničnu vrijednost

$$\int_{[a,\cdot)} f \equiv \int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} J(b). \quad (15)$$

Kao i prije, kažemo da nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ konvergira ako postoji ($\neq \pm\infty$) pripadna granična vrijednost, a u protivnom da divergira. Jasno, ako je F primitivna funkcija od f , onda je $J(b) = F(b) - F(a)$. Pripadni *kriterij za konvergenciju* se lako dokaže, a glasi ovako:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a_0 \geq a)(\forall b_0 \geq a_0) \quad \left| \int_{a_0}^{b_0} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Analogno postupamo u slučaju funkcije $f : (\cdot, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kojoj je integrabilno svako suženje $f|_{[a,b]}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Označivši, dakle,

$$J(f, a) \equiv J(a) = \int_a^b (f|_{[a,b]})(x) dx,$$

definiramo nepravi integral funkcije f kao graničnu vrijednost

$$\int_{\langle \cdot, b]} f \equiv \int_{-\infty}^b f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} J(a). \quad (16)$$

Dakako, $J(a) = F(b) - F(a)$ čim je F primitivna funkcija za f . Odgovarajući kriterij za konvergenciju je u biti isti, s tim da se traži neki $b_0 \leq b$ i onda uzme bilo koji $a_0 \leq b_0$. Napokon, ako je funkciji $f : \langle \cdot, b_0] \cup [a_0, \cdot \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $b_0 \leq a_0$, integrabilno svako suženje $f|_{([a_0, b_0] \cup [a_0, b])}$, onda se nepravi integral funkcije f svodi na dva prethodna neprava integrala. (U podslučaju $b_0 = a_0$, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, smijemo odabrat bilo koju točku $d \in \mathbb{R}$ i promatrati pripadna suženja na $\langle \cdot, d]$ i na $[d, \cdot \rangle$.) Pripadnu formulu možemo zapisati ovako:

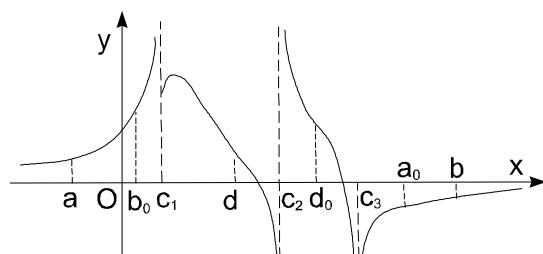
$$\begin{aligned} \int_{\langle \cdot, b_0] \cup [a_0, \cdot \rangle} f &\equiv \int_{-\infty}^{b_0} f(x) dx + \int_{a_0}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \\ &\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{b_0} f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{a_0}^b f(x) dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Preostaje najopćenitiji slučaj: neomeđena funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, s neomeđenim definicijskim područjem X . I ovdje prepostavljamo obstojnost najviše konačno mnogo točaka $c_i \in X$ u kojima je $\lim_{c_i \pm 0} f = \infty$, $i = 1, \dots, n$, i integrabilnost svakoga suženja $f|_{[a, b]}$ pri čemu (nijedna) $c_i \notin [a, b] \subseteq X$. To povlači da se nepravi integral funkcije f može definirati pomoću konačno mnogo graničnih vrijednosti oblika (12) - (15). Primjerice, za $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s jedinom točkom c u kojoj je $\lim_c f = \infty$, pripadni nepravi integral $\int_{\mathbb{R}} f$ definiramo izrazom

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &\stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{b_0} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{b_0}^{c-\varepsilon} f(x) dx + \\ &\quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^{a_0} f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{a_0}^b f(x) dx, \end{aligned}$$

pri čemu je $a \leq b_0 < c < a_0 \leq b$, i a_0, b_0 fiksni.

PRIMJER. Neka je dana funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ kojoj je graf G_f na donjem crtežu. Definirajmo nepravi integral funkcije f .



Ovdje je važno uočiti da je $X = \mathbb{R}$, $\lim_{c_1 \rightarrow 0} f = +\infty$, $\lim_{c_2 \rightarrow 0} f = -\infty$, $\lim_{c_2 \rightarrow 0} f = +\infty$ i $\lim_{c_3 \rightarrow 0} f = -\infty$. U skladu s prethodnim razmatranjem, odaberimo točke a , a_0 , b , b_0 , i d_0 tako da bude $a \leq b_0 < c_1$, $c_1 < d < c_2$, $c_2 < d_0 < c_3 < a_0 < b$, pa nepravi integral funkcije f ima ovaj zapis:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{b_0} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{b_0}^{c_1 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{c_1}^d f(x) dx + \\ &\quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_d^{c_2 - \delta} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{c_2 + \eta}^{d_0} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{d_0}^{c_3 - \eta} f(x) dx + \\ &\quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{c_3 + \rho}^{a_0} f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{a_0}^b f(x) dx. \end{aligned} \quad \square$$

Primijetimo da može nastupiti i ovakav slučaj:

Nepravi integrali

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_d^{c_2 - \varepsilon} f(x) dx \quad \text{i} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_2 + \varepsilon}^{d_0} f(x) dx$$

divergiraju, a ipak postoji granična vrijednost

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_d^{c_2 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{c_2 + \varepsilon}^{d_0} f(x) dx \right).$$

Može se, naime, pritom dogoditi i da bude

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_d^{c_2 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{c_2 + \varepsilon}^{d_0} f(x) dx \right) = F(d_0) - F(d)$$

čim je F primitivna funkcija za f , pa bi se smjelo uvjetno reći da "postoji određeni integral" $\int_d^{d_0} f(x) dx$.

Slično, moguće je da nepravi integrali

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_2 + \varepsilon}^{d_0} f(x) dx \quad \text{i} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{d_0}^{c_3 - \varepsilon} f(x) dx$$

divergiraju, a da postoji granična vrijednost

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{c_2 + \varepsilon}^{d_0} f(x) dx + \int_{d_0}^{c_3 - \varepsilon} f(x) dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_2 + \varepsilon}^{c_3 - \varepsilon} f(x) dx.$$

To je temeljni razlog za različito označavanje svake granične vrijednosti u nepravom integralu. U svezi s ovim, definira se tzv. **glavna vrijednost** nepravog integrala. Primjerice, za funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s jedinom "integracijskom smetnjom" u točki $c \in (a, b)$, $\lim_{c \rightarrow 0} f = -\infty (+\infty)$ i $\lim_{c \rightarrow 0} f = +\infty (-\infty)$, glavnom vrijednošću pripadnoga nepravog integrala nazivamo graničnu vrijednost

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c - \varepsilon} f(x) dx + \int_{c + \varepsilon}^b f(x) dx \right) \equiv V.P. \left(\int_a^b f(x) dx \right).$$

Ako pak funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ima jedine "integracijske smetnje" na rubu, tj. $\lim_{a \rightarrow 0} f = -\infty(+\infty)$ i $\lim_{b \rightarrow +\infty} f = +\infty(-\infty)$, onda se glavna vrijednost pripadnoga nepravog integrala definira kao

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx \equiv V.P. \left(\int_a^b f(x) dx \right).$$

Napokon, za funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, integrabilnu na svakom segmentu, glavnom vrijednošću pripadnog nepravog integrala nazivamo graničnu vrijednost

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx \equiv V.P. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right).$$

PRIMJER. Istražimo konvergira li nepravi integral $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Najprije odredimo točan zapis toga nepravog integrala. Definicijsko područje X funkcije $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ jest skup $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$. Budući da je $\lim_{0^+} f = +\infty = \lim_{1^-} f$ i da su 0, 1 i neomeđeno integracijsko područje jedine "smetnje", naš nepravi integral ima ovaj zapis:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^d \frac{dx}{x \ln^2 x} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_d^{1-\delta} \frac{dx}{x \ln^2 x} + \\ &\quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{1+\eta}^a \frac{dx}{x \ln^2 x} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x \ln^2 x}, \end{aligned}$$

pri čemu je $\varepsilon, \delta, \eta > 0$, $0 < d < 1$ i $1 < a \leq b$. Primijetimo da je

$$\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} + c$$

pa je $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{1}{\ln x}$, primitivna funkcija za f . Budući da je $\lim_{1 \pm 0} F = \pm\infty$, to promatrani nepravi integral divergira. Neka se čitatelj uvjeri (kako izravnim računom tako i primjenom kriterija za konvergenciju) da prvi i četvrti nepravi integral (pribrojnik) u zapisu gore konvergiraju. \square

PRIMJER. Istražimo konvergira li nepravi integral:

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad (b) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}.$$

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

$$\begin{aligned} (b) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^3} = \\ &\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_{\delta}^1 = (-\infty) + (+\infty), \end{aligned}$$

pa ovaj nepravi integral divergira. (Neka čitatelj provjeri konvergenciju (divergenciju) tih nepravih integrala i pomoću danoga kriterija!) S druge strane, primijetimo da je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^3} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\left[\frac{-1}{2x^2} \right]_a^{-\varepsilon} + \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_\varepsilon^b \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right),$$

za svaki $a < 0$ i svaki $b > 0$. Posebice, za $a = -1$ i $b = 1$, dobivamo njegovu glavnu vrijednost

$$V.P. \left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^3} \right) = 0.$$
 \square

1.2.4 NEKOLIKO PRIMJENA ODREĐENOG INTEGRALA

U ovomu pododjeljku ćemo pokazati kako se određeni integral primjenjuje na rješavanje nekih, pretežito geometrijskih, zadaća. Na početku trebamo malo detaljnije upoznati neke pojmove u svezi s krivuljom, premda sama definicija neće, a na ovoj razini ni ne može, biti sasvim matematički korektna. Dakako, da će graf G_f neprekidne funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilne svuda osim, možda, u konačno mnogo točaka, biti i dalje osnovni primjer ravninske krivulje.

DEFINICIJA 1.24 Neka je u ravnini σ dan pravokutni koordinatni sustav $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Reći ćemo da je skup $\Gamma \subseteq \sigma \equiv \mathbb{R}^2$ (**ravninska krivulja**) ako postoje interval $I \subseteq \mathbb{R}$ i uređeni par (ϕ, ψ) neprekidnih funkcija $\phi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$, takvi da je $\Gamma = \{(\phi(t), \psi(t)) \mid t \in I\}$. Zapis $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ nazivamo **parametarskim jednadžbama**, a surjekciju $r : I \rightarrow \Gamma$, $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$, - **neprekidnom parametrizacijom** krivulje Γ . (Da bismo bili posve korektni, treba pridodati uvjet o konačnosti tzv. singularnog skupa $\{t \in I \mid r^{-1}[\{r(t)\}] \neq \{t\}\}$!)

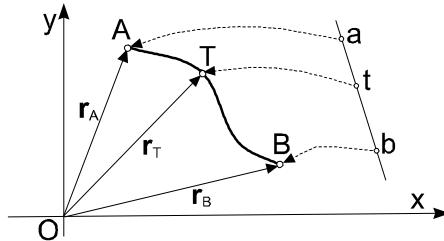
Reći ćemo da je krivulja Γ **jednostavna** ako se funkcije ϕ i ψ mogu odabrati tako da funkcija r bude bijektivna. Ako je I segment $[a, b]$ i $r(b) = r(a)$, onda za Γ kažemo da je **zatvorena** krivulja. Jednostavnu krivulju Γ nazivamo (ravninskim) **lukom** i često označujemo s \widehat{AB} , pri čemu je $A = r(a)$ i $B = r(b)$, govoreći pritom da su točke A i B **krajevi** (ili **rub**) od \widehat{AB} . Ako

je bijektivnost funkcije r narušena samo u točkama a i b , tj. $r(a) = r(b)$, onda kažemo da je Γ **jednostavno zatvorena krivulja**.

Reći ćemo da je krivulja Γ **glatka** ako se funkcije ϕ i ψ mogu odabratи tako da budu neprekidno derivabilne i da bude $[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$ u svakoj točki $t \in I$. U tom slučaju kažemo da je $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$, $t \in I$, **glatka parametrizacija** krivulje Γ . Ako uvjetu $\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 \neq 0$ nije uđovoljeno u najviše konačno mnogo točaka $t_1, \dots, t_n \in I$, onda kažemo da je krivulja Γ **po dijelovima glatka**. (Napomenimo da uvjet $[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$ znači obstoјnost krivuljine tangente u točki $r(t) \in \Gamma$!)

Shvatimo li koordinate točke $T = (\phi(t), \psi(t)) \in \Gamma$, $t \in I$, komponentama radijus-vektora $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_T$ te točke (v. crtež dolje), dobivamo **vektorskú parametarsku jednadžbu** krivulje Γ :

$$\Gamma \dots \mathbf{r}(t) = \phi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}, \quad t \in I.$$



PRIMJER. Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje, derivabilno svuda osim, možda, u konačno mnogo točaka. Tada su $y = f(t)$, $x = i_{[a,b]}(t) = t$, $t \in [a, b]$, ($\psi = f$, $\phi = i_{[a,b]}$ - inkluzija) parametarske jednadžbe po dijelovima glatkoga luka (grafa) $\Gamma = G_f$. (Funkcija $r : [a, b] \rightarrow G_f$, $r(t) = (t, f(t))$, je bijekcija!) Pripadna vektorska jednadžba je $r(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$, $t \in [a, b]$. Dakako da je i $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, jednadžba te krivulje, ali u pravokutnim (Kartezijevim) koordinatama. \square

PRIMJER. Neka je u ravnini σ , pored Kartezijeva $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$, dan i polarni koordinatni sustav $(O; \mathbf{i}, \phi)$. Neka je $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje, derivabilno svuda osim, možda, u konačno mnogo točaka. Tada je $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, polarna jednadžba po dijelovima glatke krivulje (grafa) $\Gamma \equiv G_g = \{(\rho, \varphi) \mid \rho = g(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]\}$ u pripadnom polarnom sustavu. Kao što znamo, parametarske jednadžbe te krivulje jesu $x = g(\varphi) \cos \varphi$, $y = g(\varphi) \sin \varphi$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Primjerice, elipsa

$\mathcal{E} \dots x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$,
je glatka jednostavno zatvorena krivulja, dok je astroida

$$\mathcal{A} \dots x = a \cos^3 \varphi, y = a \sin^3 \varphi, \varphi \in [0, 2\pi],$$

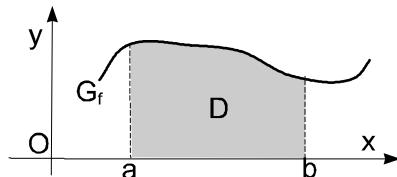
po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja. (Uvjetu $(x')^2 + (y')^2 \neq 0$ nije udovoljeno u točkama $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$.) \square

NAPOMENA 1.25 (Glatkoj) krivulji se može pridijeliti više (glatkih) parametrizacija. Npr. kružnici $\mathcal{K} \dots x^2 + y^2 = 4$ su $x = 2 \cos(nt)$, $y = 2 \sin(nt)$, $t \in [0, \frac{2\pi}{n}]$, parametarske jednadžbe za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nije teško dokazati da, za svaki luk \widehat{AB} , $A \neq B$, svaka parametrizacija čuva rub, tj. $r[\{a, b\}] = \{A, B\}$ (premda nije nužno $r(a) = A$ i $r(b) = B$).

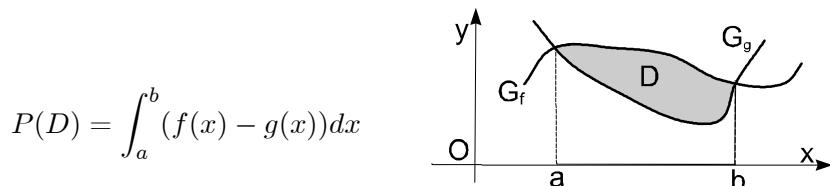
NAPOMENA 1.26 "Dodavanjem jedne dimenzije" se Definicija 1.24 prirodno proširuje na definiciju prostorne krivulje.

(a) Ploština ravninskog lika (kvadratura).

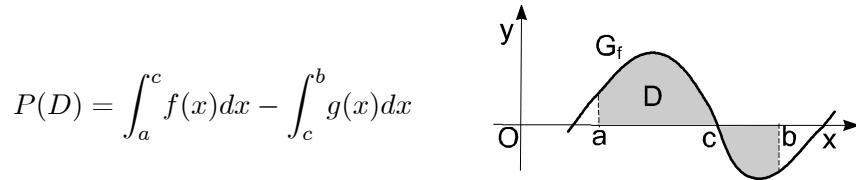
Pokazali da se određeni integral $\int_a^b f(x)dx$, f neprekidna i $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$, smije interpretirati kao ploština pseudotrapeza što ga određuje krivulja $y = f(x)$ nad segmentom $[a, b]$.



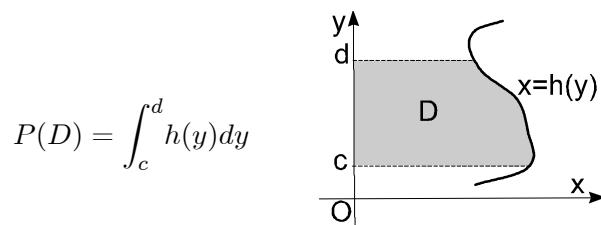
Ako je ravninski lik omeđen zatvorenom krivuljom ili se prostire i na donju poluravninu, onda za izračunavanje njegove ploštine rabimo dva ili više određenih integrala, tj. "snalazimo se" od slučaja do slučaja. Primjerice, ploština ravninskog lika D na crtežu dolje jest



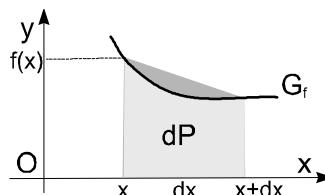
dok za ploštinu ravninskoga lika D na ovoj skici treba staviti



Kad je krivulja zadana "inverznom" funkcijom, tj. jednadžbom $x = h(y)$, $y \in [c, d]$ (v. crtež dolje)), ploština pripadnoga pseudotrapeza D se izračuna po formuli



NAPOMENA 1.27 Označimo li u formuli za ploštinu, $P(D) = \int_a^b f(x)dx$, umnožak $f(x)dx$ kao dP , smijemo pisati $P(D) = \int_{[a,b]} dP$. Geometrijski se broj dP smije interpretirati kao ploština "infinitezimalnog" ("neizmjerno malog") pseudotrapeza nad segmentom $[x, x + dx]$, koji se onda smije aproksimirati trapezom s osnovicama $f(x)$ i $f(x) + \Delta f(x)$ i visinom dx (v. crtež). Zaista,

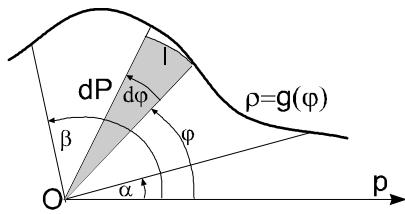


$$\frac{f(x) + (f(x) + \Delta f(x))}{2} dx = f(x)dx + \frac{\Delta f(x)dx}{2} \approx f(x)dx = dP$$

pri čemu smo umnožak $\Delta f(x)dx$ dvaju neizmjerno malih brojeva zanemarili u zbroju s $f(x)dx$. Stoga se o $dP = f(x)dx$ govori kao o "ploštinskom elementu" ravninskoga lika D . "Zbrajanjem" (tj. integriranjem) svih ploštinskih elemenata nad segmentom $[a, b]$ dobivamo traženu ploštinu $P(D)$. Na isti način ćemo, poslije, svaki podintegralni izraz pomoću kojega izračunavamo ploštinu (duljinu, obujam (volumen), ...) zvati analognim imenom.

Često se formalnim izračunavanjem tih "elemenata" vrlo lako dolazi do korisnih formula za izračunavanje traženih veličina. (Ipak, ispravnost tako dobivene formule treba potvrditi korektnim dokazom!)

Neka je ravninska krivulja Γ zadana u polarnim koordinatama jednadžbom $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha_0, \beta_0]$.



Izračunajmo ploštinu pseudotrokuta određenoga krivuljom Γ i pravcima $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$. Za "ploštinski element" uzimamo pripadni kružni isječak od φ do $\varphi + d\varphi$ polumjera $g(\varphi)$, tj.

$$dP = \frac{l\rho}{2} = \frac{\rho \cdot d\varphi \cdot \rho}{2} = \frac{[g(\varphi)]^2 d\varphi}{2},$$

gdje su l i ρ opće oznake, redom, za lučnu duljinu i polumjer. Slijedi

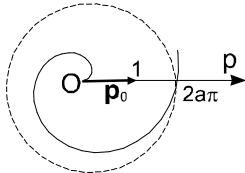
$$P(D) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\varphi)]^2 d\varphi. \quad (18)$$

Isti rezultat bismo dobili i strogim izvodom, tj. pomoću pripadnih donjih i gornjih suma:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \leq P(D) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1})$$

za svaki rastav $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ segmenta $[\alpha, \beta]$ (pod pretpostavkom da je funkcija $g^2|_{[\alpha, \beta]}$ integrabilna!).

PRIMJER. Izračunajmo ploštinu ravninskog lika D omeđenoga polarnom osi i prvim "zavojem" Arhimedove spirale $\rho = a\varphi$, $a > 0$.



$$P(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3 a^2}{3}. \quad \square$$

(b) **Duljina ravninskog luka (rektifikacija).**

Neka je ravninski luk $\Gamma \equiv \widehat{AB}$ (dopuštamo i $B = A$) zadan parametarskim jednadžbama $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, pri čemu je $A = (\phi(a), \psi(a))$ i $B = (\phi(b), \psi(b))$. Označimo s $\mathcal{D} = \mathcal{D}([a, b])$ skup svih rastava segmenta $[a, b]$. Bijekcija (do na rub) $r : [a, b] \rightarrow \widehat{AB}$, $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$, pridružuje svakom rastavu $D = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{D}$ točkowni skup $\{M_0, \dots, M_n\}$ na Γ , $M_0 = A = r(t_0 = a)$, \dots , $M_n = B = r(t_n = b)$. Točke M_i dijele luk Γ na n podlukova $\widehat{M_{i-1}M_i}$, $i = 1, \dots, n$. Spojimo li svaki par susjednih točaka, M_{i-1} i M_i , dužinom, dobivamo poligonalnu crtu "upisanu" luku Γ . Pridijelimo sada svakom rastavu D broj

$$L(r; D) = \sum_{i=1}^n d(M_{i-1}, M_i),$$

pri čemu $d(M_{i-1}, M_i)$ označuje duljinu pripadne dužine, tj. $\| \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \|$.

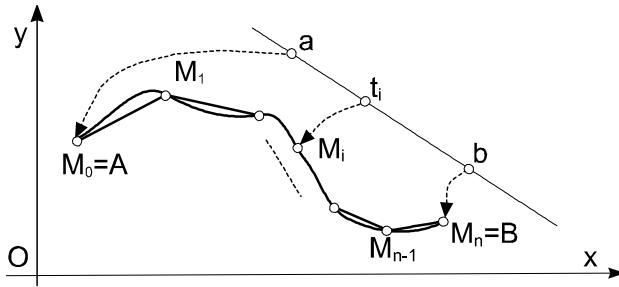
DEFINICIJA 1.28 Reći ćemo da ravninski luk $\Gamma \equiv \widehat{AB}$, zadan jednadžbom $r : [a, b] \rightarrow \widehat{AB}$, $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$, $t \in [a, b]$, ima duljinu (ili da je rektifikabilan), ako je skup $\{L(r; D) \mid \mathcal{D} = \mathcal{D}([a, b])\} \subseteq \mathbb{R}$ omeđen. Tada broj $\sup\{L(r; D) \mid \mathcal{D} = \mathcal{D}([a, b])\}$ nazivamo duljinom luka Γ i označujemo s $L(\Gamma)$. (Treba napomenuti da ova definicija nije posve korektna! Naime, trebalo bi prije dokazati da promatrani supremum ne ovisi o odabranoj parametrizaciji r , što bi nas odvelo izvan zadanih okvira.)

Usredotočimo se sada na efektivno izračunavanje duljine po dijelovima glatkog ravninskog luka.

TEOREM 1.29 Neka je $\Gamma \equiv \widehat{AB}$ po dijelovima glatki ravninski luk zadan pripadnom parametrizacijom $r : [a, b] \rightarrow \Gamma$, $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$, $t \in [a, b]$. Tada je njegova duljina

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (19)$$

DOKAZ. Po Definiciji 1.24, funkcije $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ su neprekidno derivabilne svuda osim, možda, u konačno mnogo točaka i pritom je $[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$. Neka je $D = \{t_0, \dots, t_n\}$ bilo koji rastav od $[a, b]$ i neka je $M_i = r(t_i) \equiv (x_i, y_i)$, $i = 0, \dots, n$, $M_0 = A$, $M_n = B$ (v. crtež).



Po Definiciji 1.28, rastavu D pridjeljujemo broj $L(r; D)$,

$$\begin{aligned} 0 \leq L(r; D) &= \sum_{i=1}^n d(M_{i-1}, M_i) = \\ &\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \\ &\sum_{i=1}^n \sqrt{(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2} \stackrel{\text{(T.??)}}{=} \\ &\sum_{i=1}^n \sqrt{[\phi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})]^2 + [\psi'(\tilde{\tau}_i)(t_i - t_{i-1})]^2} = \\ &\sum_{i=1}^n \sqrt{[\phi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tilde{\tau}_i)]^2}(t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

pri čemu su $\tau_i, \tilde{\tau}_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Neka je $m_{\phi'} = \min\{|\phi'(t)| \mid t \in [a, b]\}$, a $M_{\phi'} = \max\{|\phi'(t)| \mid t \in [a, b]\}$, te neka su slično definirani i brojevi $m_{\psi'}$ i $M_{\psi'}$. (Svi oni postoje jer su funkcije ϕ' i ψ' , pa onda i $|\phi'|$ i $|\psi'|$ neprekidne na segmentu $[a, b]$.) Slijedi da je

$$\begin{aligned} L(r; D) &\leq \sum_{i=1}^n \sqrt{M_{\phi'}^2 + M_{\psi'}^2}(t_i - t_{i-1}) = \\ &\sqrt{M_{\phi'}^2 + M_{\psi'}^2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = (b - a) \sqrt{M_{\phi'}^2 + M_{\psi'}^2}, \end{aligned}$$

što znači da je skup $\{L(r; D) \mid D \in \mathcal{D}([a, b])\} \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ omeđen, pa po Definiciji 1.28 luk Γ ima duljinu $L(\Gamma) = \sup\{L(r; D) \mid D \in \mathcal{D}([a, b])\}$. Posve slično se može pokazati da je $(b - a) \sqrt{m_{\phi'}^2 + m_{\psi'}^2}$ donja međa promatranoga skupa. Dokažimo da se traženi supremum može izračunati po formuli (19)! Pretpostavimo, na trenutak, da je luk Γ gladak. Odaberimo po volji točku $M_t = (\phi(t), \psi(t))$ na Γ , $t \in [a, b]$, pa promatrajmo "podluk" \widehat{AM}_t i njegovu duljinu označimo s $L(t)$. (Lako se vidi da svaki "podluk" ima duljinu čim luk ima duljinu.) Nadalje, za po volji mali $\Delta t > 0$, $t + \Delta t \in [a, b]$, promatrajmo točku $M_{t+\Delta t}$ na Γ . Rabeći oznaće za priraste, smijemo pisati $L(t + \Delta t) = L(t) + \Delta L(t)$ pri čemu $\Delta L(t)$ označuje lučnu duljinu za $\widehat{M_t M_{t+\Delta t}}$. Označimo, jednostavnosti radi, minimume i maksimume od $|\phi'|$ i $|\psi'|$ na $[t, t + \Delta t]$ opet s $m_{\phi'}$, $M_{\phi'}$, $m_{\psi'}$ i $M_{\psi'}$. Po prije dokazanom slijedi

$$\Delta t \sqrt{m_{\phi'}^2 + m_{\psi'}^2} \leq \Delta L(t) \leq \Delta t \sqrt{M_{\phi'}^2 + M_{\psi'}^2}, \quad \text{tj.}$$

$$\sqrt{m_{\phi'}^2 + m_{\psi'}^2} \leq \frac{\Delta L(t)}{\Delta t} \leq \sqrt{M_{\phi'}^2 + M_{\psi'}^2}.$$

Budući da su funkcije $|\phi'|$ i $|\psi'|$ neprekidne, to je $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |m_{\phi'}| = |\phi'(t)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |M_{\phi'}|$ i $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |m_{\psi'}| = |\psi'(t)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |M_{\psi'}|$. Posve slično se zaključuje na segmentu $[t - \Delta t, t]$ za $t \in \langle a, b \rangle$. Prema tomu,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L(t)}{\Delta t} = \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}, \quad \text{tj.} \quad L'(t) = \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}.$$

Primijetimo da je $L(0) = 0$, pa Teoremu 1.18 povlači

$$L(t) = \int_a^t \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Budući da je $M_b = B$, to je $L(\Gamma) = L(b)$ pa je u slučaju glatke krivulje teorem dokazan. Ako je krivulja po dijelovima glatka, onda je izvod za formulu (19) "problematičan" u najviše konačno točaka, a to, kao što znamo, ne narušava valjanost dobivene integralne formule. (Smije se reći i da je duljina po dijelovima glatke krivulje jednaka (konačnom) zbroju duljina svojih maksimalnih glatkih dijelova.) ■

Pozivajući se na prijašnji dogovor (v. Napomenu 1.27), smijemo "podluk" nad segmentom $[t, t + dt]$ smatrati "lučnim elementom" i pisati

$$dL = \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Ako je ravninski luk Γ zadan jednadžbom $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, pri čemu je funkcija f neprekidno derivabilna, onda iz parametrizacije $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$, dobivamo

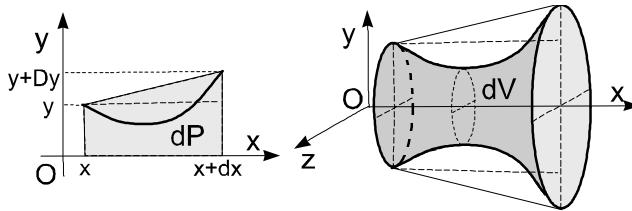
$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (20)$$

Ako je, pak, luk Γ zadan (jednadžbom) u polarnim koordinatama $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, g neprekidno derivabilna, onda parametrizacija $x = g(\varphi) \cos \varphi$, $y = g(\varphi) \sin \varphi$, daje $(x')^2 + (y')^2 = [g(\varphi)]^2 + [g'(\varphi)]^2$. Slijedi,

$$L(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[g(\varphi)]^2 + [g'(\varphi)]^2} d\varphi. \quad (21)$$

(c) Obujam rotacijskog tijela (kubatura).

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i nenegativna funkcija. Tada graf G_f posve određuje pseudotrapez nad segmentom $[a, b]$. Vrtnjom oko x -osi taj pseudotrapez oblikuje geometrijsko tijelo koje nazivamo **rotacijskim tijelom**.



Za dostatno mali dx , pripadni njegov dio određen segmentom $[x, x + dx] \subseteq [a, b]$ aproksimirat ćemo krnjim stošcem visine dx i baznih polumjera $f(x)$ i $f(x + dx) = f(x) + \Delta f(x)$ (v. crtež). Za pripadni "volumenski element" tada dobivamo:

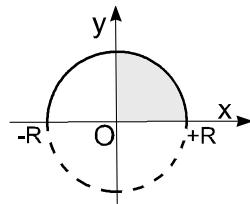
$$\begin{aligned} dV &= \frac{\pi dx}{3} \left[(f(x))^2 + f(x)(f(x) + \Delta f(x)) + (f(x) + \Delta f(x))^2 \right] = \\ &= \frac{\pi dx}{3} \left[3(f(x))^2 + 3f(x) \cdot \Delta f(x) + (\Delta f(x))^2 \right] \approx \pi [f(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

gdje smo pribrojnike $3f(x) \cdot \Delta f(x)$ i $(\Delta f(x))^2$ ispustili jer su zanemarivo mali prema $3f(x)^2$. (Ovo povlači da smo za promatrani "volumenski element" smjeli odabrati i valjak visine dx i baznog polumjera $f(x)!$) Prema tomu, traženi obujam (zapremina) rotacijskoga tijela jest

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (22)$$

PRIMJER. Izračunajmo kuglinu zapreminu.

Svaku kuglu smijemo smatrati rotacijskim tijelom, pri čemu podrazumijevamo da se odgovarajući polukrug vrti oko svoga promjera. Za rješenje ove zadaće, promatrajmo kružnicu $K \dots x^2 + y^2 = R^2$. Dostatno je promatrati samo funkciju $x \mapsto f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0, R]$ (pripadnu četvrtinu kruga, v. crtež).



Po formuli (22) dobivamo

$$V = 2 \cdot \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}. \quad \square$$

Ako je krivulja Γ zadana parametarskim jednadžbama $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, i ako je $\psi \geq 0$ i ϕ neprekidno derivabilna, onda je obujam pripadnoga rotacijskog (oko x -osi, nad $[a, b]$) tijela dan formulom (izravno iz (22))

$$V = \pi \int_a^b [\psi(t)]^2 \phi'(t) dt. \quad (23)$$

Ako je, pak, krivulja Γ zadana polarnom jednadžbom $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, g neprekidno derivabilna, onda parametrizacija $x = g(\varphi) \cos \varphi$, $y = g(\varphi) \sin \varphi$, daje $dx = (g'(\varphi) \cos \varphi - g(\varphi) \sin \varphi) d\varphi$. Slijedi,

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} [g(\varphi)]^2 [g'(\varphi) \cos \varphi - g(\varphi) \sin \varphi] \sin^2 \varphi d\varphi. \quad (23)'$$

Napokon, po analgiji s formulom (23), za obujam pripadnoga rotacijskog tijela što nastaje vrtnjom oko y -osi dobivamo

$$V_y = \pi \int_a^b [\phi(t)]^2 \psi'(t) dt = \pi \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} (\phi \psi^{-1})^2(y) dy. \quad (24)$$

(d) Ploština rotacijske plohe (komplanacija).

Pod pretpostavkama iz prethodnoga razmatranja (u (c)), promatrajmo sada samo plašt (bez osnovica) pripadnoga rotacijskog tijela, tzv. **rotacijsku plohu**. Da bismo joj izračunali ploštinu P , izračunajmo prvo njezin "plošinski element" dP . Opet ćemo za aproksimiranje uzeti krnji stožac, tj. njegov plašt. Dakle, radi se o plaštu krnjega stošca baznih polumjera $f(x)$ i $f(x) + \Delta f(x)$ i visine dx . Njegova izvodnica je $s = \sqrt{(dx)^2 + (\Delta f(x))^2}$ pa je

$$dP = \pi(2f(x) + \Delta f(x))ds \approx 2\pi f(x)ds,$$

pri čemu smo pribrojnik $\Delta f(x)ds$ ispustili jer zanemariv prema $2f(x)ds$.

Sada u skladu s Napomenom 1.27 i koristeći (20) dobivamo

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (25)$$

U slučaju po dijelovima glatkog luka zadanog odgovarajućom parametrizacijom $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, dobivamo ($f(x) \geq 0$)

$$P = 2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \quad (26)$$

a ako je krivulja zadana u polarnim koordinatama, tj. $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, onda je

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |g(\varphi) \sin \varphi| \sqrt{[g(\varphi)]^2 + [g'(\varphi)]^2} d\varphi. \quad (27)$$

PRIMJER. Izračunajmo loptinu (sferinu) ploštinu. I ovdje je dostatno promatrati kružničin dio $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0, R]$, i primijeniti formulu (25). Nu, budući da je taj račun mnogo jednostavniji u polarnim koordinatama, primijenit ćemo formulu (27). (Polu)kružnica ima tada jednadžbu $\rho = R$, $\varphi \in [0, \pi]$, pa je tražena ploština

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} R \sin \varphi \sqrt{R^2 + 0^2} d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = 4\pi R^2. \quad \square$$

(e) Težište ravninskog lika.

Promatrajmo pseudotrapez određen neprekidnom i nenegativnom funkcijom $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ne pojašnjavajući detaljnije fizičke razloge, recimo da se momenti (s obzirom na x -os i y -os) toga lika definiraju izrazima

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx; \quad M_y = \int_a^b x f(x) dx.$$

To povlači da se koordinate njegova težišta ("masenoga središta") $T = (\xi, \eta)$, $\xi = \frac{M_y}{P}$ i $\eta = \frac{M_x}{P}$, mogu izračunati po formulama

$$\xi = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}; \quad \eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}. \quad (28)$$

PRIMJER. Odredimo težište za polukrug.

Jednostavnosti radi, neka je polukrug određen (polu)kružnicom $x \mapsto y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$. Zbog simetričnosti je $\xi = 0$. Da bismo izračunali η , izračunajmo prvo moment M_x .

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \frac{2}{3} R^3.$$

Budući da je pripadna ploština $P = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}\pi R^2$, to je $\eta = \frac{4}{3\pi} \cdot R \approx 0,4244R$. \square

Pridodajemo, bez dokaza, i odgovarajuće formule za momente u polarnim koordinatama:

$$M_x = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\varphi)]^3 \sin \varphi d\varphi; \quad M_y = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\varphi)]^3 \cos \varphi d\varphi.$$

Pomoću njih i (18) se lako izračunavaju težišne koordinate ravninskih likova zadanih u polarnom sustavu.

NAPOMENA 1.30 Formule (28) su uporabljive i za određivanje težišta tvarnih tijela koja su *homogena* (jednolike gustoće) i *relativno tanka*, tj. *kojima* je jedna dimenzija ("debljina") zanemariva prema drugim dvjema ("dužini" i "širini"). To su, primjerice, raznovrsne tanke ploče, ravni limovi i sl. Naime, masa takvog tijela je (kao što znamo iz fizike) razmjerne ploštini pripadnog lika pa se isti faktor (gustoća) pojavljuje u brojnicima i nazivnicima ne mijenjajući formule (28). Primjetimo, nadalje, da množeći formule (28) faktorom $2\pi P$ i primjenjujući formulu (22) dobivamo tzv. *Guldinov teorem*

$$2\pi\eta P = V,$$

tj. obujam odgovarajućega rotacijskog (oko x -osi) tijela jednak je umnošku pripadne ploštine i opsega kružnice što ju opisuje težište.

1.2.5 ZADACI ZA VJEŽBU

1 Zapišite kao određeni integral limese sumu:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^3 \sin x_i \Delta x, x \in [0, \pi];$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [(x_i^*)^2 - x_i^*] \Delta x, x \in [0, 1];$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{(\bar{x}_i)^2} \Delta x, x \in [0, 4];$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_{i-1} e^{x_{i-1}} \Delta x, x \in [0, 1].$

1. Aproksimirajte integral $\int_0^4 (x^2 - 3x) dx$ sumama L_8 , D_8 i M_8 . Ilustrirati slikom.

2. Koristeći $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$ izračunajte integrale

- (a) $\int_0^2 (2 - x^2) dx;$
- (b) $\int_0^5 (1 + 2x^3) dx.$

3. Nacrtatajte graf funkcije $f(x) = \begin{cases} 4 - \frac{1}{2}x, & x \in [0, 2) \\ -\sqrt{4 - (x-4)^2}, & x \in [2, 6] \\ x-7, & x \in [6, 7] \end{cases}$ i izračunavanjem površina odgovarajućih ravninskih likova izračunati određene integrale:

- (a) $\int_0^2 f(x) dx;$

- (b) $\int_2^6 f(x)dx;$
 (c) $\int_0^7 f(x)dx.$
4. Ako je $\int_0^1 f(x)dx = 2$, $\int_0^4 f(x)dx = -6$, $\int_3^4 f(x)dx = 1$ izračunati $\int_1^3 f(x)dx.$
5. Izračunavanjem površina odgovarajućih ravninskih likova izračunajte integrale:
- (a) $\int_1^3 (1 + 2x)dx;$
 (b) $\int_{-3}^0 (1 + \sqrt{9 - x^2}) dx;$
 (c) $\int_2^2 (1 - |x|)dx;$
 (d) $\int_0^3 |3x - 5| dx.$
6. Nacrtajte površine koju prestavljaju integrali:
- (a) $\int_0^{27} \sqrt[3]{x}dx;$
 (b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin xdx;$
 (c) $\int_{-1}^2 |x - x^2| dx.$
7. Izračunajte integrale:
- (a) $\int_{-1}^0 (2x - e^x)dx;$
 (b) $\int_1^2 \frac{t^6 - t^2}{t^4} dt;$
 (c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \vartheta d\vartheta;$
 (d) $\int_{-e^2}^{-e} \frac{3}{x} dx;$
 (e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$
 (f) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{6}{1 + x^2} dx;$
 (g) $\int_{-2}^3 |x^2 - 1| dx;$
 (h) $\int_{\ln 3}^{\ln 6} 8e^x dx.$

8. Nacrtajte funkciju $f(x) = \int_0^x (1+t^2)dt$.

9. Izračunajte derivaciju funkcije $f(x)$:

$$(a) f(x) = \int_{-1}^x (t^2 - 1)^{20} dt;$$

$$(b) f(x) = \int_x^2 \cos t^2 dt;$$

$$(c) f(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u-1}{u+1} du.$$

10. Izračunajte derivaciju funkcije $g(x)$:

$$(a) g(x) = \int_2^{\frac{1}{x}} \sin^4 t dt;$$

$$(b) g(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{s^2}{s^2 + 1} ds.$$

11. Neka je $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$ i $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

(a) Prikažte $g(x)$ na način kao i $f(x)$;

(b) Skicirajte grafove od f i g ;

(c) Gdje je f diferencijabilna, a gdje g ?

