Г. И. ГАРАСЬКО

НАЧАЛА
ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИИ
ДЛЯ ФИЗИКОВ

$$\mathcal{L} = \frac{const}{V_{ind}}$$

ТЕТРУ

Москва 2009

Г. И. Гарасько

Начала финслеровой геометрии для физиков
Москва, ТЕТРУ, 2009. – 268 стр.

Монография посвящена изложению основных идей, методов и физических приложений финслеровой геометрии. Показано, что физическому Миру соответствует не одна, а некоторый класс финслеровых геометрий. Предложенный принцип самодостаточности финслеровых геометрий позволил применить геометрический подход в теории поля, при этом гравитация и электромагнетизм естественным образом объединяются. Для пространств, конформно связанных с финслеровыми пространствами, введено понятие конформного потенциала, что позволяет построить в произвольном финслеровом пространстве любой размерности аналог теории комплексного потенциала на евклидовой плоскости. Понятие конформного потенциала тесно связано с понятием Мировой функции.

НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике
http://www.polynumbers.ru,   hypercomplex@mail.ru

ISBN 978-5-98396-012-1

Оглавление

Предисловие

Настоящая монография посвящена изложению основных идей, методов и физических приложений *финслеровой геометрии.*

Финслерова геометрия нередко встречается в физических теориях, но в силу исторических причин это словосочетание физики стараются не употреблять. Осмысленное внедрение финслеровой геометрии в физику может помочь по-новому взглянуть на классические и широко известные задачи, а также помочь в построении новых подходов в проблемных областях.

Многие результаты в области невырожденных полichисел и финслеровой геометрии, часть из которых изложена в данной работе, получены в совместной научной деятельности с Д. Г. Павловым [31], [32], [40], [42], [45], [54].

В первой главе кратко изложены основные понятия, положения и идеи, которые более подробно рассматриваются в последующих главах. Главы с *V* по *VIII* включительно объединены общей темой: в них изучаются *финслеровы пространства*, конформно связанные, в основном, с плоскими финслеровыми пространствами.

Книга должна быть вполне доступна студентам *III* курса теоретических кафедр физических факультетов университетов. Желательно знакомство читателя с вариационным исчислением, а также с лагранжевым и гамильтоновым формализмами классической механики.

* * *

Автор благодарен Д. Г. Павлову за обсуждение и техническую помощь при подготовке рукописи к печати, а также С. С. Кокареву, С. В. Лебедеву, Р. Р. Айдагулову и Т. Е. Владимировой, прочитавшим рукопись и сделавшим немало ценных замечаний.

Соглашения и обозначения

Математики обычно объединяют термины *риманова геометрия* и *псевдориманова геометрия* в один, используя при этом термин *риманова геометрия*, для физиков это неприемлемо, поэтому в качестве объединяющего термина будем использовать термин *квадратичные пространства*.

Формально под линейностью бинарной операции умножения " $\cdot$ " на множестве объектов $A, B, C...$ будем понимать выполнение соотношений

$$(aA + bB) \cdot (cC + dD) = ac\, A \cdot C + ad\, A \cdot D + bc\, B \cdot C + bd\, B \cdot D$$

для любых четырёх элементов A, B, C, D, где $a, b, c...$ – действительные, комплексные или гиперкомплексные числа.

Индексы $i, j, k, ...$ пробегают значения от 1 до n или от 0 до $(n-1)$ в зависимости от контекста, если не оговорено другое.

Индексы $\alpha, \beta, \gamma, ...$ пробегают значения от 1 до $(n-1)$, если не оговорено другое.

По дважды и более раз встречающемуся индексу ведется суммирование в пределах его (индекса) изменения.

Если, кроме индекса i, имеется один или несколько индексов i_-, то подразумевается, что $i \equiv i_-$, но суммирование отсутствует.

В некоторых случаях, чтобы подчеркнуть не тензорный характер индекса, будем его брать в круглые скобки, например, $f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(n)}$ - n скалярных величин.

n – размерность основного координатного пространства, если не оговорено другое.

t – время, если не оговорено или не подразумевается иное.

c – скорость света, если не оговорено иное.

СТО – специальная теория относительности.

ОТО – общая теория относительности.

$diag(a_1, a_2, ..., a_n)$ – квадратная диагональная матрица с элементами $a_1, a_2, ..., a_n$ на главной диагонали.

Φ – функция Финслера.

$perm(a_{ij}) \equiv adet(a_{ij}) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ ... & ... & ... \\ a_{k1} & ... & a_{kk} \end{vmatrix}_+$ – перманент, или антиопределитель матрицы (a_{ij}).

H – функция Гамильтона.

L – метрическая функция, функция Лагранжа.

$\mathfrak{L}$ – лагранжиан.

ds, dl – элементы длины.

s, l – длины кривых, длины экстремалей, длины геодезических.

S – длина кривой, длина экстремали, длина геодезической; длина экстремали, длина геодезической как функция координат; действие; действие как функция координат.

S_W – Мировая функция.

h – постоянная Планка.

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-27}$эрг·сек.

RR' – вектор из точки R в точку R'.

$x \equiv x^1, x^2, ..., x^n$; если $x^1, x^2, ..., x^n$ – координатное пространство.

$x \equiv x^0, x^1, ..., x^{n-1}$; если $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$ – координатное пространство.

$dx \equiv (dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ – бесконечно малое смещение в пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$.

$dx \equiv (dx^0, dx^1, ..., dx^{n-1})$ – бесконечно малое смещение в пространстве $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$.

$\xi \equiv (\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)$ – вектор, если $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ – компоненты вектора.

$\xi \equiv (\xi^0, \xi^1, ..., \xi^{n-1})$ – вектор, если $\xi^0, \xi^1, ..., \xi^{n-1}$ – компоненты вектора.

ind, (ind) – объекты, индексированные таким сочетанием букв, относятся к индикатрисе.

$$\delta^i_j \equiv \begin{cases} 1\,, & \text{если} \quad i = j\,, \\ 0\,, & \text{если} \quad i \neq j \end{cases} \qquad \text{– символ, тензор Кронекера.}$$

$\mathfrak{F}_n$ – финслерова геометрия размерности n.

$\mathfrak{F}_n^{\mathfrak{max}}$ – максимальная финслерова геометрия размерности n.

$\mathfrak{F}_n^+$ – финслерова геометрия размерности n, все измеримые векторы которой в касательном пространстве в каждой точке основного пространства направлены в конус будущего $x^0 > 0$.

$\mathcal{A}_n(M)$ – центроаффинное касательное пространство в точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного координатного пространства.

R – алгебра действительных чисел.

C – алгебра комплексных чисел.

P_n – алгебра полочисел размерности n.

$P_{k+2\cdot m}$ – алгебра невырожденных полочисел размерности $n \equiv k + 2 \cdot m$.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1 Координатное пространство

Для применения математики в физических исследованиях и решении теоретических задач вначале необходимо перейти от физических понятий к математическим, например, ввести систему координат и описывать физическую систему геометрическими, алгебраическими или какими-либо иными математическими объектами в этом координатном пространстве. Будем считать, что самая трудная часть работы проделана, то есть для физической системы установлена система координат. Круг задач ограничен свойствами этого координатного пространства и свойствами тех объектов, которые это пространство содержит или которыми оно будет наполнено в результате построений. Важно подчеркнуть, что в конкретном координатном пространстве координаты могут иметь разные размерности.

Можно работать в некотором координатном пространстве, даже если не установлено взаимно однозначное соответствие между точками координатного пространства и событиями, но надо уметь ставить в соответствие теоретически получаемым результатам физически наблюдаемые и измеримые экспериментально величины, то есть действительные числа. Такую процедуру естественно назвать *интерпретацией.* Вполне достаточно бывает существование хотя бы частичной интерпретации. При таком подходе можно заниматься теоретическими и математическими исследованиями и лишь при получении некоторых результатов ставить вопрос об их интерпретации.

Все последующие рассуждения и построения будут происходить в непрерывном координатном пространстве n измерений, каждая точка $M \equiv M(x^1, x^2, ..., x^n)$ которого представляет собой упорядоченный набор значений n независимых действительных переменных $x^1, x^2, ..., x^n$. Такое пространство будем называть *основным координатным простран-*

ством, или просто *основным пространством.* При этом взамен переменных $x^1, x^2, ..., x^n$ разрешается брать любые другие независимые переменные $x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'}$, при условии, чтобы между ними имелось взаимно однозначное соответствие и чтобы новые переменные были достаточное число раз дифференцируемыми функциями старых, ровно как и старые переменные – такого же рода функциями новых. Взаимно однозначную функциональную зависимость между координатами одной и другой системы координат

$$x^{i'} = f_i(x^1, x^2, ..., x^n) \tag{1.1.1}$$

будем называть преобразованием координат. Скалярные функции f_1, $f_2, ..., f_n$ дифференцируемы достаточное число раз. В силу взаимной однозначности преобразования (1.1.1) якобиан

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x^1, x^2, ..., x^n)} \neq 0, \ \pm\infty\,. \tag{1.1.2}$$

Каждому преобразованию координат (1.1.1) соответствует преобразование самого пространства

$$x^i \to f_i(x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{1.1.3}$$

то есть взаимно однозначное отображение координатного пространства самого на себя.

Итак, можно говорить как о *пассивном взгляде на преобразования* (1.1.1), когда точки пространства остаются на месте, а меняются только численное значение их координат, так и об *активном подходе* (1.1.3), когда каждой точке пространства ставится в соответствие, вообще говоря, другая точка того же пространства в тех же координатах.

Важно отметить, что как при пассивном взгляде на преобразования, так и при активном подходе (1.1.3), в физических задачах условие (1.1.2) часто выполняется не во всём пространстве, а лишь в некоторой его области или областях, или же во всём пространстве, но за исключением особых точек. Для краткости изложения мы не всегда будем это оговаривать, но всегда будем иметь это ввиду.

Рассмотрим какую-нибудь точку $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ нашего координатного пространства. Будем говорить, что в этой точке задан вектор ξ, если в каждой системе координат $x^1, x^2, ..., x^n$ задана система действительных чисел $(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)$, преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой $x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'}$ по закону

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\xi^i\,. \tag{1.1.4}$$

Совокупность всевозможных векторов ξ в данной точке M вместе с операциями покомпонентного сложения двух векторов и покомпонентного умножения вектора на действительное число образуют линейное пространство n измерений. Данное пространство называется *касательным пространством* в точке M.

Пусть ε – бесконечно малая величина, не зависящая от выбора системы координат. Рассмотрим векторы ξ касательного пространства в точке M, умноженные на ε. Каждый такой вектор имеет бесконечно малые компоненты. Сопоставим вектору $\varepsilon\xi$ бесконечно малое смещение из точки $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ в бесконечно близкую точку $M'(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, ..., x^n + dx^n)$ так, чтобы дифференциалы координат dx^i совпадали с координатами вектора $\varepsilon\xi$:

$$dx^i = \varepsilon\xi^i\,. \tag{1.1.5}$$

Смещение MM', построенное по закону (1.1.5), не зависит от выбора системы координат, так как закон преобразования дифференциалов dx^i в точности таков, как и закон преобразования (1.1.4) компонент вектора $\varepsilon\xi$.

Геометрический смысл касательного пространства: бесконечно малые векторы касательного пространства в точке M реализуются как бесконечно малые смещения MM' в основном пространстве.

Всегда будем подразумевать, что основное координатное пространство в каждой точке снабжено касательным пространством.

Среди всех таких основных пространств для физиков на первом месте, конечно, стоит четырёхмерное пространство событий, то есть четырёхмерное пространство-время x^0, x^1, x^2, x^3.

1.2 Элемент длины

Пусть в каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного координатного пространства и для всех или некоторых бесконечно малых смещений dx из точки M в бесконечно близкую точку $M'(x + dx)$ определена бесконечно малая действительная неотрицательная величина – элемент длины, то есть расстояние $dl = L(dx; x)$ от точки M до всех или только некоторых соседних бесконечно близких точек M'. Назовём подобное пространство *метрическим*, а функцию $L(dx; x)$ – *метрической функцией*. В общем случае данная функция содержит $2n$ действительных аргументов. Элемент длины может иметь свою размерность, не совпадающую с размерностью ни одной из координат. Например, координата x^1 может иметь размерность времени [сек], координаты $x^2, ..., x^n$ – размерность длина [см], а величина l ("длина") – размерность действия [эрг $\cdot$ сек].

Если в метрическом пространстве найдётся такая система координат $x^1, x^2, ..., x^n$, в которой элемент длины dl не зависит от точки пространства $dl = L(dx^i)$, то такое пространство называется *плоским метрическим пространством.*

Иногда удобно считать, что начала всех векторов касательного пространства, относящегося к точке M основного пространства, находятся в одной и той же точке, которую назовём центром. Можно представлять, что центр совпадает с точкой M основного пространства. Такое касательное пространство $\mathcal{A}_n(M)$ называется *центроаффинным касательным пространством* в точке M, при этом векторы ξ в нём являются радиус-векторами, а их компоненты (координаты) $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ совпадают с координатами точек этого центроаффинного касательного пространства.

Используя метрическую функцию, запишем уравнение специальной гиперповерхности в соответствующем центроаффинном касательном пространстве

$$L(\xi; x) = l_1 \,, \tag{1.2.1}$$

где l_1 – единица длины. Такую гиперповерхность будем называть *индикатрисой*, соответствующее уравнение (1.2.1) – уравнением индикатрисы, а удовлетворяющие уравнению (1.2.1) векторы ξ_{ind} – единичными векторами.

Геометрический смысл. Индикатриса суть геометрическое место концов единичных радиус-векторов соответствующего центроаффинного касательного пространства.

Евклидовым пространством размерности n называется плоское метрическое пространство, если найдётся такая система координат $x^1, x^2, ..., x^n$, в которой элемент длины вычисляется по формуле

$$dl = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^n)^2}\,. \tag{1.2.2}$$

Системы координат, в которых элемент длины в евклидовом пространстве имеет подобный вид, называют декартовыми прямоугольными. Таким образом, евклидовое пространство – это метрическое пространство, для которого найдётся система координат, что все индикатрисы будут сферическими гиперповерхностями одного и того же радиуса.

В римановом пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ элемент длины выражается формулой

$$dl = \sqrt{g_{ij}(x^1, x^2, ..., x^n) dx^i dx^j}\,, \tag{1.2.3}$$

где $g_{ij}(x)$ – метрический тензор. Плоское риманово пространство является евклидовым. Если представлять себе касательные пространства евклидовыми, то все индикатрисы риманова пространства суть эллипсоиды, у которых параметры зависят от точки основного пространства. Фундаментальное свойство римановых и, в частности, евклидовых пространств состоит в том, что все индикатрисы в них – это замкнутые выпуклые гладкие гиперповерхности, поэтому для бесконечно малого смещения по любому направлению определена длина.

В четырёхмерном пространстве-времени $x^0 \equiv ct, x^1, x^2, x^3$ классической СТО определена псевдоевклидова геометрия с элементом длины

$$dl = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{1.2.4}$$

Если представлять себе касательные пространства евклидовыми, то индикатрисы для такой геометрии – трехмерные двуполостные гиперболоиды, каждая односвязная область которых есть вогнутая гиперповерхность. Такое метрическое пространство принято называть пространством Минковского. Если потребовать, чтобы приращение временной координаты было всегда положительной величиной $dx^0 > 0$, то получившееся метрическое пространство будет иметь в каждой точке основного пространства индикатрису, состоящую только из одной полости двухполостного гиперболоида, расположенной в конусе будущего.

В четырёхмерном пространстве событий ОТО, которое является псевдоримановым пространством с сигнатурой $(1, -1, -1, -1)$, определен элемент длины

$$dl = \sqrt{g_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3)dx^i dx^j}\,, \tag{1.2.5}$$

с метрическим тензором $g_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, компоненты которого зависят от точки пространства, причем для каждой точки всегда найдётся такая система координат $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$, в которой в данной точке

$$(g_{i'j'}) = diag(1, -1, -1, -1) \equiv (\overset{o}{g}_{i'j'})\,. \tag{1.2.6}$$

Если представлять себе касательные пространства евклидовыми, то индикатрисы в таком пространстве являются вогнутыми гиперповерхностями, трёхмерными двуполостными гиперболоидами, параметры которых зависят от точки основного пространства. Плоское четырёхмерное псевдориманово пространство с сигнатурой $(1, -1, -1, -1)$ суть пространство Минковского.

Метрические функции, стоящие справа в формулах (1.2.2) – (1.2.5), выражаются через квадратичные формы дифференциалов координат. Это отличительное свойство именно евклидовых, псевдоевклидовых, римановых и псевдоримановых пространств, которые кратко можно называть *квадратичными геометриями*, или *квадратичными пространствами*. Отказавшись от этого свойства, получим геометрии (пространства), которые естественно назвать *неквадратичными*.

Обратим внимание на то, что не для всякого бесконечно малого смещения в пространстве Минковского, в частности, а в общем случае – для любого псевдориманово пространства, элемент длины определён, то есть соответствующий вектор бесконечно малого смещения измерим. Подставим в правую часть формулы (1.2.4) бесконечно малое смещение

$$(dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (1, 1, 1, 1) \cdot \varepsilon \,, \tag{1.2.7}$$

где $\varepsilon > 0$ – бесконечно малая действительная положительная величина. Так как элемент длины должен быть действительным неотрицательным числом, то элемент длины для такого бесконечно малого смещения для данной метрической функции не определен. В неквадратичных пространствах аналогичная ситуация также возможна.

Пусть два бесконечно малых смещения сонаправлены, то есть

$$\delta x^i = a \, dx^i \,, \tag{1.2.8}$$

где $a > 0$ – действительное положительное число. Тогда подставив эти смещения в метрические функции, стоящие справа в формулах (1.2.2) – (1.2.5), получим

$$L(\delta x^1, ..., \delta x^n; x^1, ..., x^n) = a \, L(dx^1, ..., dx^n; x^1, ..., x^n) \,, \tag{1.2.9}$$

то есть рассматриваемые метрические функции являются положительно однородными первой степени по первым n аргументам, и если смещение dx измеримо, то и смещение δx измеримо, и наоборот. Это свойство, которое мы сохраним при переходе к неквадратичным геометриям, можно сформулировать иначе: длина суммы двух сонаправленных бесконечно малых смещений есть сумма их длин. Таким образом, задание метрической функции в общем случае вырезает в пространстве первых n аргументов некий конус (или конусы) бесконечно малых смещений вместе со всеми им сонаправленными векторами, для которых элемент длины определен. В квадратичных пространствах без дополнительных ограничений на направления измеримых векторов, как и во многих неквадратичных пространствах, граница конусов измеримых векторов состоит из векторов, имеющих нулевую длину и носящих название *изотропных векторов* или *изотропных направлений*, а сама граница в таких случаях называется *изотропным конусом*. В физике изотропные направления обычно связывают с направлениями распространения электромагнитных волн и направлениями мировых линий элементарных частиц, не имеющих массы покоя и движущихся со скоростью света.

Если вектор dx измерим, то $L(dx;x)$ – расстояние от точки $M(x^1,x^2,...,x^n)$ до точки $M'(x^1+dx^1,x^2+dx^2,...,x^n+dx^n)$, поэтому при обобщении вида метрических функций следует сохранить свойство:

$$L(0,0,...0;x^1,x^2,...,x^n)=0\,, \qquad (1.2.10)$$

которое выполняется для приведённых выше метрических функций квадратичных пространств и которое означает, что индикатриса не может проходить через центр центроаффинного касательного пространства. Для неквадратичных пространств подстановка в метрическую функцию нулевого смещения может приводить к неопределенности, поэтому нулевое смещение следует понимать как смещение $(\delta x^1,...,\delta x^n)$ (1.2.8) при $a\to 0$ и условии, что для бесконечно малого смещения $(dx^1,...,dx^n)$ элемент длины определен.

Частные производные

$$p_i\equiv\frac{\partial L(\xi;x)}{\partial\xi^i} \qquad (1.2.11)$$

метрической функции по первым n аргументам образуют ковариантный тензор, называемый обобщённым импульсом. Обязательно существует хотя бы одна функциональная зависимость

$$\Phi(p_1,p_2,...,p_n;x^1,x^2,...,x^n)=0\,, \qquad (1.2.12)$$

так как частные производные (1.2.11) являются однородными функциями $\xi^1,\xi^2,...,\xi^n$ нулевой степени, то есть зависят не более, чем от $(n-1)$-й независимой величины, например, от отношений компонент вектора ξ, а число самих компонент p_i равно n. Будем предполагать всегда, что такая функциональная зависимость единственная. Эту единственную функциональную зависимость принято называть *тангенциальным уравнением индикатрисы*, а функцию $\Phi(p;x)$ в таком уравнении – функцией Финслера.

Покажем, как выглядят тангенциальные уравнения индикатрисы для метрических пространств, рассмотренных выше.

Евклидово пространство

Метрическая функция в декартовых прямоугольных координатах n-мерного евклидового пространства записана в правой части формулы (1.2.2),

$$L(dx)=\sqrt{(dx^1)^2+(dx^2)^2+...+(dx^n)^2}\,. \qquad (1.2.13)$$

Тогда компоненты обобщённого импульса определяются по формулам:

$$p_i = \frac{dx^i}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^n)^2}} \,. \tag{1.2.14}$$

Очевидно, что они функционально зависимы,

$$p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2 - 1 = 0 \,, \tag{1.2.15}$$

и эта функциональная зависимость единственная, хотя функция Финслера при этом может иметь разный вид, например:

$$\Phi(p) = p_1^2 + ... + p_n^2 - 1 \,, \qquad \bar{\Phi}(p) = \sqrt{p_1^2 + ... + p_n^2} - 1 \,. \tag{1.2.16}$$

Обе функции Финслера относятся к одной и той же евклидовой геометрии с метрической функцией (1.2.13).

Риманово пространство

Метрическая функция n-мерного риманова пространства в произвольных координатах записана в правой части формулы (1.2.3),

$$L(dx; x) = \sqrt{g_{ij}(x^1, x^2, ..., x^n) dx^i dx^j} \,. \tag{1.2.17}$$

Компоненты обобщённого импульса определяются по формулам:

$$p_i = \frac{g_{ij}(x) dx^j}{\sqrt{g_{kl}(x) dx^k dx^l}} \,. \tag{1.2.18}$$

Если $det(g_{ij}(x)) \neq 0$, то можно построить тензор с двумя верхними индексами $g^{ij}(x)$:

$$\left(g^{ij}(x)\right) = \left(g_{ij}(x)\right)^{-1} \,.$$

При этом компоненты обобщённого импульса связаны единственной функциональной зависимостью

$$g^{ij}(x) p_i p_j - 1 = 0 \,. \tag{1.2.19}$$

Функция Финслера при этом может иметь разный вид, например:

$$\Phi(p) = g^{ij}(x) p_i p_j - 1 \,, \qquad \bar{\Phi}(p) = \sqrt{g^{ij}(x) p_i p_j} - 1 \,. \tag{1.2.20}$$

Обе функции Финслера относятся к одной и той же римановой геометрии с метрической функцией (1.2.17).

Пространство Минковского

Метрическая функция в специальных координатах четырёхмерного пространства Минковского записана в правой части формулы (1.2.4),

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \equiv \sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\, dx^i dx^j}\,. \qquad (1.2.21)$$

Тогда компоненты обобщённого импульса определяются по формулам:

$$p_i = \frac{\overset{o}{g}_{ij}\, dx^j}{\sqrt{\overset{o}{g}_{kl}\, dx^k dx^l}}\,. \qquad (1.2.22)$$

Компоненты обобщённого импульса функционально зависимы,

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - 1 = 0\,, \qquad (1.2.23)$$

и эта функциональная зависимость единственная, хотя функция Финслера при этом может иметь разный вид, например:

$$\Phi(p) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - 1,\ \bar{\Phi}(p) = \sqrt{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2} - 1\,. \qquad (1.2.24)$$

Обе функции Финслера относятся к одной и той же геометрии Минковского с метрической функцией (1.2.21).

Рассмотрим метрическую функцию, лишь числовым множителем mc отличающуюся от метрической функции (1.2.21) пространства Минковского,

$$L(dx) = mc\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,, \qquad (1.2.25)$$

где m – масса покоя материальной частицы, а c – скорость света. Такая метрическая функция, взятая со знаком минус, совпадает с элементом действия для свободной релятивистской частицы массой m, то есть с действием между двумя бесконечно близкими событиями [18]. Компоненты обобщённого импульса в этом случае определяются по формулам:

$$p_i = mc\,\frac{\overset{o}{g}_{ij}\, dx^j}{\sqrt{\overset{o}{g}_{kl}\, dx^k dx^l}}\,. \qquad (1.2.26)$$

Величины p_0, p_1, p_2, p_3 зависимы,

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2c^2 = 0\,, \qquad (1.2.27)$$

и эта функциональная зависимость единственная. В качестве функции Финслера можно взять, например, одну из функций:

$$\Phi(p) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2c^2, \quad \bar{\Phi}(p) = \sqrt{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2} - mc\,. \quad (1.2.28)$$

Обе функции Финслера относятся к одной и той же геометрии с метрической функцией (1.2.25).

Псевдориманово пространство

Для псевдориманово n-мерного пространства формально справедливы все формулы (1.2.17) – (1.2.20), если метрический тензор $g_{ij}(x)$ невырожден, то есть $det(g_{ij}(x)) \neq 0$.

Метрическое пространство будем называть *финслеровым*, если метрическая функция $L(\xi^1, ..., \xi^n; x^1, ..., x^n) \geq 0$ является положительно однородной первой степени по первым n аргументам и если

$$rang\left(\frac{\partial^2 L(\xi; x)}{\partial\xi^i \partial\xi^j}\right) = n - 1\,. \quad (1.2.29)$$

Данное условие (1.2.29) гарантирует единственность функциональной зависимости между компонентами p_i обобщённого импульса.

Приведём пример метрического пространства y^1, y^2, y^3, y^4, которое не является финслеровым, так как между компонентами обобщённого импульса в этом пространстве имеются две функциональные зависимости, а не одна, то есть условие (1.2.29) не выполняется.

Пусть в пространстве y^1, y^2, y^3, y^4 определена метрическая функция $L(dy)$ следующего вида:

$$L(dy) = \sqrt{(dy^1)^2 - (dy^2)^2} + \sqrt{(dy^3)^2 - (dy^4)^2}\,.$$

Тогда компоненты обобщённого импульса определяются формулами:

$$p_1 = \frac{dy^1}{\sqrt{(dy^1)^2 - (dy^2)^2}}\,, \quad p_2 = -\frac{dy^2}{\sqrt{(dy^1)^2 - (dy^2)^2}}\,,$$

$$p_3 = \frac{dy^3}{\sqrt{(dy^3)^2 - (dy^4)^2}}\,, \quad p_4 = -\frac{dy^4}{\sqrt{(dy^3)^2 - (dy^4)^2}}$$

– и между ними имеют место две функциональные зависимости:

$$p_1^2 - p_2^2 - 1 = 0\,, \qquad p_3^2 - p_4^2 - 1 = 0\,.$$

Таким образом, метрическое пространство y^1, y^2, y^3, y^4 не есть финслерово, поскольку условие (1.2.29) не выполняется.

Важно подчеркнуть, что центроаффинное пространство $\mathcal{A}_n(M)$ в любой фиксированной точке M финслерова пространства является плоским метрическим пространством. Расстояние l_{21} между двумя точками $R_{(1)}\left(\xi^1_{(1)}, \xi^2_{(1)}, ..., \xi^n_{(1)}\right)$ и $R_{(2)}\left(\xi^1_{(2)}, \xi^2_{(2)}, ..., \xi^n_{(2)}\right)$ в нём определяется метрической функцией основного метрического пространства:

$$l_{21} = L(\xi^1_{(2)} - \xi^1_{(1)}, ..., \xi^n_{(2)} - \xi^n_{(1)}; x^1, ..., x^n)\,. \tag{1.2.30}$$

Длина $|\xi|$ вектора или радиус-вектора ξ вычисляется соответственно по формуле

$$|\xi| = L(\xi^1, ..., \xi^n; x^1, ..., x^n)\,. \tag{1.2.31}$$

Длину радиус-вектора, а значит, и расстояние между двумя точками центроаффинного пространства можно вычислить, не зная метрической функции, если в центроаффинном пространстве построена (задана) индикатриса. Вектор $\xi \neq 0$ определяет луч, выходящий из центра. Если такой луч индикатрису не пересекает, то длина данного вектора и всех ему сонаправленных не определена, то есть они не измеримы. Допустим, что вектор ξ измерим – луч, по нему построенный, пересекает индикатрису в единственной точке. Найдём точку пересечения этого луча с индикатрисой и построим радиус-вектор $\xi_{(ind)}$, который имеет смысл вектора единичной длины в данном направлении. Вектор $\xi_{(ind)}$ сонаправлен вектору ξ. Следовательно, существует такое действительное неотрицательное число l, что

$$\xi^i = l \cdot \xi^i_{(ind)}\,. \tag{1.2.32}$$

Таким образом, длина вектора ξ определяется геометрией основного пространства и выражается формулой

$$|\xi|_{fins} = l\,. \tag{1.2.33}$$

Если формально считать пространство $\mathcal{A}_n(M)$ евклидовым, а координаты $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ – декартовыми прямоугольными, то из формулы (1.2.32) следует,

$$|\xi|_{fins} = \frac{|\xi|_{ev}}{|\xi_{ind}|_{ev}}\,, \tag{1.2.34}$$

где $\xi_{(ind)}$ – единичный вектор, сонаправленный вектору ξ, а $|\xi|_{ev}$, $|\xi_{(ind)}|_{ev}$ – длины векторов ξ, $\xi_{(ind)}$ в евклидовом смысле.

Важно подчеркнуть, что здесь евклидова метрика используется как вспомогательное средство интерпретации финслеровой геометрии и её можно заметить любой другой классической метрикой.

Итак, римановы и псевдоримановы пространства с метрическими тензорами, удовлетворяющими условию

$$det\,(g_{ij}) \neq 0\,,$$

являются финслеровыми пространствами.

Приведём несколько примеров финслеровых пространств, которые не являются квадратичными, и выпишем метрические функции этих пространств.

В четырёхмерном пространстве Галилея (t, x, y, z), где t – время, а x, y, z – пространственные декартовы прямоугольные координаты, с материальной частицей массы m в потенциальном поле $U(t, x, y, z)$ можно определить следующую метрическую функцию:

$$L(dt, dx, dy, dz; x, y, z) = mc^2 dt - m \cdot \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{2dt} + U dt\,. \quad (1.2.35)$$

Данная функция является положительно однородной первой степени по первым четырём аргументам. Она задаёт в пространстве t, x, y, z неквадратичную геометрию. Так как потенциал $U(t, x, y, z)$ может в общем случае принимать отрицательные значения, конус бесконечно малых смещений, для которых элемент длины определен, лучше задать двумя неравенствами:

$$mc^2(dt)^2 - m \cdot \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{2} > 0\,, \quad (1.2.36)$$

$$(mc^2 + U)(dt)^2 - m \cdot \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{2} > 0\,, \quad (1.2.37)$$

что позволяет гарантированно "включать" и "выключать" потенциал $U(t, x, y, z)$. Такое финслерово пространство соответствует классической механике одной нерелятивистской частицы: скорость частицы всегда много меньше скорости света, а потенциальная энергия много меньше внутренней энергии mc^2. Из этих условий классической нерелятивистской механики автоматически следует выполнение неравенств (1.2.36), (1.2.37).

Остановимся более подробно на связи финслеровой геометрии с метрической функцией (1.2.35) и лагранжевым формализмом для описания движения нерелятивистской частицы в потенциальном поле [17]. Будем считать, что $dt > 0$, вынесем dt в левой части формулы (1.2.35) из метрической функции, а в правой части за скобки и сократим левую и правую части на dt, в результате получим:

$$L(1, v_x, v_y, v_z; x, y, z) = mc^2 - m \cdot \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} + U\,, \tag{1.2.38}$$

то есть связь между функцией Лагранжа $L'(v_x, v_y, v_z; x, y, z)$ и метрической функцией L (1.2.35) определяется формулой

$$L'(v_x, v_y, v_z; x, y, z) = mc^2 - L(1, v_x, v_y, v_z; x, y, z)\,. \tag{1.2.39}$$

Функцию Лагранжа можно умножить на любое действительное число (в данном случае это -1) и прибавить полную производную по времени любой функции времени и координат (в данном случае это $mc^2 \cdot t$). При этом уравнения движения остаются теми же, поэтому в качестве функции Лагранжа при описании движения нерелятивистской частицы в потенциальном поле можно использовать метрическую функцию L (1.2.35) со специально выбранными аргументами, а именно, $L(1, v_x, v_y, v_z; x, y, z)$.

В четырёхмерном пространстве событий в x^0, x^1, x^2, x^3 с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, который, как считается в ОТО, описывает гравитационное поле, и электромагнитным полем с 4-потенциалом $A_i(x)$, а также с частицей (материальной точкой) массой m и зарядом e, определена метрическая функция вида

$$L(dx; x) = cm\sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j} + \frac{e}{c}A_i dx^i + Mc\,dx^0\,, \tag{1.2.40}$$

где $M > 0$ достаточно большая постоянная. Такая метрическая функция является положительно однородной первой степени по первым четырём аргументам. Конус измеримых бесконечно малых смещений при достаточно большом значении постоянной $M > 0$ определяется неравенствами:

$$g_{ij}dx^i dx^j > 0\,, \qquad dx^0 > 0\,. \tag{1.2.41}$$

Тем самым такое четырёхмерное пространство событий является неквадратичным финслеровым пространством.

Метрическая функция Бервальда-Моора

$$L(dx^1, dx^2, dx^3, dx^4) = \sqrt[4]{dx^1 dx^2 dx^3 dx^4} \tag{1.2.42}$$

определяет в четырёхмерном пространстве x^1, x^2, x^3, x^4 плоскую финслерову геометрию, не являющуюся квадратичной. Будем обозначать такую геометрию H_4. Измеримые бесконечно малые смещения задаются неравенством

$$dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 > 0 \tag{1.2.43}$$

и заполняют 8 несвязанных конусов. Индикатриса,

$$\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4 = 1 \tag{1.2.44}$$

состоит из 8-ми несвязанных полостей гиперболоида 4-го порядка. Если конус измеримых направлений определить неравенствами

$$dx^1 > 0\,, \qquad dx^2 > 0\,, \qquad dx^3 > 0\,, \qquad dx^4 > 0\,, \tag{1.2.45}$$

то мы получим уже другую плоскую финслерову геометрию с индикатрисой, состоящей из одной полости гиперболоида 4-го порядка, расположенной в конусе будущего.

Говоря о гиперболоиде 4-го порядка или о какой-то другой гиперповерхности в центроаффинном пространстве, мы будем использовать терминологию евклидовых пространств.

Все финслеровы пространства делятся на два класса:

1) основное координатное пространство не содержит ни в какой системе координат ни одной координаты, которую можно было бы назвать физическим временем, или аналогом физического времени; обычно такие пространства имеют невогнутые индикатрисы;

2) найдется такая система координат и в ней выделенная координата, которая обладает качествами физического времени; обычно такие пространства имеют вогнутые индикатрисы или хотя бы части индикатрис являются вогнутыми гиперповерхностями.

Наглядным представителем первого класса является евклидова геометрия, а второго – псевдоевклидова геометрия.

1.3 Классическая механика

Каждому понятию классической механики соответствует некоторое понятие финслеровой геометрии. С одной стороны, эти понятия схожи, а с другой, – между такими понятиями существуют более или менее серьёзные различия. Обычно таким парным понятиям в классической механике и финслеровой геометрии присваивают разные термины, например, ***действие*** *между двумя событиями* в классической механике и ***длина*** *отрезка кривой* в финслеровой геометрии. Можно говорить, что каждое финслерово пространство наделено классической механикой, так как в каждом финслеровом пространстве определены и работают все понятия и методы классической механики в терминах финслеровой геометрии.

Пусть в основном координатном финслеровом пространстве задана кривая

$$x^i = x^i(\tau)\,, \qquad \tau \in [\tau_1, \tau_2]\,, \tag{1.3.1}$$

где τ – монотонно возрастающий параметр вдоль кривой, то есть $d\tau > 0$. Тогда длина отрезка кривой между точками $x^i(\tau_1)$ и $x^i(\tau_2)$ вычисляется следующим образом:

$$l_{21} = \int\limits_{M_1}^{M_2} L(dx^1, ..., dx^n; x^1, ..., x^n) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} L(\dot{x}^1, ..., \dot{x}^n; x^1, ..., x^n) d\tau\,, \tag{1.3.2}$$

если все смещения dx вдоль кривой измеримы, и где

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau} \tag{1.3.3}$$

– компоненты вектора, касательного к кривой, или компоненты вектора скорости по параметру τ.

Если основное координатное пространство описывает физическую систему, то кривая (1.3.1) суть мировая линия, а величина l_{21} (длина отрезка мировой линии) может рассматриваться с точностью до постоянного множителя и аддитивной добавки под интегралом вида $df(x^1, x^2, ..., x^n)$, где f – произвольная функция координат, как действие. Кривые, имеющие экстремальную длину при фиксированных начальной и конечной точках, удовлетворяют системе уравнений Лагранжа-Эйлера:

$$\delta l_{12} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{1.3.4}$$

– и называются *экстремалями*. Экстремали могут быть и траекториями движения, и мировыми линиями в n-мерном пространстве событий, и геодезическими. Под геодезической линией мы понимаем кривую, соединяющую две фиксированные точки и имеющую минимальную длину из всех возможных кривых, соединяющих те же точки. Геодезические, конечно, являются экстремалями, но обратное верно не всегда. Экстремаль может иметь максимальную длину среди множества кривых, соединяющих две точки пространства. В несколько расширенном смысле будем иногда называть экстремали "геодезическими". Если пространство содержит временну́ю переменную, параметр τ вдоль кривой (мировой линии) естественно назвать параметром эволюции. В качестве параметра эволюции в этом случае можно выбрать и саму временну́ю координату, но это приводит к нековариантным записям уравнений, формул, соотношений...

Итак, мировая линия физической системы есть экстремаль основного финслерова пространства. Принципу наименьшего действия, или стационарного действия классической механики соответствует в финслеровой геометрии принцип экстремальности отрезка кривой.

Введем обозначения

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,, \qquad F_i = \frac{\partial L}{\partial x^i}\,. \tag{1.3.5}$$

Заметим, что величины p_i мы определяли (1.2.11) как частные производные функции $L(dx;x)$ по первым n аргументам dx^i,

$$p_i = \frac{\partial L(dx;x)}{\partial (dx^i)}\,, \tag{1.3.6}$$

а в (1.3.5) как частные производные функции $L(\dot{x};x)$ по первым n аргументам $\dot{x}^i$. Это не приводит ни к ошибкам, ни к путанице, поскольку метрическая функция является положительно однородной первой степени по первым n аргументам и параметр эволюции, как мы условились выше, монотонно возрастает, то есть $d\tau > 0$. В новых обозначениях уравнения Лагранжа-Эйлера принимают ньютоновский вид:

$$\frac{d}{d\tau}\,p_i = F_i \tag{1.3.7}$$

– то есть величины p_i естественно называть компонентами обобщённого импульса, что мы и делали выше, а F_i – компонентами обобщённой силы. Из формул (1.3.4) и (1.3.5) следует: если метрическая функция и параметр эволюции являются скалярами, то обобщённый импульс p и обобщённая сила F – ковариантные тензоры, а уравнения движения Лагранжа-Эйлера (1.3.4) и уравнения движения Ньютона (1.3.7) имеют явную ковариантную запись.

Так как метрическая функция является однородной первой степени по первым n аргументам, то

$$\frac{\partial L(dx;x)}{\partial (dx^i)}\,dx^i = L(dx;x) \qquad \Rightarrow \qquad L(dx;x) = p_i \cdot dx^i\,, \tag{1.3.8}$$

или

$$\frac{\partial L(\dot{x};x)}{\partial \dot{x}^i}\,\dot{x}^i = L(\dot{x};x) \quad \Rightarrow \quad L(\dot{x}^1,...,\dot{x}^n;x^1,...,x^n) = p_i \cdot \dot{x}^i\,; \tag{1.3.9}$$

а во-вторых, компоненты обобщённого импульса – однородные функции нулевой степени по первым n аргументам, то есть n функций зависит от

$(n-1)$-го или меньше независимых комплексов, а значит, как уже отмечалось выше, между ними существует хотя бы одна функциональная зависимость. Из требования (1.2.29) следует, что такая зависимость единственная; её принято записывать следующим образом:

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n; x^1, x^2, ..., x^n) = 0\,. \tag{1.3.10}$$

В финслеровой геометрии такая зависимость называется тангенциальным уравнением индикатрисы, а функцию $\Phi(p;x)$ принято называть функцией Финслера. Зависимость (1.3.10) имеет тот же смысл, что связь между обобщённой энергией (функцией Гамильтона) и компонентами обобщённого импульса в классической механике. Если известна функция $\Phi(p;x)$, но неизвестна соответствующая ей метрическая функция, то метрическую функцию $L(\xi^1, ..., \xi^n; x^1, ..., x^n)$ можно попытаться найти как решение дифференциального уравнения в частных производных

$$\Phi\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^1}, ..., \frac{\partial L}{\partial \xi^n}; x^1, x^2, ..., x^n\right) = 0\,. \tag{1.3.11}$$

Оказывается, что метрическую функцию можно всегда однозначно восстановить [1] по известной функции Финслера, разрешая систему неявных функциональных уравнений, не прибегая к дифференциальному уравнению в частных производных (1.3.11).

Рассмотрим длину l_{12} некоторой экстремали как функцию точки верхнего предела интегрирования при фиксированной нижней точке. Обозначим эту величину $S(x^1, ..., x^n)$ – в классической механике её принято называть действием как функцией координат. Обобщённые импульсы, отнесённые к текущей точке на экстремали, также будем считать функциями точки основного пространства $p_i(x^1, ..., x^n)$. Из формул (1.3.2) и (1.3.8) следует, что

$$S(x^1, ..., x^n) = \int\limits_{M_1}^{M(x^1,...,x^n)} p_i dx^i\,. \tag{1.3.12}$$

Траектории движения материальных частиц и траектории эволюции физической системы с конечным числом степеней свободы в классической механике обладают замечательным свойством [17]:

$$p_i(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x^i}\,. \tag{1.3.13}$$

В финслеровой геометрии это же свойство формулируется как принадлежность экстремалей материальных частиц и физических систем с конечным числом степеней свободы некоторой *нормальной конгруэнции экстремалей* [1]. Подставим выражения (1.3.13) в тангенциальное уравнение индикатрисы (1.3.10), получим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно одной неизвестной функции $S(x)$:

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}, \frac{\partial S}{\partial x^i}, ..., \frac{\partial S}{\partial x^i}; x^1, x^2, ..., x^n\right) = 0\,, \tag{1.3.14}$$

решением которого является функция $S(x^1, ..., x^n)$ (действие как функция координат) и которое в классической механике называется уравнением Гамильтона-Якоби.

В финслеровой геометрии всякая *нормальная конгруэнция экстремалей* определяется функцией $S(x)$, которая должна удовлетворять нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных (1.3.14) [1].

Рассмотрим четырёхмерное финслерово пространство, которое соответствует одной нерелятивистской частице, движущейся в потенциальном поле $U(x, y, z)$, не зависящим от времени, с метрической функцией (1.2.35). Для удобства будем использовать двойные обозначения t, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$, которые позволяют обозначать через p_t компоненту импульса, соответствующую координате t (времени), а через $p_1 \equiv p_x$, $p_2 \equiv p_y$, $p_3 \equiv p_z$, компоненты импульса, соответствующие координатам x^1, x^2, x^3. Тогда, используя формулу (1.3.6), имеем:

$$p_t = mc^2 + m \cdot \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{2(dt)^2} + U(x, y, z)\,, \tag{1.3.15}$$

$$p_\alpha = -m \cdot \frac{dx^\alpha}{dt}\,. \tag{1.3.16}$$

Компонента импульса p_t – это полная энергия частицы в потенциальном поле вместе с её внутренней энергией mc^2. Компоненты импульса p_α отличаются от принятых в классической механике лишь знаком.

Выберем в качестве параметра эволюции время. Тогда функцию Лагранжа можно построить из метрической функции $L(dt, dx, dy, dz; x, y, z)$, но взяв её с другими первыми четырьмя аргументами

$$L(1, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; x, y, z) = mc^2 - m \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2}{2} + U(x, y, z)\,. \tag{1.3.17}$$

В этом случае уравнения движения Лагранжа классической механики запишутся следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\,p_\alpha = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\,, \tag{1.3.18}$$

или

$$m\ddot{x}^\alpha = -\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\,. \tag{1.3.19}$$

Таким образом, здесь мы имеем обычные уравнения движения Ньютона для частицы массой m в потенциальном поле $U(x, y, z)$.

Исключая из четырёх соотношений (1.3.15) и (1.3.16) компоненты скорости $\dot{x}^\alpha$, приходим к тангенциальному уравнению индикатрисы:

$$p_t - \left\{ mc^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + U \right\} = 0\,. \tag{1.3.20}$$

Функцию, стоящую в фигурных скобках, принято называть в классической механике функцией Гамильтона и обозначать

$$H(p_1, p_2, p_3; x^1, x^2, x^3) = mc^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + U\,. \tag{1.3.21}$$

Тогда тангенциальное уравнение индикатрисы запишется следующим образом:

$$p_t - H(p_1, p_2, p_3; x^1, x^2, x^3) = 0\,. \tag{1.3.22}$$

Для данной физической системы уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \left\{ mc^2 + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 \right] + U \right\} = 0\,. \tag{1.3.23}$$

Так как тангенциальное уравнение (1.3.20) не зависит от времени явно, то не зависит от времени и гамильтониан (1.3.21). Система консервативна, полная энергия сохраняется во времени, то есть $p_t = E = const$; поэтому зависимость действия от времени сводится к слагаемому $(E \cdot t)$:

$$S(t, x, y, z) = S_0(x, y, z) + E \cdot t\,. \tag{1.3.24}$$

Подставив это выражение для действия в (1.3.23), получим для укороченного действия $S_0(x, y, z)$ уравнение Гамильтона-Якоби в следующем виде:

$$mc^2 + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2 \right] + U(x, y, z) = E\,. \tag{1.3.25}$$

Заметим, что формулы (1.3.23) и (1.3.24) отличаются от общепринятых [17] знаком между двумя аддитивными членами, это связано с тем, что в данном геометрическом подходе

$$\frac{\partial S}{\partial t} = E > 0\,, \tag{1.3.26}$$

где $E > 0$ – полная энергия системы.

1.4 Канонические уравнения и скобки Пуассона

Для определения финслеровой геометрии в основном координатном пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ надо задать либо метрическую функцию $L(dx; x)$, либо тангенциальное уравнение индикатрисы:

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n; x^1, x^2, ..., x^n) = 0\,. \tag{1.4.1}$$

В этой геометрии определим параметрически кривую

$$x^i = x^i(\tau)\,, \qquad \tau \in [\tau_1, \tau_2]\,, \tag{1.4.2}$$

где τ – монотонно возрастающий параметр вдоль кривой. Такая кривая только тогда будет экстремалью (или мировой линией материального объекта, если в пространстве существует время), когда функциональная зависимость, зафиксированная в тангенциальном уравнении индикатрисы, не будет нарушаться, то есть

$$\frac{d}{d\tau}\,\Phi(p_1, p_2, ..., p_n; x^1, x^2, ..., x^n) = 0\,, \tag{1.4.3}$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\,\dot{p}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\,\dot{x}^i = 0\,. \tag{1.4.4}$$

Если

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\cdot \lambda(p; x)\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\cdot \lambda(p; x)\,, \tag{1.4.5}$$

где $\lambda(p; x) \neq 0, \pm\infty$ – произвольная функция p и x, то вдоль таких кривых выполняется условие (1.4.3), и всегда выполняется соотношение (1.4.1), если этому соотношению удовлетворяют начальные значения $x^i(\tau_1)$, $p_i(\tau_1)$.

Уравнения (1.4.5) можно получить математически строго, если задачу на экстремум функционала (1.3.2) сформулировать несколько иначе. Так как метрическая функция является однородной первой степени по первым n аргументам, то

$$L(\dot{x}; x) = p_i \dot{x}^i\,, \tag{1.4.6}$$

поэтому функционал (1.3.2) принимает вид

$$l_{12} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} p_i \dot{x}^i\, d\tau \tag{1.4.7}$$

при условии выполнения (1.4.1). То есть имеет место задача на условный экстремум функционала, для решения которой следует составить новый функционал [6], [13]

$$\check{l}_{12} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left[p_i \dot{x}^i - \check{\lambda}(p;x)\Phi(p;x) \right] \, d\tau \,, \tag{1.4.8}$$

и именно для него решать задачу на экстремум для $2n$ неизвестных функций $x^i(\tau)$ и $p_i(\tau)$ при нулевых вариациях кривой (1.4.2) на концах отрезка, то есть

$$\delta x^i(\tau)\big|_{\tau=\tau_1} = 0 \,, \qquad \delta x^i(\tau)\big|_{\tau=\tau_2} = 0 \,, \tag{1.4.9}$$

причём функцию $\check{\lambda}(p;x)$ следует подобрать так, чтобы имела место функциональная зависимость (1.4.1). Из требования экстремальности функционала (1.4.8)

$$\delta \check{l}_{12} = 0$$

с учётом того, что

$$\delta \check{l}_{12} = p_i \delta x^i \Bigg|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left[-\dot{p}_i - \frac{\partial(\check{\lambda}\Phi)}{\partial x^i} \right] \delta x^i \, d\tau + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\dot{x}^i - \frac{\partial(\check{\lambda}\Phi)}{\partial p_i} \right] \delta p_i \, d\tau \,,$$

и с учётом условий (1.4.9), получаем уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial(\check{\lambda}\Phi)}{\partial p_i} \,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial(\check{\lambda}\Phi)}{\partial x^i} \,. \tag{1.4.10}$$

Выберем $\check{\lambda} \equiv \lambda$, тогда полученные уравнения совпадают с уравнениями (1.4.5), если выполняется (1.4.1). Для выполнения функциональной зависимости (1.4.1) необходимо и достаточно, чтобы эта функциональная зависимость имела место для начальных значений $x^i(\tau_1)$, $p_i(\tau_1)$, то есть только в начальной точке экстремали.

Итак, доказано, что уравнения (1.4.5) определяют экстремали в финслеровом пространстве. Покажем, что произвол в выборе функции $\lambda(p;x)$ связан именно с перепараметризацией экстремалей. Предположим, что найдено решение $x^i(\tau')$, $p_i(\tau')$ системы уравнений (1.4.5) с $\lambda \equiv 1$, или системы уравнений (1.4.10) с $\check{\lambda} \equiv 1$ и неким параметром эволюции τ', то есть найдено решение следующей системы уравнений:

$$\frac{dx^i}{d\tau'} = \frac{\partial\Phi}{\partial p_i} \,, \qquad \frac{dp_i}{d\tau'} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \,. \tag{1.4.11}$$

Введём новый параметр эволюции

$$\tau = \int\limits_{\tau'_1}^{\tau'} \frac{1}{\lambda\left(p(\tau');x(\tau')\right)} \, d\tau' \,, \tag{1.4.12}$$

тогда
$$d\tau' = \lambda(p;x)\,d\tau\,, \tag{1.4.13}$$
где $\lambda(p;x) \neq 0, \pm\infty$ – произвольная функция p и x. Перейдём к этому новому параметру эволюции в уравнениях (1.4.11), получим систему (1.4.5).

