BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

PAUL TANNERY

Manuel Moschopoulos et Nicolas Rhabdas

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 263-277.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_263_1>

MÉLANGES.

MANUEL MOSCHOPOULOS ET NICOLAS RHABDAS;

PAR M. PAUL TANNERY.

I.

Dans ses *Vermischte Untersuchungen zür Geschichte der mathematischen Wissenschaften* (¹), M. Siegmund Günther a publié, d'après un manuscrit de la bibliothèque de Munich (p. 195-203), le texte grec d'un petit Traité de Manuel Moschopoulos sur les carrés magiques, et il s'est efforcé d'en déterminer l'époque. Comme ce Traité est adressé à un Nicolas Artavasde Rhabdas, et qu'un manuscrit du XVe siècle de la Bibliothèque nationale (fonds grec nº 2428) contient une réédition, faite par ce dernier personnage, du *Grand calcul suivant les Hindous* de Maxime Planude, tandis qu'il existe de ce même ouvrage d'autres manuscrits du XIVe et du XVe siècle, exempts des changements introduits par Rhabdas, notre savant collaborateur a cru pouvoir considérer comme probable que Moschopoulos a appartenu, pour la plus grande partie de sa vie, au XVe siècle (p. 267).

L'étude que j'ai faite du manuscrit précité nº 2428 m'a permis de préciser une date de la vie de Rhabdas et de la reporter un siècle plus tôt.

Ce manuscrit renferme en effet (fol. 225-245) un Traité arithmétique intitulé :

(¹) Leipzig, Teubner, 1876.

Τῷ ὑπερλίαν ἐκθύμως φιλουμένῳ, τῷ κλαζομενεῖ Τζαβούχῃ Θεοδώρῳ, ὁ Νικόλαος Ἀρτάβασδος (²) Σμυρνόθεν, ἐκ Βυζαντίδος ὁ Ῥαβδᾶς γράφει τόδε.

« A son très cher ami de cœur, à Théodore Tzavoukhe de Clazomène, Nicolas Artavasde de Smyrne le Rhabdas écrit ceci de Byzantide. »

Or ce Traité contient (fol. 231) un calcul de la pâque *pour la présente année,* l'an 6800, 17 du cycle solaire, 9 du cycle lunaire, et la pâque est donnée pour le 8 avril.

La date de l'ère byzantine est certainement fautive, et l'omission des lettres numérales indiquant les dizaines et les unités se soupçonne à la seule inspection du manuscrit; mais toutes les autres données concordent pour désigner, *sans aucune ambiguïté possible,* l'an 1341 après J.-C., ou 6849 de l'ère byzantine.

Le manuscrit n° 2428 contient d'ailleurs le Traité de Moschopoulos avec un texte en meilleur état que celui de Munich. Ce Traité (fol. 181-185) commence un recueil d'Ouvrages mathématiques, essentiellement distinct des parties précédentes du manuscrit :

Le titre peut se traduire ainsi :

« Du très savant et bien heureux Maître Manuel Moschopoulos, instruction pour l'invention des nombres carrés, qu'il fit, forcé par Nicolas de Smyrne Artavasde, arithméticien et géomètre, le Rhabdas ».

L'épithète de bienheureux (μακαριωτάτου) ou de très saint (ἁγιωτάτου) du manuscrit de Munich indique que Moschopoulos était mort lorsque cet intitulé fut composé. L'autre épithète (λογιωτάτου) semble suffire pour l'identifier avec un littérateur assez connu de la même époque, Manuel Moschopoulos dit le Crétois, pour le distinguer d'un homonyme de la même famille (le Byzantin) qui vécut au xv^e siècle et vit prendre Constantinople par les Turcs.

Ces deux Moschopoulos ont surtout écrit des Ouvrages de grammaire et des commentaires sur les anciens auteurs grecs; les connaissances mathématiques n'étaient guère qu'un accessoire chez les Byzantins de cette époque; Maxime Planude, lui aussi, fut prin-

---

(¹) Et non Ἀρταβάσδης, comme M. Gunther l'a écrit d'après Gerhardt et Scholl.

cipalement un littérateur, et le Rhabdas lui-même, malgré les titres spéciaux « d'arithméticien et de géomètre » qu'il se donne, a composé une grammaire.