12. Izračunajte određene integrale:

$$(a) \int_0^1 (2x+1)^{100} dx;$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx;$$

$$(c) \int_1^2 x\sqrt{x-1} dx;$$

$$(d) \int_1^9 \frac{1}{x^2} \sqrt{1+\frac{1}{x}} dx;$$

$$(e) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2} dx;$$

$$(f) \int_0^1 t^2 2^{-t^3} dt;$$

$$(g) \int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx;$$

$$(h) \int_0^1 \frac{4x^2}{2x+1} dx;$$

$$(i) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \sin x}{1+x^6} dx.$$

13. Izračunajte određene integrale:

- (a) $\int_0^1 xe^{-x} dx;$
 (b) $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx;$
 (c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx;$
 (d) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx;$
 (e) $\int_1^e \cos(\ln x) dx;$
 (f) $\int_0^1 (x^2 - 1)e^x dx;$
 (g) $\int_0^4 \ln \sqrt{x} dx;$
 (h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx.$

14. Ako je f neprekidna funkcija i vrijedi $\int_0^9 f(x) dx = 10$ izračunajte $\int_0^3 xf(x^2) dx.$

15. Dokažite:

- (a) Ako je f neprekidna funkcija na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ tada vrijedi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$
 (b) Ako je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ tada vrijedi $\int_a^b f(a + b - x) dx = \int_a^b f(x) dx;$
 (c) Ako je f neprekidna funkcija na \mathbb{R} tada vrijedi $\int_a^b f(x + c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx;$
 (d) Ako je f neprekidna funkcija na \mathbb{R} tada vrijedi $\int_a^b f(-x) dx = \int_{-b}^{-a} f(x) dx;$
 (e) Ako su a i b pozitivni brojevi tada vrijedi $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx.$

16. Koji je od integrala

$$\int_1^\infty x^4 e^{-x^4} dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} dx, \int_0^2 \frac{1}{2x-1} dx$$

nepravi i zašto?

17. Odredite koji je nepravi integral konvergentan i izračunajte ga:

(a) $\int_2^\infty \frac{1}{(x+3)^{\frac{3}{2}}} dx;$

- (b) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{(2x-3)^2} dx;$
 (c) $\int_{-\infty}^{\infty} (2x^2 - x + 3) dx;$
 (d) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx;$
 (e) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx;$
 (f) $\int_0^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx;$
 (g) $\int_{-\infty}^3 \frac{1}{x^2 + 9} dx;$
 (h) $\int_0^{\infty} \cos x dx.$
18. Koristeći poredbeni kriterij ustanovite konvergenciju nepravih integrala:
- (a) $\int_1^{\infty} \frac{1 + e^{-x}}{x} dx;$
 (b) $\int_1^{\infty} \frac{\cos^2 x}{1 + x^2} dx;$
 (c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x + e^{2x}} dx;$
 (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x \sin x} dx.$
19. Izračunajte aproksimacije trapeznom formulom T_{10} i Simpsonovom formulom S_{10} integrala $\int_0^1 e^x dx$ i odrediti pogreške E_T i E_S . Koiki mora biti n da T_n aproksimira integral s točnošću 0.00001?
20. Izračunajte aproksimacije:
- (a) L_6, D_6 i M_6 integrala $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx;$
 (b) M_8 i T_8 integrala $\int_0^4 \sqrt{x} \sin x dx;$
 (c) $L_{10}, D_{10}, M_{10}, T_{10}$ i S_{10} integrala $\int_0^1 xe^x dx.$
21. Izračunajte površinu ravninskog lika omeđenog sa:
- (a) $y = x^2 + x + 1, x = 0, x = 1, y = 0;$
 (b) $x = 6 - y - y^2, x = 0;$
 (c) $y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x}, x = 0, y = 0.$
22. U presjećistima pravca $x - y + 1 = 0$ i parabole $y = x^2 - 4x + 5$ povučene su tangente na parabolu. Izračunajte površinu lika koji određuju te tangente i parabola. Nacrtajte sliku.
23. Izračunajte površinu:

- (a) lemniskate $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$;
 (b) kardioide $\rho = a(1 + \cos \varphi)$;
 (c) $\rho = a \cos 3\varphi$.
24. Izračunajte površinu lika koji određuje:
 (a) astroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;
 (b) svod cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ i x -os.
25. Izračunajte duljinu luka krivulje:
 (a) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t \in [0, \pi]$;
 (b) $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $t \in [0, 2]$;
 (c) $x = t^3$, $y = t^4$, $t \in [0, 1]$.
26. Izračunajte duljinu luka krivulje:
 (a) $y = \ln \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$;
 (b) $y = \frac{1}{2}e^{2x}$, $x \in [0, 1]$;
 (c) $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, $x \in [0, \frac{a}{2}]$.
27. Izračunajte duljinu luka krivulje:
 (a) kardioide $\rho = a(1 - \cos \varphi)$;
 (b) $\rho = \sin 3\varphi$.
28. Izračunajte volumen rotacijskog tijela:
 (a) $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$, rotacija oko x -osi;
 (b) $y = -x^2 + 2$, $y = |x|$, rotacija oko x -osi;
 (c) $y^2 = x$, $x = 2y$, rotacija oko y -osi;
 (d) $y = x^4$, $y = 2$, rotacija oko pravca $y = 2$.

Poglavlje 2

PROSTOR \mathbb{R}^n

Vektorski prostor \mathbb{R}^n je najvažniji primjer n -dimenzionalnog (realnog) vektorskog prostora jer je svaki drugi njemu izomorfni. Točke (vektore) iznačavat ćemo velikim slovima. Ukoliko je $T \in \mathbb{R}^2$ oznaka će biti standardna $T = (x, y)$, i sa standardnim nazivljem da je x apscisa, a y ordinata točke T . Isto tako, ukoliko je $T = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, prva i druga koordinata su apscisa i opredinata, a z je aplikata točke T . Ukoliko je $T \in \mathbb{R}^n$ pisat ćemo $T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nepomenimo da su operacije zbrajanja i množenja sa skalarom na vektorskom prostoru \mathbb{R}^n standardno definirane:

$$\begin{aligned} P+Q &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n), \\ \lambda P &= \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

U ovomu odjeljku ćemo razmatrati strukturu euklidskih prostora \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. Njihovu vektorsku strukturu ćemo nadopuniti unitarnom strukturom iz koje se onda izvode ona normirana te metrička i topološka. To će omogućiti da se poslije dobro definiraju i temeljito istraže konvergencija i neprekidnost, što je prva zadaća matematičke analize.

2.1 n -DIMENZIONALNI EUKLIDSKI PROSTOR

Neka su $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ točke (vektori) iz \mathbb{R}^n . Definiramo **skalarni produkt** $\langle P | Q \rangle$ na način:

$$\langle P | Q \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \tag{1}$$

Nije teško provjeriti da je $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zaista skalarni produkt, tj. da ta funkcija udovoljava uvjetima:

- (U1) $\langle P | P \rangle \geq 0;$
- (U2) $\langle P | P \rangle = 0 \Leftrightarrow P = 0;$
- (U3) $\langle P | Q \rangle = \langle Q | P \rangle;$
- (U4) $\langle P + Q | T \rangle = \langle P | T \rangle + \langle Q | T \rangle;$
- (U5) $\langle \lambda P | Q \rangle = \lambda \langle P | Q \rangle;$

gdje su $P, Q, T \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. (Svojstva (U1) i (U2) nazivamo **pozitivnom definitnošću**, (U3) - **simetrijom**, (U4) - **aditivnošću**, a (U5) **homogenošću**).

Napomenimo da uređeni par $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ vektorskog prostora X i funkcije skalarnog produkta $\langle \cdot | \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo **unitarnim prostorom**.

Unitarni prostor $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sa skalarnim produkтом (1) ćemo jednostavno označavati sa \mathbb{R}^n .

Reći ćemo da je u unitarnom prostoru \mathbb{R}^n točka (vektor) P **okomita** na točku (vektor) Q , ako je $\langle P | Q \rangle = 0$. Budući da je $\langle P | Q \rangle = \langle Q | P \rangle$, smijemo pritom govoriti da su točke (vektori) P i Q međusobno okomite ili **ortogonalne**. Očito je, dakako, da je $\langle P | O \rangle = 0 = \langle O | Q \rangle$ za svaki $P, Q \in \mathbb{R}^n$ (gdje je $O = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ - neutralni element za zbrajanje).

Poznato je da svako skalarno množenje inducira **normu**, tj. funkciju $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sa ovim svojstvima

- (N1) $\|P\| \geq 0;$
- (N2) $\|P\| = 0 \Leftrightarrow P = O;$
- (N3) $\|\lambda P\| = |\lambda| \cdot \|P\|, \lambda \in \mathbb{R};$
- (N4) $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|.$

Svojstva (N1) i (N2) nazivamo **pozitivnom definitnošću**, (N3) - **homogenošću**, dok je (N4) **trokutna nejednakost**. Broj $\|P\|$ nazivamo **normom točke (vektora)** $P \in \mathbb{R}^n$. Ako je $\|P\| = 1$ kažemo da je vektor x **normiran**.

Napomenimo da uređeni par $(X, \| \cdot \|)$, gdje je $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ norma na X (funkcija koja ima svojstva (N1) do (N4), nazivamo **normiranim prostorom**.

Pokažimo da je funkcija $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ određena pravilom

$$P = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|P\| = \sqrt{\langle P | P \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2} \quad (2)$$

zaista norma na \mathbb{R}^n .

Očito je da svojstva (U1) i (U2) povlače (N1) i (N2) za funkciju $\| \cdot \|$. Dokažimo da ta funkcija udovoljava i uvjetu (N3)! Neka su $P \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ bilo koji. Po (U3) i (U5) dobivamo

$$\|\lambda P\|^2 = \langle \lambda P | \lambda P \rangle = \lambda^2 \langle P | P \rangle = |\lambda|^2 \cdot \|P\|^2,$$

dakle, $\|\lambda P\| = |\lambda| \cdot \|P\|$.

Da bismo dokazali da je funkcija $\| \cdot \|$ norma na \mathbb{R}^n , preostaje provjeriti uvjet (N4).

U tu svrhu, najprije dokazujemo da za polazno skalarno množenje $\langle \cdot | \cdot \rangle$ i funkciju $\| \cdot \|$ vrijedi tzv. **Schwarzova nejednakost**:

$$|\langle P | Q \rangle| \leq \|P\| \cdot \|Q\|. \quad (3)$$

Ako je $P = O$, uvjet (U4) povlači $\langle O | Q \rangle = 0$, pa je, po dokazanomu (N1), pripadna nejednakost (3) istinita. Neka su $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $P \neq O$, i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Po (U3), (U4) i (U5) slijedi

$$\langle \lambda P + \mu Q | \lambda P + \mu Q \rangle = \lambda^2 \langle P | Q \rangle + 2\lambda\mu \langle P | Q \rangle + \mu^2 \langle Q | Q \rangle.$$

Odaberemo li posebice $\lambda = \langle P | Q \rangle$ i $\mu = -\langle P | P \rangle$, dobivamo

$$\langle \lambda P + \mu Q | \lambda P + \mu Q \rangle = \langle P | P \rangle \cdot (\langle P | P \rangle \cdot \langle Q | Q \rangle) - \langle P | Q \rangle^2.$$

Budući da je $\langle P | P \rangle = \|P\|^2 > 0$, to je zbog (U1)

$$\langle P | P \rangle \cdot \langle Q | Q \rangle - \langle P | Q \rangle^2 \geq 0.$$

Slijedi

$$\langle P | Q \rangle^2 \leq \|P\|^2 \cdot \|Q\|^2,$$

pa smo Schwarzovu nejednakost (3) dokazali.

Pomoće nje i svojstava skalarnoga množenja dobivamo

$$\|P + Q\|^2 = \langle P + Q | P + Q \rangle = \langle P | P \rangle + 2 \langle P | Q \rangle + \langle Q | Q \rangle =$$

$$\|P\|^2 + 2 \langle P | Q \rangle + \|Q\|^2 \leq \|P\|^2 + 2\|P\| \cdot \|Q\| + \|Q\|^2 = (\|P\| + \|Q\|)^2,$$

što povlači trokutnu nejednakost za funkciju $\| \cdot \|$. Prema tomu, naša funkcija $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest norma na vektorskom prostoru \mathbb{R}^n .

Normirani prostor, tj. uređeni par $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ opet ćemo kratko označavati sa \mathbb{R}^n .

NAPOMENA. Svaki unitarni prostor $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, tj. vektorski prostor X na kojem je zadana funkcija skalarnog produkta, postaje i normirani prostor $(X, \| \cdot \|)$ s normom $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ induciranim skalarnim produktom. Napomenimo da postoje normirani prostori koji nisu unitarni, odnosno, postoje norme koje se ne mogu izvesti ni iz jednog skalarnog množenja.

NAPOMENA. Schwarzova nejednakost (3) vrijedi u svakom normiranom prostoru $(X, \| \cdot \|)$ s normom $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ koju inducira skalarni produkt:

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Ona postaje jednakost u onda i samo onda kad su vektori x i y linearne zavisni, tj. kad je $\lambda x + \mu y = 0$ za neke $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dokažite! Korisna vježba.

Schwarzova nejednakost (3) u normiranom prostoru $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ prelazi u tzv. **Cauchyjevu nejednakost**

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right), \quad (4)$$

pri čemu su $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ bilo koji realni brojevi.

LEMA 2.1 Norma $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ na unitarnom prostoru X udovoljava ovim jednakostima:

- (1) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2);$
- (2) $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$

DOKAZ. Primijetimo da je

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y | x + y \rangle = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2,$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y | x - y \rangle = \|x\|^2 - 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo prvu jednakost, a oduzimanjem drugu jednakost iz Leme 2.1. \blacksquare

NAPOMENA. Prvu jednakost (1) iz Leme 2.1 nazivamo **paralelogramskom jednakostju**.

Važna je i netrivialna ova činjenica: Da bi normirani prostor X bio unitaran treba a i dosta je da na njemu vrijedi paralelogramska jednakost. Pritom se, dakako, skalarno množenje na X definira jednakostju (2).

NAPOMENA. Na vektorskom prostoru \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, možemo definirati i druge norme. Tako funkcijom $\| \cdot \|_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\| \cdot \|_\infty(P) \equiv \|P\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\},$$

(lako se provjeri da je to norma) dobivamo normirani prostor $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_\infty)$. Međutim, taj prostor nije unitaran čim je $n \geq 2$. U njemu, naime, ne vrijedi paralelogramska jednakost. Zaista, ako je $P = (1, 0, \dots, 0)$ i $Q = (0, 1, 0, \dots, 0)$, onda je

$$\|P\|_\infty = 1 = \|Q\|_\infty = \|P - Q\|_\infty = \|P + Q\|_\infty,$$

što ne udovoljava paralelogramskoj jednakosti, pa nema skalarnog množenja na \mathbb{R}^n koje bi proizvelo normu $\| \cdot \|_\infty$.

Isti zaključak vrijedi i za normirani prostor $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_1)$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je

$$\| \cdot \|_1(P) \equiv \|P\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Primijetimo da je u slučaju $n = 1$, tj. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$,

$$\|P\| = \|P\|_\infty = \|P\|_1 = |P|.$$

2.2 METRIČKA I TOPOLOŠKA STRUKTURA EUKLIDSKOG PROSTORA

Pod **metrikom** ili **udaljenošću** na skupu X podrazumijevamo svaku funkciju $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ s ovim svojstvima:

$$(M1) \quad d(x, x) \geq 0;$$

$$(M2) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

- (M3) $d(x, y) = d(y, x);$
(M4) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$

Uvjete (M1) i (M2) nazivamo **pozitivnom definitnošću**, uvjet (M3) - **simetrijom**, dok je (M4) **trokutna nejednakost**. Uređeni par (X, d) tada nazivamo **metričkim prostorom**, a elemente $x \in X$ - točkama metričkoga prostora (X, d) .

Definiramo li na euklidskom prostoru \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, (s euklidskom normom $\|P\| = \sqrt{\langle P | Q \rangle}$ izvedenom iz skalarnoga množenja $\langle P | Q \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$) funkciju $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pravilom

$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad (5)$$

dobivamo za nas najvažniji primjer (\mathbb{R}^n, d) metričkoga prostora. I njega ćemo nazvati **n -dimenzionalnim euklidskim prostorom** i označavati samo sa \mathbb{R}^n . Primijetimo da za $n = 1$ dobivamo metrički prostor \mathbb{R} realnih brojeva s metrikom $d(x, y) = |x - y|$.

Lako se vidi da, općenito, svaka norma proizvodi metriku po pravilu

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Zato se smije reći da je svaki normirani prostor ujedno metrički prostor. Tako pored prethodnoga primjera, norme $\| \cdot \|_\infty$ i $\| \cdot \|_1$ na vektorskomu prostoru \mathbb{R}^n induciraju metričke prostore (\mathbb{R}^n, d_∞) i (\mathbb{R}^n, d_1) . Ovdje je, dakle,

$$d_\infty(P, Q) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n\},$$

$$d_1(P, Q) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Primijetimo da metrika d na skupu X mjeri samo udaljenosti između dviju točaka. No, prirodno se nameće potreba da se osmisli i mjeri i udaljenost od točke $x \in X$ do (nepraznog) skupa $A \subseteq X$ kao i udaljenost od skupa A do skupa $B \subseteq X$. Ti se pojmovi definiraju kako slijedi (uporaba istoga slova d neće stvarati zabunu):

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\};$$

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Definicije su dobre jer su pripadni podskupovi od \mathbb{R} (na desnim stranama) neprazni i omeđeni odozgdol. Očito je $d(x, A) \geq 0$ i $d(A, B) \geq 0$. Nadalje, $x \in A$ ($A \cap B \neq \emptyset$) povlači $d(x, A) = 0$ ($d(A, B) = 0$). Obratno, međutim, ne vrijedi. Primjerice, ako je $(X, d) = \mathbb{R}$, $x = 0$, $A = \mathbb{R}^+$ i $B = \mathbb{R}^-$, onda $x \notin A$ i $A \cap B = \emptyset$, a ipak je $d(x, A) = 0$ i $d(A, B) = 0$.

Reći ćemo da je skup $A \subseteq (X, d)$ **omeđen**, ako postoji $\eta \geq 0$ takav da je skup

$$\{d(a, a') \mid a, a' \in A\} \subseteq [0, \eta] \subseteq \mathbb{R}.$$

(Ekvivalentno je reći da je skup $\{d(a, a') \mid a, a' \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ omeđen u polju realnih brojeva \mathbb{R} , pa se u slučaju $(X, d) = \mathbb{R}$ radi se o istomu pojmu!) Napokon, ako je skup $A \subseteq (X, d)$ omeđen, onda je posve određen broj

$$\text{diam } A = \sup\{d(a, a') \mid a, a' \in A\} \geq 0,$$

tzv. **dijametar skupa** A . Ako A nije omeđen onda stavljamo $\text{diam } A = \infty$.

DEFINICIJA 2.2 Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ bilo koja točka i $r \in \mathbb{R}^+$ bilo koji pozitivan realni broj. Skup

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\} \subseteq X, \quad (6)$$

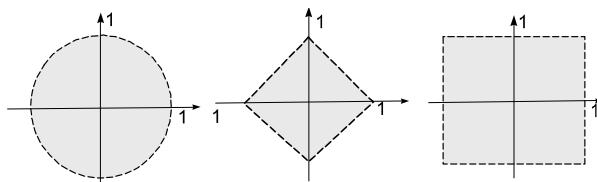
nazivamo **kuglom polumjera r sa središtem u točki x_0** .

Očito je da iz $r_1 \leq r_2$ slijedi $B(x_0, r_1) \subseteq B(x_0, r_2)$.

U metričkom prostoru (\mathbb{R}^n, d) je kugla polumjera r sa središtem u točki $T_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ skup

$$B(T_0, r) = \{T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2} < r\}. \quad (7)$$

Neka čitatelj potvrди da su na crtežu dolje nacrtane kugle $B_2((0, 0), 1)$, $B_\infty((0, 0), 1)$ i $B_1((0, 0), 1)$ u metričkim prostorima (\mathbb{R}^2, d) , (\mathbb{R}^2, d_∞) i (\mathbb{R}^2, d_1) redom.



Primijetimo da se u slučaju $n = 1$ pripadni metrički prostori podudaraju s euklidskim pravcem (\mathbb{R}, d) , $d(x, y) = |x - y|$, pa se i odgovarajuće kugle podudaraju (na crtežu, s intervalom $\langle -1, 1 \rangle$). Na euklidskomu pravcu je svaka kugla neki simetrični interval $\langle x_0 - r, x_0 + r \rangle \subseteq \mathbb{R}$.

DEFINICIJA 2.3 *Reći ćemo da je skup $U \subseteq X$ **otvoren** u metričkom prostoru (X, d) ako je U unija neke množine kugala u prostoru (X, d) .*

Jasno, svaka kugla je otvoren skup. Nadalje, prazni skup \emptyset i cijeli metrički prostor X su očito otvoreni skupovi. O tomu kako lakše prepoznati otvoreni skup govori ovaj teorem:

TEOREM 2.4 *Skup $U \subseteq X$ je otvoren u metričkom prostoru (X, d) točno onda kad za svaku točku $x_0 \in U$ postoji neka kugla $B(x_0, r) \subseteq U$.*

DOKAZ.

\Rightarrow Najprije dokazujemo da navedeni kriterij vrijedi za kugle. Promatrajmo bilo koju kuglu $B(y_0, s)$ u (X, d) i bilo koju točku $x_0 \in B(y_0, s)$. Tada je broj $r \equiv s - d(y_0, x_0) > 0$ pa postoji kugla $B(x_0, r)$ u (X, d) . Za svaku točku $x \in B(x_0, r)$ je $d(x_0, x) < r$ pa je

$$d(y_0, x) \leq d(y_0, x_0) + d(x_0, x) < d(y_0, x_0) + s - d(y_0, x_0) = s.$$

Prema tomu, $x \in B(y_0, s)$, tj. $B(x_0, r) \subseteq B(y_0, s)$.

Neka je sada U otvoreni skup u (X, d) i $x_0 \in U$. Po definiciji postoji kugla $B(y_0, s) \subseteq U$ za koju je $x_0 \in B(y_0, s)$. Prethodno smo dokazali da tada postoji i kugla $B(x_0, r) \subseteq B(y_0, s) \subseteq U$.

\Leftarrow Obratno, neka za svaki $x_0 \in U$ postoji neka kugla $B(x_0, r)$ u (X, d) takva da je $B(x_0, r) \subseteq U$. (Pritom, dakako, polumjer r ovisi o skupu U i točki x_0 , $r = r(U, x_0)$.) Tada je skup U unija (po svim točkama iz U) svih takvih kugala pa je otvoren. ■

TEOREM 2.5 *Neka je $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ množina svih otvorenih skupova $U \subseteq X$ u metričkom prostoru (X, d) . Tada \mathcal{T} udovoljava ovim uvjetima:*

(T1) \mathcal{T} je zatvorena na uniranje, tj.

$$(\forall \mathcal{U} = (U_j, j \in J) \subseteq \mathcal{T}) \quad \bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T};$$

- (T2) \mathcal{T} je zatvorena na konačno presijecanje, tj.
 $((\forall \mathcal{U} = (U_j, j \in J)) \subseteq \mathcal{T}) |J| < \aleph_0 \Rightarrow \bigcap_{j \in J} U_j \in \mathcal{T};$
(T3) $\emptyset, X \in \mathcal{T}.$

DOKAZ. Svojstvo (T3) smo uočili odmah po definiranju.

Neka je $\mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ bilo koja množina otvorenih skupova $U_j \in \mathcal{T}$ u (X, d) . Budući da je svaki U_j unija neke množine kugala, to je i skup $U \equiv \bigcup_{j \in J} U_j$ takvoga oblika pa je otvoren, tj. $U \in \mathcal{T}$. Time smo provjerili uvjet (T1).

Uvjet (T2) je dostatno provjeriti za dva otvorena skupa što se sijeku (dalje indukcijom).

Neka su $U_{1,2} \in \mathcal{T}$ i $x_0 \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Po Teoremu 2.4, dosta je dokazati da postoji neka kugla sa središtem u točki x_0 sadržana u presjeku $U_1 \cap U_2$. Budući da su skupovi U_1 i U_2 otvoreni, to po Teoremu 2.4 postoje kugle $B(x_0, r_1) \subseteq U_1$ i $B(x_0, r_2) \subseteq U_2$. Uzmemo li $r = \min\{r_1, r_2\}$, dobivamo kuglu $B(x_0, r) \subseteq B(x_0, r_i) \subseteq U_i$, $i = 1, 2$, pa je $B(x_0, r) \subseteq U_1 \cap U_2$. ■

Množinu \mathcal{T} svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d) nazivamo **topološkom strukturom** (kraće: **topologijom**) na prostoru (X, d) .

Aksiomatizacijom uvjeta (T1), (T2) i (T3) dolazimo da općenitije klase od one svih metričkih prostora. Nju tvore tzv. topološki prostori.

Topološkim prostorom nazivamo svaki uređeni par (X, \mathcal{T}) što se sastoji od skupa X i množine $\mathcal{T} \subseteq 2^X$ nekih njegovih podskupova sa svojstvima (T1), (T2) i (T3). Množinu \mathcal{T} nazivamo **topološkom strukturom** (kraće: **topologijom**) na prostoru (X, \mathcal{T}) , a podskupove $U \subseteq X$ koji su članovi od \mathcal{T} , $U \in \mathcal{T}$, - **otvorenim skupovima** u prostoru (X, \mathcal{T}) .

Po Teoremu 2.4 slijedi da je svaki metrički prostor (X, d) ujedno topološki prostor (X, \mathcal{T}) , pri čemu je topologija \mathcal{T} dobivena uniranjem kugala u metriči d . Kad god se topološka struktura \mathcal{T} na prostoru (X, \mathcal{T}) može dobiti pomoću kugala u nekoj metriči d na X , govorimo o **metrizabilnom** (topološkom) prostoru (X, \mathcal{T}) . Dakako da postoje topološki prostori koji *nisu* metrizabilni! U buduće ćemo često umjesto (X, \mathcal{T}) , odnosno (X, d) , pisati samo X i govoriti o topološkom, odnosno metričkom, prostoru pretpostavljajući određenu topologiju, odnosno metriku na skupu X .

Euklidski prostori \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, (s metrizabilnom topologijom što ju proizvodi metrika d) bit će za nas najvažniji i kao primjeri topoloških prostora. Zanimljivo je (neka to čitatelj provjeri - korisna vježba) da, za svaki $n \in \mathbb{N}$, (različiti) metrički prostori (\mathbb{R}^n, d) , (\mathbb{R}^n, d_∞) i (\mathbb{R}^n, d_1) induciraju *isti* topološki prostor \mathbb{R}^n . (U ovakvom slučaju se, općenito, kaže da su pripadne metrike **topološki ekvivalentne**.)

Neka je (X, \mathcal{T}) topološki prostor, a $Y \subseteq X$ bilo koji njegov podskup. Tada je množina

$$\mathcal{T}_Y \equiv \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\} \subseteq 2^Y$$

topološka struktura na Y . To je tzv. **nasljeđena** (ili: **relativna topologija**) na podskupu. Topološki prostor (Y, \mathcal{T}_Y) nazivamo **potprostorom** topološkoga prostora (X, \mathcal{T}) .

Primjerice, lako je provjeriti da se, za svaki $m \leq n$, \mathbb{R}^m može smatrati topološkim potprostором od \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$. (Pritom obično točku $T = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ izjednačimo s točkom $T = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.)

DEFINICIJA 2.6 Pod **okolinom** točke $x \in X$ u topološkom prostoru (X, \mathcal{T}) podrazumijevamo svaki skup $O \subseteq X$ za koji postoji neki $U \in \mathcal{T}$ tako da bude $x \in U \subseteq O$.

TEOREM 2.7 U topološkom prostoru X je skup $U \subseteq X$ otvoren onda i samo onda, ako je U okolina svake svoje točke.

DOKAZ. Nužnost je očigledno istinita.

Obratno, neka je $U \subseteq X$ okolina svake svoje točke, tj. neka za svaki $x \in U$ postoji neki otvoreni skup $U_x \subseteq X$ takav da je $x \in U_x \subseteq U$. Sada je $U = \bigcup_{x \in U} U_x$ otvoren skup po svojstvu (T1). ■

DEFINICIJA 2.8 Reći ćemo da je skup $F \subseteq X$ **zatvoren** u topološkom prostoru X ako je njegov komplement $X \setminus F \subseteq X$ otvoren.

PRIMJER. Po svojstvu (T3), u svakom topološkom prostoru X su $X, \emptyset \subseteq X$ zatvoreni skupovi.

U svakom metričkom prostoru X je svaka točka $x \in X$ zatvoren skup $\{x\} \subseteq X$, jer je skup $X \setminus \{x\} \subseteq X$ otvoren. (Primijeni se Teorem 2.4) \square

PRIMJER. Za svaki $m \leq n$ je potprostor $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren skup u \mathbb{R}^n . Da bismo to dokazali, promatrajmo bilo koju točku $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$, $m < n$. Tada je barem jedna od koordinata x_i^0 , $i \in \{m+1, \dots, n\}$, različita od 0. Budući da su euklidske topologije metrizabilne, svaki otvoreni skup je unija neke množine pripadnih kugala. Dovoljno je, dakle, dokazati da postoji neka kugla $B(P_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$. U tu svrhu, primijetimo da je

$$d(P_0, \mathbb{R}^m) = \inf\{d(P_0, Q) \mid Q \in \mathbb{R}^m\} > 0.$$

Naime, taj se infimum postiže kao minimum u točki

$$Q_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m, \text{ tj.}$$

$$d(P_0, \mathbb{R}^m) = d_2(P_0, Q_0) = \|P_0 - Q_0\| = \|(0, \dots, 0, x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)\| \equiv r > 0.$$

To povlači da je kugla $B(P_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$ pa je skup $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, odnosno, skup $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ je zatvoren. \square

PRIMJER. Lako je provjeriti da su sljedeći važni podskupovi euklidskih prostora zatvoreni:

$$\text{\textit{n-kvadar}} \ K \equiv [x^1, y^1] \times \dots \times [x^n, y^n] \subset \mathbb{R}^n \quad (8)$$

(za $n = 1$ radi se o **segmentu** $I \equiv [x, y] \subseteq \mathbb{R}$, a za $n = 2$ o pravokutniku $K \equiv [x^1, y^1] \times [x^2, y^2] \subset \mathbb{R}^2$ u ravnini);

$$\text{\textit{n-sfera}} \ (\text{središnja, jedinična}) \ S^n \equiv \{P \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|P\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad (9)$$

(za $n = 0$ radi se o dvotočju $S^0 = \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$, a za $n = 1$ o jediničnoj središnjoj kružnici $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ u ravnini);

$$\text{\textit{n-disk}} \ (\text{središnji, jedinični}) \ D^n \equiv \{P \in \mathbb{R}^n \mid \|P\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n \quad (10)$$

(za $n = 1$ dobivamo segment $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$, a za $n = 2$ središnji jedinični krug $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ u ravnini). \square

Osnovna svojstva zatvorenih skupova donosi ovaj teorem (usp. Teorem 2.5.):

TEOREM 2.9 *Množina $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ svih zatvorenih skupova $F \subseteq X$ u topološkom prostoru X udovoljava ovim uvjetima:*

- (T1)' \mathcal{C} je zatvorena na presijecanje;
- (T2)' \mathcal{C} je zatvorena na konačno uniranje;
- (T3)' $X, \emptyset \in \mathcal{C}$.

DOKAZ. Posve je očito da (T1)', (T2)' i (T3)' slijede redom iz (T2), (T1) i (T3) primjenom Definicije 2.8. i de Morganovih pravila. ■

Temeljna značajka topološkog prostora jest da se u njemu može (nemetrički) osmisliti i djelotvorno opisati ideja o *blizini* točke i skupa.

DEFINICIJA 2.10 *Neka je X topološki prostor.*

Reći ćemo da je $x \in X$ izolirana točka u prostoru X ako je $\{x\} \subseteq X$ otvoreni skup. U protivnom, govorimo da je x gomilište u prostoru X .

Reći ćemo da je $a \in A$ izolirana točka skupa $A \subseteq X$ u prostoru X ako postoji otvoreni skup $U \subseteq X$ takav da je $U \cap A = \{a\}$.

*Za točku $x \in X$ kažemo da je gomilište skupa A u prostoru X ako, za svaki otvoreni skup $U \subseteq X$, iz $x \in U$ slijedi $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Skup svih gomilišta promatrano skupa A u prostoru X označujemo s A' (**derivat skupa A**).*

Napokon, reći ćemo da je točka $x \in X$ blizu skupa $A \subseteq X$ ako je $x \in A \cup A'$.

Očito je da je svako gomilište bilo kojeg skupa $A \subseteq X$ ujedno gomilište u prostoru X . S druge strane, svaka izolirana točka u prostoru X je i izolirana točka svakog skupa koji ju sadrži. Primijetimo da skup A može imati gomilište u $X \setminus A$. Napokon, očito je da $A \subseteq B$ u prostoru X povlači $A' \subseteq B'$.

Naziv gomilište ćemo opravdati ovim teoremom:

TEOREM 2.11 *Neka je X metrički prostor, $A \subseteq X$ i $x_0 \in X$. Točka x_0 je gomilište skupa A onda i samo onda, ako svaka okolina od x_0 sadrži beskonačno mnogo točaka iz A .*

DOKAZ. Dovoljnost je očito istinita. Za nužnost, neka je $U_0 \subseteq X$ bilo koja okolina od $x_0 \in A'$. Tada postoji neka točka

$$a_0 \in (U_0 \setminus \{x_0\}) \cap A \subseteq U_0.$$

Budući da je skup $\{a_0\} \subseteq X$ zatvoren, to je i

$$U_1 \equiv U_0 \cap (X \setminus \{a_0\}) = U_0 \setminus \{a_0\} \subseteq X$$

okolina od x_0 . Po pretpostavci, postoji neka točka $a_1 \in (U_1 \setminus \{x_0\}) \cap A \subseteq U_0$ i pritom je očito $a_1 \neq a_0$. Nadalje, i

$$U_2 \equiv U_1 \cap (X \setminus \{a_1\}) = U_1 \setminus \{a_1\} = U_0 \setminus \{a_0, a_1\} \subseteq X$$

je okolina od x_0 pa postoji neka točka $a_2 \in (U_2 \setminus \{x_0\}) \cap A \subseteq U_0$ i pritom je očito $a_2 \neq a_0$ i $a_2 \neq a_1$. Nastavljajući induktivno dobivamo traženi beskonačni podskup $\{a_m \mid m \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \subseteq A$ što ga sadrži okolina U_0 . ■

PRIMJER.

- (a) Neka je $X = \mathbb{R}$ euklidski pravac, a $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \langle 1, 2 \rangle \subseteq \mathbb{R}$. Tada je $A' = \{0\} \cup [1, 2] \subseteq \mathbb{R}$. Primijetimo da gomilišta $0, 2 \in A'$ ne pripadaju skupu A , te da su $\frac{1}{n}, n \geq 2$, izolirane točke skupa A u \mathbb{R} .
- (b) Ako je $A = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ onda je $A' = \emptyset$.
- (c) Ako je $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ onda je $A' = \mathbb{R}$. □

TEOREM 2.12 Skup $A \subseteq X$ je zatvoren u prostoru X ako i samo ako sadrži sva svoja gomilišta, tj. $A' \subseteq A$ (sve točke blizu A su u A).

DOKAZ.

\Rightarrow Neka je $A \subseteq X$ zatvoren i $x_0 \in A'$. Kad točka x_0 ne bi bila u A , bila bi u $X \setminus A$, pa bi bilo $((X \setminus A) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$. Budući da je $X \setminus A$ otvoren, to točka x_0 ne bila gomilište od A - protuslovje.

\Leftarrow Obratno, neka skup $A \subseteq X$ sadrži sva svoja gomilišta, tj. $A' \subseteq A$. Dokazat ćemo da je A zatvoren, tj. da je $X \setminus A$ otvoren. Ako je $A = X$, tvrdnja je očita. Neka je $A \subset X$ pa promatrajmo bilo koju točku $x \in X \setminus A$. Dostatno je dokazati da postoji otvorena okolina $U(x) \subseteq X \setminus A$. Kad tako ne bi bilo, svaka bi otvorena okolina U od x sjekla skup A , tj. $U \cap A \neq \emptyset$. Budući da $x \notin A$, bilo bi i $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, dakle, $x \in A' \setminus A = \emptyset$, što je nemoguće. ■

NAPOMENA. Skup $\bar{A} = A \cup A'$ je zatvoren skup i on se katkada označava sa $\text{Cl } A$ (**zatvarač skupa** A , to je najmanji zatvoren skup koji sadrži A).

Na koncu ovog odjeljka istaknimo još neke podskupe prostora \mathbb{R}^n .

Za različite točke $P = (x_1, \dots, x_n)$, $Q = (y_1, \dots, y_n)$ iz \mathbb{R}^n skup

$$\{T = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_i = (1-t)x_i + ty_i; i = 1, \dots, n; t \in \mathbb{R}\} \quad (11)$$

nazivamo **pravcem** kroz točke P i Q . Podskup $[P, Q]$ pravca koji dobijamo za $t \in [0, 1]$:

$$\{T = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_i = (1-t)x_i + ty_i; i = 1, \dots, n; t \in [0, 1]\} \quad (12)$$

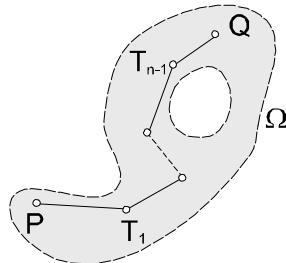
nazivamo **spojnicom** točaka P i Q (ili **segmentom s rubnim točkama** P i Q).

DEFINICIJA 2.13 Za podskup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je **konveksan** ako za svake dvije točke $P, Q \in \Omega$ skup Ω sadrži i njihovu spojnicu $[P, Q]$. Jednočlane skupove i prazan skup smatramo konveksnim skupovima.

PRIMJER. Kugla, n -kvadar su konveksni skupovi.

Otvoreni skup ne mora biti konveksan. □

DEFINICIJA 2.14 Za otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je **povezan** ako za bilo koje dvije točke $P, Q \in \Omega$ postoji konačno mnogo točaka $P = T_1, \dots, T_n = Q$ takvih da spojnice $[T_0, T_1], [T_1, T_2], \dots, [T_{n-1}, T_n]$ leže u Ω .



DEFINICIJA 2.15 Otvoren i povezan skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se **područje (oblast)** u \mathbb{R}^n .

2.3 NIZOVI u \mathbb{R}^n

Prvo se prisjetimo nekih važnih činjenica vezanih za skup \mathbb{R} i realne nizove o kojima je bilo riječi u predmetu DIR1.

- T.1. *Svaki odozgo omeđen neprazan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima supremum u \mathbb{R} , tj. postoji realan broj $L = \sup S$ takav da je $s \leq L$ za svaki $s \in S$, i da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $s \in S$ takav da je $L - \varepsilon < s \leq L$ (drugim riječima L je najmanja gornja meda).*
- T.2. *Svaki omeđen monoton niz (a_n) u \mathbb{R} je konvergentan.*

Dokaz. Neka je (a_k) rastući niz. Po pretpostavci je $S = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ odozgo omeđen skup pa je $a = \sup S \in \mathbb{R}$. Za $\varepsilon > 0$ po definiciji supremuma slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Sada, zbog monotonosti imamo $k > n_0 \Rightarrow a_{n_0} \leq a_k$, pa je tim više $a - \varepsilon < a_k \leq a$ za svaki $k > n_0$. Slijedi $a = \lim a_k$. ■

- T.3. *Svaki niz (a_n) realnih brojeva ima monoton podniz. Ako skup $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nema najvećeg (najmanjeg) elementa, onda niz (a_n) ima strogo monoton podniz.*

Dokaz. Za niz (a_n) i za $m \in \mathbb{N}$ stavimo $A_m = \{a_m, a_{m+1}, \dots\}$

1. slučaj: Skup A_1 nema najveći element.

Slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k > n$ tako da je $a_k > a_n$. Među prirodnim brojevima $k > 1$ za koje je $a_k > a_1$ postoji najmanji broj, označimo ga sa p_1 . Dakle $a_{p_1} < a_1$ i $a_k < a_1$ za $k < p_1$ ukoliko takav k postoji. Sada gledamo skup svih članova niza (a_n) koji dolaze poslije a_{p_1} : $A_{p_1+1} = \{a_{p_1+1}, a_{p_1+2}, \dots\}$. Ovaj skup nema najvećeg elementa, jer ako bi b bio takav, onda bi veći od b i a_{p_1} bio najveći element od A_1 što je protivno našoj pretpostavci. Među svim $k > p_1$ za koje je $a_k > a_{p_1}$, postoji najmanji i njega označimo sa p_2 . Naslavimo postupak: među svim $k > p_2$ za koje je $a_k > a_{p_2}$ najmanji označimo sa p_3 ... Dolazimo do niza $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ i očigledno je $a_{p_1} < a_{p_2} < a_{p_3} < \dots$ traženi strogo rastući podniz polaznog niza.

Analogno se dokazuje da ako skup $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nema najmanji element, onda niz (a_n) ima strogo padajući podniz.

2. slučaj: Postoji m takav da A_m nema najveći element.

Stavimo li $b_1 = a_m$, $b_2 = a_{m+1}, \dots$ onda skup $\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ nema najveći element i prema slučaju 1. postoji strogo rastući podniz (b_{p_k})

niza (b_n) . Slijedi $k \mapsto a_{p_k+m-1}$ je strogo rastući podniz niza (a_n) .

3. slučaj: Za svaki m skup A_m ima najveći element.

Neka je b_1 najveći element skupa A_1 . To znači da postoji barem jedan k takav da je $a_k = b_1$. Među svim takvima k postoji najmanji, označimo ga sa p_1 . Sada je a_{p_1} najveći element skupa A_1 i $a_j < a_{p_1}$ za $j < p_1$ ako takav j postoji. Sada gledamo $A_{p_1+1} = \{a_{p_1+1}, a_{p_1+2}, \dots\}$ i sa b_2 označimo njegov najveći element. Među svim $k > p_1$ za koje je $a_k = b_2$ postoji najmanji i njega označimo sa p_2 . Sada gledamo skup A_{p_2+1} i na isti način dobivamo prirodni broj $p_3 < p_2$ takav da je $a_{p_2} \geq a_{p_3}$. Ovim postupkom dolazimo do padajućeg niza $(a_{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$ što je padajući podniz polaznog niza $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. ■

T.4. Za konačno nizova $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ realnih nizova postoji strogo rastući niz $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takav da je svaki od nizova

$$a^{(1)} \circ p, a^{(2)} \circ p, \dots, a^{(n)} \circ p \quad (13)$$

monoton.

Dokaz. Za niz $a^{(1)}$ prema prethodnoj tvrdnji T.3. postoji strogo rastući podniz $p_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takav da je $b^{(1)} = a^{(1)} \circ p_1$ monoton niz. Za niz $a^{(2)} \circ p_1$ prema prethodnoj tvrdnji postoji podniz $p_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takav da je niz $(a^{(2)} \circ p_1) \circ p_2$ monoton. Na taj način dolazimo do strogo rastućih nizova $p_1, p_2, \dots, p_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ za koje su $a^{(1)} \circ p_1, (a^{(2)} \circ p_1) \circ p_2, \dots, a^{(n)} \circ p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n$ monotoni podnizovi. Stavimo

$$p = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n.$$

p je strogo rastući niz u \mathbb{N} i svaki od nizova (13) je monoton. ■

Konvergenciju niza $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiramo analogno konvergenciji niza u \mathbb{R} . Niz točaka u \mathbb{R}^n označavamo sa $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

DEFINICIJA 2.16 Niz $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u \mathbb{R}^n **konvergira ka točki** P_0 , pišemo $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_0$ ili $(P_k) \rightarrow P_0$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirođan broj n_0 takav da vrijedi $k \geq n_0 \Rightarrow d(P_k, P_0) < \varepsilon$.

Dakle,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_0 \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad k \geq n_0 \Rightarrow d(P_k, P_0) < \varepsilon. \quad (14)$$

Primjetimo da niz $(P_k)_{k \in \mathbb{N}} = ((x_1^k, \dots, x_n^k))_{k \in \mathbb{N}}$ generira n nizova realnih brojeva $(x_i^k)_{k \in \mathbb{N}}, i = 1, \dots, n$. I obrnuto preko n nizova realnih brojeva $(x_i^k)_{k \in \mathbb{N}}, i = 1, \dots, n$, dobivamo niz $(P_k)_{k \in \mathbb{N}} = ((x_1^k, \dots, x_n^k))_{k \in \mathbb{N}}$ u \mathbb{R}^n . Jasno je da pri proučavanju nizova u \mathbb{R}^n osnovnu ulogu igraju nizovi u \mathbb{R} .

TEOREM 2.17 Niz $(P_k)_{k \in \mathbb{N}} = ((x_1^k, \dots, x_n^k))_{k \in \mathbb{N}}$ u \mathbb{R}^n konvergira ka točki $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ ako i samo ako $(x_i^k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x_i^0, i = 1, \dots, n$.

DOKAZ. Dokaz provodimo za $n = 2$ (za $n > 2$ je dokaz analogan). Neka je dan niz $(P_k)_{k \in \mathbb{N}} = ((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ u \mathbb{R}^2 i neka je $P_0 = (x_0, y_0)$.

⇒ Neka $(P_k) \rightarrow P_0$. To znači da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})$$

$$k \geq n_0 \Rightarrow d(P_k, P_0) = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} < \varepsilon.$$

Slijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad k \geq n_0 \Rightarrow d(x_k, x_0) = \sqrt{(x_k - x_0)^2} < \varepsilon,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad k \geq n_0 \Rightarrow d(y_k, y_0) = \sqrt{(y_k - y_0)^2} < \varepsilon,$$

i zaista $(x_k) \rightarrow x_0, (y_k) \rightarrow y_0$.

⇐ Neka $(x_k) \rightarrow x_0, (y_k) \rightarrow y_0$. Za prizvoljni $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n'_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad k \geq n'_0 \Rightarrow (x_k - x_0)^2 < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n''_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad k \geq n''_0 \Rightarrow (y_k - y_0)^2 < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Sada za $k > n_0 = \max\{n'_0, n''_0\}$ imamo

$$d(P_k, P_0) = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} < \varepsilon$$

i zaista $(P_k) \rightarrow P_0$ (vidi Zadatak 21, 2.6. ZADACI ZA VJEŽBU). ■

PRIMJER. Točka $P_0 = (1, -1)$ je granična vrijednost niza $\{P_n\}$ u \mathbb{R}^2 ,

$$P_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{1-n^2}{1+n^2} \right),$$

jer je, za koordinatane nizove, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n+1}{n} \right\} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1-n^2}{1+n^2} \right\} = -1$. \square

NAPOMENA. Niz točaka $(T_n = (x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ u \mathbb{R}^2 možemo zapisati u polarnom koordinatnom sustavu kao niz $(r_n, \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdje je $x_n = r_n \cos \varphi_n$, $y_n = r_n \sin \varphi_n$. I u ovom slučaju vrijedi slična tvrdnja. Neka je $T_0 = (x_0, y_0) = (r_0, \varphi_0)$, $\varphi_0 \neq 0$. Tada vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0.$$

\Rightarrow Dovoljnost slijedi iz neprekidnosti trigonometrijskih funkcija. Neka $(r_n) \rightarrow r_0$, $(\varphi_n) \rightarrow \varphi_0$. Tada je

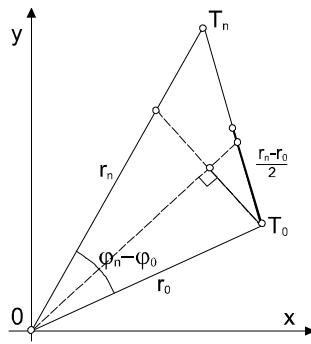
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n)] = \\ &= (\lim_{n \rightarrow \infty} r_n) (\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \varphi_n, \sin \varphi_n)) = r_0 (\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \varphi_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \varphi_n) = \\ &= r_0 (\cos \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n, \sin \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n) = r_0 (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0) = T_0. \end{aligned}$$

Primjetimo da ovdje nismo trebali uvjet $\varphi_0 \neq 0$.

\Leftarrow Neka $(T_n) \rightarrow T_0$. Budući $|r_n - r_0| = d(T_n, T_0) \rightarrow 0$ slijedi $(r_n) \rightarrow r_0$.

Treba još dokazati $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da (φ_n) ne konvergira ka φ_0 . Tada postoji $\delta > 0$ takav da je $|\varphi_n - \varphi_0| > \delta$.

Promotrimo sliku



Vrijedi

$$\sin \frac{|\varphi_n - \varphi_0|}{2} \leq \frac{|r_n - r_0|}{2r_0} \Rightarrow |r_n - r_0| \geq 2r_0 \sin \frac{|\varphi_n - \varphi_0|}{2} \geq 2r_0 \sin \frac{\delta}{2}.$$

Ovo je u protuslovju s pretpostavkom $(T_n) \rightarrow T_0$, pa moramo pretpostaviti da (φ_n) konvergira ka φ_0 .

Primjetimo da smo ovdje koristili uvjet $\varphi_0 \neq 0$. Bez tog uvjeta tvrdnja nije istinita, naime može se dogoditi da bliske točke blizu pozitivnog dijela realne osi imaju argumente koji se razlikuju skoro za 2π . \square

Osnovni rezultat o nizovima u \mathbb{R}^n dan je **Bolzano-Weierstrassovim teoremom**:

TEOREM 2.18 *Svaki omeđen niz točaka $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u \mathbb{R}^n ima bar jedan konvergentan podniz.*

DOKAZ. Dokažimo teorem u slučaju da je $n = 2$ (za $n > 2$ dokaz se analogno provodi).

Neka je $(P_k)_{k \in \mathbb{N}} = ((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ omeđen niz u \mathbb{R}^2 . Prema tvrdnji T.4. postoji strogo rastući niz $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takav da je svaki od nizova

$$(x_{p(k)})_{k \in \mathbb{N}}, (y_{p(k)})_{k \in \mathbb{N}}$$

monoton. Po pretpostavci je niz $(P_k)_{k \in \mathbb{N}} = ((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ omeđen pa su stoga i nizovi (x_k) i (y_k) omeđeni. Dobili smo da su nizovi $(x_{p(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, $(y_{p(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ omeđeni i monotoni pa su, po tvrdnji T.2., i konvergentni. Neka je $x_0 = \lim x_{p(k)}$, $y_0 = \lim y_{p(k)}$ i neka je $P_0 = (x_0, y_0)$. Sada

$$d(P_{p(k)}, P_0) = \sqrt{(x_{p(k)} - x_0)^2 + (y_{p(k)} - y_0)^2} \rightarrow 0$$

Slijedi da je $(P_{p(k)})$ konvergentni podniz niza (P_k) koji konvergira ka točki P_0 . \blacksquare

KOROLAR 2.19 *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ n -kvadar i (P_k) niz točaka iz K . Postoji bar jedan podniz $(P_{p(k)})$ niza (P_k) koji konvergira. Svaki konvergentni podniz niza (P_k) konvergira ka točki iz K .*

2.4 KOMPAKTNOST U \mathbb{R}^n

U posljednjem odjeljku, Korolar 2.19 opisuje jedno bitno svojstvo n -kvadra K a to je da svaki niz točaka (P_k) iz K ima konvergentni podniz $(P_{p(k)}) \rightarrow P_0$ i točka P_0 pripada kvadru K . Upravo ovo svojstvo kvadra uzimamo za definiciju općenitijih skupova od kvadra. To su kompaktni skupovi.

DEFINICIJA 2.20 Za skup $K \subset \mathbb{R}^n$ kažemo da je **kompaktan**, ako on ima svojstvo da svaki niz iz K sadrži konvergentan podniz i da taj podniz konvergira elementu skupa K .

Sljedeći teorem karakterizira kompaktne skupove u \mathbb{R}^n .

TEOREM 2.21 Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktnan, ako i samo ako je on omeden i zatvoren.

Dokaz ovoga teorema oslanja se na opisu zatvorenog skupa pomoću konvergencije nizova.

TEOREM 2.22 Skup $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je zatvoren ako i samo ako svaki konvergentni niz točaka iz F konvergira točki iz F .

DOKAZ.

\Rightarrow Neka je $F \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren, (P_k) niz iz F i neka on konvergira ka P_0 . Treba dokazati da je $P_0 \in F$. Prepostavimo suprotno, tj. $P_0 \notin F$. Tada je $P_0 \in F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ i budući je to otvoren skup, postoji kugla $B(P_0, \varepsilon)$ takva da je $B(P_0, \varepsilon) \subseteq F^c$. No tada je $P_k \notin B(P_0, \varepsilon)$ pa je $d(P_k, P_0) \geq \varepsilon$ za gotovo svaki $k \in \mathbb{N}$. To je nemoguće, jer $(P_k) \rightarrow P_0$. Budući da prepostavka $P_0 \notin F$ vodi na protuslovje pa zaključujemo da je $P_0 \in F$. Dakle, zatvoren skup F sadrži sve limese nizova iz F .

\Leftarrow Neka svaki konvergentni niz točaka iz F konvergira točki iz F i dokažimo da je F zatvoren.

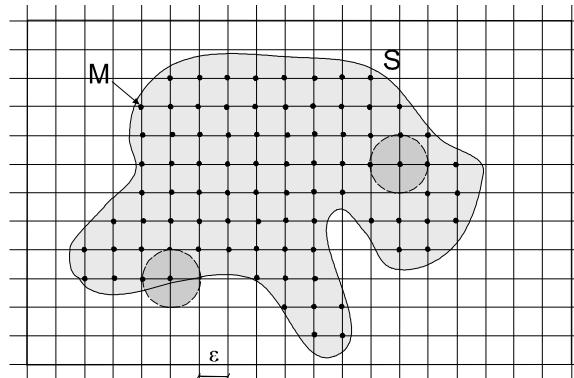
Da je F zatvoren isto je što i dokazati da je $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ otvoren skup. Ako je $F^c = \emptyset$ nemamo što dokazivati, jer je \emptyset otvoren skup. Uzmimo da je $F^c \neq \emptyset$. Kada F^c nebi bio otvoren postojala bi barem jedna točka $P_0 \in F^c$ takva da kugla $B(P_0, \varepsilon)$ ne leži u F^c ni za jedno $\varepsilon > 0$. U svakoj takvoj kugli ima dakle točaka i iz skupa F . Posebno, za svaki $k \in \mathbb{N}$ kugla $B(P_0, \frac{1}{k})$ sadrži bar jednu točku P_k iz F . Budući da je $d(P_k, P_0) < \frac{1}{k}$ niz (P_k) konvergira ka P_0 . Sada imamo da niz točaka (P_k) iz F konvergira ka točki $P_0 \notin F$, a to je u protuslovju s našom polaznom prepostavkom. Dakle, F^c je otvoren i prema tomu F je zatvoren. ■

Dokaz Teorema 2.21.

\Rightarrow Neka je K kompaktan skup. To znači da svaki niz točaka iz K ima podniz koji konvergira ka točki iz K . Posebno, svaki konvergentni niz točaka iz K konvergira ka točki iz K pa po Teoremu 2.22 zaključujemo da je F zatvoren.

Dokažimo da je K omeđen. U protivnom ni za svaki $k \in \mathbb{N}$ postojala točka $P_k \in K$ takva da je $d(O, P_k) \geq k$, gdje je $O = (0, \dots, 0)$. Ovako dobiven niz (P_k) ne može imati konvergentni podniz (svaki podniz od (P_k) je neomeđen), što je u protuslovju s pretpostavkom da je K kompaktan. Dakle, K je omeđen skup.

\Leftarrow Neka je K zatvoren i omeđen skup i neka je (P_k) bilo koji niz iz K . Budući je K omeđen, to je i niz (P_k) omeđen. Po Bolzano-Weierstrassovom teoremu (T. 2.18) postoji konvergentan podniz $(P_{p(k)})$ niza (P_k) . Budući je K zatvoren, po Teoremu 2.22, imamo da $(P_{p(k)}) \rightarrow P_0 \in K$. Budući svaki niz iz K ima podniz koji konvergira točki iz K , to je K kompaktan skup. ■



Neka je $S \subset \mathbb{R}^n$ omeđen skup. Tada postoji pravokutnik $K = [a, b] \times [c, d]$ koji sadrži skup S . Za $\varepsilon > 0$ uzmimo subdiviziju pravokutnika K pravcima

$$x_0 = a, x_1 = a + \varepsilon, x_2 = a + 2\varepsilon, \dots; y_0 = c, y_1 = c + \varepsilon, y_2 = c + 2\varepsilon, \dots$$

Na taj način dobivamo "mrežu" M sastavljenu od konačno točaka

$$(x_0, y_0), (x_0, y_1), (x_1, y_1), \dots$$

Ako iz svake točke A iz M opišemo kuglu $B(A, \varepsilon)$ dobivamo konačno kugli koje pokrivaju pravokutnik K (zapravo i veći skup). Te kugle pokrivaju i

skup S . Ako je točka P iz S , onda njezina udaljenost od bar jednog čvora mreže M ne prelazi ε , tj. postoji bar jedna točka $A \in M$ takva da je $d(P, A) < \varepsilon$. Svaka točka iz S može se dakle aproksimirati nekom točkom iz M s točnošću do ε . Slična razmatranja vrijede i za omeđeni skup u \mathbb{R}^n .

DEFINICIJA 2.23 Skup $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je ε -mreža za skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$, ako za svaku točku P iz S postoji bar jedna točka A iz M takva da je $d(A, P) < \varepsilon$.

Drugim riječima, točkama iz M može se aproksimirati svaka točka iz S s točnošću do na ε . Ako oko svake točke A iz M opišemo kuglu $B(A, \varepsilon)$, onda unija tih kugala sadrži skup S . Naravno, točke ovakve mreže nisu tako pravilno raspoređene kao točke mreže na prethodnoj slici. Za aproksimaciju su važni skupovi koji se mogu aproksimirati konačnim ε -mrežama.

TEOREM 2.24 Ako je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan skup $M_\varepsilon \subseteq K$ koji je ε -mreža za skup K .

DOKAZ. Prepostavimo suprotno, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ takav da K nema konačnu ε -mrežu.

Neka je $P_1 \in K$. Tada skup $\{P_1\}$ nije ε -mreža za K , pa postoji bar jedna točka P_2 koja je u K ali nije u kugli $B(P_1, \varepsilon)$, dakle $d(P_1, P_2) \geq \varepsilon$. Sada skup $\{P_1, P_2\}$ nije ε -mreža za K , pa postoji $P_3 \in K$ tako da je $d(P_1, P_3) \geq \varepsilon$ i $d(P_2, P_3) \geq \varepsilon$. Ovim postupkom folazimo do niza (P_k) točaka iz K sa svojstvom da je $d(P_i, P_j) \geq \varepsilon$ za svaki par prirodnih brojeva i i j , $i \neq j$.

Budući je K kompaktan skup, postoji konvergentan podniz $(P_{p(k)})$ niza (P_k) . Sada je $d(P_{p(i)}, P_{p(j)}) \geq \varepsilon$ za sve $i, j \in \mathbb{N}$ ($i \neq j$). Slijedi da (P_k) nema konvergentnog podniza, a to je u protuslovju s prepostavkom da je K kompaktan skup. Zaključujemo da skup K sadrži konačnu ε -mrežu za svaki $\varepsilon > 0$. ■

2.5 POTPUNOST PROSTORA \mathbb{R}^n

DEFINICIJA 2.25 Za niz $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u \mathbb{R}^n kažemo da je **Cauchyjev niz** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}) \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(P_m, P_n) < \varepsilon. \quad (15)$$

TEOREM 2.26

- (a) Svaki Cauchyjev niz je omeđen.
- (b) Svaki konvergentan niz je Cauchyjev niz.
- (c) Svaki Cauchyjev niz $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u \mathbb{R}^n je konvergentan.

DOKAZ. (a) Iz (15) za $m \geq n_0$ je $d(O, P_m) \leq d(O, P_{n_0}) + d(P_{n_0}, P_m) < d(O, P_{n_0}) + \varepsilon$ pa skup $\{P_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ leži u kugli radijusa $\varepsilon + d(O, P_1) + \dots + d(O, P_{n_0})$ sa središtem u ishodištu $O = (0, \dots, 0)$.

(b) Neka $(P_k) \rightarrow P_0$. Tada za $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0 \Rightarrow d(P_n, P_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sada za $m, n \geq n_0$ imamo

$$d(P_m, P_n) \leq d(P_m, P_0) + d(P_0, P_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

što pokazuje da je konvergentan niz (P_k) Cauchyjev niz.

(c) Budući je (P_k) Cauchyjev niz, po (a) on je omeđen i po Teoremu 2.18, ima konvergentni podniz $(P_{p(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Neka je $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{p(k)} = P_0$. Tvrđimo da $(P_k) \rightarrow P_0$, tj. iz konvergencije podniza želimo dokazati da je i polazni niz konvergentan. Zaista, za $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(P_m, P_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Budući je $p(n) \geq n$ slijedi da

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(P_{p(m)}, P_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

S druge strane jer $(P_{p(k)}) \rightarrow P_0$, za dani ε postoji $k_0 \geq n_0$ tako da je

$$d(P_{p(k_0)}, P_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sada za $n \geq n_0$ dobivamo

$$d(P_0, P_n) \leq d(P_0, P_{p(k_0)}) + d(P_{p(k_0)}, P_n) < \varepsilon.$$

Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0$ povlači $d(P_n, P_0) < \varepsilon$, pa zaista $(P_k) \rightarrow P_0$. ■

Napomenimo da metrički prostor (X, d) u kojemu je svaki Cauchyjev niz (tj. niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u X koji ima svojstvo da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $(\forall n, m \in \mathbb{N}) \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$) konvergentan nazivamo **potpunim prostorom**. Dakle, (\mathbb{R}^n, d) jest potupuni metrički prostor, pa odatle i naslov ovoga pododjeljka.

2.6 ZADACI ZA VJEŽBU

1. Dokažite da je skup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$ otvoren.
2. Skicirajte svaki od niže navedenih skupova u \mathbb{R}^2 i dokažite da je on otvoren:
 - (a) $x^2 - 2y^2 < 6$;
 - (b) $|x| < 1$ i $|y| < 1$;
 - (c) $|x| + |y| < 2$;
 - (d) $(x^2 + y^2 - 1) \cdot (9 - x^2 - y^2) > 0$.
3. Dokažite da je skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ zadan ovim nejednakostima otvoren:
 - (a) $x + y + z < 1$;
 - (b) $|x| + |y| + |z| < 1$.
4. Ako je A skup iz zadatka 2, onda su $A \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \times A$ otvoreni skupovi u \mathbb{R}^3 .
5. Ako su $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoreni skupovi, onda su skupovi $\Omega_1 \times \Omega_2$, $\Omega_2 \times \Omega_1$ otvoreni u \mathbb{R}^3 .
6. Kugla $B(P, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ je racionalna ako je r racionalan broj i sve koordinate točke $P = (x_1, \dots, x_n)$ su racionalni brojevi. Dokažite da je svaki neprazni otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ unija od prebrojivo racionalnih kugala.
7. Koji je od skupova iz zadatka 2 područje.
8. Ako su $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ područja u \mathbb{R}^n i $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ za $i \neq j$ onda je i $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ područje.
9. Ako su P, Q različite točke iz \mathbb{R}^n tada postoje disjunktni otvoreni skupovi Ω_1 i Ω_2 takvi da je $P \in \Omega_1$ i $Q \in \Omega_2$.
Za topološki prostor (X, \mathcal{T}) u kojem za svake dvije različite točke x i y postoje otvoreni disjunktni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $y \in V$ kažemo da je T_2 -prostor ili **Hausdorffov prostor**.
10. Neka je $X = [0, 1]$ i $\mathcal{T} = 2^X$ (partitivni skup skupa X). Dokažite da je (X, \mathcal{T}) topološki prostor. Da li je to Hausdorffov prostor.
11. Neka je $X = [0, 1]$ i \mathcal{T} skup svih podskupova $V \subseteq [0, 1]$ za koje postoji otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $V = \Omega \cap X$. Dokažite da je (X, \mathcal{T}) topološki prostor. U tom prostoru su skupovi $[0, \frac{1}{2}]$ i $[0, 1]$ otvoreni. Da li su ti skupovi otvoren i u prostoru \mathbb{R} .
12. Ako je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren i otvoren skup onda je $S = \emptyset$ ili $S = \mathbb{R}^n$.
13. Skup $\text{Cl } S = S \cup S'$ (skupa A i njegovog derivata A') nazivamo **zatvaračem skupa** S . Dokažite da je $\text{Cl } S$ zatvoren skup.
14. Dokažite da je $\text{Cl } S$ jednako presjeku svih zatvorenih skupova koji sadrže S .
15. Ako je F zatvoren skup i $S \subseteq F$, onda je $\text{Cl } S \subseteq F$.
16. Dokažite: točka $A \in \mathbb{R}^n$ pripada skupu $\text{Cl } S$ ako i samo ako je $S \cap B(A, \frac{1}{k}) \neq \emptyset$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

17. Dokažite: točka A je gomilište skupa S ako i samo ako je $A \in \text{Cl}((S \setminus \{A\}))$.
18. Dokažite da je dijametar kugle $B(T_0, r)$ jednak $2r$. Koliki je dijametar skupa $\langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle \subset \mathbb{R}^n$?
19. Istražite konvergenciju niza točaka $(\frac{k}{\alpha^k}, \frac{\alpha^k}{k!}, k^{\frac{1}{k}})_{k \in \mathbb{N}}$ u \mathbb{R}^3 u ovisnosti o $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2^n}, \frac{(-1)^n n}{2^n} \right) = ?$
21. Dokažite da niz točaka $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u metričkom prostoru \mathbb{R}^n konvergira prema točki $T_0 \in \mathbb{R}^n$ ako i samo ako niz $(d(T_0, T_k))_{k \in \mathbb{N}}$ u \mathbb{R} konvergira prema $0 \in \mathbb{R}$.
22. Neka su $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nizovi u metričkom prostoru \mathbb{R}^n i neka (T_k) konvergira. Dokažite da $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergira prema $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T_0 \in \mathbb{R}^n$ ako i samo ako niz $(d(T_k, P_k))_{k \in \mathbb{N}}$ u \mathbb{R} konvergira u \mathbb{R} prema $0 \in \mathbb{R}$.
23. Točka $P_0 \in \mathbb{R}^n$ je **gomilište niza** (P_k) točaka iz \mathbb{R}^n ako postoji podniz toga niza koji konvergira ka P_0 . Nađite primjer niza (P_k) koji ima P_0 kao gomilište, a da P_0 nije gomilište skupa $\{P_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
24. Dokažite da je presjek od bilo koliko kompaktih skupova ponovo kompaktan skup.
25. Dokažite da je unija od konačno kompaktnih skupova kompaktan skup.
26. Dokažite: ako je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan tada je i skup $\lambda K = \{\lambda P \mid P \in K\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, kompaktan.
27. Dokažite: Ako su $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ kompaktni onda je i skup $K_1 + K_2 = \{P + Q \mid P \in K_1, Q \in K_2\} \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan.
28. Ako je $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots$ niz kompaktnih nepraznih skupova iz \mathbb{R}^n , onda je $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ neprazan skup.
29. Kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je unija od konačno kompaktnih skupova, od kojih je svaki dijametra $\leq \varepsilon$.
30. Prikažite \mathbb{R}^n kao uniju od prebrojivo kompaktnih skupova.
31. Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup, $\varepsilon > 0$ i $M = \{P_1, \dots, P_n\}$ ε -mreža skupa K . Neka je $K_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{i=n} \text{Cl}(K(P_i, \varepsilon))$. Dokažite:
 - (a) $K \subseteq K_\varepsilon$;
 - (b) K_ε je kompaktan skup;
 - (c) za svaki $P \in K_\varepsilon$ je $d(P, K) \leq \varepsilon$;
 - (d) $K = \bigcap_{\varepsilon > 0} K_\varepsilon$.
32. Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $\varepsilon > 0$. Tada je skup $K_\varepsilon = \{P \in \mathbb{R}^n \mid d(P, K) \leq \varepsilon\}$ kompaktan i sadrži K . Dokažite da je $K = \bigcap_{\varepsilon > 0} K_\varepsilon$.

Poglavlje 3

SKALARNE FUNKCIJE

3.1 REALNE FUNKCIJE OD n REALNIH VARIJABLI

Svaku funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, nazivamo **realnom funkcijom od m realnih varijabla** ili, kraće, **skalarnom funkcijom**. Ovdje ćemo posebno razmatrati realne funkcije od dvije i tri realne varijable, dakle kada je $m = 2$ ili $m = 3$. Tada ćemo koristiti uobičajene oznake i točke ćemo označavati sa $T = (x, y)$ i $T = (x, y, z)$. Kao i funkciju jedne (realne) varijable, funkciju više varijabla možemo zadati

- analitički,
- tablično,
- grafički,
- parametarski,
- implicitno, ...

Za analitičko zadavanje vrijedi ista napomena o **definicijskom području** kao i za funkciju jedne varijable. Naime, ako dani analitički zapis (formula) određuje funkcionsko pravilo f , onda se definicijskim područjem smatra skup D svih onih točaka T kojima to pravilo pridjeljuje jedinstvene realne brojeve $f(T) \in \mathbb{R}$.

PRIMJER. Formula $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ definira funkciju

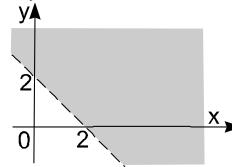
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Naime, $x^2 + y^2 \geq 0$ za svaki izbor brojeva $x, y \in \mathbb{R}$, pa drugi korijen određuje $f(x, y)$ na cijelom \mathbb{R}^2 . \square

PRIMJER. Zapis $z = \ln(x + y - 2)$ definira funkciju

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2, f(x, y) = \ln(x + y - 2),$$

pri čemu je definicijsko područje D određeno nejednadžbom $x + y - 2 > 0$, tj. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x + 2\}$

 \square

PRIMJER. Analitički izraz $z = \frac{5}{xy}$ određuje funkciju

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\}, f(x, y) = \frac{5}{xy}. \quad \square$$

PRIMJER. Pravilo $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ definira funkciju

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2),$$

pri čemu je definicijsko područje D određeno funkcijom \arcsin , tj. nejednadžbama $-1 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 2 \leq 1$. Dakle,

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}. \quad \square$$

Ako je funkciji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ skup $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ($m = 2, 3$) konačan i ne prevelik, onda se ona može zadati tablično (premda je takvo zadavanje pregledno samo kad je $m = 2$). Primjerice,

$y \setminus x$	x_1	x_2	\dots	x_n
y_1	z_{11}	z_{21}	\dots	z_{n1}
y_2	z_{12}	z_{22}	\dots	z_{n2}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
y_k	z_{1k}	z_{2k}	\dots	z_{nk}

$$f(x_i, y_j) = z_{ij}$$

$$D = \{(x_i, y_j) \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k\}$$

Funkcijski graf G_f za $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ je podskup od \mathbb{R}^{m+1} . Stoga je nacrtati ga (djelomično) moguće samo za $m \leq 2$. U slučaju $m = 2$ crtanjem ističemo samo neke njegove važne podskupove. To su, najčešće, presjeci G_f odabranim ravninama u prostoru \mathbb{R}^3 . Ako su te ravnine usporedne s ravninom $z = 0$ (koordinatnom xy -ravninom), dobivene presjeke nazivamo

razinskim krivuljama funkcije f (ili grafa G_f). Po tomu, svaki broj $z_0 \in f[D]$ određuje jednu razinsku krivulu jednadžbom $f(x, y) = z_0$. Dakle, na svakoj razinskoj krivulji su funkcijeske vrijednosti nepromjenjive.

Slično se u slučaju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, dakle $G_f \subseteq \mathbb{R}^4$, govori o **razinskim ploham** (ili **nivo-ploham**) funkcije f . Pritom svaka jednadžba $f(x, y, z) = u_0$, $u_0 \in f[D]$, određuje točno jednu pripadnu razinsku plohu na kojoj su sve funkcijeske vrijednosti jednake u_0 .

Nadalje, da bi nacrtali graf G_f funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (to je neka ploha u prostoru) korisno je i nacrtati i grafove funkcija

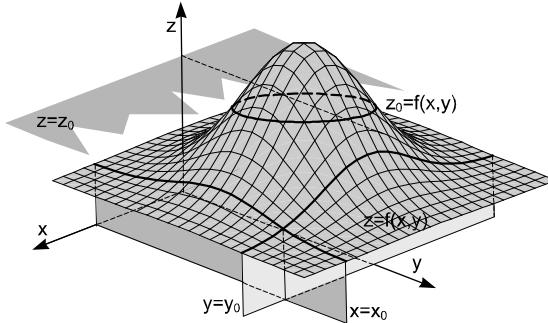
$$x \mapsto f(x, y_0), \quad (x, y_0) \in D \tag{a}$$

$$y \mapsto f(x_0, y), \quad (x_0, y) \in D \tag{b}$$

što su realne funkcije jedne varijable. Funkcija (a) je u navedenoj geometrijskoj interpretaciji prikazana skupom

$$\{(x, y_0, f(x, y_0)) \mid (x, y_0) \in D\}$$

koji predstavlja krivulu u kojoj ravnilna okomita na y -os kroz točku $(0, y_0, 0)$ siječe plohu (graf) G_f . Analogno je funkcija (b) predstavljena krivuljom koja je presjek plohe (grafa) G_f s ravnjnom $x = x_0$.



Ovako dobivene krivulje proučavaju se kod proučavanja, pa i imenovanja ploha drugog reda.

Pod **plohom drugoga reda** (ili **kvadrikom**) podrazumijevamo skup svih točaka $T = (x, y, z)$ u prostoru koordinate kojih zadovoljavaju jednadžbu drugoga stupnja

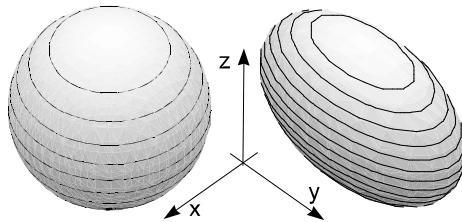
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz + K = 0,$$

s realnim koeficijentima $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ i K , pod uvjetom da je barem jedan od A, B, C, D, E ili F različit od nule. Posebno će nas zanimati samo neke kvadrike.

Jednadžba

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

predstavlja **kuglinu plohu** (ili **sferu**) sa **središtem** $S = (x_0, y_0, z_0)$ i **polumjerom** (ili **radijusom**) $R > 0$. Neprazni presjek ove plohe ravnom jest ili kružnica ili točka, što povlači da se kružnica u prostoru može zadati i kao presjek sfere i ravnine.



Za dane realne ne nul-konstante a, b i c , jednadžba

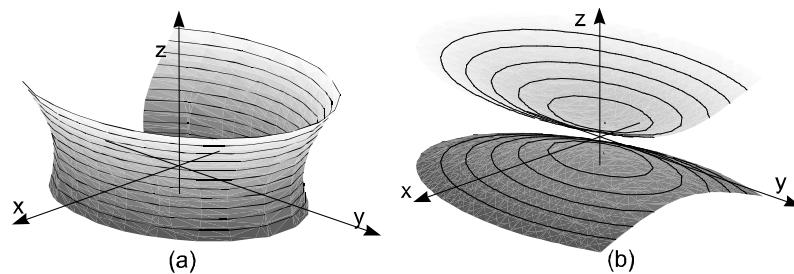
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

određuje plohu koju nazivamo **elipsoidom** (prethodna slika). Njegove su osi usporedne s koordinatnim osima, a duljine su im redom $2|a|$, $2|b|$ i $2|c|$. Neprazni elipsoidovi presjeci ravninama usporednim s koordinatnim osima jesu ili kružnice ili elipse ili točke. Primijetimo da u slučaju $a = b = c$ elipsoid postaje sferom.

Nadalje, jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

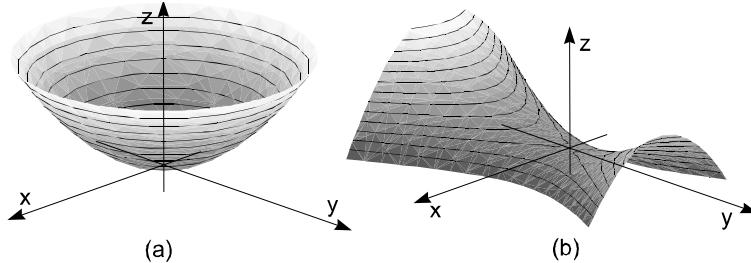
opisuje **jednokrilni eliptični hiperboloid** (naredna slika (a)). Njegovi neprazni presjeci ravninama usporednima sa z -osi jesu ili hiperbole ili točke, dok su mu presjeci ravninama usporednim s xy -ravninom elipse. Cikličkim zamjenama $x \rightsquigarrow y, y \rightsquigarrow z, z \rightsquigarrow x$ i $a \rightsquigarrow b, b \rightsquigarrow c, c \rightsquigarrow a$ dobivamo jednadžbu "iste" plohe u drugom položaju (y -os je "povlaštena"): $\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, a još jednom takvom zamjenom dobivamo jednadžbu ("povlaštena" je x -os): $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.



Jednadžba

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

opisuje **dovokrilni eliptični hiperboloid** (prethodna slika (b)). Njegov neprazni presjek ravninom usporednom sa z -osi jest hiperbola, dok mu je neprazni presjek ravninom usporednom s xy -ravninom ili elipsa ili točka. Ciklički izmjenjujući koordinate (variabile) x, y, z , kao i pripadne konstante a, b, c , dobivamo jednadžbe "iste" plohe u različitim položajima: $-\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$.



Jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

opisuje plohu koju nazivamo **eliptičnim paraboloidom** (prethodna slika (a)). Faktor 2 u monomu $2z$ nije bitan, ali je tehnički (algebarski) pogodan. Karakteristični presjeci ove plohe prikladnim ravninama koje su paralelne koordinatnim ravninama jesu elipse ili parabole. Odgovarajućim cikličkim izmjenama dobivamo još dvije jednadžbe "iste" plohe u različitim položajima.

Jednadžba

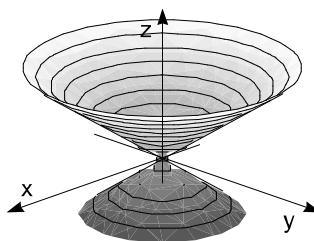
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 2z$$

određuje **hiperbolični paraboloid** (prethodna slika (b)). Odgovarajućim cikličkim izmjenama dobivamo još dvije jednadžbe "iste" plohe u različitim položajima.

Jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

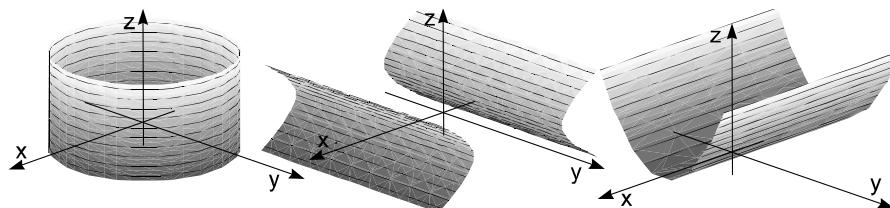
opisuje **stožastu** (ili **konusnu**) **plohu** (naredna slika). Opet su moguće još dvije (cikličke) varijante.



Nadalje, jednadžbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = 2ay^2$$

opisuju redom **eliptične**, **hiperbolične** i **parabolične valjčaste** (ili **cilindrične**) **plohe** (naredna slika). Dakako da su i u ovim jednadžbama moguće prije spominjane cikličke izmjene. Ove valjčaste plohe su samo vrlo posebni primjeri (opće) valjčaste plohe



Neka je u ravnini Π dana krivulja \mathcal{K} , te neka je p pravac koji probada Π . Promatrajmo skup svih pravaca u prostoru koji sijeku krivulju \mathcal{K} i usporedni su s pravcem p . Tretirajući svaki pravac točkovnim skupom, pripadnu (točkovnu) uniju nazivamo **valjčastom** (ili **cilindričnom**) **plohom**. Pritom govorimo da je pravac p **izvodnica** (ili **generatrisa**), a krivulja \mathcal{K} **ravnalica** (ili **direktrisa**) te valjčaste plohe.