Уравнения (1.4.5) в классической механике называются *каноническими уравнениями* движения [17]. Можно утверждать, что функция Финслера $\Phi(p;x)$ играет ту же (аналогичную) роль в финслеровой геометрии, что и функция Гамильтона в классической механике. Если заменить $\Phi \to H$ и положить $\lambda(p;x) \equiv 1$, то уравнения (1.4.5) совпадают по виду с уравнениями Гамильтона классической механики, но в финслеровом подходе к классической механике время является одной из координат, что позволяет ковариантную запись уравнений движения в пространстве событий.

В классической механике, если известна функция Лагранжа, функция Гамильтона получается однозначно. В финслеровой геометрии при заданной метрической функции тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать во многих эквивалентных формах, что приводит к разным функциям Финслера. При этом экстремали останутся теми же, изменится лишь их параметризация, как если бы произошла замена параметра эволюции $\tau \to \tau'(\tau)$, вообще говоря, своя для каждой мировой линии. Этот произвол аналогичен выбору функции $\lambda(p;x) \neq 0$ в канонических уравнениях (1.4.5), что, как было показано выше, также можно рассматривать как перепараметризацию экстремалей. И всё же не всякая запись тангенциального уравнения индикатрисы разрешена в финслеровой геометрии. Например, казалось бы, можно возвести функцию Финслера в квадрат $\Phi \to \Phi^2$, тогда тангенциальное уравнение индикатрисы перейдёт в эквивалентное уравнение, но канонические уравнения с учётом (1.4.5) потеряют смысл. Чтобы исключить такую ситуацию, приходится ограничивать выбор функции Финслера, например, с помощью требования: тангенциальное уравнение индикатрисы в геометрии Финслера должно записываться таким образом, чтобы частные производные
$$\frac{\partial\Phi(p;x)}{\partial p_i}$$
не обращались в нуль одновременно.

Если известно действие $S(x)$ как функция координат, то с учётом (1.3.13) нахождение экстремалей сводится к решению всего n дифференциальных уравнений первого порядка:
$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\right|_{p_j=\frac{\partial S}{\partial x^j}} \cdot \lambda(x)\,, \tag{1.4.14}$$

где $\lambda(x) \neq 0, \pm\infty$ – некоторая функция. Если же исключить из этих уравнений параметр эволюции, то останется система из $(n-1)$-го дифференциального уравнения первого порядка. Для этого следует разделить все уравнения (1.4.14) с индексами $i = 1, 2, ..., n-1$ на первое с индексом $i = 0$, если x^0 – временная или аналогичная временной координата, и учесть, что

$$\frac{\dot{x}^\alpha}{\dot{x}^0} = \frac{dx^\alpha}{dx^0}, \qquad \alpha = 1, 2, ..., n-1. \tag{1.4.15}$$

Функция $\lambda(x)$ исчезает из системы уравнений одновременно с параметром эволюции:

$$\frac{dx^\alpha}{dx^0} = \left. \frac{\dfrac{\partial\Phi}{dp_\alpha}}{\dfrac{\partial\Phi}{dp_0}} \right|_{p_j = \frac{\partial S}{\partial x^j}} . \tag{1.4.16}$$

Пусть $f(p;x)$, $g(p;x)$, $h(p;x)$ – некоторые функции обобщённых импульсов p и обобщённых координат x. Найдём, как изменяются такие величины вдоль экстремалей, то есть найдем их производную по параметру эволюции:

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\,\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\dot{x}^i . \tag{1.4.17}$$

Подставляя $\dot{p}_i$ и $\dot{x}^i$ из канонических уравнений (1.4.5), получим

$$\frac{df}{d\tau} = \left(-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial\Phi}{\partial p_i} \right) \lambda(p;x) . \tag{1.4.18}$$

Скобками Пуассона $\{g, f\}$ произвольных функций $f(p;x)$, $g(p;x)$ называется выражение

$$\{g, f\} = \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} . \tag{1.4.19}$$

С помощью скобок Пуассона производную $\dfrac{df}{d\tau}$ величины $f(p;x)$ по параметру эволюции τ можно записать следующим образом:

$$\frac{df}{d\tau} = \{\Phi, f\} \cdot \lambda(p;x) . \tag{1.4.20}$$

Функции координат и компонент обобщённого импульса, которые остаются постоянными при движении физической системы, называются *интегралами движения*.

Для того чтобы величина f была интегралом движения, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\{\Phi, f\} = 0\,. \tag{1.4.21}$$

Это следует из формулы (1.4.20), так как $\lambda(p;x) \neq 0$.

Очевидно, что

$$\{f, f\} = 0\,,$$

в частности,

$$\{\Phi, \Phi\} = 0\,,$$

то есть функция Финслера всегда является интегралом движения.

Перечислим ряд простейших свойств скобок Пуассона, которые следуют непосредственно из определения.

Если переставить функции в скобках Пуассона, то скобки меняют знак:

$$\{g, f\} = -\{f, g\}\,. \tag{1.4.22}$$

Если одна из величин в скобках Пуассона – число, например, a, то скобка равна нулю:

$$\{a, f\} = 0\,. \tag{1.4.23}$$

Скобки Пуассона обладают линейным свойством по каждому из аргументов; например, для первого аргумента имеем

$$\{ag + bh, f\} = a\{g, f\} + b\{h, f\}\,, \tag{1.4.24}$$

где a и b – числа.

Если один из аргументов скобок Пуассона является произведением двух функций, то имеет место следующая формула

$$\{hg, f\} = h\{g, f\} + \{h, f\}g\,. \tag{1.4.25}$$

Если одна из функций в скобках Пуассона совпадает с координатой или компонентой обобщённого импульса, то скобки сводятся к частной производной соответственно по импульсу или координате:

$$\{f, x^i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\,, \qquad \{p_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,. \tag{1.4.26}$$

Важное значение имеют скобки Пуассона, когда оба аргумента являются координатой или компонентой обобщённого импульса:

$$\{x^i, x^j\} = 0\,, \qquad \{p_i, p_j\} = 0\,, \qquad \{p_i, x^j\} = \delta_i^j\,. \tag{1.4.27}$$

Для скобок Пуассона справедливо тождество Якоби:

$$\{h,\{g,f\}\}+\{g,\{f,h\}\}+\{f,\{h,g\}\}=0\,. \tag{1.4.28}$$

Пусть функции $f(p;x;u,...,v)$ и $g(p;x;u,...,v)$ зависят ещё и от некоторого числа независимых параметров $u,...,v$, ни один из которых, конечно, не является параметром эволюции. Обозначим через z любой аргумент этих функций: p_i, x^j или $u,...,v$. Тогда справедлива следующая формула:

$$\frac{\partial}{\partial z}\{g,f\}=\left\{\frac{\partial g}{\partial z},f\right\}+\left\{g,\frac{\partial f}{\partial z}\right\}\,. \tag{1.4.29}$$

Вычислим производную от $\{g,f\}$ по параметру эволюции. В этом случае формула (1.4.29) не применима, но согласно (1.4.20) имеем

$$\frac{d}{d\tau}\{g,f\}=\{\Phi,\{g,f\}\}\lambda\,. \tag{1.4.30}$$

Воспользуемся тождеством Якоби, тогда

$$\frac{d}{d\tau}\{g,f\}=\{\{\Phi,g\},f\}\lambda+\{g,\{\Phi,f\}\}\lambda\,, \tag{1.4.31}$$

или

$$\frac{d}{d\tau}\{g,f\}=\left\{\frac{1}{\lambda}\frac{dg}{d\tau},\,f\right\}\lambda+\left\{g\,,\frac{1}{\lambda}\frac{df}{d\tau}\right\}\lambda\,. \tag{1.4.32}$$

Из формулы (1.4.32) следует ***теорема Пуассона*:** если $f(p;x)$ и $g(p;x)$ – два интеграла движения, то и их скобки Пуассона также являются интегралом движения, то есть

$$\{g,f\}=const \tag{1.4.33}$$

вдоль мировой линии.

Скобки Пуассона от двух интегралов движения могут дать новый (функционально независимый от первых) интеграл движения, но далеко не всегда. Число функционально независимых интегралов движения не может быть больше $(2n-1)$. Если бы число функционально независимых интегралов движения оказалось равным $2n$, то, приравняв их к постоянным и разрешив относительно $p_1,p_2,...,p_n$, $x^1,x^2,...,x^n$, мы получили бы тривиальный результат: $p_i=const$, $x^j=const$; то есть любая функция $f(p;x)$ являлась бы интегралом движения и время в том числе.

1.5 Канонические преобразования

В основном координатном пространстве можно переходить от одних координат к другим (1.1.1), и при этом мы остаёмся в том же самом пространстве с той же самой финслеровой геометрией. Физическая система, которая описывается этим координатным пространством с метрической функцией в нём, также не изменяется. При этом уравнениями для нахождения экстремалей являются уравнения Эйлера-Лагранжа (1.3.4) или канонические уравнения (1.4.5). В последние координаты и импульсы входят формально равноправно, хотя и разделяются на два подмножества. Поэтому координату x^i и компоненту p_i обобщённого импульса принято называть *канонически сопряжёнными величинами.* При решении системы канонических уравнений (1.4.5) можно вместо неизвестных функций $x^i(\tau)$ и $p_j(\tau)$ ввести другие неизвестные функции

$$X^i = X^i(x^1, ..., x^n; p_1, ..., p_n), \quad P_i = P_i(x^1, ..., x^n; p_1, ..., p_n), \tag{1.5.1}$$

но при этом совсем не обязательно, что $X^i(\tau)$ и $P_j(\tau)$ будут обобщёнными координатами и обобщёнными импульсами какого-либо финслерова пространства, пусть даже другого. В то же время наша физическая система не изменилась. Если всё же $X^i(\tau)$ и $P_j(\tau)$ будут обобщёнными координатами и обобщёнными импульсами какого-то финслерова пространства, то экстремали будут решениями системы канонических уравнений с заменой

$$x^i,\, p_i,\, \Phi(p;x),\, \lambda(p;x) \qquad \to \qquad X^i,\, P_i,\, \bar\Phi(P;X),\, \bar\lambda(X;P)\,. \tag{1.5.2}$$

Итак, если мы не хотим выходить за рамки множества финслеровых пространств, необходимо (но не достаточно) ограничиться такими преобразованиями (1.5.1), которые переводят систему канонических уравнений в систему канонических уравнений. Естественно такие преобразования назвать *каноническими.*

В разделе 1.4 показано, как получаются канонические уравнения из вариационного принципа. Используя произвол в выборе параметра эволюции, то есть произвол в выборе $\Phi(p;x)$, $\lambda(p;x)$ и $\bar\Phi(P;X)$, $\bar\lambda(X;P)$, всегда можно сделать так, что параметры эволюции в системе канонических уравнений для x^i, p_i и в системе канонических уравнений для X^i, P_i совпадут. Тогда канонические уравнения для X^i, P_i могут быть получены из вариационного принципа для функционала

$$\bar l_{12} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left[P_i \dot X^i - \bar\lambda(P;X)\bar\Phi(P;X)\right]\, d\tau \tag{1.5.3}$$

с тем же самым параметром эволюции, что и в функционале (1.4.8). Если подынтегральные выражения функционалов (1.4.8) и (1.5.3) отличаются на полную производную от некоторой функции W, то полученные уравнения будут иметь один и тот же смысл, то есть будут описывать одну и ту же физическую систему. Так как интегрируемые функции не содержат явно параметра τ, то это условие эквивалентности физических систем следует записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\lambda}(P;X)\bar{\Phi}(P;X) &= \lambda(p;x)\Phi(p;x) + const\,, \\ dW(x;X) &= p_i dx^i - P_i dX^i\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.5.4}$$

В качестве функции $\breve{\lambda}(p;x)$ в формуле (1.4.8) здесь фигурирует функция $\lambda(p;x)$. Включая функции λ и $\bar{\lambda}$ в соответствующие функции Финслера и учитывая, что тангенциальные уравнения индикатрисы выполняются вдоль экстремалей, то есть $\Phi(p;x) = 0$ и $\bar{\Phi}(P;X) = 0$, а значит, в первом уравнении постоянная должна быть равна нулю, получим:

$$\bar{\Phi}(P;X) = \Phi(p;x)\,, \tag{1.5.5}$$

$$dW(x;X) = p_i dx^i - P_i dX^i\,. \tag{1.5.6}$$

Из последнего соотношения следует:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial x^i}\,, \qquad P_i = -\frac{\partial W}{\partial X^i}\,. \tag{1.5.7}$$

Таким образом, каноническое преобразование порождается некой функцией $W(x;X)$, называемой *производящей функцией преобразования.*

Существует ещё три вида производящих функций. Для того чтобы их получить, надо прибавить к левой и правой частям соотношения (1.5.6) соответствующий полный дифференциал. Например, прибавляя $d(P_i X^i)$, получим

$$d\tilde{W}(x;P) = p_i dx^i + X^i dP_i\,, \tag{1.5.8}$$

тогда

$$p_i = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x^i}\,, \qquad X^i = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial P_i}\,. \tag{1.5.9}$$

Пример. Пусть x^1, x^2, x^3 – трёхмерное евклидово пространство, функцию Финслера для него можно записать в виде

$$\Phi(p; x) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1\,. \tag{1.5.10}$$

В качестве производящей функции канонического преобразования выберем

$$\tilde{W} = w_0 \left(x^1 P_1^3 + x^2 P_2^3 + x^3 P_3^3 \right)\,, \tag{1.5.11}$$

где w_0 – действительное положительное число. Тогда в соответствии с (1.5.9) имеем

$$\begin{gathered} p_i = w_0 P_i^3\,, \quad X^j = 3 w_0 x^j P_{j_-}^2\,, \\ \bar{\Phi}(P; X) = w_0^2\,(P_1^6 + P_2^6 + P_3^6) - 1\,, \end{gathered} \tag{1.5.12}$$

поэтому пространство X^1, X^2, X^3 является плоским финслеровым пространством с элементом длины

$$dl = \frac{1}{\sqrt[3]{w_0}} \left[(dX^1)^{6/5} + (dX^2)^{6/5} + (dX^3)^{6/5} \right]^{\frac{5}{6}}\,. \tag{1.5.13}$$

Таким образом, каноническое преобразование (1.5.12) является не только переходом к новым канонически сопряжённым переменным $X\,, P$, но и переходом от евклидовой к новой неквадратичной геометрии с элементом длины (1.5.13).

Канонические преобразования, оставляя канонические уравнения неизменными, далеко не всегда могут рассматриваться как переход от одного финслерова пространства к другому (или тому же самому) финслеровому пространству. Для доказательства данного утверждения достаточно рассмотреть производящую функцию вида [17]:

$$W = x^i X^i\,, \tag{1.5.14}$$

которая приводит к каноническому преобразованию

$$X^i = p_i\,, \qquad P_i = -x^i\,. \tag{1.5.15}$$

В результате такого преобразования, если мы исходим из плоского финслерова пространства, новая функция Финслера не будет вообще зависеть от новых обобщённых импульсов, то есть такое каноническое преобразование выводит нас за рамки финслеровой геометрии [1].

Пусть $f(p;x)$ и $g(p;x)$ – функции координат и импульсов. Совершив каноническое преобразование, те же величины можно записать как функции новых координат и импульсов $f(P;X)$ и $g(P;X)$. Тогда [1]

$$\{fg\}_{p,x} = \{fg\}_{P,X}\,, \tag{1.5.16}$$

где индексами указано, по каким канонически сопряжённым величинам берутся скобки Пуассона.

Из (1.5.16) следует, что

$$\{X^i, X^j\}_{p,x} = 0\,, \qquad \{P_i, P_j\}_{p,x} = 0\,, \qquad \{P_i, P^j\}_{p,x} = \delta_i^j\,. \tag{1.5.17}$$

Канонические преобразования

$$p;\ x \qquad \to \qquad P;\ X$$

можно определить как преобразования (1.5.1), для которых выполняются соотношения (1.5.17).

Эволюционное изменение канонически сопряжённых величин $p(\tau)$, $x(\tau)$ также можно рассматривать как каноническое преобразование. Рассмотрим длину отрезка мировой линии (действие вдоль истинной мировой линии), проходящей через точки x и X, соответствующие значениям параметра эволюции τ и $\mathfrak{T}$, при условии $\tau < \mathfrak{T}$, как функцию $S(x,X)$ нижней и верхней точки интегрирования. Тогда

$$dS(x,X) = -\,p_i\,dx^i + P_i\,dX^i\,, \tag{1.5.18}$$

то есть функция $-S(x,X)$ является производящей функцией (1.5.6)

$$W(x,X) = -S(x,X)$$

канонического преобразования (1.5.7).

Вывод: одной и той же физической системе соответствует много качественно различных финслеровых геометрий.

1.6 Квантовая механика

В каждом финслеровом пространстве можно записать некое дифференциальное уравнение в частных производных, которое совпадает или аналогично известным уравнениям квантовой механики: уравнению Шредингера, уравнению Клейна-Гордона. В этом смысле каждое финслерово пространство наделено квантовой механикой, в которой состояние физической системы может быть описано в координатном представлении функцией координат $\Psi(x^1, x^2, ..., x^n)$, вообще говоря, комплексной. Будем называть её волновой функцией, или функцией состояния физической системы. Все физически наблюдаемые величины при переходе к квантовой механике становятся операторами, действующими в пространстве функций состояния. При этом канонически сопряжённые величины переходят в канонически сопряжённые наблюдаемые. Если пространство плоское, обобщённые импульсы p_i в таком представлении являются операторами вида

$$\hat{p}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}\,, \tag{1.6.1}$$

действующими на волновые функции. Координаты как наблюдаемые также являются операторами, причём

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0\,, \qquad [x^i, x^j] = 0\,, \qquad [\hat{p}_i, x^j] = i\hbar\delta_i^j\,. \tag{1.6.2}$$

Таким образом, скобки Пуассона заменяются коммутаторами с дополнительным размерным мнимым коэффициентом, но при этом надо учитывать зависимость, если таковая имеется, элемента объема от точки пространства. Когда элемент объема в пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 имеет вид

$$dV = \kappa^4(x)\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3\,, \tag{1.6.3}$$

где $\kappa(x)$ – некоторая функция координат, то

$$p_i \to \hat{p}_i = i\hbar \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial x^i} \kappa^2 \qquad \Rightarrow \qquad [\hat{p}_i, x^j] = i\hbar\delta_i^j\,. \tag{1.6.4}$$

При таком подходе возникают проблемы с интерпретацией самой волновой функции $\Psi(x)$ и величины $\overline{\Psi}(x)\Psi(x)$. Это связано с тем, что время становятся наблюдаемой, даже в нерелятивистских задачах. Тем не менее, на данном этапе разработки теории ряд квантовомеханических задач может быть поставлен и решен (например, некоторые задачи на собственные значения).

При переходе от классической механики к квантовой тангенциальное уравнение индикатрисы содержит канонически сопряжённые наблюдаемые, поэтому его надо понимать следующим образом:

$$\Phi(\hat{p}; x)\Psi(x) = 0\,. \tag{1.6.5}$$

Это линейное уравнение в частных производных в том смысле, что любая линейная комбинация решений опять же является решением уравнения (1.6.5). Так как наблюдаемые $\hat{p}_i$, x^i не коммутируют в финслеровом пространстве, которое не является плоским или конформно связанным [1] с плоским, даже при заданной (фиксированной) функции Финслера, уравнение (1.6.5) может быть записано по-разному. Для нерелятивистской частицы в потенциальном поле уравнение (1.6.5) совпадает с уравнением Шредингера, если считать $\kappa(x) \approx const$ в элементе объема (1.6.3), что для нерелятивистской квантовой задачи вполне приемлемо. Для релятивистских частиц в пространстве Минковского уравнение (1.6.5) совпадает с уравнение Клейна-Гордона.

В пространстве x^0, x^1, x^2, x^3, конформно связанном с пространством Минковского, то есть в пространстве с элементом длины

$$dl = \kappa(x)\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,, \qquad (1.6.6)$$

уравнение (1.6.5) принимает вид

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\kappa^2\,\Psi = -\frac{\kappa^4}{\hbar^2}\,\Psi\,, \qquad (1.6.7)$$

где $\kappa(x)$ – поле коэффициента растяжения-сжатия.

1.7 Мировая функция

Представим себе, что пространство событий x^0, x^1, x^2, x^3 (или его некоторая область) заполнено материальными точками, которые как-то взаимодействуют между собой, но не распадаются и не сливаются, не объединяются. Рассмотрим эволюцию такого пространства событий в бесконечно близкое состояние. В этом случае каждая точка (x^0, x^1, x^2, x^3) перейдёт в бесконечно близкую точку $(x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$, и всё пространство-время (или некоторая его область) будет зачерчено мировыми линиями, причём через каждую точку проходит одна и только одна мировая линия.

Если через каждую точку пространства (или некоторой его области) проходит одна и только одна мировая линия, говорят, что в пространстве (в области пространства) задана *конгруэнция мировых линий.*

Если определена конгруэнция мировых линий, то известно, по каким траекториям движутся все материальные объекты в пространстве-времени, а значит, и скорости в каждой точке. Следует сразу отметить два факта. Во-первых, конгруэнция мировых линий, соответствующая физическому Миру, не может быть произвольной, а должна удовлетворять некоторым требованиям. Во-вторых, для описания физического Мира не достаточно знания траекторий движения всех материальных точек; необходимо ещё знать хотя бы энергетические характеристики материальных объектов – например, обобщённые импульсы.

Из разделов 1.3 и 1.4 известно, что пара векторных полей {поле скоростей; поле импульсов} может быть заменена на пару скалярных функций {функция Финслера; действие как функция координат} $\equiv \{\Phi(p;x); S(x)\}$. Функция $S(x)$ при этом удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.3.14) и в финслеровой геометрии имеет смысл длины отрезка мировой линии от некоторой фиксированной точки этой мировой линии до точки $M(x)$, принадлежащей той же мировой линии. Тогда первая пара полей $\{\dot{x}(x); p(x)\}$ может быть получена из второй пары полей $\{\Phi(p;x); S(x)\}$ по формулам:

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right|_{p_j=\frac{\partial S}{\partial x^j}} \cdot \lambda(x)\,, \qquad p_j = \frac{\partial S}{\partial x^j}\,. \tag{1.7.1}$$

Конгруэнция мировых линий является, конечно, конгруэнцией экстремалей.

Конгруэнции экстремалей, которые могут быть получены согласно формулам (1.7.1), называются *нормальными* [1].

Всегда будем предполагать, что конгруэнция мировых линий любой физической системы является *нормальной* в рассматриваемой области изменения координат.

Итак, пара полей $\{\dot{x}(x); p(x)\}$ определяет физический Мир в некоторой координатной области, если в этой области поле скоростей задаёт *нормальную* конгруэнцию мировых линий.

Если физический Мир известен, то функция $S(x)$ находится с точностью до постоянной. Существует ли какой-нибудь произвол при этом в выборе геометрии, или она определяется физическим Миром однозначно?

Покажем, что одному и тому же физическому Миру могут соответствовать больше, чем одна геометрия.

Рассмотрим две геометрии, первая из которых четырёхмерная риманова (1.2.3) или псевдориманова геометрия (1.2.5) ОТО. В таких геометриях тангенциальное уравнение индикатрисы имеет вид

$$g^{ij}(x)p_ip_j - 1 = 0\,. \tag{1.7.2}$$

В качестве второй геометрии рассмотрим геометрию, конформно связанную с геометрией (1.2.42), запишем её метрическую функцию ковариантно в изотропном базисе:

$$L(dx;x) = \kappa(x)\sqrt[4]{g_{ijkl}dx^idx^jdx^kdx^l}\,, \tag{1.7.3}$$

где $\kappa(x) > 0$ – некоторая скалярная функция, а числовой тензор

$$g_{ijkl} = \begin{cases} \dfrac{1}{24}\,, & \text{если все индексы разные}\,, \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях}\,. \end{cases} \tag{1.7.4}$$

Тогда тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$g^{ijkl}p_ip_jp_kp_l - \left(\frac{\kappa}{4}\right)^4 = 0\,, \tag{1.7.5}$$

где числовой тензор

$$g^{ijkl} = \begin{cases} \dfrac{1}{24}\,, & \text{если все индексы разные}\,, \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях}\,, \end{cases} \tag{1.7.6}$$

то есть в изотропном базисе

$$(g^{ijkl}) = (g_{ijkl})\,.$$

Пусть $S(x)$ – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^l} \equiv \frac{\partial S}{\partial x^1}\frac{\partial S}{\partial x^2}\frac{\partial S}{\partial x^3}\frac{\partial S}{\partial x^4} > 0\,. \tag{1.7.7}$$

Зададим коэффициент растяжения-сжатия формулой:

$$\kappa(x) \equiv 4\sqrt[4]{g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^l}}\ . \tag{1.7.8}$$

В этом случае функция $S(x)$ автоматически удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.3.14), записанному для финслеровой геометрии (1.7.3), и определяет нормальную конгруэнцию мировых линий (1.7.1):

$$\dot{x}^i = g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial x^j}\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^l}\,\lambda(x)\,, \qquad p_j = \frac{\partial S}{\partial x^j}\,, \tag{1.7.9}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция.

Определим дважды контравариантный тензор $g^{ij}(x)$ следующей формулой:

$$g^{ij}(x) = g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^l}\,. \tag{1.7.10}$$

Так как его определитель

$$det(g^{ij}(x)) = -\frac{3}{12^4}\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\frac{\partial S}{\partial x^2}\frac{\partial S}{\partial x^3}\frac{\partial S}{\partial x^4}\right)^2 \neq 0 \tag{1.7.11}$$

не равен нулю в силу условия (1.7.7), то можно однозначно построить дважды ковариантный тензор $g_{ij}(x)$ и считать его метрическим тензором риманова или псевдориманова пространства. Рассмотрим геометрию, конформно связанную с такой геометрией:

$$ds' = \left(\frac{\kappa(x)}{4}\right)^2 \sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j}\,, \tag{1.7.12}$$

где $\kappa(x)$ определяется формулой (1.7.8). Это риманова или псевдориманова геометрия с метрическим тензором

$$G_{ij} = \left(\frac{\kappa(x)}{4}\right)^4 g_{ij}(x) \tag{1.7.13}$$

и элементом длины

$$ds' = \sqrt{G_{ij}(x)dx^i dx^j}\,.$$

В этой геометрии тангенциальное уравнение индикатрисы имеет вид

$$g^{ij}(x)p_i p_j - \left(\frac{\kappa(x)}{4}\right)^4 = 0\,. \tag{1.7.14}$$

Запишем в этой геометрии уравнение (1.3.14) для действия $\check{S}(x)$ как функции координат

$$g^{ij}(x)\frac{\partial\check{S}}{\partial x^i}\frac{\partial\check{S}}{\partial x^j} - \left(\frac{\kappa}{4}\right)^4 = 0\,, \tag{1.7.15}$$

или, учитывая (1.7.10), получим

$$g^{ijkl}(x)\frac{\partial\check{S}}{\partial x^i}\frac{\partial\check{S}}{\partial x^j}\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^l} - \left(\frac{\kappa}{4}\right)^4 = 0\,. \tag{1.7.16}$$

Из (1.7.8) следует, что одним из решений этого уравнения является функция $\check{S}(x) \equiv S(x)$. Запишем уравнения для мировых линий в геометрии (1.7.12):

$$\dot{x}^i = g^{ij}(x)\frac{\partial S}{\partial x^j}\cdot\check{\lambda}(x)\,. \tag{1.7.17}$$

Учитывая (1.7.10), получим (1.7.9), если заменить $\check{\lambda}$ на λ.

Таким образом, в одной и той же координатной системе имеют место две качественно разные геометрии, которые описывают один и тот же физический Мир $\{\dot{x}(x); p(x)\}$.

Как было показано в разделе 1.5, конкретной физической системе соответствует бесконечное множество качественно различных финслеровых геометрий, которые связаны между собой каноническими преобразованиями, то есть преобразованиями специального вида в фазовом пространстве p, x.

Более того, в одном и том же координатном пространстве существует класс финслеровых геометрий, которые имеют общую конгруэнцию мировых линий вместе с общим полем обобщённых импульсов.

Иными словами, одному и тому же физическому Миру соответствует некоторый класс финслеровых геометрий.

Очевидно, что функция $S(x)$, которая фигурирует в данном разделе, наряду с требованиями типа (1.7.7) должна удовлетворять некому фундаментальному уравнению поля, одному и тому же для всего класса финслеровых геометрий, которые соответствуют физическому Миру. Такую функцию $S(x)$ будем называть Мировой функцией и обозначать $S_W(x)$.

Из вышеизложенного просматривается связь между Мировой функцией $S_W(x)$ и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$, который возникает при переходе от некого исходного финслерова пространства к конформно связанному с ним финслерову пространству.

1.8 Теория поля

Наиболее удобный способ получения уравнений поля как в классической теории [18], так и в теории квантóванных полей [20] связан с понятиями лагранжиана, действия, а также с принципом стационарного (или наименьшего) действия, то есть с принципом экстремума действия. При этом существует связь [8], [13] между непрерывными преобразованиями, относительно которых инвариантно действие, и физическими законами сохранения, которые могут быть проверены экспериментально.

Если x^0, x^1, x^2, x^3 – координаты, $f(x) \equiv f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ – скалярное поле в пространстве Минковского, а

$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}\left(f(x); \frac{\partial f}{\partial x^0}, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) \tag{1.8.1}$$

– лагранжиан, то интеграл от лагранжиана по некоторому четырехмерному объему $\mathcal{V}$ пространства-времени,

$$I[f] = \int\limits_{\mathcal{V}}^{4} \mathfrak{L}\; dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{1.8.2}$$

принято называть действием. Считая, что вариации функции поля δf равны нулю на границе объема интегрирования, и требуя экстремальности действия, то есть

$$\delta I[f] = 0\,, \tag{1.8.3}$$

с помощью известной математической процедуры получим уравнение Лагранжа-Эйлера-Остроградского, которое и есть уравнение поля:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f} = 0\,. \tag{1.8.4}$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля, или строят, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Построение качественно новых лагранжианов, описывающих новые (особенно нелинейные) физические процессы является, в известном смысле, искусством.

Функционалу (1.8.2) можно придать чисто геометрический смысл и считать его не интегралом в пространстве Минковского от лагранжиана $\mathfrak{L}$, а объемом, если $\mathfrak{L} > 0$, в некотором более сложном пространстве, в котором элемент объема имеет вид:

$$dV = \mathfrak{L}\; dx^0 dx^1 dx^2 dx^3\,. \tag{1.8.5}$$

Тогда уравнения поля получаются из требования экстремальности любого объёма в этом новом пространстве, которое будем считать финслеровым. Это утверждение относится и к полю Мировой функции $S_W(x)$, понятие которой введено в предыдущем разделе.

Рассмотрим финслерово пространство $x^1, x^2, ..., x^n$ с метрической функцией

$$L(dx; x) \equiv L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,. \tag{1.8.6}$$

В таком пространстве элемент длины ds по определению есть

$$ds = L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,. \tag{1.8.7}$$

Более наглядно метрические свойства финслерова пространства можно представить с помощью понятия индикатрисы, которая определяется в каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства в соответствующем касательном центроаффинном пространстве $\xi^1, ..., \xi^n$ как геометрическое место концов единичных радиус-векторов $\xi_{(ind)}$. Такая гиперповерхность описывается уравнением

$$L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n) = 1\,. \tag{1.8.8}$$

Задание системы индикатрис в каждой точке основного пространства, или, что тоже самое, задание множеств единичных векторов, полностью определяет финслерову геометрию. Для того, чтобы вычислить длину вектора $(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$, надо найти сонаправленный вектору dx единичный вектор $\xi_{(ind)}$, тогда числовой коэффициент ds в формуле

$$dx^i = ds \cdot \xi^i_{(ind)} \tag{1.8.9}$$

и есть длина вектора dx. Из этой формулы следует, что элемент длины

$$ds = \frac{|dx|_{ev}}{|\xi_{(ind)}|_{ev}}\,, \tag{1.8.10}$$

где $|dx|_{ev}$, $|\xi|_{ev}$ – длины векторов $(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ и $(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)$, вычисляемые так, как если бы касательное центроаффинное пространство было бы евклидовым, а система координат в нём – декартова прямоугольная.

Если при выполнении последних предположений можно вычислить *объем индикатрисы*, то есть n-мерный объем, который зачерчивает единичный вектор $\xi_{(ind)}$ в касательном пространстве $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$, пробегая всю индикатрису, то в финслеровом пространстве можно аналогично (1.8.10) определить элемент объема dV по формуле [41]

$$dV = const \cdot \frac{dx^1 dx^2 ... dx^n}{(V_{ind})_{ev}}\,, \tag{1.8.11}$$

где $(V_{ind})_{ev}$ – объем индикатрисы, вычисленный в предположении, что касательное центроаффинное пространство евклидово, а координаты декартовы прямоугольные. Таким образом определенный элемент объема инвариантен относительно преобразования координат.

Докажем последнее утверждение. Для этого рассмотрим переход от произвольных криволинейных координат $x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'}$ к другим произвольным криволинейным координатам $x^1, x^2, ..., x^n$. Тогда согласно известным формулам [16] преобразования элемента объема имеем

$$dx^{1'} dx^{2'} ... dx^{n'} = \left| \frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^1,\, x^2,\, ...\,,\, x^n)} \right| dx^1 dx^2 ... dx^n\,,$$

где

$$\frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^1,\, x^2,\, ...\,,\, x^n)}$$

– якобиан. С другой стороны,

$$(V'_{ind})_{ev} = \int\limits_{ind}^{n} d\xi^{1'} d\xi^{2'} ... d\xi^{n'} = \int\limits_{ind}^{n} \left| \frac{D(\xi^{1'}, \xi^{2'}, ..., \xi^{n'})}{D(\xi^1,\, \xi^2,\, ...\,,\, \xi^n)} \right| d\xi^1 d\xi^2 ... d\xi^n\,,$$

но так как производные

$$\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{j}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} \,,$$

не зависят от координат касательного пространства, что следует из правила их преобразования

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} \, \xi^{j} \,,$$

то и якобиан

$$\frac{D(\xi^{1'}, \xi^{2'}, ..., \xi^{n'})}{D(\xi^{1},\, \xi^{2},\, ... ,\, \xi^{n})} = \frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^{1},\, x^{2},\, ... ,\, x^{n})}$$

также не зависит от координат касательного пространства, и поэтому

$$(V'_{ind})_{ev} = \left| \frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^{1},\, x^{2},\, ... ,\, x^{n})} \right| \int\limits_{ind}^{n} d\xi^{1} d\xi^{2} ... d\xi^{n} \,,$$

или

$$(V'_{ind})_{ev} = \left| \frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^{1},\, x^{2},\, ... ,\, x^{n})} \right| (V_{ind})_{ev} \,. \qquad (*)$$

Таким образом, при переходе к новой системе координат в правой части формулы (1.8.11) в числителе и знаменателе появляется один и тот же коэффициент – модуль якобиана перехода. Сокращая в числителе и знаменателе этот коэффициент, получим

$$\frac{dx^{1'} dx^{2'} ... dx^{n'}}{(V'_{ind})_{ev}} = \frac{dx^{1} dx^{2} ... dx^{n}}{(V_{ind})_{ev}} \,.$$

Тем самым доказано, что при переходе от одних координат к другим формула (1.8.11) остаётся неизменной.

Если в формуле (1.8.11) положить *const* равной единице, то при вычислении объёма его численное значение будет определять число объёмов индикатрис, "уместившихся" в нём.

Рассмотрим n-мерное риманово пространство, метрическая функция в этом случае имеет вид

$$L(dx; x) = \sqrt{g_{ij}(x) dx^{i} dx^{j}} \,, \qquad (1.8.12)$$

а уравнение индикатрисы соответственно –

$$g_{ij}(x) \xi^{i} \xi^{j} = 1 \,. \qquad (1.8.13)$$

Это уравнение определяет гиперповерхность второго порядка, а именно, эллипсоид. Если считать пространство $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ евклидовым, то, как известно, объем такого эллипсоида есть

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{det(g_{ij})}} \,. \tag{1.8.14}$$

Докажем это. С помощью некого линейного преобразования уравнение эллипсоида (1.8.13) в евклидовом пространстве всегда можно привести к виду

$$\frac{(\xi^{1'})^2}{R^2} + \frac{(\xi^{2'})^2}{R^2} + ... + \frac{(\xi^{n'})^2}{R^2} = 1\,,$$

то есть в этой специальной системе координат

$$det\,(g_{i'j'}(x')) = \frac{1}{R^{2n}}$$

и выполняется формула (1.8.14). Учитывая, что

$$g_{i'j'}(x') = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\, g_{ij}(x)$$

и

$$det\,(g_{i'j'}(x')) = \left[\frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^1,\, x^2,\, ...\, ,\, x^n)}\right]^{-2} det\,(g_{ij}(x))\ , \tag{$**$}$$

подставим $(*)$ и $(**)$ в выполняющуюся для эллипсоида в евклидовом пространстве в специальной системе координат формулу

$$(V'_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{det(g_{i'j'})}} \,.$$

В результате получим (1.8.14) в произвольной системе координат. Тем самым доказано выполнение формулы (1.8.14) в произвольной системе координат.

Подставляя выражение (1.8.14) в (1.8.11), получим элемент объема в произвольном римановом пространстве

$$dV = const \cdot \sqrt{det(g_{ij})} \quad dx^1 dx^2 ... dx^n\,, \tag{1.8.15}$$

что совпадает с обычным определением инвариантного элемента объема в римановом пространстве.

Для псевдоримановых пространств без специальных дополнительных условий на индикатрису

$$(V_{ind})_{ev} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad dV = 0 \cdot dx^1 dx^2 ... dx^n\,, \tag{1.8.16}$$

но можно провести цепочку рассуждений, которая позволяет и для псевдоримановых пространств предложить инвариантный элемент объема в виде формулы, аналогичной формуле (1.8.15). Точно такие же рассуждения приходится проводить и для получения ненулевого инвариантного элемента объема в неквадратичных финслеровых пространствах, в которых имеет место проблема (1.8.16). При этом удобно исходить из некоторого плоского пространства, близкого к пространству, элемент объема которого мы хотим определить.

Проведем эти рассуждения на конкретном примере псевдориманова пространства с сигнатурой $(+,-,-,-)$, то есть пространства Минковского x^0, x^1, x^2, x^3, в котором метрическая функция имеет вид

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \equiv \sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\; dx^i dx^j}\,. \tag{1.8.17}$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = 1 \tag{1.8.18}$$

есть уравнение второго порядка, оно задаёт гиперповерхность, которая является двуполостным гиперболоидом, поэтому проблема определения объема индикатрисы имеет место. Так как и метрическая функция, и уравнение индикатрисы не зависят от точки пространства, то каким бы образом мы ни регуляризовали соответствующий интеграл, получим одно и то же действительное число во всех точках пространства. Обозначим это число $(V_{ind})_{ev}$. Для того, чтобы в пространстве Минковского получить инвариантный элемент объема по формуле (1.8.11), величину $(V_{ind})_{ev}$ следует записать в виде

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{-det\left(\overset{o}{g}_{ij}\right)}}\,. \tag{1.8.19}$$

Перейдем от координат x^0, x^1, x^2, x^3 к некоторым криволинейным координатам $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$. Тогда $\overset{o}{g}_{ij}$ перейдет в $g(x')_{i'j'}$, а значит, элемент объема в пространстве Минковского в криволинейных координатах $x^{0'}$, $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$ будет определяться формулой

$$dV = const \cdot \sqrt{-det\,(g(x')_{i'j'})}\quad dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'}\,, \tag{1.8.20}$$

но пока мы остаёмся в том же самом пространстве Минковского.

Рассмотрим псевдориманово пространство, конформно связанное с пространством Минковского

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\, dx^i dx^j}\,, \tag{1.8.21}$$

где $\kappa(x) > 0$, которое (пространство) никаким преобразованием координат не может быть переведено в пространство Минковского. Уравнение индикатрисы для такого псевдориманова пространства можно записать следующим образом:

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = \frac{1}{\kappa^2(x)}\,. \tag{1.8.22}$$

Сравнивая это уравнение с (1.8.18), видим, что гиперповерхность, определяемая (1.8.22), получается из гиперповерхности (1.8.18) общим масштабным преобразованием с коэффициентом $\kappa^{-1}(x)$, поэтому, если индикатрисе (1.8.18) мы приписывали объем (1.8.19), то индикатрисе (1.8.22) следует приписать объем

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\kappa^4(x)\sqrt{-det\left(\overset{o}{g}_{ij}\right)}} = \frac{const'}{\sqrt{-det\,(g(x)_{ij})}}\,, \tag{1.8.23}$$

где

$$g(x)_{ij} \equiv \kappa^2(x)\ \overset{o}{g}_{ij}\ . \tag{1.8.24}$$

Из выше проведенных рассуждений следует, что псевдориманову пространству с метрическим тензором $g(x)_{ij}$ и сигнатурой $(+,-,-,-)$ можно приписать инвариантный элемент объема вида

$$dV = const \cdot \sqrt{-det\,(g(x)_{ij})}\quad dx^0 dx^1 dx^2 dx^3\,, \tag{1.8.25}$$

что и принято в ОТО.

К проблеме (1.8.16) в псевдоримановых пространствах можно подойти более строго, но при этом приходится рассматривать пространства более общие, чем псевдоримановы. Поясним это на примере пространства Минковского. Если вместо пространства Минковского с метрической функцией (1.8.17) взять финслерово пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0 \tag{1.8.26}$$

и условием $dx^0 \geq 0$, где $q_0 > 0$, то у такого пространства объем индикатрисы $(V_{ind})_{ev}$ – конечное действительное число, зависящее от параметра q_0 и стремящееся к ∞, когда параметр q_0 стремится к 0. Выбирая параметр q_0 достаточно малым, но не равным нулю, получим $(V_{ind}(q_0))_{ev} < \infty$ – конечное действительное число, зависящее от параметра q_0, которое затем можно использовать для получения значений физических величин при $q_0 \to 0$.

Итак, будем считать, что в любом финслеровом пространстве, в котором имеет место проблема (1.8.16), она может быть разрешена тем или иным способом. Таким образом, объём индикатрисы может быть получен в каждой точке основного пространства, если считать касательное пространство евклидовым, а координаты декартовыми прямоугольными. Следовательно, если метрическая функция содержит некоторые поля, из самой геометрии финслерова пространства автоматически получается лагранжиан [41]

$$\mathfrak{L} = \frac{const}{(V_{ind})_{ev}}\,, \tag{1.8.27}$$

а значит, и уравнения поля, и законы сохранения [8], [13]. Несомненно, это

справедливо и для Мировой функции, то есть Мировая функция также должна являться решением некоторого уравнения поля.

Замечание. Постоянные, которые фигурируют в формулах (1.8.11), (1.8.14),..., (1.8.27), можно опускать или выбирать из соображений размерности. Все эти постоянные не входят в полевые уравнения, но наиболее правильно выбирать их так, чтобы при записи, например, закона сохранения энергии получалось правильное значение энергии с учётом размерности.

Сформулируем кратко основные результаты, которые получены в этом разделе.

Принцип самодостаточности финслеровой геометрии

Если метрическая функция финслерова пространства содержит неопределённые поля, то эти поля должны удовлетворять уравнениям поля, следующим из экстремальности любого объема финслерова пространства при отсутствии вариации полей на границе рассматриваемого объема.

Основные формулы

Связь между элементом объёма dV финслерова пространства и полевым лагранжианом $\mathfrak{L}$ имеет вид

$$dV = const\;\; \mathfrak{L}\;\; dx^1 dx^2 ... dx^n\,,$$

а полевой лагранжиан выражается через объём индикатрисы по формуле

$$\mathfrak{L} = \frac{const}{(V_{ind})_{ev}}\,.$$

Рассмотрим несколько простейших примеров получения уравнений поля, решениями которых будет являться Мировая функция $S_W(x)$. Здесь же можно проследить связь между Мировой функцией и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$, с помощью которого метрическая функция одного финслерова пространства превращается в метрическую функцию другого финслерова пространства.

Пространство, конформно связанное с n-мерным евклидовым пространством, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^n)^2}\,, \tag{1.8.28}$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{det(g_{ij})} = \kappa^n(x)\,, \tag{1.8.29}$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x)\,. \tag{1.8.30}$$

Для того чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, чтобы лагранжиан содержал производные нового поля.

Обобщенные импульсы в пространстве (1.8.28) определяются формулой

$$p_i = \kappa(x) \frac{dx^i}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^n)^2}}\,, \tag{1.8.31}$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2 - \kappa^2(x) = 0\,. \tag{1.8.32}$$

Скалярная функция $S(x)$, которая в пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических и которую в классической механике принято называть действием как функцией координат, должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2 = \kappa^2(x)\,. \tag{1.8.33}$$

Будем рассматривать это уравнение как соотношение для выражения поля $\kappa(x)$ через поле $S(x)$. Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}\,, \tag{1.8.34}$$

а уравнение поля (1.8.4) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2+...+\left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\}=0\,. \tag{1.8.35}$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Запишем для пространства, конформно связанного с двумерной евклидовой плоскостью (x, y), уравнение (1.8.35),

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=0\,, \tag{1.8.36}$$

то есть функция $S(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа, а значит она является компонентой аналитической функции комплексной переменной. Тогда

$$\kappa(x,y)=\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2} \tag{1.8.37}$$

– это коэффициент конформного преобразования элемента длины евклидового пространства, так как

$$ds'=\sqrt{(dx')^2+(dy')^2}=\kappa(x,y)\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \tag{1.8.38}$$

при конформном преобразовании

$$x'=u(x,y)\,,\qquad y'=\pm v(x,y)\,, \tag{1.8.39}$$

когда функция S является одной из компонент аналитической функции $u + iv$ комплексной переменной $x + iy$.

Найдем решение уравнения (1.8.35) в предположении, что функция S зависит только от радиуса

$$r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+...+(x^n)^2}\,. \tag{1.8.40}$$

Это удобнее сделать, записав элемент объема в сферических координатах и проинтегрировав по всем углам, в результате получим

$$dV_r=r^{n-1}\left|\frac{dS}{dr}\right|^n dr\qquad\Rightarrow\qquad\mathfrak{L}_r=r^{n-1}\left|\frac{dS}{dr}\right|^n\,. \tag{1.8.41}$$

Тогда уравнение поля запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\left|\frac{dS}{dr}\right|^{n-1}\right]=0\,. \tag{1.8.42}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dS}{dr} = \frac{C}{r}\,, \qquad S = C\ln\frac{r}{r_0} + C_0\,, \tag{1.8.43}$$

$C \neq 0, C_0, r_0 > 0$ – действительные числа. Тогда коэффициент растяжения-сжатия выражается формулой:

$$\kappa(x) = \left|\frac{dS}{dr}\right| = \frac{|C|}{r}\,. \tag{1.8.44}$$

Геодезические из нормальной конгруэнции геодезических, описываемой функцией $S(r)$ (1.8.43), определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = \frac{\partial S}{\partial x^i}\cdot\lambda(x)\,, \tag{1.8.45}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i$ – производная x^i по параметру τ вдоль геодезической. Выберем $\lambda(x) = \frac{r^2}{C}$, тогда из (1.8.45) следует, что

$$\dot{x}^i = x^i\,. \tag{1.8.46}$$

Пусть $j > 1$, тогда

$$\frac{dx^j}{dx^1} = \frac{x^j}{x^1} \qquad \Rightarrow \qquad x^j = C^j x^1\,, \tag{1.8.47}$$

то есть геодезические из нормальной конгруэнции геодезических, которая (конгруэнция) определяется Мировой функцией (1.8.43), в пространстве (1.8.28) – это прямые линии, проходящие через начало координат с направляющим вектором (1, C^2, $C^3, ..., C^n$). Так как в качестве параметра вдоль геодезических можно выбрать любую координату x^i, то направляющим вектором может быть любой вектор $(k^1, k^2, ..., k^n)$ пространства (1.8.28).

Пространство, конформно связанное с псевдоевклидовым пространством с сигнатурой $(+,-,-,...,-)$, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x)\cdot\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - ... - (dx^{n-1})^2}\,, \tag{1.8.48}$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{(-1)^{n-1} det\,(g_{ij})} = \kappa^n(x)\,, \tag{1.8.49}$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x)\,. \tag{1.8.50}$$

Для того чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, чтобы лагранжиан содержал производные нового поля.

Обобщенные импульсы в пространстве (1.8.48) определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \frac{\kappa(x)\,dx^0}{\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2-...-(dx^{n-1})^2}}\,, \\ p_\mu &= \frac{\kappa(x)\,dx^\mu}{\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2-...-(dx^{n-1})^2}}\,, \end{aligned}\right\} \tag{1.8.51}$$

$\mu = 1, 2, ..., (n-1)$, а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_0^2 - p_1^2 - ... - p_{n-1}^2 - \kappa^2(x) = 0\,. \tag{1.8.52}$$

Скалярная функция $S(x)$, которая в пространстве $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических, должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = \kappa^2(x)\,, \tag{1.8.53}$$

которое можно рассматривать как связь между скалярными полями $\kappa(x)$ и $S(x)$. Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}\,, \tag{1.8.54}$$

а уравнение поля (1.8.4) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^0}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\} - \\ &-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\} = 0\,. \end{aligned} \tag{1.8.55}$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Для пространства, конформно связанного с двумерной псевдоевклидовой плоскостью (x, y), уравнение (1.8.55) даёт

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0\,, \tag{1.8.56}$$

то есть в двумерном случае уравнение поля (1.8.55) – это волновое уравнение, общее решение которого имеет вид:

$$S = f_1(x+y) + f_2(x-y)\,,$$

где f_1, f_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции одной действительной переменной.

Найдем решение уравнения (1.8.55), предполагая, что функция S зависит только от интервала

$$s = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - ... - (x^{n-1})^2}\,. \tag{1.8.57}$$

Запишем для этого элемент объема, выделив в качестве одной из переменных интервал s, а в качестве остальных – угловые переменные. При интегрировании по гиперболическому углу возникают трудности, которые аналогичны проблеме (1.8.16) и которые аналогично решаются. В результате получим

$$dV_s = s^{n-1}\left|\frac{dS}{ds}\right|^n ds \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{L}_s = s^{n-1}\left|\frac{dS}{ds}\right|^n\,, \tag{1.8.58}$$

а уравнение поля приобретёт вид:

$$\frac{d}{ds}\left[s^{n-1}\left|\frac{dS}{ds}\right|^{n-1}\right] = 0\,. \tag{1.8.59}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dS}{ds} = \frac{C}{s}\,, \qquad S = C\ln\frac{s}{s_0} + C_0\,, \tag{1.8.60}$$

$C \neq 0$, C_0, $s_0 > 0$ – действительные числа. Коэффициент растяжения-сжатия связан с функцией $S(r)$ формулой (1.8.53), поэтому

$$\kappa(x) = \left|\frac{dS}{ds}\right| = \frac{|C|}{s}\,. \tag{1.8.61}$$

Для того чтобы не возникало особенностей, следует ограничиться областью $x^0 > \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2 + ... + (x^{n-1})^2}$. Мировые лини в этой области определяются уравнениями

$$\dot{x}^0 = \frac{dS}{dx^0} \cdot \lambda(x)\,, \qquad \dot{x}^\mu = -\frac{dS}{dx^\mu} \cdot \lambda(x)\,, \tag{1.8.62}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i$ – производная x^i по параметру эволюции τ, $\mu = 1, 2, ..., n-1$. Выберем $\lambda(x) = \frac{s^2}{|C|}$, тогда из (1.8.62) следует, что

$$\dot{x}^i = x^i\,, \tag{1.8.63}$$

или

$$\frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{x^\mu}{x^0} \qquad \Rightarrow \qquad x^\mu = C^\mu x^0\,. \tag{1.8.64}$$

Таким образом, экстремали из нормальной конгруэнции экстремалей, которая определяется Мировой функцией (1.8.60), в пространстве (1.8.48) – это лучи, исходящие из начала координат с направляющим вектором (1, C^1, C^2, ..., C^{n-1}). Интервал при этом изменяется тоже линейно относительно координаты x^0,

$$s = \sqrt{1 - (C^1)^2 - ... - (C^{n-1})^2} \cdot x^0\,, \tag{1.8.65}$$

учитывая, что выше было введено ограничение $x^0 > 0$.