Il est clair d'ailleurs que l'auteur du Traité sur les carrés magiques n'est pas l'inventeur des procédés qu'il indique ; il les a reçus par une tradition venue peut-être de l'Inde, ou au moins des pays mahométans, et qu'il ne possède qu'incomplètement, comme il est facile de le reconnaître.

Il distingue en effet les nombres, pour la formation des carrés magiques, en impairs, en pairement pairs, et en pairement impairs. Mais les pairement pairs sont pour lui les puissances de 2, tandis que les procédés qu'il indique pour ces nombres s'appliquent aux pairement pairs d'Euclide, c'est-à-dire aux nombres de la forme $4n$. Quant aux pairement impairs, qu'il aurait dû réduire aux nombres de la forme $4n+2$, il ne donne aucune règle, et il ne semble pas que les Byzantins aient connu de procédé général pour ces nombres.

Au moins dans notre manuscrit n° 2428, au verso du folio 212, on trouve sans autre explication les carrés magiques suivants pour les nombres 6^2 et 10^2 :

1	35	27	10	32	6
30	8	17	20	11	25
28	34	15	16	4	14
9	3	21	22	33	23
12	26	13	24	29	7
31	5	18	19	2	36

1	99	43	58	87	14	83	18	92	10
90	12	60	41	13	88	29	72	19	81
6	95	23	77	98	3	74	28	47	54
94	7	68	34	5	96	37	63	53	48
22	75	40	69	45	46	30	76	36	66
79	26	61	32	55	56	71	25	65	35
16	85	38	64	17	84	67	33	52	49
86	15	73	27	97	4	24	78	50	51
20	82	39	62	8	93	59	42	89	11
91	9	57	44	80	21	31	70	2	100

Or, si le premier est exact et formé d'ailleurs par un procédé qui se rapproche de ceux d'Adam Riese et d'Agrippa de Nettesheim, le second, qu'on a essayé de combiner en partant des mêmes principes, est faux. La troisième et la quatrième colonne verticale ont respectivement pour sommes 502 et 508 au lieu de 505.

Pour en finir avec Manuel Moschopoulos, je relèverai dans la citation de Pauli faite par M. Günther (p. 194) une erreur singulière, en ce qu'elle montre avec quelle précaution il faut consulter les meilleurs auteurs.

D'après Pauli, Manuel Moschopoulos le Crétois vivait sous Andronic Paléologue, dans la dernière période du XIV[e] siècle, ou suivant Titze, sous Michel VIII Paléologue, dans la deuxième période du XIII[e] siècle. Voilà une divergence d'un siècle qui semble embarrassante.

La première donnée ressemble à Fabricius qui précise (éd. Harles, t. VI, p. 323) qu'il s'agit d'Andronic le Vieux et de l'année 1392. Or Andronic le Vieux a régné de 1282 à 1327 et le seul Andronic qui soit venu après lui, Andronic III le Jeune, a régné de

1327 à 1360. La date de 1392 est d'ailleurs simplement celle attribuée par un érudit du XVI^e^ siècle à un manuscrit de Moschopoulos, que Montfaucon a reportée à l'année 1296 (manuscrit fonds grec n° 2572 de la Bibliothèque nationale).

Quant à Michel VIII (1261-1282), ce fut le prédécesseur immédiat d'Andronic le Vieux. En tenant compte des recherches de Titze et de la donnée de Montfaucon, on peut donc penser que l'auteur du Traité des carrés magiques était sensiblement plus âgé que Nicolas Rhabdas et qu'il a composé son Opuscule arithmétique dans sa vieillesse, vers le premier quart du XIV^e^ siècle.

II.

Dans le manuscrit n° 2428, l'opuscule de Moschopoulos est suivi (fol. 186-193) de la Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς de Planude, avec les additions de Rhabdas.