Primjerice, eliptičnoj valjčastojo plohi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jedna izvodnica jest z -os, a ravnalica joj je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$. Primijetimo da je svaka ravnina (trivijalna) valjčasta ploha (za krivulju \mathcal{K} treba uzeti odgovarajući pravac). Mi ćemo, najčešće, promatrati one valjčaste plohe izvodnice kojih su koordinatne osi, a ravnalice su im neke od poznatih krivulja. (Ravnalica, naravno, neće nužno ležati u nekoj od koordinatnih ravnina.)

Napomenimo i to da se prostorna krivulja često zadaju presjekom dviju ploha.

PRIMJER. Kružnicu (zadanu presjekom sfere i ravnine)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x + y - 2 = 0$$

možemo zadati i presjekom dviju valjčastih ploha. Eliminiramo li, naime, varijablu y iz prve jednadžbe uvrštenjem (iz one druge) $y = -x+2$, dobivamo jednadžbu valjčaste plohe $(x-1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1$, koja zajedno s ravninom $x+y-2=0$ određuje tu kružnicu. Dakle, sada promatrana kružnica ima zapis

$$(x-1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1, \quad x+y-2=0.$$

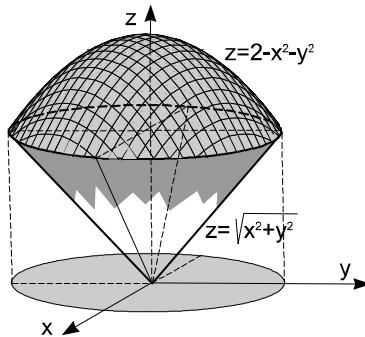
Analogno se (eliminiranjem varijable x) dobiva jednadžba valjčaste plohe $(y-1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1$, koja zajedno s ravninom $x+y-2=0$ određuje tu istu kružnicu. \square

PRIMJER. Skcirati tijelo V omeđeno plohama

$$z-2 = -x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

i opisati ga u pravokutnom i cilindričnom koordinatnom sustavu.

Tijelo V određeno je plohamama $z-2 = -x^2 - y^2$ (paraboloid) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (stožasta ploha). Odredimo projekciju V_{xy} tijela V na xy -ravninu. Odredit ćemo je tako da odredimo projekciju krivulje koja se nalazi u presjeku promatranih ploha. Eliminacijom izraza $x^2 + y^2$ iz $z-2 = -x^2 - y^2$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dobivamo $z^2 + z - 2 = 0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $z_1 = 1$, $z_2 = -2$. Dakle, mora biti $z = 1$, pa je $x^2 + y^2 = 1$. Drugim riječima, presječna krivulja je $x^2 + y^2 = 1, z = 1$, i projekcija presječne krivulje na xy -ravninu je kružnica $x^2 + y^2 = 1$.



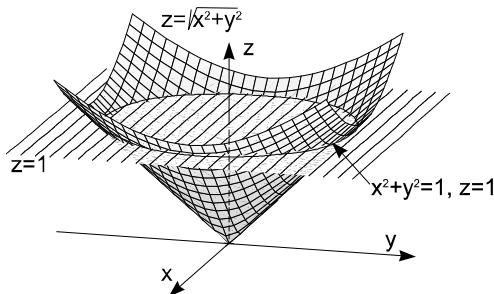
Tražena projekcija V_{xy} je krug $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Ukoliko točka $T = (x, y, z)$ pripada tijelu V , tada njena projekcija $T' = (x, y, 0)$ na xy -ravninu mora pripadati krugu D , a to znači da za njezine koordinate vrijedi $-1 \leq x \leq 1$ i $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$. Konačno, za z - koordinatu točke $T = (x, y, z) \in V$ vrijedi $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$ (točka T leži iznad stožaste plohe) i $z \leq 2 - x^2 - y^2$ (točka T leži ispod plohe paraboloida). Dakle,

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \right\}.$$

U cilindričnom koordinatnom sustavu koordinate projekcije $T' = (\varphi, \rho, 0)$ točke $T = (\varphi, \rho, z) \in V$ mora ležati u krugu D , dakle za njezine koordinate vrijedi $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$. Uvjet za z -kordinatu $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$ prelazi u $\rho \leq z \leq 2 - \rho^2$. Dakle,

$$V = \left\{ (\varphi, \rho, z) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho \leq z \leq 2 - \rho^2 \right\}. \quad \square$$

PRIMJER. Funkcijski graf G_f za funkciju $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ crtamo ističući njegove presjeke ravninom $x = 0$ (to su zrake: $z = y$, $z \geq 0$, $x = 0$; $z = -y$, $z \geq 0$, $x = 0$), ravninom $y = 0$ (to su zrake: $z = x$, $z \geq 0$, $y = 0$; $z = -x$, $z \geq 0$, $y = 0$) i ravninom $z = 1$ (to je razinska krivulja (kružnica) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$). Primijetimo da je G_f **stožasta ploha**.

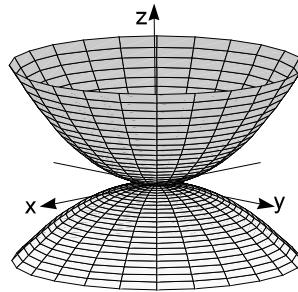


□

PRIMJER. Razinske plohe za funkciju

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid z = 0\}, f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z},$$

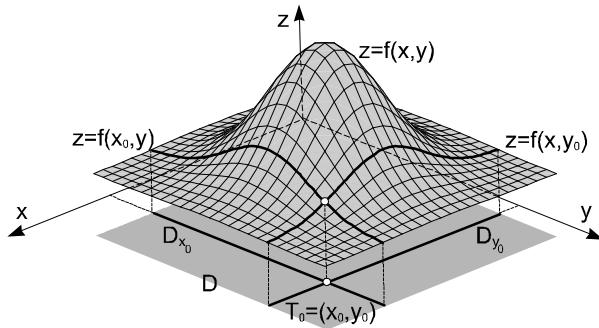
su paraboloidi (bez "tjemena") $z = u_0 (x^2 + y^2)$, $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



□

NAPOMENA. Često se neki skup razinskih krivulja funkcije $(x, y) \mapsto f(x, y)$ crta u odabranoj ravnini $z = z_0$, primjerice, sve se one projiciraju u xy -ravninu $z = 0$. Tada se po njihovu razmještaju može zaključiti ponešto i o samoj funkciji. Tako se npr. prikazuju razinske krivulje - izohipse što na zemljopisnim kartama povezuju točke iste nadmorske visine, odnosno, iste podmorske dubine, kao i izobare - što na sinoptičkim (meteorološkim) kartama povezuju točke jednakoga zračnog tlaka. Štoviše, za zorno prikazivanje razinskih ploha ni nema druge mogućnosti osim da ih crtamo u istom prostoru.

Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ($m \leq 3$) se može zadati i implicitno ili parametarski pod uvjetima sličnim onima što su postavljeni za funkcije iz \mathbb{R} u \mathbb{R} . Mi se nećemo sada na tomu zadržavati. Implicitno zadanim funkcijama ćemo se posebno pozabaviti kasnije.



Na kraju ovoga pododjeljka pokažimo kako se neka globalna svojstva prenose na skalarne funkcije. Koristićemo se standardnim oznakama - točke u \mathbb{R}^2 označavamo sa $T = (x, y)$.

Promotrimo funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, pa uočimo bilo koju točku $T_0 = (x_0, y_0) \in D$. Promotrimo skup

$$D_{y_0} = \{T = (x, y) \in D \mid y = y_0\} \subseteq D,$$

što je presjek skupa D pravcem kroz točku T_0 , usporednim x -osi. U D_{y_0} je varijabilna samo x -ta koordinata pa se na njega smije gledati kao na podskup od \mathbb{R} . Označimo

$$f|_{D_{y_0}} : D_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}$$

pa to suženje smijemo tretirati kao funkciju jedne realne varijable (varijable x) (prethodna slika!). Analogno se dobiva skup

$$D_{x_0} = \{T = (x, y) \in D \mid x = x_0\} \subseteq D$$

i suženje

$$f|_{D_{x_0}} : D_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$$

(to je funkcija jedne realne varijable y).

Rećićemo da je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, **omeđena** ako postoji broj $M \in \mathbb{R}^+$ takav da je $|f(T)| \leq M$ za svaki $T \in D$. Primjetimo da je za omeđenu funkciju f svako suženje $f|_{D_{y_0}}$, $f|_{D_{x_0}}$ ($T = (x_0, y_0) \in D$) omeđena funkcija.

Rećićemo da je funkcija f **uzlazna** (**silazna, strogo uzlazna, strogo silazna, monotona, strogo monotona, po dijelovima monotona**) **po varijabli x** (varijabli y), ako je, za svaku točku $T = (x_0, y_0) \in D$, pripadno suženje $f|_{D_{y_0}} : D_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ($f|_{D_{y_0}} : D_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}$) uzlazna (silazna, strogo uzlazna, strogo silazna, monotona, strogo monotona, po dijelovima monotona) funkcija. Analogno se ovi pojmovi prenose i na realne funkcije triju realnih varijabli. Na isti način se mogu prenijeti i ostala svojstva realnih funkcije jedne varijable.

Analogno se definiraju navedeni pojmovi i za funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 2$, (u tom slučaju nemamo geometrijskog zora - nemamo ilustraciju crtežom).

3.2 NEPREKIDNOST FUNKCIJE

DEFINICIJA 3.1 Neka je Ω otvoren skup u \mathbb{R}^n . Za funkciju $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ kažemo da je **neprekidna u točki** $P_0 \in \Omega$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku točku $P \in \Omega$

$$d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Funkcija f je **neprekidna na skupu** $S \subseteq \Omega$, ako je ona neprekidna u svakoj točki skupa S . Funkcija f je **klase C na** Ω , ako je f neprekidna na Ω . Skup svih neprekidnih funkcija na Ω označavamo sa $C(\Omega)$.

Simbolički

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega) \quad d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon \quad \text{ili}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega) \quad P \in B(P_0, \delta) < \delta \Rightarrow f(P) \in B(f(P_0), \varepsilon).$$

PRIMJER. Konstantna funkcija je neprekidna. □

PRIMJER. Projekcije $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $p_i(P) = x_i$, $P = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, su neprekidne funkcije. Naime, za dani $\varepsilon > 0$ se kugla $B(P_0, \varepsilon)$ preslikava na interval $\langle x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon \rangle$ pa imamo

$$d(P, P_0) < \varepsilon \Rightarrow |p_i(P) - p_i(P_0)| < \varepsilon. \quad \square$$

TEOREM 3.2 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki $P_0 \in \Omega$. Neka je $\varphi : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ definirana na otvorenom skupu $\Omega' \subseteq \mathbb{R}$ koji sadrži sliku $f[\Omega]$ i neprekidna u točki $x_0 = f(P_0)$. Tada je kompozicija $h = \varphi f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u točki P_0 .

DOKAZ. Po pretpostavci je φ neprekidna u točki $x_0 = f(P_0)$ pa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta' > 0)(\forall x \in \Omega') \quad x \in B(x_0, \delta') \Rightarrow \varphi(x) \in B(\varphi(x_0), \varepsilon).$$

Budući je f neprekidna funkcija u točki $P_0 \in \Omega$, za ovako odabrani $\delta' > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi

$$(\forall P \in \Omega) \quad d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \delta', \quad \text{tj.}$$

$$(\forall P \in \Omega) \quad P \in B(P_0, \delta) \Rightarrow f(P) \in B(f(P_0), \delta').$$

Stavimo li $x = f(P)$ dobili smo da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega) \quad P \in B(P_0, \delta) \Rightarrow \varphi(f(P)) \in B(\varphi(f(P_0)), \varepsilon) \quad \text{tj.}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega) \quad P \in B(P_0, \delta) \Rightarrow h(P) \in B(h(P_0), \varepsilon),$$

pa je zaista kompozicija $h = \varphi f$ neprekidna u točki P_0 . ■

TEOREM 3.3 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka su $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije u točki $P_0 \in \Omega$. Tada su i funkcije

- (1) $f + g$,
- (2) $f - g$,
- (3) $f \cdot g$,
- (4) $f : g$ (ako je $g(P) \neq 0$, $P \in \Omega$),
- (5) $|f|$

neprekidne funkcije u točki $P_0 \in \Omega$.

LEMA 3.4 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki $P_0 \in \Omega$. Tada je f omeđena na nekoj kugli $B(P_0, \mu)$, tj. postoji realni brojevi $\mu > 0$ i $M > 0$ takvi da vrijedi:

$$P \in B(P_0, \mu) \Rightarrow |f(P)| < M.$$

DOKAZ. Za $\varepsilon = 1$ iz neprekidnosti funkcije f u točki P_0 slijedi egzistencija broja $\mu > 0$ takvog da

$$P \in B(P_0, \mu) \Rightarrow f(P) \in B(f(P_0), 1).$$

Sada je

$$|f(P)| = |f(P) - f(P_0) + f(P_0)| \leq |f(P) - f(P_0)| + |f(P_0)| \leq 1 + |f(P_0)|$$

i stavljajući $M = 1 + |f(P_0)|$ dobivamo traženu tvrdnju. ■

LEMA 3.5 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki $P_0 \in \Omega$ i $f(P_0) \neq 0$. Tada postoji kugla $B(P_0, \delta)$ takva da

$$P \in B(P_0, \delta) \Rightarrow f(P) > \frac{1}{2}f(P_0), \text{ ako je } f(P_0) > 0, \text{ odnosno}$$

$$P \in B(P_0, \delta) \Rightarrow f(P) < \frac{1}{2}f(P_0), \text{ ako je } f(P_0) < 0.$$

DOKAZ. Neka je $f(P_0) > 0$. Zbog neprekidnosti funkcije u točki P_0 za $\varepsilon = \frac{1}{2}f(P_0)$ postoji $\delta > 0$ tako da $P \in B(P_0, \delta) \Rightarrow f(P) \in B(f(P_0), \varepsilon)$. Sada je

$$f(P_0) = f(P_0) - f(P) + f(P) < |f(P_0) - f(P)| + f(P)$$

i imamo

$$f(P) > f(P_0) - |f(P_0) - f(P)| > f(P_0) - \varepsilon = \frac{1}{2}f(P_0). \quad \blacksquare$$

Dokaz teorema 3.3. Tvrđnja (1) slijedi iz neprekidnosti funkcija f i g :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta' > 0)(\forall P \in \Omega) \quad d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta'' > 0)(\forall P \in \Omega) \quad d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |g(P) - g(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

i za $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ imamo

$$d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |(f + g)(P) - (f + g)(P_0)| = |f(P) - f(P_0) + g(P) - g(P_0)| <$$

$$|f(P) - f(P_0)| + |g(P) - g(P_0)| < \varepsilon.$$

Time je pokazano da je $f + g$ neprekidna funkcija u točki P_0 .

Tvrđnja (2) se analogno dokazuje.

Dokaz tvrdnje (3). Neka je $\varepsilon > 0$. Po Lemi 3.4. postoji realni brojevi $\mu > 0$ i $M > 0$ takvi da vrijedi:

$$P \in B(P_0, \mu) \Rightarrow |f(P)| < M \quad \text{i} \quad |g(P)| < M$$

Budući su f i g neprekidne funkcije u točki P_0 to za $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$ postoji $\delta \in (0, \mu)$ takav da vrijedi

$$P \in B(P_0, \delta) \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon' \quad \text{i} \quad |g(P) - g(P_0)| < \varepsilon'.$$

Sada za $P \in B(P_0, \delta)$ imamo

$$|(f \cdot g)(P) - (f \cdot g)(P_0)| = |f(P) \cdot g(P) - f(P_0) \cdot g(P_0)| =$$

$$|f(P) \cdot (g(P) - g(P_0)) + (f(P) - f(P_0)) \cdot g(P_0)| \leq$$

$$|f(P)| \cdot |g(P) - g(P_0)| + |f(P) - f(P_0)| \cdot |g(P_0)| < M \cdot \varepsilon' + \varepsilon' \cdot M = 2\varepsilon' M = \varepsilon$$

i zaista je funkcija $f \cdot g$ neprekidna u točki P_0 .

Dokaz tvrdnje (4). Funkcija $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ je neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Budući je $g(P) \neq 0$, $P \in \Omega$, to je kompozicija φg definirana na Ω i neprekidna u točki P_0 (po Teoremu 3.2.), tj. funkcija $\frac{1}{g}$ je neprekidna u točki P_0 . Po trvdnji (2) slijedi da je funkcija $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$ neprekidna u točki P_0 .

Dokaz tvrdnje (5). Funkcija $\varphi(x) = |x|$ je neprekidna na \mathbb{R} . Po Teoremu 3.2. je kompozicija $\varphi f = \varphi(f) = |f|$ neprekidna u točki P_0 . ■

KOROLAR 3.6 *Zbrajanje, oduzimanje i množenje realnih brojeva su neprekidne funkcije.*

DOKAZ. Funkcije zbrajanja, oduzimanja i množenja možemo zapisati na način:

$$(x, y) \mapsto p_1(x, y) + p_2(x, y) = x + y,$$

$$(x, y) \mapsto p_1(x, y) - p_2(x, y) = x - y,$$

$$(x, y) \mapsto p_1(x, y) \cdot p_2(x, y) = x \cdot y,$$

i budući su projekcije p_1 i p_2 neprekidne funkcije na \mathbb{R}^2 , tvrdnja teorema slijedi po Teoremu 3.3. ■

KOROLAR 3.7 *Svaki polinom $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija.*

DOKAZ. Dokažimo tvrdnju za $n = 2$. Tada je

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m'} a_{ij} x^i y^j = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m'} a_{ij} [p_1(x, y)]^i [p_2(x, y)]^j.$$

Budući su projekcije neprekidne funkcije, po Teoremu 3.3. (tvrdnje (3) i (1)), slijedi da je polinom neprekidna funkcija. ■

NAPOMENA. Prethodni korolar povlači da je i skalarno množenje

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle \cdot | \cdot \rangle(P, Q) \equiv \langle P | Q \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

neprekidna funkcija. Nadalje, i norme $\| \cdot \|$, $\| \cdot \|_\infty$, $\| \cdot \|_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ su neprekidne funkcije. Dokažimo da je euklidska norma $\| \cdot \|$ neprekidna funkcija (za ostale se dokazuje slično). Budući da je

$$\|P\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}, \quad P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

radi se o kompoziciji neprekidnih funkcija, polinoma $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (drugoga stupnja) od n varijabla i drugoga korijena $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, pa je ta norma neprekidna funkcija po Teoremu 3.2.

KOROLAR 3.8 Područje definicije racionalne funkcije je otvoren skup i na njemu ona neprekidna.

DOKAZ. Neka je f racionalna funkcija, tj. $f = \frac{p}{q}$, $p, q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ polinomi. Dokažimo da je skup

$$\Omega = \{P \in \mathbb{R}^n \mid g(P) \neq 0\}$$

otvoren. Ako je $P_0 \in \Omega$, onda je $g(P_0) \neq 0$ i po Lemi 3.5 postoji $\delta > 0$ takav da je $g(P) \neq 0$ za svaki $P \in B(P_0, \delta)$. Slijedi da je $B(P_0, \delta) \subseteq \Omega$, i zaista je Ω otvoren skup.

Neprekidnost funkcije f slijedi iz Teorema 3.3. i Korolara 3.7. ■

KOROLAR 3.9 Dijeljenje realnih brojeva definirano je na skupu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ i tamo je neprekidno.

DOKAZ. Tvrđnja slijedi iz prethodnog korolara:

$$x : y = \frac{p_1(x, y)}{p_2(x, y)}$$

(p_1 i $\frac{1}{p_2(x, y)}$ su neprekidne funkcije na $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$). ■

KOROLAR 3.10 Skup $C(\Omega)$ svih neprekidnih funkcija na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je vektorski prostor.

DOKAZ. Zaista, ako su $f, g \in C(\Omega)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, po Teoremu 3.3. je i $\alpha f + \beta g \in C(\Omega)$, što znači da je $C(\Omega)$ vektorski prostor. ■

3.3 LIMES FUNKCIJE

DEFINICIJA 3.11 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, P_0 gomilište skupa Ω i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Za realan broj L kažemo da je **limes funkcije** f u točki P_0 , ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $P \in \Omega$

$$d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon.$$

Limes funkcije f u točki P_0 (ili **granična vrijednost funkcije** f u točki P_0) simbolički možemo zapisati na način:

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega) \quad d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon \quad \text{ili} \\ & (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega) \quad P \in B(P_0, \delta) < \delta \Rightarrow f(P) \in B(L, \varepsilon). \end{aligned}$$

NAPOMENA. Pokažimo da ukoliko funkcija f ima limes u točki $P_0 \in \Omega'$ da je tada on jednoznačno određen. Zaista, ukoliko bi funkcija f u točki P_0 imala dva limesa različita L_1 i L_2 , tada su $B(L_1, \frac{\varepsilon}{2})$ i $B(L_2, \frac{\varepsilon}{2})$, $\varepsilon = d(L_1, L_2) = |L_2 - L_1|$, disjunktne kugle oko L_1 i L_2 . Po definiciji limesa vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta' > 0)(\forall P \in \Omega) \quad P \in B(P_0, \delta') < \delta \Rightarrow f(P) \in B(L_1, \frac{\varepsilon}{2}),$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta'' > 0)(\forall P \in \Omega) \quad P \in B(P_0, \delta'') < \delta \Rightarrow f(P) \in B(L_2, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Neka je $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Sada za $P \in B(P_0, \delta)$ imamo protuslovje

$$\{f(P) \mid P \in B(P_0, \delta)\} \subseteq B(L_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(L_2, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset. \quad \square$$

Prethodno dopušta zapisati graničnu vrijednost funkcije kao

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$$

a katkada koristimo i $f(P) \xrightarrow[P \rightarrow P_0]{} L$.

Oznaka $f(P) \rightarrow L$ - "f(P) konvergira k L konvergira kada P teži P_0 " - nesvesno uvlači elemente gibanja u pojam limesa. Naime da P teži k P_0 zamišljamo da se točka P , slučaju npr. ravnine, giba u toj ravnini i sve više približava točki P_0 . Uz takvo gibanje je vezana staza, a takvih već u ravnini ima beskonačno mnogo. Treba uočiti da $f(P)$ konvergira L kada se P približava P_0 po **bilo kojoj stazi**. Sljedeći primjer pokazuje da računanje limesa po stazama treba provesti ukoliko "naslučujemo" da limes **ne** postoji.

PRIMJER. Funkcija

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

je definirana na skupu $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ i ishodište je njegovo gomilište. Ako se ishodištu $T_0 = (0, 0)$ približavamo po pravcu $y = kx$, onda $f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2}$ pokazuje da je $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \frac{k}{1+k^2}$. Dakle, u svakom smjeru f ima limes, ali on zavisi od smjera. Dakle, funkcija f nema limes u točki $T_0 = (0, 0)$. \square

Prethodni primjer ukazuje na jedan jednostavan postupak za ustanoviti da funkcija nema limesa. Naime, ukoliko $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ide po stazama C_1 (preko funkcije $y = g_1(x)$) i C_2 (preko funkcije $y = g_2(x)$) te ako je

$$\begin{aligned} u_1 &= \lim_{\substack{(x_0, y_0) \\ y=g_1(x)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, g_1(x)) \neq \\ &\neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, g_2(x)) = \lim_{\substack{(x_0, y_0) \\ y=g_2(x)}} f(x, y) = u_2 \end{aligned}$$

tada $\lim_{(x_0, y_0)} f(x, y)$ ne postoji.

PRIMJER. Ispitajte graničnu vrijednost funkcije

$$f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$$

u točki $(0, 0)$.

Ukoliko $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ide po stazama koje određuju pravci $y = kx$ imamo

$$\lim_{\substack{(0,0) \\ y=kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{3k}{1 + k^2} = 0,$$

a ukoliko $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ide po stazama koje određuju parabole $y = k\sqrt{x}$ imamo

$$\lim_{\substack{(0,0) \\ y=k\sqrt{x}}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cdot k\sqrt{x}}{x^2 + k^2 x} = 0.$$

Opet smo računali limes po nekim stazama ($y = kx, y = k\sqrt{x}$, ali ne svim!) pa bi olako mogli zaključiti da je 0 vrijednost traženog limesa. Ipak se 0 snažno nameće. Zaista, vrijedi

$$0 < \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{3x^2 |y|}{x^2 + y^2} \underset{\text{jer je } \frac{x^2}{x^2+y^2} < 1}{<} 3|y| \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\rightarrow} 0,$$

pa je $\lim_{(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$. □

TEOREM 3.12 Funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, ima limes L u točki $P_0 \in \Omega'$ ako i samo ako je funkcija $\tilde{f} : \Omega \cup \{P_0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(P) = \begin{cases} f(P), & P \in \Omega \\ L, & P = P_0 \end{cases}$$

neprekidna.

DOKAZ. \Rightarrow Neka je $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$. To znači da vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega) \quad d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon.$$

Definiramo funkciju \tilde{f} sa $\tilde{f}(P) = \begin{cases} f(P), & P \in \Omega \\ L, & P = P_0 \end{cases}$ pa vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega) \quad d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |\tilde{f}(P) - \tilde{f}(P_0)| < \varepsilon,$$

i zaista je \tilde{f} neprekidna funkcija.

\Leftarrow Neka je $\tilde{f} : \Omega \cup \{P_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(P) = \begin{cases} f(P), & P \in \Omega \\ L, & P = P_0 \end{cases}$ neprekidna funkcija. Dakle, vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega \cup \{P_0\}) \quad d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |\tilde{f}(P) - \tilde{f}(P_0)| < \varepsilon$$

i dalje

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \Omega) \quad d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon,$$

pa je $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$. ■

Neposredna posljedica ovog teorema je:

KOROLAR 3.13 Funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna u točki $P_0 \in \Omega$ ako i samo ako je $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

TEOREM 3.14 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije koje imaju limes u točki $P_0 \in \Omega'$. Tada i funkcije $f + g$, $f - g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$ i $|f|$ imaju limes u točki P i vrijedi:

$$(1) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} (f + g)(P) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) + \lim_{P \rightarrow P_0} g(P);$$

$$(2) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} (f - g)(P) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) - \lim_{P \rightarrow P_0} g(P);$$

$$(3) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} (\lambda f)(P) = \lambda \lim_{P \rightarrow P_0} f(P);$$

$$(4) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} (f \cdot g)(P) = [\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)] \cdot [\lim_{P \rightarrow P_0} g(P)];$$

Ako je još $g(P) \neq 0$, $P \in \Omega$, i $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P) \neq 0$ onda i funkcija $\frac{f}{g}$ ima limes u točki P_0 i vrijedi:

$$(5) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \left(\frac{f}{g} \right)(P) = \frac{\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)}{\lim_{P \rightarrow P_0} g(P)}.$$

DOKAZ. Dokaz slijedi po Teoremu 3.12., Korolaru 3.13. i Teoremu 3.3. ■

PRIMJER. Funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

ima u točki $(0, 0)$ graničnu vrijednost 0, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

Zaista, budući da je $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$, to je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^2 y}{2xy} \right| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x}{2} \right| = 0,$$

pa je i $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

Zadatak se može riješiti i prijelazom na polarne koordinate. Budući je $x = \rho \cos \varphi$ i $y = \rho \sin \varphi$, tada $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ako i samo ako $\rho \rightarrow 0$.

Imamo

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos^2 \varphi \sin \varphi = 0.$$

Budući da dobiveni rezultat ne ovisi o φ , tj. o kutu pod kojim "dolazimo" u točku $(0, 0)$, dakle ne ovisi o kružnici po kojoj dolazimo u točku $(0, 0)$, zaključujemo da limes postoji i da je jednak 0. □

PRIMJER. Funkcija

$$f(x, y) = \frac{5x^3 - 7y^3}{x^2 + y^2}$$

je definirana na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Nađimo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$. Vrijedi

$$|5x^3 - 7y^3| \leq 5|x^3| + 7|y^3| \leq 7(x^2|x| + y^2|y|) \leq$$

$$7(x^2\sqrt{x^2 + y^2} + y^2\sqrt{x^2 + y^2}) = 7(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}},$$

pa je

$$|f(x, y)| \leq 7(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} 7(x^2 + y^2)^{-1} = 7(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Budući $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ kada $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ to $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = 0$ povlači $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. \square

U ovom slučaju uspoređivanje brojnika i nazivnika bilo je jednostavno jer funkcija $x^2 + y^2$ ima samo jednu nulu. Međutim za funkciju

$$g(x, y) = \frac{5x^3 - 7y^3}{x - y}$$

situacija je drugačija. Ova funkcija nije definirana na pravcu $y = x$, pa pitanje limesa od g kada se (x, y) približava točkama toga pravca je znatno teže. To je općenito slučaj kada se nastoji promatrati limes funkcije kada se točka iz otvorenog skupa Ω približava "graničnoj" točki toga skupa.

3.4 JEDNOLIKO NEPREKIDNE FUNKCIJE

Napomenimo da je funkcija $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ je **neprekidna na kvadru** $K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$, $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$, ako postoje otvoreni skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i neprekidna funkcija $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takvi da je $K \subset \Omega$ i $\tilde{f}(P) = f(P)$, $P \in K$.

TEOREM 3.15 *Neka je $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na zatvorenom kvadru $K \subset \mathbb{R}^n$. Tada je:*

- (1) *Funkcija f omeđena na K ;*
- (2) *Funkcija f dostiže svoju najveću i majmanju vrijednost na K , tj. postoji točke $A, B \in K$ takve da je $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$, $P \in K$;*
- (3) *Slika n -kvadra K je segment, tj. $f(K) = [f(A), f(B)] \subset \mathbb{R}$.*

DOKAZ. Dokaz tvrdnje (1) provodimo kontradikcijom.

Pretpostavimo da f nije omeđena na K . Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $P_k \in K$ takva da je $|f(P_k)| > k$. Ovako dobiven niz $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u K , po Teoremu 2.18, ima konvergentni podniz $(P_{p(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ i neka je $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{p(k)} = P_0$. Tada je $P_0 \in K$ (po Korolaru 2.19) i zbog neprekidnosti od f imamo da je $f(P_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(P_{p(k)})$. Konvergentan niz $k \mapsto f(P_{p(k)})$ je omeđen, a to je u protuslovju sa $|f(P_{p(k)})| > p(k) \geq k$. Dakle, f mora biti omeđena funkcija na K .

(2) Neka je $M = \sup\{f(P) \mid P \in K\}$ i $m = \inf\{f(P) \mid P \in K\}$.

Po tvrdnji (1) slijedi da su M i m realni brojevi. Po definiciji supremuma zaključujemo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji točka $Q_k \in K$ takva da je

$$M - \frac{1}{k} < f(Q_k) \leq M.$$

Dolazimo do omeđenog niza $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i on ima konvergentni podniz $(Q_{p(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ i neka je $Q_o = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_{p(k)}$. Iz $Q_0 \in K$ i neprekidnosti funkcije f dobivamo $f(Q_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(Q_{p(k)})$. Budući je $M - \frac{1}{p(k)} < f(Q_{p(k)}) \leq M$ to je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(M - \frac{1}{p(k)} \right) < \lim_{k \rightarrow \infty} f(Q_{p(k)}) \leq M$$

i dalje $M \leq f(Q_0) \leq M$, tj. $f(Q_0) = M$. Dakle, f dostiže u točki $B = Q_0$ svoj supremum. Budući je $f(P) \leq f(B)$ za svaki $P \in K$ to funkcija f u točki B ima svoj maksimum.

Analogno se pokazuje da postoji točka A za koju je $f(A) = m$.

(3) Neka je $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$. Funkcija $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = f(a_1 + (b_1 - a_1)t, \dots, a_n + (b_n - a_n)t)$$

je neprekidna i vrijedi $g(0) = f(A)$, $g(1) = f(B)$. No sad funkcija g poprima sve međuvrijednosti između $f(A)$ i $f(B)$, tj. za svaki $\alpha \in [f(A), f(B)]$ postoji $\tau \in [0, 1]$ tako da je $\alpha = g(\tau)$. Dakle, $\alpha = f(P_\tau)$ gdje je $P_\tau \in K$ točka s koordinatama $P_\tau = (a_1 + (b_1 - a_1)\tau, \dots, a_n + (b_n - a_n)\tau)$. ■

DEFINICIJA 3.16 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Za funkciju $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je **jednoliko (uniformno) neprekidna** na skupu $S \subseteq \Omega$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P, Q \in S) \quad d(P, Q) < \delta \Rightarrow |f(P) - f(Q)| < \varepsilon. \quad (1)$$

TEOREM 3.17 Ako je $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na zatvorenom n -kvadru K onda je ona i jednoliko neprekidna na tom n -kvadru.

DOKAZ. Dokaz provodimo metodom suprotnoga. Pretpostavimo da f nije jednoliko neprekidna na kvadru K . Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ možemo naći točke Q'_δ i Q''_δ u K za koje je $d(Q'_\delta, Q''_\delta) < \delta$ ali je

$|f(Q'_\delta) - f(Q''_\delta)| \geq \varepsilon$. Posebno za $\delta = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}$) dobivamo točke $P'_k, P''_k \in K$ za koje je

$$d(P'_k, P''_k) < \frac{1}{k}, \quad |f(P'_k) - f(P''_k)| \geq \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Omeđen niz točaka $(P'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz $(P'_{p(k)})$ i neka je $P_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{p(k)}$. Tada

$$d(P_0, P''_{p(k)}) \leq d(P_0, P'_{p(k)}) + d(P'_{p(k)}, P''_{p(k)}) \leq d(P_0, P'_{p(k)}) + \frac{1}{p(k)}$$

povlači $(P''_{p(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P_0$. Budući je f neprekidna funkcija to

$$(f(P'_{p(k)})) \rightarrow f(P_0) \text{ i } (f(P''_{p(k)})) \rightarrow f(P_0),$$

a to je u protuslovju sa $|f(P'_k) - f(P''_k)| \geq \varepsilon$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dakle, f mora biti uniformno neprekidna na K . ■

Teoremi 3.15 i 3.17 se mogu poopćiti tako da umjesto kvadra uzmememo kompaktan skup. U tu svrhu dajemo jednu novu karakterizaciju kompaktnog skupa $K \subset \mathbb{R}^n$ na osnovu koje se pojednostavljuje kompaktnost skupa K u topološkim prostorima. Pored toga i u slučaju prostora \mathbb{R}^n ta karakterizacija kompaktnosti je vrlo korisna i pogodna za dokazivanje teorema vezanih uz kompaktne skupove.

DEFINICIJA 3.18 Familija $(\Omega_j, j \in J)$ nepraznih otvorenih skupova iz \mathbb{R}^n je **otvoren pokrivač** skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$, ako je skup S sadržan u uniji skupova Ω_j , tj. $S \subseteq \bigcup_{j \in J} \Omega_j$.

Ako je $P \in S$, onda postoji bar jedan $j \in J$ takav da je $P \in \Omega_j$. Budući je Ω_j otvoren skup, postoji broj $\delta(P) > 0$ takav da $B(P, \delta(P))$ leži u Ω_j . I tako dobivene kugle pokrivaju skup S . No radijusi tih kugala su različiti; za jednu točku $P \in S$ je $\delta(P)$ mali, za drugu točku $Q \in S$ je $\delta(Q)$ veliki, itd. Međutim za kompaktan skup $K = S$ možemo uzeti broj $\delta > 0$ neovisan od pojedine točke skupa K i takav da kugla $B(P, \delta)$ leži u nekom članu Ω_j pokrivača. Ta "jednolikost" odabiranja kugle je od osnovne važnosti kod proučavanja kompaktnih skupova.

TEOREM 3.19 (H. Lebesgue) Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $(\Omega_j, j \in J)$ otvoren pokrivač skupa K . Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaku točku $P \in K$ postoji indeks $j(P) = j \in J$ takav da je $B(P, \delta) \subseteq \Omega_j$.

DOKAZ. Dokaz provodimo svođenjem na protuslovlje.

Pretpostavimo suprotno, tj. da takav $\delta > 0$ ne postoji. To znači da postoji bar jedna točka $P \in K$ za koju kugla $B(P, \delta)$ nije sadržana ni u jednom od skupova Ω_j , $j \in J$. Posebno za broj $\delta = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}$) postoji točka $P_k \in K$ takva da kugla $B(P_k, \frac{1}{k})$ nije pokrivena niti jednim od skupova Ω_j , $j \in J$. Budući je K kompaktan, niz $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz $(P_{p(k)})$ i limes P_0 tog podniza leži u K . Iz $P_0 \in K$ slijedi da postoji bar jedan indeks $j_0 \in J$ takav da je $P_0 \in \Omega_{j_0}$. No tada postoji $r > 0$ takav da je $B(P_0, r) \subseteq \Omega_{j_0}$. Iz $d(P_0, P_{p(k)}) + \frac{2}{p(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ slijedi da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $d(P_0, P_{p(m)}) + \frac{2}{p(m)} < r$. Slijedi

$$B(P_{p(m)}, \frac{1}{p(m)}) \subseteq B(P_0, r) \subseteq \Omega_{j_0}. \quad (\text{a})$$

Zaista, $P \in B(P_{p(m)}, \frac{1}{p(m)})$ povlači

$$d(P, P_0) \leq d(P_0, P_{p(m)}) + d(P_{p(m)}, P) \leq \left(r - \frac{2}{p(m)}\right) + \frac{2}{p(m)} < r$$

pa je $P \in B(P_0, r)$. Sada (a) pokazuje da je kugla $B(P_{p(m)}, \frac{1}{p(m)})$ pokrivena elementom Ω_{j_0} pokrivača ($\Omega_j, j \in J$). S druge strane, točka P_k je uzeta tako da kugla $B(P_k, \frac{1}{k})$ nije sadržana u nekom elementu pokrivača. Za $k = p(m)$ imamo protuslovlje. ■

Ako je $\Omega_j = \Omega$ za svaki $j \in J$ imamo:

KOROLAR 3.20 *Ako je kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^n$ sadržan u otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, onda postoji $\delta > 0$ takav da je*

$$(\forall P \in K) \quad B(P, \delta) \subseteq \Omega.$$

Tvrđnju prethodnog korolara možemo iskazati i ovako: *Ako otvoren skup Ω sadrži kompaktan skup K onda on sadrži i generaliziranu kuglu $B(K, \delta) = \bigcup_{P \in K} B(P, \delta)$ radijusa $\delta > 0$ opisanu oko K .*

TEOREM 3.21 (Borel-Lebesgue)

- (a) *Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $(\Omega_j, j \in J)$ otvoreni pokrivač za K . Tada se pokrivač može reducirati na konačan pokrivač, tj. postoji konačan podskup indeksa $J_0 = \{j_1, \dots, j_n\} \subseteq J$ tako da je $(\Omega_j, j \in J_0)$ opet pokrivač za K .*

- (b) Ako skup $K \subset \mathbb{R}^n$ ima svojstvo da se svaki njegov otvoren pokrivač može reducirati na konačan pokrivač, onda je K kompaktan skup.

DOKAZ. (a) Neka je K kompaktan skup. Po Teoremu 3.19 postoji $\delta > 0$ takav da za svaku točku $P \in K$ kuglu $B(P, \delta)$ sadrži neki od elemenata Ω_j . S druge strane, za ovaj δ skup K ima konačnu δ -mrežu (Teorem 2.24), tj. postoji $m \in \mathbb{N}$ i točke $P_1, \dots, P_m \in K$ takve da je $K \subseteq \bigcup_{k=1}^m B(P_k, \delta)$. Ako je $j_k \in J$ onaj indeks za koji je $B(P_k, \delta) \subseteq \Omega_{j_k}$ ($k = 1, \dots, m$) dobivamo da je $(\Omega_{j_k}, k = 1, \dots, m)$ traženi konačan pokrivač.

(b) Pokažimo prvo da je K zatvoren, tj. da je $\mathbb{R}^n \setminus K$ otvoren.

Neka je $P \in \mathbb{R}^n \setminus K$ bilo koja točka. Za $k \in \mathbb{N}$ stavimo $V_k = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(P, \frac{1}{k})}$. Tu je $\overline{B(P, \frac{1}{k})} = \{Q \in \mathbb{R}^n \mid d(Q, P) \leq \frac{1}{k}\}$ zatvorena kugla, dakle zatvoren skup, pa je V_k otvoren skup. Osim toga, vrijedi $V_k \subseteq V_{k+1}$. Sada je

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(P, \frac{1}{k})} = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B(P, \frac{1}{k})} = \mathbb{R}^n \setminus \{P\} \supset K.$$

Dakle, $(V_k, k \in \mathbb{N})$ je otvoreni pokrivač za K i on se, po pretpostavci, dade reducirati na konačan pokrivač $(V_{k_1}, \dots, V_{k_m})$. Ako je p najveći od indeksa k_1, \dots, k_m onda je $K \subseteq V_p$, pa je

$$B(P, \frac{1}{p}) \subset \overline{B(P, \frac{1}{p})} = \mathbb{R}^n \setminus V_p \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$$

i zaista je K zatvoren skup.