Для пространства, конформно связанного с пространством Минковского $n = 4$, используя метрический тензор $\overset{o}{g}_{ij}$, получим: связь между функцией $S(x)$ и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$ –

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\ \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} = \kappa^2(x)\,, \tag{1.8.66}$$

лагранжиан –

$$\mathfrak{L} = \left(\overset{o}{g}{}^{ij}\ \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}\right)^2\,, \tag{1.8.67}$$

уравнение поля –

$$\overset{o}{g}{}^{kl}\ \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial S}{\partial x^l}\left(\overset{o}{g}{}^{ij}\ \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}\right)\right] = 0\,. \tag{1.8.68}$$

Итак, если $x^1, x^2, ..., x^n$ – некое плоское финслерово пространство с метрической функцией $L(\xi)$, то лагранжиан соответствующего конформно связанного пространства с метрической функцией

$$L'(dx; x) = \kappa(x)L(dx)$$

суть

$$\mathfrak{L} = const\ \kappa^n(x)\,.$$

Если искать решение полевого уравнения для Мировой функции, зависящей только от одной переменной

$$s = L(x)\,,$$

то в рассмотренных выше примерах решение сводится к логарифмической функции

$$S_W(s) = C \ln \frac{s}{s_0} + C_0\,,$$

причём коэффициент растяжения-сжатия определяется следующей формулой:

$$\kappa(s) = \frac{const'}{s}\,.$$

Такой результат справедлив всегда при любом выборе исходного плоского финслерова пространства. Получающаяся при этом финслерова геометрия с элементом длины

$$ds' = const \cdot \frac{L(dx)}{L(x)}$$

обладает рядом интересных свойств. Во-первых, её группа изометрической симметрии включает группу однородных линейных преобразований исходного плоского пространства как подгруппу, так как элемент длины ds' инвариантен относительно всех конформных линейных преобразований исходного плоского финслерова пространства, в частности, относительно общего масштабного преобразования. Во-вторых, группа конформной симметрии такого финслерова пространства совпадает с группой конформной симметрии пространства с метрической функцией $L(dx)$.

Запишем уравнение поля для Мировой функции в финслеровом пространстве, которое является конформно связанным с пространством H_4, или с четырёхмерным пространством Бервальда-Моора. Метрическая функция такого пространства определяется формулой (1.7.3), тангенциальное уравнение можно записать в виде (1.7.5), а коэффициент растяжения-сжатия $\kappa(x)$ выражается через Мировую функцию $S_W(x)$ по формуле (1.7.8). Таким образом, лагранжиан для получения уравнения поля, решением которого должна быть Мировая функция, в специальной изотропной системе координат запишется следующим образом:

$$\mathfrak{L} = const\ \frac{\partial S_W}{\partial x^1}\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\frac{\partial S_W}{\partial x^4}\,. \tag{1.8.69}$$

Уравнение Лагранжа-Эйлера-Остроградского (1.8.4), то есть уравнение поля принимает вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\frac{\partial S_W}{\partial x^4}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\frac{\partial S_W}{\partial x^4}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\frac{\partial S_W}{\partial x^4}\right)+\frac{\partial}{\partial x^4}\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)=0\,.\end{gathered}\tag{1.8.70}$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с дополнительным условием

$$\kappa(x)>0\,.\tag{1.8.71}$$

В силу этого условия мы исключаем, например, такие функции в качестве возможных решений, как:

$$f_1(x^1)\,,\quad \acute{f}_{34}(x^1,x^2)\,,\quad \bar{f}_1(x^2,x^3,x^4)\,,\tag{1.8.72}$$

где f_1, $\acute{f}_{34}$, $\bar{f}_1$ – произвольные функции одной, двух и соответственно трёх действительных переменных, так как, хотя они удовлетворяют уравнению (1.8.70), для них не выполняется условие (1.8.71).

Непосредственной подстановкой в уравнение (1.8.70) проверяется, что этому уравнению, например, удовлетворяет функция

$$S_W=\frac{1}{4}\left[f_1(x^1)+f_2(x^2)+f_3(x^3)+f_4(x^4)\right]\,,\tag{1.8.73}$$

где функции f_i должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\frac{\partial f_2}{\partial x^2}\frac{\partial f_3}{\partial x^3}\frac{\partial f_4}{\partial x^4}>0\,,\tag{1.8.74}$$

а в остальном произвольны.

Ещё один пример решения задачи (1.8.70), (1.8.71). Будем искать решение в виде:

$$S_W(x)=u(x^1,x^2)+v(x^3,x^4)\,.\tag{1.8.75}$$

Тогда, подставляя (1.8.75) в (1.8.70), получим

$$\frac{\partial v}{\partial x^3}\frac{\partial v}{\partial x^4}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^1\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^3\partial x^4}=0\,.\tag{1.8.76}$$

Это уравнение с частично разделяющимися переменными. Так как из (1.8.71) следует условие

$$\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x^3}\frac{\partial v}{\partial x^4}>0\,,\tag{1.8.77}$$

разделим левую и правую части уравнения (1.8.76) на

$$\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x^3}\frac{\partial v}{\partial x^4}\,.$$

Получим в левой части уравнения два аддитивных члена, первый из которых зависит только от x^1, x^2, а второй – только от x^3, x^4. Следовательно каждый из них есть постоянная, причём, если первый равен $(-\lambda_0)$, то второй должен быть равен λ_0:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2}}{\dfrac{\partial u}{\partial x^1}\dfrac{\partial u}{\partial x^2}} = -\lambda_0\,, \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^3 \partial x^4}}{\dfrac{\partial v}{\partial x^3}\dfrac{\partial v}{\partial x^4}} = \lambda_0\,. \tag{1.8.78}$$

Считая $\lambda_0 \neq 0$ и интегрируя эту систему уравнений, имеем

$$S_W = \frac{1}{\lambda_0}\ln\left|\frac{f_1(x^1) + f^2(x^2)}{f_3(x^3) + f_4(x^4)}\right|\,, \tag{1.8.79}$$

где функции f_i должны удовлетворять условию (1.8.71), то есть

$$\kappa^4(x) \equiv \frac{4^4}{\lambda_0^4}\,\frac{\dot f_1 \dot f_2 \dot f_3 \dot f_4}{(f_1 + f_2)^2 (f_3 + f_4)^2} > 0\,, \tag{1.8.80}$$

или

$$f_1 + f_2,\ f_3 + f_4 \neq \pm\infty\,, \qquad \dot f_1 \dot f_2 \dot f_3 \dot f_4 > 0\,, \tag{1.8.81}$$

а в остальном произвольны.

Важно отметить, что решение S_W (1.8.79) не может быть представлено в виде (1.8.73).

Если $\lambda_0 = 0$, то интегрируя систему уравнений (1.8.78), получим

$$u(x^1, x^2) = u_1(x^1) + u_2(x^2)\,, \qquad v(x^3, x^4) = v_1(x^3) + v_2(x^4) \tag{1.8.82}$$

при выполнении условия

$$\frac{du_1}{dx^1}\frac{du_2}{dx^2}\frac{dv_1}{dx^3}\frac{dv_2}{dx^4} > 0\,. \tag{1.8.83}$$

Таким образом,

$$S_W = u_1(x^1) + u_2(x^2) + v_1(x^3) + v_2(x^4)\,. \tag{1.8.84}$$

Это решение совпадает с (1.8.73).

1.9 Гиперкомплексные числа

Гиперкомплексная система чисел – это линейная алгебра с единицей. Более развёрнутое определение звучит следующим образом.

Линейное пространство над полем действительных чисел с бинарной операцией, линейной по каждому сомножителю, и с единицей называется *гиперкомплексной алгеброй*, или *системой гиперкомплексных чисел* над полем действительных чисел.

Гиперкомплексные числа, кроме базисных элементов, обычно будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, ... , X, Y, Z; действительные числа – в основном малыми латинскими и греческими буквами. Базисные (символьные) элементы системы гиперкомплексных чисел в основном будем обозначать e_1, e_2, ..., e_n, где n – размерность гиперкомплексного пространства.

Если базис e_1, e_2, ..., e_n фиксирован, то любое гиперкомплексное число однозначно представимо в виде линейной комбинации базисных элементов

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n \, . \tag{1.9.1}$$

Умножение гиперкомплексного числа на действительное число и сложение гиперкомплексных чисел происходит покомпонентно по законам линейного пространства [7], так как система гиперкомплексных чисел есть линейное пространство с дополнительной алгебраической структурой. Бинарная операция полностью определяется законом умножения базисных элементов:

$$e_i \cdot e_j = p^l_{ij} \cdot e_l \, , \tag{1.9.2}$$

то есть числовым тензором p^l_{ij}, или *структурным тензором.* При этом бинарная операция "$\cdot$" *линейна* по каждому сомножителю:

$$(aA + bB) \cdot (cC + dD) = ac\, A \cdot C + ad\, A \cdot D + bc\, B \cdot C + bd\, B \cdot D \, . \tag{1.9.3}$$

Если представить, что начала всех векторов $X \in P_n$ находятся в одной фиксированной точке $\mathcal{O}$, то компоненты таких векторов (радиус-векторов) определяют нам n-мерное координатное пространство:

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n \qquad \leftrightarrow \qquad (x^1, x^2, ...x^n) \tag{1.9.4}$$

с координатами $x^1, x^2, ...x^n$ и началом координат в точке $\mathcal{O}(0, 0, ..., 0)$. В этом координатном пространстве, как и в координатном пространстве свободных векторов (1.9.1), определена бинарная операция:

$$X \cdot Y = Z \, , \qquad\qquad x^i x^j p^l_{ij} = z^l \, . \tag{1.9.5}$$

Система гиперкомплексных чисел называется коммутативной, если для любых двух чисел X и Y

$$XY = YX \qquad \Leftrightarrow \qquad p^l_{ij} = p^l_{ji}\,, \tag{1.9.6}$$

и ассоциативной, если для любых трёх чисел X, Y, Z

$$(XY)Z = X(YZ) \qquad \Leftrightarrow \qquad p^l_{ij}p^s_{lr} = p^l_{jr}p^s_{il}\,. \tag{1.9.7}$$

Если система гиперкомплексных чисел и коммутативна, и ассоциативна, то имеют место и другие соотношения для тензора p^l_{ij}, например,

$$p^l_{ij}p^s_{lr} = p^l_{rj}p^s_{li}\,. \tag{1.9.8}$$

Пусть ϵ^i – коэффициенты разложения единицы в базисе e_1, e_2, $...e_n$, тогда справедливы следующие формулы:

$$\epsilon^i p^l_{ij} = \delta^l_j\,, \qquad \epsilon^j p^l_{ij} = \delta^l_i\,. \tag{1.9.9}$$

Если гиперкомплексная алгебра не содержит нильпотентных элементов, то есть таких чисел $N \neq 0$, что $N^m = 0$, где $m > 1$ – некоторое натуральное число, то будем называть такую алгебру гиперкомплексных чисел *невырожденной.*

Если для двух гиперкомплексных чисел $A \neq 0$ и $B \neq 0$ их произведение равно нулю $AB = 0$, то оба этих числа принято называть *делителями нуля.* В этом случае

$$a^i b^j p^l_{ij} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad det(b^j p^l_{ij}) = 0\,, \quad det(a^i p^l_{ij}) = 0\,.$$

Достижения, которые были получены в теории комплексных чисел и особенно в теории функций комплексной переменной, заставляют стремиться к тому, чтобы не только на евклидовой плоскости, но и в других метрических пространствах сопоставить взаимно однозначно каждой точке пространства число, принадлежащее некоторой гиперкомплексной системе. Можно работать с некоммутативными и даже неассоциативными гиперкомплексными алгебрами, но при этом возникает ряд трудностей особенно в построении аналитических функций. Существует другой путь [28] – [30], которого будем придерживаться и мы: выделять самые удобные, самые "простые" числа, а именно, невырожденные *ассоциативно-коммутативные гиперкомплексные числа*, или невырожденные *поличисла* P_n, и концентрировать усилия на их изучении и применении в физике.

Для невырожденных поличисел справедливо следующее утверждение: для того чтобы поличисло $X = x^i\, e_i$ было делителем нуля, необходимо и достаточно, чтобы

$$det(x^k p^i_{kj}) = 0\,.$$

В теории гиперкомплексных чисел исключительно важную роль сыграли работы Фробениуса. Напомним формулировку одной из теорем, им доказанных.

***Теорема Фробениуса [4]*:** Любая ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трех: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел или алгебре кватернионов.

Так как алгебра кватернионов не коммутативна, то из теоремы Фробениуса следует, что невырожденные поличисла P_n размерности $n > 2$ всегда содержат делители нуля, то есть найдутся такие числа $X,\, Y \neq 0$, для которых

$$XY = YX = 0\,. \tag{1.9.10}$$

Поэтому на множестве поличисел размерности больше двух нельзя определить классическое понятие нормы числа, но можно определить близкое понятие, которое следовало бы назвать, например, *квазинормой*. В настоящей работе используется старый термин.

Если для любого числа X из некоторого подмножества D_n невырожденных поличисел P_n задано действительное число $|X|$, причем для любых $X,\, Y \in D_n$ выполняются следующие три требования:

1. $|X| \geq 0$;
2. если $a > 0$ – действительное число, то $|aX| = a|X|$;
3. если $XY \in D_n$, то $|XY| = |X||Y|$

– будем говорить, что на множестве поличисел P_n задана норма, а D_n – область ее определения.

Функция F на гиперкомплексной алгебре $HC \ni X, dX$ со значениями в той же самой алгебре $F(X) \in HC$ определяется обычным образом.

Если e – базис, а x – координаты гиперкомплексного числа X (1.9.1) в этом базисе, то

$$F(X) = f^i(x^1, x^2, ..., x^n)\, e_i\,, \tag{1.9.11}$$

где f^i – n произвольных функций от n действительных переменных. Область определения функции $F(X)$ суть пересечение областей определения всех функций $f^1, f^2, ..., f^n$.

Пусть dX – произвольное бесконечно малое гиперкомплексное число, то есть

$$dX = dx^i\, e_i\,, \qquad dx^i \to 0\,. \tag{1.9.12}$$

Если

$$F(X + dX) - F(X) = F'(X)\, dX + o(dx^k)\,, \tag{1.9.13}$$

то $F(X)$ – называют *аналитической функцией гиперкомплексной переменной*, а $F'(X)$ – её *производной.*

Из определения следует, что, во-первых, для того чтобы $F(X)$ была аналитической функцией, необходимо, чтобы функции f^i были, по крайней мере, гладкими функциями всех n действительных переменных. Во-вторых, если гиперкомплексная система HC некоммутативна, то возникают серьёзные трудности с введением понятия аналитичности. Ещё больше трудностей появляется при отсутствии ассоциативности. Это одна из причин, по которым в дальнейшем будут рассматриваться только ассоциативно-коммутативные гиперкомплексные числа, или кратко *поличисла.*

Для поличисел существует естественный алгоритм построения, если не всех, то большого класса аналитических функций поличисловой переменной. Любая функция $F(X)$ поличисловой переменной, построенная как полином или сходящийся ряд, есть аналитическая функция той же поличисловой переменной. Приведём два примера. Аналитическими функциями поличисловой переменной являются:

$$F(X) = A\,X^2 + B\,X + C \tag{1.9.14}$$

и

$$e^{AX} = 1 + AX + \frac{1}{2!}(AX)^2 + \frac{1}{3!}(AX)^3 + ... + \frac{1}{m!}(AX)^m + ...\,, \tag{1.9.15}$$

где A, B, C – поличисловые постоянные.

Все пространства невырожденных поличисел суть метрические пространства, а именно, финслеровы пространства, причём, если размерность пространства больше двух, то это – метрические неквадратичные пространства.

Конечно, самым интересным вопросом для физиков является вопрос: какую поличисловую систему сопоставить пространству событий, то есть четырёхмерному пространству-времени? Одна из возможностей – это поличисла H_4 [28] – [30], которые изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4 и которые являются финслеровым пространством с метрической функцией Бервальда-Моора (1.2.42).

1.10 Поличисла H_3

В данном разделе в качестве примера невырожденных поличисел рассмотрим алгебру действительных квадратных диагональных матриц 3×3. Эта алгебра изоморфна невырожденным поличислам H_3.

Любой элемент $X \in H_3$ можно рассматривать как матрицу вида

$$X = \begin{pmatrix} a^1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \equiv a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3 \,, \qquad (1.10.1)$$

где a^1, a^2, a^3 – действительные числа, а $e_1, e_2, e_3 \in H_3$ – так называемый, изотропный базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.10.2)$$

Роль единичного элемента выполняет единичная матрица, то есть сумма базисных элементов e_1, e_2 и e_3:

$$e_1 + e_2 + e_3 \equiv \hat{1} \,.$$

Поличисла H_3 являются невырожденными, так как из того факта, что некоторая натуральная степень поличисла равна нулю, следует, что само поличисло есть нуль.

Для произвольной квадратной матрица A, как известно, определена функция

$$\exp(A) \equiv \hat{1} + A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{m!}A^m + ... \,. \qquad (1.10.3)$$

Здесь $\hat{1}$ – единичная матрица. Тогда для X (1.10.1) имеем

$$\exp(X) = \begin{pmatrix} e^{a^1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a^3} \end{pmatrix}. \qquad (1.10.4)$$

Рассмотрим ещё один базис $1, j, k$, который связан с изотропным базисом преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \qquad (1.10.5)$$

и попытаемся представить поличисло X в экспоненциальной форме:

$$X = x^0 1 + x^1 j + x^2 k = \varrho \cdot \exp(\alpha j + \beta k)\,, \tag{1.10.6}$$

где α, β – любые действительные числа, а действительное число $\varrho > 0$. Воспользовавшись формулой (1.10.4), получим

$$a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3 = \varrho e^{\alpha+\beta} e_1 + \varrho e^{-\alpha} e_2 + \varrho e^{-\beta} e_3\,. \tag{1.10.7}$$

Из этого соотношения следует: для того, чтобы поличисло X можно было представить в экспоненциальном виде, все a^i должны быть больше нуля: $a^i > 0$. При этом величины ϱ, α, β выражаются через координаты X в изотропном базисе по формулам:

$$\varrho = \sqrt[3]{a^1 a^2 a^3}\,, \qquad \alpha = -\ln\frac{a^2}{\varrho}\,, \qquad \beta = -\ln\frac{a^3}{\varrho}\,. \tag{1.10.8}$$

Если два числа $X, Y \in H_3$ представимы в экспоненциальном виде, то при их перемножении

$$X_1 X_2 = Z \quad \Rightarrow \quad Z = \varrho_1 \varrho_2 \cdot \exp\left[(\alpha_1 + \alpha_2) j + (\beta_1 + \beta_2) k\right]\,. \tag{1.10.9}$$

Таким образом, для величины ϱ в экспоненциальном представлении выполняются все требования, сформулированные выше, для нормы поличисла, поэтому для $X \in H_3$

$$|X| = \sqrt[3]{a^1 a^2 a^3}\,, \qquad a^1, a^2, a^3 > 0\,. \tag{1.10.10}$$

В нашем понимании норма поличисла неотъемлема от экспоненциального представления поличисла, поэтому область определения нормы задаётся именно тремя неравенствами $a^1 > 0,\ a^2 > 0,\ a^3 > 0$, а не одним неравенством $a^1 a^2 a^3 > 0$.

Пусть для числа $X \in H_3$ определена норма (1.10.10); умножим его на унимодулярное число $g \in H_3$, то есть число, которое представимо в экспоненциальном виде и которое имеет единичную норму $|g| = 1$. Тогда

$$|Xg| = |X|\,; \tag{1.10.11}$$

а значит, в пространстве H_3 имеется непрерывная двухпараметрическая абелева группа Ли $G_1(H_3)$, сохраняющая норму поличисел, причём элементами этой группы являются унимодулярные поличисла H_3, а групповое умножение суть поличисловое умножение.

Пространство H_3 является линейным пространством. Но если считать векторы (1.10.1) радиус-векторами в центроаффинном пространстве, то в этом случае координаты радиус-векторов есть точки координатного пространства (a^1, a^2, a^3). Для вычисления длины кривой в таком пространстве необходимо знать элемент длины ds, вид которого однозначно следует из полученной выше нормы поличисла:

$$ds = \sqrt[3]{da^1 da^2 da^3}\,, \qquad da^1 > 0,\ da^2 > 0,\ da^3 > 0\,. \tag{1.10.12}$$

Тем самым пространство H_3 является неквадратичным метрическим финслеровым пространством с изометрической непрерывной группой симметрии $G_1(H_3)$.

Нельзя ли рассматриваемое пространство H_3, хотя бы в нулевом или первом приближении, считать пространством событий для тех физических задач, когда зависимость физических величин от какой-нибудь одной пространственной координаты отсутствует? Для положительного ответа на этот вопрос следует искать такой базис $1, J, K$,

$$X = x^0 \cdot 1 + x \cdot J + y \cdot K\,, \tag{1.10.13}$$

где $x^0 = ct$, c – скорость света, t – время, x, y – пространственные координаты, в котором (базисе) при нерелятивистских скоростях $(dx^0 \gg |dx|, |dy|)$ с точностью до $\left|\frac{v}{c}\right|^2$ включительно элемент длины принимает вид:

$$ds = \sqrt[3]{da^1 da^2 da^3} \simeq dx^0 - \frac{dx^2 + dy^2}{2dx^0}\,. \tag{1.10.14}$$

При этом базисный элемент 1 менять не следует, а весь произвол в выборе нового базиса заключается в невырожденном линейном преобразовании базисных векторов j, k (четыре действительных параметра), что позволяет сохранить экспоненциальное представление. Прежде всего перейдём к координатам x^0, x^1, x^2 в базисе $1, j, k$,

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ k \end{pmatrix}, \tag{1.10.15}$$

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \tag{1.10.16}$$

при тех же предположениях о малости скоростей $dx^0 \gg |dx^1|, |dx^2|$:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt[3]{(x^0 + dx^1 + dx^2)(dx^0 - dx^1)(dx^0 - dx^2)} \simeq \\ &\simeq dx^0 - \frac{(dx^1)^2 + dx^1 dx^2 + (dx^2)^2}{3\, dx^0}\,. \end{aligned} \tag{1.10.17}$$

Надо найти такое преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,, \tag{1.10.18}$$

где a, b, c, d – искомые действительные числа, чтобы последняя правая дифференциальная форма (1.10.17) превратилась в последнюю правую дифференциальную форму (1.10.14). В итоге получим систему трёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} 2ab + ad + bc + 2cd = 0\,, \\ a^2 + ac + c^2 = \frac{3}{2}\,, \\ b^2 + bd + d^2 = \frac{3}{2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.10.19}$$

Проще, однако, привести дифференциальную форму

$$(dx^1)^2 + dx^1 dx^2 + (dx^2)^2$$

к каноническому виду классическим способом: найти собственные векторы и собственные значения соответствующей билинейной формы, взять эти собственные векторы с некоторыми коэффициентами в качестве базисных векторов и учесть неоднозначность выбора координат x, y, которые всегда можно повернуть на некоторый эллиптический угол φ. В результате получим

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,, \tag{1.10.20}$$

или

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x \\ y \end{pmatrix}\,. \tag{1.10.21}$$

Эти формулы не дают общего решения системы алгебраических уравнений (1.10.19), так как возможно, например, ещё поменять местами координаты x и y и/или независимо изменить знаки у этих координат, но главное получено: координатное пространство x^0, x, y можно считать трёхмерным пространством-временем, трёхмерным пространством событий.

Эллиптический поворот на угол φ в плоскости (x, y) можно выполнить дополнительно всегда, но хотелось бы иметь для матрицы преобразования (1.10.21) наиболее простое выражение. Одно из таких выражений получается, если положить $\varphi = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} & -\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} \\ 1 & -\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} & \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} \end{pmatrix}. \qquad (1.10.22)$$

Матрица (1.10.22) является симметрической.

Таким образом, непрерывные однопараметрические переходы в пространстве H_3 от одного физического базиса, в котором имеют место экспоненциальное представление поличисел и нерелятивистский переход к трёхмерному пространству Галилей, к другому физическому базису образуют группу $SO(2)$.

Итак, поличисловое пространство H_3 есть финслерово пространство с метрической функцией

$$L(da) = \sqrt[3]{da^1 da^2 da^3}\,. \qquad (1.10.23)$$

Компоненты обобщённого импульса определяются формулой

$$p_i = \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{da^1 da^2 da^3}}{da^i} \qquad (1.10.24)$$

и связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$p_1 p_2 p_3 - \frac{1}{3^3} = 0\,. \qquad (1.10.25)$$

Пространство, конформно связанное с поличисловым пространством H_3, есть финслерово пространство с метрической функцией

$$\tilde{L}(da; a) = \kappa(a)\sqrt[3]{da^1 da^2 da^3}\,. \qquad (1.10.26)$$

Компоненты обобщённого импульса в таком пространстве определяются формулой

$$\tilde{p}_i = \frac{\kappa(a)}{3}\frac{\sqrt[3]{da^1 da^2 da^3}}{da^i} \tag{1.10.27}$$

и связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{p}_3 - \frac{\kappa^3(a)}{3^3} = 0\,. \tag{1.10.28}$$

Откуда следует выражение коэффициента растяжения-сжатия $\kappa(a)$ через Мировую функцию $S_W(a)$

$$\kappa(a) = 3\sqrt[3]{\frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\frac{\partial S_W}{\partial a^3}}\,, \quad \frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\frac{\partial S_W}{\partial a^3} > 0 \tag{1.10.29}$$

и выражение для лагранжиана

$$\mathfrak{L} = const\ \frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\frac{\partial S_W}{\partial a^3}\,. \tag{1.10.30}$$

Соответственно уравнение поля для Мировой функции запишется как

$$\frac{\partial}{\partial a^1}\left(\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\frac{\partial S_W}{\partial a^3}\right) + \frac{\partial}{\partial a^2}\left(\frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^3}\right) + \frac{\partial}{\partial a^3}\left(\frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\right) = 0 \tag{1.10.31}$$

при дополнительном условии

$$\frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\frac{\partial S_W}{\partial a^3} > 0\,. \tag{1.10.32}$$

Как указывалось в предыдущем разделе, построить некоторое множество простейших аналитических функций поличисловой переменной не составляет труда: это полиномы и сходящиеся ряды переменной $X \in H_3$, причём в качестве параметров можно использовать как действительные числа, так и поличисла H_3. Так как в изотропном базисе умножение чисел H_3 происходит покомпонентно, то все такие аналитические функции поличисловой переменной (если параметрами являются только действительные числа в том же изотропном базисе) имеют следовательно вид:

$$F(X) = f(a^1)e_1 + f(a^2)e_2 + f(a^3)e_3\,, \tag{1.10.33}$$

где f – гладкая функция одной действительной переменной. Далее, непосредственно обратившись к определению аналитической функции гиперкомплексной переменной (1.9.13), найдём, что для поличисел H_3 в изотропном базисе любая функция вида

$$F(X) = f^1(a^1)e_1 + f^2(a^2)e_2 + f^3(a^3)e_3\,, \tag{1.10.34}$$

где f^i – три, вообще говоря, разные гладкие функции одной действительной переменной, является аналитической. Аналитические функции вида (1.10.34) получаются, если брать полиномы или сходящиеся ряды полечисловой H_3 переменной с параметрами, которые также являются полечислами H_3.

Определим функцию $S_W(a)$ как произвольную линейную комбинацию компонент аналитической функции $F(X)$ (1.10.34) с действительными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2$, то есть

$$S_W(a) = \alpha_1 \, f^1(a^1) + \alpha_2 \, f^2(a^2) + \alpha_3 \, f^3(a^3) \, . \qquad (1.10.35)$$

Прямой подстановкой этой функции в уравнение (1.10.31) проверяем, что данная функция является решением уравнения (1.10.31). Условие (1.10.32) превращается в следующее неравенство:

$$\alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3 \, \frac{df^1}{da^2} \, \frac{df^2}{da^2} \, \frac{df^3}{da^3} \; > \; 0 \, . \qquad (1.10.36)$$

1.11 Симметрии

Обычно понятие *симметрии* в физике связывают с понятиями группы и представления группы.

Множество G элементов $a, b, c, ...$ называется *группой* [10], если в G установлена бинарная операция, ставящая каждой паре элементов a, b из G некоторый элемент c из G так, что:

1) выполняется закон ассоциативности, $(ab)c = a(bc)$;

2) в G имеется левая единица, то есть такой элемент $e \in G$, что $ea = a$ для всякого элемента a из G;

3) для всякого $a \in G$ существует левый обратный элемент, то есть такой элемент a^{-1}, что $a^{-1}a = e$.

Из вышеперечисленных трёх аксиом следует, что левая единица является также и правой единицей, а левый обратный элемент является также и правым обратным элементом.

Взаимно однозначное отображение множества на себя называется *преобразованием* множества.

Группы в математике возникли как группы преобразований множеств, и только позднее в результате абстрагирования стали рассматриваться независимо от преобразований. Для физиков понятие группы, по-видимому, навсегда останется связанным с понятием преобразования.

Всякое непустое множество G преобразований множества Γ, содержащее, наряду с каждыми двумя преобразованиями, их произведение и, наряду с каждым преобразованием, ему обратное, есть группа.

Пусть $A_k^{Li} \ni a, b, c, ...$ – k-мерное линейное пространство над полем действительных чисел $R \ni \alpha, \beta, \gamma, ...$, в котором определена бинарная операция $[a, b]$ – коммутатор элементов a, b:

1. $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c]$, где α, β – действительные числа;
2. $[a, b] = -[b, a]$;
3. $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ – тождество Якоби.

В этом случае линейное пространство A_k^{Li} будем называть *алгеброй Ли.*

Отметим, что, если $a, b, c, ...$ – это квадратные матрицы $n \times n$, элементами которых являются действительные числа, комплексные числа или поличисла, то третья аксиома выполняется автоматически, как и в том случае, если $a, b, c, ...$ – это операторы вида

$$a = f^1(x^1, x^2, ..., x^n)\frac{\partial}{\partial x^1} + ... + f^n(x^1, x^2, ..., x^n)\frac{\partial}{\partial x^n}\,,$$

действующие в пространстве бесконечно дифференцируемых функций $f(x^1, x^2, ..., x^n)$ от n аргументов.

Каждой алгебре Ли однозначно соответствует некоторая локальная группа Ли [10].

Существуют открытая окрестность N_0 в точке $0 \in A_n^{Li}$ и открытая окрестность V_e единицы e в G (группа Ли), такие, что экспоненциальное отображение является аналитическим диффеоморфизмом N_0 на V_e [11]. Пусть $X_1, X_2, ..., X_k$ базис в A_k^{Li}. Отображение

$$\exp(t_1X_1 + t_2X_2 + ... + t_kX_k) \qquad \to \qquad (t_1, t_2, ..., t_k)$$

из V_e на N_0 задает систему координат на V_e, которая называется канонической.

Под непрерывной группой будем понимать группу Ли $G \ni g$, элементы которой представимы именно в виде

$$g(t_1, t_2, ..., t_k) = \exp(t_1X_1 + t_2X_2 + ... + t_kX_k)\,,$$

где $t_1, t_2, ..., t_k$ – действительные параметры, а $X_1, X_2, ..., X_k$ – генераторы группы, которые образуют алгебру Ли. Естественно такую группу называть k-параметрической непрерывной группой Ли. Дискретные преобразования, отличающиеся от выше приведённых, будем исключать или рассматривать отдельно. В непрерывной группе Ли каждый элемент $g(t_1, t_2, ..., t_k)$ непрерывно связан по всем параметрам с единичным элементом, для которого $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, ..., $t_k = 0$,

$$g(0, 0, ..., 0) = e\,.$$

Дадим определение гомоморфизма [14] линейной алгебры A в линейную алгебру $\acute{A}$ (аналогичным образом можно дать определение гомоморфизма группы в группу).

Отображение $A \xrightarrow{F} \acute{A}$ назовем *гомоморфизмом* алгебры $A \in x, y, z, ...$ над полем действительных чисел в алгебру $\acute{A}$ над полем действительных чисел, если выполняются условия:

$$F(x+y) = Fx + Fy\,, \qquad F(\alpha x) = \alpha F(x)\,, \qquad F(xy) = Fx \cdot Fy\,,$$

где α – действительное число.

Две алгебры называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение F алгебры на алгебру, удовлетворяющее тем же условиям, то есть взаимно однозначный гомоморфизм суть изоморфизм.

Назовём *представлением группы* $G \ni g$ в пространстве $\mathfrak{F}$ [12] непрерывную функцию $T(g)$ на этой группе, принимающую значения в группе невырожденных непрерывных линейных преобразований линейного пространства $\mathfrak{F}$ и подчиняющуюся функциональному уравнению

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)\,.$$

Из этого уравнения следует, что $T(g^{-1}) = T^{-1}(g)$ и $T(e) = E$, где e – единичный элемент группы G, а E – тождественный оператор в $\mathfrak{F}$.

Таким образом, $T(g)$ является гомоморфным отображением группы G в группу невырожденных непрерывных линейных преобразований пространства $\mathfrak{F}$.

Представление $T(g)$ называют *точным* [12], если лишь для единичного элемента e из G имеем $T(e) = E$, и *тривиальным* (или единичным), если $T(g) = E$ для всех элементов g из группы G.

Таким образом, между точным представлением группы и группой имеет место изоморфизм.

В дальнейшем, говоря о группе, будем подразумевать некое точное представление непрерывной группы Ли на множестве квадратных матриц, действующих в некотором линейном пространстве, или точное представление на множестве линейных дифференциальных операторов, действующих в пространстве бесконечно дифференцируемых функций.

Когда говорят о группе симметрии некоторого плоского метрического пространства, то обычно имеют в виду группу преобразований этого пространства, которая не изменяет метрическую функцию, то есть, если $x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, ..., x^n)$, то

$$L(dx^{1'}, ..., dx^{n'}) = L(dx^1, ..., dx^n)\,, \tag{1.11.1}$$

причём функция L от n действительных аргументов слева тождественно совпадает с функцией L от n действительных аргументов справа, например, для евклидова пространства в декартовых прямоугольных координатах

$$\sqrt{(dx^{1'})^2+...+(dx^{n'})^2}=\sqrt{(dx^1)^2+...+(dx^n)^2}\,. \tag{1.11.2}$$

Более того, обычно выделяют подгруппу, непрерывно связанную с тождественным преобразованием по некоторому конечному числу k параметров $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$, и именно её называют группой симметрии, или *изометрической группой симметрии.* В настоящей работе, если не оговорено особо, принят указанный подход.

Таким образом, если метрическое пространство обладает непрерывной изометрической группой симметрии, то это – k-параметрическая группа Ли преобразований этого пространства, или переходов от одних координат к другим, при которых сохраняется вид метрической функции.

Метрическая функция плоского n-мерного финслерова пространства всегда инвариантна относительно абелевой n-параметрической группы сдвигов по всем координатам, которая является подгруппой группы изометрической симметрии.

Преобразования координат $x^{i'}=x^{i'}(x^1,x^2,...,x^n)$ называются конформными, если метрическая функция $L(dx^{1'},...,dx^{n'})$ подвергается при этом следующему преобразованию:

$$L(dx^{1'},...,dx^{n'})=\kappa(x^1,...,x^n)\,L(dx^1,...,dx^n)$$

– то есть умножается на некоторую функцию $\kappa(x)$ точки основного пространства $x^1,x^2,...,x^n$.

Среди конформных преобразований плоского финслерова пространства всегда содержится общее масштабное преобразование, когда все координаты умножаются на произвольное действительное положительное число.

Пусть некое финслерово пространство обладает изометрической группой симметрии G, тогда всегда можно построить простейший линейный дифференциальный оператор $\hat{\Upsilon}$, который будет инвариантен относительно группы G, то есть будет иметь один и тот же вид до и после преобразований из группы G. Таким образом, в финслеровом пространстве, обладающем группой изометрической симметрии G, будет иметь место уравнение

$$\hat{\Upsilon}\psi=0\,, \tag{1.11.3}$$

где ψ – некоторое скалярное поле.

Так, на комплексной плоскости (в двумерном евклидовом пространстве) x, y непрерывная группа симметрии состоит из произвольных эллиптических поворотов

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1.11.4}$$

а простейший инвариантный оператор и уравнение поля соответственно имеют вид:

$$\hat{\Upsilon} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi = 0\,. \tag{1.11.5}$$

Это общеизвестные оператор Лапласа и уравнение Лапласа.

Как известно, на комплексной плоскости $z = x+iy$ важную роль играют конформные преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \quad u(x,y)\,, \\ y' &= \pm\, v(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{1.11.6}$$

I-го (верхний знак) и II-го (нижний знак) рода, которые однозначно определяются аналитической функцией $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ комплексной переменной $z = x+iy$. При таких преобразованиях и элемент длины, и оператор $\hat{\Upsilon}$ не остаются, вообще говоря, неизменными (инвариантными), но уравнение Лапласа переходит в эквивалентное уравнение, то есть решения уравнения Лапласа переходят опять в решения уравнения Лапласа:

$$\sqrt{(dx')^2 + (dy')^2} = \kappa(x,y)\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\,, \tag{1.11.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2}{\partial (y')^2} = \frac{1}{\kappa^2(x,y)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \tag{1.11.8}$$

$$\left.\begin{gathered} \left(\frac{\partial^2}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2}{\partial (y')^2}\right)\psi(x',y') = 0 \\ \Downarrow \\ \frac{1}{\kappa^2(x,y)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = 0\,, \end{gathered}\right\} \tag{1.11.9}$$

где

$$\kappa(x,y) = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \tag{1.11.10}$$

– коэффициент конформного растяжения-сжатия.

Приведённые свойства конформных преобразований носят весьма общий характер и не связаны только с квадратичными пространствами. Так, в предыдущем разделе рассматривалось трёхмерное пространство поличисел H_3; элемент длины (1.10.12) в этом пространстве инвариантен относительно абелевой двухпараметрической группы Ли $G_1(H_3) \ni \hat{g}$, где произвольный элемент $\hat{g}$ этой группы представим в виде:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} e^{\alpha+\beta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta} \end{pmatrix} . \tag{1.11.11}$$

Здесь α, β – произвольные действительные числа. Простейший инвариантный оператор и соответствующее уравнение поля имеют вид:

$$\hat{\Upsilon} = \frac{\partial^3}{\partial a^1 \partial a^2 \partial a^3}\,, \qquad \frac{\partial^3}{\partial a^1 \partial a^2 \partial a^3}\,\psi = 0\,. \tag{1.11.12}$$

Покажем, что преобразование в изотропном базисе в пространстве H_3, определяемое компонентами аналитической функции (1.10.34) формулами:

$$\left.\begin{aligned} a^{1'} &= f^1(a^1)\,, \\ a^{2'} &= f^2(a^2)\,, \\ a^{3'} &= f^3(a^3)\,, \end{aligned}\right\} \tag{1.11.13}$$

где $f^i(a)$ – функции одной действительной переменной a, удовлетворяющие условию

$$\frac{df^1}{da^1}\,\frac{df^2}{da^2}\,\frac{df^3}{da^3} > 0\,, \tag{1.11.14}$$

является конформным. При таком преобразовании и элемент длины, и оператор $\hat{\Upsilon}$ не остаются неизменными (инвариантными), но уравнение поля (1.11.12) переходит в эквивалентное уравнение, то есть решения уравнения переходят опять в решения того же самого уравнения:

$$\sqrt{da^{1'} da^{2'} da^{3'}} = \kappa(a^1, a^2, a^3)\sqrt{da^1 da^2 da^3}\,, \tag{1.11.15}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial a^{1'} \partial a^{2'} \partial a^{3'}} = \frac{1}{\kappa^3(a^1, a^2, a^3)}\,\frac{\partial^3}{\partial a^1 \partial a^2 \partial a^3}\,, \tag{1.11.16}$$

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial^3}{\partial a^{1'}\partial a^{2'}\partial a^{3'}}\,\psi(a^{1'},a^{2'},a^{3'})=0\\ \Downarrow \\ \dfrac{1}{\kappa^3(a^1,a^2,a^3)}\,\dfrac{\partial^3}{\partial a^1\partial a^2\partial a^3}\,\psi(a^1,a^2,a^3)=0\,,\end{array}\right\} \tag{1.11.17}$$

где

$$\kappa(a^1,a^2,a^3)=\sqrt[3]{\frac{df^1}{da^1}\,\frac{df^2}{da^3}\,\frac{df^3}{da^3}}\ . \tag{1.11.18}$$

– коэффициент конформного растяжения-сжатия.

Итак, как и на комплексной плоскости, конформные преобразования координат в пространстве H_3 связаны с аналитическими функциями полничисловой переменной и переводят решения ψ уравнения (1.11.12) в решения того же самого уравнения; но в отличие от комплексной плоскости уравнение (1.11.12) в пространстве H_3 имеет решения, не выражающиеся через линейную комбинацию компонент аналитической функции поличисловой переменной, например:

$$\psi=(a^2+a^3)f^1(a^1)+a^1\left(f^2(a^2)+f^3(a^3)\right)\ . \tag{1.11.19}$$

Как комплексные числа C, так и гиперкомплексные числа H_3 являются невырожденными поличислами Причём многие из их свойств, которые были отмечены выше, справедливы для любой системы невырожденных поличисел P_n. Перечислим некоторые из них как гипотезы, которые следует проверить и доказать.

1. Невырожденные поличисловые пространства являются финслеровыми пространствами.
2. Конформные преобразования в невырожденных поличисловых пространствах тесно связаны с аналитическими функциями поличисловой переменной и функционально записываются через компоненты этих функций.
3. Конформные преобразования координат переводят решения некого фундаментального уравнения опять в решения того же уравнения.

Таким образом, конформная группа симметрии, точно так же как и изометрическая группа симметрии, связана как с геометрией, так и с алгеброй невырожденных поличисел. Возникает вопрос о возможности обобщения "цепочки" симметрий: изометрическая группа симметрии, конформная группа симметрии, ещё неизвестная, более общая группа симметрии. Существует много пока ещё до конца не реализованных попыток: через обобщение понятия аналитической функции поличисловой переменной [34]; прямое обобщение понятия конформного преобразования в пространствах аффинной связанности [37]; через обобщение "цепочки" инвариантов группы симметрии: расстояние, угол, трингл [33].

В данном разделе выявился ещё один подход к введению группы симметрии, более общей, чем конформная группа, как группы, переводящей решения некого фундаментального уравнения опять в решения того же уравнения, то есть переводящей фундаментальное уравнение опять в фундаментальное уравнение.

Как получаются фундаментальные уравнения в финслеровых пространствах, конформно связанных с поличисловыми, кратко изложено в разделе 1.8, см. также [41].

1.12 Интерпретации

Установление взаимно однозначного соответствия между событиями и точками некоторого координатного пространства x^0, x^1, x^2, x^3 невозможно даже в некоторой конечной и "небольшой" области пространства событий. Поэтому работая в координатном пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 и получая результаты, достаточно уметь интерпретировать эти результаты, то есть иметь возможность сопоставлять им физически измеряемые или наблюдаемые величины. Установление такой связи между координатным пространством и физическим Миром будем называть проблемой *интерпретации.*

В *основным* координатном пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 разрешен переход к любой другой системе координат:

$$x^{i'} = f^i(x^0, x^1, x^2, x^3)\,, \tag{1.12.1}$$

где f^i – достаточное число раз дифференцируемые функции, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между старыми и новыми координатами.

Основное координатное пространство x^0, x^1, x^2, x^3 всегда будем считать финслеровым пространством.

В основном пространстве для любой точки M всегда найдется такая система координат x^0, x^1, x^2, x^3, что в окрестности точки M координату x^0 можно отождествить с точностью до постоянного множителя с измеряемым временем, а координаты x^1, x^2, x^3 – с обычными декартовыми прямоугольными координатами евклидового трехмерного пространства, в котором мы привыкли себя ощущать и в которое мы себя мысленно помещаем.

Будем также предполагать, что в каждой точке основного координатного пространства известны значения всех необходимых на данный момент физических полей.

Взяв за основу представления классической механики и предположив, что в каждой точке пространства событий находится некоторое время живущая частица; проследив за этими частицами, получим конгруэнцию мировых линий, которая (конгруэнция) соответствует физическому Миру. Кроме положения каждой частицы в любой момент времени, необходимы еще некоторые энергетические характеристики частицы. Таким образом, "в нулевом приближении" можно описать физический Мир и его эволюцию, если известна пара полей: *{поле скоростей; поле импульсов}*, или *{поле обобщенных скоростей; поле обобщенных импульсов}*.

Как было показано в разделе 1.7, каждому физическому Миру, с точки зрения классической механики, соответствует более, чем одна финслерова геометрия. Таким образом, возможно рассмотрение как множества переходов от одной геометрии к качественно другой, так и множества преобразований, когда решение фундаментального уравнения в одной геометрии переходит в решение фундаментального уравнения в качественно другой геометрии, если эти геометрии описывают один и тот же физический Мир. Возникает также задача поиска полей в качественно разных финслеровых геометриях, относящихся к одному и тому же физическому Миру с одним и тем же физическим полем. Это может приблизить нас к решению проблемы интерпретации в одном финслеровом пространстве, если она решена в другом.

Глава 2

ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ

Данная глава является конспектом с небольшими изменениями главы X монографии П. К. Рашевского [1].

2.1 Гиперповерхность в центроаффинном пространстве

Пусть в каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного n-мерного координатного пространства задано центроаффинное координатное пространство $\mathcal{A}_n(M) \ni (\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)$, центр которого отождествляется с точкой $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства.

В центроаффинном пространстве имеет место двойственность между точками (за исключением центра), с одной стороны, и гиперплоскостями (за исключением гиперплоскостей, проходящих через центр), с другой.

В пространстве $\mathcal{A}_n(M)$ любая гиперплоскость, не проходящая через центр, может быть задана уравнением

$$p_1\xi^1 + p_2\xi^2 + ... + p_n\xi^n = 1\,. \tag{2.1.1}$$

Коэффициенты $p_1, p_2, ..., p_n$ будем называть *координатами гиперплоскости*. Уравнение гиперплоскости совершенно симметрично относительно координат точки на данной гиперплоскости, с одной стороны, и координат гиперплоскости, с другой стороны.

Пусть нам дана теперь в пространстве $\mathcal{A}_n(M)$ какая-нибудь гиперповерхность:

$$\Lambda(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n) = 0\,. \tag{2.1.2}$$

Мы предполагаем, что частные производные $\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\xi^i}$ не обращаются одновременно в нуль. Если мы из какой-нибудь точки гиперповерхности $R(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)$ сместимся в бесконечно близкую ей точку $R'(\xi + d\xi)$

той же самой гиперповерхности, то вектор бесконечно малого смещения $RR' = (d\xi^1, d\xi^2, ..., d\xi^n)$ будет очевидно подчиняться условию

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\xi^i} \cdot d\xi^i = 0\,. \tag{2.1.3}$$

Построим касательную гиперплоскость к гиперповерхности в точке R, то есть гиперплоскость, проходящую через точку R и векторы RR'. Тогда, кроме уравнения (2.1.1), должно выполняться условие

$$p_i(\xi^i + d\xi^i) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad p_i d\xi^i = 0\,, \tag{2.1.4}$$

из которого, учитывая соотношение (2.1.3), получим

$$p_i = \mu_1 \frac{\partial\Lambda}{\partial\xi^i}\,, \tag{2.1.5}$$

где μ_1 – некоторая скалярная функция. Будем предполагать, что

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\xi^i} \cdot \xi^i \neq 0\,. \tag{2.1.6}$$

Подставив (2.1.5) в (2.1.1), получим

$$\mu_1 = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\xi^i} \cdot \xi^i\right)^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad p_i = \frac{\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\xi^i}}{\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\xi^i} \cdot \xi^i}\,. \tag{2.1.7}$$

Теперь применим к той же гиперповерхности двойственный подход, то есть будем рассматривать её как огибающую семейства касательных к ней гиперплоскостей. Уравнения (2.1.7) можно рассматривать как параметрическое представление семейства касательных гиперплоскостей. Параметрами здесь служат $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$, сами связанные уравнением (2.1.2), так что между $p_1, p_2, ..., p_n$ имеется по крайней мере одна функциональная зависимость

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n) = 0\,. \tag{2.1.8}$$

Будем предполагать, что эта зависимость только одна. Тогда устраняется случай, при котором общее количество гиперплоскостей менее ∞^{n-1} и каждая гиперплоскость касается гиперповерхности по целой линии или поверхности.

Можно считать, что уравнение (2.1.8) (в определенной области изменения $p_1, p_2, ..., p_n$) определяет совокупность касательных гиперплоскостей к гиперповерхности и служит таким образом *тангенциальным уравнением* последней. Относительно тангенциального уравнения гиперповерхности, мы будем предполагать выполнение неравенства

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\cdot p_i \neq 0\,, \tag{2.1.9}$$

аналогичного допущению (2.1.6). Условие (2.1.9) может быть получено как следствие остальных требований и предположения, что производные $\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}$ нигде не обращаются в нуль одновременно.

Пусть точка $R(\xi^1,\xi^2,...,\xi^n)$ пробегает гиперповерхность, и пусть $(p_1,p_2,...,p_n)$ – касательная гиперплоскость в этой точке гиперповерхности. Тогда все время выполняется условие (2.1.1). При бесконечно малом смещении точки R и учёте (2.1.4) получаем:

$$\xi^i dp_i + p_i d\xi^i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \xi^i dp_i = 0\,. \tag{2.1.10}$$

Из (2.1.8) следует, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\cdot dp_i = 0. \tag{2.1.11}$$

Сравнивая (2.1.10) и (2.1.11) и учитывая то, что $\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}$ нигде не обращаются в нуль одновременно, приходим к зависимости

$$\xi^i = \lambda_1\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\,, \tag{2.1.12}$$

где λ_1 – некоторый коэффициент пропорциональности. Подставляя (2.1.12) в (2.1.1), находим

$$\lambda_1 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\cdot p_i\right)^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \xi^i = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_i}\cdot p_i}\,. \tag{2.1.13}$$

Исходя из тангенциального уравнения гиперповерхности и задаваясь координатами гиперплоскости, находим по формулам (2.1.13) координаты точки касания. Эти формулы вместе с тангенциальным уравнением гиперповерхности (2.1.8) определяют параметрически рассматриваемую гиперповерхность, то есть, исключая из них все p_i, находим точечное уравнение гиперповерхности вида (2.1.2). Полученные формулы (2.1.13) аналогичны (двойственны) формулам (2.1.7).

Итак, при выполнении указанных выше условий, гиперповерхность можно определять и точечным и и тангенциальным уравнениями, причем переход от одного описания к другому осуществляется аналогичными (двойственными) формулами, которые переходят друг в друга при замене:

$$\Lambda \leftrightarrow \Phi\,, \quad \xi^i \leftrightarrow p_i\,. \tag{2.1.14}$$

2.2 Финслерово пространство

Пусть в каждой точке M основного координатного пространства $x^1, x^2, ..., x^n$ в соответствующем центроаффинном пространстве $\mathcal{A}_n(M)$ задана некоторая гиперповерхность (*индикатриса*). При этом полагается, что каждый луч, исходящий из точки M, пересекает индикатрису не более, чем в одной точке. Такое координатное пространство $x^1, x^2, ..., x^n$ будем называть *финслеровым пространством.*

Кроме того, будем предполагать, что индикатриса удовлетворяет всем условиям предыдущего параграфа, то есть для неё возможно двойственное описание (точечное и тангенциальное), и формулы перехода между такими описаниями также двойственны.