« Le calcul suivant les Hindous, dit le grand : son exposition par le très philosophe parmi les philosophes et très vénérable parmi les moines maître (1) Maxime le Planude et le Rhabdas Nicolas. »

La Notice donnée sur ce manuscrit par Gerhardt, dans son édition du Traité de Planude (*Das Rechenbuch des Maximus Planudes,* Halle, Schmidt, 1865, p. XII), est passablement inexacte. « C'est, dit-il, une revision de l'ouvrage de Planude ; mainte chose a été laissée de côté, d'autres ont été empruntées à un autre écrit de Nicolas Rhabdas. »

En fait, le texte de Planude est suivi fidèlement, et Gerhardt aurait pu utiliser avec avantage ce manuscrit pour son édition. A la vérité, il s'arrête après la multiplication (2), mais il en est de même du plus ancien manuscrit de Planude, et dans la partie conservée il n'y a pas d'omissions, seulement beaucoup d'additions de détail, qui ne sont d'ailleurs nullement empruntées à un autre écrit de Rhabdas. Les deux additions les plus importantes sont

---

(1) Κυρίου en abréviation. Gerhardt a lu καὶ τὰ; dans le cas semblable, pour le titre du Traité de Moschopoulos, M. Gunther a lu κατά.

(2) Plus exactement après εἴρηται, p. 11, l. 8 de l'édition de Gerhardt.

notées en marge : Ἐκ τῆς προσθήκης τοῦτο τοῦ Ῥαβδᾶ Νικολάου..... ἕως ὧδε (Ceci a été ajouté par le Rhabdas Nicolas... jusqu'ici.)

Ainsi, après l'exemple d'addition (p. 4) dans lequel la somme est inférieure à 10000, Rhabdas remarque que ce calcul aurait pu être effectué sur les doigts avec le mode de figuration dont il nous a lui-même conservé les détails ailleurs; mais que, pour des nombres supérieurs, l'emploi des chiffres hindous ne peut être ainsi suppléé.

De même, après la soustraction, Rhabdas en donne la preuve par 9, négligée par Planude.

Mais ce qui est assez singulier, c'est que ces deux additions sont suivies immédiatement d'autres, nettement distinguées de celles de Rhabdas par une annotation marginale (τοῦτο ἡμέτερον... ἕως ὧδε. Ceci est de nous... jusqu'ici). La première fois ce second reviseur du Traité détaille longuement ce qu'il faut faire dans le cas de l'addition, s'il se présente des zéros dans les deux nombres à ajouter; la seconde fois, il développe la preuve par 9 pour la soustraction, seulement indiquée par Rhabdas.

De qui sont ces secondes additions? Seize feuillets plus loin, en comptant à la manière grecque les deux extrêmes, on trouve (fol. 203) la mention marginale : Ζήτει καὶ ἕτερα Κυδώνη πρὸ φυλλῶν ις̅. (Cherchez d'autres choses de Cydone seize feuillets plus haut.) Cette mention se trouve en regard d'une règle, autrement anonyme, pour calculer la somme des *n* premiers nombres. Cette règle est suivie d'une autre pour le même objet, qui est donnée comme d'Isaac (Argyre).

Mais, dans cette mention, ἕτερα est en abréviation et l'on peut lire ἑτέραν, *une autre* (méthode). De fait, tout ce fragment représente les problèmes 2 et 3 publiés d'après le *Codex Cizensis* de Nicomaque par Richard Hoche, p. 149-151 de son édition de l'*Introduction arithmétique* (Leipzig, Teubner, 1866), et attribués à Isaac (Argyre); dans ce manuscrit, le problème précédent est encore une règle un peu différente pour le calcul de la somme des *n* premiers nombres et, sous l'indication de l'auteur τοῦ Κύνος donnée par Hoche, nous savons, par un autre manuscrit de la Bibliothèque nationale, qu'il faut lire τοῦ Κυδώνου.