Dokažimo da je K omeđen.

Familija $(B(P, 1), P \in K)$ kugala radijusa 1 sa središta u K je pokrivač za K . Po pretpostavci on se dade reducirati na konačan pokrivač. Dakle, postoji kugle $B(P_1, 1), \dots, B(P_k, 1)$ koje pokrivaju K , Budući su te kugle omeđene, to je i K omeđen (jer je sadržan u konačnoj uniji omeđenih skupova). ■

TEOREM 3.22 Neka je $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}^n$. Tada je:

- (1) Funkcija f je jednoliko neprekidna na K (Heineov teorem);
- (2) Slika $f[K]$ je kompaktan skup.

- (3) Funkcija f dostiže svoju najveću i majmanju vrijednost na K , tj. postoji točke $A, B \in K$ takve da je

$$f(A) \leq f(P) \leq f(B), \quad P \in K.$$

DOKAZ. (1) Neka je $\varepsilon > 0$. Funkcija f je neprekidna u točki $P \in K$ pa postoji $\delta(P) > 0$ takav da f skup $K \cap B(P, \delta(P))$ preslikava u kuglu $B(f(P), \frac{\varepsilon}{2})$. Sada je $(B(P, \delta(P)), P \in K)$ otvoren pokrivač kompaktog skupa K i prema Teoremu 3.19, postoji $\delta > 0$ takav da za svaku točku $P_0 \in K$ kugla $B(P_0, \delta)$ leži u nekom članu $B(P, \delta(P))$ promatranog pokrivača. Ako su P' i P'' točke iz K za koje je $d(P', P'') < \delta$, onda točke P' i P'' leže u nekoj kugli $B(P, \delta(P))$ pa je

$$d(f(P'), f(P'')) < d(f(P'), f(P)) + d(f(P), f(P'')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

što pokazuje da je f jednoliko neprekidna funkcija.

- (2) Prema Teoremu 2.24 za svaki $\varepsilon > 0$, dakle i za ovako odabrani $\delta > 0$ postoji konačan skup $M_\delta \subseteq K$ koji je δ -mreža za skup K . Drugim riječima postoji konačno mnogo točaka $P_1, \dots, P_j \in K$ takvih da je

$$K \subset B(P_1, \delta) \cup \dots \cup B(P_j, \delta).$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} f[K] &\subseteq f[B(P_1, \delta) \cap K] \cup \dots \cup f[B(P_j, \delta) \cap K] \Rightarrow \\ f[K] &\subseteq \overline{B(f(P_1), \frac{\varepsilon}{2})} \cup \dots \cup \overline{B(f(P_j), \frac{\varepsilon}{2})} \equiv K'_\varepsilon. \end{aligned}$$

Budući je K'_ε konačna unija zatvorenih kugala on je zatvoren i omeđen, dakle kompaktan. To daje da je skup $f[K]$ omeđen i da bi dokazali da je on kompaktan treba još dokazati da je on i zatvoren. Neka je $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz u $f[K]$ koji konvergira točki t_0 . Treba dokazati $t_0 \in f[K]$. Neka je $T_k \in K$ točka za koju je $f(T_k) = t_k$. Niz $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ iz K ima konvergentni podniz $(T_{p(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ koji konvergira prema točki $T_0 \in K$ (jer je K kompaktan). Sada neprekidnost od f povlači $f(T_0) = \lim f(T_{p(k)}) = \lim t_{p(k)} = t_0$, što pokazuje da je $t_0 \in f[K]$.

- (3) Budući je $f[K] \subset \mathbb{R}$ kompaktan skup (po (2)), dakle zatvoren i omeđen, postoji $m = \inf(f[K]) \in f[K]$ i $M = \sup(f[K]) \in f[K]$. Ako su $A, B \in K$ točke za koje je $m = f(A)$, $M = f(M)$, onda za njih vrijedi $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$, $P \in K$. ■

3.5 ZADACI ZA VJEŽBU

1. Točke $T_1 = (-1, 0, 0)$, $T_2 = (\sqrt{3}, 1, 4)$, $T_3 = (1, 1, 1)$ i $T_4 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu $(O; x, y, z)$ zapisište u cilindričnom koordinatnom sustavu $(O; \varphi, \rho, z)$.
2. Točke $T_1 = (0, 0, 1)$, $T_2 = (0, \pi, 3)$, $T_3 = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 1)$ i $T_4 = (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, 2)$ u sfernom koordinatnom sustavu $(O; \varphi, \vartheta, r)$ prikažite u Kartezijevom koordinatnom sustavu $(O; x, y, z)$.
3. Točke $T_1 = (-3, 0, 0)$, $T_2 = (\sqrt{3}, 0, 1)$, $T_3 = (1, 1, \sqrt{2})$ i $T_4 = (-\sqrt{3}, -3, -2)$ u sustavu $(O; x, y, z)$ zapisište u sustavu $(O; \varphi, \vartheta, r)$.
4. Nacrtajte plohe koje u cilindričnom koordinatnom sustavu $(O; \varphi, \rho, z)$ imaju zapis:

(a) $\rho = 3$;	(b) $\rho = \sqrt{2}$;
(c) $\varphi = -\frac{\pi}{4}$;	(d) $\varphi = \frac{\pi}{3}$;
(e) $z = \rho^2$;	(f) $z - 2 = \rho^2$;
(g) $\rho = 2 \cos \varphi$;	(h) $\rho^2 + z^2 = 25$.
5. Nacrtajte plohe koje u sfernom koordinatnom sustavu $(O; \varphi, \vartheta, r)$ imaju zapis:

(a) $r = 3$;	(b) $\varphi = \frac{\pi}{6}$;
(c) $\varphi = -\frac{\pi}{3}$;	(d) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$;
(e) $\vartheta = \frac{\pi}{4}$;	(f) $r = 2 \cos \vartheta$.
6. Nacrtajte plohe čije su jednadžbe dane u Kartezijevom koordinatnom sustavu i potom odredite jednadžbe tih ploha u cilindričnom i sfernom koordinatnom sustavu:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$;	(b) $x^2 + y^2 - z^2 = 16$;
(c) $x^2 + y^2 = 2z$.	
7. Nacrtajte u ravnini i prostoru:

(a) $ x + y = 1$;	(b) $x^2 + z = 1$;
(c) $y^2 + z^2 = 1$.	
8. Nacrtajte tijelo određeno nejednakostima $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \leq 0$ i potom ga opišite odgovarajućim nejednakostima u cilindričnom i sfernom koordinatnom sustavu.
9. Nacrtajte tijela opisana nejednakostima:

(a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 2$, $y \geq 0$;	(b) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $r \leq z \leq 2$;
(c) $r^2 \leq z \leq 2 - r^2$;	
(d) $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}$, $\rho \leq 2$;	
10. Neka je $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$.
 - (a) Izračunajte $f(1, 1)$, $f(-2, 0)$;
 - (b) Odredite definicijsko područje D_f ;

- (c) Odredite sliku $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D_f\}$;
 (d) Skicirajte graf funkcije.
11. Odredite definicijsko područje funkcije:
- $f(x, y) = \sqrt[4]{y - 2x};$
 - $f(x, y) = xy\sqrt{x^2 + y^2};$
 - $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2};$
 - $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$
12. Skicirajte graf funkcije:
- $f(x, y) = 1 - x - y;$
 - $f(x, y) = \sin y;$
 - $f(x, y) = 1 - x^2;$
 - $f(y, z) = |z|;$
 - $f(y, z) = \sqrt{y^2 + z^2};$
 - $f(y, z) = 2 - (y^2 + z^2);$
 - $f(x, z) = -\sqrt{x^2 + z^2};$
 - $f(x, z) = 2 - \sqrt{x^2 + z^2};$
 - $f(x, z) = -x^2 + z^2.$
13. Odredite definicijsko područje funkcije:
- $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2};$
 - $u = \ln(z - x^2 - y^2);$
 - $u = e^{\frac{x^2+y^2}{z}};$
 - $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2).$
14. Skicirajte nivo-plohe funkcije $u = f(x, y, z)$:
- $u = x^2 + y^2 + z^2;$
 - $u = z - x^2 - y^2;$
 - $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2.$
15. Ako je $P_0 \in \mathbb{R}^n$, onda je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(P) = d(P, P_0)$ neprekidna. Dokažite!
16. U kojim točkama su funkcije $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $g(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $h(x, y) = e^{-\frac{1}{|x-y|}}$ neprekidne?
17. Odredite (najveći) skup na kojem su funkcije neprekidne:
- $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y};$
 - $f(x, y) = \ln(2x + 3y);$
 - $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 - z};$
 - $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases};$

$$(e) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

18. Ako je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, onda je skup $\{P \in \Omega \mid f(P) < a\}$ otvoren za svaki $a \in \mathbb{R}$. Dokažite!
19. Funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna onda i samo onda ako je skup $\{P \in \Omega \mid a < f(P) < b\}$ otvoren za svaki par realnih brojeva $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažite!
20. Neka je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ funkcija od tri varijable x, y, z i neka su u, v, w funkcije jedne varijable definirane na intervalu $\langle a, b \rangle$ tako da je kompozicija $F(t) = f(u(t), v(t), w(t))$ definirana na $\langle a, b \rangle$. Ako su funkcije f, u, v, w neprekidne onda je i F neprekidna funkcija na $\langle a, b \rangle$. Dokažite!
21. Dokažite: ako su $A, B \in \mathbb{R}^n$, $A \neq B$ i $a, b \in \mathbb{R}$ onda postoji neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $f(A) = a$ i $f(B) = b$. Uputa: $f(P) = \frac{ad(B, P) + bd(A, P)}{d(A, B)}$.
22. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki $P_0 \in \Omega$. Ako je $f(P_0) \neq 0$, onda postoji $\delta > 0$ takav da $d(P_0, P) < \delta \Rightarrow |f(P)| > \frac{1}{2}|f(P_0)|$. Dokažite!
23. Odredite limes, ako postoji, ili pokažite da limes ne postoji:
- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2y^2 - 2xy^4);$
 - (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} e^{\sqrt{x+2y}};$
 - (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{8x^2y^2}{x^4 + y^4};$
 - (d) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4};$
 - (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2};$
 - (f) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,3,0)} [xe^z + \ln(2x - y)].$
24. Koristeći polarne koordinate izračunajte limese:
- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2};$
 - (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2);$
 - (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$
25. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i K kompaktan skup sadržan u Ω . Tada postoji otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}^n$ takav da je \overline{U} kompaktan i $K \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$. Uputa: Za $P \in K$ uzmite $\delta(P) > 0$ takav da kugla $B(P, 2\delta(P))$ leži u Ω . Budući da je K kompaktan skup, postoji konačno točaka $P_1, \dots, P_n \in K$ takvih da je $K \subset B(P_1, 2\delta(P_1)) \cup \dots \cup B(P_n, \delta(P_n))$.

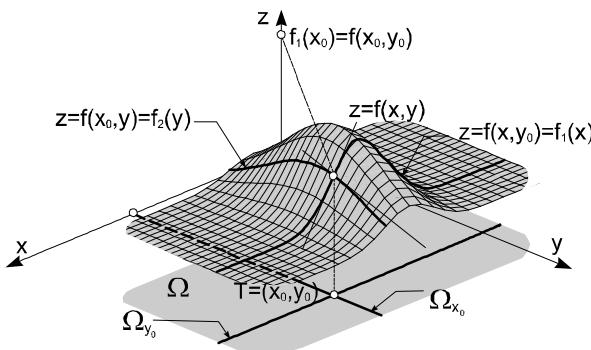
26. Neka je $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}^n$. Ako je $f(P) > 0$ za svaki $P \in K$, onda postoji broj $\varepsilon > 0$ takav da je $f(P) \geq \varepsilon$ za svaki $P \in K$. Dokažite!
27. Neka je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i neka je $K \subset \Omega$ kompaktan skup. Tada postoji otvoren skup $U \subseteq \Omega$ koji sadrži K na kojem je f omeđena funkcija. Dokažite!

Poglavlje 4

DERIVABILNE FUNKCIJE

4.1 PARCIJALNA DERIVACIJA

Izravno i formalno poopćenje derivabilnosti (u točki) s funkcija jedne varijable na funkcije dviju varijabla nije moguće, jer je varijabla bitno promjenjila karakter. Naime, umjesto realnog broja x sada se promatra $T = (x, y)$, pa odgovarajući količnik $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ više nema smisla. Međutim, učvrste li se sve osim jedne koordinate, promatrana funkcija (suženje) postaje, zapravo, funkcijom jedne varijable pa se smije govoriti o njezinoj (ne)derivabilnosti. To onda vodi k pojmu parcijalne derivacije po varijabli-koordinati.



Promatrajmo funkciju $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, i po volji odabranu točku $T_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Neka je Π_{y_0} ravnina $y = y_0$ i označimo s $\Omega_{y_0} = \Pi_{y_0} \cap D \subseteq D$. Očito je $\Omega_{y_0} \neq \emptyset$ jer sadrži barem točku T_0 . Suženje

$$f|_{\Omega_{y_0}} \equiv f_1 : \Omega_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f(x, y_0)$$

smijemo smatrati funkcijom jedne varijable jer se mijenja samo koordinata x . Analogno imamo funkciju

$$f|_{\Omega_{x_0}} \equiv f_2 : \Omega_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(y) = f(x_0, y)$$

koju možemo smatrati funkcijom varijable y .

DEFINICIJA 4.1 Reći ćemo da funkcija f ima **parcijalnu derivaciju po varijabli x** u točki $T_0 = (x_0, y_0)$ ukoliko postoji derivacija funkcije f_1 u točki x_0 ($\in \Omega_{y_0} \subseteq \mathbb{R}$). Derivaciju (broj) $f'_1(x_0)$ tada nazivamo **parcijalnom derivacijom** funkcije f **po varijabli x u točki T_0** i označujemo s $\frac{\partial f(T_0)}{\partial x}$ (čita se: "parcijalno ef po de iksu u te nula"). Dakle, po definiciji je

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Analogno, derivaciju (broj) $f'_2(y_0)$ nazivamo **parcijalnom derivacijom po varijabli y** funkcije f **u točki T_0** i označujemo s $\frac{\partial f(T_0)}{\partial y}$ (čita se: "parcijalno ef po de ipsilonu u te nula"):

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \quad (2)$$

Parcijalna derivacija $\frac{\partial f(T_0)}{\partial x}$ od f u točki T_0 označava se i sa $\partial_1 f(x_0, y_0)$, $\partial_x f(x_0, y_0)$ ili $D_1 f(x_0, y_0)$, a parcijalna derivacija $\frac{\partial f(T_0)}{\partial y}$ od f u točki T_0 označava se slično sa $\partial_2 f(x_0, y_0)$, $\partial_y f(x_0, y_0)$ ili $D_2 f(x_0, y_0)$. Ovdje ćemo koristiti (uz oznake $\frac{\partial f(T_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(T_0)}{\partial y}$) najčešće $D_1 f(x_0, y_0)$ i $D_2 f(x_0, y_0)$ (radi preglednijeg zapisa).

Analogno se definiraju parcijalne derivacije funkcija triju varijabli: sve varijable fiksiramo osim one po kojoj tražimo parcijalnu derivaciju i potom deriviramo tu funkciju (jedne varijable):

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial x} \equiv D_1 f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial y} \equiv D_2 f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial z} \equiv D_3 f(x_0, y_0, z_0).$$

Ako funkcija f ima u točki T_0 parcijalnu derivaciju po svakoj varijabli onda kažemo da je funkcija f **derivabilna u točki T_0** . Ako je f derivabilna u svakoj točki $T \in \Omega$, nazivamo ju **derivabilnom funkcijom**.

Analogno se definira parcijalna derivacija skalarne funkcije $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, u točki $T_0 = (x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ po varijabli x_i :

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + \Delta x_i, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_i}. \quad (3)$$

U skladu s prethodnim oznakama pisat ćemo

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial x_i} \equiv D_i f(T_0).$$

Po samoj definiciji, parcijalno deriviranje po odabranoj varijabli skalarne funkcije $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, u praksi se svodi na standardno deriviranje držeći konstantnima sve varijable osim one odabrane.

PRIMJER. Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana propisom

$$f(x, y) = \sin(x + y^2).$$

Odredimo obje parcijalne derivacije funkcije f u bilo kojoj točki (x, y) .

Budući da je f po svojim varijablama kompozicija derivabilnih elementarnih funkcija, to ona ima obje parcijalne derivacije u svakoj točki, tj. f je derivabilna funkcija. Pritom je

$$D_1 f(x, y) = \cos(x + y^2), \quad D_2 f(x, y) = \cos(x + y^2) \cdot 2y. \quad \square$$

PRIMJER. Neka je funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ zadana propisom

$$f(x, y, z) = x + \ln(xy + \sqrt{z}).$$

Odredimo sve tri parcijalne derivacije funkcije f u svakoj točki (x, y, z) u kojoj one postoje.

Zbog istoga razloga kao i u prethodnom primjeru i zbog uvjeta (na Ω) $xy + \sqrt{z} > 0$ i $z \geq 0$, funkcija f jest derivabilna. Za parcijalne derivacije u bilo kojoj točki $(x, y, z) \in \Omega$ dobivamo:

$$D_1 f(x, y, z) = 1 + \frac{y}{xy + \sqrt{z}},$$

$$D_2 f(x, y, z) = \frac{x}{xy + \sqrt{z}},$$

$$D_3 f(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{z}(xy + \sqrt{z})}.$$

□

Neka je $\Omega_x \subseteq \Omega$ skup svih točaka $T \in \Omega$ u kojima funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, ima parcijalnu derivaciju po varijabli x . Tada je dobro definirana funkcija

$$D_1 f : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}, \quad T \mapsto D_1 f(T),$$

koju nazivamo **parcijalnom derivacijom funkcije f po varijabli x** (na podskupu $\Omega_x \subseteq \Omega$). Slično tomu je

$$D_2 f : \Omega_y \rightarrow \mathbb{R}, \quad T \mapsto D_2 f(T),$$

parcijalna derivacija funkcije f po varijabli y (na skupu $\Omega_y \subseteq D$ svih točaka u kojima funkcija f ima parcijalnu derivaciju po varijabli y). Pritom ima smisla istraživati neprekidnost (u točki) tih funkcija, pa se onda govori o **neprekidno parcijalno derivabilnoj funkciji f po varijabli x** (odnosno y) (**u točki**). Ako je $\emptyset \neq \Omega_x \cap \Omega_y = \Omega' \subseteq \Omega$ onda su na Ω' definirane obje parcijalne derivacije $D_1 f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, $D_2 f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, tj. f je derivabilna na skupu Ω' . Reći ćemo da je funkcija f **neprekidno derivabilna u točki $T_0 \in \Omega'$ (na skupu Ω')** čim su funkcije $D_1 f$, $D_2 f$, neprekidne u T_0 (na skupu Ω').

Sjetimo se da za realne funkcije jedne varijable *derivabilnost povlači neprekidnost*. Sada ćemo pokazati da za funkcije više varijabla to, općenito, *ne vrijedi*.

PRIMJER. Pokazali smo da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana propisom

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

prekidna u točki $(0, 0)$. Ona je, međutim, derivabilna u točki $(0, 0)$. Naime

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x) \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0,$$

a slično se pokaže da je i $D_2 f(0, 0) = 0$. □

DEFINICIJA 4.2 Za funkciju $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, kažemo da je **klase C^1 na Ω** , i pišemo $f \in C^1(\Omega)$, ako je ona neprekidna na Ω i ako se sve parcijalne derivacije $D_i f$ ($i = 1, \dots, n$) neprekidne na Ω .

Svaku parcijalnu derivaciju *drugoga reda* skalarne funkcije definiramo, najjednostavnije govoreći, kao neku parcijalnu derivaciju neke parcijalne derivacije te funkcije, odnosno, rabeći rječnik za funkcije jedne varijable, kao derivaciju (neke) prve derivacije.

DEFINICIJA 4.3 Ako skalarna funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, ima parcijalnu derivaciju $D_i f : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega_i \subseteq \Omega$, $i \in \{1, \dots, n\}$, i ako je $D_i f$ derivabilna po varijablama x_j u točki T_0 , $j \in \{1, \dots, n\}$, onda broj

$$D_j(D_i f(T_0)) \equiv D_j D_i f(T_0) \quad (4)$$

nazivamo **drugom parcijalnom derivacijom** funkcije f po varijablama x_i i x_j (redom) u točki T_0 .

Napomenimo da se koriste i oznake

$$D_j D_i f(T_0) \equiv \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial x_j \partial x_i},$$

a ukoliko je $i = j$

$$D_i D_i f(T_0) \equiv D_i^2 f(T) \equiv \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial x_i^2}$$

Ako funkcija f ima sve druge parcijalne derivacije u točki T_0 , $D_j D_i f(T_0)$, $i, j = 1, \dots, n$, onda kažemo da je f **dvaput derivabilna u točki T_0** . Neka je $\Omega_{ij} \subseteq \Omega$ skup svih točaka u kojima funkcija f ima drugu parcijalnu derivaciju po varijablama x_i i x_j redom. Tada je dobro definirana funkcija (druga parcijalna derivacija od f po x_i i x_j redom)

$$D_j D_i f : \Omega_{ij} \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_j D_i f(T) = D_j(D_i f(T)).$$

Ako je skup $\Omega' \equiv \bigcap_{i,j=1}^m \Omega_{ij}$ neprazan, onda su na njemu dobro definirane sve druge parcijalne derivacije od f . Pritom kažemo da je skalarna funkcija f

dvaput derivabilna na skupu $\Omega' \subseteq \Omega$. U slučaju $\Omega' = \Omega$ govorimo o **dvaput derivabilnoj** funkciji f .

Nadalje, induktivno se definiraju i na jasan način označuju sve **k -te parcijalne derivacije** (po k odabranih varijabla redom - "s ponavljanjem") od f u točki T_0 (**na skupu** $\Omega' \subseteq \Omega$), $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, kao i pojmovi " f je **k -puta derivabilna** (**u točki** T_0 ; **na skupu** Ω'). Na primjer,

$$D_i D_j D_k f(T) \equiv D_i^2 D_k f(T) \equiv \frac{\partial^3 f(T)}{\partial x_i \partial x_j \partial_k},$$

$$D_i D_j D_j f(T) \equiv D_i D_j^2 f(T) \equiv \frac{\partial^3 f(T)}{\partial x_i \partial x_j^2},$$

$$D_i D_i D_j D_j f(T) \equiv D_i^2 D_j^2 f(T) \equiv \frac{\partial^4 f(T)}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} \dots$$

PRIMJER. Odredimo sve druge parcijalne derivacije i treće parcijalne derivacije po x, y, x i po x, x, y redom (ondje gdje postoji) za funkciju $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = x^2 y + x \ln y.$$

Definicjsko područje X je otvorena poluravnina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ i funkcija f je derivabilna. Pritom je, u bilo kojoj točki $(x, y) \in X$,

$$D_1 f(x, y) = 2xy + \ln y, \quad D_2 f(x, y) = x^2 + \frac{x}{y}.$$

Primijetimo da su i obje te parcijalne derivacije derivabilne funkcije, tj. da je funkcija f dvaput derivabilna, i da je

$$D_1 D_1 f(x, y) = 2y, \quad D_2 D_1 f(x, y) = 2x + \frac{1}{y},$$

$$D_1 D_2 f(x, y) = 2x + \frac{1}{y}, \quad D_2 D_2 f(x, y) = \frac{-x}{y^2}.$$

Napokon, očito je da je f i triput (zapravo, po volji mnogo puta) derivabilna i da je

$$D_1 D_2 D_1 f(x, y) = 2 = D_1 D_1 D_2 f(x, y).$$

□

Jednakosti drugih parcijalnih derivacija

$$D_2 D_1 f(T) = D_1 D_2 f(T),$$

te trećih parcijalnih derivacija

$$D_1 D_2 D_1 f(T) = D_2 D_1 D_1 f(T)$$

u ovom primjeru nisu slučajne. O tomu govori ovaj, tzv. **Schwarzov teorem**:

TEOREM 4.4 Neka je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, funkcija koja na Ω ima parcijalne derivacije $D_1 f$, $D_2 f$ i drugu parcijalnu derivaciju $D_2 D_1 f$ po x i y (redom). Ako je funkcija $D_2 D_1 f$ neprekidna u točki $T_0 \in \Omega$ onda postoji druga parcijalna derivacija $D_1 D_2 f$ po y i x (redom) u točki T_0 i pritom je

$$D_1 D_2 f(T_0) = D_2 D_1 f(T_0). \quad (5)$$

DOKAZ. Neka je $B(T_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ bilo koja kugla. Za svaku točku $T = (x, y) \in B(T_0, \varepsilon) \setminus \{T_0\}$ označimo $\Delta x = x - x_0$ i $\Delta y = y - y_0$. Tada je dobro definirana funkcija ($O = (0, 0)$)

$$g : B(O, \varepsilon) \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} g(\Delta x, \Delta y) &= \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - \\ &\quad - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)]. \end{aligned}$$

Budući da je funkcija f derivabilna na $B(T_0, \varepsilon)$, to postoji granične vrijednosti

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(\Delta x, \Delta y) &= \\ \frac{1}{\Delta y} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} - \right. & \\ \left. - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \right) = \\ \frac{1}{\Delta y} (D_1 f(x_0, y_0 + \Delta y) - D_1 f(x_0, y_0)) & \end{aligned}$$

i, slično,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} g(\Delta x, \Delta y) = \dots = \frac{1}{\Delta x} (D_2 f(x_0 + \Delta x, y_0) - D_2 f(x_0, y_0)).$$

Definirajmo, za svaki Δy , funkciju

$$\phi_{\Delta y} \equiv \phi : [x_0, x_0 + \Delta x] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta x > 0,$$

pravilom

$$\phi(t) = \frac{f(t, y_0 + \Delta y) - f(t, y_0)}{\Delta y}$$

(Kad je $\Delta x < 0$ funkcija ϕ se istim pravilom definira na segmentu $[x_0 + \Delta x, x_0]!$) Primijetimo da je

$$g(\Delta x, \Delta y) = \frac{\phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0)}{\Delta x}.$$

Budući da postoji $D_1 f$ na $B(T_0, \varepsilon)$, to je ϕ derivabilna funkcija pa po Lagrangeovu teoremu o srednjoj vrijednosti dobivamo:

$$\begin{aligned} g(\Delta x, \Delta y) &= \frac{\phi'(x_0 + \vartheta_1 \Delta x) \Delta x}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{\Delta y} (D_1 f(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - D_1 f(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y_0)), \quad \vartheta_1 \in \langle 0, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Definirajmo, za svaki Δx , funkciju

$$\psi_{\Delta x} \equiv \psi : [y_0, y_0 + \Delta y] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta y > 0,$$

pravilom

$$\psi(s) = D_1 f(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, s),$$

pa je

$$g(\Delta x, \Delta y) = \frac{\psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0)}{\Delta y}.$$

(Kad je $\Delta y < 0$ funkcija ψ se istim pravilom definira na segmentu $[y_0 + \Delta y, y_0]!$) Budući da na $B(T_0, \varepsilon)$ postoji $D_2 D_1 f$, to je ψ derivabilna funkcija i pritom je

$$\psi'(s) = D_1 D_2 f(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, s), \quad s \in [y_0, y_0 + \Delta y].$$

Sada po Lagrangeovu teoremu o srednjoj vrijednosti dobivamo

$$g(\Delta x, \Delta y) = \frac{\psi'(y_0 + \vartheta_2 \Delta y) \Delta y}{\Delta y} = D_2 D_1 f(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y_0 + \vartheta_2 \Delta y), \quad \vartheta_2 \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Po neprekidnosti funkcije $D_2 D_1 f$ u točki T_0 slijedi

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} g(\Delta x, \Delta y) = D_2 D_1 f(x_0, y_0).$$

Prema tomu, dokazali smo da postoje ove granične vrijednosti:

$$(\forall \Delta y) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(\Delta x, \Delta y),$$

$$(\forall \Delta x) \lim_{\Delta y \rightarrow 0} g(\Delta x, \Delta y),$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} g(\Delta x, \Delta y).$$

To znači da postoje tada i pripadne uzastopne granične vrijednosti, koje su međusobno jednake i jednake graničnoj vrijednosti funkcije g u točki $O \equiv (0, 0)$, tj.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(\Delta x, \Delta y) \right) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta y \rightarrow 0} g(\Delta x, \Delta y) \right) = \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} g(\Delta x, \Delta y). \end{aligned}$$

Budući da je

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(\Delta x, \Delta y) \right) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{D_1 f(x_0, y_0 + \Delta y) - D_1 f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \\ &= D_2 D_1 f(x_0, y_0), \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta y \rightarrow 0} g(\Delta x, \Delta y) \right) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{D_2 f(x_0 + \Delta x, y_0) - D_2 f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= D_1 D_2 f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

to smo Schwarzov teorem dokazali. ■

PRIMJER. Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadatu propisom

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Funkcija f je derivabilna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ i pritom je

$$D_1 f(x, y) = y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$D_2 f(x, y) = x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Nadalje, obje ove parcijalne derivacije su derivabilne funkcije (na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) i

$$D_2 D_1 f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(1 + \frac{8x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = D_1 D_2 f(x, y).$$

Pogledajmo sada što je s derivabilnošću u točki $(0,0)$!

Budući da je $f(x, 0) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $f(0, y) = 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}$, to je f derivabilna i u $(0,0)$ i

$$D_1 f(0, 0) = 0 = D_2 f(0, 0).$$

Primijetimo da je

$$D_1 f(x, 0) = 0, \quad D_2 f(x, 0) = x, \quad D_1 f(0, y) = -y, \quad D_2 f(0, y) = 0,$$

pa za druge parcijalne derivacije od f u $(0,0)$ dobivamo:

$$D_1^2 f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{D_1 f(0 + \Delta x, 0) - D_1 f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$D_2 D_1 f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{D_1 f(0, 0 + \Delta y) - D_1 f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1,$$

$$D_1 D_2 f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{D_2 f(0 + \Delta x, 0) - D_2 f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1,$$

$$D_2^2 f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{D_2 f(0, 0 + \Delta y) - D_2 f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

Dakle, funkcija f je dvaput derivabilna. Međutim, "mješovite" druge parcijalne derivacije $D_2 D_1 f(0, 0)$ i $D_1 D_2 f(0, 0)$ su međusobno *različite*! Uzrok, dakako, leži u *prekidnosti* funkcije $D_2 D_1 f(x, y)$ u točki $(0,0)$.

DEFINICIJA 4.5 Za funkciju $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je **klase C^p** ($p = 2, 3, \dots$) na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ako je ona klase C^{p-1} na Ω i ako sve parcijalne derivacije p -toga reda funkcije f postoje na Ω i one su na Ω neprekidne (oznaka $f \in C^p(\Omega)$).

Funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je **klase C^∞** na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ako je ona klase C^p na Ω za svaki $p \in \mathbb{N}$ (oznaka $f \in C^\infty(\Omega)$).

Schwarzov teorem se lako poopćuje na skalarne funkcije od tri i više varijabla, kao i na parcijalne derivacije viših redova. Odgovarajući teorem jest ovaj:

TEOREM 4.6 Neka funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, ima neprekidne sve parcijalne derivacije do uključivo k -toga reda. Ako f ima na sve parcijalne derivacije $(k+1)$ -vog reda i ako su sve one neprekidne u

točki T_0 , onda vrijednosti odgovarajućih parcijalnih derivacija $(k+1)$ -vog reda funkcije f u točki T_0 ne ovise o redoslijedu deriviranja po pojedinim varijablama.

4.2 DERIVACIJA KOMPOZICIJE FUNKCIJA

Sjetimo se derivacije složene funkcije jedne varijable. Ako je $y = f(x)$ i $x = g(t)$ i f i g su diferencijabilne tada je i y diferencijabilna po varijabli t i vrijedi

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

U ovom odjeljku dajemo poopćenje.

PRAVILA (a). Neka je f realna funkcija od tri varijable x, y i z neka su u, v i w realne funkcije jedne varijable t . Prepostavimo da je kompozicija

$$F(t) = f(u(t), v(t), w(t)) \quad (1)$$

definirana. Formula za derivaciju funkcije F dana je sa

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dw}{dt}. \quad (2)$$

Ova se formula obično piše u manje razumljivom obliku koji se lako pamti

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (3)$$

To je tzv. **lančano pravilo** ili **pravilo za deriviranje po parametru** funkcije f .

Ako je $u(t) = t$, $F(t) = f(t, v(t), w(t))$, onda kažemo da f eksplicitno ovisi o t i naravno posredno preko funkcija v i w . Tada (3) prelazi u

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (4)$$

PRIMJER. Neka je

$$f(x, y, z) = e^{ax}(y - z), \quad u(t) = t, \quad v(t) = a \sin t, \quad w(t) = \cos t.$$

Odredimo $F'(t)$ za

$$F(t) = f(u(t), v(t), w(t)) = e^{at}(a \sin t - \cos t).$$

Imamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= ae^{ax}(y - z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{ax}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -e^{ax}, \\ \frac{du}{dt} &= 1, \quad \frac{dv}{dt} = a \cos t, \quad \frac{dw}{dt} = -\sin t\end{aligned}$$

i primjenom formule (2) dobivamo

$$\begin{aligned}F'(t) &= ae^{at}(a \sin t - \cos t) + e^{at} \cdot a \cos t + (-e^{at}) \cdot (-\sin t) = \\ &= e^{at}(1 + a^2) \sin t.\end{aligned}$$

□

PRIMJER. Odrediti $f'(0)$ ako je

$$f(x, y) = x^2 y + 3xy^4 \quad \text{i} \quad x = \sin 2t, \quad y = \cos t.$$

$$\text{Vrijedi } \frac{df}{dt} = (2xy + 3y^4)(2 \cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t).$$

Kako je $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ imamo da je

$$\begin{aligned}f'(0) &= \frac{df(0)}{dt} = [(2xy + 3y^4)]_{(x,y)=(0,1)} [(2 \cos 2t)]_{t=0} + \\ &\quad + [(x^2 + 12xy^3)]_{(x,y)=(0,1)} [(-\sin t)]_{t=0} = 6.\end{aligned}$$

(Račun provjerite deriviranjem funkcije $f(t) = \sin^2 2t \cos t + 3 \sin 2t \cos^4 t!$) □

PRAVILA (b). Da je funkcija iz (a) ovisila samo o x i y imali bismo

$$F(t) = f(u(t), v(t)) \Rightarrow \frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

Uzmimo da postoji interval $I \subseteq \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in I$ vrijedi

$$f(x, v(x)) = 0. \quad (6)$$

Sada u (5) (uzimamo $u(x) = x$) imamo $F'(x) = 0$ za $x \in I$, pa je

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dv}{dx} = 0$$

i dalje

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{D_1 f}{D_2 f} \quad (7)$$

uz pretpostavku da je $D_2 f(x, v(x)) \neq 0$. Derivacije $D_1 f$ i $D_2 f$ treba računati u točki $(x, v(x))$.

Rezimirajmo prethodno.

Ako za funkciju f od dvije varijavle postoji interval I i funkcija $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^1 na I takvi da vrijedi

$$f(x, v(x)) = 0,$$

onda kažemo da jednadžba $f(x, y) = 0$ **implicitno** definira funkciju v . Sa

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{D_1 f}{D_2 f}$$

je dana derivacija implicitno zadane funkcije.

PRIMJER. Sa $f(x, y) = y - y^3 - x^2y + x^2y^3 = 0$ definirana je implicitna funkcija y kao funkcija u varijabli x u nekoj okolini točke $x_0 = 1$ (jer je $f(1, 1) = 0$ i jer su $D_1 f(x, y) = 2xy^3 - 2xy$, $D_2 f(x, y) = 3x^2y^2 - 3y^2 - x^2 + 1$ neprekidne funkcije). Derivacija te funkcije je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{D_1 f}{D_2 f} = -\frac{2xy^3 - 2xy}{3x^2y^2 - 3y^2 - x^2 + 1}. \quad \square$$

PRAVILA (c). Neka je $f(x, y, z)$ funkcija od tri varijable x, y i z neka su u, v, w funkcije od dvije varijable t i s . Stavimo $x = u(t, s)$, $y = v(t, s)$, $z = w(t, s)$. Pretpostavimo da je definirana kompozicija

$$F(s, t) = f(u(t, s), v(t, s), w(t, s)) \tag{8}$$

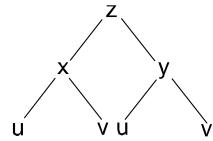
Parcijalne derivacije kompozicije F dane su sa

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial t}, \\ \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

Ove su formule posljedice formule tipa (2). Zaista, ako u (9) tretiramo s kao konstantu, onda se radi o funkciji $u \mapsto F(t, s)$ pa primjenom formule (2) dobivamo prvu formulu iz (9).

PRIMJER. Odredite $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$ složene funkcije

$$z(x, y) = x^y, \quad x = u^2 - v^2, \quad y = e^{uv}.$$



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = yx^{y-1} \cdot (2u) + x^y \ln x \cdot (ve^{uv}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = yx^{y-1} \cdot (-2v) + x^y \ln x \cdot (ue^{uv}). \quad \square$$

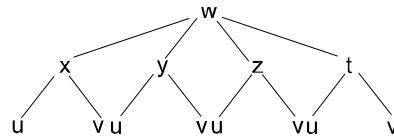
Pravilo (9) lako se poopćuje.

Npr., ako je

$$w = f(x, y, z, t),$$

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), t = t(u, v),$$

služeći se dijagramom,



imamo da su tražene parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u},$$

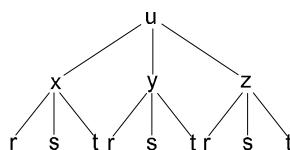
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial v}. \quad \square$$

PRIMJER . Ako je

$$u = x^4y + y^2z^3, \quad x = rse^t, \quad y = rs^2e^{-t}, \quad z = r^2s \sin t$$

izračunajte $\frac{\partial u}{\partial s}$ u točki $(r, s, t) = (2, 1, 0)$.

Pripadni dijagram je



pa je tražena derivacija

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} =$$

$$= 4x^3y \cdot re^t + (x^4 + 2yz^3) \cdot 2rse^{-t} + 3y^2z^2 \cdot r^2 \sin t.$$

Kako je $x(r, s, t) = rse^t$, $x(2, 1, 0) = 2$, $y(r, s, t) = rs^2e^{-t}$, $y(2, 1, 0) = 2$, $z(r, s, t) = r^2s \sin t$, $z(2, 1, 0) = 0$ imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(2, 1, 0)}{\partial s} &= (4 \cdot 2^3 \cdot 2) \cdot (2e^0) + (2^4 + 2 \cdot 2 \cdot 0^3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot e^{-0}) + \\ &+ (3 \cdot 2^2 \cdot 0^2) \cdot (2^2 \sin 0) = 192. \end{aligned}$$

□

PRAVILO (d). Neka su f, u, v i w kao u (c). Ako postoji dvodimenzionalni interval $I \subseteq \mathbb{R}^2$ takav da je

$$f(x, y, w(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in I \tag{10}$$

onda kažemo da je funkcija w **implicitno definirana jednadžbom**

$$f(x, y, z) = 0. \tag{11}$$

U ovom slučaju (9) prelazi u

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

od kuda zbog $u(x, y) = x$ i $v(x, y) = y$ dobivamo

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{D_1 f}{D_3 f}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{D_2 f}{D_3 f}. \tag{12}$$

s tim da parcijalne derivacije $D_k f$ ($k = 1, 2, 3$) treba računati u točki $(x, y, w(x, y))$ u kojoj funkcija $D_3 f$ ne iščezava.

Sa (12) su dane parcijalne derivacije funkcije w koja je implicitno definirana jednadžbom (11).