Финслерово пространство является пространством метрическим, причем метрика вводится в нём следующим образом. Пусть ξ – какой-нибудь вектор, заданный в некоторой точке M финслерова пространства. Проведем в пространстве $\mathcal{A}_n(M)$ из точки M луч, направленный по вектору ξ, и пересечем его с индикатрисой в некоторой точке R. Вектор

$$\xi_{ind} = MR\,, \tag{2.2.1}$$

соединяющий точку M с индикатрисой, условимся принимать за единицу масштаба в данном направлении. Вектор ξ_{ind} имеет то же направление, что и вектор ξ, то есть ξ отличается от ξ_{ind} лишь действительным положительным множителем l:

$$\xi = l \cdot \xi_{ind}\,, \qquad l > 0\,. \tag{2.2.2}$$

Число $l \equiv |\xi|$ будем называть длиной вектора ξ в финслеровом пространстве в точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$. Если луч, направленный по ξ, с индикатрисой не пересекается, то вектор ξ длины не имеет, то есть длина вектора ξ не определена, как и любого другого вектора сонаправленного вектору ξ. Можно говорить о возможности или невозможности определения длины по некоторому направлению. Непосредственно из такого определенная длины вектора в центроаффинном пространстве следует положительная однородность первого порядка этой величины по координатам вектора: если $\tilde{\xi}^i = a\xi^i$ и $a > 0$, то $|\tilde{\xi}| = a|\xi|$. Элемент длины dl в основном координатном пространстве для бесконечно малого смещения $dx = \varepsilon\xi$, где $\varepsilon > 0$ –

бесконечно малая действительная величина, естественно определить как

$$dl = \varepsilon|\xi|\,. \tag{2.2.3}$$

Индикатриса приобретает теперь смысл геометрического места концов единичных векторов, отложенных из центра.

Подчеркнём особо очевидный факт: любое касательное пространство в каждой точке финслерова пространства является метрическим вместе с основным пространством.

С целью более удобного обращения с метрикой можно придать точечному уравнению индикатрисы (2.1.2), которое с полным указанием аргументов записывается как

$$\Lambda(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n) = 0\,, \tag{2.2.4}$$

специальный вид. Рассмотрим область измеримых (имеющих длину) векторов ξ в каждой данной точке M финслерова пространства. Эта область имеет вид конуса с вершиной в точке M, так как наряду с вектором ξ в неё входят и все векторы того же направления (сонаправленные векторы), то есть отличающиеся от ξ положительным численным множителем. Нулевой вектор не будем включать в эту область, так как он не измерим в описанном выше смысле, хотя ему необходимо приписать длину нуль. Дополнительная причина такой осторожности заключается в том, что при $\xi = 0$ функция, которую мы введем, может имеет особенность или терять гладкость.

В области измеримых векторов ξ в данной точке финслерова пространства M длина вектора будет являться, очевидно, функцией координат вектора и, конечно, координат точки M, в которой взят вектор. Обозначим эту функцию через $L(\xi, x)$, тогда

$$|\xi| = L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n) > 0\,. \tag{2.2.5}$$

В частности, если взят измеримый вектор $MM'(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ бесконечно малого смещения из точки M в бесконечно близкую точку M', то мы получим дифференциал дуги (элемент длины) в финслеровом пространстве, согласно формуле

$$ds = L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n) > 0\,. \tag{2.2.6}$$

Важной особенностью функции L является её положительная однородность первой степени по первым n аргументам. Действительно, как уже отмечалось, если умножить $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ на одно и то же число $a > 0$, то вектор ξ также умножится на число a, и, как видно из (2.2.2), длина его l тоже умножается на a. Отсюда вытекает, что

$$L(a\xi^1, ..., a\xi^n; x^1, ..., x^n) = aL(\xi^1, ..., \xi^n; x^1, ..., x^n)\,. \tag{2.2.7}$$

После введения *метрической функции* L уравнение индикатрисы принимает вид

$$L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n) = 1\,. \tag{2.2.8}$$

По известному свойству однородной функции первой степени,

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^i} \cdot \xi^i = L\,. \tag{2.2.9}$$

Если ξ_{ind} – радиус-вектор индикатрисы, то

$$\left.\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i} \cdot \xi^i\right)\right|_{\xi=\xi_{ind}} = 1\,. \tag{2.2.10}$$

Выразим теперь координаты касательной гиперплоскости в данной точке индикатрисы по формулам (2.1.7). Учитывая (2.2.10), получим

$$p_i = \left.\frac{\partial L(\xi; x)}{\partial \xi^i}\right|_{\xi=\xi_{ind}}\,. \tag{2.2.11}$$

Итак, координаты касательной к индикатрисе гиперплоскости p_i в точке ξ_{ind} совпадают с частными производными функции L по ξ^i.

В первой главе величины p_i мы называли компонентами импульса, или компонентами обобщённого импульса. Теперь выяснен геометрический смысл этих величин.

Важно отметить, что частные производные $\dfrac{\partial L}{\partial \xi^i}$ будут однородными нулевой степени функциями от $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$, а потому зависят не от вектора ξ, а только от его направления. В формулах (2.2.11) под ξ можно понимать в связи с этим любой вектор, идущий из точки M по направлению к точке касания R гиперплоскости $(p_1, p_2, ..., p_n)$ с индикатрисой.

Векторы, направленные по касательной гиперплоскости в точке R, мы будем называть *трансверсальными* по отношению к направлению MR, или к вектору ξ, идущему в этом же направлении.

Трансверсальные по отношению к ξ векторы η характеризуются уравнением

$$p_1\eta^1 + p_2\eta^2 + ... + p_n\eta^n = 0\,, \tag{2.2.12}$$

где p_i определяются согласно (2.2.11). Действительно, касательная гиперплоскость определяется уравнением

$$p_i\xi^i = 1\,, \tag{2.2.13}$$

следовательно векторы, "на ней лежащие", то есть разности её радиус-векторов, всегда удовлетворяют условию (2.2.12) и обратно.

Можно считать. что уравнение (2.2.12) определяет трансверсальную по отношению к направлению ξ гиперплоскость, проходящую через точку M параллельно касательной гиперплоскости в точке индикатрисы R.

Уравнения (2.2.11) являются тангенциальными уравнениями индикатрисы в параметрической форме. Если исключить из них $(n-1)$ параметр, то получим тангенциальное уравнение индикатрисы:

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n; x^1, x^2, ..., x^n) = 0\,. \tag{2.2.14}$$

В соответствии с выше принятыми соглашениями функциональная зависимость между $p_1, p_2, ..., p_n$ будет лишь одна. Сейчас мы можем это условие записать явно, используя метрическую функцию L. Составим полные дифференциалы величин $p_1, p_2, ..., p_n$ как функций независимых переменных $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$:

$$dp_i = \frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\cdot d\xi^j\,. \tag{2.2.15}$$

Число линейно независимых dp_i, очевидно, равно рангу матрицы

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\right)\,. \tag{2.2.16}$$

Тогда условие единственной зависимости (2.2.14) будет заключаться в том, чтобы ранг данной матрицы был равен $(n-1)$. Равным n ранг быть не может, так как между столбцами матрицы (2.2.16) всегда имеется линейная зависимость

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\cdot\xi^j = 0\,, \tag{2.2.17}$$

по свойству однородности нулевой степени функции $\dfrac{\partial L}{\partial\xi^i}$ по первым n аргументам.

Финслерова геометрия определяется произвольным выбором метрической функции $L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n) > 0$ в каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства в конусообразной области изменения $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ (все векторы этого конуса будут являться измеримыми векторами), положительно однородной первой степени относительно первых n аргументов и подчиненной условию: матрица (2.2.16) имеет ранг $(n-1)$.

Действительно, из этих условий вытекает единственность функциональной зависимости (2.2.14), так что это уравнение может служить тангенциальным уравнением индикатрисы. Предполагается, что оно записано таким образом, что в рассматриваемой области производные $\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_i}$ нигде не обращаются в нуль одновременно. Этим удовлетворяются все условия, сформулированные в конце предыдущего параграфа.

На некоторых векторах метрическая функция может обращаться в нуль. Будем называть такие векторы *изотропными*. Нулевой вектор не будем относить ни к изотропным векторам, ни к измеримым, так как в центре ($\xi = 0$) центроаффинного касательного пространства метрическая функция может иметь особенность. Однако, если нулевой вектор понимать как $0 = \varepsilon\xi$, где ξ – измеримый вектор, а действительная переменная $\varepsilon \to 0$, то в этом смысле длина нулевого вектора, конечно, всегда определена и равна нулю. Таким образом, все множество векторов касательного пространства является объединением четырёх не пересекающихся множеств: нулевого вектора, множества изотропных векторов, множества измеримых векторов и множества неизмеримых векторов, для последних длина не может быть определена.

Выбор (определение) метрической функции $L(\xi; x)$ включает в себя и задание области её определения, то есть задание конической области измеримых векторов.

Вернёмся к понятию трансверсальности двух направлений в данной точке финслерова пространства. Это понятие не является в общем случае взаимным в финслеровых пространствах, то есть если вектор η трансверсален вектору ξ, то из этого не следует, что вектор ξ трансверсален вектору η. В то же время трансверсальность является обобщением понятия ортогональности квадратичных пространств (евклидовых, псевдоевклидовых, римановых и псевдоримановых). Геометрию таких пространств можно рассматривать, как частный случай финслеровой геометрии, когда индикатриса в каждой точке основного пространства представляет собой невырожденную центральную гиперповерхность второго порядка в касательном пространстве с центром в точке M. Уравнение такой гиперповерхности имеет вид

$$g_{ij}\xi^i\xi^j = 1\,, \tag{2.2.18}$$

где в левой части стоит квадратичная форма ранга n от аргументов $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$, то есть $det(g_{ij}) \neq 0$. Коэффициенты формы зависят от выбора точки $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства:

$$g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, ..., x^n)\,, \qquad g_{ij} = g_{ji}\,. \tag{2.2.19}$$

Очевидно, что метрическая функция L в данном случае определяется формулой

$$L(\xi; x) = +\sqrt{g_{ij}(x)\xi^i\xi^j}\,. \tag{2.2.20}$$

Измеримыми будут те и только те векторы ξ, для которых квадратичная форма $g_{ij}\xi^i\xi^j$ имеет положительное значение. В евклидовой и римановой геометриях все векторы измеримы, кроме нулевого. Для квадратичных геометрий метрическая функция не имеет особенности в центре $\xi = 0$.

Пусть ξ какой-нибудь измеримый вектор. Найдём для него трансверсальные векторы η, для этого вычислим $p_i(\xi)$

$$p_i(\xi) = \frac{g_{ij}\xi^j}{\sqrt{g_{km}(x)\xi^k\xi^m}}\,, \tag{2.2.21}$$

и запишем уравнение трансверсальности (2.2.12), из которого получим

$$g_{ij}(x)\eta^i\xi^j = 0\,. \tag{2.2.22}$$

В квадратичных геометриях векторы, связанные этим условием, называются взаимно ортогональными.

Покажем, что трансверсальность обладает свойством экстремальности. Если в евклидовом пространстве задана прямая и точка M вне её, то можно точку M соединить с прямой вектором ξ, который будет ортогонален прямой, а прямая и направляющий вектор прямой η будут ортогональны вектору ξ. Такой вектор ξ имеет минимальную длину из всех векторов MR, где R – произвольная точка на прямой. Сформулируем аналогичную задачу в центроаффинном касательном пространстве $\mathcal{A}_n(M)$ некоторого финслерова пространства. Прямую зададим параметрически

$$\xi^i = \xi^i_{(0)} + \eta^i\tau\,, \tag{2.2.23}$$

где $\xi_{(0)}$ – фиксированная точка, η – направляющий вектор, τ – действительный параметр. Пусть в пределах $\tau_1 \le \tau \le \tau_2$ вектор ξ измерим, тогда расстояние от центра до переменой точки ξ на прямой равно

$$l(\tau) = L(\xi)\,. \tag{2.2.24}$$

Предположим, что существует экстремум функции $l(\tau)$ в точке τ^*, $\tau_1 < \tau^* < \tau_2$. Необходимое условие экстремума $\dfrac{dl}{d\tau} = 0$ запишем с учетом формул

(2.2.23) и (2.2.24):

$$\left.\frac{\partial L(\xi)}{\partial \xi^i}\right|_{\tau=\tau^*} \cdot \eta^i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_i(\xi^*)\eta^i = 0\,. \tag{2.2.25}$$

Таким образом, для того чтобы вектор ξ, соединяющий некоторую точку в пространстве $\mathcal{A}_n(M)$ с прямой в том же пространстве, имел экстремальную длину, направляющий вектор η прямой должен быть трансверсален вектору ξ.

Еще раз подчеркнём, что для квадратичных пространств понятие трансверсальности совпадает с понятием ортогональности, которое "коммутативно". В общем случае неквадратичных пространств, как видно из формулы (2.2.25), если вектор η трансверсален вектору ξ, то вектор ξ может быть нетрансверсален вектору η. Итак, в общем случае в финслеровых пространствах понятие трансверсальности "некоммутативно".

2.3 Геодезические линии

Будем рассматривать в финслеровом пространстве кривые в параметрическом представлении

$$x^i = x^i(\tau)\,. \tag{2.3.1}$$

Здесь τ – параметр, монотонно и непрерывно возрастающий от некоторого начального значения τ_0 до конечного τ_1:

$$\tau_0 \le \tau \le \tau_1\,. \tag{2.3.2}$$

Такие кривые можно понимать как мировые линии или траектории движения материальных частиц (материальных точек). В качестве параметра τ можно выбрать любую координату x^i, если эта координата на данном отрезке кривой изменяется непрерывно и монотонно. Дифференциал дуги для бесконечно малого измеримого участка кривой определяется формулой:

$$ds = L(dx^1, ..., dx^n; x^1, ..., x^n) = L(\dot{x}^1, ..., \dot{x}^n; x^1, ..., x^n)d\tau\,, \tag{2.3.3}$$

где

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau}\,. \tag{2.3.4}$$

Формула (2.3.3) в общем случае справедлива только для непрерывно и монотонно возрастающего параметра эволюции, то есть для $d\tau > 0$, при этом вектор скорости $\dot{x}$ имеет то же направление, что и вектор смещения

dx по кривой. Будем предполагать, что в каждой точке рассматриваемой кривой при выполнении (2.3.2) направление $\dot{x}$ лежит в области существования функции L, так что формула (2.3.3) имеет смысл. Вектор $\dot{x}$ назовем *обобщённой скоростью*, или *контравариантной скоростью*, а метрическую функцию, первые n аргументов которой являются компонентами обобщённой скорости, $L(\dot{x}^1, \dot{x}^2, ..., \dot{x}^n;\ x^1, x^2, ..., x^n)$ естественно называть *функцией Лагранжа.*

В каждой точке M на кривой пересекаем касательное к кривой направление $(\dot{x}^1, \dot{x}^2, ..., \dot{x}^n)$ с индикатрисой в касательном пространстве $\mathcal{A}_n(M)$ и строим в точке пересечения касательную к индикатрисе гиперплоскость. Координаты этой гиперплоскости (компоненты обобщённого импульса) вычисляются по формулам (2.2.11):

$$p_i = \frac{\partial L(\dot{x}; x)}{\partial \dot{x}^i}\,. \tag{2.3.5}$$

Обобщённые импульсы связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n; x^1, x^2, ..., x^n) = 0\,. \tag{2.3.6}$$

По формулам (2.1.13) можно получить касательное к кривой направление $\dot{x}$ (вектор обобщённой скорости) через компоненты обобщённого импульса p:

$$\dot{x}^i = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_k} \cdot p_k}\,. \tag{2.3.7}$$

Формулы (2.3.6), (2.3.7) задают параметрически индикатрису, то есть исключая из них все p_i, получим точечное уравнение индикатрисы

$$\Lambda(\dot{x}; x) = 0\,, \tag{2.3.8}$$

которое всегда можно преобразовать к виду

$$L(\dot{x}; x) = 1\,, \tag{2.3.9}$$

где L – положительно однородная функция первой степени относительно первых n аргументов. Функция L и будет исходной метрической функцией (функцией Лагранжа). Тем самым, для того чтобы по известному тангенциальному уравнению индикатрисы восстановить метрическую функцию (функцию Лагранжа), совсем не обязательно решать нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных (1.3.11), достаточно выполнить описанную выше процедуру.

Итак, финслерово пространство, в его классическом понимании [1], обладает замечательным свойством: если известна метрическая функция, то однозначно, с точностью до эквивалентности, можно получить тангенциальное уравнение индикатрисы; и обратно, если известна функция Финслера, то однозначно можно получить метрическую функцию.

Ещё раз подчеркнём, что функция Финслера определяется не однозначно, а с точностью до перехода от одного тангенциального уравнения индикатрисы к другому эквивалентному, но записывать тангенциальные уравнения индикатрисы надо так, чтобы частные производные функции Финслера по p_i не обращались в нуль одновременно.

Вдоль кривой (2.3.1) величины p_i являются функциями параметра τ. Пользуясь известным свойством однородных функций, получим

$$L(\dot{x}; x) = p_i \dot{x}^i \,, \tag{2.3.10}$$

тогда

$$ds = p_i dx^i = p_i \dot{x}^i d\tau \,, \tag{2.3.11}$$

а длина кривой в целом определяется формулой

$$s = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} L(\dot{x}^1, ..., \dot{x}^n; x^1, ..., x^n) d\tau = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} p_i dx^i \,. \tag{2.3.12}$$

Включим кривую (2.3.1) в произвольно выбранное семейство кривых, зависящих от некоторого параметра α:

$$x^i = x^i(\tau, \alpha) \,. \tag{2.3.13}$$

Пусть функции $x^i(\tau, \alpha)$ определены при тех же значениях (2.3.2) параметра τ и при значениях α на некотором интервале вблизи нуля. При этом при $\alpha = 0$ кривая семейства должна совпадать с исходной кривой:

$$x^i(\tau, 0) = x^i(\tau) \,. \tag{2.3.14}$$

Длина s кривой семейства, определяемая формулой (2.3.12), будет, очевидно, функцией α. Вариацией какой-либо величины, зависящей от τ и α, мы будем называть её частный дифференциал по аргументу α. Обозначая вариацию символом δ и частный дифференциал по τ символом d, вычислим вариацию длины дуги, определенной на семействе кривых, получим

$$\delta s = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} (\delta p_i dx^i + p_i \delta dx^i) \,. \tag{2.3.15}$$

Учитывая, что $\delta(dx^i) = d(\delta x^i)$, проинтегрируем второе слагаемое по частям:

$$\delta s = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} (\delta p_i dx^i - dp_i \delta x^i) + (p_i \delta x^i)_1 - (p_i \delta x^i)_0 \,. \tag{2.3.16}$$

Формулы (2.3.7) нам дают

$$dx^i = \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \,, \tag{2.3.17}$$

где σ – некоторый коэффициент пропорциональности. Подставив (2.3.17) в (2.3.16), получим

$$\delta s = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \delta p_i - dp_i \delta x^i \right) + (p_i \delta x^i)_1 - (p_i \delta x^i)_0 \,. \tag{2.3.18}$$

Возьмем вариацию от левой и правой части тангенциального уравнения индикатрисы:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \delta p_i + \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \cdot \delta x^i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \delta p_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \cdot \delta x^i \,. \tag{2.3.19}$$

Подставляя полученное выражение для $\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \delta p_i$ в (2.3.18), имеем

$$\delta s = -\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + dp_i \right) \delta x^i + (p_i \delta x^i)_1 - (p_i \delta x^i)_0 \,. \tag{2.3.20}$$

Кривая называется *"геодезической линией"* (*экстремалью*) финслерова пространства, если вариация её длины всегда равна нулю при условии, что концы кривой остаются закрепленными. Отметим, что такое понимание геодезической линии является более общим, чем геодезическая линия, как линия наименьшей длины между двумя фиксированными точками. Следовало бы употреблять термин "*экстремаль*", но термин "*геодезическая*" позволяет более правильно ориентироваться при переходе от геометрических к физическим представлениям и наоборот.

Выписывая формулу (2.3.20) для "геодезической линии", получим:

$$0 = -\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + dp_i \right) \delta x^i \,, \tag{2.3.21}$$

так как $\delta s = 0$, а $(\delta x^i)_1 = 0$ и $(\delta x^i)_0 = 0$ в силу закрепления концов кривой. В остальном вариации δx^i совершенно произвольны, так что по основной лемме вариационного исчисления имеем:

$$\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + dp_i = 0\,. \tag{2.3.22}$$

Присоединяя к этим соотношениям соотношения (2.3.17) и исключая коэффициент пропорциональности σ, получим

$$\frac{dx^1}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_1}} = \frac{dx^2}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_2}} = ... = \frac{dx^n}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_n}} = -\frac{dp_1}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1}} = -\frac{dp_2}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2}} = ... = -\frac{dp_n}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^n}} \tag{2.3.23}$$

и, кроме того,

$$\Phi(p; x) = 0\,. \tag{2.3.24}$$

Если метрика финслерова пространства задана тангенциальным уравнением индикатрисы (2.3.24), то изменение величин $x^1, x^2, ..., x^n$, $p_1, p_2, ..., p_n$ вдоль "геодезических линий" характеризуются дифференциальными уравнениями (2.3.23) и конечной зависимостью (2.3.24). Эту систему уравнений (2.3.23), (2.3.24) будем называть *каноническими уравнениями* "геодезических" (экстремалей) финслерова пространства. Так как из системы уравнений (2.3.23) следует, что вдоль "геодезической линии"

$$d\Phi(p; x) = 0\,, \tag{2.3.25}$$

то для соблюдения зависимости (2.3.24) вдоль всей "геодезической" достаточно потребовать её соблюдения в одной точке.

Канонические уравнения удобно записать в несколько иной форме, обозначив общее отношение в (2.3.23) через $\lambda(p; x) d\tau$, получим канонические уравнения экстремалей финслерова пространства в виде:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \cdot \lambda\,, \tag{2.3.26}$$

где λ – некая произвольная функция x и p, причем на всем рассматриваемом отрезке геодезической $\lambda \neq 0$, а $\dot{x}$ и $\dot{p}$ – производные от x^i и p_i по параметру τ вдоль экстремали. Параметр эволюции τ, вообще говоря, не совпадает с параметром τ в исходном задании семейства кривых (2.3.13). Выбор функции $\lambda(p; x)$ меняет параметризацию геодезической, так при замене $\lambda(p; x) \to -\lambda(p; x)$ происходит замена $\tau \to -\tau$, то же самое происходит при замене $\Phi \to -\Phi$, поэтому всегда можно подобрать Φ и λ так, чтобы параметр эволюции монотонно возрастал, что важно при работе с метрической функцией $L(dx; x)$.

Через каждую точку $M_0(x^1_{(0)}, x^2_{(0)}, ..., x^n_{(0)})$ финслерова пространства, в окрестности которой существуют измеримые направления, по каждому измеримому направлению можно провести "геодезическую".

Действительно, пусть вектор $\dot{x}_{(0)}$ задает измеримое направление. Введем величины

$$p_{(0)i} = \frac{\partial L(\dot{x}_{(0)}; x_{(0)})}{\partial \dot{x}_{(0)}} \qquad (2.3.27)$$

и проинтегрируем систему (2.3.26) при начальных условиях

$$x^i(\tau_0) = x^i_{(0)}\,, \qquad p_i(\tau_0) = p_{(0)i}\,. \qquad (2.3.28)$$

В результате переменные $x^1, x^2, ..., x^n, p_1, p_2, ..., p_n$ определяются как функции параметра τ, по крайней мере, в окрестности значений $\tau = \tau_0$.

Канонические уравнения (2.3.26) в классической механике обычно называют уравнениями Гамильтона. Они составляют систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2n$ неизвестных функций $p(\tau)$ и $x(\tau)$. При этом пары $\{x^i, p_i\}$ называют *канонически сопряжёнными величинами* (переменными). Эта система уравнений заменяет собой n дифференциальных уравнений второго порядка (1.3.4), которые имеют место в лагранжевом формализме для n неизвестных функций $x(\tau)$.

Обычно в физике хотя бы одна координата является временем или временеподобной, пусть это x^0. Именно её часто выбирают параметром эволюции в нерелятивистской классической механике. Тогда $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$ – основное координатное пространство с одной выделенной координатой x^0. Запишем тангенциальное уравнение индикатрисы в разрешённом относительно p_0 виде:

$$p_0 - H(p_1, p_3, ..., p_{n-1}; x^0, x^1, ..., x^{n-1}) = 0\,. \qquad (2.3.29)$$

Уравнения (2.3.23) перепишется следующим образом:

$$\frac{dx^0}{1} = -\frac{dx^1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = ... = -\frac{dx^{n-1}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_{n-1}}} = \frac{dp_0}{\dfrac{\partial H}{\partial x^0}} = \frac{dp_1}{\dfrac{\partial H}{\partial x^1}} = ... = \frac{dp_{n-1}}{\dfrac{\partial H}{\partial x^{n-1}}}\,. \qquad (2.3.30)$$

Положим $\lambda \equiv 1$, тогда система уравнений (2.3.26), определяющих геодезическую, принимает вид

$$\dot{x}^0 = 1\,, \quad \dot{x}^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,, \qquad \dot{p}_0 = \frac{\partial H}{\partial x^0}\,, \quad \dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\,. \qquad (2.3.31)$$

В этой системе $2n$ уравнений, первое уравнение тривиально:

$$\frac{dx^0}{dx^0} = 1\,. \tag{2.3.32}$$

Из уравнения индикатрисы имеем

$$\frac{dp_0}{dx^0} = \frac{dH}{dx^0}\,, \tag{2.3.33}$$

но

$$\frac{dH}{dx^0} = \frac{\partial H}{\partial x^0} + \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial x^0} - \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\,, \tag{2.3.34}$$

то есть

$$\frac{dH}{dx^0} = \frac{\partial H}{\partial x^0}\,. \tag{2.3.35}$$

Таким образом, $(n+1)$-е уравнение

$$\frac{dp_0}{dx^0} = \frac{\partial H}{\partial x^0} \tag{2.3.36}$$

следует из остальных и уравнения индикатрисы (2.3.29).

Итак, уравнения (2.3.32) и (2.3.36) можно отбросить, а оставшиеся дифференциальные уравнения первого порядка

$$\dot{x}^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,, \qquad \dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\,, \tag{2.3.37}$$

число которых равно $2(n-1)$, будут описывать "геодезическую" (экстремаль), или траекторию движения частицы в финслеровом пространстве с тангенциальным уравнением индикатрисы, записанным в специальном виде (2.3.29), и с параметром эволюции, совпадающим с выделенной координатой x^0. Уравнения (2.3.37), если в правых частях поменять знак на противоположный, совпадают с каноническими уравнениями классической механики, уравнениями Гамильтона [17]. Такое отличие в знаках формально можно объяснить тем, что в классической механике обычно принято использовать импульсы с контравариантными индексами. Если в формулах (2.3.37) чисто формально заменить p_α на $(-p^\alpha)$, то получим полное совпадение формул (2.3.37) с уравнениями движения Гамильтона.

В классической механике функцию $H(p_1, ..., p_{n-1}; x^0, x^1, ..., x^{n-1})$ принято называть функцией Гамильтона. В финслеровой геометрии ту же роль выполняет функция Финслера $\Phi(x;p)$ из левой части тангенциального уравнения индикатрисы

$$\Phi(x^0, x^1, ..., x^{n-1}; p_0, p_1, ..., p_{n-1}) = 0\,. \tag{2.3.38}$$

Рассмотрим четырёхмерное финслерово пространство одной нерелятивистской частицы, которая находится в потенциальном поле, независящем от времени, с метрической функцией (1.2.35) и тангенциальным уравнением индикатрисы (1.3.20), или (2.3.29), где гамильтониан H определяется формулой:

$$H(p_1, p_2, p_3; x^1, x^2, x^3) = mc^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + U(x^1, x^2, x^3)\,. \tag{2.3.39}$$

Таким образом, тангенциальное уравнение индикатрисы записано в разрешённом относительно p_t (1.3.15) виде. В качестве параметра эволюции используем время t. Считая t, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$ обобщёнными координатами и обозначая через p_t компоненту импульса, соответствующую координате t, получим компоненты импульса p_t, p_1, p_2, p_3, соответствующие координатам t, x, y, z, по формулам (2.3.5), или (1.3.15), (1.3.16):

$$p_t = mc^2 + m \cdot \frac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}{2} + U(x, y, z)\,, \tag{2.3.40}$$

$$p_\alpha = -m \cdot \dot{x}^\alpha\,. \tag{2.3.41}$$

Компонента импульса p_t – это полная энергия частицы в потенциальном поле, включая её внутреннюю энергию mc^2. Компоненты импульса p_α отличаются от принятых в классической механике лишь знаком.

Выпишем для данной физической системы канонические уравнения движения (2.3.37):

$$\dot{x}^\alpha = -\frac{1}{m} \cdot p_\alpha\,, \qquad \dot{p}_\alpha = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\,. \tag{2.3.42}$$

Дифференцируя первое уравнение по времени и заменяя $\dot{p}_\alpha$ на их выражения из второго уравнения (2.3.42), получим обычные уравнения движения Ньютона

$$m\ddot{x}^\alpha = -\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\,, \tag{2.3.43}$$

которые совпадают с уравнениями движения Лагранжа (1.3.4) для метрической функции (1.2.35). Здесь мы считаем, что потенциальное поле U не зависит от времени, поэтому полная энергия p_t является интегралом движения.

Отметим, что переходя к времени как к параметру, мы затрудняем возможность ковариантного описания движения частиц в пространствах, где время – равноправная координата.

2.4 Конгруэнции экстремалей

Допустим, что в финслеровом пространстве n измерений

$$x^1,\, x^2,\, \ldots, x^n \tag{2.4.1}$$

задана конгруэнция "геодезических", то есть семейство "геодезических", зависящих от $(n-1)$ параметров $u^1, u^2, ..., u^{n-1}$. Уравнение семейства запишем в виде

$$x^i = x^i(\tau; u^1, u^2, ..., u^{n-1})\,, \tag{2.4.2}$$

где τ – параметр вдоль "геодезической". В каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ каждой "геодезической" мы построим в касательном пространстве гиперплоскость, трансверсальную к направлению "геодезической".

Вектор η трансверсальной гиперплоскости характеризуется уравнением (2.2.12)

$$p_i \eta^i = 0\,, \tag{2.4.3}$$

где величины p_i вычисляются по формулам

$$p_i = \frac{\partial L(\dot{x}; x)}{\partial \dot{x}^i}\,, \qquad \dot{x}^i = \frac{\partial x(\tau; u)}{\partial \tau}\,, \tag{2.4.4}$$

так что в нашем случае

$$p_i = p_i(\tau; u^1, u^2, ..., u^{n-1})\,. \tag{2.4.5}$$

Эту трансверсальную гиперплоскость мы будем также называть трансверсальным плоскостным элементом.

Выберем какой-либо отрезок геодезической линии

$$\tau_0 \le \tau \le \tau_1 \tag{2.4.6}$$

и проварьируем его длину, как это делалось в предыдущем параграфе для произвольной кривой. Формула (2.3.20) примет теперь вид

$$\delta s = (p_i \delta x^i)_1 - (p_i \delta x^i)_0\,, \tag{2.4.7}$$

так как в случае, когда исходная кривая является "геодезической", интеграл в правой части формулы (2.3.20) обращается в нуль в силу (2.3.22), а концы при вариациях "геодезической" не фиксируются. Если же концы "геодезической" испытывают смещения в трансверсальных направлениях, то в силу (2.4.3)

$$(p_i \delta x^i)_1 = 0\,, \qquad (p_i \delta x^i)_0 = 0\,, \tag{2.4.8}$$

и мы получаем

$$\delta s = 0\,. \tag{2.4.9}$$

Вариация длины дуги "геодезической линии" равна нулю, если каждый из её концов смещается по плоскостному элементу трансверсальному к направлению касательной к "геодезической" в этом конце. Смещения промежуточных точек "геодезической" роли не играют.

Допустим, что в некоторой области основного пространства D зависимость координат $x^1, x^2, ..., x^n$ от параметров $\tau, u^1, u^2, ..., u^{n-1}$ является однозначно обратимой и параметры $\tau, u^1, u^2, ..., u^{n-1}$ могут быть, в свою очередь, приняты за координаты основного пространства. Так будет, например, в окрестности всякой точки M, в которой якобиан

$$\frac{D(\ x^1,\ x^2,\ \ldots\ ,\ x^n\ )}{D(\tau, u^1, u^2, ..., u^{n-1})} \neq 0\,. \tag{2.4.10}$$

В области D можно считать, следовательно,

$$\tau = \tau(x^1, x^2, ..., x^n)\,,\ \ u^\alpha = u^\alpha(x^1, x^2, ..., x^n)\,. \tag{2.4.11}$$

Отсюда видно, что через каждую точку $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ области D проходит одна и только одна "геодезическая" линия конгруэнции. Эта линия определяется значениями $u^1, u^2, ..., u^{n-1}$, согласно (2.4.11). Тем самым в каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ однозначно определяются величины $p_1, p_2, ..., p_n$ согласно (2.4.4), а значит и трансверсальный к направлению "геодезической" линейный плоскостной элемент.

В области D определено, таким образом, поле величин

$$p_i = p_i(x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{2.4.12}$$

с помощью которых можно построить инвариантную (при преобразованиях координат) линейную дифференциальную форму

$$\omega(dx) = p_i(x^1, x^2, ..., x^n)dx^i\,. \tag{2.4.13}$$

Форма $\omega(dx)$ в точке $M(x^1, ..., x^n)$ выражает вариацию длины дуги "геодезической линии" конгруэнции, начало которой закреплено в какой-нибудь точке M_0, а конец смещается из точки $M(x^1, ..., x^n)$ в бесконечно близкую точку $M'(x^1 + dx^1, ..., x^n + dx^n)$.

Проварьированная дуга уже не будет, вообще говоря, "геодезической", так как вариация произвольная.

Вариацию длины дуги "геодезической линии" при подвижности обоих концов (2.4.7) можно переписать, используя дифференциальную форму $\omega(dx)$, в виде

$$\delta s = \omega(\delta_1) - \omega(\delta_0)\,. \tag{2.4.14}$$

Рассмотрим важный частный случай конгруэнции. Пусть связанная с конгруэнцией форма $\omega(dx)$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции точки $S(x^1, ..., x^n)$:

$$\omega(dx) = dS(x^1, ..., x^n)\,. \tag{2.4.15}$$

В этом случае мы будем называть конгруэнцию *нормальной*, а функцию $S(x^1, x^2, ..., x^n)$ в классической механике принято называть *действием как функцией координат.*

Нормальная конгруэнция обладает рядом интересных особенностей.

Дифференциал дуги вдоль "геодезической линии" конгруэнции можно выразить следующим образом:

$$ds = p_i(x^1, x^2, ..., x^n)dx^i\,, \tag{2.4.16}$$

поэтому в случае нормальной конгруэнции "геодезических" получаем:

$$ds = dS(x^1, x^2, ..., x^n)\,. \tag{2.4.17}$$

Отсюда вытекает, что длина дуги "геодезической" между точками M_0 и M_1 принимает вид

$$\smile{M_0 M_1} = S(M_1) - S(M_0)\,. \tag{2.4.18}$$

Длина дуги "геодезической линии" нормальной конгруэнции равна приращению функции $S(x^1, x^2, ..., x^n)$ вдоль этой дуги.

Построим семейство гиперповерхностей уровня скалярного поля $S(x^1, x^2, ..., x^n)$:

$$S(x^1, x^2, ..., x^n) = C\,. \tag{2.4.19}$$

Отрезки "геодезических" нормальной конгруэнции между двумя гиперповерхностями уровня

$$S(x^1, x^2, ..., x^n) = C_0\,, \qquad S(x^1, x^2, ..., x^n) = C_1 \tag{2.4.20}$$

имеют постоянную длину $C_1 - C_0$.

Если из данной точки M сместиться по гиперповерхности уровня в бесконечно близкую точку, то

$$dS(x^1, x^2, ..., x^n) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega(dx) = 0\,, \tag{2.4.21}$$

и, следовательно, смещение происходит в направлении трансверсальном к направлению "геодезической".

Таким образом, касательный плоскостной элемент в каждой точке гиперповерхности уровня трансверсален к направлению "геодезической линии" нормальной конгруэнции, проходящей через эту точку.

Иными словами, гиперповерхности уровня скалярного поля S трансверсальны к нормальной конгруэнции.

Важнейшей особенностью нормальной конгруэнции является именно то обстоятельство, что она допускает трансверсальные гиперповерхности. В общем случае из трансверсальных плоскостных элементов нельзя выделить ∞^{n-1} элементов, огибающих некоторую поверхность. Исключением являются двумерные финслеровы пространства $(n = 2)$, где всякая конгруэнция нормальная.

Указанная особенность нормальной конгруэнции не только необходима, но и достаточна для её характеристики; более того, достаточно существование хотя бы одной трансверсальной гиперповерхности.

Если конгруэнция "геодезических" допускает хотя бы одну трансверсальную гиперповерхность, то конгруэнция является нормальной и допускает, следовательно, ∞^1 трансверсальных гиперповерхностей.

Пусть в области D финслерова пространства с тангенциальным уравнением индикатрисы

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n; x^1, x^2, ..., x^n) = 0 \tag{2.4.22}$$

имеет место некая нормальная конгруэнция "геодезических". Выясним, чем характеризуется семейство гиперповерхностей уровня (2.4.19), трансверсальных к нормальной конгруэнции. Тождество (2.4.15) даёт

$$p_i(x^1, x^2, ..., x^n) = \frac{\partial S(x)}{\partial x^i}\,, \tag{2.4.23}$$

где $p_i(x^1, x^2, ..., x^n)$ – координаты некой касательной к индикатрисе гиперплоскости (компоненты обобщённого импульса), которые по построению удовлетворяют тангенциальному уравнению индикатрисы (2.4.22), то есть

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}, \frac{\partial S}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial S}{\partial x^n}; x^1, x^2, ..., x^n\right) = 0\,. \tag{2.4.24}$$

Итак, функция $S(x)$ (действие как функция координат) удовлетворяет уравнению (2.4.24), полученному из тангенциального уравнения индикатрисы заменой первых n аргументов p_i на частные производные $\frac{\partial S}{\partial x^i}$. Это свойство оказывается характеристическим для функции $S(x^1, x^2, ..., x^n)$.

Для того чтобы функция $S(x^1, x^2, ..., x^n)$ имела гиперповерхности уровня, трансверсальные к "геодезическим линиям" некоторой нормальной конгруэнции, и выражала вдоль этих линий длину дуги (отсчитываемую от гиперповерхности уровня C_0), необходимо и достаточно, чтобы $S(x^1, x^2, ..., x^n)$ была решением дифференциального уравнения (2.4.24).

Уравнение (2.4.24) является аналогом уравнения Гамильтона-Якоби в классической механике [17]. Это позволяет сделать следующий вывод: физической системе соответствует не всякая конгруэнция экстремалей финслерова пространства, а только нормальная конгруэнция экстремалей.

Глава 3

ПРОСТРАНСТВА С ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ

Идеи обобщения понятия скалярного произведения до скалярного полипроизведения, то есть скалярного произведения с числом "сомножителей" (аргументов) более двух, и изучения пространств с полилинейной формой для дальнейшего применения в теоретической физике принадлежат Д. Г. Павлову [28]. Такие пространства при выполнении ряда условий являются финслеровыми пространствами. С другой стороны, финслеровы пространства невырожденных поличисел размерности больше двух относятся именно к пространствам со скалярным полипроизведением.

3.1 Полилинейные формы

Пусть $A \ni X, Y, Z, ...$ – некоторое линейное пространство над полем действительных чисел $R \ni x, y, z, a, b, c, ...$, то есть в этом пространстве определено сложение двух произвольных элементов и умножение произвольного элемента на любое действительное число, причем

$$(a+b)(xA+yB) = (ax)A + (bx)A + (ay)B + (by)B\,. \tag{3.1.1}$$

Элементы линейного пространства будем называть векторами. Если для элементов $X, Y, ..., Z$ найдутся такие действительные числа $a, b, ..., c$, не все из которых равны нулю, что

$$aX + bY + ... + cZ = 0\,, \tag{3.1.2}$$

то говорят, что элементы $X, Y, ..., Z$ пространства A *линейно зависимы.* Если таких чисел найти невозможно, то элементы $X, Y, ..., Z$ называются *линейно независимыми.*

Если в пространстве A имеется n линейно независимых элементов, а любые $(n+1)$ элементов всегда линейно зависимы, то пространство называют n-мерным. Такое пространство будем обозначать A_n. В n-мерном линейном пространстве всегда можно фиксировать n линейно независимых элементов $e_1, e_2, ..., e_n$, которые называются базисными, а сам такой набор – *базисом*, и выражать произвольный элемент X в виде линейной комбинации базисных элементов:

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n \,, \tag{3.1.3}$$

где $x^1, x^2, ..., x^n$ – координаты элемента X в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$. Такое разложение однозначно, поэтому вместо того, чтобы работать непосредственно с элементами самого линейного n-мерного пространства, можно работать с наборами n действительных чисел $(x^1, x^2, ..., x^n)$ – координатами элементов в данном базисе.

Будем говорить, что на пространстве A_n задана m-линейная $(m \geq 2)$ симметрическая форма, или *скалярное произведение* m векторов, если для любого набора m элементов $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)}$ этого пространства определено действительное число $(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)})$, которое обладает следующими двумя свойствами. Во-первых, при любой перестановке аргументов это число не меняется

$$(X_{(i_1)}, X_{(i_2)}, ..., X_{(i_m)}) = (X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)}) \,, \tag{3.1.4}$$

где $(i_1, i_2, ..., i_m)$ – подстановка $(1, 2, ..., m)$. Во-вторых, по каждому аргументу имеет место линейное свойство, например, по первому аргументу:

$$(aX + bX_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)}) = a(X, X_{(2)}, \dots) + b(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots) \,, \tag{3.1.5}$$

где a, b – произвольные действительные числа.

Если не нужно акцентировать внимание на числе аргументов m-линейной симметрической формы, то кратко такую форму будем называть полилинейной, подразумевая при этом, что она к тому же обязательно и симметрическая.

Если выбран некоторый базис $e_1, e_2, ..., e_n$, то в этом базисе полилинейная форма принимает вид

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)}) = \omega_{i_1 i_2 ... i_m} x^{i_1}_{(1)} x^{(i_2)}_{(2)} ... x^{i_m}_{(m)} \,, \tag{3.1.6}$$

где суммирование по дважды встречающимся индексам i_k в правой части идет от 1 до n, а

$$\omega_{i_1 i_2 ... i_m} = (e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_m}) \,. \tag{3.1.7}$$

Из определения m-линейной симметрической формы в линейном пространстве A_n следует, что её значение не зависит от выбора базиса, то есть её значение является инвариантом, поэтому при переходе от одного базиса к другому компоненты $\omega_{i_1 i_2 ... i_m}$ формы преобразуются как компоненты m раз ковариантного тензора, так как компоненты векторов преобразуются как компоненты один раз контравариантных тензоров.

Из условия симметричности и формулы (3.1.7) следует, что при любой перестановке индексов у компонент $\omega_{i_1 i_2 ... i_m}$ симметрической формы их значение не меняется, например:

$$\omega_{2,1,3,4,...,m} = \omega_{1,2,3,4,...,m} \,, \qquad \omega_{1,2,...,m-1,m} = \omega_{m,m-1,...,2,1} \,. \tag{3.1.8}$$

Если число аргументов полилинейной формы равно двум, форма называется билинейной.

Если число аргументов m-линейной формы равно размерности пространства $(m = n)$, будем называть такую полилинейную форму *полиформой.*

Рассмотрим m-линейную форму от m одинаковых аргументов, то есть $(X, X, ..., X)$. Формально будем обозначать такую форму $|X|^m$,

$$|X|^m = \omega_{i_1 i_2 ... i_m} x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_m} \,. \tag{3.1.9}$$

Таким образом, $|X|^m$ – это однородная форма (полином) m-го порядка от n действительных аргументов $x^1, x^2, ..., x^n$, координат вектора X. Если существует базис, в котором форма $|X|^m$ имеет такой вид, что при перестановке двух любых координат $x^i \leftrightarrow x^j$ вектора X, значение формы не меняется, то форму $|X|^m$, как и исходную m-линейную симметрическую форму $(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)})$ в этом базисе, будем называть *сверхсимметрической*, или сверхсимметрической записью исходной формы в специальном базисе.

В качестве примера рассмотрим в аффинном пространстве $A_4 \ni X = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ билинейную форму вида

$$(X, Y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \,. \tag{3.1.10}$$

Очевидно, что она симметрическая

$$(Y, X) = (X, Y) \tag{3.1.11}$$

и линейная по каждому аргументу, так, для первого аргумента справедлива следующая формула:

$$(aX_{(1)} + bX_{(2)}, Y) = a(X_{(1)}, Y) + b(X_{(2)}, Y) \,. \tag{3.1.12}$$

Запись (3.1.10) не является сверхсимметрической, так как

$$|X|^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2\,, \tag{3.1.13}$$

и, например, при замене $x^0 \leftrightarrow x^1$ величина $|X|^2$, вообще говоря, меняет своё значение.

Выберем в качестве новых базисных векторов векторы:

$$\left.\begin{array}{l} e_0 = \left(\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right), \\ e_1 = (\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ), \\ e_2 = (\ 1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ), \\ e_3 = (\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ). \end{array}\right\} \tag{3.1.14}$$

Так как

$$\begin{vmatrix} \frac{3\pm\sqrt{3}}{2} & \frac{1\pm\sqrt{3}}{2} & \frac{1\pm\sqrt{3}}{2} & \frac{1\pm\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mp\sqrt{3}\,, \tag{3.1.15}$$

эти векторы линейно независимы, и их можно выбрать в качестве базисных. Векторы e_i обладают следующими свойствами:

$$(e_0, e_0) = 0\,, \quad (e_1, e_1) = 0\,, \quad (e_2, e_2) = 0\,, \quad (e_3, e_3) = 0\,, \tag{3.1.16}$$

$$(e_i, e_j) = 1\,, \quad \text{если } i \neq j\,. \tag{3.1.17}$$

Так как выполняются свойства (3.1.16), то векторы e_1, e_2, e_3, e_4 по определению являются изотропными, и базис, состоящий из таких векторов, естественно назвать *изотропным.*

Используя эти свойства базисных векторов и оставив для координат прежние обозначения, запишем форму (3.1.10) в новых координатах:

$$\begin{gathered} (X, Y) = x^0y^1 + x^0y^2 + x^0y^3 + x^1y^2 + x^1y^3 + x^2y^3 + \\ +x^1y^0 + x^2y^0 + x^3y^0 + x^2y^1 + x^3y^1 + x^3y^2\,. \end{gathered} \tag{3.1.18}$$

Форма (3.1.13) тогда принимает вид:

$$(X, X) = 2x^0x^1 + 2x^0x^2 + 2x^0x^3 + 2x^1x^2 + 2x^1x^3 + 2x^2x^3\,. \tag{3.1.19}$$

При любой перестановке $x^i \leftrightarrow x^j$ форма (3.1.19) не меняется по форме и по значению, поэтому данная форма и форма (3.1.18) по определению являются сверхсимметрическими, или можно сказать, что они являются сверхсимметрическими записями форм (3.1.10) и (3.1.13).

Если от системы координат, в которых билинейная форма (3.1.10) принимает сверхсимметрический вид (3.1.18), перейти к новой системе координат с помощью преобразований группы Лоренца, то опять получим систему координат, в которых билинейная форма (3.1.10) имеет тот же сверхсимметрический вид (3.1.18). Новые базисные векторы $e_{0'}, e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$ будут обладать теми же свойствами (3.1.16) и (3.1.17), то есть, в частности, будут изотропными. Таким образом, существует 6-параметрическое семейство базисов со свойствами (3.1.16) и (3.1.17).

Всякая ли m-линейная симметрическая форма допускает сверхсимметрическую запись? Автор не знает ответа на этот вопрос. Если да, то хорошо бы иметь алгоритм построения такого базиса, в котором это явно просматривается. Если не всякая, то необходимо иметь критерий, с помощью которого это было бы можно выяснить.

Полилинейные формы вида (3.1.18) и аналогичные для $m > 2$ представляют собой интересный объект для изучения, особенно интересны соответствующие полиформы ($m = n$), последние возникают при изучение гиперкомплексных чисел H_n. Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – базис, а $x^1, x^2, ..., x^n$ – координаты, выпишем несколько таких полиформ:
$\mathbf{m = n = 2}$,

$$(X, Y) = \frac{1}{2}(x^1 y^2 + x^2 y^1)\,, \tag{3.1.20}$$

соответственно

$$(X, X) = x^1 x^2\,; \tag{3.1.21}$$

$\mathbf{m = n = 3}$,

$$(X, Y, Z) = \frac{1}{6} \times (x^1 y^2 z^3 + x^2 y^3 z^1 + x^3 y^1 z^2 + x^2 y^1 z^3 + x^3 y^2 z^1 + x^1 y^3 z^2)\,, \tag{3.1.22}$$

соответственно

$$(X, X, X) = x^1 x^2 x^3\,; \tag{3.1.23}$$

$\mathbf{m = n = 4}$,

$$\begin{aligned}(X, Y, Z, U) = \frac{1}{24} \times (&x^1y^2z^3u^4 + x^2y^3z^4u^1 + x^3y^4z^1u^2 + x^4y^1z^2u^3 + \\ &+x^2y^1z^3u^4 + x^3y^2z^4u^1 + x^4y^3z^1u^2 + x^1y^4z^2u^3 + x^3y^2z^1u^4 + \\ &+x^4y^3z^2u^1 + x^1y^4z^3u^2 + x^2y^1z^4u^3 + x^4y^2z^3u^1 + x^1y^3z^4u^2 + \\ &+x^2y^4z^1u^3 + x^3y^1z^2u^4 + x^1y^3z^2u^4 + x^2y^4z^3u^1 + x^3y^1z^4u^2 + \\ &+x^4y^2z^1u^3 + x^1y^2z^4u^3 + x^2y^3z^1u^4 + x^3y^4z^2u^1 + x^4y^1z^3u^2),\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

соответственно

$$(X, X, X, X) = x^1x^2x^3x^4\,; \tag{3.1.25}$$

$\mathbf{m = n}$,

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}) = \frac{1}{n!} \sum_{(1,2,...,n)} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} ... x^{i_n}_{(n)}\,, \tag{3.1.26}$$

где суммирование идёт по наборам индексов $(i_1, i_2, ..., i_n)$, которые являются всевозможными подстановками набора n натуральных чисел $(1, 2, ..., n)$, соответственно

$$|X|^n = x^1x^2...x^n\,. \tag{3.1.27}$$

Сверхсимметрические полиформы (3.1.26) при $n \geq 2$ будем называть h_n-формами, а компоненты этих форм в специальном базисе, в котором они имеют вид (3.1.26), будем обозначать $\chi_{i_1 i_2 ... i_n}$. Из формулы (3.1.26) следует, что

$$\chi_{i_1 i_2 ... i_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\,, & \text{если все индексы разные}\,, \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях}\,. \end{cases} \tag{3.1.28}$$

Такой специальный базис будем называть *ψ-базисом*, или *изотропным базисом* и обозначать $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$, или $e_1, e_2, ..., e_n$. Полиформы (3.1.26) связаны с поличислами H_n, именно по формуле (3.1.27) n-я степень нормы числа $X \ni H_n$, если у этого числа норма определена, выражается через координаты в изотропном базисе.