Il est donc très possible que l'annotation marginale, qui paraissait nous donner une lumière inattendue, ait été prise sur un manuscrit originaire [1] où elle renvoyait à la méthode de Cydone pour ce problème de sommation, et que le rapport où elle semble être maintenant avec l'annotation du fol. 188 soit purement accidentel.

Quoi qu'il en soit, si nous nous demandons quel est l'auteur des deux additions anonymes dans le Traité de Planude, nous ne pouvons guère penser qu'à Démétrius Cydone ou à Isaac Argyre, qui sont les deux seuls autres érudits dont le nom se rencontre dans la compilation qui a formé notre manuscrit. Le premier, ami de Jean VI Cantacuzène (1344-1355), après l'abdication de ce dernier, se retira d'abord à Milan, puis en Crète; il vivait encore en 1391. Quant à Isaac Argyre, on a de lui des écrits datés de 1368 à 1386, mais qu'il composait dans sa vieillesse.

Il n'est guère douteux que Maxime Planude, dont l'âge est intermédiaire entre ceux de Manuel Moschopoulos et de Nicolas Rhabdas, ne vécût encore quand ce dernier revisait son Traité. Cydone, un peu plus jeune que Rhabdas, a d'ailleurs soutenu une polémique religieuse entre Maxime Planude et, d'un autre côté, contre un autre moine qui s'occupa également de Mathématiques, Barlaam, contemporain de Planude. Pour Argyre, qui fut aussi moine, il devait être encore un peu plus jeune que Cydone.

III.

Le troisième fragment de notre manuscrit n° 2428 (fol. 194-200) est un écrit de Rhabdas :

« Enseignement abrégé et très clair de la science du calcul, improvisé en Byzantide de Constantinople par Nicolas de Smyrne Artavasde, arithméticien et géomètre, le Rhabdas, à la demande du tout vénérable chargé des pétitions (ἐπὶ τῶν δεήσεων) maître George le Khatzyce, ouvrage très facile pour ceux qui veulent l'étudier, et que voici : »

Cet Opuscule, très élémentaire, et où les lettres numérales grecques sont seules employées, n'offre guère d'intérêt que parce qu'il renferme, sous le titre « Ἔκφρασις τοῦ δακτυλικοῦ μέτρου », l'expo-

---

[1] Je remarque à cette occasion que si une partie du manuscrit 2428 est incontestablement du XVe siècle, celle qui nous occupe peut très bien n'être que du XVIe siècle.

sition du système des anciens pour figurer sur leurs doigts tous les nombres jusqu'à 9999. Cette partie du Traité a été déjà plusieurs fois imprimée.

En dehors des trois pages sur la numération par les doigts, le plus curieux du Traité est au début. Rhabdas y a littéralement copié, en changeant le nom du destinataire, le préambule des *Arithmétiques* de Diophante jusqu'à τυγχανόντων δὴ ἐν τούτοις (p. 2, l. 5 de l'édition de S. Fermat), et, fait aussi singulier, il a répété le même plagiat, un peu moins étendu toutefois, au début de sa lettre à Théodore Tzavoukhe, dont j'ai déjà parlé, et qui semble être un peu postérieure à celle qui nous occupe actuellement.

Cette double circonstance ne peut guère faire juger honorablement l'esprit d'invention littéraire de Rhabdas, mais elle permet de soulever une question plus grave. Il connaissait Diophante et s'en était nécessairement occupé ; si l'on réfléchit à l'insuffisance des motifs qui font attribuer à Planude les scolies sur Diophante, on peut se demander si l'auteur n'en est point Rhabdas. En fait, les plus anciens manuscrits sont anonymes quant aux scolies, et si le fragment de la Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς, qui suit le texte sur quelques-uns, est parfois indiqué comme de Planude, il débute par un morceau mutilé qui ne paraît nullement de ce dernier, et qui peut provenir de la revision par Rhabdas de la seconde partie du *Calcul suivant les Hindous.*

On peut encore remarquer (fol. 196 verso) que, après avoir défini l'addition et la soustraction, Rhabdas renvoie pour la pratique du calcul à une Table (ταύλα) précédente, « la Table du très sage Palamède ». Dans notre manuscrit, cette Table, au lieu de précéder, suit l'opuscule (fol. 201-202). Elle donne les sommes et produits pour toutes les combinaisons deux à deux des lettres numérales grecques, lorsqu'elles ne donnent pas lieu à simple juxtaposition pour l'addition.