Egzistenciju implicitnih funkcija, tj. uz koje uvjete (11) definira funkciju w takvu da vrijedi (12) pokazat ćemo kasnije. Navedimo samo toliko da *egzistencija i neprekidnost svih parcijalnih derivacija na otvorenom skupu Ω i $D_3 f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ u točki $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ daje dovoljan uvjet za egzistenciju i jedinstvenost funkcije w za koju vrijede formule (11) i (12) u nekoj okolini točke (x_0, y_0, z_0) .*

PRIMJER. Odredite parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ implicitno zadane funkcije $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{D_1(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1)}{D_3(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1)} = -\frac{6yz + 3x^2}{6xy + 3z^2} = \frac{-2yz - x^2}{2xy + z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{D_2(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1)}{D_3(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1)} = \frac{-2xz - y^2}{2xy + z^2}. \quad \square$$

PRAVILA (e). Neka su f i g funkcije od tri varijable x, y, z . Prepostavimo da postoje funkcije u, v od t takve da je

$$\left. \begin{array}{l} f(u(t), v(t), t) = 0, \\ g(u(t), v(t), t) = 0. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Stavimo li $F(t) = f(u(t), v(t), t)$ onda po (2) imamo

$$F' = \frac{\partial f}{\partial x} u' + \frac{\partial f}{\partial v} v' + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Fudući je $F = 0$, tim postupkom dobivamo:

$$\left. \begin{array}{l} D_1 f \cdot u' + D_2 f \cdot v' = -D_3 f, \\ D_1 g \cdot u' + D_2 g \cdot v' = -D_3 g, \end{array} \right\} \quad (14)$$

Sa (14) je dan sustav od dvije algebarske jednadžbe za nepoznanice u' i v' .

Njegovim rješavanjem dobivamo

$$\left. \begin{array}{l} u' = \frac{D_2 f \cdot D_3 g - D_3 f \cdot D_2 g}{D_1 f \cdot D_2 g - D_1 g \cdot D_2 f} \\ v' = \frac{D_3 f \cdot D_1 g - D_1 f \cdot D_3 g}{D_1 f \cdot D_2 g - D_1 g \cdot D_2 f} \end{array} \right\} \quad (15)$$

u onim točkama u kojima ne iščezava determinanta

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (16)$$

koja se zove **Jacobijan funkcija** f i g .

Da smo imali funkcije f i g od četiri varijable x, y, z i t i funkcije $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ takve da je

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y, u(x, y, z), v(x, y, z)) = 0 \\ g(x, y, u(x, y, z), v(x, y, z)) = 0 \end{array} \right\} \quad (17)$$

onda bismo uzimanjem parcijalnih derivacija po x i po y iz (17) dobili

$$\left. \begin{array}{l} D_1f + D_3f \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + D_4f \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ D_2f + D_3f \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + D_4f \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ D_1g + D_3g \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + D_4g \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ D_2g + D_3g \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + D_4g \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (18)$$

i iz ovog sustava određuju se parcijalne derivacije funkcija u i v po x i po y .

Formule (2) i (9) za deriviranje kompozicije funkcija posljedica su sljedećeg teorema.

TEOREM 4.7 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja na Ω ima neprekidne derivacije D_1f i D_2f . Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije klase C^1 na I takve da je $(u(t), v(t)) \in \Omega$ za svaki $t \in I$, tako da je kompozicija

$$F(t) = f(u(t), v(t)), \quad t \in I \quad (19)$$

definirana na I . Tada je funkcija F klase C^1 na I i za $t_0 \in I$ vrijedi

$$F'(t_0) = \frac{\partial f(u(t_0), v(t_0))}{\partial u} \cdot u'(t_0) + \frac{\partial f(u(t_0), v(t_0))}{\partial v} \cdot v'(t_0). \quad (20)$$

DOKAZ. Neka je $t_0 \in I$ i $\varepsilon > 0$. Označimo sa

$$u_0 = u(t_0), \quad v_0 = v(t_0), \quad T_0 = (u_0, v_0), \quad f = f_0, \quad f_1 = D_1f, \quad f_2 = D_2f.$$

Budući je Ω otvoren, postoji kugla $B(T_0, r) \subseteq \Omega$. Funkcije u i v su neprekidne pa postoji $\eta > 0$ takav da je $I' = \langle t_0 - \eta, t_0 + \eta \rangle \subseteq I$ i za svaki $t \in I'$ točka $(u(t), v(t))$ leži u kugli $B(T_0, r)$. Za $t \in I'$ imamo:

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &= f(u(t), v(t)) - f(u(t_0), v(t_0)) = \\ &[f(u(t), v(t)) - f(u(t), v_0)] + [f(u(t), v_0) - f(u_0, v_0)]. \end{aligned} \quad (21)$$

U prvoj zagradi promjenila se samo druga varijabla, a u drugoj zagradi samo prva varijabla. Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti daje

$$\left. \begin{aligned} f(u(t), v(t)) - f(u(t), v_0) &= [D_2 f(u(t), v_0 + \vartheta_1(v(t) - v_0))] \cdot (v(t) - v_0) \\ f(u(t), v_0) - f(u_0, v_0) &= [D_1 f(u_0 + \vartheta_2(u(t) - u_0), v_0)] \cdot (u(t) - u_0) \\ v(t) - v_0 &= [v'(t_0 + \vartheta_3(t - t_0))] \cdot (t - t_0) \\ u(t) - u_0 &= [u'(t_0 + \vartheta_4(t - t_0))] \cdot (t - t_0) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

gdje su $\vartheta_i \in \langle 0, 1 \rangle$, za $i = 1, 2, 3, 4$. Odavde i iz (21) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} &= [f_1(u_0 + \vartheta_2(u(t) - u_0), v_0)] \cdot [u'(t_0 + \vartheta_4(t - t_0))] + \\ &\quad + [f_2(u(t), v_0 + \vartheta_1(v(t) - v_0))] \cdot [v'(t_0 + \vartheta_3(t - t_0))] \end{aligned} \quad (23)$$

Budući je po prepostavci

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow T_0} f_1(T) &= f_1(T_0), \quad \lim_{T \rightarrow T_0} f_2(T) = f_2(T_0), \\ \lim_{t \rightarrow t_0} u'(t) &= u'(t_0) \text{ i } \lim_{t \rightarrow t_0} v'(t) = v'(t_0) \end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} [f_1(u_0 + \vartheta_2(u(t) - u_0), v_0)] \cdot [u'(t_0 + \vartheta_4(t - t_0))] + \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow t_0} [f_2(u(t), v_0 + \vartheta_1(v(t) - v_0))] \cdot [v'(t_0 + \vartheta_3(t - t_0))] = \\ &= f_1(u_0, v_0) \cdot u'(t_0) + f_2(u_0, v_0) \cdot v'(t_0) \end{aligned}$$

što daje traženu formulu

$$F'(t_0) = \frac{\partial f(u(t_0), v(t_0))}{\partial u} \cdot u'(t_0) + \frac{\partial f(u(t_0), v(t_0))}{\partial v} \cdot v'(t_0). \quad \blacksquare$$

Dokazali smo tvrdnju za slučaj $n = 2$. Na isti način se dokazuje slučaj $n > 2$, tj. tvrdnja:

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija klase C^p na Ω i u_1, \dots, u_n realne funkcije definirane na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i takve da je kompozicija

$$F(t) = f(u_1(t), \dots, u_n(t))$$

definirana na I . Ako su u_k ($k = 1, \dots, n$) funkcije klase C^p na I , onda je funkcija F klase C^p na I . Nadalje, vrijedi

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(T)}{\partial x_i} \cdot \frac{du_i(t)}{dt}$$

gdje parcijalne derivacije $\frac{\partial f(T)}{\partial x_i}$ treba računati u točki $(u_1(t), \dots, u_n(t))$.

4.3 ZADACI ZA VJEŽBU

1. Izračunajte $\frac{\partial f(1,2)}{\partial x}$ i $\frac{\partial f(1,2)}{\partial y}$ funkcije $f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2$ i dajte geometrijsku interpretaciju rezultata.
2. Odredite prve parcijalne derivacije funkcija:
 - (a) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y};$
 - (b) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2});$
 - (c) $f(x,t) = e^{\sin \frac{t}{x}};$
 - (d) $f(x,y,z) = x\sqrt{yz};$
 - (e) $u = z \sin \frac{y}{x+z};$
 - (f) $f(x,y,z,t) = xy^2z^3t^4.$
3. Izračunajte parcijalnu derivaciju u naznačenoj točki:
 - (a) $\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}, f(x,y) = xe^{-y} + 3y;$
 - (b) $\frac{\partial f(3,3)}{\partial y}, f(x,y) = \sin(y-x);$
 - (c) $\frac{\partial f(2,4)}{\partial y}, f(x,y) = \sqrt{2x+3y};$
 - (d) $\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}, f(x,y) = \sin^2(y-x).$
4. Pokažite da vrijedi Schwarzov teorem, tj. da je $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ ako je:
 - (a) $f(x,y) = \sin^2 x \cos y;$
 - (b) $f(x,y) = x^5 y^4 - 3x^2 y^3 + 3x^2.$
5. Odredite treće parcijalne derivacije $D_1^3 f, D_1^3 D_2 f, D_2^3 f$ funkcija:
 - (a) $f(x,y) = x^2 - 3x^4 y;$
 - (b) $f(x,y,z) = x^5 + x^4 y^4 z^3 + yz^2.$
6. Koja od funkcija jest rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 :$
 - (a) $u(x,y) = x^2 + y^2;$
 - (b) $u(x,y) = x^2 - y^2;$
 - (c) $u(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2};$
 - (d) $u(x,y) = x^3 + 3xy^2.$
7. Koja od funkcija jest rješenje valne diferencijalne jednadžbe $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} :$
 - (a) $u(x,t) = \sin(kx) \sin(akt);$
 - (b) $u(x,t) = (x - at)^6 + (x + at)^6;$
 - (c) $u(x,t) = \sin(x - at) - \ln(x + at).$

8. Odredite $\frac{dz}{dt}$ i $\frac{du}{dt}$ ako je:
- $z = x^2 + y^2$, $x = t^3$, $y = 1 + t^2$;
 - $z = xe^{\frac{x}{y}}$, $x = \cos t$, $y = e^{2t}$;
 - $z = \sin \frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = t^2$;
 - $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, $x = \sqrt{t}$, $y = \sin 2t$, $z = e^{-3t}$.
9. Neka je $u(x, y, z) = [(x - 2)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}}$, $x = \cos 2\pi t$, $y = \sin \pi t$, $z = t$. Odredite $\frac{du}{dt}$ za $t = 1$.
10. Odredite $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$ ako je:
- $z = x^2 \sin y$, $x = u^2 + v^2$, $y = 2uv$;
 - $z = \sin x \cos y$, $x = (u - v)^2$, $y = u^2 - v^2$;
 - $z = x^2 - 3x^2y^3$, $x = ue^v$, $y = ue^{-v}$.
11. Neka je $u = f(x, y)$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Dokažite da je
- $$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$
12. Neka je f funkcija od r i $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dokažite da je :
- $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{df}{dr}\right)^2.$$
13. Koristeći odgovarajući dijagram odredite sve parcijalne derivacije funkcije:
- $z = f(x, y)$, $x = x(u, v, t)$, $y = y(u, v, t)$;
 - $w = f(x, y, z)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$;
 - $u = f(s, t)$, $s = s(w, x, y, z)$, $t = t(w, x, y, z)$.
14. Ako je $u = x^2 + y^2 + z^2$, $x = st$, $y = s \cos t$, $z = s \sin t$ odredite $\frac{\partial u}{\partial s}$ i $\frac{\partial u}{\partial t}$ u točki $T = (s, t) = (1, 0)$.
15. Odredite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ za $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = x \cos y$, $v = y \sin x$.
16. Odredite $D_1 z$ i $D_2 z$ za $z = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$, $u = x \sin y$, $v = x \cos y$.
17. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Nađite $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$.
18. Nađite druge parcijalne derivacije funkcije $z = f(u, v)$, $u = x + y$, $v = x - y$.
19. Ako je $z = \frac{x}{y}$ i $x = re^{st}$, $y = rse^t$ odredite $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ u točki $T = (r, s, t) = (1, 2, 0)$.
20. Odredite $\frac{dy}{dx}$ ako je funkcija y zadana implicitno:

- (a) $x^2 - xy + y^3 = 0$;
 (b) $e^y - e^x + xy = 0$;
 (c) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$;
 (d) $\sin x \sin y + \cos x \cos y = y$;
 (e) $x \cos y + y \cos x = 1$.
21. Odredite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ako je funkcija $z = f(x, y)$ zadana implicitno:
- (a) $xy + yz - zx = 0$;
 (b) $xe^y + yz + ze^x = 0$.
22. Laplaceov operator Δ definiran je sa $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
 Nađite izraz za Δf
- (a) u cilindričnom kordinatnom sustavu;
 (b) u sfernom kordinatnom sustavu.
23. Odredite $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ako je $z = f(x, y)$ implicitno zadana funkcija:
- (a) $xy + yz = xz$;
 (b) $xyz = \ln(x + y + z)$;
 (c) $x^2 + y^2 - z^2 = 2x(y + z)$.
24. Ako je $u = f(x, y)$ gdje je $x = e^s \cos t$, $y = e^s \sin t$ dokažite da je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right].$$

Poglavlje 5

DIFERENCIJABILNE FUNKCIJE

5.1 TEOREM O SREDNJOJ VRIJEDNOSTI

TEOREM 5.1 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i neprazan skup i neka funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ na Ω ima neprekidne parcijalne derivacije prvog reda. Neka su $A = (x_0, y_0)$ i $B = (x_0 + h, y_0 + k)$ dvije točke iz Ω takve da njihova spojница \overline{AB} leži u Ω . Tada postoji točka $C = (x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)$, $\vartheta \in \langle 0, 1 \rangle$, na spojnici \overline{AB} tako da vrijedi

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h \frac{\partial f(C)}{\partial x} + k \frac{\partial f(C)}{\partial y}. \quad (1)$$

DOKAZ. Budući je Ω otvoren skup, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $(x_0 + th, y_0 + tk) \in \Omega$ za svaki $t \in J = \langle -\varepsilon, \varepsilon + 1 \rangle$. Označimo sa $T_t = (x_0 + th, y_0 + tk)$.

Po Teoremu 4.7 je funkcija

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk), \quad t \in J \quad (2)$$

klase C^1 na J i vrijedi

$$F'(t) = \frac{\partial f(T_t)}{\partial x} \cdot \frac{d(x_0 + th)}{dt} + \frac{\partial f(T_t)}{\partial y} \cdot \frac{d(y_0 + tk)}{dt} = h \frac{\partial f(T_t)}{\partial x} + k \frac{\partial f(T_t)}{\partial y} \quad (3)$$

S druge strane, Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti primjenjen na funkciju F i segment $[0, 1] \subset J$ daje

$$F(1) - F(0) = F'(\vartheta), \quad \vartheta \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Budući je $F(0) = f(x_0, y_0)$ i $F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$ za točku $C = (x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) = T_\vartheta$ dobivamo iz (3) tvrdnju teorema. ■

Formulu (1) često pišemo u obliku

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{\partial f(C)}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f(C)}{\partial y} \quad (1')$$

koja se iz (1) dobiva stavljanjem $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$. Formula (1), odnosno (1') poznata je pod nazivom **formula o konačnim prirastima funkcije** f . Ako je točka $T = (x, y)$ blizu točke $T_0(x_0, y_0)$, onda zbog neprekidnosti funkcija D_1f i D_2f vrijednost tih funkcija u točkama spojnice $\overline{TT_0}$ možemo zamijeniti njihovim vrijednostima u točki T_0 . Tim postupkom dobivamo aproksimaciju

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + D_1f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + D_2f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

koja je vrlo važna i u izvjesnom smislu najpovoljnija.

PRIMJER. Funkcija $f(x, y) = xe^{xy}$ ima parcijalne derivacije

$$D_1f(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}, \quad D_2f(x, y) = x^2e^{xy}$$

i u okolišu točke $T_0 = (1, 0)$ možemo je aproksimirati sa

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xe^{xy} \approx f(1, 0) + (x - 1) \cdot D_1f(1, 0) + (y - 0) \cdot D_2f(1, 0) \\ &= f(1, 0) + (x - 1) \cdot 1 + (y - 0) \cdot 1 = x + y \end{aligned}$$

Npr., $f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$. (dok se uporabom kalkulatora dobiva aproksimacija $f(1.1, -0.1) = 1.1 \cdot e^{(1.1)(-0.1)} \approx 0.98542$). □

PRIMJER. Pokazali smo da funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ima parcijalne derivacije $D_1f(0, 0) = 0$, $D_2f(0, 0) = 0$ pa bi mogli pisati

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + 0(x - 0) + 0(y - 0) = 0.$$

No ovom slučaju aproksimacija nije dobra (npr. f u točkama pravca $y = x$ poprima vrijednost $\frac{1}{2}$ što je daleko od vrijednosti $f(x, x) = 0$). Aproksimacija nije dobra jer parcijalne derivacije nisu neprekidne funkcije. □

Teorem 5.1 je specijalni slučaj ovog teorema.

TEOREM 5.2 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i neprazan skup i neka funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ na Ω ima neprekidne sve prve parcijalne derivacije $D_i f$ ($i = 1, \dots, n$). Neka su $A = (a_1, \dots, a_n)$ i $B = (b_1, \dots, b_n)$ dvije točke iz Ω takve da njihova spojnjica $\overline{AB} = \{(a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_n + t(b_n - a_n)) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ leži u Ω . Tada postoji točka C na spojnjici \overline{AB} tako da vrijedi

$$f(B) - f(A) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) D_i f(C). \quad (1''')$$

Dokaz ovog teorema provodi se na isti način kao i dokaz Teorema 5.1.

KOROLAR 5.3 Ako funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ na otvorenom konveksnom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ima neprekidne parcijalne derivacije $D_i f$ ($i = 1, \dots, n$) i ako postoji $M > 0$ takav da je za svaku točku $P \in \Omega$ $|D_i f(P)| \leq M$, $i = 1, \dots, n$, onda je

$$|f(P) - f(Q)| \leq \sqrt{n} M d(P, Q), \quad P, Q \in \Omega. \quad (4)$$

DOKAZ. Uzmimo da je $n = 2$. Za $P = (x, y)$ i $Q = (x_0, y_0)$ konveksnost skupa Ω i Teorem 5.1 daju

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0) D_1 f + (y - y_0) D_2 f$$

gdje parcijalne derivacije $D_1 f$ i $D_2 f$ treba uzeti u nekoj točki $C = (x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)$, $\vartheta \in \langle 0, 1 \rangle$, spojnice \overline{AB} . Odavde je

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq M(|x - x_0| + |y - y_0|) \leq \\ &\leq \sqrt{2} M \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{2} M d(P, Q). \end{aligned}$$

Na sličan način se na osnovu Teorema 5.2 dobiva (4) za proizvoljni n . ■

KOROLAR 5.4 Ako funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ na otvorenom konveksnom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ima sve parcijalne derivacije koje na Ω isčezavaju, tj. $D_i f(T) = 0$, $T \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$, onda je f konstantna funkcija na Ω .

DOKAZ. Opet provodimo dokaz za $n = 2$ (analogno se provodi dokaz za $n > 2$). Neka su $T_0 = (x_0, y_0)$ i $T_1 = (x_0 + h, y_0 + k)$ proizvoljne točke iz Ω . Tada je

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h \cdot D_1 f(T) + k \cdot D_2 f(T),$$

gdje parcijalne derivacije treba uzeti u nekoj točki T na spojnici $\overline{T_0T_1}$. Budući $D_1f(T) = D_2f(T) = 0$ dobili smo $f(T_0) = f(T_1)$ i f je zaista konstantna funkcija. ■

KOROLAR 5.5 *Ako funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ima neprekidne parcijalne derivacije $D_i f$ ($i = 1, \dots, n$) na Ω , onda je f neprekidna funkcija na Ω .*

DOKAZ. Neka je $T_0 \in \Omega$ proizvoljna točka. Budući su $D_i f$ ($i = 1, \dots, n$) neprekidne funkcije u točki $T_0 \in \Omega$, po Lemu 3.4 postoji brojevi $\eta > 0$ i $M > 0$ takvi da je $B(T_0, \eta) \subseteq \Omega$ i $|D_i f(T)| \leq M$ ($i = 1, \dots, n$) za svaki $T \in B(T_0, \eta)$. Iz Korolara 5.3. slijedi $|f(T) - f(T_0)| \leq \sqrt{n}M d(T, T_0)$ za $T \in B(T_0, \eta)$. Odavde je $\lim_{T \rightarrow T_0} |f(T) - f(T_0)| = 0$ što pokazuje da je f neprekidna funkcija u točki $T_0 \in \Omega$. ■

Napomenimo da iz Korolara 5.5 slijedi da funkcija f koja na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ima neprekidne sve prve parcijalne derivacije mora biti klase C^1 na Ω .

5.2 DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJE

DEFINICIJA 5.6 *Kažemo da je funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, diferencijabilna u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoji polinom*

$$(t, s) \mapsto At + Bs \quad (A, B \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

takav da je

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \tag{2}$$

TEOREM 5.7 *Ako je f diferencijabilna u točki (x_0, y_0) onda je ona i neprekidna u toj točki.*

DOKAZ. Neka je $\varepsilon > 0$. Iz (2) slijedi da postoji $\delta > 0$ takav da

$$h^2 + k^2 < \delta^2 \Rightarrow |f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk| \leq \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}. \tag{3}$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} |f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| &\leq |A| |h| + |B| |k| + \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2} \leq \\ \sqrt{2} (|A| + |B|) \sqrt{h^2 + k^2} + \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2} &\leq (\varepsilon + \sqrt{2} (|A| + |B|)) \sqrt{h^2 + k^2}. \end{aligned}$$

Dakle

$$|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| \leq M \sqrt{h^2 + k^2},$$

gdje smo stavili $M = \varepsilon + \sqrt{2} (|A| + |B|)$. Sada je

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| = 0,$$

što dokazuje da je f neprekidna funkcija u točki T_0 . ■

TEOREM 5.8 Ako je funkcija f diferencijabilna u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$, onda parcijalne derivacije $D_1 f$ i $D_2 f$ postoje u točki (x_0, y_0) i vrijedi

$$A = D_1 f(x_0, y_0), \quad B = D_2 f(x_0, y_0) \tag{4}$$

DOKAZ. Uzmemo li $k = 0$ i $h \neq 0$ u (3) dobivamo

$$h < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - A \right| \leq \varepsilon |h|$$

od kuda slijedi

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

tj. $A = D_1 f(x_0, y_0)$. Analogno se dokazuje da je $B = D_2 f(x_0, y_0)$. ■

Primjetimo da ako je f diferencijabilna funkcija u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ onda je

$$f(x_0 + h, y_0 + k) =$$

$$f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0) \cdot h + D_2 f(x_0, y_0) \cdot k + R_1(x_0, y_0; h, k) \tag{5}$$

gdje ostatak R_1 ima svojstvo da je

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R_1(x_0, y_0; h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \tag{6}$$

Drugim riječima funkcija

$$\omega(h, k) = \begin{cases} \frac{R_1(x_0, y_0; h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}, & h^2 + k^2 \neq 0 \\ 0, & h = k = 0 \end{cases} \quad (7)$$

je definirana u okolini točke $(0, 0)$, neprekidna je u toj točki i vrijedi

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = \\ f(x_0, y_0) + D_1f(x_0, y_0) \cdot h + D_2f(x_0, y_0) \cdot k + \omega(h, k) \sqrt{h^2 + k^2} \end{aligned} \quad (8)$$

za sve h i k za koje je $(x_0 + h, y_0 + k) \in \Omega$.

Egzistencija parcijalnih derivacija D_1f i D_2f funkcije f u točki (x_0, y_0) nije dovoljna za neprekidnost, pa tim više ni za diferencijabilnost funkcije f u točki (x_0, y_0) .

TEOREM 5.9 Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, Ω otvoren i $(x_0, y_0) \in \Omega$. Ako su prve parcijalne derivacije D_1f i D_2f neprekidne u nekoj okolini točke (x_0, y_0) onda je f diferencijabilna funkcija u točki (x_0, y_0) .

DOKAZ. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući su D_1f i D_2f neprekidne u točki (x_0, y_0) postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} t^2 + s^2 < \delta^2 \Rightarrow |D_1f(x_0 + t, y_0 + s) - D_1f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ t^2 + s^2 < \delta^2 \Rightarrow |D_2f(x_0 + t, y_0 + s) - D_2f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Primjenom teorema srednje vrijednosti za funkcije jedne varijable za $h^2 + k^2 < \delta^2$ dobivamo

$$\begin{aligned} |R_1(x_0, y_0; h, k)| = \\ |f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - D_1f(x_0, y_0) \cdot h - D_2f(x_0, y_0) \cdot k| = \\ |[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] + [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)] - \\ - D_1f(x_0, y_0) \cdot h - D_2f(x_0, y_0) \cdot k| = \\ |D_1f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) \cdot h + D_2f(x_0, y_0 + \vartheta_2 k) \cdot k - \\ - D_1f(x_0, y_0) \cdot h - D_2f(x_0, y_0) \cdot k| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |D_1 f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) - D_1(x_0, y_0)| \cdot |h| \\
& + |D_2 f(x_0, y_0 + \vartheta_2 k) - D_2(x_0, y_0)| \cdot |k| \leq \\
& \frac{\varepsilon}{2} |h| + \frac{\varepsilon}{2} |k| \leq \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}.
\end{aligned}$$

Dobili smo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$h^2 + k^2 < \delta^2 \Rightarrow \frac{R_1(x_0, y_0; h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \varepsilon$$

i zaista je f diferencijabilna funkcija u točki (x_0, y_0) . ■

NAPOMENA. (a) Teorem 5.9. je znatno jači od Korolara 5.5. gdje se pretpostavlja da parcijalne derivacije postoje i da su neprekidne na okolini točke (x_0, y_0) . Dokaz Teorema 5.9. zasniva se na Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti koji ne zahtijeva neprekidnost derivacije funkcije nego samo njezinu egzistenciju.

(b) Diferencijabilnost funkcije f u točki (x_0, y_0) slijedi i iz ovih slabijih pretpostavki:

1. $D_1 f$ postoji u okolini točke (x_0, y_0) ;
2. $D_1 f$ je neprekidna funkcija u točki (x_0, y_0) ;
3. D_2 postoji u točki (x_0, y_0) .

Zaista, za $\varepsilon > 0$ neprekidnost funkcije D_1 u točki (x_0, y_0) i diferencijabilnost funkcije $s \mapsto f(x_0, y_0 + s)$ za $s = 0$ povlači egzistenciju broja $\delta > 0$ takvog da

$$h^2 + k^2 < \delta^2 \Rightarrow |D_1 f(x_0 + h, y_0 + k) - D_1 f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|k| < \delta \Rightarrow |f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - D_2 f(x_0, y_0) \cdot k| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot |k|.$$

Tada $h^2 + k^2 < \delta^2$ povlači

$$\begin{aligned}
|R_1(x_0, y_0; h, k)| & \leq |D_1 f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) \cdot h - D_1 f(x_0, y_0)| \cdot |h| + \\
& + |f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - D_2 f(x_0, y_0) \cdot k| \leq \frac{\varepsilon}{2} |h| + \frac{\varepsilon}{2} |k| \leq \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}
\end{aligned}$$

odakle slijedi diferencijabilnost funkcije f u točki (x_0, y_0) .

Prethodno vrijedi i za skalane funkcije ako je $n > 2$.

DEFINICIJA 5.10 Kažemo da je funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ **diferencijabilna u točki** $T_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ otvorenog skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ako postoji polinom

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto A_1 t_1 + \dots + A_n t_n, \quad (A_k \in \mathbb{R})$$

takav da je

$$\lim_{\sum_{i=1}^n t_i^2 \rightarrow 0} \frac{|f(x_1^0 + t_1, \dots, x_n^0 + t_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) - \sum_{i=1}^n A_i t_i|}{\sqrt{t_1^2 + \dots + t_n^2}} = 0 \quad (9)$$

TEOREM 5.11 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $T_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ i f realna funkcija definirana na Ω .

1. Ako je f diferencijabilna funkcija u točki T_0 , tj. ako postoji realni brojevi A_1, \dots, A_n takvi da vrijedi (9), onda je f neprekidna u T_0 , f ima prve parcijalne derivacije $D_i f$ u točki T_0 i vrijedi $A_i = D_i f(T_0)$ ($i = 1, \dots, n$).
2. Ako prve parcijalne derivacije $D_i f$ ($i = 1, \dots, n$) funkcije f postoje u okolini točke T_0 i ako su one neprekidne u točki T_0 , onda je f diferencijabilna u točki T_0 .

5.3 DIFERENCIJAL FUNKCIJE

DEFINICIJA 5.12 Neka je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija u točki T_0 otvorenog skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Polinom

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto D_1 f(T_0) \cdot t_1 + \dots + D_n f(T_0) \cdot t_n \quad (1)$$

nazivamo **diferencijalom funkcije f u točki T₀** i označavamo da sa $df(T_0)$.

Ako je $T = (x_1, \dots, x_n)$ onda diferencijal k-te projekcije $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$ označavamo sa dx_k . Prema tomu je

$$(dx_k)(t_1, \dots, t_n) = t_k,$$

odakle slijedi da su polinomi dx_1, \dots, dx_n linearno nezavisni, tj.

$$A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0 \Rightarrow A_1 = 0, \dots, A_n = 0.$$

Sada (1), uz oznake $T_0 = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$, prelazi u

$$\begin{aligned}[df(T_0)](\mathbf{t}) &= \sum_{i=1}^n D_i f(T_0) \cdot t_i = \\ \sum_{i=1}^n D_i f(T_0) \cdot (dx_i)(\mathbf{t}) &= \left[\sum_{i=1}^n D_i f(T_0) \cdot (dx_i) \right](\mathbf{t}) \Rightarrow \\ df(T_0) &= \sum_{i=1}^n D_i f(T_0) \cdot dx_i \end{aligned}\tag{1'}$$

Ukoliko je $n = 2$ tada je

$$df(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \cdot dx + D_2 f(x_0, y_0) \cdot dy,$$

a ukoliko je $n = 3$ imamo

$$df(x_0, y_0, z_0) = D_1 f(x_0, y_0, z_0) \cdot dx + D_2 f(x_0, y_0, z_0) \cdot dy + D_3 f(x_0, y_0, z_0) \cdot dz.$$

Sjetimo se da smo kod funkcije jedne varijable imali da je diferencijal $df(x) = f'(x)dx$ te da smo njega interpretirali kao prirast do tangente. Slična će biti geometrijska interpretacija diferencijala $df(x_0, y_0)$ funkcije $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Označimo sa Π tangencijalnu ravninu na plohu $z = f(x, y)$ u točki $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$. Neka je

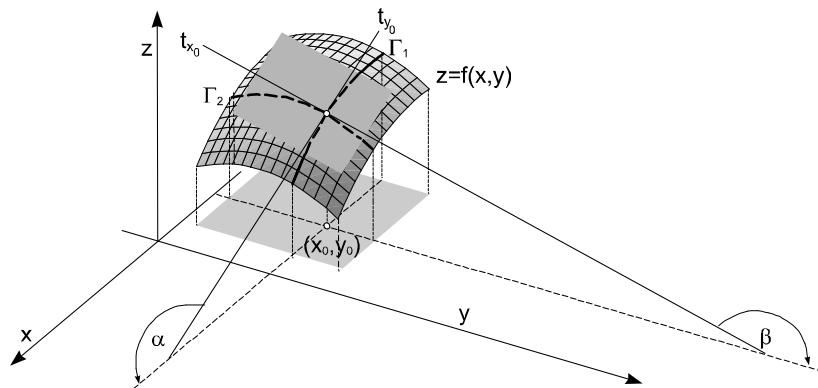
$$\Pi \equiv z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

jednadžba tangencijalne ravnine. Presječnica tangencijalne ravnine Π sa ravninom $y = y_0$ je pravac

$$t_{y_0} \equiv z - z_0 = a(x - x_0), \quad y = y_0.$$

Taj pravac je i tangenta na krivulju $\Gamma_1 \equiv z = f(x, y)$, $y = y_0$, a to znači da je koeficijent a jednak parcijalnoj derivaciji $D_1 f(x_0, y_0)$. Dakle, mora biti

$$t_{y_0} \equiv z - z_0 = D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0), \quad y = y_0.$$



Slično se pokazuje da je presječnica tangencijalne ravnine Π i ravnine $x = x_0$ pravac $t_{x_0} \equiv z - z_0 = b(y - y_0)$, $x = x_0$, koji je tangenta na krivulju $\Gamma_2 \equiv z = f(x, y)$, $x = x_0$, i stoga je $t_{x_0} \equiv z - z_0 = D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$, $x = x_0$. Zaključimo: ako funkcija $f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne derivacije tada je jednadžba tangencijalne ravnine na plohu $z = f(x, y)$ u točki $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ dana sa

$$\Pi \equiv z - z_0 = D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

(Napomenimo da se sada parcijalnim derivacijama može pridijeliti ranije navedeno geometrijsko tumačenje: parcijalna derivacija $D_1 f(x_0, y_0)$ jednaka je tangensu priklonog kuta tangente t_{y_0} presječne krivulje Γ_1 prema $+x$ -osi, a parcijalna derivacija $D_2 f(x_0, y_0)$ jednaka je tangensu priklonog kuta tangente t_{x_0} presječne krivulje Γ_2 prema $+y$ -osi.)

PRIMJER. Odredimo jednadžbu tangencijalne ravnine funkcije

$$f(x, y) = -2x^2 - y^2$$

u točki $T_0 = (1, 1, -3)$.

Kako je $D_1 f(x, y) = -4x$, $D_2 f(x, y) = -2y$, imamo da je $D_1 f(1, 1) = -4$ i $D_2 f(1, 1) = -2$. Jednadžba tangencijalne ravnine glasi $z + 3 = -4(x - 1) - 2(y - 1)$, odnosno $z = -4x - 2y + 3$. \square

Formulu o konačnim prirastima

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)D_1 f(x_0, y_0) + (y - y_0)D_2 f(x_0, y_0)$$

uz $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$ možemo sada zapisati na način

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \cdot dx + D_2 f(x_0, y_0) \cdot dy$$

odnosno

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0).$$

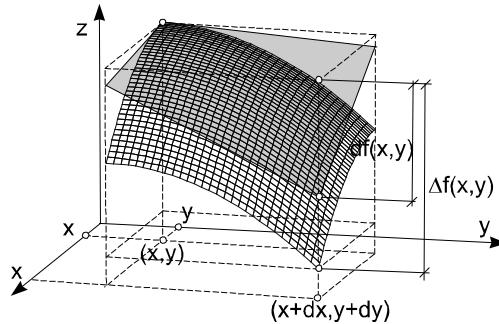
Buduće je tangencijalna ravnina dana sa

$$z(x, y) = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

to je

$$z(x_0+dx, y_0+dy) - f(x_0, y_0) = D_1f(x_0, y_0)dx + D_2f(x_0, y_0)dy = df(x_0, y_0).$$

Dakle, geometrijska interpretacija diferencijala funkcije $df(x, y)$ biti će slična: to je prirast do tangencijalne ravnine.



Aproksimacija, približna vrijednost funkcije f u točki (x, y) koja je dovoljno blizu točki (x_0, y_0) može se izvršiti sa

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$$

t.j. s vrijednostima na tangencijalnoj ravnini.

Iz definicije diferencijala neposredno slijedi teorem.

TEOREM 5.13 *Ako je svaka od funkcija $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki T otvorenog skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, onda su funkcije $f + g$, $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$ (uz pretpostavku $g(T) \neq 0$) diferencijabilne u točki T i vrijedi:*

- (a) $d(f + g)(T) = df(T) + dg(T);$
- (b) $d(f \cdot g)(T) = [df(T)] \cdot g(T) + f(T) \cdot [dg(T)];$
- (c) $d\left(\frac{f}{g}\right)(T) = \frac{[df(T)] \cdot g(T) - f(T) \cdot [dg(T)]}{[g(T)]^2}.$

TEOREM 5.14 (diferencijal kompozicije) *Neka su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoreni skupovi, $f \in C^1(\Omega)$ i $u_1, \dots, u_n \in C^1(\Omega_1)$ takve funkcije da je na Ω_1 definirana kompozicija*

$$F(x_1, \dots, x_m) = f(u_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_n(x_1, \dots, x_m)). \quad (2)$$

Tada je $F \in C^1(\Omega_1)$ i

$$dF = \sum_{i=1}^n D_i f \cdot du_i \quad (3)$$

s tim da u (3) diferencijale dF i du_i treba računati u točki $T = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega_1$, a parcijalne derivacije $D_i f$ u odgovarajućoj točki $(u_1(T), \dots, u_n(T)) \in \Omega$.

DOKAZ. Da je $F \in C^1(\Omega_1)$ slijedi iz Teorema 4.7 (odnosno njegovog poopćenja). Nadalje, za $T \in \Omega_1$ i $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ po definiciji diferencijala i derivaciji kompozicije imamo

$$\begin{aligned} [dF(T)](\mathbf{t}) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial F(T)}{\partial x_k} \cdot t_k = \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n D_i f(u_1(T), \dots, u_n(T)) \cdot \frac{\partial u_i(T)}{\partial x_k} \right) \cdot t_k = \\ &= \sum_{i=1}^n D_i f(u_1(T), \dots, u_n(T)) \left(\sum_{k=1}^m D_k u_i(T) \cdot t_k \right) = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n D_i f(u_1(T), \dots, u_n(T)) [du_i(T)] \right] (\mathbf{t}) \end{aligned}$$

odakle, zbog proizvoljnosti m -torke $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ slijedi (3). ■

Kao što smo diferencijal $(t_1, \dots, t_n) \mapsto D_1 f(T_0) \cdot t_1 + \dots + D_n f(T_0) \cdot t_n$ zapisivali u obliku $df(T_0) = \sum_{i=1}^n D_i f(T_0) \cdot dx_i$ možemo diferencijal (3) zapisati u obliku

$$dF = \sum_{i=1}^n D_i f \, du_i \quad (3')$$

u kojoj u_i mogu biti koordinate točke iz Ω , tada je $F = f$, tako i funkcije definirane na Ω_1 .

Napomenimo da linearna nezavisnost polinoma dx_1, \dots, dx_n u nekim slučajevima olakšava nalaženje parcijalnih derivacija funkcije.

PRIMJER. Funkcija $f(x, y)$ se prijelazom na polarni koordinatni sustav $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, transformira u funkciju

$$F(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Sada je

$$dF = \frac{\partial F}{\partial r} dr + \frac{\partial F}{\partial \varphi} d\varphi$$

gdje su dr i $d\varphi$ polinomi od dvije varijable definirani sa

$$(dr)(t, s) = t, \quad (d\varphi)(t, s) = s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

S druge strane iz (3') nalazimo

$$dF = D_1 f \, dx + D_2 f \, dy = (x, y \text{ su funkcije od } r \text{ i } \varphi)$$

$$\begin{aligned} &= D_1 f \left(\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \right) + D_2 f \left(\frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \right) = \\ &= \left(D_1 f \frac{\partial x}{\partial r} + D_2 f \frac{\partial y}{\partial r} \right) dr + \left(D_1 f \frac{\partial y}{\partial r} dr + D_2 f \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) d\varphi \end{aligned}$$

Dobili smo

$$\frac{\partial F}{\partial r} dr + \frac{\partial F}{\partial \varphi} d\varphi = \left(D_1 f \frac{\partial x}{\partial r} + D_2 f \frac{\partial y}{\partial r} \right) dr + \left(D_1 f \frac{\partial y}{\partial r} dr + D_2 f \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) d\varphi$$

i jer su dr i $d\varphi$ linearno nezavisni polinomi imamo da je

$$\frac{\partial F}{\partial r} = D_1 f \frac{\partial x}{\partial r} + D_2 f \frac{\partial y}{\partial r} = D_1 f \cdot \cos \varphi + D_2 f \cdot \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = D_1 f \frac{\partial x}{\partial \varphi} + D_2 f \frac{\partial y}{\partial \varphi} = D_1 f \cdot (-r \cos \varphi) + D_2 f \cdot \cos \varphi.$$

U ovim formulama je važno da se parcijalne derivacije $D_1 F$ i $D_2 F$ računaju na mjestu (r, φ) , a parcijalne derivacije $D_1 f$ i $D_2 f$ na odgovarajućem mjestu $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. \square

PRIMJER. Neka je

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

za sve (x, y) iz pravokutnika $K \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka su F i f funkcije klase C^1 .

Uzmemo li diferencijal funkcije

$$g(x, y) = F(x, y, f(x, y)) = 0$$

dobivamo

$$D_1 g \, dx + D_2 g \, dy =$$

$$(D_1F + D_3F \cdot D_1f) \ dx + (D_2F + D_3F \cdot D_2f) \ dy = 0$$

Budući su polinomi dx i dy linearno nezavisni dobivamo

$$D_1F + D_3F \cdot D_1f = 0,$$

$$D_2F + D_3F \cdot D_2f = 0,$$

odakle se mogu izračunati parcijalne derivacije funkcije f u točkama $P = (x, y, f(x, y))$ u kojima je $D_3F(P) \neq 0$. \square

PRIMJER. Za funkciju

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

odredimo D_1f , D_2f i $df(1, 1)$.