Если существует такой базис, в котором форма $|X|^m$ содержит не все координаты вектора X, то такую форму и соответствующую ей форму $(X, Y, ..., Z)$ будем называть *вырожденными.* В дальнейшем нас будут интересовать только *невырожденные полилинейные формы.*

Среди всех полилинейных форм выделяются формы, которые обладают особым свойством, которое мы будем называть *свойством разрешимости.*

Будем говорить, что полилинейная форма (3.1.6) обладает *свойством разрешимости*, или *разрешима*, если существует такой тензор $\omega^{j_1 j_2 ... j_m}$, что

$$\begin{gathered} \omega^{j_1 j_2 ... j_m} \omega_{j_1 i_2 ... i_m} x^{i_2} ... x^{i_m} \omega_{j_2 k_2 ... k_m} x^{k_2} ... x^{k_m} ... \omega_{j_m l_2 ... l_m} x^{l_2} ... x^{l_m} = \\ = \alpha \left(\omega_{i_1 i_2 ... i_m} x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_m} \right)^{m-1} , \end{gathered} \tag{3.1.29}$$

где α – некоторое действительное число, причём в правой части вначале производится суммирование по индексам $i_1, i_2, ..., i_m$ внутри круглых скобок, а затем полученная сумма возводится в $(m-1)$-ую степень.

Естественно, что при этом компоненты матрицы $(\omega^{j_1 j_2 ... j_m})$ выражаются неким образом через компоненты матрицы $(\omega_{i_1 i_2 ... i_m})$ разрешимой формы. Если существует такой базис, в котором

$$(\omega^{j_1 j_2 ... j_m}) = \beta \cdot (\omega_{i_1 i_2 ... i_m}) , \tag{3.1.30}$$

где β – некоторое действительное число, то будем называть такой базис *собственным базисом полилинейной формы.* О форме же будем говорить, что она имеет собственный базис.

Если полилинейная форма имеет собственный базис, то, конечно, подразумевается, что она разрешима.

Любая невырожденная билинейная форма является разрешимой. Полиформы (3.1.26), связанные с гиперкомплексными числами H_n, разрешимы, а базис, в котором эти формы имеют вид (3.1.26), есть собственный базис этих форм. Существуют неразрешимые полилинейные формы и полиформы.

Для билинейной формы, если $det(\omega_{ij}) \neq 0$, всегда можно построить дважды контравариантный тензор ω^{ij}, компоненты которого образуют обратную матрицу к матрице (ω_{ij}), поэтому выполняется свойство разрешимости (3.1.29):

$$\omega^{j_1 j_2} \cdot \omega_{j_1 i_1} x^{i_1} \cdot \omega_{j_2 i_2} x^{i_2} = \omega_{i_1 i_2} x^{i_1} x^{i_2} . \tag{3.1.31}$$

Таким образом, невырожденные билинейные формы всегда разрешимы. Более того, для них всегда существует собственный базис, составленный из собственных векторов матрицы (ω_{ij}), делённых на $\sqrt{|\lambda_i|}$, где λ_i – собственное значение соответствующего собственного вектора. В таком базисе матрицы (ω_{ij}), (ω^{ij}) совпадают

$$(\omega^{ij}) = (\omega_{ij}) = diag(a_1, a_2, ..., a_n) , \tag{3.1.32}$$

где $a_i = \pm 1$.

Приведём пример неразрешимой полиформы в четырёхмерном линейном пространстве:

$$(T, X, Y, Z) = t^1x^1y^1z^1 + t^2x^2y^2z^2 + t^3x^3y^3z^3 + t^3x^3y^3z^3\,. \tag{3.1.33}$$

На основе такой полиформы в пространстве x^1, x^2, x^3, x^4 можно определить финслерову геометрию с элементом длины

$$ds = \sqrt[4]{(dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 + (dx^4)^4}\,. \tag{3.1.34}$$

Форма (3.1.33) будет разрешима, если в финслеровой геометрии с элементом длины (3.1.34) тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать в виде

$$\omega^{i_1i_2i_3i_4}p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}p_{i_4} - const = 0\,, \tag{3.1.35}$$

где p_i – компоненты обобщённого импульса, в данном случае

$$p_i = \frac{(dx^i)^3}{[(dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 + (dx^4)^4]^{\frac{3}{4}}}\,. \tag{3.1.36}$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_1^{\frac{4}{3}} + p_2^{\frac{4}{3}} + p_3^{\frac{4}{3}} + p_4^{\frac{4}{3}} - 1 = 0\,. \tag{3.1.37}$$

Оно не может быть преобразовано к виду (3.1.35), а поэтому полиформа (3.1.33) является неразрешимой.

Таким образом, вопрос о разрешимости полилинейной формы (3.1.6) тесно связан с вопросом о построении финслеровой геометрии с тангенциальным уравнением индикатрисы вида:

$$\omega^{i_1i_2...i_n}p_{i_1}p_{i_2}...p_{i_n} - const = 0\,. \tag{3.1.38}$$

Утверждение. Для того чтобы существовал тензор с верхними индексами $\omega^{i_1i_2...i_n}$, соответствующий (двойственный) метрическому тензору $\omega_{i_1i_2...i_n}$ (3.1.6) с нижними индексами необходимо и достаточно, чтобы полилинейная форма (3.1.6) была разрешимой.

Это следует из двойственности формул (2.1.7), (2.1.13). Из этой же двойственности получим, что для невырожденных разрешимых полилинейных форм, кроме формулы (3.1.29), выполняется двойственная ей формула:

$$\begin{aligned}\omega_{j_1j_2...j_m}\omega^{j_1i_2...i_m}p_{i_2}...p_{i_m}\omega^{j_2k_2...k_m}p_{k_2}...p_{k_m}...\omega^{j_ml_2...l_m}p_{l_2}...p_{l_m} = \\ = \gamma\left(\omega^{i_1i_2...i_m}p_{i_1}p_{i_2}...p_{i_m}\right)^{m-1}\,,\end{aligned} \tag{3.1.39}$$

где γ – некоторое действительное число, причём в правой части вначале производится суммирование по индексам $i_1, i_2, ..., i_m$ внутри круглых скобок, а затем полученная сумма возводится в $(m-1)$-ую степень.

Вопрос о разрешимости полилинейной формы (3.1.6) также тесно связан с существованием у такой формы группы однородных линейных непрерывных преобразований, сохраняющих форму.

Гипотеза. Неразрешимые невырожденные полилинейные формы не имеют непрерывной группы однородных линейных преобразований.

На основе невырожденной полилинейной формы (3.1.6) можно построить невырожденную дифференциальную полилинейную симметрическую форму. По-видимому, возможность существования у такой дифференциальной формы более широкой конформной непрерывной группы, чем однопараметрическая группа общего масштабного преобразования, также определяется разрешимостью или неразрешимостью формы (3.1.6).

3.2 Антиопределители

Если $n > 3$, вычислить значение h_n-формы (3.1.26) даже в ψ-базисе не просто. Для того чтобы это понять, достаточно взглянуть на формулу (3.1.24), по которой вычисляется h_4-форма. В данном параграфе мы опишем удобный алгоритм вычисления h_n-форм.

Имеет место некоторое формальное сходство формулы (3.1.26) с формулой вычисления определителя n-го порядка. Отличие состоит в присутствии в формуле (3.1.26) общего множителя $\dfrac{1}{n!}$ и отсутствии знаковых множителей перед аддитивными членами под знаком суммы. В силу этого представим h_n-форму в виде множителя $\dfrac{1}{n!}$ и некой величины, которую будем называть *антиопределителем*, или *перманентом* n-го порядка, то есть по определению:

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & \cdots & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & \cdots & x^2_{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n_{(1)} & x^n_{(2)} & \cdots & x^n_{(n)} \end{vmatrix}_+ , \qquad (3.2.1)$$

или

$$adet(x^i_{(j)}) \equiv \left| \begin{matrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & \dots & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & \dots & x^2_{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n_{(1)} & x^n_{(2)} & \dots & x^n_{(n)} \end{matrix} \right|_+ \equiv \sum_{(1,2,\dots,n)} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \dots x^{i_n}_{(n)} \,, \qquad (3.2.2)$$

где суммирование идёт по всевозможным подстановкам $(1, 2, ..., n)$.

Алгоритм вычисления антиопределителей и их свойства сформулируем аналогично алгоритму вычисления определителей. Словами определение (3.2.2) можно записать как первое свойство.

1). Антиопределитель квадратной $n \times n$ матрицы $\hat{X} = (x_{ij})$ есть сумма $n!$ произведений элементов матрицы $\hat{X}$, причём в каждом таком произведении присутствует один и только один элемент из каждой строки и каждого столбца.

Из определения непосредственно следуют ряд свойств антиопределителей.

2). Антиопределитель от транспонированной матрица равен антиопределителю от исходной матрицы,

$$adet(\hat{X}^T) = adet(\hat{X}) \,. \qquad (3.2.3)$$

Это же свойство можно переформулировать по-другому.

3). Если какое-то утверждение или свойство справедливо для столбцов антиопределителя, то оно справедливо и для его строк, и наоборот.

Таким образом, достаточно формулировать утверждения или свойства только в одном экземпляре – только для столбцов, что мы и будем сделать ниже.

4). Если у матрицы имеется столбец, состоящий из одних нулей, то антиопределитель этой матрицы равен нулю.

5). Если какой-нибудь столбец матрицы имеет общий множитель, то его можно вынести за знак антиопределителя.

6). Если какой-нибудь столбец с номером j матрицы $\hat{X}$ можно представить как сумму двух столбцов: столбца a и столбца b – то антиопределитель матрицы есть сумма двух антиопределителей:

$$adet(\hat{X}) = adet(\hat{X}_a) + adet(\hat{X}_b) \,, \qquad (3.2.4)$$

где матрица $\hat{X}_a$ получается из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на столбец a, а матрица $\hat{X}_b$ получается из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на столбец b.

Из последних двух свойств следует более общее утверждение.

7). Пусть столбец с номером j матрицы $\hat{X}$ есть линейная комбинация любого количества столбцов:

$$x_i = \alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i + ... + \gamma \cdot c_i + ... \,, \tag{3.2.5}$$

где α, β, ..., γ, ... – числа. Тогда

$$adet(\hat{X}) = \alpha \cdot adet(\hat{X}_a) + \beta \cdot adet(\hat{X}_b) + ... + \gamma \cdot adet(\hat{X}_c) + ... \,. \tag{3.2.6}$$

Матрицы $\hat{X}_a$, $\hat{X}_b$, ... , $\hat{X}_c$, ... получаются из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на столбцы a, b, ... , c, ... соответственно.

Обратимся опять к определению антиопределителя:

$$adet(\hat{X}) \equiv \sum_{(1,2,...,n)} x_{i_1 1} x_{i_2 2} ... x_{i_n n} \,. \tag{3.2.7}$$

Выделим в сумме, стоящей справа, все слагаемые, содержащие некоторый элемент x_{ij} матрицы $\hat{X} = (x_{ij})$, и вынесем его за скобки. В скобках останется сумма из $(n-1)!$ слагаемых, каждое из которых будет содержать по одному элементу из каждой строки, кроме строки i, и каждого столбца, кроме столбца j, матрицы $\hat{X}$, то есть это будет антиопределитель (обозначим его X_{ij}) матрицы $(n-1) \times (n-1)$, которая получается из матрицы $\hat{X}$ вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца. Будем называть X_{ij} алгебраическим дополнением элемента x_{ij}. Проделаем описанную выше процедуру для каждого элемента некоторого выделенного столбца и получим алгоритм вычисления антиопределителя n-го порядка через антиопределители порядка $(n-1)$.

8). Формула разложения антиопределителя по фиксированному столбцу:

$$adet(\hat{X}) = x_{1j} X_{1j_-} + x_{2j} X_{2j_-} + ... + x_{nj} X_{nj_-} \,. \tag{3.2.8}$$

9). С помощью процедуры разложения антиопределителя по столбцу вычисление любого антиопределителя n-го порядка всегда можно свести к вычислению антиопределителей второго или третьего порядка, которые вычисляются аналогично тому, как вычисляются обыкновенные определители, но без знаков минус:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_+ = ad + cb \,, \tag{3.2.9}$$

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & d \\ \beta & b & \gamma \\ e & \delta & c \end{vmatrix}_+ = abc + \alpha\gamma e + \beta\delta d + ebd + \beta\alpha c + \delta\gamma a \,, \tag{3.2.10}$$

где $a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ – действительные числа.

Формула (3.2.8) разложения антиопределителя по столбцу является частным случаем более общей формулы – разложения антиопределителя по нескольким столбцам. Обозначим через $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ антиопределитель матрицы, элементами которой являются элементы матрицы $\hat{X}$, стоящие на пересечении строк $i_1 < i_2 < ... < i_k$ и столбцов $j_1 < j_2 < ... < j_k$, причём $1 < k < (n-1)$. Будем называть $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ минором, а дополнительным минором $\bar{M}_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ к $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ будем называть антиопределитель от матрицы, полученной из матрицы $\hat{X}$ вычёркиванием тех же самых строк $i_1 < i_2 < ... < i_k$ и столбцов $j_1 < j_2 < ... < j_k$.

10). Справедлива следующая формула разложения антиопределителя по k столбцам, $1 < k < (n-1)$:

$$adet(\hat{X}) = \sum_{i_1<i_2<...<i_k} M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k} \bar{M}_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}\ , \tag{3.2.11}$$

где суммирование идёт по всевозможным выборкам k строк из n при обязательном выполнении неравенств $i_1 < i_2 < ... < i_k$, номера столбцов $j_1, j_2, ..., j_k$ фиксированы и по ним суммирование не ведётся.

Приведём пример такого разложения. Вычислим следующий антиопределитель:

$$\begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 & u^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ =$$

$$= \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^3 & u^3 \\ z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^3 & y^3 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^2 & u^2 \\ z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ + \tag{3.2.12}$$

$$+ \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^4 & y^4 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^2 & u^2 \\ z^3 & u^3 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^1 & u^1 \\ z^4 & u^4 \end{vmatrix}_+ +$$

$$+ \begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x^4 & y^4 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^1 & u^1 \\ z^3 & u^3 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} x^3 & y^3 \\ x^4 & y^4 \end{vmatrix}_+ \cdot \begin{vmatrix} z^1 & u^1 \\ z^2 & u^2 \end{vmatrix}_+ .$$

Воспользовавшись формулой (3.2.9), получим выражение, стоящее справа в круглых скобках в формуле (3.1.24).

11). Антиопределитель от диагональной матрицы равен произведению её элементов на главной диагонали.

12). Антиопределитель от матрицы, у которой отличные от нуля элементы стоят на побочной диагонали, равен произведению этих элементов.

13). Антиопределитель от треугольной матрицы, то есть матрицы, у которой выше или ниже главной диагонали (или побочной диагонали) все элементы равны нулю, равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали (или побочной диагонали).

14). Если у антиопределителя поменять местами два столбца, то антиопределитель не изменит своё значение.

Из этого свойства следует более общее правило.

15). При любой перестановке столбцов антиопределителя его значение не меняется.

16). Антиопределитель от матрицы $n \times n$, у которой все элементы равны единице, равен $n!$.

17). Антиопределитель от матрицы $n \times n$, у которой все столбцы одинаковые, равен произведению $n!$ на произведение всех элементов одного столбца.

18). Антиопределитель от матрицы $\hat{X}$ $(n \times n)$, которая состоит из $(n-1)$ одинаковых столбцов с элементами $x_1, x_2, ..., x_n$ и одного, вообще говоря, другого столбца с элементами $x'_1, x'_2, ..., x'_n$, вычисляется по формуле

$$adet(\hat{X}) = (n-1)! \cdot \left(x'_1 x_2 ... x_n + x_1 x'_2 ... x_n + ... + x_1 ... x_{n-1} x'_n\right), \qquad (3.2.13)$$

или, если все $x_i \neq 0$, эту формулу можно переписать следующим образом:

$$adet(\hat{X}) = (n-1)! \cdot x_1 x_2 ... x_n \left(\frac{x'_1}{x_1} + \frac{x'_2}{x_2} + ... + \frac{x'_n}{x_n}\right). \qquad (3.2.14)$$

19). Если n – нечётно, то антиопределитель от антисимметрической матрицы равен нулю.

20). Если матрица $\hat{X}$ является блочной матрицей, у которой на главной или побочной диагонали стоят матрицы $\hat{A}, \hat{B}, ..., \hat{C}$, а выше или ниже стоят нули, то антиопределитель матрицы $\hat{X}$ равен произведению антиопределителей матриц $\hat{A}, \hat{B}, ..., \hat{C}$:

$$adet\left(\hat{X}\right) = adet\left(\hat{A}\right) \cdot adet\left(\hat{B}\right) \cdot ... \cdot adet\left(\hat{C}\right). \qquad (3.2.15)$$

3.3 Линейные пространства со скалярным полипроизведением

Рассмотрим линейное пространство $A \ni X, Y, Z, ...$ над полем действительных чисел $R \ni x, y, z, a, b, c, ...$, в котором определена m-линейная симметрическая форма, то есть для любых m векторов определено *скалярное* *полипроизведение* $(X_1, X_2, ..., X_m)$. Термин "скалярное полипроизведение" подчёркивает, что число "сомножителей" (аргументов) в таком математическом объекте, вообще говоря, больше двух, но, конечно, обычное скалярное произведение с двумя аргументами является частным случаем скалярного полипроизведения.

Будем говорить, что вектор Y трансверсален ("ортогонален") вектору X, когда

$$(X, X, ..., X, Y) = 0\,. \tag{3.3.1}$$

Если не только вектор Y трансверсален вектору X, но X трансверсален вектору Y, то назовём такие векторы взаимно трансверсальными (взаимно "ортогональными").

Пусть имеется базис $e_1, e_2, ..., e_n$, состоящий из попарно взаимно трансверсальных векторов, причём

$$|e_i|^m \neq 0\,. \tag{3.3.2}$$

Будем называть такие базисы трансверсальными ("ортогональными"). Коэффициенты разложения произвольного вектора

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n \tag{3.3.3}$$

в этом базисе вычисляются по формулам

$$x^1 = \frac{(e_1, ..., e_1, X)}{|e_1|^m}\,, \ ...\,, \ x^n = \frac{(e_n, ..., e_n, X)}{|e_n|^m}\,. \tag{3.3.4}$$

Если к тому же для всех базисных векторов

$$|e_i|^m = 1\,, \tag{3.3.5}$$

то будем называть такой базис "ортонормированным". Ниоткуда не следует, что такой базис, хотя бы один, существует в конкретном линейном пространстве со скалярным полипроизведением. Предположим, что в данном полилинейном пространстве такой базис $e_1, e_2, ..., e_n$ существует. Тогда коэффициенты разложения вектора X по базисным векторам e_i равны скалярным произведениям $(m-1)$-го вектора e_i и вектора X:

$$x^1 = (e_1, ..., e_1, X)\,, \ ...\,, \ x^n = (e_n, ..., e_n, X)\,. \tag{3.3.6}$$

Эти формулы являются аналогами (обобщениями) формул для вычисления коэффициентов разложения вектора в ортонормированном базисе евклидового пространства. Само разложение запишется при этом в нашем случае следующим образом:

$$X = (e_i, ..., e_i, X) \cdot e_i\,.$$

Для того, чтобы показать возможность существования подобных базисов в неквадратичных пространствах, рассмотрим в качестве примера линейное пространство с h_4-формой. Перейдём от базиса $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, в котором скалярное произведение четырёх векторов X, Y, Z, U имеет вид (3.1.24), к базису $1, j, k, jk$ по формулам:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4\,, \\ j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4\,, \\ k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4\,, \\ jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.7}$$

Для того чтобы векторы $1, j, k, jk$ составляли базис, они должны быть линейно независимы. Это выполняется, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0\,. \tag{3.3.8}$$

Этот базис является "ортонормированным". Чтобы это проверить, надо воспользоваться формулами (3.2.1), (3.2.2), (3.2.14) вычисления скалярных произведений в пространстве с h_4-формой через антиопределители, простейшие свойства и методы вычисление которых изложены в предыдущем разделе. Всего при этом нам придётся вычислить 16 антиопределителей, например:

$$(e_2, e_2, e_2, e_2) = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}_+ = 1\,, \tag{3.3.9}$$

$$(e_2, e_2, e_2, e_4) = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}_+ = 0\,. \tag{3.3.10}$$

Результат: в пространстве поличисел H_4 базис $1, i, j, jk$ (3.3.7) является "ортонормированным", и в нём для каждого числа X имеет место разложение

$$X = (1, 1, 1, X) \cdot 1 + (i, i, i, X) \cdot i + (j, j, j, X) \cdot j + (jk, jk, jk, X) \cdot jk.$$

Если невырожденная полилинейная форма на некотором множестве векторов принимает положительные значения, то соответствующее полилинейное пространство является метрическим, финслеровым.

Рассмотрим определённую в данном полилинейном пространстве m-линейную форму от m одинаковых аргументов:

$$|X|^m \equiv (X, X, ..., X)\,. \tag{3.3.11}$$

Всё множество векторов представим себе как объединение четырёх непересекающихся подмножеств:

1) 0 – нулевой вектор;

2) множество изотропных векторов, это такие векторы $X \neq 0$, что

$$|X|^m = 0\,; \tag{3.3.12}$$

3) множество измеримых векторов, то есть таких векторов X, что

$$|X|^m > 0\,; \tag{3.3.13}$$

4) множество неизмеримых векторов, для которых

$$|X|^m < 0\,. \tag{3.3.14}$$

Естественно считать длины нулевого и изотропных векторов равными нулю, а длину l измеримого вектора X определить формулой

$$l = \sqrt[m]{(X, X, ..., X)}\,. \tag{3.3.15}$$

Будем считать наше линейное пространство центроаффинным, то есть существует некая точка O (центр), и начала всех радиус-векторов совпадают с этой точкой. Тогда мы получаем координатное пространство, у которого центроаффинные касательные пространства $\mathcal{A}_n(M)$ в каждой точке M основного пространства изоморфны исходному центроаффинному пространству. Элемент длины в основном пространстве определим формулой:

$$dl = \sqrt[m]{(dX, dX, ..., dX)}\,, \tag{3.3.16}$$

или

$$dl = \sqrt[m]{\omega_{i_1 i_2 ... i_m} dx^{i_1} dx^{i_2} ... dx^{i_m}}\,. \tag{3.3.17}$$

Таким образом, центроаффинное полилинейное пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt[m]{\omega_{i_1 i_2 ... i_m} dx^{i_1} dx^{i_2} ... dx^{i_m}} \tag{3.3.18}$$

является метрическим финслеровым пространством, удовлетворяющим всем требованиям Главы 2, если для m-линейной формы существуют измеримые векторы и если

$$rang\left(\frac{\partial^2 L}{\partial dx^i \partial dx^j}\right) = n - 1\,. \tag{3.3.19}$$

Пространства со скалярным полипроизведением, у которых форма $|X|^m$ вырожденная, то есть в каком-то базисе содержит не все n координат векторной переменной X, не удовлетворяют условию (3.3.19).

То, как была определена метрическая функция в линейном пространстве со скалярным полипроизведением, формула (3.3.18), и, соответственно, длина вектора (3.3.15), дает нам "максимальную" геометрию в том смысле, что все измеримые векторы (3.3.13) пространства остаются измеримыми векторами в определённой выше финслеровой геометрии. В общем случае можно построить и другие финслеровы геометрии на основе фиксированного линейного пространства с фиксированной m-линейной формой. Поясним это на примерах.

Рассмотрим пространство с билинейной формой (3.1.10). Измеримые векторы (x^0, x^1, x^2, x^3), в смысле (3.3.13), в этом случае это векторы, удовлетворяющие условию

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^4)^2 > 0\,. \tag{3.3.20}$$

Если определена максимальная финслерова геометрия, то метрическая функция определена на всех измеримых, в смысле (3.3.13), векторах, то есть каждый измеримый вектор порождает луч, пересекающий индикатрису, уравнение которой есть

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^4)^2 = 1\,. \tag{3.3.21}$$

Если вектор X_{ind} – это радиус-вектор с координатами какой-то произвольной точки индикатрисы, то множество векторов вида αX_{ind}, где $\alpha > 0$ – произвольное положительное действительное число, совпадает с множеством измеримых векторов, в смысле (3.3.13). Индикатриса (3.3.21) – поверхность второго порядка, двуполостной гиперболоид – состоит из двух несвязанных поверхностей, одна из которых K_+ находится в конусе будущего (её можно выделить неравенством $x^0 > 0$), а другая K_- – в конусе прошлого (её можно выделить неравенством $x^0 < 0$). Если мы не хотим ограничивать непрерывную группу изометрической симметрии, свойственную билинейной форме, то на основе билинейной формы (3.1.10) можно определить три финслеровы геометрии:

1) *"максимальная финслерова геометрия"*, область определения метрической функции – $K_+ \bigcup K_-$;

2) финслерова геометрия с областью определения K_+, координата x^0 всех измеримых векторов при при этом удовлетворят условию $x^0 > 0$;

3) финслерова геометрия с областью определения K_-, координата x^0 всех измеримых векторов при при этом удовлетворят условию $x^0 < 0$.

В математическом плане финслеровы геометрии 2) и 3) не отличаются друг от друга, так как при преобразовании координат $x^0 \to -x^0$, переходят друг в друга, а финслерова геометрия 1) качественно отличается от геометрии 2) и геометрии 3).

Рассмотрим пространство с h_4-формой (3.1.24). Измеримые, в смысле (3.3.13), радиус-векторы (x^1, x^2, x^3, x^4) в данном случае удовлетворяют условию:

$$x^1 x^2 x^3 x^4 > 0\,. \tag{3.3.22}$$

Если в координатном пространстве x^1, x^2, x^3, x^4 вводится *"максимальная геометрия"*, уравнение индикатрисы в касательном центроаффинном пространстве каждой точки $M_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ основного пространства будет иметь вид

$$(x^1 - x_0^1)(x^2 - x_0^2)(x^3 - x_0^3)(x^4 - x_0^4) = 1\,. \tag{3.3.23}$$

Индикатриса (3.3.23) – поверхность четвёртого порядка, 8-полостный гиперболоид – состоит из восьми несвязанных поверхностей, одна из которых K_+ находится в конусе будущего (её можно выделить неравенствами $x^i - x_0^i > 0$), а другая K_- – в конусе прошлого (её можно выделить неравенствами $x^i - x_0^i < 0$).

Если в линейном пространстве со скалярным полипроизведением размерности n возможно определить несколько качественно различных финслеровых геометрий, то обязательно будем выделять две из них: "максимальную геометрию", которую будем обозначать $\mathfrak{F}_n^{\mathfrak{max}}$, и финслерову геометрию, у которой все измеримые векторы лежат в конусе будущего и которую будем обозначать $\mathfrak{F}_n^+$.

Если m-форма обладает свойством разрешимости (3.1.29), то для финслеровой геометрии с метрической функцией (3.3.18) можно легко найти тангенциальное уравнение индикатрисы. Так по определению

$$p_i = \frac{\omega_{ii_2...i_m} dx^{i_2}...dx^{i_m}}{(\omega_{j_1 j_2 ... j_m} dx^{i_1} dx^{i_2}...dx^{i_m})^{\frac{m-1}{m}}}\,. \tag{3.3.24}$$

Используя формулу (3.1.29), получим тангенциальное уравнение индикатрисы:

$$\omega^{j_1 j_2 ... j_m} p_{j_1} p_{j_2} ... p_{j_m} - \alpha = 0\,. \tag{3.3.25}$$

3.4 Экстремальность трансверсальности

Понятие трансверсальности векторов было определено в финслеровом пространстве, а затем в линейном пространстве со скалярным полипроизведением. Покажем, что эти понятия совпадают.

Вернемся к различному обозначению координат точек основного пространства $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ и координат точек касательного центроаффинного пространства $\mathcal{A}_n(M) \ni (\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)$ в точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства.

В центроаффинном пространстве с m-линейной формой

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)}) = \omega_{i_1 i_2 ... i_m} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} ... x^{i_m}_{(m)}\,, \tag{3.4.1}$$

в каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства в касательном пространстве $\mathcal{A}_n(M)$ для всех измеримых векторов определим длину вектора $\xi \in \mathcal{A}_n(M)$ формулой

$$\xi \equiv L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n) = \sqrt[m]{\omega_{i_1 i_2 ... i_m} \xi^{i_1} \xi^{i_2} ... \xi^{i_m}}\,. \tag{3.4.2}$$

Согласно (2.2.12) вектор η трансверсален вектору ξ, если

$$p_i(\xi)\eta^i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{i i_2 ... i_m} \xi^{i_2} ... \xi^{i_m} \eta^i = 0\,, \quad \text{то есть} \tag{3.4.3}$$

$$(\xi, \xi, \xi, ..., \eta) = 0\,. \tag{3.4.4}$$

Пока мы не используем криволинейные координаты в основном пространстве, оно изоморфно касательным центроаффинным пространствам $\mathcal{A}_n(M)$ в каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$, поэтому понятие трансверсальности ("ортогональности") уже в основном пространстве обладает этим же свойством экстремальности.

Итак, понятие трансверсальности, определённое в финслеровых пространствах, и понятие трансверсальности, определённое в линейных пространствах со скалярным полипроизведением, совпадают. Из этого вытекает, что скалярное полипроизведение в таких пространствах обладает экстремальным свойством, которое было сформулировано в разделе 2.2. Сформулируем это *экстремальное свойство* в терминах скалярного полипроизведения: если в пространстве со скалярным полипроизведением задать прямую, не проходящую через центр, с помощью направляющего вектора Y и некоторой точки, через которую эта прямая проходит, и рассматривать всевозможные векторы X из центра до заданной прямой, то величина $(X, X, ..., X, X)$ достигает экстремума, когда скалярное произведение $(X, X, ..., X, Y)$ равно нулю,

$$(X, X, ..., X, Y) = 0\,, \tag{3.4.5}$$

то есть когда вектор Y трансверсален ("ортогонален") к вектору X.

3.5 Сверхсимметрические однородные формы m-го порядка

В раздел 3.1 было дано определение сверхсимметрической формы, исходя из понятия m-линейной симметрической формы, взятой от одного векторного аргумента. В данном разделе мы рассмотрим однородные формы m-го порядка от n действительных аргументов и именно для них сформулируем понятие сверхсимметричности. Конечно, имея сверхсимметрическую форму m-порядка от n действительных аргументов, можно построить m-линейную симметрическую форму от m векторных аргументов, причём полученная m-линейная форма, взятая от одного векторного аргумента, превращается в исходную однородную форму m-го порядка от n действительных аргументов, координат вектора.

В координатном пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ рассмотрим однородный полином m-го порядка от n действительных аргументов $(m, n \geq 2)$:

$$P_m(x^1, x^2, ..., x^n) = \omega_{i_1 i_2 ... i_m} x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_m} \,. \tag{3.5.1}$$

Суммирование ведётся по дважды встречающимся индексам от 1 до n. Если при любых перестановках координат $x^j \leftrightarrow x^k$ значение формы не изменяется, то такая форма называется сверхсимметрической.

Любую сверхсимметрическую форму Ω можно представить в виде линейной комбинации базисных сверхсимметрических форм, например:

$\mathbf{m = n = 2}$,

$$\Omega(x^1, x^2) = \alpha \left[(x^1)^2 + (x^2)^2\right] + \beta \left[x^1 x^2\right] \;; \tag{3.5.2}$$

$\mathbf{m = n = 3}$,

$$\begin{gathered} \Omega(x^1, x^2, x^3) = \alpha \left[(x^1)^3 + (x^2)^3 + (x^3)^3\right] + \\ + \beta \left[(x^1)^2 x^2 + (x^1)^2 x^3 + x^1 (x^2)^2 + (x^2)^2 x^3 + x^1 (x^3)^2 + x^2 (x^3)^2\right] + \gamma \left[x^1 x^2 x^3\right] \,. \end{gathered} \tag{3.5.3}$$

Базисные сверхсимметрические формы – это полиномы, на которых осуществляются неприводимые представления группы подстановок S_n всех переменных $x^1, x^2, ..., x^n$.

Рассмотрим следующее разложение

$$\begin{aligned} &(x^1 + x^2 + ... + x^n)^m = [(x^1)^m + (x^2)^m + ... + (x^n)^m] + \\ &\quad + const \cdot [(x^1)^{m-1} x^2 + (x^1)^{m-1} x^3 + ... + x^{n-1} (x^n)^{m-1}] + \\ &\quad ... \\ &\quad + const' \cdot \left[x^1 x^2 ... \, x^m + ... + x^{n-m+1} x^{n-m+2} ... \, x^n\right] \,. \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Кажется очевидным, что в правой части в квадратных скобках в таком разложении присутствуют все базисные сверхсимметрические формы m-го порядка от n действительных аргументов, но, конечно, это утверждение требует строгого математического доказательства. В разложении (3.5.4) всегда присутствует форма

$$\Omega(x^1, x^2, ..., x^n) = (x^1)^m + (x^2)^m + ... + (x^n)^m \,, \tag{3.5.5}$$

которая при $m = 1$ является вырожденной; при $m = 2$ является суммой квадратов, а значит обладает линейной непрерывной $\frac{n(n-1)}{2}$ параметрической группой симметрии $SO(n)$; при $m \geq 3$, по-видимому, такая форма не имеет линейной непрерывной группы симметрии, хотя последнее также требует строгого математического доказательства.

Если $m = n$, то в разложении (3.5.4) всегда присутствует базисная сверхсимметрическая форма

$$\Omega(x^1, x^2, ..., x^n) = x^1 x^2 ... \, x^n \,, \tag{3.5.6}$$

которая имеет линейную непрерывную $(n - 1)$ параметрическую группу симметрии.

Если $m > 2$ и чётное, то из базисных сверхсимметричных форм всегда можно образовать сверхсимметрическую форму, которая имеет линейную непрерывную $\frac{n(n-1)}{2}$ параметрическую группу симметрии $SO(n)$ и которая строится следующим образом:

$$\Omega(x^1, x^2, ..., x^n) = \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2\right]^{\frac{m}{2}} \,. \tag{3.5.7}$$

Любую форму, имеющую сверхсимметрический вид, можно представить как линейную комбинацию базисных сверхсимметрических форм,

$$\Omega(x^1, x^2, ..., x^n; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_N) = \omega_1 \Omega_1(x) + \omega_2 \Omega_2(x) + ... + \omega_N \Omega_N(x) \,, \tag{3.5.8}$$

где ω_a – действительные числа. При переходе к другим координатам $x^i \to y^i$ сверхсимметрический вид может сохраниться. К таким преобразованиям, например, относится общее масштабное преобразование.

Таким образом, кроме линейных преобразований, которые сохраняют сверхсимметрическую форму, существуют линейные преобразования, которые сохраняют сверхсимметрический вид произвольной сверхсимметрической формы порядка m в пространстве n действительных переменных и которые (преобразования) можно использовать для приведения сверхсимметрической формы к некому каноническому виду без потери сверхсимметричности.

Рассмотрим трёхмерное координатное пространство и произвольную форму третьего порядка, имеющую сверхсимметрический вид [35]. В этом случае имеется всего три базисные формы:

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_1(x) \equiv (x^1)^3 + (x^2)^3 + (x^3)^3\,, \\ &\Omega_2(x) \equiv x^1(x^2)^2 + x^1(x^3)^2 + (x^1)^2x^2 + x^2(x^3)^2 + (x^1)^2x^3 + (x^2)^2x^3\,, \\ &\Omega_3(x) \equiv x^1x^2x^3\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.5.9}$$

а соответствующая произвольная сверхсимметрическая форма, которую для краткости будем называть триформой, содержит три действительных параметра $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\Omega(x^1, x^2, x^3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1\Omega_1(x) + \omega_2\Omega_2(x) + \omega_3\Omega_3(x)\,. \tag{3.5.10}$$

Кроме общего масштабного преобразования, существует лишь одно однопараметрическое непрерывно связанное с тождественным линейное преобразование координат, которое переводит триформу опять в триформу. Запишем это преобразование в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{2\alpha} + 2e^{-\alpha} & e^{2\alpha} - e^{-\alpha} & e^{2\alpha} - e^{-\alpha} \\ e^{2\alpha} - e^{-\alpha} & e^{2\alpha} + 2e^{-\alpha} & e^{2\alpha} - e^{-\alpha} \\ e^{2\alpha} - e^{-\alpha} & e^{2\alpha} - e^{-\alpha} & e^{2\alpha} + 2e^{-\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}. \tag{3.5.11}$$

Данную матрицу перехода $\hat{A}$ можно представить в экспоненциальном виде:

$$\hat{A}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}}\,, \tag{3.5.12}$$

где $\hat{a}$ – генератор этого однопараметрического преобразования,

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5.13}$$

поэтому

$$\hat{A}(\alpha_1)\hat{A}(\alpha_2) = \hat{A}(\alpha_1 + \alpha_2)\,, \qquad \hat{A}^{-1}(\alpha) = \hat{A}(-\alpha)\,. \tag{3.5.14}$$

В новых переменных y^1, y^2, y^3 триформа (3.5.10) будет иметь вид

$$\Omega(y^1, y^2, y^3; \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3) = \Omega(x^1, x^2, x^3; \omega_1, \omega_2, \omega_3)\,, \tag{3.5.15}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\omega'_1 &= \ u\cdot(w_1p^3+3w_2p+2w_3)\,,\\
\omega'_2 &= 3u\cdot(w_1p^3-w_3)\,,\\
\omega'_3 &= 3u\cdot(2w_1p^3-3w_2p+4w_3)\,,
\end{aligned}\right\}\tag{3.5.16}$$

$$u=\frac{1}{27p}\,,\qquad p=e^{3\alpha}\,,\tag{3.5.17}$$

$$\left.\begin{aligned}
w_1 &= 3\omega_1+6\omega_2+\omega_3\,,\\
w_2 &= 6\omega_1-\omega_3\,,\\
w_3 &= 3\omega_1-3\omega_2+\omega_3\,.
\end{aligned}\right\}\tag{3.5.18}$$

Триформа (3.5.10) имеет три произвольных действительных параметра, но с помощью преобразования (3.5.11), дискретного преобразования – изменения у всех трёх координат знака и общего масштабного преобразования – умножения всех координат на одно и то же положительное число всегда можно привести триформу (3.5.10) к простейшему (каноническому) виду. Базисные формы (3.5.9) в силу их выделенности сразу причислим к каноническим. В результате получим 8 канонических форм:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\quad \Omega(x^1,x^2,x^3;1,0,0)\equiv\Omega_1(x^1,x^2,x^3)\,;\\
&2)\quad \Omega(x^1,x^2,x^3;0,1,0)\equiv\Omega_2(x^1,x^2,x^3)\,;\\
&3)\quad \Omega(x^1,x^2,x^3;0,0,1)\equiv\Omega_3(x^1,x^2,x^3)\,;\\
&4)\quad \Omega(x^1,x^2,x^3;1,-\frac{3}{2},6)\,;\\
&5)\quad \Omega(x^1,x^2,x^3;1,3,6)\equiv(x^1+x^2+x^3)^3\,;\\
&6)\quad \Omega(x^1,x^2,x^3;1,\omega,0)\,,\qquad \omega\in[-\tfrac{1}{2};0)\bigcup(0;1]\,;\\
&7)\quad \Omega(x^1,x^2,x^3;1,0,\omega)\,,\qquad \omega\neq 0\,;\\
&8)\quad \Omega(x^1,x^2,x^3;0,1,\omega)\,,\qquad \omega\neq 0\,.
\end{aligned}\right\}\tag{3.5.19}$$

Канонические формы 4) и 5) являются вырожденными. В работе [35] допущена ошибка, в ней не указано, что форма 4) является вырожденной. При переходе от координат x^1,x^2,x^3 к координатам y^1,y^2,y^3:

$$x^1=y^1-y^2+y^3\,,\quad x^1=-y^1+y^2+y^3\,,\quad x^1=y^1+y^2+y^3$$

– эта форма принимает вид:

$$\Omega_4 = -8\left[\left(y^1\right)^3 + \left(y^2\right)^3\right] + 12\left[y^1\left(y^2\right)^2 + \left(y^1\right)^2 y^2\right]$$

– и не зависит от координаты y^3. Условия на параметр ω в последних трёх канонических формах необходимы, чтобы исключить повторы и возможность получения из одной канонической формы какой-нибудь другой канонической формы преобразованиями, перечисленными выше.

Для того, чтобы через трифому мог выражаться куб нормы невырожденных ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел, триформа должна обладать двухпараметрической абелевой группой симметрии, состоящей из линейных однородных преобразований координатного пространства. Этим свойством обладают лишь 3-я, 7-я с $\omega = -3$ и 8-я с $\omega = 2$ канонические триформы. Причём 3-я и 8-я с $\omega = 2$ канонические триформы соответствуют поличислам

$$H_3 = R\bigoplus R\bigoplus R\,, \tag{3.5.20}$$

а 7-я с $\omega = -3$ каноническая триформа соответствует поличислам

$$P_{1+2\cdot 1} = R\bigoplus C\,. \tag{3.5.21}$$

Глава 4

ГЕОМЕТРИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛИЧИСЕЛ

4.1 Определение и основные свойства

Если в линейном пространстве $A_n \ni X, Y, A, B, ..$ размерности n над полем действительных чисел задана бинарная операция " $\cdot$ ", обладающая линейными свойствами по каждому сомножителю, то есть

$$(\alpha A + \beta B) \cdot (\gamma X + \delta Y) = \alpha\gamma A \cdot X + \alpha\delta A \cdot Y + \beta\gamma B \cdot X + \beta\delta B \cdot Y \ , \quad (4.1.1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ действительные числа, то такую пару $\{A_n; \cdot\}$, будем называть *линейной алгеброй* размерности n над полем действительных чисел.

Если не оговорено особо, в дальнейшем всегда подразумевается, что линейные пространства и линейные алгебры берутся над полем действительных чисел.

Если линейная алгебра $\{A_n; \cdot\}$ обладает единицей, то есть существует элемент $1 \in \{A_n; \cdot\}$ такой, что для любого элемента A алгебры

$$1 \cdot A = A \cdot 1 = A \,, \quad (4.1.2)$$

то такую алгебру будем обозначать HC_n и называть *алгеброй (системой) гиперкомплексных чисел*, а её элементы – *гиперкомплексными числами.*

Любые элементы $X, Y \in HC_n$ можно однозначно представить в виде линейной комбинации базисных элементов $e_1, e_2, ..., e_n$

$$X = x^i e_i \ , \qquad Y = y^i e_i \,, \quad (4.1.3)$$

а значит произведение $X \cdot Y$ можно выразить через произведение базисных элементов:

$$X \cdot Y = x^i y^j \, e_i \cdot e_j = x^i y^j p^k_{ij} e_k \,, \tag{4.1.4}$$

где числовой тензор p^k_{ij} полностью характеризует (определяет) бинарную операцию на множестве HC_n и носит название *структурного тензора.*

Обычно единицу включают в число базисных элементов, например, $e_1 \equiv 1$, тогда

$$e_i \cdot 1 = p^k_{i1} e_k = e_i \qquad \Rightarrow \qquad p^k_{i1} = \delta^k_i \,, \tag{4.1.5}$$

$$1 \cdot e_j = p^k_{1j} e_k = e_j \qquad \Rightarrow \qquad p^k_{1j} = \delta^k_j \,. \tag{4.1.6}$$

Если единица не входит в число базисных элементов, то её можно представить в виде линейной комбинации базисных элементов:

$$1 = \epsilon^i e_i \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon^i p^k_{ij} = \delta^k_j \,, \quad p^k_{ij} \epsilon^j = \delta^k_i \,. \tag{4.1.7}$$

Если любая пара $X, Y \in HC_n$ коммутирует, то есть

$$X \cdot Y = Y \cdot X \,, \tag{4.1.8}$$

то система гиперкомплексных чисел называется коммутативной. Для того, чтобы система гиперкомплексных чисел была коммутативна, необходимо и достаточно, чтобы базисные элементы попарно коммутировали:

$$e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i \quad \Leftrightarrow \qquad p^k_{ij} = p^k_{ji} \,. \tag{4.1.9}$$

Если гиперкомплексное умножение ассоциативно, то есть для любой тройки чисел $X, Y, Z \in HC_n$

$$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z \,, \tag{4.1.10}$$

то система гиперкомплексных чисел называется ассоциативной. Для того чтобы система гиперкомплексных чисел была ассоциативной, необходимо и достаточно, чтобы между любыми тремя базисными элементами имело место свойство (4.1.10), или, что то же самое, характеристический тензор должен обладать следующим свойством:

$$p^k_{ir} p^r_{jm} = p^r_{ij} p^k_{rm} \,. \tag{4.1.11}$$

Если $A \neq 0$ и $B \neq 0$, но

$$A \cdot B = 0 \,, \tag{4.1.12}$$

оба числа A, B называются *делителями нуля.*

Таким образом, для делителя нуля нет обратного числа, то есть на это число не возможно деление, в отличие от систем гиперкомплексных чисел с делением, где для всех, чисел, кроме нуля, существует обратное число.

Как известно, имеет место следующая теорема.

***Теорема Фробениуса* [4].** Любая ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трёх: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел или алгебре кватернионов.

В дальнейшем нас будут интересовать только системы ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел, которые будем обозначать P_n и кратко называть поличислами, или n-числами. Идея о физической значимости именно поличисел [28] – [30] позволила построить замкнутую математическую теорию с физическими приложениями [39] – [46], теорию, которая включает в себя и финслерову геометрию, и теорию функций поличисловой переменной.

Из теоремы Фробениуса и того факта, что кватернионы являются системой некоммутативных гиперкомплексных чисел, следует утверждение: любая система поличисел P_n с $n > 2$ обладает делителями нуля. А в силу этого в системе поличисел P_n с $n > 2$ нельзя ввести понятие нормы для произвольных чисел $X, Y \neq 0$, которая бы обладала одновременно свойствами:

$$|X \cdot Y| = |X||Y|\,, \qquad |X| \neq 0\,, \quad |Y| \neq 0\,. \tag{4.1.13}$$

Если $A^m = 0$, но $A \neq 0$, и $m > 1$ – натуральное число, то элемент A называется *нильпотентным элементом* алгебры.

Напомним также определение *прямой суммы линейных алгебр* [15].

Прямая сумма двух линейных алгебр над полем действительных чисел есть линейная алгебра, составленная из упорядоченных пар (первый элемент пары принадлежит первой алгебре, а второй – второй алгебре) с покомпонентным сложением, умножением и умножением на действительное число.

***Теорема Вейерштрасса* [9].** Любая ассоциативно-коммутативная конечномерная алгебра без нильпотентных элементов над R изоморфна прямой сумме алгебр R и C.

Поличисла – это ассоциативно-коммутативные гиперкомплексные числа над полем действительных чисел. Будем понимать под *невырожденными алгебрами поличисел* P_n такие системы поличисел, в которых нет нильпотентных элементов. Тогда теорема Вейерштрасса применима к невырожденным поличислам, позволяет провести их классификацию и доказать многие положения для невырожденных поличисел более просто.

В настоящей главе и в дальнейшем будут изучаться только невырожденные поличисловые системы $P_n \ni A$, B, C, ... , X, Y, Z, ..., где n – размерность пространства P_n, над полем действительных чисел R. Это означает, что из равенства $A^m = 0$, где m – натуральное число больше единицы, следует, что $A = 0$.

Любая гиперкомплексная система над полем действительных чисел при задании базиса e_1, e_2, ... , e_n полностью определяется законом умножения базисных элементов:

$$e_i \cdot e_j = p^l_{ij} \cdot e_l \,, \tag{4.1.14}$$

то есть числовым тензором p^l_{ij}.

Если представить, что начало всех переменных векторов $X \in P_n$ находится в одной фиксированной точке, то компоненты таких векторов определяют нам n-мерное координатное пространство:

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n \qquad \leftrightarrow \qquad (x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{4.1.15}$$

и тогда в этом координатном пространстве определена бинарная операция:

$$X \cdot Y = Z \qquad \leftrightarrow \qquad x^i x^j p^l_{ij} = z^l\,. \tag{4.1.16}$$

Как уже отмечалось выше, коммутативность поличисел означает, что

$$XY = YX \qquad \Rightarrow \qquad p^l_{ij} = p^l_{ji}\,, \tag{4.1.17}$$

ассоциативность –

$$(XY)Z = X(YZ) \qquad \Rightarrow \qquad p^l_{ij} p^s_{lr} = p^l_{rj} p^s_{li} \tag{4.1.18}$$

и, если ϵ^i – коэффициенты разложения единицы в базисе e_1, e_2, $...e_n$, то есть это точка $(\epsilon^1, \epsilon^2, ..., \epsilon^n)$ в координатном пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$, то справедлива следующая формула:

$$\epsilon^i p^l_{ij} = \delta^l_j\,. \tag{4.1.19}$$

4.2 Норма гиперкомплексного числа и группа симметрии

Так как алгебра кватернионов не коммутативна, то из теоремы Фробениуса следует, что невырожденные поличисла P_n размерности $n > 2$ всегда содержат делители нуля, то есть найдутся такие числа X, $Y \neq 0$, что

$$XY = YX = 0\,, \tag{4.2.1}$$

поэтому на множестве невырожденных поличисел размерности больше двух нельзя определить классическое понятие нормы числа, а можно определить близкое понятие, которое следовало бы назвать другим термином, например, *квазинормой*, но для краткости и лучшего понимания мы будем использовать старый термин.

Если на некотором подмножестве D_n поличисел P_n для любого числа X из этого подмножества задано действительное число $|X|$, причем для любых X, $Y \in D_n$ выполняются следующие три требования:

1. $|X| \geq 0$;
2. $|aX| = a|X|$, если $a > 0$ – действительное положительное число;
3. $|XY| = |X||Y|$

– будем говорить, что на множестве поличисел P_n задана *норма*, а D_n является областью её определения.

Непосредственно из теоремы Вейерштрасса следует, что любая система невырожденных поличисел P_n изоморфна алгебре квадратных диагональных матриц $(k+m) \times (k+m)$, у которых первые k элементов – произвольные действительные числа, а остальные m элементов – комплексные числа; причем алгебра P_n рассматривается над полем действительных чисел, то есть такие матрицы складываются и перемножаются обычным образом, а умножаются только на действительные числа. Размерность таких гиперкомплексных чисел равна

$$k + 2m = n\,. \tag{4.2.2}$$

В силу этого неизоморфные системы невырожденных поличисел однозначно определяются (классифицируются) парой действительных чисел, например, k и m, а размерность пространства определяется формулой (4.2.2). Чтобы не изобретать новое обозначение для невырожденных поличисел, предлагается использовать старое обозначение для поличисел, но записывать размерность пространства в виде формулы P_{k+2m}, например, $P_{3+2\cdot 4}$, где $k = 3$, $m = 4$, а размерность пространства $n = 11$.

Таким образом, для любой системы невырожденных поличисел существует базис e_1, e_2, $...e_n$, в котором:

$$p_{ij}^{l} = \begin{cases} 1, \ i = j = l = 1, 2, ..., k, k+1, k+3, ..., n-1, \\ 1, \ j = l = i + 1 = k+2, k+4, ..., n\,, \\ 1, \ i = l = j + 1 = k+2, k+4, ..., n\,, \\ -1, \ i = j = l + 1 = k+2, k+4, ..., n\,, \\ 0, \ \text{во всех остальных случаях}\,. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Такой базис будем называть изотропным. При алгебраических вычислениях (преобразованиях) удобнее пользоваться именно этим базисом.

В матричном представлении на множестве квадратных действительных матриц $n \times n$ изотропный базис можно реализовать из матриц трёх видов: диагональных матриц, у которых на главной диагонали имеется единственный отличный от нуля элемент, равный единице, а все остальные элементы равны нулю; а также блочных матриц двух видов, у которых на главной диагонали стоит одна из двух матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а все остальные элементы равны нулю.