Il est à peine utile de remarquer que Palamède ne peut représenter ici que « l'antique tradition », car il est impossible de faire remonter la numération alphabétique des Grecs au delà de la moitié du VI[e] siècle avant J.-C., et cette date (époque de Pythagore) est peut-être déjà trop reculée.

La Table attribuée à Palamède est accompagnée d'une Note anonyme qui peut, au reste, être de Rhabdas, et où il est dit que pour les calculs plus complexes il faut recourir au procédé du grand calcul hindou.

Viennent ensuite, après une lacune d'une page environ, les règles d'Isaac dont nous avons parlé plus haut, pour la sommation des *n* premiers nombres et pour celle des termes d'une progression arithmétique.

Puis (fol. 203, verso 212), nous rencontrons une version de la *Geodæsia* de Héron éditée par Hultsch (*Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiæ*, Berlin, Weidmann, p. 141-152, 1864). Cette version, dont l'intitulé est d'ailleurs Γεωμετρία τοῦ Ἥρωνος, se rapproche plus des manuscrits de la partie correspondante de la *Geometria* (p. 41-60), (au moins du n° 2013 de la Bibliothèque nationale) que de celui suivi par le savant éditeur; elle ne contient notamment pas la Table métrologique (Chap. IV) spéciale à la *Geodæsia*, mais elle renferme les deux autres morceaux propres à ce Traité, pour les calculs de la hauteur et de l'aire dans un triangle quelconque (17, 18, 19), morceaux qui, au reste, semblent d'une date relativement récente.

Dans la partie métrologique de ce Traité de Héron, devant le fragment sur l'orgye (4, 12, p. 48 de Hultsch), on remarque le titre singulier Ἀπὸ τῆς ὑπεροπτικῆς γεωμετρίας, avec la remarque marginale ἴσως (peut-être) αἰγυπτικῆς au lieu d'ὑπεροπτικῆς.

C'est à la fin du Traité que se trouvent les deux carrés magiques que j'ai donnés plus haut.

On rencontre ensuite (fol. 213-214) un travail d'Isaac Argyre.

« D'Isaac moine l'Argyre à Colybos qui, étant à Mitylène, lui demandait comme un Tableau résumé; c'est une méthode de géodésie ou de mesure des surfaces, exacte et abrégée. »

Ces quatre pages commencent par insister sur les erreurs qu'entraînent les procédés grossiers d'arpentage analogues à ceux de l'antique Égypte, pour revenir finalement comme pratique à ces mêmes procédés. Après la salutation finale de la lettre, vient, sans titre aucun (1) et comme faisant suite, une compilation d'extraits de la *Geometria* et des *Introductiones stereometricorum* de Héron, où les règles sont partout substituées aux exemples.

Cette compilation, qui occupe les folios 215-224, est suivie de

(1) Un espace blanc a toutefois été réservé pour ce titre.

la lettre de Rhabdas à Théodore Tzavoukhe ; vient ensuite (fol. 246-248 recto) « d'Isaac moine l'Argyre, scolie sur la première figure de la description sur un plan de la terre habitée » (géographie de Ptolémée) ; c'est le dernier morceau véritablement mathématique du manuscrit, qui comprend encore quatre pages sur les noms des différents vents, et quelques autres renseignements de Géographie générale.

IV.

Je reviens à la lettre de Rhabdas à Tzavoukhe pour l'analyser; elle représente de fait la suite de la lettre à Khatzyce et offre sensiblement plus d'intérêt.