Označimo sa

$$g(x, y) = \frac{y}{x} \quad \text{i} \quad h(t) = \operatorname{arctg} t.$$

Sada je

$$\begin{aligned} df(x, y) &= d[(hg)(x, y)] = dh(g(x, y)) \cdot dg(x, y) = \frac{1}{1 + [g(x, y)]^2} \cdot d\left(\frac{y}{x}\right) = \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{dy \cdot x - y \cdot dx}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad df(1, 1) = \frac{1}{2}(-dx + dy).$$

Primjetimo da su tu obadvije parcijalne derivacije D_1f i D_2f istovremeno određene. \square

5.4 DIFERENCIJALNE FORME

DEFINICIJA 5.15 *Funkciju*

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t_1, \dots, t_n) = A_1t_1 + \dots + A_nt_n, \tag{4}$$

$t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $A_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) nazivamo **linearnom formom** od n varijabli.

Sa $\mathcal{P}^{(n)}$ označavamo skup svih linearih formi od n varijabli i lako se vidi da je $\mathcal{P}^{(n)}$ vektorski prostor.

Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f \in C^1(\Omega)$, onda je svakoj točki $T \in \Omega$ pridružen diferencijal $df(T)$ funkcije f u točki T . Budući je $df(T) \in \mathcal{P}^{(n)}$ to je sa $T \mapsto df(T)$ definirana funkcija sa Ω u $\mathcal{P}^{(n)}$.

DEFINICIJA 5.16 Funkciju $\omega : \Omega \rightarrow \mathcal{P}^{(n)}$ s otvorenog skupa Ω u vektorski prostor $\mathcal{P}^{(n)}$ linearih formi od n varijabli nazivamo **diferencijalnom formom** na Ω .

Ako sa $A_1(T), \dots, A_n(T)$ označimo koeficijente polinoma $\omega(T)$, onda je

$$[\omega(T)](\mathbf{t}) = A_1(T)t_1 + \dots + A_n(T)t_n, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, T \in \Omega, \quad (5)$$

i dalje

$$\omega(T) = A_1(T)dx_1 + \dots + A_n(T)dx_n, \quad T \in \Omega. \quad (6)$$

Funkcije $A_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ su potpuno određene linearnom diferencijalnom formom ω i s druge strane svakih n funkcija $A_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ preko formule (6) definira potpuno određenu diferencijalnu formu ω .

DEFINICIJA 5.17 Kažemo da je diferencijalna forma (6) **klase C^p** ($p = 0, 1, \dots, \infty$) na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, ako je svaka od funkcija A_1, \dots, A_n klase C^p na Ω .

Diferencijalna forma (6) klase C^1 je **egzaktna** na Ω , ako postoji funkcija $f \in C^2(\Omega)$ takva da je $\omega(T) = df(T)$ za svaki $T \in \Omega$.

Ako je forma

$$\omega(T) = A_1(T)dx_1 + \dots + A_n(T)dx_n, \quad T \in \Omega,$$

egzaktna, tj.

$$\omega(T) = df(T) = D_1f(T)x_1 + \dots + D_nf(T)dx_n$$

onda mora biti

$$A_i = D_if, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7)$$

Schwarzov teorem za funkciju f daje $D_i D_j f = D_j D_i f$ pa iz (7) dolazimo do zaključka:

Ako je forma $\omega(T) = df(T) = D_1 f(T)x_1 + \cdots + D_n f(T)dx_n$ egzaktna na Ω , onda na Ω vrijede jednakosti

$$D_i A_j = D_j A_i, \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (8)$$

Uvjeti (8) nisu i dovoljni da forma ω bude egzaktna. Pokažimo to na primjeru.

PRIMJER. Sa

$$\omega(x, y) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

definirana je diferencijalna forma klase C^∞ na otvorenom skupu $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Sada se (8) svodi na provjeru jednakosti

$$\frac{1}{\partial x} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

na Ω . Iako je ta jednakost ispunjena, ipak ne postoji funkcija $\dot{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $\omega(x, y) = df(x, y)$ za sve $(x, y) \in \Omega$. Zaista, kada bi takva funkcija postojala imali bismo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

No, tada je $t \mapsto F(t) = f(\cos t, \sin t)$ funkcija klase C^∞ na \mathbb{R} i imamo da je

$$\begin{aligned} F'(t) &= D_1 f(\cos t, \sin t) \cdot (\cos t)' + D_2 f(\cos t, \sin t) (\sin t)' = \\ &= -\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t = 1 \end{aligned}$$

što je nemoguće. Naime $F(0) = F(2\pi) = f(1, 0)$ i teorem srednje vrijednosti povlači da se funkcija F' poništava u nekoj točki između 0 i 2π . \square

DEFINICIJA 5.18 *Diferencijalna forma (6) je **zatvorena** na Ω , ako su na Ω ispunjeni uvjeti*

$$D_i A_j = D_j A_i, \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

U prethodnom primjeru je $\omega(x, y) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ zatvorena na $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ali nije na Ω egzaktna. Svostvo zatvorenosti (lokalno svojstvo) tek će uz neke geometrijske pretpostavke o skupu Ω dati egzaktnost diferencijalne forme (globalno svojstvo).

DEFINICIJA 5.19 Skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je **zvjezdast** ako postoji točka $T_0 \in \Omega$ takva da je za svaku točku $T \in \Omega$ spojnica $\overline{T_0 T}$ sadržana u Ω .

Svaki konveksan skup je zvjezdast.

TEOREM 5.20 (Poincareova lema) Svaka zatvorena diferencijalna forma na otvorenom zvjezdastom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je egzaktna.

DOKAZ. Dokaz provodimo za $n = 3$, za ostale n provodi se analogno. Bez gubitka općenitosti možemo uzeti da je $T_0 = (0, 0, 0)$ točka obzirom na koju je Ω zvjezdast skup. Neka je forma ω dana sa

$$\omega(x, y, z) = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz, \quad (x, y, z) \in \Omega.$$

Uvjet (8) prelazi u

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}. \quad (9)$$

Treba dokazati da postoji funkcija $f \in C^2(\Omega)$ takva da je $A = D_1 f$, $B = D_2 f$ i $C = D_3 f$.

Neka je (x, y, z) proizvoljna točka iz Ω . Spojnica te točke s ishodištem je dana sa $\{(tx, ty, tz) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ i ona leži u Ω . To znači da su funkcije $t \mapsto A(tx, ty, tz)$, $t \mapsto B(tx, ty, tz)$, $t \mapsto C(tx, ty, tz)$, klase C^1 na intervalu $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ za neki $\varepsilon > 0$. Sada f definiramo na način

$$f(x, y, z) = \int_0^1 [A(tx, ty, tz)x + B(tx, ty, tz)y + C(tx, ty, tz)z] dt.$$

Pokazuje se da je f klase C^1 na Ω , pa deriviranje pod znakom integrala (v. [1], str. 134) i uzimajući u obzir (9) dobivamo

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y, z) &= \\ &\int_0^1 [A(tx, ty, tz) + D_1 A(tx, ty, tz) \cdot tx + D_1 B \cdot ty + D_1 C \cdot tz] dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 A(tx, ty, tz) dt + \int_0^1 [D_1 A(tx, ty, tz) \cdot x + D_2 A \cdot y + D_3 A \cdot z] t dt = \\ & \int_0^1 Adt + \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} A(tx, ty, tz) \right] \cdot t dt = \\ & \int_0^1 Adt + [t \cdot A(tx, ty, tz)] \Big|_0^1 - \int_0^1 Adt \Rightarrow D_1 f(x, y, z) = A(x, y, z). \end{aligned}$$

Na sličan način se dobiva $D_2 f = B$ i $D_3 f = C$. ■

5.5 ZADACI ZA VJEŽBU

1. Pomoću diferencijala aproksimirajte funkciju $f(x, y) = x^3 y^2$ u točki $T_0 = (2, 1)$. Nadite greške te aproksimacije u točkama $T_1 = (1.9; 0.9)$, $T_2 = (1, 99; 0, 99)$.
2. Izračunajte približno $a = (1.03)^{3.001}$.
3. Izračunajte s točnošću 0,01 broj $\frac{\sin 1.47 \cdot \operatorname{arctg} 0.07}{2^{2.95}}$.
4. Približno izračunajte brojeve $(0, 97)^{3.02}$, $(1.004)^{1.07}$, $\sqrt{(6.03)^2 + (7.02)^2}$.
5. Nađite diferencijal funkcije $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 3y^2})$ u točkama $(2, -1)$ i $(2, 1)$.
6. Funkcija $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & (0, 0) \end{cases}$ ima parcijalne derivacije $D_1 f$ i $D_2 f$ na \mathbb{R}^2 , ali u točki $(0, 0)$ nije neprekidna. Zapravo vrijedi da je $D_1(f(x, 0)) = D_2(0, x)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Da li je restrikcija funkcije $D_1 f$ na pravac $y = a \neq 0$ neprekidna?
7. Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$. Dokažite da je $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$, $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$.
8. Neka je $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & (0, 0) \end{cases}$. Dokažite da je funkcija f neprekidna u okolini točke $(0, 0)$, da su $D_1 f$ i D_2 omeđene funkcije u okolini te točke, ali da funkcija f nije diferencijabilna u toj točki.
9. Funkcija $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & (0, 0) \end{cases}$ ima parcijalne derivacije $D_1 f$ i $D_2 f$ na \mathbb{R}^2 . Za proizvoljnu točku $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sve četiri funkcije $x \mapsto D_1 f(x, y_0)$, $x \mapsto D_2 f(x, y_0)$ i $y \mapsto D_1 f(x_0, y)$, $y \mapsto D_2 f(x_0, y)$ su neprekidne na \mathbb{R} , ali funkcija f nije diferencijabilna u točki $(0, 0)$.
10. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren. Dokažite da skup svih diferencijabilnih funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ u točki (x_0, y_0) tvori vektorski prostor.

11. Funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencijabilna u točki (x_0, y_0) ako i samo ako postoje funkcije $A, B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je
- $f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x, y) \cdot (x - x_0) + B(x, y) \cdot (y - y_0)$,
 - A i B su neprekidne u točki (x_0, y_0) .
12. Dokažite da je funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencijabilna u točki (x_0, y_0) ako i samo ako postoje brojevi A, B i C takvi da je

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x_0 + h, y_0 + k) - C - A \cdot h - B \cdot k|}{|h| + |k|} = 0.$$

Dokažite da tada $A = D_1 f(x_0, y_0)$, $B = D_2 f(x_0, y_0)$ i $C = f(x_0, y_0)$.

13. Koja je od formi

$$\begin{aligned} & xydz + yzdx + xzdy, \\ & xyz(dx + dy + dz), \\ & xdx + ydy + zdz, \end{aligned}$$

zatvorena?

14. Forma

$$\omega(x, y) = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

je zatvorena na $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, nije egzaktna na Ω , ali je egzaktna u poluravnini $\Omega_1 = \{(x, y) \mid y > 1\}$. Nadite funkciju f na Ω_1 takvu da je $df = \omega$ na Ω_1 . Da li je forma ω egzaktna na skupu $\Omega_1 \cup \{(x, y) \mid y < -1\}$.

15. Da li su forme

$$\begin{aligned} & xdx + ydy, \\ & ydx + xdy, \end{aligned}$$

egzaktne?

16. Forma $\omega = ydx - xdy$ nije zatvorena, ali je forma $y^{-2}\omega$ zatvorena, osim za $y = 0$.

Za formu $\omega = Adx + Bdy$ klase C^1 na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ postoji funkcija $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je forma $\lambda\omega$ egzaktna. Funkcija λ naziva se **integracioni multiplikator**. Analogna tvrdnja nije točna za diferencijalne forme od tri i više varijabli.

17. Provjerite da forma $\omega = -ydx + xdy$ nije egzaktna ali jest

$$\begin{aligned} d\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{\omega}{x^2}, \\ d\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{\omega}{y^2}, \\ d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) &= \frac{\omega}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

pa su $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{y^2}$, $\frac{1}{x^2+y^2}$ integracioni multiplikatori za formu ω .

18. Nadite integracione multiplikatore za forme:

- $e^{x+y}dx + e^xdy$;
- $x dy$;

- (c) $\sin x \cdot dx + \cos y \cdot dy.$
19. Dokažite formule za prijelaz u sferni koordinatni sustav
- $$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos \varphi \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \cos \vartheta \frac{\partial f}{\partial y} + \cos \vartheta \frac{\partial f}{\partial z},$$
- $$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \varphi \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial y},$$
- $$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \cos \varphi \cos \vartheta \frac{\partial f}{\partial x} - \sin \varphi \cos \vartheta \frac{\partial f}{\partial y} - \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial z}.$$
20. Diferencijal funkcije $f(x, y, z) = e^x yz$ prikažite u cilindričnom i sfernem koordinatnom sustavu.

Poglavlje 6

IMPLICITNO ZADANE FUNKCIJE

6.1 TEOREM O IMPLICITNIM FUNKCIJAMA

O implicitno zadanim funkcijama već je bilo riječi. Tako smo s jednadžbom $F(x, y) = 0$ implicitno zadali funkciju $y = f(x)$ i ako je jednadžba $F(x, y) = 0$ rješiva po y lako je doći do funkcije $y = f(x)$ i do njene derivacije $f'(x)$. Ukoliko jednadžba nije rješiva po y postavlja se pitanje pod kojim uvjetima postoji funkcija f , i ako su ti uvjeti ispunjeni da je njezina derivacija zaista dana sa $f'(x) = -\frac{D_1 F(x, y)}{D_2 F(x, y)}$.

Isto tako smo govorili da je s jednadžbom $F(x, y, z) = 0$ implicitno zadana funkcija $z = f(x, y)$ i ukoliko je jednadžba $F(x, y, z) = 0$ lako rješiva po z , jasan je način kako doći do funkcije $z = f(x, y)$. Ukoliko to nije moguće, sljedeći teorem govori pod kojim uvjetima postoji funkcija f , te kako izračunati njezine prve parcijalne derivacije.

TEOREM 6.1 *Neka je $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ i $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ točka iz Ω za koju je*

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad (1)$$

$$D_3 F(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \quad (2)$$

Tada postoje otvoreni pravokutnik (interval)

$$I = \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$$

oko točke (x_0, y_0) i interval

$$I' = \langle z_0 - c, z_0 + c \rangle \subseteq \mathbb{R}$$

oko točke z_0 takvi da za svaki par $(x, y) \in I$ jednadžba $F(x, y, z) = 0$ ima jedinstveno rješenje z u intervalu I' . Funkcija

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

koja svakom uredenom paru $(x, y) \in I$ pridružuje jedinstveno rješenje z jednadžbe $F(x, y, z) = 0$ iz intervala I' je klase C^1 na I i vrijedi

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) = -\frac{D_1 F(x, y, f(x, y))}{D_3 F(x, y, f(x, y))}, \\ D_2 f(x, y) = -\frac{D_2 F(x, y, f(x, y))}{D_3 F(x, y, f(x, y))}, \end{cases} \quad (x, y) \in I. \quad (3)$$

Uočimo da uvjet $D_3 F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ vodi na mogućnost rješavanja jednadžbe $F(x, y, z) = 0$ po z i u vezi s tim izbor intervala

$$I = \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle \subseteq \mathbb{R}^2, \quad I' = \langle z_0 - c, z_0 + c \rangle \subseteq \mathbb{R} \quad (4)$$

takvih da je $I \times I' \subseteq \Omega$ i $f(I) \subset I'$.

Istaknimo još ova tri svojstva funkcije f :

1. $f(x_0, y_0) = z_0$;
2. $F(x, y, f(x, y)) = 0$ za svaki $(x, y) \in I$;
3. $(F(x, y, z) = 0, (x, y) \in I, z \in I') \Rightarrow z = f(x, y)$.

Najprije dokažimo jednu lemu.

LEMA 6.2 Neka je $\alpha < \beta$ i $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ funkcija sa svojstvom da postoji pozitivan broj $q < 1$ takav da je

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq q |t - s|, \quad t, s \in [\alpha, \beta] \quad (5)$$

(takvu funkciju nazivamo **kontrakciju** na segmentu $[\alpha, \beta]$). Tada postoji jedinstvena točka $t^* \in [\alpha, \beta]$ takva da je

$$\varphi(t^*) = t^*$$

(broj t^* je **fiksna točka** funkcije φ).

DOKAZ. Dokažimo da φ ima najviše jednu fiksnu točku. Zaista, ukoliko je pored t^* i s^* fiksna točka imali bi

$$\begin{aligned} |\varphi(t^*) - \varphi(s^*)| &= |t^* - s^*| \leq q |t^* - s^*| \Rightarrow (1 - q) |t^* - s^*| \leq 0 \Rightarrow \\ |t^* - s^*| &= 0 \Rightarrow t^* = s^*. \end{aligned}$$

Ako je neki od rubova α, β fiksna točka lema je dokazana pa pretpostavimo da nije. Tada je $\varphi(\alpha) > \alpha$ i $\varphi(\beta) < \beta$. Uvjet (5) daje da je kontrakcija φ neprekidna. To znači i da je funkcija $\psi(t) = t - \varphi(t)$ neprekidna na segmentu $[\alpha, \beta]$ i budući je $\psi(\alpha) < 0$ i $\psi(\beta) > 0$ postoji $t^* \in [\alpha, \beta]$ takav da je $\psi(t^*) = 0$. Dakle, $\varphi(t^*) = t^*$ i lema je dokazana. ■

DOKAZ TEOREMA 6.1. Stavimo

$$\gamma = [D_3F(x_0, y_0, z_0)]^{-1}.$$

Funkcije D_1F, D_2F i $\frac{1}{D_3F}$ su neprekidne u točki $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pa postoje brojevi $\eta > 0$ i $M > 0$ (v. Lemu 3.4) takvi da

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \eta^2 \Rightarrow \begin{cases} |D_1F(x, y, z)| < M \\ |D_2F(x, y, z)| < M \\ |[D_3F(x, y, z)]^{-1}| < M \end{cases} \quad (6)$$

Budući da

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)} \gamma D_3F(x, y, z) = 1$$

to postoji otvoreni kvadar J' sa središtem u (x_0, y_0, z_0) sadržan u kugli $B(T_0, \eta)$ takav da

$$(x, y, z) \in J' \Rightarrow |1 - \gamma \cdot D_3F(x, y, z)| \leq \frac{1}{4}.$$

Uzmimo sada brojeve $a, b, c > 0$ takve da je otvoreni kvadar $J = \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle \times \langle z_0 - c, z_0 + c \rangle$ sadržan u kvadru J' i da je svaka od stranica a i b manja od $\frac{c}{4|\gamma|M}$. Za tako odabrane brojeve a, b, c promotrimo I i I' iz (4), tj. $I = \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle$ i $I' = \langle z_0 - c, z_0 + c \rangle$. Za fiksno $(x, y) \in I$ definirajmo funkciju

$$\varphi(t) = t - \gamma F(x, y, t) = t - \frac{F(x, y, t)}{D_3F(x_0, y_0, z_0)}, \quad t \in I'. \quad (7)$$

Primjenom teorema o srednjoj vrijednosti i ocjene (6) imamo:

$$\begin{aligned}\varphi(t) - z_0 &= t - z_0 - \gamma [F(x, y, t) - F(x_0, y_0, z_0)] = \\ t - z_0 - \gamma [(x - x_0)D_1F + (y - y_0)D_2F + (t - z_0)D_3F] &\Rightarrow \\ |\varphi(t) - z_0| &\leq |t - z_0| \cdot |1 - \gamma D_3F| + |\gamma| \cdot [|x - x_0| \cdot |D_1F| + |y - y_0| \cdot |D_2F|] \leq \\ c \cdot \frac{1}{4} + |\gamma| \cdot [aM + bM] &\leq \frac{3}{4}c.\end{aligned}$$

Prema tome

$$t \in I' = \langle z_0 - c, z_0 + c \rangle \Rightarrow \varphi(t) \in \left[z_0 - \frac{3}{4}c, z_0 + \frac{3}{4}c \right] = I''. \quad (9)$$

S druge strane primjenom teorema o srednjoj vrijednosti za $t, s \in I'$ nalazimo:

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi(s) &= t - s - \gamma [F(x, y, t) - F(x, y, s)] = t - s - (t - s)\gamma \cdot D_3F \Rightarrow \\ |\varphi(t) - \varphi(s)| &= |t - s| \cdot |1 - \gamma \cdot D_3F|.\end{aligned}$$

Dobili smo da

$$t, s \in I'' \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(s)| \leq \frac{1}{4} \cdot |t - s| \quad \text{i } \varphi(t), \varphi(s) \in I''$$

pa je φ kontrakcija segmenta I'' . Po prethodnoj lemi postoji jedinstveni broj $t^* \in I''$ takav da je $t^* = \varphi(t^*)$, tj. $t^* = t^* - \gamma F(x, y, t^*)$, i imamo

$$F(x, y, t^*) = 0. \quad (9)$$

To znači da za svaki $(x, y) \in I$ postoji jedinstveni broj $t^* \in I'' \subset I'$ takav da vrijedi (9). Dakle, sa $(x, y) \mapsto t^*$ definirana je funkcija f sa I u \mathbb{R} takva da je

$$F(x, y, f(x, y)) = 0, \quad \text{i } f(x, y) \in I' \text{ za } (x, y) \in I. \quad (10)$$

Ako je $(x, y, z) \in I \times I'$ i $F(x, y, z) = 0$ onda iz (7) za $t = z$ nalazimo $\varphi(z) = z$. Budući da $z \in I' \Rightarrow \varphi(z) \in I''$ to je $z \in I''$, zbog čega je $z = f(x, y)$. Posebno je $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Ostaje nam dokazati neprekidnost funkcije f i formule (3).

Neka su točke $(x, y, z), (X, Y, Z) \in I \times I'$. Primjenom teorema o srednoj vrijednosti imamo

$$F(x, y, z) - F(X, Y, Z) = (x - X)D_1F + (y - Y)D_2F + (z - Z)D_3F \quad (11)$$

Uzmemo li $z = f(x, y)$ i $Z = f(X, Y)$ lijeva strana u (11) iščezava pa imamo

$$(x - X)D_1F + (y - Y)D_2F + (f(x, y) - f(X, Y))D_3F = 0. \quad (12)$$

Odavde slijedi (primjenom ocjena (6))

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(X, Y) &= -\frac{(x - X)D_1F + (y - Y)D_2F}{D_3F} \Rightarrow \\ |f(x, y) - f(X, Y)| &\leq \frac{|x - X| \cdot |D_1F| + |y - Y| \cdot |D_2F|}{|D_3F|} \leq \\ [|x - X| + |y - Y|] \cdot M^2. \end{aligned}$$

Odavde je vidljivo da $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ povlači $f(x, y) \rightarrow f(X, Y)$. Dakle, funkcija f je neprekidna u svakoj točki $(X, Y) \in I$.

Iz (12) za $y = Y$ dobivamo

$$\frac{f(x, y) - f(X, y)}{x - X} = -\frac{D_1F}{D_3F}, \quad x \neq X, \quad (13)$$

gdje parcijalne derivacije treba računati u točki koja se nalazi na spojnici točaka $(x, y, f(x, y)), (X, y, f(X, y))$. Iz (13) i neprekidnosti funkcije f dobivamo:

$$\lim_{x \rightarrow X} \frac{f(x, y) - f(X, y)}{x - X} = -\frac{D_1F(X, y, f(X, y))}{D_3F(X, y, f(X, y))}$$

i time je dokazana prva formula iz (3). Analogno se dokazuje i druga formula u (3).

Iz formula (3) i neprekidnosti funkcije f slijedi da su D_1f i D_2f neprekidne na I . ■

NAPOMENA. (a) Da smo u pretpostavci prethodnog teorema pretpostavili da je funkcija F klase C^p ($p > 1$) na Ω dobili bismo na osnovi formule (3) da je i funkcija f klase C^p na pravokutniku I .

(b) Prethodnim teoremom je dokazano da uvjet $D_3F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ omogućava rješavanje jednadžbe $F(x, y, z) = 0$ po z u točkama bliskim točki (x_0, y_0) .

Analogno $D_1F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ omogućava rješavanje je jednadžbe po x u okolini točke (y_0, z_0) , a $D_2F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ rješavanje jednadžbe po y u okolini točke (x_0, z_0) .

Prethodni teorem je specijalni slučaj ovog teorema:

TEOREM 6.3 Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ i $(x_1^0, \dots, x_n^0, z_0) \in \Omega$. Pretpostavimo da je $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija klase C^p ($p \geq 1$) na Ω i da je

$$F(x_1^0, \dots, x_n^0, z_0) = 0 \quad \text{i} \quad D_{n+1}F(x_1^0, \dots, x_n^0, z_0) \neq 0.$$

Tada postoje otvoreni kvadar $I \subseteq \mathbb{R}^n$ oko točke (x_1^0, \dots, x_n^0) i interval $I' \subseteq \mathbb{R}$ oko broja z_0 takvi da za svaki element $(x_1, \dots, x_n) \in I$ jednadžba

$$F(x_1, \dots, x_n, z) = 0$$

ima jedinstveno rješenje z u intervalu I' . Sa $(x_1, \dots, x_n) \mapsto z$ dana je funkcija f sa I u I' . Funkcija f je klase C^p na I i vrijedi

$$D_i f(x_1, \dots, x_n) = -\frac{D_i F(x_1, \dots, x_n, z)}{D_{n+1} F(x_1, \dots, x_n, z)} \quad (i = 1, \dots, n)$$

gdje je $z = f(x_1, \dots, x_n)$ i $(x_1, \dots, x_n) \in I$.

6.2 SUSTAVI JEDNADŽBI

Teorem 6.3 omogućava da se opravda postupak o rješevanju sistema dviju i više jednadžbi koji je dan na str. 105 (Pravilo (e)). Promotrimo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Treba ga riješiti po u i v tako da se dobiju funkcije $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ takve da je

$$\begin{cases} F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \\ G(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

za sve (x, y) iz nekog otvorenog pravokutnika (dvodimenzionalnog intervala). Da bismo došli do uvjeta koji omogućavaju rješenje sustava (1) promotrimo slučaj da je

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = A_1(x, y)u + B_1(x, y)v + C_1(x, y) \\ G(x, y, u, v) = A_2(x, y)u + B_2(x, y)v + C_2(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

Sada sustav (1) prelazi u

$$\begin{aligned} A_1u + B_1v &= -C_1 \\ A_2u + B_2v &= -C_2 \end{aligned}$$

i on ima jedinstveno rješenje onda i samo onda ako za determinantu sustava vrijedi

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

Iz (3) dobivamo

$$A_1 = \frac{\partial F}{\partial u}, \quad B_1 = \frac{\partial F}{\partial v}, \quad A_2 = \frac{\partial G}{\partial u}, \quad B_2 = \frac{\partial G}{\partial v}$$

pa uvjet (4) prelazi u

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5)$$

Determinantu $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$ nazivamo **Jacobijan funkcija** F i G po varijablama u i v .

Jacobijan n -tog reda odnosi se na n funkcija F_1, \dots, F_n koje zavise od n varijabli u_1, \dots, u_n i ima oblik

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}.$$

Jacobijan igra važnu ulogu pri rješavanju sustava (1), pa i općenitijih sustava.

TEOREM 6.4 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^4$ otvoren skup, $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije klase C^1 na Ω i $T_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$ točka iz Ω . Neka je vrijedi

$$F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \quad G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad (7)$$

u točki T_0 .

Tada postoje otvoreni pravokutnik $I \subseteq \mathbb{R}^2$ oko točke (x_0, y_0) i otvoreni pravokutnik $I' \subseteq \mathbb{R}^2$ oko točke (u_0, v_0) takvi da za svaki element $(x, y) \in I$ sustav (1) ima jedinstveno rješenje (u, v) u I' . Time su definirane funkcije

$$(x, y) \mapsto u = f(x, y), \quad (x, y) \mapsto v = g(x, y)$$

koje su klase C^1 na I .

DOKAZ. Uvjet (7) daje da ne mogu obadvije parcijalne derivacije D_4F i D_4G isčezavati u točki T_0 . Recimo da je $D_4F(T_0) \neq 0$. Iz $F(T_0) = 0$ i $D_4F(T_0) \neq 0$ na osnovi Teorema 6.3 ($n = 3$) slijedi da postoji otvoreni kvadar $I_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ oko točke (x_0, y_0, u_0) i interval $I'_1 \subseteq \mathbb{R}$ oko točke v_0 takvi da je $I_1 \times I'_1 \subseteq \Omega$ i da za svaki element $(x, y, u) \in I_1$ jednadžba $F(x, x, u, v) = 0$ ima jedinstveno rješenje $v = \varphi(x, y, u)$ u I'_1 . Pri tome $\varphi : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 na I_1 . Nadalje je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\frac{D_3F}{D_4F}.$$

Stavimo

$$H(x, y, u) = G(x, y, u, \varphi(x, y, u)), \quad (x, y, u) \in I_1. \quad (8)$$

Funkcija H je klase C^1 na I_1 i vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} = D_3G + D_4G \left(-\frac{D_3F}{D_4F} \right) \Rightarrow \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= -\frac{1}{D_4F} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Odavde dobivamo

$$H(x_0, y_0, u_0) = 0, \quad D_3H(x_0, y_0, u_0) \neq 0 \quad (10)$$

jer je $v_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0)$. Opet, prema Teoremu 6.3, postoje otvoreni kvadar $I \subseteq \mathbb{R}^2$ oko točke (x_0, y_0) i interval $I'_0 \subseteq \mathbb{R}$ oko točke u_0 takvi da je $I \times I'_0 \subseteq I_1$ i da za $(x, y) \in I$ jednadžba $H(x, y, u) = 0$ ima jedinstveno rješenje $u = f(x, y)$ u I'_0 . Pri tome je funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^1 na I .

Stavimo:

$$\begin{cases} g(x, y) = \varphi(x, y, f(x, y)), & (x, y) \in I \\ I' = I'_0 \times I'_1. \end{cases} \quad (11)$$

Ako je $(x, y, u, v) \in I \times I'$ rješenje sustava (1) onda

$$\left. \begin{array}{l} F(x, y, u, v) = 0 \\ (x, y, u) \in I \times I'_0 \subseteq I_1 \end{array} \right\} \Rightarrow v = \varphi(x, y, u).$$

Sada

$$\left. \begin{array}{l} H(x, y, u) = G(x, y, u, v) = 0 \\ (x, y, u) \in I \times I_0 \end{array} \right\} \Rightarrow u = f(x, y).$$

No tada je

$$g(x, y) = \varphi(x, y, f(x, y)) = \varphi(x, y, u) = v,$$

dakle

$$u = f(x, y) \quad \text{i} \quad v = g(x, y).$$

Time je dokazano da za $(x, y) \in I$ sustav (1) ima najviše jedno rješenje $(u, v) \in I'$ i da je to rješenje dano sa $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$. S druge strane

$$\begin{aligned} (x, y) \in I \Rightarrow (x, y, f(x, y), g(x, y)) \in I_1 \times I'_1 \subseteq \Omega \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} G(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \\ F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

6.3 ZADACI ZA VJEŽBU

1. Neke je $F(x, y, z) = x + y + z + \sin xyz = 0$. Odredite točku $T_0 \in \mathbb{R}^3$ za koju je $F(T_0) = 0$ i ispitajte da li su tada ispunjeni uvjeti Teorema 6.1.
2. Neka je F funkcija klase C^1 u okolini točke $T = (x_0, y_0, z_0)$ i neka je $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ i

$$(D_1 F(T_0))^2 + (D_2 F(T_0))^2 + (D_3 F(T_0))^2 > 0.$$

Dokažite da se jednadžba $F(x, y, z) = 0$ može riješiti po $x = A(y, z)$ ili po $y = B(x, z)$ ili po $z = C(x, y)$ u okolini točke T_0 .

3. Formulirajte i dokažite Teorem 6.3 za slučaj $n = 1$. Uz koje uvjete funkcija f ima drugu derivaciju?

Dokažite da je

$$D_1^2F + 2D_1D_2F \cdot f' + D_2^2F \cdot (f')^2 + D_2F \cdot f'' = 0$$

i odatle izračunajte f'' .

4. Formulirajte i dokažite Teorem 6.3 za slučaj $n = 3$.

5. Polazeći od formula (3) dokažite da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-D_1^2F \cdot (D_3F)^2 + 2D_1D_3F \cdot D_1F \cdot D_3F - D_3^2F \cdot (D_1F)^2}{(D_3F)^3},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{-D_1D_2F \cdot (D_3F)^2 + D_1D_3F \cdot D_2F \cdot D_3F}{(D_3F)^3} + \\ &\quad + \frac{D_2D_3F \cdot D_1F \cdot F_3F - D_3^2F \cdot D_1F \cdot D_2F}{(D_3F)^3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-D_2^2D \cdot (D_3F)^2 + 2D_2D_3F \cdot D_2F \cdot D_3F - D_3^2F \cdot (D_2F)^2}{(D_3F)^3}$$

Uputa: uzmite diferencijal od $D_1F + D_1f \cdot D_3F = 0$ itd.

6. Postoje li funkcije f i g klase C^1 u okolini točke $(0, 1)$ takve da je $f(0, 1) = -1$, $g(0, 1) = -1$ i za koje je

$$[f(x, y)]^3 + xg(x, y) - y = 0,$$

$$[g(x, y)]^3 + yf(x, y) - x = 0.$$

7. Dan sustav

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$$

kojemu je $T_0 = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ jedno rješenje. Neka je $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \neq 0$ u točki T_0 . Dokažite da postoje otvoreni kvadri $I \subseteq \mathbb{R}^3$ oko točke (x_0, y_0, z_0) i $I' \subseteq \mathbb{R}^2$ oko točke (u_0, v_0) takvi da za svaki element $(x, y, z) \in I$ navedeni sustav ima jedinstveno rješenje $(u, v) \in I'$. Time su definirane funkcije $f, g : I' \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je $(f(x, y, z), g(x, y, z)) \in I'$ za svaki $(x, y, z) \in I$.

8. Formulirajte i dokažite analogon Teorema 6.4 za slučaj od tri jednadžbe $F_i(x, y, z, u, v, w) = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

9. Prepostavimo da točka $T_0 = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)$ zadovoljava jednadžbe

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= 1, \\ \frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{y^2} + \frac{w^2}{z^2} &= 1. \end{aligned}$$

Koji su dovoljni uvjeti da se te jednadžbe mogu riješiti po vrijednostima u i v u točkama bliskim točki T_0 ?

10. Formulirajte uvjete uz koje je sustav

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

rješiv po x (odnosno y , odnosno z) i dajte geometrijsku interpretaciju.

11. Odredite Jacobijan za sustave:

$$(a) \begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases};$$

$$(b) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{u}{v} \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}.$$

12. Odredite Jacobijan za sustave:

$$(a) \begin{cases} x = u \\ y = \frac{u+v}{u+v+w} \\ z = \frac{u+v+w}{u+v} \end{cases};$$

$$(b) \begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \vartheta \\ y = r \sin \varphi \cos \vartheta \\ z = r \sin \vartheta \end{cases}.$$

13. Neka je

$$\begin{cases} x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, & y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, & z = \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \\ \xi = \frac{u}{u^2 + v^2 + t^2}, & \eta = \frac{v}{u^2 + v^2 + t^2}, & \zeta = \frac{t}{u^2 + v^2 + t^2} \end{cases}.$$

Provjerite da li je

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(u, v, t)} = 1.$$

14. Dokažite da sustav $\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$ određuje diferencijabilne funkcije $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ takve da je $u(1, 2) = 0$ i $v(1, 2) = 0$.

Poglavlje 7

TAYLOROVA FORMULA

7.1 TAYLOROVA FORMULA

Za funkciju $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^{p+1} na otorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i $x_0 \in I$ pokazano je da vrijedi Taylorova formula

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \sum_{j=1}^p \frac{\varphi^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \varphi^{(p+1)}(\xi) \cdot \frac{(x - x_0)^{p+1}}{(p+1)!}$$

gdje je ξ neki broj između x_0 i x .

Ovdje se dokazuje da analogna formula vrijedi za funkciju f klase C^{p+1} na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Radi jednostavnijeg zapisa razmatranja provodimo za $n = 2$.

Za funkciju $f \in C^2(\Omega)$ i točku $T_0(x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ polinom

$$(t, s) \mapsto \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial x^2} \cdot t^2 + 2 \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial x \partial y} \cdot ts + \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial y^2} \cdot s^2 \quad (1)$$

nazivamo drugim diferencijalom funkcije f u točki T_0 i označavamo sa $d^2 f(T_0)$.

Prethodni polinom često se zapisuje u obliku

$$\left(t \frac{\partial}{\partial x} + s \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(T_0).$$

(Izvršimo naznačeno kvadriranje i nakon toga $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2, \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}, \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2$ zamjenimo redom sa $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.) Analogno tumačenje ima i p -ta potencija

$$\left(t \frac{\partial}{\partial x} + s \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(T_0).$$

DEFINICIJA 7.1 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup i $T_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Za funkciju $f \in C^p(\Omega)$ polinom

$$(t, s) \mapsto \left(t \frac{\partial}{\partial x} + s \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(T_0) = \sum_{i+j=p} \binom{p}{i} \frac{\partial^p f(P_0)}{(\partial x)^i (\partial y)^j} \cdot t^i s^j \quad (2)$$

nazivamo p -ti **diferencijal funkcije** f u točki T_0 i označavamo $d^{(p)} f(T_0)$.

Analogno, za $f \in C^p(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $T_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$, polinom

$$\begin{aligned} (t_1, \dots, t_n) &\mapsto \left(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + t_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^p f(T_0) = \\ &\sum_{i_1+\dots+i_n=p} \frac{p!}{i_1! \cdots i_n!} \frac{\partial^p f(T_0)}{(\partial x_1)^{i_1} \cdots (\partial x_n)^{i_n}} \cdot t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \end{aligned} \quad (3)$$

nazivamo p -ti **diferencijal funkcije** f u točki T_0 i označavamo sa $d^p f(T_0)$.

TEOREM 7.2 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija klase C^{p+1} na Ω . Ako su (x_0, y_0) i $(x_0 + h, y_0 + k)$ dvije točke iz Ω i ako njihova spojnica leži u Ω , onda vrijedi **Taylorova formula**:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{d^1 f(x_0, y_0)}{1!}(h, k) + \cdots + \frac{d^{(p)} f(x_0, y_0)}{p!}(h, k) + R_p \quad (4)$$

gdje je

$$R_p(x_0, y_0; h, k) = \frac{d^{(p+1)} f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)}{(p+1)!}(h, k), \quad 0 < \vartheta < 1 \quad (5)$$

ostatak Taylorove formule u Lagrangeovom obliku.