Используя числовой тензор p_{ij}^{l}, можно построить много других числовых тензоров, например,

$$q_{ij} = p_{is}^{l} \cdot p_{lj}^{s}\,. \tag{4.2.4}$$

Для поличисел тензор q_{ij} является симметрическим, так как

$$q_{ij} = q_{ji}\,. \tag{4.2.5}$$

Построим этот тензор в изотропном базисе (4.2.3):

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & -2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 2 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.6}$$

то есть в этом базисе компоненты тензора q_{ij} образуют диагональную матрицу, у которой первые k элементов равны 1, а остальные $2m$ элементов заполняют главную диагональ парами $\{2, -2\}$, поэтому в изотропном базисе

$$det(q_{ij}) = (-4)^m \,.$$

Отсюда следует, что в любой системе координат для невырожденных поличисел $P_{k+2\cdot m}$ выполняется условие

$$det(q_{ij}) \neq 0 \,, \tag{4.2.7}$$

а значит, можно построить дважды контравариантный тензор q^{ij}, такой, что

$$q^{il}q_{lj} = q_{jl}q^{li} = \delta^i_j \,. \tag{4.2.8}$$

Невырожденные поличисла $P_{r+2\cdot 0}$ занимают особое положение среди всех невырожденных поличисел, поэтому введём для них специальное обозначение

$$H_r \equiv P_{r+2\cdot 0} \,. \tag{4.2.9}$$

Алгебра поличисел H_r изоморфна алгебре действительных квадратных диагональных матриц $r \times r$ над полем действительных чисел. Удобно также выделить поличисла $P_{0+2\cdot m} \equiv H^C_m$. Можно представить, что элементами такой алгебры являются комплексные квадратные диагональные матрицы $m \times m$, их можно складывать, перемножать и умножать на действительные числа, то есть это – алгебра над полем действительных чисел. Тогда справедлива формула

$$P_{k+2m} = H_k \oplus H^C_m \,. \tag{4.2.10}$$

Очевидно, что норма на множестве поличисел P_{k+2m} в изотропном базисе определяется формулой

$$|X| = \sqrt[n]{x^1 ... x^k \left[(x^{k+1})^2 + (x^{k+2})^2\right] ... \left[(x^{n-1})^2 + (x^n)^2\right]} \,, \tag{4.2.11}$$

а область, где норма определена, задается неравенствами

$$x^1 x^2 ... x^k \geq 0 \,. \tag{4.2.12}$$

Все три требования, сформулированные в начале данного раздела, которым должна удовлетворять норма поличисел, выполняются.

Область

$$x^1 > 0 \,,\; x^2 > 0 \,,\; ... \,,\; x^k > 0 \,,$$

будем называть конусом будущего. Если заменить неравенство (4.2.12) этим более сильным условием принадлежности поличисел конусу будущего, то тем более все три аксиомы в определении нормы поличисел выполняются.

В ковариантной форме норма поличисла (4.2.11) записывается следующим образом:

$$|X| = \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 ... i_n} x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_n}}\,, \tag{4.2.13}$$

где $g_{i_1 i_2 ... i_n}$ – метрический тензор.

Учитывая, что в изотропном базисе тензор p^l_{ij} определяется формулой (4.2.3), получим в этом базисе

$$|X|^n = det(x^i p^l_{ij})\,, \tag{4.2.14}$$

но справа в этой формуле стоит величина, которая не изменяется при переходе от одного базиса к другому, поэтому формула (4.2.14) верна в любом базисе, то есть не зависит от выбора базиса. Формула (4.2.14) определяет норму поличисла X, если правая часть больше или равна нуля, $det(x^i p^l_{ij}) \geq 0$. Второе и третье требования в определении нормы поличисла выполняются автоматически.

Группой симметрии $G_1(P_{k+2m})$ пространства P_{k+2m} будем называть непрерывную группу линейных преобразований координат векторов этого пространства в фиксированном базисе, которые (преобразования) не меняют норму любого числа, для которого норма существует. Индекс "1" имеет важный смысл, ниже будет показано, что группа симметрии изоморфна множеству унимодулярных поличисел с групповым умножением, совпадающим с поличисловым.

Непосредственно из формулы (4.2.11) следует, что непрерывная группа Ли $G_1(P_{k+2m})$ состоит из двух видов преобразований: эллиптических поворотов и гиперболических поворотов. Под последними мы понимаем одновременное растяжение по одним координатам и обязательно сжатие по другим, при выполнении некоторого специального условия.

Эллиптические повороты осуществляются матрицами вида:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} . \qquad (4.2.15)$$

Здесь матрица поворота

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix} \qquad (4.2.16)$$

осуществляет правый эллиптический поворот в плоскости (x^i, x^{i+1}), где $i = k+1, k+3, ..., n-1$, на действительный угол φ_i. Всего таких коммутирующих между собой поворотов равно m.

Гиперболические повороты осуществляются матрицами вида

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} e^{\varepsilon_1} & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & e^{\varepsilon_i} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & e^{\varepsilon_{i+1}} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & e^{\varepsilon_{n-1}} & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & e^{\varepsilon_n} \end{pmatrix} . \qquad (4.2.17)$$

где ε_j – действительные числа, причем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{k+2}\,,\ \varepsilon_{k+3} = \varepsilon_{k+4}\,,\ ...\,,\ \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n\,, \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+2} + ... + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = 0\,. \end{aligned} \right\} \qquad (4.2.18)$$

Число независимых гиперболических поворотов (4.2.17) равно $(k+m-1)$, все они коммутируют между собой и с эллиптическими поворотами (4.2.15).

Таким образом, непрерывная группа симметрии $G_1(P_{k+2m})$ является абелевой непрерывной $(n-1)$ параметрической группой Ли, так как

$$m + (k+m-1) = k + 2m - 1 = n - 1\,.$$

4.3 Скалярное полипроизведение

Определим в пространстве P_{k+2m} скалярное полипроизведение от $n \equiv k+2m$ аргументов следующим образом:

$$(A, B, ..., C) = g_{ij...l} a^i b^j ... c^l \,. \tag{4.3.1}$$

Здесь $g_{ij...l}$ – метрический тензор, фигурирующий в формуле (4.2.13), $A, B, ..., C$ – произвольные поличисла. Такое скалярное полипроизведение не изменяется при любой перестановке аргументов; и по каждому из аргументов оно линейно, например, по первому

$$(\alpha A + \delta D, B, ..., C) = \alpha (A, B, ..., C) + \delta (D, B, ..., C)\,, \tag{4.3.2}$$

где α, δ – произвольные действительные числа. Если

$$(X, X, ..., X) \geq 0\,, \tag{4.3.3}$$

то для поличисла X определена норма $|X|^n$, причем

$$|X|^n = (X, X, ..., X)\,. \tag{4.3.4}$$

Для того, чтобы поличисло $A \neq 0$ являлось делителем нуля, то есть существовало такое поличисло $B \neq 0$, что $A \cdot B = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(A, A, ..., A) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |A|^n = 0\,. \tag{4.3.5}$$

Последнее утверждение очевидно выполняется в изотропном базисе, а так как значение скалярного полипроизведения не зависит от выбора базиса, то оно справедливо всегда.

Рассмотрим в координатном пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ прямую, которая проходит через некоторую точку A, не проходит через начало координат и имеет направляющий вектор B, тогда вектор $X = A + B\tau$, где τ – некий действительный параметр, соединяет начало координат с переменной точкой X на прямой. Пусть при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ вектор X является измеримым. Потребуем, чтобы

$$\frac{d}{d\tau}|X|^n = 0\,, \tag{4.3.6}$$

и найдем вектор X_*, для которого выполняется это необходимое условие экстремума при $\tau = \tau_*$. Из (4.3.6) получим

$$(X_*, X_*, ..., X_*, B) = 0\,. \tag{4.3.7}$$

В евклидовой геометрии вектор X_*, для которого выполняется условие (4.3.6), является ортогональным направляющему вектору B, то есть прямой, так как в этом случае $(X_*, B) = 0$.

Будем говорить, что поличисло (вектор) B трансверсально поличислу (вектору) A, если

$$(A, A, ..., A, B) = 0\,. \tag{4.3.8}$$

Если поличисло B трансверсально поличислу A, то, вообще говоря, из этого не следует, что поличисло A трансверсально поличислу B. Взаимность трансверсальности автоматически следует только для невырожденных поличисел размерности два, то есть только для комплексных и гиперболических (двойных) чисел.

Если в пространстве P_{k+2m} существует базис, каждый элемент которого трансверсален всем остальным и имеет норму, равную 1, то такой базис будем называть "ортонормированным".

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – "ортонормированный" базис, а A – произвольное поличисло, то есть

$$A = a^1 e_1 + a^2 e_2 + ... a^n e_n\,. \tag{4.3.9}$$

Рассмотрим скалярное полипроизведение $(e_i, e_{i_-}, ..., e_{i_-}, A)$. Используя свойство (4.3.2) и определение "ортонормированного" базиса, получим

$$a^i = (e_i, e_{i_-}, ..., e_{i_-}, A)\,. \tag{4.3.10}$$

Как видим, эта формула аналогична формуле для получения координат вектора через скалярное произведение в ортонормированном базисе евклидовых пространств. Таким образом, для невырожденных поличисел в "ортонормированном" базисе, если такой базис существует, имеет место следующее разложение произвольного поличисла A:

$$A = (e_i, e_i, ..., e_i, A) \cdot e_i\,. \tag{4.3.11}$$

4.4 Перманенты

Число аргументов в скалярном полипроизведении в пространстве невырожденных поличисел равно размерности пространства n, поэтому при $n > 3$ вычисление таких величин представляет определенные трудности. В данном разделе мы опишем удобный алгоритм вычисления скалярных полипроизведений в пространствах невырожденных поличисел.

Пусть

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & ... & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & ... & x^2_{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^n_{(1)} & x^n_{(2)} & ... & x^n_{(n)} \end{pmatrix} \qquad (4.4.1)$$

– некоторая числовая матрица, причём числа $x^i_{(j)}$ могут быть как действительными, так и комплексными. Такая индексация элементов матрицы введена специально, чтобы легче было в дальнейшем строить такие матрицы из координат поличисел, координат векторов.

Под *перманентом* $perm(\hat{X})$ матрицы $\hat{X} = (x^i_{(j)})$ будем понимать число, полученное следующим образом:

$$perm(x^i_{(j)}) \equiv \begin{vmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & ... & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & ... & x^2_{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^n_{(1)} & x^n_{(2)} & ... & x^n_{(n)} \end{vmatrix}_+ = \sum_{(1,2,...,n)} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} ... x^{i_n}_{(n)}\,, \qquad (4.4.2)$$

где суммирование идёт по всевозможным подстановкам $(1, 2, ..., n)$ индексов $i_1, i_2, ..., i_n$. В разделе 3.2 вместо термина *перманент* использовался термин *антиопределитель* и рассматривались перманенты только действительных матриц.

Свойства перманентов и алгоритм их вычисления сформулируем аналогично свойствам и алгоритму вычисления определителей. Большинство из этих свойств, но не все, были сформулированы в разделе 3.2 в терминах *антиопределителей* действительных матриц.

1). Перманент квадратной $n \times n$ матрицы $\hat{X} = (x_{ij})$ есть сумма $n!$ произведений элементов матрицы $\hat{X}$, причём в каждом таком произведении присутствует один и только один элемент из каждой строки и каждого столбца.

Из этого свойства непосредственно следуют ряд других свойств перманентов.

2). Перманент от транспонированной матрицы равен перманенту от исходной матрицы,

$$perm(\hat{X}^T) = perm(\hat{X})\,. \qquad (4.4.3)$$

Это же свойство можно переформулировать по-другому.

3). Если какое-то утверждение или свойство справедливо для столбцов перманента, то оно справедливо и для его строк, и наоборот.

Таким образом, достаточно формулировать утверждения, относящиеся к перманентам, и свойства перманентов только в одном экземпляре – только для столбцов.

4). Если у матрицы имеется столбец, состоящий из одних нулей, то перманент этой матрицы равен нулю.

5). Если какой-нибудь столбец матрицы имеет общий множитель, то его можно вынести за знак перманента.

6). Если какой-нибудь столбец с номером j матрицы $\hat{X}$ можно представить как сумму двух столбцов, то перманент матрицы есть сумма двух перманентов:

$$perm(\hat{X}) = perm(\hat{X}_1) + perm(\hat{X}_2)\,, \tag{4.4.4}$$

где матрица $\hat{X}_1$ получается из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на первый столбец, а матрица $\hat{X}_2$ получается из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на второй столбец.

Из последних двух свойств следует более общее утверждение.

7). Пусть столбец с номером j матрицы $\hat{X}$ есть линейная комбинация любого количества столбцов:

$$x_i = \alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i + ... + \gamma \cdot c_i + ...\,, \tag{4.4.5}$$

где α, β, ..., γ, ... – действительные или комплексные числа. Тогда

$$perm(\hat{X}) = \alpha \cdot perm(\hat{X}_a) + \beta \cdot perm(\hat{X}_b) + ... + \gamma \cdot perm(\hat{X}_c) + ...\,. \tag{4.4.6}$$

Матрицы $\hat{X}_a$, $\hat{X}_b$, ... , $\hat{X}_c$, ... получаются из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на столбцы a, b, ... , c, ... соответственно.

Обратимся опять к определению перманента:

$$perm(\hat{X}) \equiv \sum_{(1,2,...,n)} x_{i_1 1} x_{i_2 2} ... x_{i_n n}\,. \tag{4.4.7}$$

Выделим в сумме, стоящей справа, все слагаемые, содержащие некоторый элемент x_{ij} матрицы $\hat{X}$, и вынесем его за скобки. В скобках останется сумма из $(n-1)!$ слагаемых, каждое из которых будет содержать по одному элементу из каждой строки, кроме строки i, и каждого столбца, кроме столбца j, матрицы $\hat{X}$, то есть это будет перманент (обозначим его X_{ij}) матрицы $(n-1)\times(n-1)$, которая получается из матрицы $\hat{X}$ вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца. Будем называть X_{ij} алгебраическим дополнением элемента x_{ij}. Проделаем описанную выше процедуру для каждого элемента некоторого выделенного столбца и получим алгоритм вычисления перманента n-го порядка через перманенты $(n-1)$-го порядка.

8). Формула разложения перманента по фиксированному j-ому столбцу:

$$perm(\hat{X}) = x_{1j}X_{1j_-} + x_{2j}X_{2j_-} + ... + x_{nj}X_{nj_-}\,. \tag{4.4.8}$$

9). С помощью процедуры разложения перманента по столбцу вычисление любого перманента n-го порядка всегда можно свести к вычислению перманентов второго или третьего порядка, которые вычисляются аналогично тому, как вычисляются обыкновенные определители, но без знаков минус:

$$\left|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right|_+ = ad + cb\,, \tag{4.4.9}$$

$$\left|\begin{matrix} a & \alpha & d \\ \beta & b & \gamma \\ e & \delta & c \end{matrix}\right|_+ = abc + \alpha\gamma e + \beta\delta d + ebd + \beta\alpha c + \delta\gamma a\,. \tag{4.4.10}$$

Формула разложения перманента по столбцу является частным случаем более общей формулы разложения перманента по нескольким столбцам. Обозначим через $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ перманент матрицы, элементами которой являются элементы матрицы $\hat{X}$, стоящие на пересечении строк $i_1 < i_2 < ... < i_k$ и столбцов $j_1 < j_2 < ... < j_k$, причём $1 < k < (n-1)$. Будем называть $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ минором, а дополнительным минором $\bar{M}_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ к минору $M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}$ назовём перманент от матрицы, полученной из матрицы $\hat{X}$ вычёркиванием тех же самых строк $i_1 < i_2 < ... < i_k$ и столбцов $j_1 < j_2 < ... < j_k$.

10). Справедлива следующая формула разложения перманента по k столбцам, $1 < k < (n-1)$:

$$perm(\hat{X}) = \sum_{i_1<i_2<...<i_k} M_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}\bar{M}_{i_1,i_2,...,i_k;j_1,j_2,...,j_k}\,, \tag{4.4.11}$$

где суммирование идёт по всевозможным выборкам k строк из n при обязательном выполнении неравенств $i_1 < i_2 < ... < i_k$, а номера столбцов $j_1, j_2, ..., j_k$ фиксированы и по ним суммирование не ведётся.

Приведём пример такого разложения перманента четвертого порядка по двум первым столбцам:

$$\left|\begin{matrix} x^1 & y^1 & z^1 & u^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & u^4 \end{matrix}\right|_+ =$$

$$= \left|\begin{matrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{matrix}\right|_+ \cdot \left|\begin{matrix} z^3 & u^3 \\ z^4 & u^4 \end{matrix}\right|_+ + \left|\begin{matrix} x^1 & y^1 \\ x^3 & y^3 \end{matrix}\right|_+ \cdot \left|\begin{matrix} z^2 & u^2 \\ z^4 & u^4 \end{matrix}\right|_+ + \qquad (4.4.12)$$

$$+ \left|\begin{matrix} x^1 & y^1 \\ x^4 & y^4 \end{matrix}\right|_+ \cdot \left|\begin{matrix} z^2 & u^2 \\ z^3 & u^3 \end{matrix}\right|_+ + \left|\begin{matrix} x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \end{matrix}\right|_+ \cdot \left|\begin{matrix} z^1 & u^1 \\ z^4 & u^4 \end{matrix}\right|_+ +$$

$$+ \left|\begin{matrix} x^2 & y^2 \\ x^4 & y^4 \end{matrix}\right|_+ \cdot \left|\begin{matrix} z^1 & u^1 \\ z^3 & u^3 \end{matrix}\right|_+ + \left|\begin{matrix} x^3 & y^3 \\ x^4 & y^4 \end{matrix}\right|_+ \cdot \left|\begin{matrix} z^1 & u^1 \\ z^2 & u^2 \end{matrix}\right|_+ .$$

Следующие три свойства 11) – 13) являются следствиями свойства 8) – формулы разложения перманента по столбцу или строке.

11). Перманент от диагональной матрицы равен произведению её элементов на главной диагонали.

12). Перманент от матрицы, у которой отличные от нуля элементы стоят на побочной диагонали, равен произведению этих элементов.

13). Перманент от треугольной матрицы, то есть матрицы, у которой выше или ниже главной диагонали (или побочной диагонали) все элементы нули, равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали (или побочной диагонали).

14). Если у перманента поменять местами два столбца, то перманент не изменит своё значение.

Из этого свойства следует более общее правило.

15). При любой перестановке столбцов перманента его значение не меняется.

16). Перманент от матрицы $n \times n$, у которой все элементы единицы, равен $n!$.

17). Перманент от матрицы $n \times n$, у которой все столбцы одинаковые, равен произведению $n!$ на произведение всех элементов одного столбца.

18). Перманент от матрицы $\hat{X}$ $(n \times n)$, которая состоит из $(n - 1)$ одинаковых столбцов с элементами $x_1, x_2, ..., x_n$ и одного, вообще говоря, другого столбца с элементами $x'_1, x'_2, ..., x'_n$, вычисляется по формуле

$$perm(\hat{X}) = (n-1)! \cdot (x'_1 x_2 ... x_n + x_1 x'_2 ... x_n + ... + x_1 ... x_{n-1} x'_n) \, , \qquad (4.4.13)$$

или, если все $x_i \neq 0$, эту формулу можно переписать следующим образом:

$$perm(\hat{X}) = (n-1)! \cdot x_1 x_2 ... x_n \left(\frac{x'_1}{x_1} + \frac{x'_2}{x_2} + ... + \frac{x'_n}{x_n} \right) . \tag{4.4.14}$$

19). Если n – нечётно, то перманент от антисимметрической матрицы равен нулю.

20). Пусть числа $X_1, X_2, ..., X_n \in H_n \equiv P_{n+2\cdot 0}$, тогда скалярное произведение векторов, соответствующим этим поличислам, равно

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}) = \frac{1}{n!} \cdot perm(x^i_{(j)}) , \tag{4.4.15}$$

где $x^i_{(j)}$ – координаты числа $X_{(j)}$ в изотропном базисе. Справа стоит симметрическая полилинейная форма от координат n векторов, причем, если все эти векторы равны между собой, то

$$\frac{1}{n!} \cdot perm(x^i_{(j)}) = x^1 x^2 ... x^n . \tag{4.4.16}$$

21). Перманент от комплексно сопряжённой матрицы равен комплексно сопряжённому перманенту от исходной матрицы.

22). Перманент от эрмитовой матрицы есть действительное число.

23). Перманент от антиэрмитовой матрицы есть действительное число, если n чётное, и мнимое число или нуль, если n нечётное.

24). Если числа $X_1, X_2, ..., X_n \in P_{k+2\cdot m}$, $m \neq 0$, матрица $\hat{X}$ строится в изотропном базисе следующим образом:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & ... & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & ... & x^2_{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^k_{(1)} & x^k_{(2)} & ... & x^k_{(n)} \\ x^{k+1}_{(1)} + i x^{k+2}_{(1)} & x^{k+1}_{(2)} + i x^{k+2}_{(2)} & ... & x^{k+1}_{(n)} + i x^{k+2}_{(n)} \\ x^{k+1}_{(1)} - i x^{k+2}_{(1)} & x^{k+1}_{(2)} - i x^{k+2}_{(2)} & ... & x^{k+1}_{(n)} - i x^{k+2}_{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ x^{n-1}_{(1)} + i x^{n}_{(1)} & x^{n-1}_{(2)} + i x^{n}_{(2)} & ... & x^{n-1}_{(n)} + i x^{n}_{(n)} \\ x^{n-1}_{(1)} - i x^{n}_{(1)} & x^{n-1}_{(2)} - i x^{n}_{(2)} & ... & x^{n-1}_{(n)} - i x^{n}_{(n)} \end{pmatrix} , \tag{4.4.17}$$

где $i \cdot i = -1$, i – мнимая комплексная единица. Перманент от такой матрицы $\hat{X}$ является действительным числом, так как при комплексном сопряжении у матрицы $\hat{X}$ (4.4.17) меняются местами m пар строк, а как мы знаем, перманент при этом не изменяет своего значения. Таким образом, $R \ni perm(\hat{X})$ – это полилинейная форма от действительных координат n векторов $X_1, X_2, ..., X_n \in P_{k+2\cdot m}$, $m \neq 0$, причем, если все векторы одинаковы и равны X, то

$$perm(\hat{X}) = n! \cdot x^1 x^2 ... x^k \left[(x^{k+1})^2 + (x^{k+2})^2\right] ... \left[(x^{n-1})^2 + (x^n)^2\right], \quad (4.4.18)$$

поэтому скалярное полипроизведение произвольных векторов X_1, X_2, $..., X_n \in P_{k+2\cdot m}$ можно вычислять по формуле

$$(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{1}{n!} \cdot perm(\hat{X}), \quad (4.4.19)$$

где алгоритм построения матрицы $\hat{X}$ определяется формулой (4.4.17).

Подчеркнем, что все приведенные выше соотношения между скалярными полипроизведениями и перманентами имеют место только в изотропном базисе.

Следует признать, что использование общей мнимой единицы при построении матрицы $\hat{X}$ (4.4.17), вообще говоря, выводит нас за рамки пространства невырожденных поличисел $P_{k+2\cdot m}$, но так как в конечных формулах после взятия перманента общая мнимая единица не присутствует, то этот приём можно рассматривать как чисто формальный метод упрощения вычислений скалярных полипроизведений невырожденных поличисел.

4.5 Длина отрезка кривой в пространстве $P_{k+2\cdot m}$

Зададим в координатном пространстве $P_{k+2\cdot m}$ в изотропном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ со структурным тензором (4.2.3) некоторую кривую

$$x^i = x^i(\tau), \qquad \tau \in [\tau_1, \tau_2], \quad (4.5.1)$$

при $\tau = \tau_1$ кривая проходит через точку A, а при $\tau = \tau_2$ – через точку B, причем все бесконечно малые векторы с координатами

$$dx^i = \dot{x}^i(\tau) d\tau \quad (4.5.2)$$

измеримы, то есть для них определена норма. Тогда естественно определить длину отрезка кривой между двумя точками A и B как интеграл

$$l_{AB} = \int\limits_A^B \sqrt[n]{dx^1 ... dx^k \left[(dx^{k+1})^2 + (dx^{k+2})^2\right] ... \left[(dx^{n-1})^2 + (dx^n)^2\right]}, \quad (4.5.3)$$

или

$$l_{AB} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt[n]{\dot{x}^1 ... \dot{x}^k \left[(\dot{x}^{k+1})^2 + (\dot{x}^{k+2})^2\right] ... \left[(\dot{x}^{n-1})^2 + (\dot{x}^n)^2\right]} \cdot d\tau \,. \qquad (4.5.4)$$

Таким образом, если $n = k + 2 \cdot m > 2$, то метрическое пространство $P_{k+2\cdot m}$ не является ни евклидовым, ни псевдоевклидовым. Это плоское финслерово пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt[n]{dx^1 ... dx^k \left[(dx^{k+1})^2 + (dx^{k+2})^2\right] ... \left[(dx^{n-1})^2 + (dx^n)^2\right]} \,, \qquad (4.5.5)$$

инвариантной относительно группы $G_1(P_{k+2\cdot m})$. Компоненты p_i обобщенного импульса вычисляются следующим образом:

$$p_i = \frac{\partial L(dx)}{\partial (dx^i)} \equiv \frac{\partial L(\dot{x})}{\partial \dot{x}^i} \,. \qquad (4.5.6)$$

Эти величины связаны функциональным соотношением

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n) = 0 \,, \qquad \text{или} \qquad \Phi(p) = 0 \,, \qquad (4.5.7)$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы. Для метрической функции (4.5.5) тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать в виде:

$$p_1 p_2 ... p_k (p_{k+1}^2 + p_{k+2}^2)(p_{k+3}^2 + p_{k+4}^2) ... (p_{n-1}^2 + p_n^2) - \frac{4^m}{n^n} = 0 \,. \qquad (4.5.8)$$

Таким образом, все невырожденные поличисловые пространства являются *разрешимыми* (см. раздел 3.1).

Пусть в координатном пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ заданы две финслеровы геометрии, причём между метрическими функциями $L(dx; x)$ и $L'(dx; x)$ этих геометрий имеет место соотношение

$$L'(dx; x) = \kappa(x) \cdot L(dx; x) \,, \qquad (4.5.9)$$

где $\kappa(x) > 0$ – некоторая функция, зависящая только от точки основного пространства. Тогда такие геометрии называются *конформно связанными* [2].

Финслерова геометрия, конформно связанная с геометрией (4.5.5), в каждой точке имеет касательное пространство, изоморфное поличисловому пространству $P_{k+2\cdot m}$, а тангенциальное уравнение индикатрисы в таком пространстве имеет вид:

$$p_1 p_2 ... p_k (p_{k+1}^2 + p_{k+2}^2)(p_{k+3}^2 + p_{k+4}^2) ... (p_{n-1}^2 + p_n^2) - \frac{4^m}{n^n} \kappa^n(x) = 0 \,. \qquad (4.5.10)$$

Тем самым на примере невырожденных поличисловых пространств мы доказали утверждение, которое можно было бы доказать ещё в разделе 3.1: если финслерово пространство разрешимо, то и конформно связанное с ним разрешимо.

Напомним (2.3.26), что если известно тангенциальное уравнение индикатрисы

$$\Phi(p;x) = 0\,, \tag{4.5.11}$$

то каноническая система дифференциальных уравнений для определения экстремалей (геодезических, мировых линий) в финслеровом пространстве записывается следующим образом:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda(p;x)\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \cdot \lambda(p;x)\,, \tag{4.5.12}$$

где $\lambda(p;x) > 0$ – произвольная скалярная функция.

Для финслерова пространства, конформно связанного с пространством $P_{k+2\cdot m}$, с тангенциальным уравнением индикатрисы (4.5.10) частные производные функции $\Phi(p;x)$ определяются формулами:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \begin{cases} \dfrac{4^m}{n^n} \cdot \dfrac{\kappa^n}{p_i}\,, & i = 1, 2, ..., k\,, \\[2ex] \dfrac{4^m}{n^n} \cdot \kappa^n \dfrac{2p_i}{p_i^2 + p_{i+1}^2}\,, & i = k+1, k+3, ..., n-1\,, \\[2ex] \dfrac{4^m}{n^n} \cdot \kappa^n \dfrac{2p_i}{p_{i-1}^2 + p_i^2}\,, & i = k+2, k+2, ..., n\,; \end{cases} \tag{4.5.13}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = -\frac{4^m}{n^{n-1}} \cdot \kappa^{n-1} \frac{\partial \kappa}{\partial x^i}\,. \tag{4.5.14}$$

Подставив эти производные в уравнения (4.5.12), получим систему дифференциальных уравнений для определения экстремалей в пространстве, конформно связанном с пространством невырожденных поличисел $P_{k+2\cdot m}$.

4.6 Экспоненциальное представление невырожденных поличисел

Под экспоненциальной функцией $\exp(X)$ от поличисла $X \in P_{k+2\cdot m}$ будем понимать ряд

$$\exp(X) = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + ... + \frac{1}{s!}X^s + ...\,, \tag{4.6.1}$$

а под *экспоненциальным представлением* числа $X \in P_{k+2\cdot m}$, если у этого числа имеется норма $|X|$, – однозначную запись этого числа в виде

$$X = |X| \cdot \exp(\varphi_2 E_2 + \varphi_3 E_3 + ... + \varphi_n E_n)\,, \tag{4.6.2}$$

где $\varphi_2, \varphi_3, ...\varphi_n$ – действительные числа, а $E_1 \equiv 1, E_2, E_3, ..., E_n$ – некий специальный базис, в котором такая однозначная запись возможна. Величины $\varphi_2, \varphi_3, ...\varphi_n$ будем называть угловыми переменными (эллиптическими или гиперболическими).

Говорить о экспоненциальной записи нулевого элемента в $P_{k+2\cdot m}$ или делителей нуля не имеет смысла, так как для них не существует однозначной записи (4.6.2).

Только в единственной алгебре невырожденных поличисел, алгебре комплексных чисел любое не равное нулю число $z = x + iy$ имеет однозначное экспоненциальное представление $z = |z|\, e^{i\alpha}$. В общем случае для алгебры $P_{k+2\cdot m}$ экспоненциальное представление возможно только при выполнении некоторых условий, из которых обязательно должно следовать неравенство

$$(X, X, ..., X) > 0\,. \tag{4.6.3}$$

Найдём эти условия, предположив, что мы уже построили такой базис, а затем явно его построим. Рассмотрим множество унимодулярных чисел, имеющих экспоненциальное представление, то есть чисел $A \in P_{k+2\cdot m}$, у которых $|A| = 1$ и которые можно записать как

$$A = \exp(\alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + ... + \alpha_n E_n)\,. \tag{4.6.4}$$

Тогда множество преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$ вида

$$X \to X'\,, \qquad X' = A \cdot X \tag{4.6.5}$$

образуют группу линейных преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$, сохраняющих модули всех чисел, у которых модуль определен, так как

$$|X'| = |A| \cdot |X| \qquad \Rightarrow \qquad |X'| = |X|\,. \tag{4.6.6}$$

Кроме того, эта группа – абелева $(n-1)$-параметрическая непрерывная группа Ли. Выше, в разделе 4.2 мы построили преобразования этой группы в координатном пространстве и обозначили ее символом $G_1(P_{k+2\cdot m})$. Таким образом, эта группа есть группа унимодулярных поличисел.

Все эти рассуждения дают нам алгоритм построения базисных элементов E_2, E_3, ... , E_n: они должны быть генераторами данной абелевой группы Ли. Это позволяет нам построить базис $E_1 \equiv 1, E_2, E_3, ..., E_n$

из изотропного базиса $e_1, e_2, ...e_n$ со структурным тензором (4.2.3), если $k \neq 0$, например, так:

$$\left.\begin{aligned}
&E_1 = e_1 + e_2 + ... + e_k + e_{k+1} + e_{k+3} + ... + e_{n-1}\,,\\
&E_2 = e_1 - e_2\,,\\
&E_3 = e_1 - e_3\,,\\
&\qquad . \;\; . \;\; .\\
&E_k = e_1 - e_k\,,\\
&E_{k+1} = 2e_1 - e_{k+1}\,,\\
&E_{k+2} = e_{k+2}\,,\\
&E_{k+3} = 2e_1 - e_{k+3}\,,\\
&E_{k+4} = e_{k+4}\,,\\
&\qquad . \;\; . \;\; .\\
&E_{n-1} = 2e_1 - e_{n-1}\,,\\
&E_{k+2} = e_n\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.6.7)$$

Если $k = 0$, то базис, в котором имеет место экспоненциальное представление невырожденных поличисел, например, таков:

$$\left.\begin{aligned}
&E_1 = e_1 + e_3 + ... + e_{n-1}\,,\\
&E_2 = e_2\,,\\
&E_3 = e_1 - e_3\,,\\
&E_4 = e_4\,,\\
&\qquad . \;\; . \;\; .\\
&E_{n-1} = e_1 - e_{n-1}\,,\\
&E_n = e_n\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.6.8)$$

Используя числа E_2, E_3, ... , E_n в качестве генераторов группы, получим все преобразования (4.2.15), (4.2.17).

Базисы $E_1 \equiv 1, E_2, E_3, ..., E_n$ (4.6.7) или (4.6.8) не единственные, в которых имеет место экспоненциальное представление (4.6.2). Любой другой такой базис получается из базиса (4.6.7) или (4.6.8) произвольным линейным невырожденным преобразованием базисных элементов $E_2, E_3, ..., E_n$.

Таким образом, при выборе базиса, который допускает экспоненциальное представление числа, имеется $(n-1)^2$-параметрический произвол, который можно использовать, например, чтобы сделать базис "ортонормированным", если только это возможно, или чтобы добиться выполнения какого-либо другого необходимого свойства. Например, чтобы нерелятивистский предел для метрической функции приводил к пространству Галилея, соответствующему нерелятивистской классической механике физической системы с соответствующим числом степеней свободы.

Выясним, в каком случае поличисло X, имеющее координаты x^i в изотропном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$,

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n \,,$$

при выполнении условия (4.6.3) может быть представлено в экспоненциальном виде (4.6.2). Для этого внесём $|X|$ под экспоненту, тогда аргументом экспоненциальной функции окажется некоторое поличисло Y. Запишем поличисло Y в изотропном базисе, обозначив координаты этого числа как y^i. Тогда, используя свойства изотропного базиса, получим

$$\begin{aligned} X = \exp(Y) = & \\ = \exp(y_1)e_1 + \exp(y_2)e_2 + ... + \exp(y_k)e_k + & \\ + \exp(y_{k+1})\cos(y_{k+2})e_{k+1} + \exp(y_{k+1})\sin(y_{k+2})e_{k+2} + ... & \\ + \exp(y_{n-1})\cos(y_n)e_{n-1} + \exp(y_{n-1})\sin(y_n)e_n \,. & \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

Таким образом, для того чтобы поличисло $X \in P_{k+2\cdot m}$, имело экспоненциальное представление, необходимо и достаточно, чтобы его координаты x^i в изотропном базисе удовлетворяли следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} x^1 > 0, \;\; x^2 > 0, \;\; ..., \;\; x^k > 0, \\ (x^{k+1})^2 + (x^{k+2})^2 \neq 0, \, ..., \, (x^{n-1})^2 + (x^n)^2 \neq 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{4.6.10}$$

Заметим, что при выполнении условий (4.6.10) поличисло $X \in P_{k+2\cdot m}$ находится в конусе будущего, а условие (4.6.3) выполняется автоматически.

Итак, для того, чтобы невырожденное поличисло $X \in P_{k+2\cdot m}$ имело экспоненциальное представление (4.6.2), оно должно лежать в конусе будущего.

4.7 Функции поличисловой переменной

Пусть на время $e_1, e_2, ..., e_n$ – произвольный базис в пространстве $P_{k+2\cdot m}$. Функцией переменной $X = x^1 e_1 + ... + x^n e_n \in P_{k+2\cdot m}$ называется функция $F(X) \in P_{k+2\cdot m}$, такая, что

$$F(X) = f^1(x^1, ..., x^n)e_1 + f^2(x^1, ..., x^n)e_2 + ... + f^n(x^1, ..., x^n)e_n \,, \tag{4.7.1}$$

где $f^i(x) \in R - n$ произвольных функций (в дальнейшем мы будем считать их гладкими) от n действительных аргументов. Рассмотрим дифференциал

$$dF(X) \equiv F(X + dX) - F(X)\,,$$

где $dX \in P_{k+2\cdot m}$ – произвольное бесконечно малое поличисло в том смысле, что

$$dX = \varepsilon Y\,, \qquad Y \in P_{k+2\cdot m}\,, \qquad \varepsilon \to 0\,.$$

Тогда

$$dF(X) = \frac{\partial f^l}{\partial x^i} \cdot dx^i \cdot e_l + o(dx^k)\,. \tag{4.7.2}$$

Если дифференциал $dF(X)$ функции $F(X)$ можно представить в виде

$$dF(X) = F'(X) \cdot dX + o(dx^k)\,, \tag{4.7.3}$$

где $F'(X)$ – некоторая функция $P_{k+2\cdot m}$ переменной, то функцию $F(X)$ принято называть аналитической функций поличисловой $P_{k+2\cdot m}$ переменной, а $F'(X)$ – производной этой аналитической функции по той же переменной.

Из двух последних формул получим

$$\frac{\partial f^l}{\partial x^i} = p^l_{ji} f'^j\,. \tag{4.7.4}$$

Воспользуемся соотношением (4.1.19), тогда из предыдущей формулы следует

$$f'^l = \epsilon^i \frac{\partial f^l}{\partial x^i}\,. \tag{4.7.5}$$

Подставив полученное выражение в (4.7.4), имеем n^2 соотношений

$$\frac{\partial f^l}{\partial x^i} = \epsilon^s p^l_{ji} \frac{\partial f^j}{\partial x^s}\,, \tag{4.7.6}$$

из которых независимых не более $n^2 - n$, так как свертка левой и правой части с ϵ^i (компоненты единичного элемента в данном базисе) приводит к n тождествам. Соотношения (4.7.6) для функций комплексной переменной принято называть соотношениями Коши-Римана. Сохраним этот термин для функций поличисловой переменной. Если эти соотношения выполняются, то, определив функцию $F'(X)$ с помощью формул (4.7.5), приходим к выполнению формулы (4.7.3).

Таким образом, мы пришли к следующему результату: для того, чтобы функция $F(X)$ поличисловой переменной была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения Коши-Римана (4.7.6).

Непосредственно из определения аналитической функции поличисловой переменной следует:

1) линейная комбинация аналитических функций поличисловой переменной с действительными коэффициентами α и β или поличисловыми переменными A и B есть аналитическая функция той же переменной, причем

$$\big[\alpha F_{(1)}(X) + \beta F_{(2)}(X)\big]' = \alpha F'_{(1)}(X) + \beta F'_{(2)}(X)\,, \tag{4.7.7}$$
$$\big[A F_{(1)}(X) + B F_{(2)}(X)\big]' = A F'_{(1)}(X) + B F'_{(2)}(X)\,;$$

2) поличисловое произведение двух аналитических функций поличисловой переменной, есть аналитическая функция той же переменной, причем

$$\big[F_{(1)}(X)\cdot F_{(2)}(X)\big]' = F'_{(1)}(X)F_{(2)}(X) + F_{(1)}(X)F'_{(2)}(X)\,; \tag{4.7.8}$$

3) аналитическая функция поличисловой переменной от аналитической функции той же поличисловой переменной есть аналитическая функция все той же поличисловой переменной, причем

$$\big[F_{(1)}\big(F_{(2)}(X)\big)\big]' = F'_{(1)}(Y)\big|_{Y=F_{(2)}(X)}\cdot F'_{(2)}(X)\,. \tag{4.7.9}$$

Общий вид аналитических функций переменной $P_{k+2\cdot m}$ можно найти, работая в изотропном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ со структурным тензором p^l_{ij} (4.2.3), но можно выполнить эту задачу еще проще, если вспомнить, что невырожденные поличисла $P_{k+2\cdot m}$ изоморфны прямой сумме (4.2.10) алгебр H_k и H^C_m, то есть алгебре квадратных диагональных частично комплексных матриц над полем действительных чисел. В этой алгебре любой элемент $\hat{X}$ может быть представлен в виде

$$\hat{X} = x^1\hat{\Psi}_1 + ... + x^k\hat{\Psi}_2 + ... + x^{k+1}\hat{\Psi}_{k+1} + ... + x^{m+k}\hat{\Psi}_{k+m}\,, \tag{4.7.10}$$

где $\hat{\Psi}_i$ – действительная квадратная диагональная матрица, у которой единственным отличным от нуля элементом, является i-й, равный единице; x^i $(i = 1, 2, ..., k)$ – k действительных чисел, а x^j $(j = k+1, k+2, ..., k+m)$ – m комплексных чисел. Можно рассматривать матрицы $\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, ..., \hat{\Psi}_{k+m}$ как базис. Тогда

$$\hat{\Psi}_i\hat{\Psi}_j = \tilde{p}^l_{ij}\hat{\Psi}_l\,, \qquad \tilde{p}^l_{ij} = \begin{cases} 1\,, \text{ если } i = j = l\,, \\ 0\,, \text{ во всех остальных случаях}\,, \end{cases} \tag{4.7.11}$$

а функции поличисловой переменной в таком представлении имеют вид

$$F(\hat{X}) = f^1(x^1, ..., x^{k+m})\hat{\Psi}_1 + ... + f^{k+m}(x^1, ..., x^{k+m})\hat{\Psi}_{k+m}\,, \qquad (4.7.12)$$

$f^i \in R$, если $i = 1, 2, ..., k$, и $f^j \in C$, если $j = k{+}1, k{+}2, ..., k{+}m$. Подставим $\tilde{p}^l_{ij}$ в соотношения (4.7.4), получим

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^{i_-}} = f'^i\,, \qquad (4.7.13)$$

а все остальные частные производные $\dfrac{\partial f^l}{\partial x^i}$ при $i \neq j$ равны нулю. С учётом этого формула (4.7.12) для аналитических функций поличисловой переменной уточняется:

$$F(\hat{X}) = f^i(x^1)\hat{\Psi}_1 + ... + f^k(x^k)\hat{\Psi}_k + f^{k+1}(x^{k+1})\hat{\Psi}_{k+1} + ... + f^{k+m}(x^{k+m})\hat{\Psi}_{k+m}\,,$$

x^i, $f^i \in R$, если $i = 1, 2, ..., k$, и x^j, $f^j \in C$, если $j = k + 1, k + 2, ..., k + m$.

Перейдем опять к изотропному базису $e_1, e_2, ..., e_n$ со структурным тензором (4.2.3), в котором поличисловая переменная X имеет n действительных координат $x^1, x^2, ..., x^n$. Тогда с учётом вышеизложенного произвольная аналитическая функция переменной $P_{k+2\cdot m}$ в изотропном базисе имеет вид

$$F(X) = f^1(x^1)e_1 + ... + f^k(x^k)e_k + f^{k+1}(x^{k+1}, x^{k+2})e_{k+1} +$$
$$+ f^{k+2}(x^{k+1}, x^{k+2})e_{k+2} + ... + f^{n-1}(x^{n-1}, x^n)e_{n-1} + f^n(x^{n-1}, x^n)e_n\,, \qquad (4.7.14)$$

где $f^1(x^1), ..., f^k(x^k)$ – произвольные гладкие функции одной действительной переменной, а пары функций

$$\{f^{j_-}(x^{j_-}, x^{j+1}), f^{(j_-+1)}(x^{j_-}, x^{j+1})\}\,, \qquad j \equiv j_- = k{+}1, k{+}3, ..., n{-}1 \quad (4.7.15)$$

являются компонентами аналитических функций комплексных переменных $(x^j; x^{j+1})$.

Так как аналитические функции комплексной переменной бесконечное число раз дифференцируемы, то аналитическая функция $F(X)$ переменной $P_{k+2\cdot m}$ столько раз дифференцируема, сколько раз дифференцируемы все компоненты $f^1(x^1), ..., f^k(x^k)$.

Итак, в общем случае аналитическая функция $P_{k+2\cdot m}$ переменной однозначно определяется, если заданы k гладких функций одной действительной переменной и m аналитических функций комплексной переменной. Как известно [5], аналитическая функция комплексной переменной однозначно определяется заданием на некотором множестве точек в области ее определения, например, на отрезке некоторой кривой. Для всех элементарных функций одной действительной переменной можно с помощью аналитического продолжения построить однозначно аналитическую функцию комплексной переменной. Последнее свойство выполняется и для аналитических функций $P_{k+2\cdot m}$ переменной.

Используем компоненты аналитической функции $F(X)$ для перехода от системы координат $x^{i'}$, в которой элемент длины в пространстве $P_{k+2\cdot m}$ не зависит от точки пространства, к некоторой криволинейной системе координат x^i, в которой элемент длины финслерова пространства будет зависеть не только от дифференциалов координат, но и от самих координат. Пусть

$$x^{i'} = f^i(x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{4.7.16}$$

где f^i – компоненты аналитической функции $F(X)$, штрих у индекса указывает на принадлежность к другой системе координат. Необходимо, чтобы якобиан такого преобразования был конечен и отличен от нуля. Достаточно это проверить в каком-то одном базисе, например, в изотропном. Тогда согласно формулам (4.7.4), (4.7.5) и (4.2.14) получим:

$$\frac{D(f^1, f^2, ..., f^n)}{D(x^1, x^2, ..., x^n)} = (F', F', ..., F') \neq 0\,, \tag{4.7.17}$$

где

$$F'(X) = \frac{df^1}{dx^1}e_1 + ... + \frac{df^k}{dx^k}e_k +$$

$$+\frac{\partial f^{k+1}}{\partial x^{k+1}}e_{k+1} + \frac{\partial f^{k+2}}{\partial x^{k+1}}e_{k+2} + ... + \frac{\partial f^{n-1}}{\partial x^{n-1}}e_{n-1} + \frac{\partial f^n}{\partial x^{n-1}}e_n$$

– производная аналитической функции $F(X)$ переменной $X \in P_{k+2\cdot m}$, а

$$(F', F', ..., F') = \frac{df^1}{dx^1}...\frac{df^k}{dx^k}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\partial f^{k+1}}{\partial x^{k+1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^{k+1}}{\partial x^{k+2}}\right)^2\right]...\left[\left(\frac{\partial f^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^{n-1}}{\partial x^{n}}\right)^2\right].$$

Здесь мы специально не использовали обозначение $|F'|^n$ вместо формы $(F', F', ..., F')$, подчёркивая тем самым, что функция $F'(X)$ может не иметь нормы.

Таким образом, преобразование координат (4.7.16) или отображение одной области пространства $P_{k+2\cdot m}$ на другую область того же пространства, осуществляемое с помощью компонент аналитической функции $F(X)$, взаимно однозначно в некоторой области, если в этой области скалярное полипроизведение с одним и тем же аргументом $F'(X)$ имеет конечное значение, не равное нулю.

Последнее утверждение и формула (4.7.17) показывают, что понятие скалярного полипроизведения (см. разделы 3.3 и 4.3), впервые введенное в работе [28], естественным образом возникает при рассмотрении преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$ с помощью аналитических функций $P_{k+2\cdot m}$ переменной и не сводится к понятию нормы и метрики.

Посмотрим как изменится метрическая функция $L(dx)$ (4.5.5) при таком преобразовании координат или преобразовании самого пространства. Для этого вначале потребуем выполнения условия

$$(F', F', ..., F') > 0\,, \tag{4.7.18}$$

тогда у функции F' существует норма

$$|F'| = \sqrt[n]{(F', F', ..., F')}\,.$$

Подставим (4.7.16) в (4.5.5) и получим ту же метрическую функцию, но уже в координатах x^i,

$$L(dx^{1'}, dx^{2'}, ..., dx^{n'}) = |F'(X)| \cdot L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)\,, \tag{4.7.19}$$

умноженную на коэффициент растяжения-сжатия

$$\kappa(x) = |F'(X)|\,.$$

Подчеркнём ещё раз, что слева и справа в формуле (4.7.19) стоит одна и та же функция $L(\xi)$.

Таким образом, аналитическая функция невырожденной полichисловой переменной осуществляет в некоторой области D финслерова полichислового пространства конформное преобразование координат или конформное преобразование самой области D этого пространства, если ее производная имеет отличную от нуля норму, причём норма производной суть коэффициент растяжения-сжатия.

Это же утверждение можно сформулировать несколько иначе.

Пусть финслерова геометрия $L(dx; x)$ конформно связана с финслеровой геометрией $L(dx)$ плоского полichислового пространства $P_{k+2\cdot m}$, то есть

$$L(dx; x) = \kappa(x) L(dx)\,, \tag{4.7.20}$$

причем

$$\kappa(x) = |F'(X)| \neq 0\,, \tag{4.7.21}$$

где $F'(X)$ – производная аналитической функции $F(X)$ поличисловой $P_{k+2\cdot m}$ переменной, имеющая конечную норму. Тогда геометрия $L(dx;x)$ получается из плоской геометрии $L(dx)$ пространства $P_{k+2\cdot m}$ введением криволинейных координат с помощью компонент аналитической функции $F(X)$, а значит, геометрия $L(dx;x)$ также является той же самой плоской геометрией, что и исходная геометрия.

Итак, в любом невырожденном поличисловом пространстве P_n размерности $n \geq 3$ имеется бесконечно параметрическая непрерывная группа конформных преобразований, в то время как в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах размерности $n \geq 3$ непрерывная конформная группа всегда конечно параметрическая.

Аналогично тому, как конформные преобразования на евклидовой плоскости связаны не только с аналитическими функциями комплексной переменной, но и с функциями, комплексно сопряжёнными к аналитическим (последние приводят к конформным преобразованиям второго рода), конформные преобразования в пространстве поличисел $P_{k+2\cdot m}$ также не сводятся только к аналитическим функциям поличисловой переменной. Изменение знака у $(k+2)$-ой, $(k+4)$-ой, ... , n-ой компонент аналитической функции поличисловой переменной дает 2^m возможностей; произвольная подстановка 1-ой, 2-ой, ... , k-ой компонент аналитической функции также приводит к функции, осуществляющей конформное преобразование, что даёт $k!$ возможностей; произвольная подстановка $(k-1)$-ой, $(k-3)$-ой, ..., $(n-1)$-ой пар компонент аналитической функции поличисловой переменной также приводит к функции, осуществляющей конформное преобразование, что даёт $m!$ возможностей. Таким образом, конформные преобразования в пространстве поличисел $P_{k+2\cdot m}$ связаны с аналитическими функциями поличисловой переменной и имеют, если их различать по родам, не менее $2^m \cdot k! \cdot m!$ родов.

4.8 Пространство гиперкомплексных чисел H_4

Поличисла $H_4 \equiv P_{4+2\cdot 0}$ изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4. Координаты в изотропном базисе пространства H_4 будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, а сам базис – $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, то есть любое поличисло можно представить в виде разложения

$$X = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4\,, \tag{4.8.1}$$

или как четверку действительных чисел $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$. Бинарная операция поличислового умножения на множестве базисных векторов $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ определяется следующей формулой:

$$\psi_i \cdot \psi_j = \delta_{ij}\ \psi_{j_-}\,.$$

Если $\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4 > 0$, то для числа $X \in H_4$ определена норма

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4} > 0\,. \qquad (4.8.2)$$

Пространство H_4 является финслеровым пространством с метрической функцией

$$L(d\xi) = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \qquad (4.8.3)$$

Никакими преобразованиями координат подкоренное выражение в правой части нельзя привести к квадратичному виду или квадрату однородной дифференциальной формы второго порядка, то есть такое финслерово пространство качественно отличается от евклидова и псевдоевклидовых пространств размерности четыре. Метрику, определяемую метрической функцией (4.8.3), называют иногда метрикой Бервальда-Моора.