Après quelques considérations générales, Rhabdas enseigne :

A. A multiplier des nombres fractionnaires exprimés avec des suites de quantièmes;

1° Former le carré de $3\frac{1}{3}\frac{1}{14}\frac{1}{42}$,

2° Produit de $5\frac{2}{3}\frac{1}{5}\frac{1}{33}\frac{1}{110}\frac{1}{330}$, par $8\frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{156}$.

3° Produit de $5\frac{1}{5}$, par $7\frac{1}{7}$ et $9\frac{1}{6}\frac{1}{18}$,

B. A diviser par un nombre fractionnaire :

4° Quotient de 10 par $3\frac{1}{3}\frac{1}{14}\frac{1}{42}$.

C. A extraire la racine carrée d'un nombre non carré parfait.

Il donne la règle suivante. Prendre le carré le plus voisin *en plus ou en moins* du nombre donné.

Soit $A = a^2 + r$; l'approximation du premier degré sera

$$X_1 = a + \frac{r}{2a}:$$

c'est une approximation par excès.

De cette approximation, on peut en déduire une autre au même degré par défaut

$$x_1 = \frac{A}{X_1} = a + \frac{\frac{1}{2}r}{a + \frac{r}{2a}},$$

puis une approximation du second degré (par excès),

$$X_2 = \tfrac{1}{2}(X_1 + x_1) = a + \frac{r}{2a} - \frac{r^2}{4a(2a^2 + r)}.$$

Dans les exemples choisis par Rhabdas, $A = 10,\ 3,\ 24$, la valeur absolue de r est toujours l'unité.

Rhabdas expose ensuite un procédé dont il se donne comme l'inventeur pour le calcul pascal, et qu'Isaac Argyre s'est approprié dans son Traité publié par le P. Petau.

Ce procédé est le suivant : retrancher de 50 l'épacte (supposée différente de 28 et de 29), et compter à partir du 1er janvier un nombre de jours égal à la différence ; le dimanche suivant le jour ainsi obtenu est le carnaval byzantin, c'est-à-dire notre sexagésime, le huitième dimanche avant Pâques.

Nous arrivons à une partie intitulée Μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν, *Méthode des calculs de la vie usuelle*. Cette méthode consiste en trois procédés qui reviennent à notre règle de trois simple, directe et inverse, et à la règle de trois composée. Il est remarquable que dans l'exposé Rhabdas appelle les nombres donnés λόγοι, c'est-à-dire du mot qui signifie *rapport* chez tous les mathématiciens grecs.

Notre auteur entre ensuite dans quelques détails sur le système des poids et mesures et donne des applications pratiques de la règle de trois, puis il expose la règle d'alliage. Il termine par un recueil de problèmes, au nombre de vingt, qui ne font plus partie des « calculs de la vie usuelle », mais sont « bien plus élevés et plus surprenants ».

Ces problèmes, dont les énoncés sont mis sous forme d'historiettes, sont en fait du premier degré et des plus simples. Voici les équations auxquelles conduisent immédiatement les 18 premiers :

$$x\left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}\right) = 21, \tag{1}$$

$$x\left(1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) = 12, \tag{2}$$

$$x\left(1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{4}\right) = 30, \tag{3}$$

$$\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{10}{3\frac{1}{3} - 3\frac{1}{5}}, \tag{4}$$

$$x + 6 = 2(y - 6), \quad x - 6 = y + 6, \tag{5}$$

$$x + y = 100, \qquad 7x = 9y, \tag{6}$$

(7) Rapport de deux cubes dont les côtés sont 10 et 5,

$$x + \tfrac{1}{5}y = y + \tfrac{1}{7}x = 10000, \tag{8}$$

$$x\left(1 - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9}\right)\left(1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7}\right)\left(1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right)\left(1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) = 1\tfrac{1}{2}, \tag{9}$$

$$x\left(1\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}\right) = 7, \tag{10}$$

$$[(2x - 15)2 - 15]2 - 15 = 0, \tag{11}$$

(12) Simples divisions.