DOKAZ. Budući je Ω otvoren skup, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $(x_0 + th, y_0 + tk) \in \Omega$ za svaki $t \in \langle -\varepsilon, 1 + \varepsilon \rangle = I$. Promotrimo funkciju

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk), \quad t \in I. \quad (6)$$

Po Teoremu 4.7 (generalizirana verzija) funkcija F je klase C^{p+1} na I . Taylorova formula za funkcije jedne varijable daje

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \cdots + \frac{F^{(p)}(0)}{p!}t^p + \frac{F^{(p+1)}(\vartheta t)}{(p+1)!}t^{p+1} \quad (7)$$

za neki $\vartheta \in (0, 1)$. Iz (6) dobivamo

$$F'(t) = D_1 f \cdot h + D_2 f \cdot k =$$

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial x} \right)^1 f(x_0 + th, y_0 + tk) &= d^1 f(x_0 + th, y_0 + tk) \\ F''(t) = \frac{d}{dt} (D_1 f \cdot h + D_2 f \cdot k) &= \frac{d}{dt} (D_1 f \cdot h) + \frac{d}{dt} (D_2 f \cdot k) = \\ D_1^2 f \cdot h^2 + 2D_1 D_2 f \cdot hk + D_2^2 f \cdot k^2 &= \\ \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f(x_0 + th, y_0 + tk) &= d^2 f(x_0 + th, y_0 + tk). \end{aligned}$$

Induktivno dolazimo da je

$$F^{(j)}(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial x} \right)^j f(x_0 + th, y_0 + tk) = d^{(j)} f(x_0 + th, y_0 + tk). \quad (8)$$

Odavde je

$$\begin{aligned} F^{(j)}(0) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial x} \right)^j f(x_0, y_0), \\ F^{(p+1)}(\vartheta) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial x} \right)^{p+1} f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k). \end{aligned}$$

Iz (7) i (8) za $t = 1$ dobivamo formule (4) i (5). ■

Teorem 7.2 upućuje na to da u okolini točke $T_0 = (x_0, y_0)$ funkciju f možemo aproksimirati **Taylorovim polinomom indeksa p**

$$f(x_0, y_0) + \frac{d^1 f(x_0, y_0)}{1!} (x - x_0, y - y_0) + \cdots + \frac{d^{(p)} f(x_0, y_0)}{p!} (x - x_0, y - y_0). \quad (9)$$

Odredimo pogrešku te aproksimacije. Prvo primijetimo da su funkcije

$$\varphi_i(t) = \frac{\partial^{p+1} f(T_0)}{\partial x^i \partial y^j} f(x_0 + th, y_0 + tk), \quad t \in [0, 1] \quad (10)$$

neprekidne na segmentu $[0, 1]$ za svako $i = 0, 1, \dots, p, p+1$. One su dakle i omeđene i neka je $M_1 > 0$ takav broj da je

$$|\varphi_i(t)| \leq M_1, \quad t \in [0, 1], \quad i = 0, 1, \dots, p+1.$$

Sada za $t \in [0, 1]$ dobivamo:

$$\begin{aligned} |(h\partial_1 + k\partial_2)^{p+1} f(x_0 + th, y_0 + tk)| &= \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} \varphi_i(t) h^i k^{p+1-i} \leq \\ M_1 \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p+1}{i} |h|^i |k|^{p+1-i} &= M_1 (|h| + |k|)^{p+1} \leq M_1 (\sqrt{2} \sqrt{h^2 + k^2})^{p+1}. \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$|R_p(x_0, y_0; h, k)| = \left| \frac{d^{(p+1)} f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)}{(p+1)!} (h, k) \right| \leq$$

$$\frac{M_1}{(p+1)!} (\sqrt{2})^{p+1} (h^2 + k^2)^{\frac{p+1}{2}} = M (h^2 + k^2)^{\frac{p+1}{2}} \quad (11)$$

gdje je

$$M = \frac{M_1}{(p+1)!} (\sqrt{2})^{p+1}. \quad (12)$$

Time je dokazan sljedeći korolar.

KOROLAR 7.3 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $f \in C^{p+1}(\Omega)$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ i K konveksan skup u Ω koji sadrži točku (x_0, y_0) . Ako postoji $M_1 > 0$ takav da je

$$\left| \frac{\partial^{p+1}}{\partial x^i \partial y^{p+1-i}} f(x, y) \right| \leq M_1 \quad (13)$$

za $i = 1, \dots, p+1$ i za svaku točku $(x, y) \in K$, onda za $(x, y) \in K$ vrijedi procjena

$$|R_p(x_0, y_0; x - x_0, y - y_0)| \leq M [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{p+1}{2}} \quad (14)$$

$$\text{gdje je } M = \frac{M_1}{(p+1)!} (\sqrt{2})^{p+1}.$$

Prema tomu ocjena (13) parcijalnih derivacija $(p+1)$ -og reda funkcije f omogućava ocjenu pogreške prilikom zamjene funkcije f polinomom (9) na konveksnom skupu K koji sadrži točku (x_0, y_0) . Po Teoremu 3.4 iz $f \in C^{p+1}(\Omega)$ slijedi egzistencija brojeva $\varepsilon > 0$ i $M_1 > 0$ takvih da vrijedi (13) za svaku točku (x, y) iz kugle radijusa ε sa središtem u točki (x_0, y_0) . Uvezši to u obzir i prethodni korolar dobivamo

KOROLAR 7.4 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $f \in C^{p+1}(\Omega)$ i $(x_0, y_0) \in \Omega$. Tada je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{R_p(x_0, x_0; x - x_0, y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{p+1}{2}}} = 0. \quad (15)$$

Analogne tvrdnje vrijede i za funkcije od tri i općenito od n -varijabla.

Na koncu navedimo i ovu posljedicu Teorema 7.2.

KOROLAR 7.5 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $f \in C^\infty(\Omega)$, $T_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ i $\varepsilon > 0$ takav da je $B(T_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Ako postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ i realan broj $M > 0$ takvi da je

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^{m-i}} f(x, y) \right| \leq M, \quad (x, y) \in B(T_0, \varepsilon) \quad (16)$$

za sve $m > m_0$ i sve $i = 0, 1, \dots, m$ tada za $(x, y) \in B(T_0, \varepsilon)$ vrijedi

$$\lim R_p(x_0, y_0; x - x_0, y - y_0) = 0, \quad (17)$$

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(x_0, y_0). \quad (18)$$

(to je razvoj funkcije f u **Taylorov red** u okolišu točke T_0).

7.2 LOKALNI EKSTREMI FUNKCIJE

Neka je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Kažemo da funkcija f ima **lokalni minimum** $f(T_0)$ u točki $T_0 \in \Omega$ ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaku točku T vrijedi

$$d(T, T_0) \leq \varepsilon \Rightarrow f(T_0) \leq f(T). \quad (1)$$

Ako za $T \neq T_0$ vrijedi stroga nejednakost $f(T_0) < f(T)$ onda kažemo da f u A ima **strogī minimum**. Analogno se definira lokalni (strogī) maksimum. Ako u (1) za $T \neq T_0$ stoji stroga nejednakost kažemo da f u T_0 ima **strogī lokalni minimum**.

Analogno se definira **lokalni maksimum** i **strogī lokalni maksimum**. **Lokalni ekstrem** funkcije je bilo lokalni minimum bilo lokalni maksimum.

Neka je $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, i neka funkcija f u $T_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ima lokalni ekstrem. To znači da funkcije jedne varijable $x \mapsto f(x, y_0)$ i $y \mapsto f(x_0, y)$ imaju lokalni ekstrem za x_0 i y_0 (redom). Slijedi, ako funkcija $f \in C^1(\Omega)$ u točki $T_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ima lokalni ekstrem onda je

$$D_1 f(x_0, y_0) = 0, \quad D_2 f(x_0, y_0) = 0. \quad (2)$$

U slučaju funkcije f od n -varijabli, ako funkcija f u $T_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ ima lokalni ekstrem onda vrijedi

$$D_i f(T_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2')$$

Formulama (2), odnosno (2') dan je **nužan uvjet lokalnog ekstrema**.

Točke T_0 za koje vrijedi (2) odnosno (2') nazivaju se **stacionarne točke** funkcije f . Stacionarne točke su one točke T_0 za koje je $df(T_0) = 0$. Funkcija u stacionarnoj točki ne mora imati lokalni ekstrem,

PRIMJER. Za funkciju $f(x, x) = x^2 + y^2$ je

$$D_1f(x, y) = 2x, \quad D_2f(x, y) = 2y$$

pa je $T_0 = (0, 0)$ stacionarna točka. Budući je $f(x, y) \geq 0$ za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ funkcija f u točki T_0 poprima lokalni minimum i taj je $f(0, 0) = 0$. \square

PRIMJER. Funkcija $f(x, y) = 1 - x^2$ ima parcijalne derivacije

$$D_1f(x, y) = -2x, \quad D_2f(x, y) = 0$$

pa su sve točke $T = (0, y)$, $y \in \mathbb{R}$ (y -os) stacionarne. U tim točkama je $f(0, y) = 1$ i funkcija f u svakoj točki $(0, y)$ ima lokalni maksimum. \square

PRIMJER. Funkcija $f(x, y) = xy$ ima

$$D_1f(x, y) = y, \quad D_2f(x, y) = x$$

pa je $T_0 = (0, 0)$ jedina stacionarna točka. No $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) > 0$ za (x, y) iz prvog i trećeg kvadranta, odnosno $f(x, y) < 0$ za (x, y) iz drugog i četvrtog kvadranta pokazuje da f u $(0, 0)$ nema lokalni ekstrem. \square

Svaka točka T_0 za koju vrijedi (2) odnosno (2)', a koja je takva da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji točke $T_1, T_2 \in B(T_0, \varepsilon)$ sa svojstvom da je $f(T_1) < f(T_0)$ i $f(T_2) > f(T_0)$ naziva se **sedlasta točka** funkcije f (te točke su analogne točkama infleksije funkcija jedne varijable).

Neka je sada $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup i $f \in C^3(\Omega)$. Ako f ima lokalni ekstrem u točki T_0 iz Taylorove formule

$$f(x_0+s, y_0+t) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{d^1 f(T_0)}{1!}(s, t)}_{=0} + \frac{d^2 f(T_0)}{2!}(s, t) + \frac{d^3 f(x_0 + \vartheta s, y_0 + \vartheta t)}{3!},$$

gdje je $0 < \theta < 1$, dobivamo da je

$$\begin{aligned} f(x_0 + s, y_0 + t) - f(x_0, y_0) &\approx \frac{d^2 f(P_0)}{2!}(s, t) = \\ &= \frac{1}{2} [s^2 \cdot D_1^2 f(T_0) + 2st \cdot D_1 D_2 f(T_0) + t^2 \cdot D_2^2 f(T_0)]. \end{aligned}$$

To znači da se funkcija

$$T \mapsto f(T) - f(T_0)$$

u okolini točke T_0 ponaša kao drugi diferencijal $d^2(T_0)$, tj. kao polinom

$$q(s, t) = a_{11}s^2 + 2a_{12}st + a_{22}t^2 \quad (3)$$

oko ishodišta. Ovdje je

$$a_{11} = D_1^2 f(x_0, y_0), \quad a_{12} = D_1 D_2 f(x_0, y_0), \quad a_{22} = D_2^2 f(x_0, y_0). \quad (4)$$

Da smo radili s funkcijom od n -varijabla došli bismo do polinoma

$$q(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i,j}^n a_{ij} t_i t_j \quad (3')$$

gdje je

$$a_{ij} = a_{ji} = D_i D_j f(x_1^0, \dots, x_n^0), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4')$$

i do zaključka da se funkcija

$$T \mapsto f(T) - f(T_0)$$

u okolini stacionarne točke T_0 ponaša kao polinom $(3')$ u okolini nule $t_i \approx 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Polinomi (3) i $(3')$ su drugog stupnja i homogeni, tj. vrijedi

$$q(\lambda s, \lambda t) = \lambda^2 q(s, t), \quad \lambda, s, t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Takve nazivamo **kvadratnim formama**.

DEFINICIJA 7.6 *Kvadratna forma*

$$q(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i,j}^n a_{ij} t_i t_j$$

je **pozitivno semidefinitna** ako je

$$q(t_1, \dots, t_n) \geq 0, \quad t_i \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Pozitivno semidefinitna forma je **pozitivno definitna** ako je $q(t_1, \dots, t_n) > 0$, $t_i \in \mathbb{R}$, i vrijedi

$$t_1^2 + \dots + t_n^2 \neq 0 \Rightarrow q(t_1, \dots, t_n) > 0. \quad (7)$$

Nadalje, $q(t_1, \dots, t_n)$ je **negativno semidefinitna (negativno definitna)** forma ako je $-q(t_1, \dots, t_n)$ pozitivno semidefinitna (pozitivno definitna) forma.

Forma (3)' je **definitna** ako je pozitivno ili negativno definitna, **semidefinitna** ako je pozitivno ili negativno semidefinitna, a u ostalim slučajevima kažemo da je forma **indefinitna**.

LEMA 7.7 Kvadratna forma $q(s, t) = a_{11}s^2 + 2a_{12}st + a_{22}t^2$ je pozitivno definitna ako i samo ako je

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (8)$$

Ako je $q(s, t) = a_{11}s^2 + 2a_{12}st + a_{22}t^2$ pozitivno definitna forma, onda postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$q(s, t) \geq \varepsilon(s^2 + t^2), \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

DOKAZ. Budući je

$$q(s, t) = a_{11}s^2 + 2a_{12}st + a_{22}t^2 = a_{11}\left(s + \frac{a_{12}}{a_{11}}t\right)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}t^2 \quad (10)$$

pozitivna definitnost forme q je dokazana. S druge strane, ako je q pozitivno definitna forma, onda je

$$q(1, 0) = a_{11} > 0,$$

$$q\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}, 1\right) = a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} > 0,$$

i (8) vrijedi. Nadalje je $q(0, 1) = a_{22} > 0$ i iz (10) dobivamo

$$q(s, t) \geq \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}t^2$$

i na sličan način

$$q(s, t) \geq \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}}s^2.$$

Zbrajanjem dobivamo

$$q(s, t) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{a_{22}} \right) (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) (t^2 + s^2)$$

i (9) vrijedi ako za ε uzmememo $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{a_{22}} \right) (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$. \blacksquare

TEOREM 7.8 Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f \in C^3(\Omega)$, $T_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ stacionarna točka funkcije f i

$$q(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i,j}^n a_{ij}t_i t_j$$

gdje je

$$a_{ij} = a_{ji} = D_i D_j f(x_1^0, \dots, x_n^0), \quad i, j = 1, \dots, n$$

kvadratna forma, tj. drugi diferencijal funkcije f . Tada vrijedi:

- 1° Ako je $d^2f(T_0)$ pozitivno definitna forma, tj. $d^2f(T_0) > 0$, onda f ima u T_0 strogi lokalni minimum;
- 2° Ako je $d^2f(T_0)$ negativno definitna forma, tj. $d^2f(T_0) < 0$, onda f ima u T_0 strogi lokalni maksimum;
- 3° Ako je $d^2f(T_0)$ indefinitna forma, onda f u T_0 nema lokalnog ekstrema.

DOKAZ. Dokaz provodimo za slučaj $n = 2$. Budući je

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{d^2f(T_0)}{2!}(x - x_0, y - y_0) + R_2(x_0, y_0; x - x_0, y - y_0), \text{ tj.}$$

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}q(x - x_0, y - y_0) + R_2(x_0, y_0; x - x_0, y - y_0), \quad (10)$$

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \frac{R_2(x_0, y_0; x - x_0, y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (11)$$

Odaberemo li $\varepsilon > 0$ za koji vrijedi (8) postoji $\delta > 0$ takav da

$$d(T, T_0) < \delta \Rightarrow |R_2(x_0, y_0; x - x_0, y - y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \cdot [d(T, T_0)]^2.$$

No sada (8) i (10) za $T \neq T_0$ i $d(T, T_0) < \delta$ povlače

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &\geq \frac{1}{2}q(x - x_0, y - y_0) + |R_2(x_0, y_0; x - x_0, y - y_0)| \\ &\geq \frac{1}{2}\varepsilon [d(T, T_0)]^2 - \frac{\varepsilon}{4} \cdot [d(T, T_0)]^2 > 0. \end{aligned}$$

Budući da $0 < d(T, T_0) < \delta \Rightarrow f(T_0) < f(T)$ to funkcija f u točki T_0 ima lokalni minimum. Time je 1° dokazano.

Promatranjem funkcije $-f$ umjesto f dobivamo 2° .

U slučaju 3° forma q u ololini nule poptima kako strogo pozitivne, tako i strogo negativne vrijednosti zaključujemo da i funkcija f u svakoj okolini tolke T_0 poprima kako strogo pozitivne, tako i strogo negativne vrijednosti.

■

Analogno se provodi dokaz teorema za slučaj $n > 2$.

Iz prethodnog teorema slijedi da u slučaju $n = 2$ treba promatrati broj

$$\begin{vmatrix} D_1^2 f(x_0, y_0) & D_1 D_2 f(x_0, y_0) \\ D_1 D_2 f(x_0, y_0) & D_2^2 f(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

i ako je on strogo pozitivan, onda f u stacionarnoj točki $T_0 = (x_0, y_0)$ ima lokalni ekstrem i to

- u slučaju $D_1^2 f(x_0, y_0) > 0$ poprima lokalni minimum;
- u slučaju $D_1^2 f(x_0, y_0) < 0$ poprima lokalni maksimum.

PRIMJER. Funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 - y^2,$$

ima za stacionarnu točku $(0, 0)$, jer se parcijalne derivacije $D_1(x, y) = 2x$ i $D_2(x, y) = -2y$ u $(0, 0)$ poništavaju. Međutim, budući da je $D_1^2 f(x, y) = 2$, $D_1 D_2 f(x, y) = 0$ i $D_2^2 f(x, y) = -2$, to je, za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{vmatrix} D_1^2 f(x, y) & D_1 D_2 f(x, y) \\ D_1 D_2 f(x, y) & D_2^2 f(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

pa funkcija f nema lokalnog ekstrema u točki $(0, 0)$. □

PRIMJER Funkciji

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x,$$

su parcijalne derivacije $D_1f(x, y) = -2x + 2$ i $D_2f(x, y) = -2y$. Slijedi da joj je $(1, 0)$ stacionarna točka. Njezine druge parcijalne derivacije jesu $D_1^2f(x, y) = -2$, $D_1D_2f(x, y) = 0$ i $D_2^2f(x, y) = -2$. Dakle, za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{vmatrix} D_1^2f(x, y) & D_1D_2f(x, y) \\ D_1D_2f(x, y) & D_2^2f(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

pa funkcija f ima u točki $(1, 0)$ lokalni maksimum ($D_1^2f(x, y) = -2 < 0$), $f(1, 0) = 1$. \square

PRIMJER. Funkciji

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2,$$

su parcijalne derivacije $D_1f(x, y) = 2x + 2y = D_2f(x, y)$. Slijedi da je, za svaki $x \in \mathbb{R}$, točka $(x, -x)$ stacionarna za f . Njezine druge parcijalne derivacije jesu $D_1^2f(x, y) = 2 = D_1D_2f(x, y) = D_2^2f(x, y)$, pa je, za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{vmatrix} D_1^2f(x, y) & D_1D_2f(x, y) \\ D_1D_2f(x, y) & D_2^2f(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ne možemo zaključiti ima li funkcija f u točkama $(x, -x)$ lokalne ekstreme. No, budući da je $f(x, y) = (x + y)^2 \geq 0$ za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, to ni jedna točka $(x, -x)$ nema okolinu (ε -kuglu) na kojoj bi f bila pozitivna - svuda osim u $(x, -x)$. Prema tomu, funkcija f nema lokalnog ekstrema ni u jednoj od točaka $(x, -x)$. \square

PRIMJER. Odrediti ekstreme funkcije $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Vrijedi:

$$D_1f(x, y) = 4x^3 - 4y = 4(x^3 - y) = 0 \Rightarrow x^3 = y,$$

$$D_2f(x, y) = 4y^3 - 4x = 4(y^3 - x) = 0 \Rightarrow y^3 = x.$$

Slijedi

$$x^9 - x = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0,$$

i $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$ su nultočke. Stacionarne točke su $T_1 = (0, 0)$, $T_2 = (1, 1)$, $T_3 = (-1, -1)$. Budući da je

$$D_1^2 f(x, y) = 12x^2, \quad D_1 D_2 f(x, y) = -4, \quad D_2^2 f(x, y) = 12y^2,$$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} D_1^2 f(x, y) & D_1 D_2 f(x, y) \\ D_1 D_2 f(x, y) & D_2^2 f(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16$$

imamo:

- $D(0, 0) = (144x^2y^2 - 16)|_{(x,y)=(0,0)} = -16$ i funkcija f u T_1 nema ekstrem;
- $D(1, 1) = (144x^2y^2 - 16)|_{(x,y)=(1,1)} = 128, f_{xx}(1, 1) = 12$ i funkcija f u T_2 ima lokalni minimum $z_{\min} = -1$;
- $D(-1, -1) = (144x^2y^2 - 16)|_{(x,y)=(-1,-1)} = 128, f_{xx}(-1, -1) = 12$ i funkcija f u T_3 ima lokalni minimum $z_{\min} = -1$. \square

PRIMJER. U skupu svih kvadratastih kutija (kvadri bez gornje stranice) jednakog oplošja $O (12m^2)$ odredite onaj s najvećom volumenom.

Zadano je (uz oznake x -širina.; y -dužina.; z -visina.)

$$xy + 2xz + 2yz = 12$$

i treba naći maksimum funkcije

$$V(x, y, z) = xyz.$$

Iz polaznog uvjeta je $z = \frac{12 - xy}{2(x + y)}$, pa problem možemo riješiti tražeći maksimum funkcije

$$V(x, y) = xy \frac{12 - xy}{2(x + y)}.$$

Vrijedi

$$D_1 V(x, y) = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2}, \quad D_2 V(x, y) = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2},$$

i za naći stacionarne točke dovoljno je riješiti sustav

$$12 - 2xy - x^2 = 0,$$

$$12 - 2xy - y^2 = 0.$$

Mora biti $x^2 = y^2$, a to daje $x = y$ (ostale mogućnosti otpadaju). Slijedi da je $12 - 3x^2 = 0$, i $x = 2$. Dakle, $(2, 2)$ je stacionarna točka. Dovoljne uvjete nije potrebno ispitivati zbog prirode zadatka. Dobili smo ($z = 1$) da je $V_{\max} = 4$ za kutiju dimenzija $(2, 2, 1)$. \square

7.3 VEZANI EKSTREMI

U praktičnim problemima postavlja se pitanje da se nađu ekstremi ne funkcije $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ na otvorenom skupu Ω nego njezine restrikcije $f|_S$ na podskup S od Ω . Najčešće se poskup S od Ω dobiva kao skup zajedničkih nula u Ω realnih funkcija g_1, \dots, g_m (veze ograničenja):

$$S = \{T \in \Omega \mid g_1(T) = \dots = g_m(T) = 0\} \quad (1)$$

Ekstrem funkcije $f|_S$ nazivamo **vezanim ekstremom** funkcije f u odnosu na skup (1).

TEOREM 7.9 *Neka su f, g_1, \dots, g_m realne funkcije klase C^1 na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Neka je $T_0 \in \Omega$ takva točka da je*

$$g_1(T_0) = \dots = g_m(T_0) = 0$$

i da su polinomi

$$dg_1(T_0), \dots, dg_m(T_0)$$

linearno nezavisni. Neka je

$$S = \{T \in \Omega \mid g_1(T) = \dots = g_m(T) = 0\}.$$

Nužan uvjet da funkcija f ima vezani ekstrem u točki T_0 , tj. da $f|_S$ ima lokalni ekstrem u točki T_0 , jest da postoje realni brojevi $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ takvi da je

$$df(T_0) = \lambda_1 dg_1(T_0) + \dots + \lambda_m dg_m(T_0).$$

Brojevi λ_i nazivaju se **Lagrangeovi multiplikatori**.

Postupak za pronalaženje vezanog ekstrema funkcije f uz uvjete $g_1 = 0, \dots, g_m = 0$ je sljedeći.

Promatra se funkcija

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$$

i za nju se traže uvjeti ekstrema. Napiše se $n+m$ jednadžbi za nepoznanice $\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_0^1, \dots, x_0^n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 f + \lambda_1 D_1 g_1 + \dots + \lambda_m D_1 g_m = 0 \\ \dots \\ D_n f + \lambda_1 D_n g_1 + \dots + \lambda_m D_n g_m = 0 \\ g_1(x_0^1, \dots, x_0^n) = 0 \\ \dots \\ g_m(x_0^1, \dots, x_0^n) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Ako je $(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ rješenje sustava (2), onda funkcija f ima eventualno vezani ekstrem $f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ u točki (x_1^0, \dots, x_n^0) .

Pronalaženje dovoljnih uvjeta bazira se na Taylorovoj formuli i nešto je komplikiraniji i nećemo ga promatrati.

Prethodni primjer:

- U skupu svih kvadratastih kutija (kvadri bez gornje stranice) jednakog oplošja $O(12m^2)$ odredite onaj s najvećom volumenom.

možemo interpretirati na način:

- Odrediti ekstrem funkcije $V(x, y, z) = xyz$ uz uvjet da je $g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0$.

Formirajmo pripadnu Lagrangeovu funkciju:

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 12)$$

i odredimo njezine stacionarne točke. Riješimo sustav

$$D_1 F(x, y, z, \lambda) = yz + y\lambda + 2z\lambda = 0,$$

$$D_2 F(x, y, z, \lambda) = xz + x\lambda + 2z\lambda = 0,$$

$$D_3 F(x, y, z, \lambda) = xy + 2x\lambda + 2y\lambda = 0,$$

$$D_4 F(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0.$$

Rješenja su $[x = 2, y = 2, z = 1, \lambda = -\frac{1}{2}]$ i $[x = -2, y = -2, z = -1, \lambda = \frac{1}{2}]$. Zaključujemo da je traženi vezani maksimum $z = 1$ i on se postiže za $x = 2, y = 2$. \square

PRIMJER. Odrediti ekstrem funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

uz uvjet $x^2 + y^2 = 1$.

Pripadna Lagrangeova funkcija je

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

pa imamo sustav

$$D_1 F(x, y, \lambda) = 2x + 2x\lambda = 0,$$

$$D_2 F(x, y, \lambda) = 4y + 2y\lambda = 0,$$

$$D_3 F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

čija su rješenja

$$[x = 1, y = 0, \lambda = -1], [x = -1, y = 0, \lambda = -1],$$

$$[x = 0, y = 1, \lambda = -2], [x = 0, y = -1, \lambda = -2].$$

Imamo $f(1, 0) = 1, f(-1, 0) = 1$ - to su minimumi, $f(0, 1) = 2, f(0, -1) = 2$ - to su maksimumi. \square

7.4 ZADACI ZA VJEŽBU

1. Odredite naznačene diferencijale za dane funkcije:

- (a) $d^2 f, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2;$
- (b) $d^3 f, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2;$
- (c) $d^4 f, f(x, y) = \sin x \cos y.$

2. Polinom $f(x, y) = xy^3 - y^3 - y^2 + y + 2$ prikažite kao polinom u varijablama $x - 1$ i $y - 2$.
3. Odredite Taylorov red za $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 1$ u okolini točke $(1, 1)$.
4. Napišite prva tri člana Taylorovog reda funkcije $f(x, y) = e^{-x^2+2xy}$ u okolini točke $(0, 0)$.
5. Odredite Taylorovu formulu za funkciju $f(x, y) = \ln(e^x + y)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $p = 3$.
6. Odredite prva tri člana Taylorovog reda funkcije $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ u okolini točke $(0, 0)$.
7. Razvijte u Taylorov red funkcije
 - (a) $f(x, y) = e^{x+y}$ oko točke $P_0 = (-1, 1)$;
 - (b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$ oko ishodišta;
 - (c) $f(x, y) = \ln \frac{1-x-y+xy}{1-x-y}$.
8. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je **homogena** stupnja homogenosti a ako vrijedi

$$f(tx, ty) = t^a j(x, y), \quad t, x, y \in \mathbb{R}.$$

Ukoliko prethodno vrijedi samo za $t > 0$, onda je funkcija f **pozitivno homogena** stupnja a .

Odredite stupanj homogenosti funkcija

$$x^2 + y^2, \quad x^2y \ln \frac{x}{y}, \quad \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2}.$$

9. Ako je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pozitivno homogena stupnja homogenosti a onda je

$$xD_1 f + yD_2 f = af$$

tamo gdje f ima neprekidne parcijalne derivacije (*Eulerov teorem*).

Uz adekvatne pretpostavke je

$$(xD_1 f + yD_2 f)^m = a(a-1)(a-2)\cdots(a-m+1)f.$$

10. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pozitivno homogena stupnja homogenosti a i $u = r^n f(x, y)$, gdje je $r^2 = x^2 + y^2$. Dokažite da je

$$\Delta u = r^m \Delta f + m(m+2a)r^{m-2}f.$$

11. Odredite stacionarne točke funkcija:

- (a) $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$;
- (b) $f(x, y, z) = 3 \ln x + 2 \ln y + 5 \ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

12. Odredite lokalne ekstreme funkcija:

- (a) $f(x, y) = x^3 + 8y^2 - 6xy + 5;$
 (b) $f(x, y) = \frac{3x + 2y + a}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, a \in \mathbb{R}$ konstanta;
 (c) $f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3;$
 (d) $f(x, y) = (x^2 + y)\sqrt{e^y};$
 (e) $f(x, y) = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y);$
 (f) $f(x, y) = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$
 (g) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y;$
 (h) $f(x, y) = e^x \cos y;$
 (i) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y;$
 (j) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1;$
 (k) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

13. Odredite vezene ekstreme funkcije:

- (a) $f(x, y) = ax + by$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 1;$
 (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 1;$
 (c) $f(x, y) = xy$ uz uvjet $9x^2 + y^2 = 4;$
 (d) $f(x, y) = xy$ uz uvjet $x + y = 1;$
 (e) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ uz uvjet $x^2 + y^2 + z^2 = 1;$
 (f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ uz uvjet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1;$
 (g) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ uz uvjet $x^4 + y^4 + z^4 = 1;$
 (h) $f(x, y, z) = x + 2y$ uz uvjete $x + y + z = 1, y^2 + z^2 = 1;$

14. Odredite maksimum i minimum funkcije:

- (a) $f(x, y) = 3x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na području omeđenom krivuljama $y = x^2, y = 4;$
 (b) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 9xy + 2z$, ako je $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4.$

15. U trokutu ABC , $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ odredite točku za koju je zbroj udaljenosti od njegovih vrhova najveći.

16. U polusferu polumjera R upišite kvadar najvećeg obujma.

17. Na elipsoidu $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ odredite točku koja je najmanje (najviše) udaljena od ravnine $3x + 4y + 12z = 288.$

18. Odredite najkraću udaljenost točke $T_0 = (1, 0, -2)$ od ravnine $x + 2y + z = 4.$

19. U sferu polumjera R upišite kvadar najvećeg obujma.

20. Odredite:

- (a) pravokutnik najveće površine s danim opsegom o ;
 (b) kvadar najmanjeg oplošja s danim obujmom O ;
 (c) trokut najveće površine s danim opsegom $2s.$

Poglavlje 8

DIFERENCIRANJE POD ZNAKOM INTEGRALA

8.1 DIFERENCIRANJE POD ZNAKOM INTEGRALA

Neka je $I = [a, b] \times [c, d]$ pravokutnik i $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ zadana funkcija. Ovdje razmatramo sljedeće probleme koji su važni u teoriji integralnih transformacija:

1. Uz koje uvjete na funkciju k i $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ postoji integral

$$F(x) = \int_c^d k(x, y) f(y) dy, \quad x \in [a, b]? \quad (1)$$

2. Uz koje uvjete je funkcija F neprekidna na $[a, b]?$

3. Uz koje uvjete je funkcija F diferencijabilna na $[a, b]$ i kada vrijedi

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial k(x, y)}{\partial x} f(y) dy \quad (2)$$

tj. kada se "smije" diferencirati pod znakom integrala.

TEOREM 8.1 Neka je $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na pravokutniku $I = [a, b] \times [c, d]$. Za svaku neprekidnu funkciju $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ postoji integral (1) i tako definirana funkcija F je neprekidna na segmentu $[a, b]$.

DOKAZ. Po Teoremu 3.17 je neprekidna funkcija k na zatvorenom pravokutniku I i jednoliko neprekidna. Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svake dvije točke $(x, y), (X, Y) \in I$ vrijedi

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 < \delta^2 \Rightarrow |k(x, y) - k(X, Y)| < \varepsilon \quad (3)$$

Budući je funkcija $y \mapsto k(x, y)f(y)$ neprekidna ona je i integrabilna (Teorem 1.14) to je sa (1) definirana funkcija $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Sada (3) za $y = Y$ i $|x - X| < \delta$ imamo

$$|F(X) - F(x)| = \left| \int_c^d [k(X, y) - k(x, y)] f(y) dy \right| \leq$$

$$\int_c^d |k(X, y) - k(x, y)| |f(y)| dy,$$

i dalje

$$|x - X| < \delta \Rightarrow |F(X) - F(x)| \leq \varepsilon \int_c^d |f(y)| dy. \quad (4)$$

Iz (4) i proizvoljnosti broja ε dobivamo jednoliku neprekidnost (dakle i neprekidnost) funkcije F na segmentu $[a, b]$. ■

TEOREM 8.2 (Leibnitzovo pravilo za deriviranje pod znakom integrala)
Neka je $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja na pravokutniku $I = [a, b] \times [c, d]$ ima neprekidnu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial k}{\partial x}$. Za svaku neprekidnu funkciju $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija (1) je diferencijabilna na $[a, b]$ i vrijedi formula (2). Pored tog funkcija F je neprekidna na $[a, b]$.

DOKAZ. U dokazu koristimo Fubinijev teorem (dokaz je složen, v. [2], Teorem 25, str. 129): Ako je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na pravokutniku $I = [a, b] \times [c, d]$ onda vrijedi

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Po prethodnom teoremu funkcija

$$H(x) = \int_c^d \frac{\partial k}{\partial x} f(y) dy$$

je neprekidna na segmentu $[a, b]$. Za $t \in [a, b]$ primjenom Fubinijevog teorema na prevokutnik $[a, t] \times [c, d]$ i neprekidnu funkciju $(x, y) \mapsto \frac{\partial k}{\partial x} f(y)$ dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^t H(x)dx &= \int_a^t \left[\int_c^d \frac{\partial k}{\partial x} f(y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^t \frac{\partial k}{\partial x} f(y)dx \right] dy = \\ &\int_c^d \left[\int_a^t \frac{\partial k}{\partial x} dx \right] f(y)dy = \int_c^d [k(t, y) - k(a, y)] f(y)dy = F(t) - F(a).\end{aligned}$$

Dobili smo

$$F(t) - F(a) = \int_a^t H(x)dx \quad (5)$$

i budući je desna strana od (5) diferencijabilna, to je i F diferencijabilna. Nadalje je, po Teoremu 1.18, derivacija desne strane od (5) u točki t jednaka vrijednosti podintegralne funkcije za $x = t$ (H je neprekidna!) pa imamo

$$F'(t) = H(t) = \int_c^d \frac{\partial k(x, y)}{\partial x} f(y)dy \quad (6)$$

što i jest formula (2). Konačno, neprekidnost funkcije H i (6) pokazuju da je F' neprekidna funkcija na $[a, b]$. ■

TEOREM 8.3 Neka funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ima neprekidnu parcijalnu derivaciju $D_1 f$ na pravokutniku $I = [a, b] \times [c, d]$ i neka su $x \mapsto a(x), b(x)$ funkcije klase C^1 na $[a, b]$ takve da je $a(x), b(x) \in [c, d]$. Tada je funkcija

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)dy \quad (7)$$

klase C^1 na $[a, b]$ i vrijedi formula

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)dy = b'(x) \cdot f(x, b(x)) - a'(x) \cdot f(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy. \quad (8)$$

DOKAZ. Neka je funkcija G definirana na način

$$G(x, u, v) = \int_u^v f(x, y)dy. \quad (9)$$

Funkcija F je kompozicija funkcije G sa funkcijama a i b pa je

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (10)$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x} &= \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy, \\ \frac{\partial G}{\partial u} &= -\frac{\partial}{\partial u} \int_u^v f(x, y) dy = -f(x, u), \quad \frac{\partial G}{\partial v} = f(x, v), \\ \frac{du}{dx} &= a', \quad \frac{dv}{dx} = b'.\end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem u (10) imamo

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{dv}{dx} = \\ &\int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy - f(x, a(x)) \cdot a'(x) + f(x, b(x)) \cdot b'(x)\end{aligned}$$

što se i tvrdilo. ■

PRIMJER. Treba izračunati integral

$$I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx, \quad |r| < 1$$

(Poissonov integral). Deriviranjem pod znakom integrala dobivamo

$$I'(r) = \int_0^\pi \frac{-2 \cos x + 2r}{1 - 2r \cos x + r^2} dx.$$

Supsticija $t = \tg \frac{x}{2}$ omogućava izračunavanje toga integrala i daje $I'(r) = 0$. Odavde naalazimo $I(r) = C$ (konstanta). Budući je $I(0) = 0$ imamo da je $I(r) = 0$ za $r \in \langle -1, 1 \rangle$. □

PRIMJER. Treba izračunati integral

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 \vartheta) d\vartheta, \quad a > 1.$$

Deriviranjem pod znakom integrala dobivamo

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 \vartheta} d\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Odavde integracijom po a dobivamo

$$I(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + C.$$

Ostaje odrediti konstantu C . Budući je $\ln(a^2 - \sin^2 \vartheta) = \ln a^2 \left[1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{a^2} \right]$ imamo

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln a^2 \left[1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{a^2} \right] d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \ln a d\vartheta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{a^2} \right) d\vartheta$$

i dalje

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{a^2} \right) d\vartheta - \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a}.$$

Budući je

$$\left| \ln \left(1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{a^2} \right) \right| \leq \left| \ln \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \right|$$

nalazimo da je

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{a^2} \right) d\vartheta \right| \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \left| \ln \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \right| = 0.$$

Dakle,

$$C = -\pi \lim_{a \rightarrow \infty} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a} = -\pi \ln 2$$

i konačno je

$$I(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) - \pi \ln 2 = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2}.$$

Napomenimo da smo ovdje deriviranjem funkcije $I(a)$ dobili integral $I'(a)$ koji se dao integrati i u rezultatu dobivamo funkciju $I'(a)$ za koju onda odredimo primitivnu funkciju. Pri tome se pojavila konstanta C koju treba odrediti. Općenito, pri izračunavanju integrala navedenom metodom određivanje konstante C nije jednostavno što pokazuje i ovaj primjer. \square

8.2 ZADACI ZA VJEŽBU

1. Nadite F' za funkciju:

- (a) $F(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx;$
- (b) $F(y) = \int_{\sin y}^{e^y} \sqrt{1 + x^3} dx;$
- (c) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2 x^2} dt;$

(d) $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy.$

2. Odredite:

(a) $\lim_{m \rightarrow 0} \int_m^{1+m} \frac{dx}{1+x^2+m^2};$

(b) $\lim_{m \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos mx dx;$

(c) $\lim_{m \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + m^2} dx;$

(d) $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + \frac{x}{m})^m}.$

3. Odredite $I(a)$ ako je:

(a) $I(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{a\sqrt{1-x^2}} dx;$

(b) $I(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\beta} \frac{\sin \alpha x}{x} dx;$

(c) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x\sqrt{1-x^2}} dx \quad (a \geq 0);$

(d) $I(m) = \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{m} dx;$

(e) $I(m) = \int_0^m \frac{\ln(1+mx)}{1+x^2} dx;$

(f) $I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx;$

(g) $I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+m \cos x)}{\cos x} dx;$

(h) $I(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^2},$

4. Ako je $u(x, t) = \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(s) ds$, gdje je φ klase C^1 i c konstanta, onda je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

5. Dokažite da su funkcije

$$u_1(r) = \int_0^\pi e^{nt \cos \vartheta} d\theta,$$

$$u_2(r) = \int_0^\pi e^{nt \cos \vartheta} \ln(r \sin^2 \theta) d\theta \quad (n \text{ cijeli broj})$$

rješenja diferencijalne jednadžbe $\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - n^2 u = 0$.

ime i prezime	1.	2.	3.	4.	ukupno
					/ 30

1. (7) Izračunajte neodređeni integral

$$\int \frac{(3 \sin^2 x + 7) \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 4 \sin x + 20}} dx.$$

2. (8) Definirajte rastav D segmenta $[a, b]$ i integralnu sumu $S_\xi(f; D)$. Definirajte određeni integral funkcije $J = \int_{[a,b]} f(x)dx$ i dokažite da je on jednoznačno određen.

Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom jednog luka cikloide

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

oko x -osi.

3. (7) Definirajte otvoreni skup U u \mathbb{R}^2 i gomilište skupa U .

Dokažite da je definicijsko područje Ω funkcije

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2)$$

otvoren skup i da je točka $O = (0, 0)$ njegovo gomilište.

Dokažite da je f neprekidna funkcija na Ω . Može li se funkcija f neprekidno proširiti na $\Omega \cup \{O\}$?

4. (8) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Definirajte jednoliku neprekidnu funkciju na Ω .

Definirajte kompaktan skup u \mathbb{R}^n .

Dokažite: ako je $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na kompaktnom skupu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ onda je f i uniformno neprekidna na K .

ime i prezime	1.	2.	3.	4.	5.	ukupno
						/ 30

1. (5) Zadana je funkcija

$$u = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}},$$

gdje je $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$. Odredite $\frac{du(0)}{dt}$.

2. (8) Teorem o srednjoj vrijednosti. Iskaz i dokaz.

3. (5) Provjerite da forma

$$\omega = -ydx + xdy$$

nije egzaktna i nađite integracioni multiplikator te forme.

4. (7) Definirajte pozitivno definitnu kvadratnu formu.

Dokažite tvrdnju:

Kvadratna forma $q(s, t) = a_{11}s^2 + 2a_{12}st + a_{22}t^2$ je pozitivno definitna ako i samo ako je

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

5. (5) Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}, \quad f(x, y) = x^2y^3(6 - y - x).$$