В пространстве H_4 существует базис $1, j, k, jk$,

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4\,, \\ j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4\,, \\ k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4\,, \\ jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4\,, \end{aligned}\right\} \qquad (4.8.4)$$

закон умножения базисных элементов которого определен формулами:

$$\begin{array}{cccc} 1\cdot 1 = 1, & 1\cdot j = j, & 1\cdot k = k, & 1\cdot jk = jk, \\ j\cdot 1 = j, & j\cdot j = 1, & j\cdot k = jk, & j\cdot jk = k, \\ k\cdot 1 = k, & k\cdot j = jk, & k\cdot k = 1, & k\cdot jk = j, \\ jk\cdot 1 = jk, & jk\cdot j = k, & jk\cdot k = j, & jk\cdot jk = 1\,. \end{array}$$

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 числа X в этом базисе связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ того же числа в изотропном базисе следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\xi^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3\,,\\ \xi^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3\,,\\ \xi^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3\,,\\ \xi^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3\,.\end{aligned}\right\} \qquad (4.8.5)$$

Базис $1, j, k, jk$ является "ортонормированным", и в нем имеет место экспоненциальное представление чисел, у которых

$$\xi^1 > 0,\ \xi^2 > 0,\ \xi^3 > 0,\ \xi^4 > 0\,.$$

Для того, чтобы проверить первое утверждение, достаточно вычислить всевозможные скалярные полипроизведения вида (A, B, B, B), где A, B – любые базисные элементы 1, j, k, jk. Покажем, как происходит вычисление таких скалярных полипроизведений на одном примере, а затем приведем результаты вычислений.

Вычислим скалярное полипроизведение (j, k, k, k). Для этого воспользуемся формулой (4.4.19) и формулами (4.8.4), получим

$$(j,k,k,k) = \frac{1}{4!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix}_+ \,. \qquad (4.8.6)$$

Так как из любой строки можно вынести общий числовой множитель за знак перманента, вынесем (-1) из второй и четвёртой строки, в результате получим

$$(j,k,k,k) = \frac{1}{4!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}_+ \,. \qquad (4.8.7)$$

Воспользуемся формулой (4.4.14):

$$(j,k,k,k) = 0\,. \qquad (4.8.8)$$

Действуя аналогичным образом, вычислим скалярные полипроизведения $(A, B,\ B, B)$, где A, B – любые базисные элементы $1, j, k, jk$. Приведем результаты вычислений:

$$\left.\begin{aligned}
&(1,1,1,1) = (j,j,j,j) = (k,k,k,k) = (jk,jk,jk,jk) = 1\,,\\
&(1,j,j,j) = (1,k,k,k) = (1,jk,jk,jk) = 0\,,\\
&(j,1,1,1) = (k,1,1,1) = (jk,1,1,1) = 0\,,\\
&(j,k,k,k) = (k,j,j,j) = (j,jk,jk,jk) = 0\,,\\
&(jk,j,j,j) = (k,jk,jk,jk) = (jk,k,k,k) = 0\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.8.9)$$

Таким образом, базис $1, j, k, jk$ является "ортонормированным", а значит, коэффициенты разложения числа X в этом базисе могут быть выражены через скалярные полипроизведения следующим образом:

$$X = (X,1,1,1)\cdot 1 + (X,j,j,j)\cdot j + (X,k,k,k)\cdot k + (X,jk,jk,jk)\cdot jk\,. \quad (4.8.10)$$

Базисные элементы j, k, jk получаются из базисных элементов E_2, E_3, E_4 (4.6.7) с помощью невырожденного линейного преобразования:

$$j = -E_2 + E_3 + E_4\,, \quad k = E_2 - E_3 + E_4\,, \quad jk = E_2 + E_3 - E_4\,, \quad (4.8.11)$$

так как

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0\,. \quad (4.8.12)$$

Поэтому в базисе $1, j, k, jk$ для чисел $X \in H_4$, имеющих отличную от нуля норму $|X| \neq 0$ и удовлетворяющих некоторым дополнительным требованиям, возможно экспоненциальное представление:

$$X = |X| \cdot \exp(\alpha j + \beta k + \gamma jk)\,, \quad (4.8.13)$$

где α, β, γ – действительные числа, угловые переменные.

Если функция $F(x)$ одной действительной переменной x представима как полином или сходящийся ряд переменной x, то функция $F(X)$ переменной $X \in H_4$ в изотропном базисе также определена

$$F(X) = F(\xi^1)\psi_1 + F(\xi^2)\psi_2 + F(\xi^3)\psi_3 + F(\xi^4)\psi_4 \quad (4.8.14)$$

и является аналитической функцией H_4 переменной. Применяя эту формулу к экспоненциальному представлению (4.8.13), имеем

$$\begin{aligned}
X &= \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4 = \\
&= |X|\left(e^{\alpha+\beta+\gamma}\psi_1 + e^{\alpha-\beta-\gamma}\psi_2 + e^{-\alpha+\beta-\gamma}\psi_3 + e^{-\alpha-\beta+\gamma}\psi_4\right)\,,
\end{aligned} \quad (4.8.15)$$

откуда находим выражения угловых переменных через координаты числа X в изотропном базисе:

$$\alpha = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^2}{\xi^3\xi^4}\right), \quad \beta = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^3}{\xi^2\xi^4}\right), \quad \gamma = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^4}{\xi^2\xi^3}\right). \tag{4.8.16}$$

Формула (4.8.15) дает и условия, при выполнении которых поличисло $X \in H_4$ может быть представлено в экспоненциальном виде:

$$\xi^1 > 0, \quad \xi^2 > 0, \quad \xi^3 > 0, \quad \xi^4 > 0\,.$$

Область, выделяемая в пространстве H_4 этими неравенствами, отождествляется с конусом будущего, если интерпретировать пространство H_4 как четырехмерное пространство-время.

Всё это согласуется с результатами раздела 4.6, полученными для произвольных поличисел.

Итак, все поличисла $X \in H_4$, лежащие в конусе будущего, имеют в ортонормированном базисе $1, j, k, jk$ экспоненциальное представление.

Из формулы (4.8.14) следует, что произвольная элементарная функция одной действительной переменной однозначно определяет аналитическую функцию переменной H_4.

Любая аналитическая функция переменной H_4 в изотропном базисе $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ имеет вид (см. раздел 4.7):

$$F(X) = f^1(\xi^1)\psi_1 + f^2(\xi^2)\psi_2 + f^3(\xi^3)\psi_3 + f^4(\xi^4)\psi_4\,, \tag{4.8.17}$$

где f^i – произвольные дифференцируемые функции одной действительной переменной. Если все функции f^i дифференцируемы $r+1$ раз, то все производные функции $F(X)$ H_4 переменной вплоть до r-ой также являются аналитическими функциями. Запись произвольной аналитической функции (4.8.17) в "ортонормированном" базисе $1, j, k, jk$ (4.8.4) имеет более громоздкий вид:

$$
\begin{aligned}
F(X) = \; & \frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3)+f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)+ \\
& \quad +f^3(x^0-x^1+x^2-x^3)+f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot \mathbf{1}+ \\
& +\frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3)+f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)- \\
& \quad -f^3(x^0-x^1+x^2-x^3)-f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot \mathbf{j}+ \\
& +\frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3)-f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)+ \\
& \quad +f^3(x^0-x^1+x^2-x^3)-f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot \mathbf{k}+ \\
& +\frac{1}{4}[f^1(x^0+x^1+x^2+x^3)-f^2(x^0+x^1-x^2-x^3)- \\
& \quad -f^3(x^0-x^1+x^2-x^3)+f^4(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot \mathbf{jk}\,.
\end{aligned}
\tag{4.8.18}
$$

В "физических" координатах x^0, x^1, x^2, x^3 метрическая функция (4.8.3) финслерова пространства H_4 записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
L(dx) = \; & [(dx^0+dx^1+dx^2+dx^3)(dx^0+dx^1-dx^2-dx^3)\times \\
& \times(dx^0-dx^1+dx^2-dx^3)(dx^0-dx^1-dx^2+dx^3)]^{1/4}\,.
\end{aligned}
\tag{4.8.19}
$$

Разложим выражение в квадратных скобках по степеням dx^0, получим

$$
\begin{aligned}
L^4(dx) = & \,(dx^0)^4 - 2\,(dx^0)^2\left[(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2\right]+ \\
& + 8\,dx^0dx^1dx^2dx^3 + (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 - \\
& - 2\,\left[(dx^1)^2\,(dx^2)^2 + (dx^1)^2\,(dx^3)^2 + (dx^2)^2\,(dx^3)^2\right]\,.
\end{aligned}
\tag{4.8.20}
$$

Предположим, что

$$
dx^\alpha = \varepsilon^\alpha dx^0\,, \quad 0 < \varepsilon^\alpha \ll 1\,. \tag{4.8.21}
$$

Пренебрежём членами порядка ε^3 по сравнению с 1, что соответствует в механике пренебрежению членами $\left(\frac{v}{c}\right)^3$ по сравнению с единицей (нерелятивистское приближение), где v – скорость частицы, а c – скорость света. Тогда для элемента длины $L(dx)$ (4.8.19) в пространстве H_4 получим с той же точностью приближенную формулу:

$$
L_{H_4}(dx) \simeq \sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2}\,. \tag{4.8.22}
$$

Справа в этой формуле стоит элемент длины в пространстве Минковского, поэтому справедливо следующее утверждение.

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также, как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского, которые в СТО отождествляются с координатами пространства событий.

Непрерывная группа $G_1(H_4)$ изометрической симметрии в пространстве H_4 является трёхпараметрической абелевой группой Ли, элементами которой являются матрицы

$$\begin{pmatrix} e^{\varepsilon_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\varepsilon_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\varepsilon_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\varepsilon_4} \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0\,,$$

действующие в координатном пространстве $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Эта группа не содержит в качестве подгруппы никакой группы, даже отдалённо напоминающей группу трёхмерных пространственных поворотов. И всё же группа $G_1(H_4)$ содержит три однопараметрических преобразования, с помощью которых можно переходить в другие системы отсчёта, в которых наблюдаемые объекты будут иметь другую скорость относительно наблюдателя. Для того, чтобы это показать, введём вначале несколько обозначений, причём до конца этого раздела для упрощения формул все индексы будем писать внизу:

$$\xi_i = A_{ij} x_j, \ \ (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_{ik} A_{kj} = 4\delta_{ij}\,, \tag{4.8.23}$$

$$v_1 \equiv \frac{dx_1}{dx_0}\,, \qquad v_2 \equiv \frac{dx_2}{dx_0}\,, \qquad v_3 \equiv \frac{dx_3}{dx_0}\,,$$

$$W = (1+v_1+v_2+v_3)(1+v_1-v_2-v_3)(1-v_1+v_2-v_3)(1-v_1-v_2+v_3), \tag{4.8.24}$$

$$\sqrt{1-v^2} = \sqrt[4]{W(v_1, v_2, v_3)}, \tag{4.8.25}$$

или

$$v = \sqrt{1 - \sqrt{W(v_1, v_2, v_3)}}. \tag{4.8.26}$$

В нерелятивистском приближении

$$v \simeq \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{4.8.27}$$

Если же вектор $(1, v_1, v_2, v_3)$ стремится к изотропному направлению, то $v \to 1$. Отметим также, что в общем случае

$$W(-v_1, -v_2, -v_3) \neq W(v_1, v_2, v_3)\,.$$

Сложение скоростей

Непрерывная группа изометрической симметрии $G_1(H_4)$, оставляющая инвариантным элемент длины (4.8.19) в пространстве H_4 и состоящая из непрерывных линейных преобразований вида

$$x'_i = \frac{1}{4} A_{ik} D_{km} A_{mj} x_j, \tag{4.8.28}$$

где

$$(D_{km}) = diag(\exp\varepsilon_0, \exp\varepsilon_1, \exp\varepsilon_2, \exp\varepsilon_3), \tag{4.8.29}$$

а действительные параметры ε_i изменяются в пределах $(-\infty, \infty)$ и связаны соотношением

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \tag{4.8.30}$$

может быть параметризована тремя действительными величинами, V_1, V_2, V_3, имеющими смысл компонент скорости, которую приобретает покоящийся объект после преобразования (4.8.28):

$$\exp\varepsilon_i = \frac{A_{ij} V_j}{\sqrt{1 - V^2}}, \tag{4.8.31}$$

где $i, j = 0, 1, 2, 3$; $V_0 = 1$. Если в исходной системе отсчёта объект имел скорость (v_1, v_2, v_3), то в новой системе отсчёта этот же объект будет иметь скорость

$$\left.\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1 + V_1 + v_2 V_3 + v_3 V_2}{1 + v_1 V_1 + v_2 V_2 + v_3 V_3}, \\ v'_2 &= \frac{v_2 + V_2 + v_1 V_3 + v_3 V_1}{1 + v_1 V_1 + v_2 V_2 + v_3 V_3}, \\ v'_3 &= \frac{v_3 + V_3 + v_1 V_2 + v_2 V_1}{1 + v_1 V_1 + v_2 V_2 + v_3 V_3}. \end{aligned}\right\} \tag{4.8.32}$$

Из определения группы $G_1(H_4)$ имеем

$$(x'_{(2)0} - x'_{(1)0})\sqrt{1-(v')^2} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})\sqrt{1-v^2}, \tag{4.8.33}$$

что даёт формулу для модуля трёхмерной скорости в новой системе координат

$$v' = \sqrt{1 - \frac{(1-v^2)(1-V^2)}{(1+v_1V_1+v_2V_2+v_3V_3)^2}}, \tag{4.8.34}$$

так как при преобразованиях (4.8.28) – (4.8.31)

$$x'_{(2)0} - x'_{(1)0} = \frac{1+v_1V_1+v_2V_2+v_3V_3}{\sqrt{1-V^2}}(x_{(2)0} - x_{(1)0}). \tag{4.8.35}$$

Если среди компонент v_α и V_α отличны от нуля только по одной компоненте вдоль одного и того же специального направления, например, $(v_1, 0, 0)$ и $(V_1, 0, 0)$, то формулы (4.8.32) совпадают с соответствующими формулами сложения скоростей в СТО.

Переход из покоящейся инерциальной системы в движущуюся

Рассмотрим переход из старой (нештрихованной) системы отсчета в новую (штрихованную) систему отсчёта, инерциально движущуюся со скоростью (V_1, V_2, V_3) относительно старой системы отсчета, то есть точка, движущаяся в старой системе отсчета со скоростью (V_1, V_2, V_3), в новой системе отсчета будет двигаться со скоростью $(0, 0, 0)$. Формулы (4.8.28) – (4.8.30) останутся теми же, а вместо формулы (4.8.31) получим

$$\exp(-\varepsilon_i) = \frac{A_{ij}V_j}{\sqrt{1-V^2}}, \tag{4.8.36}$$

то есть переходы от одной системы отсчета к другой, рассмотренные в предыдущем разделе и в данном, являются обратными друг к другу. Заметим, что замена в преобразовании (4.8.28) – (4.8.31) (V_1, V_2, V_3) на $(-V_1, -V_2, -V_3)$ в общем случае не дает обратное преобразование к преобразованию (4.8.28) – (4.8.31).

Итак, при переходе к системе координат, движущейся со скоростью (V_1, V_2, V_3), старые координаты будут выражаться через новые по формулам

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{1-V^2}} \cdot \hat{A} \cdot \begin{pmatrix} (1+V_1+V_2+V_3)(x'_0+x'_1+x'_2+x'_3) \\ (1+V_1-V_2-V_3)(x'_0+x'_1-x'_2-x'_3) \\ (1-V_1+V_2-V_3)(x'_0-x'_1+x'_2-x'_3) \\ (1-V_1-V_2+V_3)(x'_0-x'_1-x'_2+x'_3) \end{pmatrix}, \quad (4.8.37)$$

где матрица $\hat{A}$ имеет компоненты A_{ij} (4.8.23).

Рассмотрим это преобразование, когда компоненты скорости новой системы отсчета в старой по трем специальным направлениям равны нулю, кроме одной компоненты, например, $V_1 \neq 0$, а $V_2 = 0$ и $V_3 = 0$, тогда

$$V = |V_1|, \qquad (4.8.38)$$

а формулы (4.8.37) принимают вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & 0 & 0 \\ \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} \\ 0 & 0 & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \qquad (4.8.39)$$

или

$$\left. \begin{array}{ll} x_0 = \dfrac{x'_0 + V_1 x'_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & x_1 = \dfrac{V_1 x'_0 + x'_1}{\sqrt{1-V_1^2}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{x'_2 + V_1 x'_3}{\sqrt{1-V_1^2}} & x_3 = \dfrac{V_1 x'_2 + x'_3}{\sqrt{1-V_1^2}} \end{array} \right\}. \qquad (4.8.40)$$

Такое преобразование координат $(x'_0, x'_1) \leftrightarrow (x_0, x_1)$ совпадает с соответствующим преобразованием в СТО, а преобразование координат $(x'_2, x'_3) \leftrightarrow (x_2, x_3)$ отличается от соответствующих преобразований в СТО, где $x_2 = x'_2$, $x_3 = x'_3$.

В пространстве событий всегда возникает вопрос о том, что такое истинное пространственное трёхмерное расстояние. Если истинное пространственное расстояние r_{H_4} в H_4 искать тем же способом, как это обычно делается в СТО и ОТО [18], то в результате получим [25]:

$$r_{H_4} \equiv r_d = |x^\alpha| + |x^\beta|\,; \qquad \text{причем} \qquad |x^\gamma| \leq |x^\alpha|, |x^\beta|\,. \qquad (4.8.41)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;\quad \alpha \neq \beta,\ \alpha \neq \gamma,\ \beta \neq \gamma$. В евклидовом пространстве гиперповерхность, определяемая уравнением

$$r_d = const\,, \tag{4.8.42}$$

является ромбододекаэдром [26]. Так как такое трёхмерное пространство, элементами которого являются параллельные прямые мировые линии, есть плоское пространство, то все индикатрисы такого пространства являются ромбододекаэдрами, а метрическая функция определяется формулой:

$$L(dx^1, dx^2, dx^3) = |dx^\alpha| + |dx^\beta|\,, \quad |dx^\gamma| \leq |dx^\alpha|, |dx^\beta|\,, \tag{4.8.43}$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;\quad \alpha \neq \beta,\ \alpha \neq \gamma,\ \beta \neq \gamma$. Но, в нашем понимании, такое метрическое пространство не является финслеровым [1].

4.9 Группа Лоренца

Группы изометрической симметрии и конформной симметрии играют в математике и физике исключительно важную роль, которую трудно переоценить. Первый класс симметрий связан с инвариантностью элемента длины метрического пространства, а второй класс симметрий – с инвариантностью углов. Часто, но далеко не всегда, эти группы однозначно определяют саму геометрию. В физике особую роль играет группа Лоренца как группа изометрической симметрии пространства Минковского x^0, x^1, x^2, x^3 с элементом длины

$$ds_{Min} = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{4.9.1}$$

Группа Лоренца составляет основу СТО, которая в свою очередь подтверждена многими экспериментами, поэтому, если мы намереваемся каким-то образом использовать пространство поличисел H_4 (см. раздел 4.8) или другие поличисловые пространства в физике, необходимо установить, где и каким образом при этом появляется именно группа Лоренца, чтобы использовать её при интерпретации результатов исследований.

В работах [28] – [30] была выдвинута гипотеза о том, что каждой точке четырехмерного пространства событий можно сопоставить гиперкомплексное число

$$X = x^0 \cdot 1 + x^1 \cdot j + x^2 \cdot k + x^3 \cdot jk \quad \in \quad H_4\,, \tag{4.9.2}$$

где $1, j, k, jk$ – "ортонормированный" базис. Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в этом базисе "аналогичны" координатам x^0, x^1, x^2, x^3 пространства Минковского (4.9.1).

Система гиперкомплексных чисел H_4 ассоциативна, коммутативна и изоморфна алгебре действительных диагональных матриц четыре на четыре, то есть

$$H_4 = R \bigoplus R \bigoplus R \bigoplus R\,. \tag{4.9.3}$$

Пространство H_4 является метрическим, а именно финслеровым с метрикой Бервальда-Моора. Аналогично определяются пространства поличисел H_n с произвольным $n \geq 2$ как прямая сумма n множеств действительных чисел.

Как известно, рассуждения и математические выкладки существенно упрощаются, если работать не в "ортонормированном", а в так называемом изотропном базисе; для пространства H_4 такой базис e^1, e^2, e^3, e^4 связан с "ортонормированным" базисом формулами:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{4}(1 + j + k + jk)\,, \\ e_2 &= \frac{1}{4}(1 + j - k - jk)\,, \\ e_3 &= \frac{1}{4}(1 - j + k - jk)\,, \\ e_4 &= \frac{1}{4}(1 - j - k + jk)\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.9.4}$$

Координаты поличисел в изотропном базисе будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$. Элемент длины в этих координатах в пространстве H_4 имеет вид:

$$ds_{H_4} = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \tag{4.9.5}$$

Никаким преобразованием координат элемент длины ds_{H_4} нельзя перевести в элемент длины ds_{Min}. Если не рассматривать сдвиги, то группа изометрической симметрии пространства Минковского является 6-ти параметрической, в то время как группа изометрической симметрии пространства H_4 является 3-х параметрической абелевой группой.

Произвольная аналитическая функция $F(X)$ H_4 переменной однозначно определяется четырьмя произвольными действительными гладкими функциями $f^i(\xi)$ одной действительной переменной ξ следующим образом:

$$F(X) = f^1(\xi^1)e_1 + f^2(\xi^2)e_2 + f^3(\xi^3) + f^3(\xi^3)\,. \tag{4.9.6}$$

Если якобиан

$$\frac{D(f^1, f^2, f^3, f^4)}{D(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)} \equiv \frac{\partial f^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial f^2}{\partial \xi^2}\frac{\partial f^3}{\partial \xi^3}\frac{\partial f^4}{\partial \xi^4} > 0\,, \tag{4.9.7}$$

то преобразование

$$\xi^{i'} = f^i(\xi^{i_-})\,, \tag{4.9.8}$$

$i \equiv i_-$, но по ним не идет суммирование, является конформным в обычном смысле, то есть при таком преобразовании

$$ds_{H_4} \qquad \rightarrow \qquad \kappa(\xi)\; ds_{H_4}\,, \tag{4.9.9}$$

где $\kappa(\xi)$ – действительная положительная функция координат,

$$\kappa(\xi) \equiv \sqrt[4]{\frac{\partial f^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial f^2}{\partial \xi^2}\frac{\partial f^3}{\partial \xi^3}\frac{\partial f^4}{\partial \xi^4}}\,. \tag{4.9.10}$$

Из неравенства (4.9.7) следует знакопостоянство всех четырех производных и четность числа производных, сохраняющих отрицательное значение. Полная группа конформных преобразований пространства H_4 включает в себя также подстановки координат и изменение знака сразу у пары координат. Нас будут интересовать лишь непрерывные подгруппы группы конформных преобразований пространства H_4, которые изоморфны группам Ли с конечным числом параметров.

Представление однопараметрического непрерывного конформного преобразования $\hat{T}(\alpha)$ в пространстве $\mathfrak{F}_4$ бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ в рамках теории представлений групп Ли возможно в виде:

$$\hat{T}(\alpha)\varphi = \exp(\alpha\hat{g})\varphi\,, \tag{4.9.11}$$

где генератор $\hat{g}$ однопараметрического преобразования $\hat{T}(\alpha)$ определяется формулой

$$\hat{g} = g^1(\xi^1)\frac{\partial}{\partial \xi^1} + g^2(\xi^2)\frac{\partial}{\partial \xi^2} + g^3(\xi^3)\frac{\partial}{\partial \xi^3} + g^4(\xi^4)\frac{\partial}{\partial \xi^4}\,, \tag{4.9.12}$$

а g^i – четыре произвольные бесконечно дифференцируемые функции одной действительной переменной.

Если известны четыре функции g^i, то есть генератор (4.9.12), то функции f^i в конформном преобразовании (4.9.8) формально записываются следующим образом:

$$f^i = \exp(\alpha \cdot \hat{g}) \cdot \xi^i\,, \tag{4.9.13}$$

причем

$$\frac{\partial f^i}{\partial \alpha} = \hat{g} f^i\,. \tag{4.9.14}$$

Понятию конформных преобразований придадим ниже более широкий смысл: либо позволим коэффициенту κ в формуле (4.9.9) принимать любые комплексные значения; либо перейдем от элемента длины ds_{H_4} к элементу длины $ds_{|H_4|_C}$, то есть

$$ds_{|H_4|_C} = \sqrt[4]{|d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4|_C}\,, \tag{4.9.15}$$

где $|z|_C$ означает модуль комплексного числа. Тогда функции f^i в формулах (4.9.8) и функции g^i в формуле (4.9.12) могут быть комплексными функциями одной действительной переменной, а условие (4.9.7) заменится требованием

$$\frac{D(f^1,f^2,f^3,f^4)}{D(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)} \equiv \frac{\partial f^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial f^2}{\partial \xi^2}\frac{\partial f^3}{\partial \xi^3}\frac{\partial f^4}{\partial \xi^4} \neq 0\,. \tag{4.9.16}$$

Такую более широкую группу естественно назвать комплексифицированной группой конформных преобразований. Эта группа более естественно вводится, если работать не с метрической функцией, а с формами (см. главу 3 и раздел 4.3), через которые выражаются метрические функции. В этом случае вместо формулы (4.9.9) приходится рассматривать переход

$$(ds_{H_4})^4 \qquad \to \qquad \Lambda(\xi)\ (ds_{H_4})^4\,, \tag{4.9.17}$$

где

$$\Lambda(\xi) = \frac{\partial f^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial f^2}{\partial \xi^2}\frac{\partial f^3}{\partial \xi^3}\frac{\partial f^4}{\partial \xi^4} \neq 0\,. \tag{4.9.18}$$

Алгебра Ли точного представления группы Лоренца в пространстве бесконечно дифференцируемых функций на четырехмерном пространстве Минковского состоит из 6 генераторов:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{B}_i = x^i\frac{\partial}{\partial x^0} + x^0\frac{\partial}{\partial x^i}\,, \quad &&\hat{L}_1 = x^3\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^3}\,, \\ &\hat{L}_2 = -x^3\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^3}\,, &&\hat{L}_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2}\,, \end{aligned}\right\} \tag{4.9.19}$$

которые подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$[\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{Y}}]$	$\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{1}$	$\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{2}$	$\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{3}$	$\hat{\mathbf{L}}_\mathbf{1}$	$\hat{\mathbf{L}}_\mathbf{2}$	$\hat{\mathbf{L}}_\mathbf{3}$
$\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{1}$	0	$-\hat{L}_3$	$\hat{L}_2$	0	$\hat{B}_3$	$-\hat{B}_2$
$\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{2}$	$\hat{L}_3$	0	$-\hat{L}_1$	$-\hat{B}_3$	0	$\hat{B}_1$
$\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{3}$	$-\hat{L}_2$	$\hat{L}_1$	0	$\hat{B}_2$	$-\hat{B}_1$	0
$\hat{\mathbf{L}}_\mathbf{1}$	0	$\hat{B}_3$	$-\hat{B}_2$	0	$\hat{L}_3$	$-\hat{L}_2$
$\hat{\mathbf{L}}_\mathbf{2}$	$-\hat{B}_3$	0	$\hat{B}_1$	$-\hat{L}_3$	0	$\hat{L}_1$
$\hat{\mathbf{L}}_\mathbf{3}$	$\hat{B}_2$	$-\hat{B}_1$	0	$\hat{L}_2$	$-\hat{L}_1$	0

. (4.9.20)

Если найдутся 6 линейно независимых генераторов вида (4.9.12), образующие алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли 6-ти генераторов (4.9.19), то тем самым будет доказано существование подгруппы комплексифицированной группы конформных преобразований четырехмерного пространства Бервальда-Моора, изоморфной непрерывной группе Лоренца.

Любой генератор $\hat{g}$ представления алгебры Ли в пространстве бесконечно дифференцируемых функций $\mathfrak{F}_1 \ni \varphi(\xi)$, вообще говоря, комплексных, одной действительной переменной $\xi \in R$ имеет вид:

$$\hat{g} = g(\xi)\frac{d}{d\xi}\,, \tag{4.9.21}$$

где $g(\xi)$ – действительная или комплексная функция одной действительной переменной. Соответствующее преобразование определяется следующим образом:

$$\hat{T}(\alpha)\varphi(\xi) = e^{\alpha\hat{g}}\varphi(\xi)\,. \tag{4.9.22}$$

Подчеркнём: для того, чтобы оставаться в рамках понятия комплексификации групп Ли, проще всего, если генераторы $\hat{g}$ в формулах (4.9.12), (4.9.21) являются либо действительными, либо произведением комплексной мнимой единицы на действительный генератор.

Преобразование единственной координаты ξ определяется формулами

$$\xi' = f(\xi) \qquad \Rightarrow \qquad f(\xi) = e^{\alpha\hat{g}}\xi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = g\,\frac{\partial f}{\partial \xi}\,. \tag{4.9.23}$$

Откуда следует, что

$$f(\xi;\alpha) = \Psi\left(\alpha + \int^{\xi}\frac{d\xi}{g(\xi)}\right)\,, \tag{4.9.24}$$

где функция Ψ находится из условия

$$\Psi\left(\alpha + \int^{\xi}\frac{d\xi}{g(\xi)}\right)\Bigg|_{\alpha=0} = \xi\,. \tag{4.9.25}$$

Пространство $R \ni \xi$ будем считать метрическим с элементом длины

$$ds = |d\xi|_C\,. \tag{4.9.26}$$

Тогда все преобразования (4.9.23) являются конформными, так как

$$|d\xi'|_C = \left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_C |d\xi|_C \,. \tag{4.9.27}$$

Утверждение

Если в алгебре Ли имеются два коммутирующих генератора, то точное представление такой алгебры Ли в пространстве $\mathfrak{F}_1$ невозможно.

Докажем это утверждение. Если $[\hat{g}_1, \hat{g}_2] = 0$, то

$$g_1(\xi)\frac{dg_2}{d\xi} - g_2(\xi)\frac{dg_1}{d\xi} = 0\,. \tag{4.9.28}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$g_2(\xi) = const \cdot g_1(\xi)\,, \tag{4.9.29}$$

то есть генераторы линейно зависимы. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим алгебру Ли группы непрерывных преобразований, сохраняющих элемент длины

$$ds = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2}\,. \tag{4.9.30}$$

Такая алгебра, является подалгеброй алгебры Ли непрерывной группы Лоренца и содержит три генератора $\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{L}_3$ (4.9.19), для которых выполняются (4.9.20) следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{B}_1, \hat{B}_2] = -\hat{L}_3\,, \qquad [\hat{B}_1, \hat{L}_3] = -\hat{B}_2\,, \qquad [\hat{B}_2, \hat{L}_3] = \hat{B}_1\,. \tag{4.9.31}$$

Согласно вышеизложенному представление рассматриваемой алгебры Ли будем искать в виде трех операторов вида:

$$\hat{b}_1 = b_1(\xi)\frac{d}{d\xi}\,, \qquad \hat{b}_2 = b_2(\xi)\frac{d}{d\xi}\,, \qquad \hat{l}_3 = l_3(\xi)\frac{d}{d\xi}\,, \tag{4.9.32}$$

где b_1, b_2, l_3 – три неизвестные функции одной действительной переменной. Для этих функций из соотношений (4.9.31) получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$b_1\frac{db_2}{d\xi} - b_2\frac{db_1}{d\xi} = -l_3\,, \quad b_1\frac{dl_3}{d\xi} - l_3\frac{db_1}{d\xi} = -b_2\,, \quad b_2\frac{dl_3}{d\xi} - l_3\frac{db_2}{d\xi} = b_1\,. \tag{4.9.33}$$

Эта система уравнений решается в квадратурах, общее решение содержит одну произвольную функцию одной действительной переменной. Приведем одно их частных решений:

$$b_1 = -\sqrt{a^2+\xi^2}\,, \qquad b_2 = \frac{\xi\sqrt{a^2+\xi^2}}{a}\,, \qquad l_3 = \frac{a^2+\xi^2}{a}\,, \tag{4.9.34}$$

где a – постоянная. Генераторы (4.9.32) с функциями (4.9.34) линейно независимы, поэтому полученное представление есть точное представление алгебры Ли группы $SO(1,2)$. Все генераторы (4.9.32) являются действительными.

Итак, в конформных группах пространств $R \equiv H_1, H_2, ..., H_n, ...$ содержится в качестве подгруппы группа $SO(1,2)$.

Рассмотрим алгебру Ли группы $SO(3)$ непрерывных однородных линейных преобразований, сохраняющих элемент длины

$$ds = \sqrt{(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2}\,. \tag{4.9.35}$$

Такая алгебра является подалгеброй алгебры Ли группы Лоренца и содержит три генератора $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$ (4.9.19), для которых справедливы (4.9.20) следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = \hat{L}_3\,, \qquad [\hat{L}_1, \hat{L}_3] = -\hat{L}_2\,, \qquad [\hat{L}_2, \hat{L}_3] = \hat{L}_1\,. \tag{4.9.36}$$

Представление рассматриваемой алгебры Ли будем искать в виде трех операторов вида:

$$\hat{l}_1 = l_1(\xi)\frac{d}{d\xi}\,, \qquad \hat{l}_2 = l_2(\xi)\frac{d}{d\xi}\,, \qquad \hat{l}_3 = l_3(\xi)\frac{d}{d\xi}\,, \tag{4.9.37}$$

где l_1, l_2, l_3 – три неизвестные функции одной действительной переменной. Для этих функций из соотношений (4.9.36) получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$l_1\frac{dl_2}{d\xi} - l_2\frac{dl_1}{d\xi} = l_3\,, \quad l_1\frac{dl_3}{d\xi} - l_3\frac{dl_1}{d\xi} = -l_2\,, \quad l_2\frac{dl_3}{d\xi} - l_3\frac{dl_2}{d\xi} = l_1\,. \tag{4.9.38}$$

Эта система уравнений решается в квадратурах, общее решение содержит одну произвольную функцию одной действительной переменной. Приведем одно их частных решений:

$$l_1 = i\,\frac{\xi\sqrt{a^2+\xi^2}}{a}\,, \qquad l_2 = i\,\sqrt{a^2+\xi^2}\,, \qquad l_3 = \frac{a^2+\xi^2}{a}\,, \tag{4.9.39}$$

где a – постоянная. Генераторы (4.9.37) с функциями (4.9.39) линейно независимы, поэтому полученное представление есть точное представление алгебры Ли группы $SO(3)$. Не все генераторы (4.9.37) являются действительными.

Итак, в комплексифицированных конформных группах поличисловых пространств $R \equiv H_1, H_2, ..., H_n, ...$ содержится в качестве подгруппы группа $SO(3)$.

Группа Лоренца не может быть подгруппой комплексифицированной конформной группы пространства $R \equiv H_1$, так как в соответствующей алгебре Ли содержатся три пары коммутирующих операторов:

$$[\hat{B}_1, \hat{L}_1] = 0\,, \qquad [\hat{B}_2, \hat{L}_2] = 0\,, \qquad [\hat{B}_3, \hat{L}_3] = 0\,. \tag{4.9.40}$$

Поэтому попытаемся реализовать группу Лоренца в качестве подгруппы в комплексифицированной конформной группе пространства H_2. Если это удастся, то в этом случае можно будет утверждать, что группа Лоренца содержится в качестве подгруппы в комплексифицированных конформных группах пространств H_n, если $n \geq 2$.

Любой генератор $\hat{g}$ представления алгебры Ли в пространстве комплексных бесконечно дифференцируемых функций $\mathfrak{F}_2 \ni \varphi(\xi^1, \xi^2)$ двух действительных переменных $\xi^1, \xi^2 \in R$, определяющий представление однопараметрического преобразования Ли в комплексифицированной группе конформных преобразований пространства H_2, имеет вид:

$$\hat{g} = g^1(\xi^1)\frac{\partial}{\partial\xi^1} + g^2(\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,, \tag{4.9.41}$$

где $g^1(\xi^1)$, $g^2(\xi^2)$ – действительные или комплексные функции, являющаяся произведением комплексной мнимой единицы на действительную функцию одной действительной переменной.

Исходя из вышеизложенного и учитывая, что в двухмерном векторном пространстве векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4.9.42}$$

линейно независимы, сконструируем точное представление алгебры Ли группы Лоренца:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{L}_1 &= \quad i\sqrt{a^2+(\xi^1)^2}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} + i\sqrt{a^2+(\xi^2)^2}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,,\\
\hat{L}_2 &= i\,\frac{\xi^1\sqrt{a^2+(\xi^1)^2}}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} + i\,\frac{\xi^2\sqrt{a^2+(\xi^2)^2}}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,,\\
\hat{L}_3 &= \quad -\,\frac{a^2+(\xi^1)^2}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} - \frac{a^2+(\xi^2)^2}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,,\\
\hat{B}_1 &= \quad \sqrt{a^2+(\xi^1)^2}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} - \sqrt{a^2+(\xi^2)^2}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,,\\
\hat{B}_2 &= \frac{\xi^1\sqrt{a^2+(\xi^1)^2}}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} - \frac{\xi^2\sqrt{a^2+(\xi^2)^2}}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,,\\
\hat{B}_3 &= \quad i\,\frac{a^2+(\xi^1)^2}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} - i\,\frac{a^2+(\xi^2)^2}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,,
\end{aligned}\right\}\qquad(4.9.43)$$

где a – постоянная. Генераторы (4.9.43) линейно независимы, поэтому полученное представление есть точное представление алгебры Ли группы Лоренца. Генераторы $\hat{L}_3, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ являются действительными операторами, а генераторы $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{B}_3$ – комплексные операторы специального вида: произведение действительных операторов на комплексную мнимую единицу.

Итак, группа Лоренца содержится в качестве подгруппы в комплексифицированных конформных группах пространств H_n, если $n \geq 2$.

Можно было бы не вводить в настоящем разделе выше необычные метрические функции с комплексной нормой для того, чтобы пояснить переход к комплексифицированной конформной группе, а просто дать определение комплексификации бесконечно параметрической конформной группы, например: будем говорить, что конформная группа пространства H_n комплексифицирована, если любая её непрерывная конечномерно параметрическая подгруппа Ли комплексифицирована.

То, что группа Лоренца содержится в качестве подгруппы именно в комплексифицированных конформных группах пространств $H_{n\geq 2}$, по-видимому, говорит о том, что важную роль в физике может играть не только пространство H_4, но и поличисловое пространство $P_{0+2\cdot 4}$ размерности 8.

4.10 Нормальное сопряжение

Пространства невырожденных поличисел P_n при $n > 2$ не являются евклидовыми или псевдоевклидовыми. Так если e_1, e_2, ... , $e_n \in P_n$ – базис и

$$e_ie_j = p^k_{ij}e_k, \tag{4.10.1}$$

$$P_n \ni X = x^1e_1 + x^2e_2 + ... + x^ne_n, \tag{4.10.2}$$

то n-я степень нормы поличисла X выражается через n-линейную симметрическую форму

$$(X, Y, ..., Z) = \omega_{i_1i_2...i_n}x^{i_1}y^{i_2}...z^{i_n} \tag{4.10.3}$$

с n одинаковыми аргументами X,

$$|X|^n = (X, X, ..., X)\,.$$

В поличисловом пространстве n-линейную симметрическую форму (4.10.3) мы условились называть скалярным полилинейным произведением, или просто скалярным произведением.

Кроме метрической формы (4.10.3), в пространстве P_n можно рассмотреть и другие инвариантные формы, например билинейную

$$((X, Y)) = \bar{q}_{ij}x^iy^j, \tag{4.10.4}$$

где

$$\bar{q}_{ij} = Cp^k_{im}p^m_{kj}, \tag{4.10.5}$$

$C \neq 0$ – некоторое действительное число. Для каждой конкретной системы поличисел это число выбирается из соображений простоты и симметрии получаемых формул. Из определения следует, что данная форма в пространстве невырожденных поличисел является симметрической, то есть $((X, Y)) = ((Y, X))$.

Таким образом, пространство невырожденных поличисел P_n является n-мерным линейным пространством с несколькими полилинейными формами, среди которых две выделенных: метрическая n-го порядка, через которую записывается скалярное произведение с n аргументами, и билинейная.

Понятие сопряженного числа обычно (комплексные числа, двойные числа, кватернионы) связывают с изменением знаков у символьных элементов. Например, для комплексных чисел $z = x + iy$ унарная операция сопряжения $\bar{z} = x - iy$ не принадлежит алгебре комплексных чисел, а главным её свойством является следующее:

$$\bar{z}z = |z|^2 + i \cdot 0\,.$$

При обобщении для невырожденных поличисловых пространств P_n в базисе $1, E_2, ..., E_{n-1}$ это свойство должно приобрести вид

$$\tilde{X}X = \mid X \mid^n \cdot 1 + 0 \cdot E_2 + ... + 0 \cdot E_{n-1}\,.$$

Здесь унарная операция нормального сопряжения $"^{\sim}"$ заменяет комплексное сопряжение $"^{-}"$ на множестве комплексных чисел.

Как было показано в разделе 4.2 для невырожденных поличисел матрица $(\bar{q}_{ij})$ (4.10.5) невырожденная, то есть

$$det(\bar{q}_{ij}) \neq 0\,, \tag{4.10.6}$$

поэтому, кроме дважды ковариантного тензора $\bar{q}_{ij}$, в координатном пространстве P_n определен дважды контравариантный тензор $\bar{q}^{ij}$.

Введём на множестве невырожденных поличисел $(n-1)$-нарную операцию, которую в дальнейшем будем называть *нормальным сопряжением комплекса* поличисел $\{X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}\}$, следующим образом:

$$[X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}] = \omega_{i_1 i_2 ... i_{n-1} i_n} q^{i_n k} x^{i_1}_{(1)} ... x^{i_{n-1}}_{(n-1)} e_k \in P_n\,. \tag{4.10.7}$$

Непосредственно из этой формулы видно, что операция нормального сопряжения коммутативна по всем своим $(n-1)$-му аргументам, то есть при любой перестановке аргументов она не меняет своего значения, но она в общем случае не является ассоциативной. Постоянную C в формуле (4.10.5) можно, например, выбирать так, чтобы $[1, 1, ..., 1] = 1$.

Будем говорить, что поличисло $Z = [X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}]$ есть *нормально сопряженное* комплексу поличисел $\{X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}\}$.

Непосредственно из формул (4.10.3), (4.10.4) и (4.10.7) следует связь между скалярным произведением поличисел $X, X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}$ и билинейной формой $((X, Z))$, где $Z = [X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}]$:

$$(X, X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}) = ((X, Z))\,. \tag{4.10.8}$$

Естественно назвать нормально сопряжённым поличислом $\tilde{X}$ к поличислу X величину

$$\tilde{X} = [X, X, ..., X], \tag{4.10.9}$$

и тогда

$$((X, \tilde{X})) = \mid X \mid^n\,, \tag{4.10.10}$$

где

$$\mid X \mid^n = (X, X, ..., X). \tag{4.10.11}$$

Поясним введенные выше понятия на примерах.

Комплексные числа:

$$X = x^1 + ix^2, \qquad i^2 = -1, \tag{4.10.12}$$

$$(X, Y) = x^1y^1 + x^2y^2, \tag{4.10.13}$$

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.10.14}$$

$$(\bar{q}_{ij}) = 2C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.10.15}$$

Выберем $C = \dfrac{1}{2}$, тогда

$$(\omega_{ik}\bar{q}^{kj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.10.16}$$

$$\tilde{X} = x^1 - ix^2, \tag{4.10.17}$$

то есть нормальное сопряжение для комплексных чисел – это обычное комплексное сопряжение. Для любой пары комплексных чисел X и Y справедливо следующее соотношение между скалярным произведением и значением билинейной формы (4.10.4):

$$((X, [Y])) = x^1y^1 + x^2y^2 = (X, Y). \tag{4.10.18}$$

Таким образом

$$((X, \tilde{X})) =\mid X \mid^2, \tag{4.10.19}$$

$$X \cdot \tilde{X} =\mid X \mid^2 \cdot 1 + 0 \cdot i. \tag{4.10.20}$$

Двойные (гиперболические) числа:

$$X = x^1 + jx^2, \qquad j^2 = 1, \tag{4.10.21}$$

$$(X, Y) = x^1y^1 - x^2y^2, \tag{4.10.22}$$

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.10.23}$$

$$(\bar{q}_{ij}) = 2C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.10.24}$$

Выберем $C = \dfrac{1}{2}$, тогда

$$(\omega_{ik}\bar{q}^{kj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.10.25}$$

$$\tilde{X} = x^1 - jx^2, \tag{4.10.26}$$

то есть нормальное сопряжение для гиперболических чисел – это обычное сопряжение. Для любой пары двойных чисел X и Y справедливо следующее соотношение между скалярным произведением и значением билинейной формы (4.10.4):

$$((X, \tilde{Y})) = x^1y^1 - x^2y^2 = (X, Y). \tag{4.10.27}$$

Таким образом,

$$((X, \tilde{X})) = \mid X \mid^2, \tag{4.10.28}$$

$$X \cdot \tilde{X} = \mid X \mid^2 \cdot 1 + 0 \cdot j. \tag{4.10.29}$$

Гиперкомплексные числа H_3

С этими числами удобнее всего работать в ψ-базисе:

$$X = x^1\psi_1 + x^2\psi_2 + x^3\psi_3, \tag{4.10.30}$$

$$p^k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j = k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях}, \end{cases} \tag{4.10.31}$$

$$(\bar{q}_{ij}) = C \cdot diag(1, 1, 1), \tag{4.10.32}$$

$$(X, Y, Z) = \frac{1}{6}(x^1y^2z^3 + x^1y^3z^2 + x^2y^1z^3 + x^1y^3z^1 + x^3y^1z^2 + x^3y^3z^2). \tag{4.10.33}$$

Выберем $C = \dfrac{1}{3}$, тогда

$$[X, Y] = \frac{1}{2}[(x^2y^3 + x^3y^2)\psi_1 + (x^1y^3 + x^3y^1)\psi_2 + (x^1y^2 + x^2y^1)\psi_3], \tag{4.10.34}$$

$$[1, 1] = 1, \tag{4.10.35}$$

$$\tilde{X} = x^2x^3\psi_1 + x^1x^2\psi_2 + x^1x^2\psi_3, \tag{4.10.36}$$

в базисе $1, E_2, E_3$

$$X \cdot \tilde{X} =\mid X \mid^3 \cdot 1 + 0 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3\,, \tag{4.10.37}$$

так как для поличисел $X \in H_3$

$$\mid X \mid^3 = x^1x^2x^3. \tag{4.10.38}$$

Для любой тройки поличисел X, Y, $Z \in H_3$ справедливы следующее соотношения между их скалярным произведением и значениями билинейной формы (4.10.4):

$$(([X,Y],Z)) = ((X,[Z,Y])) = ((Z,[X,Y])) = (X,Y,Z). \tag{4.10.39}$$

Билинейная форма (4.10.4) от двух чисел X, $Y \in H_3$ вычисляется в изотропном базисе по формуле

$$((X,Y)) = \frac{1}{3}(x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3). \tag{4.10.40}$$

Найдем все такие числа H_3, которые удовлетворяют уравнению

$$\tilde{X} = X. \tag{4.10.41}$$

Решая систему трех квадратных уравнений с тремя неизвестными, получим пять различных корней: $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$. Последние четыре поличисла составляют, если представить их радиус-векторами в трёхмерном евклидовом пространстве, вершины правильного тетраэдра, а первое поличисло $(0,0,0)$ – центр этого тетраэдра.

Для того чтобы $X, Y \in H_3$ были делителями нуля относительно операции нормального сопряжения, они должны быть делителями нуля относительно поличислового умножения.

Любое число $Y \in H_3$ можно представить в виде

$$Y = [1,Z], \quad \text{где} \quad Z = (-y^1 + y^2 + y^3, y^1 - y^2 + y^3, y^1 + y^2 - y^3). \tag{4.10.42}$$

Ранее было введено понятие трансверсальности ("ортогональности") поличисла X к поличислу Y через понятие скалярного произведения:

$$(X,Y,...,Y) = 0\,. \tag{4.10.43}$$

Теперь для этого можно использовать билинейную форму (4.10.4) и понятие нормального сопряжения. В произвольном поличисловом пространстве поличисло X "ортогонально" (трансверсально) поличислу Y, если

$$((X, \tilde{Y})) = 0. \tag{4.10.44}$$

Ещё раз отметим, что это понятие при $n > 2$, вообще говоря, не "коммутативное", то есть из того, что поличисло X "ортогонально" поличислу Y, в общем случае не следует, что поличисло Y "ортогонально" поличислу X. Если обе "ортогональности" имеют место, то поличисла X и Y называются взаимно "ортогональными", или взаимно трансверсальными.

Если задан комплекс из $(n-1)$-го поличисла невырожденной системы поличисел P_n, часть из которых могут совпадать, и поличисло Z является нормальным сопряжением этого комплекса, то число X "ортогонально" (трансверсально) данному комплексу, если

$$((X, Z)) = 0. \tag{4.10.45}$$

Формулы (4.10.30)–(4.10.40) автоматически обобщаются на поличисла H_n с заменой $3 \to n$, то есть полагая $C = \dfrac{1}{n}$. Докажем это, используя понятие антиопределителя (см. раздел 4.4).

На множестве поличисел H_n в изотропном базисе $(n-1)$-нарная операция нормального сопряжения (4.10.7) комплекса поличисел $\{A, B, ..., C\}$ запишется следующим образом:

$$[A, B, ..., C] = \frac{1}{(n-1)!} \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & ... & \psi_n \\ a^1 & a^2 & ... & a^n \\ b^1 & b^2 & ... & b^n \\ ... & ... & ... & ... \\ c^1 & c^2 & ... & c^n \end{vmatrix}_+ . \tag{4.10.46}$$

Откуда следует, что в базисе $1, E_2, ..., E_n$ имеет место формула

$$X \cdot \tilde{X} =\mid X \mid^n \cdot 1 + 0 \cdot E_2 + ... + 0 \cdot E_n \,, \tag{4.10.47}$$

где

$$\tilde{X} \equiv [X, X, ..., X] \,.$$

Билинейная форма (4.10.4) в изотропном базисе в пространстве поличисел H_n имеет вид:

$$((X,Z)) = \frac{1}{n}\, x^i \delta_{ij} z^j \, . \tag{4.10.48}$$

Тогда

$$((X,Z)) = (X, A, B, ..., C)\,, \tag{4.10.49}$$

где $Z = [A, B, ...C]$, то есть опять же в изотропном базисе

$$((X,Z)) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & ... & x^n \\ a^1 & a^2 & ... & a^n \\ b^1 & b^2 & ... & b^n \\ ... & ... & ... & ... \\ c^1 & c^2 & ... & c^n \end{vmatrix}_+ \, . \tag{4.10.50}$$

Глава 5

КОНФОРМНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Успехи приложения теории функций комплексной переменной к решению задач физики, особенно решению уравнения Лапласа на евклидовой плоскости, подвигли многих математиков и физиков к попыткам построения аналогичных теорий для других пространств. Особое значение, конечно, здесь занимает четырёхмерное пространство-время.

Теория конформного потенциала строится для пространств, конформно связанных с финслеровыми пространствами, у которых метрические функции однозначно определены. При этом выделяется множество плоских финслеровых пространств, взятых в качестве исходных, а среди последних – класс поличисловых пространств.

Если в качестве исходных пространств берутся поличисловые пространства, то тогда будем говорить о гиперкомплексном потенциале, так как получающаяся теория наиболее близка к теории комплексного потенциала на евклидовой плоскости.

На самом деле конформному потенциалу посвящены кроме данной главы ещё следующие три: глава VI содержит примеры решения задач для исходных квадратичных пространств, глава VII содержит примеры решения задач для исходных неквадратичных пространств, глава $VIII$ посвящена конформному потенциалу с исходными пространствами поличисел, для которых можно ввести понятие гиперкомплексного потенциала.