(13) $380 \times 85 = x(85 + 24)$,

(14) $x + b - a = y - b + a$,

problème absurdement considéré comme déterminé et résolu par une règle qui supposerait encore $x + y = a^2$;

(15) $x(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}) = 36$,

(16) $x(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = 138$,

(17) $x(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = 4$,

(18) Partage en parties proportionnelles.

Les deux derniers problèmes 19 et 20 (non numérotés d'ailleurs sur le manuscrit) sont les deux derniers publiés par Hoche à la suite de son édition de Nicomaque. Il est possible qu'ils ne fissent pas originairement partie du recueil de Rhabdas.

Il est clair que ce recueil touche à peine même aux premiers problèmes de Diophante et qu'il rappelle beaucoup plutôt le papyrus mathématique d'Eisenlohr. L'analogie est encore plus frappante en ce que, dans plusieurs problèmes, le résultat fractionnaire est exprimé par une suite de quantièmes suivant l'antique procédé égyptien, que les Byzantins conservaient traditionnellement à côté du procédé de numération ordinaire pour les fractions [1].

Quant aux solutions de Rhabdas, elles témoignent également d'une singulière décadence. Aucun raisonnement analytique; les calculs sont développés avec soin, en cherchant à montrer ce qu'il faudrait faire dans le cas du changement des données numériques, et l'existence de la solution est prouvée synthétiquement, mais rien de plus. Rhabdas s'adresse à la mémoire, non à l'intelligence.

Si l'on ajoute que ses calculs sont parfois fautifs, on ne peut certainement le considérer que comme un écrivain mathématique tout à fait ordinaire, même pour son temps et son pays.

L'intérêt de ses écrits est surtout de montrer jusqu'où étaient tombés les héritiers dégénérés du nom hellène, ceux-là même qui avaient alors Diophante entre leurs mains.

---

[1] On a une autre preuve frappante de ce maintien de la vieille tradition dans la *Géométrie* de Jean Pediasimos (ed. Friedlein, 1866) contemporain de Rhabdas. Il est beaucoup plus fidèle en fait aux suites de quantièmes que les rédacteurs de la collection héronienne.

V.

Je reviens sur le procédé indiqué par Rhabdas pour l'extraction de la racine carrée ; c'est de fait le seul que nous trouvions chez un auteur grec pour la détermination de nombres fractionnaires approchés d'une racine incommensurable. Il est d'ailleurs clair que, si Rhabdas se limite à une approximation du second degré, le procédé peut être indéfiniment poursuivi.

La question de la véritable date de l'invention de ce procédé reste douteuse, car, s'il y a un fait certain, c'est qu'il n'a nullement été appliqué dans les calculs analogues de la collection héronienne, et si M. Ch. Henry (1) a essayé ici même de l'employer pour la construction des valeurs approchées d'Archimède pour $\sqrt{3}$, cet essai n'a pas été heureux, comme l'a fait remarquer M. Günther dans son important travail *Die quadratische Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden* (2).

Notre savant collaborateur ignorait, dans cette dernière étude, la mention de cette méthode dans Rhabdas ; il l'étudiait comme retrouvée par des contemporains, Oppermann et Alexeïef, et il a établi que la $n^{\text{ième}}$ valeur approximative trouvée par ce procédé est la réduite de rang 2^n du développement de la racine en fractions continues.

M. Günther a, d'ailleurs, constaté l'identité de principe de la méthode d'Alexeïef avec celle donnée par M. Bertrand dans son *Traité d'Arithmétique*, p. 287, et avec celle déjà développée antérieurement par Buzenzeiger; il a enfin rappelé qu'elle était

---

(1) Tome III, p. 515 et suiv. Des deux valeurs en question, celle par défaut $\frac{265}{153}$ est absolument irréductible à ce procédé; pour celle par excès, on a

$$\frac{1351}{780} = \frac{1}{2}\left(\frac{26}{15} + \frac{45}{26}\right) \quad \text{et} \quad \frac{26}{15} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + \frac{9}{5}\right).$$

Mais $\frac{5}{3}$ est irréductible, et n'est pas d'ailleurs une approximation dont on puisse montrer l'existence chez les Grecs, comme je me suis laissé allé à le dire ailleurs (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, IV_2, p. 322).

(2) *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, IV.

connue dès le xv^e siècle en Italie, et qu'elle se trouve de fait dans Lucas Pacioli.

M. Heiberg a remarqué depuis que cette même méthode est indiquée dans la *Logistique* du moine Barlaam (livre II, prop. 39). Il n'est guère douteux que cette *Logistique* ne soit antérieure à la lettre de Rhabdas à Tzavoukhe ; c'est par conséquent le plus ancien Ouvrage actuellement connu où cette méthode apparaisse.

Cependant il faut remarquer que Rhabdas ne paraît nullement l'avoir empruntée à Barlaam ; la *Logistique* de ce dernier, pastiche des livres arithmétiques d'Euclide, est essentiellement différente comme forme et comme ordre d'idées des écrits de Rhabdas, et d'ailleurs Barlaam indique expressément, au contraire de Rhabdas, que le procédé peut être indéfiniment poursuivi. Le témoignage de Rhabdas reste donc précieux en ce qu'il indique que la méthode était de son temps connue des calculateurs byzantins, tandis que les rapports que Barlaam a eus avec l'Italie pourraient faire demander si ce n'est pas dans ce dernier pays qu'il en aurait eu connaissance. Il semble, au contraire, probable, jusqu'à nouvel argument, que c'est de Barlaam que vient la connaissance de la méthode chez les Italiens du xv^e siècle.

Que d'ailleurs Barlaam n'en soit pas l'inventeur, il ne peut guère y avoir de doutes à cet égard ; il se pose uniquement dans sa Préface comme ayant pour but de démontrer les principes des règles de calcul suivies de son temps, en particulier par les astronomes, qui ont toujours été les plus grands calculateurs. La méthode est donc, sans doute, antérieure au xiv^e siècle et il s'agirait d'en retrouver des traces à une époque plus reculée, soit chez les Grecs, soit chez les Occidentaux, soit chez les Arabes.

Il est essentiel de remarquer, en tous cas, que Barlaam, de même que Rhabdas, suppose que l'on parte, comme première approximation de $\sqrt{A}$, de la relation

$$X_1 = a + \frac{r}{2a},$$

approximation qui appartient, à n'en pas douter, aux Grecs de l'époque classique. Si l'on prend

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad X_0 = \frac{A}{a} = a + \frac{r}{a}$$

comme approximation précédente, il est clair que X_1 est la moyenne arithmétique de X_0 et x_0, et que x_1 est leur moyenne harmonique. L'essence du procédé est d'ailleurs que les deux approximations du même degré, l'une par défaut, l'autre par excès, donnent A pour produit,

$$X_n x_n = A = a^2 + r;$$

X_{n+1} et x_{n+1} seront respectivement la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique de X_n et x_n.

Mais Barlaam, pas plus que Rhabdas, ne parle de moyenne harmonique.

La découverte de textes plus anciens que Barlaam et enseignant expressément son procédé ne semble guère devoir être espérée; mais on a un certain nombre de racines approchées, remontant à diverses époques éloignées et dont le mode de calcul n'est pas déterminé : on peut donc essayer de reconnaître si ce procédé a pu servir à les calculer.

Soit $\frac{p}{q}$ une approximation de $\sqrt{A}$; on peut la supposer par excès, sauf à lui substituer $\frac{Aq}{p}$. Soit donc $\frac{p^2}{q^2} = A + R$.

Les valeurs de l'approximation précédente seront, par excès, $\frac{p}{q} + \sqrt{R}$; par défaut, $\frac{p}{q} - \sqrt{R}$.

Ainsi, toutes les fois que R ne sera pas un carré parfait, on sera certain que l'approximation n'aura point été obtenue par le procédé de Barlaam.

Si l'on peut réduire l'approximation à une précédente, on doit poursuivre la réduction; si l'on n'arrive pas finalement à une approximation de la forme $a + \frac{r}{2a}$, on devra encore considérer la racine comme obtenue par un procédé différent.