5.1 Конформно связанные пространства

Пусть $x^1, x^2, ..., x^n$ – финслерово пространство с метрической функцией

$$L(\xi; x) \equiv L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{5.1.1}$$

где $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ – касательное пространство в точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства. Тогда элемент длины определяется формулой

$$ds = L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{5.1.2}$$

а компоненты обобщенного импульса

$$p_i = \frac{\partial L(dx; x)}{\partial (dx^i)} \tag{5.1.3}$$

связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$\Phi(p; x) = 0\,. \tag{5.1.4}$$

В финслеровых пространствах тангенциальному уравнению индикатрисы всегда можно придать некоторую специальную форму

$$\Phi_m(p; x) - 1 = 0\,, \tag{5.1.5}$$

где $\Phi_m(p; x)$ – однородная функция m-го порядка $(m > 0)$ по первым n аргументам. Очевидно, что функция Финслера в этом случае суть функция

$$\Phi(p; x) = \Phi_m(p; x) - 1\,.$$

Если функция $S(x)$ определяет в рассматриваемом финслеровом пространстве нормальную конгруэнцию "геодезических", то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}, ... \frac{\partial S}{\partial x^n}; x\right) = 0\,. \tag{5.1.6}$$

Функцию $S(x)$ в классической механике называют действием как функцией координат, а уравнение, соответствующее уравнению (5.1.6), – уравнением Гамильтона-Якоби. Если функция $S(x)$ известна, то поле обобщенных импульсов, соответствующее нормальной конгруэнции экстремалей, находится как

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}\,, \tag{5.1.7}$$

а сами экстремали (мировые линии, траектории движения, линии тока) из этой нормальной конгруенции находятся из системы уравнений

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi(p; x)}{\partial p_i}\right|_{p_k = \frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x)\,,$$

или

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi_m(p;x)}{\partial p_i}\right|_{p_k=\frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x)\,, \tag{5.1.8}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции.

Финслерово пространство, конформно связанное с исходным, имеет метрическую функцию вида

$$\tilde{L}(\xi;x) = \kappa(x)L(\xi;x)\,, \tag{5.1.9}$$

где $\kappa(x) > 0$ – некая скалярная функция. Элемент длины в таком пространстве определяется формулой

$$d\tilde{s} = \kappa(x)L(dx;x)\,. \tag{5.1.10}$$

Обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \kappa(x)\,\frac{\partial L(dx;x)}{\partial(dx^i)} \tag{5.1.11}$$

связаны соотношением

$$\Phi_m(\tilde{p};x) - \kappa^m(x) = 0\,, \tag{5.1.12}$$

то есть функция Финслера пространства, конформно связанного с основным пространством, может быть определена следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{p};x) = \Phi_m(\tilde{p};x) - \kappa^m\,. \tag{5.1.13}$$

Пусть $S_W(x)$ – произвольная скалярная функция, тогда в области, где выполняется неравенство

$$\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x\right) > 0\,, \tag{5.1.14}$$

определена финслерова геометрия, конформно связанная с исходной и полем коэффициента растяжения-сжатия

$$\kappa(x) = \sqrt[m]{\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \dots \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x\right)}\,, \tag{5.1.15}$$

причем в этой же области функция $S_W(x)$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi_m(\tilde{p};x)}{\partial \tilde{p}_i}\right|_{\tilde{p}_k=\frac{\partial S_W}{\partial x^k}} \cdot \tilde{\lambda}(x)\,, \tag{5.1.16}$$

где $\tilde{\lambda}(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tilde{\tau}}$, а $\tilde{\tau}$ – параметр эволюции. Таким образом, функция $S_W(x)$ автоматически является действием как функцией координат в финслеровом пространстве с метрической функцией $\tilde{L}(\xi;x)$ (5.1.9).

Отметим, что при замене функции $S(x)$ и параметра эволюции τ на функцию $S_W(x)$ и параметр эволюции $\tilde{\tau}$ формула (5.1.8) формально совпадает с формулой (5.1.16), хотя геометрии разные.

Предположим, что инвариантный элемент объёма в исходном финслеровом пространстве с однозначно заданной метрической функцией $L(\xi;x)$ определён и имеет вид:

$$dV = \rho(x)\cdot dx^1 dx^2 ... dx^n\,. \tag{5.1.17}$$

Тогда в пространстве с метрической функцией $\tilde{L}(\xi;x)$ (5.1.9) также определён инвариантный элемент объёма:

$$d\tilde{V} = \rho(x)\left[\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1},...\frac{\partial S_W}{\partial x^n};x\right)\right]^{\frac{n}{m}} dx^1 dx^2 ... dx^n\,. \tag{5.1.18}$$

Согласно принципу самодостаточности финслеровой геометрии (см. раздел 1.8), если скалярное поле не задано, оно определяется из уравнения поля Лагранжа-Эйлера-Остроградского [6], [13] с лагранжианом

$$\mathfrak{L} = const\cdot\rho(x)\left[\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1},...\frac{\partial S_W}{\partial x^n};x\right)\right]^{\frac{n}{m}}\,. \tag{5.1.19}$$

Так как лагранжиан зависит только от производных поля S_W, уравнение поля записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\right)} = 0\,,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\varrho(x)\,\Phi_m^{\frac{n-m}{m}}\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\right)}\right] = 0\,. \tag{5.1.20}$$

Функцию $S_W(x)$, удовлетворяющую уравнению поля (5.1.20), будем называть *Мировой функцией*, или *конформным потенциалом*, а само уравнение – *фундаментальным уравнением* финслерова пространства, конформно связанного с пространства с метрической функцией $L(dx; x)$.

Любое невырожденное поличисловое пространство $P_n \ni X$ является финслеровым, причем любая компонента произвольной аналитической функции $F(X)$ в нём удовлетворяет фундаментальному уравнению поля для Мировой функции $S_W(x)$ в пространстве, конформно связанным с P_n. Аналитические функции можно перемножать, брать их линейные комбинации, строить функцию от функции, при этом опять будут получаться аналитические функции, каждая компонента которых будет удовлетворять фундаментальному уравнению поля. Если не оговорено другое, в качестве Мировой функции в невырожденном поличисловом пространстве будем брать, действительную компоненту аналитической функции, то есть компоненту $U(x^1, ..., x^2)$ при единице

$$F(X) = U(x) \cdot 1 + V^2(x) \cdot E_2 + ... + V^n(x) \cdot E_n \tag{5.1.21}$$

в базисе $1, E_2, ..., E_n$, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисел:

$$X = |X| \exp(\alpha^1 \cdot E_2 + ... + \alpha^{n-1} \cdot E_n)\,. \tag{5.1.22}$$

Теорию конформного потенциала в пространствах, конформно связанных с невырожденными поличисловыми пространствами, или построенную на основе поличисловых пространств, будем называть *теорией гиперкомплексного потенциала.* Именно в последней присутствует наиболее много черт, аналогичных свойствам, которые имеют место в теории комплексного потенциала на евклидовой плоскости, при этом ряд свойств и формул включают в себя не только компоненту $U(x)$, но и остальные компоненты: $V^2, V^3, ..., V^n$ – соответствующей аналитической функции поличисловой переменной, как это имеет место и в теории комплексного потенциала на евклидовой плоскости.

Замечание 1. Пространства невырожденных поличисел являются частным случаем более широкого класса плоских финслеровых пространств, каждой точке которых, вообще говоря, нельзя сопоставить поличисло, но для этого более широкого класса пространств понятие конформного потенциала работает, хотя в общем случае оно не связано с понятием аналитических функций и лишь частично связано с конформными преобразованиями этих пространств.

Замечание 2. Уравнения (5.1.16) определяют выделенную нормальную конгруэнцию экстремалей, соответствующую Мировой функции S_W. Эти экстремали соответствуют материальным объектам, движение которых согласовано с полями $S_W(x)$ и $\kappa(x)$. В каком-то смысле поля $S_W(x)$ и $\kappa(x)$ "порождаются" движением этих материальных объектов, если, конечно, Мировая функция удовлетворяет фундаментальному уравнению (5.1.20). Но для геометрии с метрической функцией (5.1.9) возможны и другие экстремали. Их можно понимать как экстремали пробных частиц или флюктуации поля $\kappa(x)$.

5.2 Пространство двойных чисел

Двойные, или гиперболические числа H_2 можно определить как двумерную линейную алгебру, в которой существует базис 1, j со следующими свойствами:

$$H_2 \ni X = x^0 + x^1 \cdot j\,, \qquad 1 \cdot 1 = 1\,, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j\,, \quad j^2 = 1\,, \qquad (5.2.1)$$

где x^0, x^1 – действительные числа.

В качестве потенциала выберем действительную компоненту U аналитической функции

$$\begin{aligned} F(X) &\equiv U + j \cdot V = \\ &= a \cdot \ln\left(\frac{X}{b}\right) \equiv \frac{a}{2} \ln\left[\frac{(x^0)^2 - (x^1)^2}{b}\right] + j \cdot \frac{a}{2} \ln\left[\frac{x^0 + x^1}{x^0 - x^1}\right], \end{aligned} \qquad (5.2.2)$$

a, b – действительные числа, то есть

$$U(x^0, x^1) = \frac{a}{2} \ln\left[\frac{(x^0)^2 - (x^1)^2}{b}\right]. \qquad (5.2.3)$$

Ограничимся конусом будущего:

$$x^0 > |x^1|\,, \qquad (5.2.4)$$

где аналитическая функция (5.2.2), а значит, и потенциал (5.2.3) определены.

Для того, чтобы записать уравнения (5.1.16), которым подчиняется движение материальных объектов, самосогласованное с полем $\kappa(x)$, надо определиться с выбором функции Финслера и функции $\tilde{\lambda}(x)$. И хотя наблюдаемые величины не зависят от этого выбора, от него зависит конкретный вид уравнений (5.1.16).

Если мы хотим, чтобы формулы (5.1.16) напоминали формулы теории комплексного потенциала, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(p;x) = p_0^2 - p_1^2 - \kappa^2(x^0,x^1)\,, \qquad \tilde{\lambda}(x^0,x^1) = \frac{1}{2}\,, \tag{5.2.5}$$

тогда

$$\acute{x}^0 = \frac{\partial U}{\partial x^0}\,, \qquad \acute{x}^1 = -\frac{\partial U}{\partial x^1}\,, \tag{5.2.6}$$

где $\acute{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\acute{\tau}}$, а $\acute{\tau}$ – некий параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции. В этом случае

$$\sqrt{(\acute{x}^0)^2 - (\acute{x}^1)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2} \equiv \kappa(x^0,x^1)\,, \tag{5.2.7}$$

где $\kappa(x^0,x^1)$ – коэффициент растяжения-сжатия конформного преобразования в пространстве H_2, которое (преобразование) определяется аналитической функцией (5.2.2). Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2} = \kappa(x^0,x^1)\,d\acute{\tau}\,.$$

Если мы хотим, чтобы уравнения (5.1.16) по форме и физической интерпретации соответствовали формулам СТО, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(p;x) = \sqrt{p_0^2 - p_1^2} - \kappa(x^0,x^1)\,, \qquad \tilde{\lambda}(x^0,x^1) = 1\,, \tag{5.2.8}$$

тогда

$$\dot{x}^0 = \frac{\frac{\partial U}{\partial x^0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}}\,, \qquad \dot{x}^1 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x^1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}}\,, \tag{5.2.9}$$

где $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – некий параметр вдоль мировой линии. В этом случае

$$\sqrt{(\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^1)^2} = 1\,, \tag{5.2.10}$$

то есть в этом случае параметр эволюции суть собственное время, соответствующее мировой линии в пространстве H_2, умноженное на скорость света. Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2} = d\tau\,.$$

Выбирая формулы (5.2.8), для потенциала (5.2.3) получим дифференциальные уравнения для определения мировых линий, по которым двигаются материальные объекты, составляющие рассматриваемую замкнутую физическую систему:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{x^0}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2}}, \; \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{x^1}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2}} \;\Rightarrow\; \frac{dx^1}{dx^0} = \frac{x^1}{x^0}. \tag{5.2.11}$$

Решениями этой системы уравнений являются мировые линии:

$$(x^0, x^1) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \cdot \tau \,, \qquad x^1 = \frac{v}{c} \cdot x^0 \,, \tag{5.2.12}$$

где c – скорость света, а v – скорость материального объекта, соответствующего данной мировой линии, и, конечно, $|v| < c$. Все такие мировые линии являются лучами, исходят из начала отсчета, особой точки потенциала, и расположены в конусе будущего.

Совместим себя с наблюдателем (мировой линией) $v = 0$ и будем вести отсчет времени начиная с некоторого значения t_0. Тогда мы будем наблюдать *удаление* материальных объектов от нас с различными скоростями, зависящими от расстояния до этих объектов. Модуль координаты x^1 будет характеризовать нам истинное пространственное расстояние r от наблюдателя до материальных объектов. Из формул (5.2.11) и (5.2.12) получим

$$|v| \equiv \frac{dr}{dt} = \frac{r}{t_0 + t} \,, \tag{5.2.13}$$

а при $t \ll t_0$ имеем

$$|v| \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r \,. \tag{5.2.14}$$

Таким образом, мы получили закон Хаббла с коэффициентом Хаббла $H = \dfrac{1}{t_0}$, что вполне согласуется с формулой, которая получается для этого закона в космологической модели Эйнштейна – де Ситтера [21], где $H = \dfrac{2}{3t_0}$.

5.3 Поличисловое пространство H_4

Гиперкомплексные числа H_4 (см. раздел 4.8) изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4. Координаты в изотропном базисе пространства H_4 будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, а сам базис

– $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, то есть любое число можно представить в виде разложения

$$X = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4\,, \tag{5.3.1}$$

или четверки действительных чисел $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$. Бинарная операция поличислового умножения определяется заданием правила умножения для базисных векторов:

$$\psi_i\psi_j = \begin{cases} \psi_i\,, & \text{если} \quad i = j \\ 0\,, & \text{если} \quad i \neq j\,. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Если $\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4 > 0$, то для числа $X \in H_4$ определена норма

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4} > 0\,. \tag{5.3.3}$$

Пространство H_4 является метрическим финслеровым пространством с метрической функцией

$$L(d\xi) = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,, \tag{5.3.4}$$

которую никакими преобразованиями координат нельзя привести к квадратному корню из дифференциальной квадратичной формы, то есть такое финслерово пространство качественно отличается от евклидова и псевдоевклидовых пространств размерности четыре. Метрику, которая определяется метрической функцией (5.3.4), называют иногда метрикой Бервальда-Моора [27].

В пространстве H_4 существует базис $1, j, k, jk$,

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4\,, \\ j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4\,, \\ k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4\,, \\ jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4\,, \end{aligned}\right\} \tag{5.3.5}$$

закон умножения базисных элементов которого определен Таб. 5.1.

×	**1**	**j**	**k**	**jk**
1	1	j	k	jk
j	j	1	jk	k
k	k	jk	1	j
jk	jk	k	j	1

Таб. 5.1

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 числа X в этом базисе связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ того же числа в изотропном базисе формулами:

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3\,, \\ \xi^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3\,, \\ \xi^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3\,, \\ \xi^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.6}$$

Базис $1, j, k, jk$ является "ортонормированным", именно в нем в конусе $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4 > 0$ определено экспоненциальное представление чисел $X \in H_4$.

Если гладкая функция $F(x)$ одной действительной переменной x представима как полином или сходящийся ряд переменной x, то функция $F(X)$ переменной $X \in H_4$ также определена и является аналитической, в изотропном базисе она запишется следующим образом:

$$F(X) = F(\xi^1)\psi_1 + F(\xi^2)\psi_2 + F(\xi^3)\psi_3 + F(\xi^4)\psi_4\,. \tag{5.3.7}$$

В "ортонормированном" базисе $1, j, k, jk$ та же функция имеет вид:

$$\begin{aligned} F(X) = \;& \frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3) + F(x^0+x^1-x^2-x^3) + \\ & +F(x^0-x^1+x^2-x^3) + F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot 1 + \\ & +\frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3) + F(x^0+x^1-x^2-x^3) - \\ & -F(x^0-x^1+x^2-x^3) - F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot j + \\ & +\frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3) - F(x^0+x^1-x^2-x^3) + \\ & +F(x^0-x^1+x^2-x^3) - F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot k + \\ & +\frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3) - F(x^0+x^1-x^2-x^3) - \\ & -F(x^0-x^1+x^2-x^3) + F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot jk\,. \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

В координатах x^0, x^1, x^2, x^3 метрическая функция (5.3.4) финслерова пространства H_4 записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} L(dx) = [(dx^0 + dx^1 + dx^2 + dx^3)(dx^0 + dx^1 - dx^2 - dx^3)\times \\ \times(dx^0 - dx^1 + dx^2 - dx^3)(dx^0 - dx^1 - dx^2 + dx^3)]^{1/4}\,. \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Разложим выражение в квадратных скобках по степеням dx^0:

$$\begin{aligned} L^4(dx) = {}& (dx^0)^4 - 2\,(dx^0)^2 \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] + \\ & + 8\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \ + \ (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 - \\ & - 2\left[(dx^1)^2\,(dx^2)^2 + (x^1)^2\,(x^3)^2 + (x^2)^2\,(dx^3)^2\right]. \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Предположим, что

$$dx^\alpha = \varepsilon^\alpha dx^0\,, \quad 0 < \varepsilon^\alpha \ll 1\,, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{5.3.11}$$

тогда с точностью до членов порядка ε^2 включительно по сравнению с 1 для элемента длины в пространстве H_4 получим следующую формулу:

$$L(dx) \simeq \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{5.3.12}$$

Справа здесь стоит элемент длины в пространстве Минковского, поэтому справедливо следующее утверждение: координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского в том же приближении.

Элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством H_4, в изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \tag{5.3.13}$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4}\kappa(\xi)\frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}\,, \tag{5.3.14}$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1 p_2 p_3 p_4 - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0\,. \tag{5.3.15}$$

Выберем в качестве функции $F(x)$ в формуле (5.3.7) функцию

$$F(x) = a\ln(x/b)\,, \tag{5.3.16}$$

где a, $b > 0$ – действительные параметры. Конформный потенциал – это действительная часть аналитической функции $F(X)$ (5.3.8), поэтому

$$U(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) = \frac{a}{4}\ln\left(\frac{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}{b^4}\right)\,. \tag{5.3.17}$$

Для нахождения мировых линий, которые порождает потенциал (5.3.17), необходимо решить систему уравнений (5.1.16), которая в нашем конкретном случае принимает вид

$$\dot{\xi}^i = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^4}}{\dfrac{\partial U}{\partial \xi^i}}\lambda(\xi)\,, \qquad (5.3.18)$$

где $\lambda(\xi) \neq 0$ – некоторая скалярная функция. При соответствующем выборе $\lambda(\xi)$, уравнения перепишутся следующим образом:

$$\dot{\xi}^i = \xi^i\,. \qquad (5.3.19)$$

Введем переменную

$$x^0 = \frac{1}{4}(\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4)\,, \qquad (5.3.20)$$

которая в четырехмерном пространстве Бервальда-Моора играет ту же роль, что и координата x^0 в пространстве Минковского, тогда

$$\dot{x}^0 = x^0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\xi^i}{dx^0} = \frac{\xi^i}{x^0} \qquad \Rightarrow \qquad \xi^i = \xi^i_0 \cdot x^0\,, \qquad (5.3.21)$$

где ξ^i_0 – постоянные. Таким образом, все мировые линии – лучи, исходящие из начала координат (особой точки потенциала), причем движение материальных тел является равномерным и прямолинейным, поэтому для координат в "ортонормированном" базисе имеют место следующие формулы:

$$x^\mu = v^\mu x^0\,, \qquad \frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{x^\mu}{x^0}\,, \qquad (5.3.22)$$

где $\mu = 1,2,3$, а v^μ – действительные постоянные. Траектории движения, описываемые уравнениями (5.3.22), соответствуют материальным объектам, движение которых самосогласовано с конформным потенциалом (5.3.17).

Совместим наблюдателя с мировой линией $v^\mu = 0$ и будем вести отсчет времени начиная с некоторого момента t_0. Далее можно повторить те же рассуждения, что и в предыдущем разделе, считая, что скорость удаления материальных объектов $|v| = \dfrac{dr}{dt}$, где r – истинное пространственное расстояние. Тогда мы будем наблюдать *удаление* от нас материальных объектов с различными скоростями, зависящими от истинного пространственного расстояния до объекта. Предположим, что наблюдатели при обработке экспериментальных данных используют евклидовы расстояния в качестве истинных пространственных расстояний, то есть

$$r \simeq r_{ev} \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^2)^2}\,. \tag{5.3.23}$$

Тогда из формул (5.3.21) следует обычный закон Хаббла

$$\frac{dr}{dt} \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r\,, \tag{5.3.24}$$

и этот закон не зависит от пространственных направлений. Таким образом, закон Хаббла получен с коэффициентом Хаббла $H = \dfrac{1}{t_0}$, что вполне согласуется с формулой, которая получается для этого закона в космологической модели Эйнштейна – де Ситтера [21], где $H = \dfrac{2}{3t_0}$.

Если истинное пространственное расстояние в H_4 искать тем же способом, как это обычно делается в СТО и ОТО [18], то в результате получим [25]:

$$r \equiv r_d = |x^\alpha| + |x^\beta|\,; \qquad \text{причем} \qquad |x^\gamma| \le |x^\alpha|, |x^\beta|\,. \tag{5.3.25}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;\quad \alpha \ne \beta,\ \alpha \ne \gamma,\ \beta \ne \gamma$. В евклидовом пространстве гиперповерхность, определяемая уравнением

$$r_d = const\,, \tag{5.3.26}$$

является ромбододекаэдром [26]. Если предположить, что истинное трёхмерное пространственное расстояние определяется формулой (5.3.25), в этом случае закон Хаббла принимает вид

$$|v| \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r_d\,. \tag{5.3.27}$$

Если наши представления о пространстве остались евклидовыми, теоретически полученную формулу для закона Хаббла следует переписать следующим образом:

$$|v| \simeq \frac{r_d}{t_0 r_{ev}} \cdot r_{ev}\,. \tag{5.3.28}$$

Тогда коэффициент Хаббла определяется формулой

$$H = \frac{r_d}{t_0 r_{ev}} \tag{5.3.29}$$

и зависит от пространственных направлений, имея 12 максимумов, 6 минимумов и 8 локальных минимумов, причём

$$\frac{H_{max}}{H_{min}} = \sqrt{2}\,, \qquad \frac{H^{loc}_{max}}{H_{min}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\,. \tag{5.3.30}$$

Каждый минимум окружен четырьмя максимумами, а каждый локальный минимум – тремя максимумами.

Обе формулы (5.3.24) и (5.3.28) не будут противоречить друг другу, если предположить, что использовать геометрию Бервальда-Моора следует только на расстояниях "близким к размерам" Вселенной. Тогда при изменении расстояния до галактик от самых малых до самых больших, коэффициент Хаббла в логарифмической модели претерпевает изменения:

$$\frac{1}{t_0} \quad \xrightarrow{\quad H \quad} \quad \frac{r_d}{t_0 r_{ev}}\,, \tag{5.3.31}$$

причём появляется зависимость этого коэффициента от пространственных направлений.

Таким образом, дополнительная анизотропия в четырёхмерном пространстве-времени приводит к анизотропии в истинном трёхмерном пространстве. Астрономические данные [48] указывают на наличие анизотропии коэффициента Хаббла и позволяют иначе взглянуть и на другое устоявшееся и, по-видимому, ошибочное убеждение, а именно, на уверенность большинства физиков в применимости к релятивистским моделям реального физического Мира исключительно квадратичных метрик. Пространства же невырожденных поличисел P_n при $n > 2$ всегда обладают дополнительной анизотропией по сравнению с квадратичными пространствами той же размерности.

5.4 Трёхмерное евклидово пространство

Метрическая функция трёхмерного евклидова пространства в декартовой прямоугольной системе координат есть

$$L(dx^1, dx^2, dx^3) = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}\,, \tag{5.4.1}$$

обобщённые импульсы вычисляются по формуле

$$p_i = \frac{dx^i}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}} \tag{5.4.2}$$

и связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1 = 0\,, \tag{5.4.3}$$

поэтому

$$\Phi_2(p) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \,. \tag{5.4.4}$$

Метрическая функция пространства, конформно связанного с трёхмерным евклидовым пространством, есть

$$\tilde{L}(dx^1, dx^2, dx^3; x^1, x^2, x^3) = \kappa(x)\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}\,. \tag{5.4.5}$$

Обобщённые импульсы вычисляются согласно формуле

$$\tilde{p}_i = \kappa(x)\,\frac{dx^i}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}} \tag{5.4.6}$$

и связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_3^2 - \kappa^2(x) = 0\,. \tag{5.4.7}$$

Запишем для конформно связанного с трёхмерным евклидовым пространством канонические уравнения (2.3.26), выбрав $\lambda = \frac{1}{2}$, получим

$$\dot{x}^i = \tilde{p}_i\,, \qquad \dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial}{\partial x^i}\left[const - \frac{1}{2}\kappa^2(x)\right]\,. \tag{5.4.8}$$

Введём обозначения:

$$U(x) = m\left[const - \frac{1}{2}\kappa^2(x)\right]\,, \qquad U_0 = const \cdot m\,. \tag{5.4.9}$$

Здесь m – некая размерная постоянная. Тогда, исключая из системы канонических уравнений (5.4.8) величины $\tilde{p}_i$, имеем систему 3-х дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m\ddot{x}^i = -\frac{\partial}{\partial x^i}\,U(x)\,. \tag{5.4.10}$$

Если параметр эволюции можно было бы считать обыкновенным временем нерелятивистской классической механики, то есть галилеевым временем, то эти уравнения совпадают по форме с уравнениями Ньютона для движения нерелятивистской материальной частицы массой $m > 0$ в потенциальном поле с потенциалом $U(x)$ в трёхмерном евклидовом пространстве в декартовой прямоугольной системе координат.

Итак, если нам известен коэффициент растяжения-сжатия $\kappa(x)$, то с точностью до двух постоянных m и U_0 однозначно определен потенциал $U(x)$,

$$U(x) = U_0 - \frac{m}{2}\,\kappa^2(x)\,, \tag{5.4.11}$$

который позволяет записать для нахождения экстремалей в пространстве, конформно связанном с трёхмерным евклидовым пространством, уравнения Ньютона в предположении, что параметр эволюции есть время.

Рассмотрим обратную задачу: задан потенциал, отнесённый к массе, $\dfrac{1}{m}\,U(x)$, требуется найти конформно связанное с евклидовым пространство, экстремали которого были бы решениями соответствующих уравнений Ньютона.

Формально соотношение (5.4.11) легко разрешается относительно $\kappa(x) > 0$:

$$\kappa(x) = \sqrt{2\,\frac{U_0 - U(x)}{m}}\,. \tag{5.4.12}$$

Если потенциал $U(x)$ ограничен сверху, то есть $U(x) < const < +\infty$, то обратная задача имеет решение. Если же есть особые точки, при приближении к которым $U(x) \to +\infty$, то обратная задача также имеет решение, но соответствующее пространство, конформно связанное с евклидовым, будет иметь область или области, где финслерова геометрия не определена. Линейные размеры этих областей зависят от выбора величины постоянной U_0.

Ньютоновское гравитационное поле тяготения и кулоновское электростатическое поле притяжения и отталкивания, в которых потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию

$$r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \tag{5.4.13}$$

от центра, то есть

$$U(r) = \mp\frac{\alpha}{r}\,, \tag{5.4.14}$$

где $\alpha > 0$ – постоянная, приводят с к следующей формуле для коэффициента растяжения сжатия:

$$\kappa(x) = \sqrt{2\,\frac{U_0 \pm \dfrac{\alpha}{r}}{m}}\,. \tag{5.4.15}$$

Здесь и в предыдущей формуле верхний знак соответствует центральным силам притяжения, а нижний – силам отталкивания.

Для потенциала центрального поля притяжения (верхний знак) коэффициент растяжения-сжатия $\kappa(x)$ определяется без особенностей, а для потенциала центрального поля отталкивания (нижний знак) функция $\kappa(x)$ определена лишь в области

$$r > r_*\,, \qquad r_* \equiv \frac{\alpha}{U_0}\,. \tag{5.4.16}$$

Таким образом, силы отталкивания с потенциалом

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}$$

не могут увеличиваться до бесконечности, они ограничены неким радиусом действия r_*, и внутри сферы $r < r_*$ имеет место какая-то иная геометрия и иные силы, возможно, даже не силы отталкивания.

Итак, мы показали, что термин *"конформный потенциал"* имеет основания и в части *"потенциал"*, только надо иметь в виду, что в формулах (5.4.5) – (5.4.16) координаты x^i – это не координаты евклидового пространства, $\tilde{p}_i$ – это не импульсы в общепринятом понимании, а параметр эволюции, по которому происходит дифференцирование в формулах (5.4.8), (5.4.10) не есть, вообще говоря, галилеево время.

Если какое-то поле не определено, но фигурирует в метрической функции финслеровой геометрии, в частности поле коэффициента растяжения-сжатия, то согласно принципу самодостаточности финслеровой геометрии (см. раздел 1.8) такое поле должно быть найдено из требования экстремальности любого объёма финслерова пространства при условии нулевых вариаций поля на границе объёма, в данном случае любого объёма пространства, конформно связанного с трёхмерным евклидовым пространством.

Коэффициент растяжения-сжатия выражается через мировую функцию следующим образом:

$$\kappa(x) = \sqrt{\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2}\,, \qquad (5.4.17)$$

а лагранжиан –

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}. \qquad (5.4.18)$$

В силу этого уравнение поля для мировой функции таково:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial S_W}{\partial x^i}\right\} = 0\,. \qquad (5.4.19)$$

Решение этого уравнения, зависящее только от величины r (5.4.13) имеет вид (см. раздел 1.8):

$$S_W(r) = C_0 + C\,\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\,. \qquad (5.4.20)$$

Здесь C_0, C, r_0 – постоянные, среди которых лишь две независимые. Тогда коэффициент растяжения-сжатия равен

$$\kappa(x) = \frac{|C|}{r}\,. \tag{5.4.21}$$

Подставляя это выражение в формулу (5.4.11), получим соответствующий потенциал

$$U(x) = U_0 - \frac{m|C|^2}{2}\,\frac{1}{r^2}\,. \tag{5.4.22}$$

Глава 6

КВАДРАТИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой главе плоские квадратичные пространства взяты в качестве основы для построения конформно связанных с ними пространств и изучения последних на конкретных примерах применения понятия конформного потенциала.

6.1 Зависимость коэффициента Хаббла от расстояния

Рассмотрим пространство, конформно связанное с пространством Минковского, то есть пространство, в котором элемент длины определяется формулой

$$ds = \kappa(x)\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{6.1.1}$$

Коэффициент растяжения-сжатия $\kappa(x)$ выражается через Мировую функцию $S_W(x)$ по формуле

$$\kappa(x) = \sqrt{\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2}\,. \tag{6.1.2}$$

Мировая функция должна быть решением уравнения поля (1.8.68). Решим это уравнение в предположении, что функция S_W имеет вид

$$S_W(x^0, r) = S_0 e^{-\gamma x^0}\psi(r)\,, \tag{6.1.3}$$

где $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, а γ и S_0 – постоянные. Более просто записать уравнение поля для $S_W(x^0, r)$, если в элементе объема перейти от пространственных декартовых координат x^1, x^2, x^3 к сферическим координатам и проинтегрировать по сферическим углам; тогда, опуская постоянную, получим выражение для лагранжиана:

$$\mathfrak{L} = r^2 \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right]^2 , \tag{6.1.4}$$

а уравнение поля запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} r^2 \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial S_W}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} = 0 \, . \end{gathered} \tag{6.1.5}$$

Подставляя в это уравнение функцию $S_W(x^0, r)$ (6.1.3), получим

$$3\gamma^2 r^2 \psi \left[\gamma^2 \psi^2 - \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] - \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d\psi}{dr} \left[\gamma^2 \psi^2 - \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] \right\} = 0 \, . \tag{6.1.6}$$

Введем безразмерную переменную $\xi \equiv \gamma r$, тогда данное уравнение перепишется так:

$$3\xi^2 \psi \left[\psi^2 - \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 \right] - \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \left[\psi^2 - \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 \right] \right\} = 0 \, . \tag{6.1.7}$$

Так как это уравнение однородно по искомой функции, её удобно искать в виде

$$\psi(\xi) = \psi_0 \exp \left(\int\limits_0^\xi \varphi(\xi) d\xi \right) , \tag{6.1.8}$$

ψ_0 – постоянная, которая при составлении функции S_W перемножается с постоянной S_0 и которая в силу этого не является существенной, что позволяет положить её равной единице: $\psi_0 = 1$. Подставляя (6.1.8) в (6.1.7), имеем

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \varphi (1 - \varphi^2) \right] - 3\xi^2 (1 - \varphi^2)^2 = 0 \, , \tag{6.1.9}$$

или

$$\xi (1 - 3\varphi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} + 2\varphi (1 - \varphi^2) - 3\xi (1 - \varphi^2)^2 = 0 \, . \tag{6.1.10}$$

В области $\xi \ll 1$ будем искать решение в виде степенного ряда

$$\varphi \simeq A\xi + B\xi^2 + C\xi^3 + O(\xi^4)\,. \tag{6.1.11}$$

Подставим это разложение в уравнение (6.1.10), приведем подобные и получим

$$\varphi \simeq \xi - \frac{1}{5}\xi^3 + O(\xi^4)\,. \tag{6.1.12}$$

Движение материальных объектов, согласованных с полем $S_W(x^0, r)$, или $\kappa(x^0, r)$ происходит по экстремалям пространства с элементом длины

$$ds = \kappa(x^0, r)\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \tag{6.1.13}$$

и тангенциальным уравнением индикатрисы

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - \kappa^2(x^0, r) = 0\,. \tag{6.1.14}$$

Для поля S_W (6.1.3), (6.1.8) коэффициент расширения-сжатия вычисляется по формуле

$$\kappa(x^0, r) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2} = \gamma \cdot \sqrt{1 - \varphi^2} \cdot S_W(x^0, r)\,. \tag{6.1.15}$$

Из этой формулы следует, что $|\varphi| < 1$. Уравнения движения в данном случае принимают вид

$$\dot{x}^0 = 2\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\lambda = -2\,\gamma S_W \lambda\,, \quad \dot{x}^\mu = -2\frac{\partial S_W}{\partial x^\mu}\lambda = -2\,\gamma S_W \varphi(\gamma r)\frac{x^\mu}{r}\lambda\,, \tag{6.1.16}$$

где точка означает полную производную по некоторому параметру эволюции τ, а произвольная функция $\lambda \neq 0$. Тогда

$$\frac{dr}{dx^0} = \varphi(\gamma r) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dr}{dt} = c\varphi(\gamma r)\,. \tag{6.1.17}$$

Так как $|\varphi| < 1$, то

$$\left|\frac{dr}{dx^0}\right| < 1 \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{dr}{dt}\right| < c\,.$$

Посмотрим, как ведет себя скорость удаления материального объекта от начала пространственных координат в области $\xi \ll 1$, для этого подставим (6.1.12) в полученную формулу:

$$\frac{dr}{dt} = c\gamma\left(1 - \frac{1}{5}\gamma^2 r^2\right) \cdot r\,. \tag{6.1.18}$$

Если обозначить постоянную Хаббла через H_0, то полученная формула дает нам хорошее выполнение закона Хаббла при $\gamma r < \frac{1}{10}$, причем $H_0 = c\gamma$, и тенденцию того, как первоначально должен изменяться коэффициент Хаббла $H(r)$ с увеличением расстояния от центра:

$$\frac{dr}{dt} = H(r) \cdot r \,, \qquad H(r) = H_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{5}\left(\frac{H_0}{c}\right)^2 \cdot r^2\right] . \tag{6.1.19}$$

В области $\xi \ll 1$ коэффициент Хаббла уменьшается с увеличением расстояния от начала координат по квадратичному закону.

Для того, чтобы сказать что-то о размерах Вселенной и зависимости $H(r)$ во всей области возможных значений переменной r, необходимо вначале исследовать поведение решения $\varphi(\xi)$ уравнения (6.1.10), которое (решение) при $\xi \to 0$ имеет вид (6.1.12). Ни аналитически, ни численно нам не удалось этого сделать, так как при приближении к значению $\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ поведение такого решения становится весьма сложным (неустойчивым). Если предположить, что решение уравнения (6.1.10) будет получено и исследовано, то общий вид величины $H(r)$ можно будет записать следующим образом:

$$H(r) = H_0 \cdot \left[\frac{\varphi\left(\frac{H_0}{c} r\right)}{\frac{H_0}{c} r}\right] . \tag{6.1.20}$$

Мировые линии материальных объектов, движение которых согласовано с Мировой функцией S_W (6.1.3), в пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 будут определяться уравнениями

$$\frac{dx^\mu}{dx^0} = \varphi(\gamma r)\,\frac{x^\mu}{r}\,,$$

то есть движение происходит по лучам, исходящим из начала координат, а значит, материальные объекты движутся прямолинейно, но движение является неравномерным.

Так как пространство с элементом длины (6.1.1) является псевдоримановым с метрическим тензором

$$g_{ij}(x^0, r) = \kappa^2(x^0, r) \cdot \overset{o}{g}_{ij}\,, \tag{6.1.21}$$

где $\overset{o}{g}_{ij}$ – метрический тензор пространства Минковского и

$$\kappa(x^0, r) = \gamma S \sqrt{1 - \varphi^2}\,, \tag{6.1.22}$$

то для него можно найти тензор кривизны и его свертки, а также непосредственно из уравнений Эйнштейна можно получить тензор энергии-импульса материи T_{km}, который фигурирует в уравнениях Эйнштейна и который соответствует пространству с метрическим тензором (6.1.21). Заметим, что уравнения гравитационного поля Эйнштейна, конечно, при таком тензоре энергии-импульса материи выполняются автоматически, но с тензором T_{km} нельзя, вообще говоря, связывать законы сохранения энергии и импульса.

Введем удобное обозначение

$$a = \ln(\kappa^2/const)\,. \tag{6.1.23}$$

Тогда, используя известные классические формулы, получим выражения: для объекта связности –

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x^l}\delta^i_k + \frac{\partial a}{\partial x^k}\delta^i_l - \overset{o}{g}{}^{is}\,\frac{\partial a}{\partial x^s}\,\overset{o}{g}_{kl}\right)\,, \tag{6.1.24}$$

тензора кривизны –

$$R^i_{klm} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^k}\,\delta^i_m - \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m}\,\delta^i_l - \overset{o}{g}{}^{is}\,\frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^s}\,\overset{o}{g}_{km} + \overset{o}{g}{}^{is}\,\frac{\partial^2 a}{\partial x^m \partial x^s}\,\overset{o}{g}_{kl}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{\partial a}{\partial x^m}\frac{\partial a}{\partial x^k}\,\delta^i_l - \frac{\partial a}{\partial x^l}\frac{\partial a}{\partial x^k}\,\delta^i_m - \overset{o}{g}{}^{ns}\,\frac{\partial a}{\partial x^n}\frac{\partial a}{\partial x^s}\,\delta^i_l\,\overset{o}{g}_{km} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial a}{\partial x^l}\,\overset{o}{g}_{km}\overset{o}{g}{}^{is}\,\frac{\partial a}{\partial x^s} + \overset{o}{g}{}^{ns}\,\frac{\partial a}{\partial x^n}\frac{\partial a}{\partial x^s}\,\delta^i_m\,\overset{o}{g}_{kl} - \frac{\partial a}{\partial x^m}\,\overset{o}{g}_{kl}\overset{o}{g}{}^{is}\,\frac{\partial a}{\partial x^s}\right)\,, \tag{6.1.25}$$

тензора Риччи –

$$R_{km} \equiv R^l_{klm} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-2\frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m} - \overset{o}{g}{}^{ns}\,\frac{\partial^2 a}{\partial x^n \partial x^s}\,\overset{o}{g}_{km} + \frac{\partial a}{\partial x^k}\frac{\partial a}{\partial x^m} - \overset{o}{g}{}^{ns}\,\frac{\partial a}{\partial x^n}\frac{\partial a}{\partial x^s}\,\overset{o}{g}_{km}\right)\,, \tag{6.1.26}$$

скалярной кривизны пространства –

$$R \equiv g^{km}R_{km} = \frac{1}{\kappa^2}\,\overset{o}{g}{}^{km}\,R_{km} = -\frac{3}{\kappa^2}\left(2\,\overset{o}{g}{}^{km}\,\frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^m} + \overset{o}{g}{}^{km}\,\frac{\partial a}{\partial x^k}\frac{\partial a}{\partial x^m}\right)\,, \tag{6.1.27}$$

тензора энергии-импульса материи –

$$T_{km} = \frac{c^4}{8\pi k}\left(R_{km} - \frac{1}{2}\kappa^2 \overset{o}{g}_{km} R\right) , \tag{6.1.28}$$

где k – гравитационная постоянная, тогда

$$T \equiv g^{km}T_{km} = \frac{1}{\kappa^2} \overset{o}{g}{}^{km} T_{km} = -\frac{c^4}{8\pi k}R\,. \tag{6.1.29}$$

Для лагранжиана $\mathfrak{L}$ (6.1.4) независимо можно получить полный тензор энергии-импульса $\hat{T}_{km}$

$$\begin{gathered}\hat{T}^k_m = const\cdot\left[\frac{\partial S}{\partial x^m}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \frac{\partial S}{\partial x^k}} - \delta^k_m \mathfrak{L}\right] = \\ = const\cdot\left[4\,\overset{o}{g}{}^{ks}\,\frac{\partial S}{\partial x^s}\frac{\partial S}{\partial x^m}\left(\overset{o}{g}{}^{rs}\,\frac{\partial S}{\partial x^r}\frac{\partial S}{\partial x^s}\right) - \delta^k_m\left(\overset{o}{g}{}^{rs}\,\frac{\partial S}{\partial x^r}\frac{\partial S}{\partial x^s}\right)^2\right] ,\end{gathered} \tag{6.1.30}$$

свернув этот тензор по имеющимся двум индексам, получим

$$\hat{T}^k_k \equiv 0\,. \tag{6.1.31}$$

6.2 Стационарное поле коэффициента расширения-сжатия

Как и в предыдущем разделе рассмотрим пространство, конформно связанное с пространством Минковского, сохранив требование зависимости от пространственных координат только через комплекс $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, поэтому все общие формулы (6.1.1) – (6.1.5), кроме (6.1.3), раздела 6.1 остаются справедливы, и мы ими воспользуемся.

Стационарное пространственно сферически симметричное поле $\kappa(x)$ можно получить, если искать решение уравнения (6.1.5) в виде

$$S_W = p_0 x^0 - \psi(r)\,, \tag{6.2.1}$$

где $p_0 > 0$, а

$$r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\,; \tag{6.2.2}$$

тогда для неизвестной функции ψ получим уравнение

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{d\psi}{dr}\left[p_0^2 - \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2\right]\right\} = 0\,. \tag{6.2.3}$$

Интегрирование по r приводит к соотношению

$$\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}\left[1-\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right] = \pm\,\alpha^2\,, \tag{6.2.4}$$

$\xi \equiv p_0 r$, $\alpha > 0$ – постоянная, а знак выберем из неких дополнительных требований.

Отметим, что из условия

$$\kappa^2 = p_0^2 - \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{d\psi}{d\xi}\right| < 1\,. \tag{6.2.5}$$

Уравнения, которые определяют нормальную конгруэнцию экстремалей, соответствующую функции $S_W(x)$, имеют следующий вид:

$$\dot{x}^0 = 2p_0 \cdot \lambda\,, \qquad\qquad \dot{x}^\mu = 2\frac{d\psi}{dr}\frac{x^\mu}{r}\cdot\lambda\,, \tag{6.2.6}$$

$\mu = 1, 2, 3$; а уравнение для радиуса – вид:

$$\frac{dr}{dx^0} = \frac{1}{p_0}\frac{d\psi}{dr}\,. \tag{6.2.7}$$

Экстремали, определяемые уравнениями (6.2.6), можно рассматривать как мировые линии неких частиц, "формирующих" (определяющих) поле $\kappa(x)$ и движущихся по лучам, исходящих из начала координат. Условие (6.2.5) дает ограничение на скорость таких частиц: их скорость всегда меньше скорости света. Продифференцируем последнюю формулу по x^0, получим

$$\frac{d^2\,r}{(dx^0)^2} = \frac{1}{p_0^2}\,\frac{d\psi}{dr}\,\frac{d^2\psi}{dr^2}\,. \tag{6.2.8}$$

Таким образом, для того, чтобы поле $\kappa(x)$ носило характер притяжения к началу пространственных координат с увеличением модуля скорости при приближении к центру, необходимо, начиная хотя бы с r_* $(r > r_*)$, выполнение условий:

$$-1 < \frac{d\psi}{dr} < 0\,, \qquad\qquad \frac{d^2\psi}{dr^2} > 0\,. \tag{6.2.9}$$

Из анализа уравнения (6.2.4) следует, что реализовать условия (6.2.9) возможно только при выборе нижнего знака в формуле (6.2.4). Выбирая нижний знак и решая кубическое уравнение, получим

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\right]\,. \tag{6.2.10}$$

Области определения и значений функции в правой части уравнения (6.2.10) задаются следующими неравенствами:

$$0 < \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2} \leq 1\,, \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{d\psi}{d\xi} < 0\,, \tag{6.2.11}$$

причем при изменении ξ от $\xi_0 \equiv \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\cdot\alpha$ до $+\infty$ функция $\frac{d\psi}{d\xi}$ монотонно возрастает от $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ до (-0). Таким образом, максимально большая скорость, которой достигают частицы, "формирующие" поле $\kappa(x)$, равна $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot c = 0.5773502690 \cdot c$, а значит, движение материальных объектов в нашей задаче является релятивистским. Эта максимально большая скорость частиц, "формирующих" поле, достигается именно на границе "дыры", радиус которой равен

$$r_0 \equiv \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha}{p_0}}$$

и внутри которой поля $\kappa(x)$, $S_W(x)$ не определены.

Если $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2} \ll 1}$, то функцию (6.2.10) можно заменить простым выражением

$$\frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{\alpha^2}{\xi^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^4}{\xi^4}\right)\,. \tag{6.2.12}$$

Это выражение качественно работает и в остальной области определения функции (6.2.10), причем самое большое отклонение имеет место в точке $\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2} = 1$: точное значение равно $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, а приближенная формула (6.2.12) дает $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Правда, производная от правой части (6.2.10) на границе "дыры" обращается в $+\infty$, а производная от правой части (6.2.12) на границе "дыры" имеет конечное значение.

Если $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2} \simeq 1}$, то функцию (6.2.10) можно заменить простым выражением

$$\frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}} + \mathcal{O}\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\,. \tag{6.2.13}$$

Итак, найдено стационарное сферически симметричное поле $\kappa(x)$,

$$\kappa(r) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2}\,, \tag{6.2.14}$$

где производная $\dfrac{d\psi}{d\xi}$ определяется формулой (6.2.10). Это поле является полем притяжения. Оно определено во всем пространстве, кроме области $r < r_0$.

В вышеприведенных формулах явно выделяется удобная переменная ϱ,

$$\varrho \equiv \frac{r}{r_0}\,, \qquad \text{где} \qquad r_0 \equiv \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha}{p_0}}\,, \qquad 1 \le \varrho < +\infty\,. \tag{6.2.15}$$

Используя эту переменную, перепишем ряд последних формул:

$$1 \le \varrho < +\infty\,, \qquad \frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]\,, \tag{6.2.16}$$

$$1 \ll \varrho\,, \qquad \frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{2}{3\sqrt{3}}\,\frac{1}{\varrho^2}\,, \tag{6.2.17}$$

$$\varrho \simeq 1\,, \qquad \frac{d\psi}{d\xi} \simeq -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{\varrho^2}}\,. \tag{6.2.18}$$

Постановка задачи на собственные значения

Запишем уравнение (1.6.7) в сферических пространственных координатах r, ϑ, φ, приняв, что поле $\kappa(x)$ задаётся выражением (6.2.14), а волновую функцию будем искать в виде [19]:

$$\Psi = \frac{1}{\kappa^2}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{E}{c}\,x^0\right)R(r)\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\,, \tag{6.2.19}$$

$l = 0, 1, 2 \ldots\,, \quad m = -l, \ldots, l$ – квантовые числа момента количества движения. Подставим (6.2.19) в уравнение (1.6.7), получим

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\frac{E^2}{\hbar^2c^2} - \frac{p_0^2}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{p_0^2}{\hbar^2}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right]R = 0\,. \tag{6.2.20}$$

Перейдем к безразмерному радиусу ϱ (6.2.15), тогда уравнение для радиальной части функции состояния запишется следующим образом:

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2}+\frac{2}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho}+\left[\frac{E^2r_0^2}{\hbar^2c^2}-\frac{p_0^2r_0^2}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{\varrho^2}+\frac{p_0^2r_0^2}{\hbar^2}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right]R=0\,. \qquad (6.2.21)$$

Введем обозначения для двух безразмерных величин:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{E}\equiv\frac{E^2r_0^2}{\hbar^2c^2}-\frac{p_0^2r_0^2}{\hbar^2}\equiv\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\hbar^2}\right)\cdot\left(\frac{E^2}{c^2p_0^2}-1\right)\,,\\ \mu\equiv\tfrac{4}{3}\frac{p_0^2r_0^2}{\hbar^2}\equiv\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\alpha^2}{\hbar^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (6.2.22)$$

– и перепишем уравнение (6.2.21):

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2}+\frac{2}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho}+\left\{\mathcal{E}-\frac{l(l+1)}{\varrho^2}+\mu\cos^2\left[\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]\right\}R=0\,. \quad (6.2.23)$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением Шредингера [19] для радиальной части волновой функции нерелятивистской частицы, находящейся в центрально-симметричном поле притяжения с потенциалом, который (с точностью до постоянного множителя) на бесконечности ведет себя как

$$U\simeq-\frac{\mu}{9}\frac{1}{\varrho^4} \qquad (6.2.24)$$

и монотонно убывает до значения

$$U_{min}=-\frac{\mu}{4} \qquad \text{при} \qquad \varrho\to 1\,, \qquad (6.2.25)$$

то есть на границе "дыры". Так как при $\varrho<1$ никакого поля нет, что, в каком-то смысле, соответствует бесконечно глубокой потенциальной яме, то для всех волновых функций необходимо выполнение граничного условия

$$R(1)=0\,. \qquad (6.2.26)$$

Таким образом, можно ожидать (это следует из общей теории [19]) конечного числа (или ни одного) локализованных (связанных) состояний, которые обязательно должны иметь дискретный спектр отрицательных значений параметра $\mathcal{E}$.

Так как все неквантовые частицы, которые, в каком-то смысле, порождают поле $\kappa(x)$, движутся по траекториям с нулевым моментом количества движения, то именно волновые функции с $l = 0$, на наш взгляд, будут отвечать квантово-механической задаче в самосогласованном поле. Решения с $l \neq 0$ и $\mathcal{E} < 0$ можно рассматривать как захват самосогласованным полем некой "внешней" частицы или как локализованное возмущение самосогласованного поля.

Если искать решение уравнения (6.2.23) в виде

$$R(\varrho) = \frac{y(\varrho)}{\varrho}\,, \tag{6.2.27}$$

то получим для неизвестной функции $y(\varrho)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2} + \left\{\mathcal{E} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} + \mu\cos^2\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]\right\} y = 0\,. \tag{6.2.28}$$

Из этого уравнения для $\mathcal{E} < 0$ с учетом формулы (6.2.24) следует, что при $\varrho \to \infty$ функция $y(\varrho)$ связанного состояния ведет себя следующим образом:

$$y = const' \cdot \rho^{const} \exp\left(-\sqrt{-\mathcal{E}}\,\varrho\right)\,, \tag{6.2.29}$$

то есть стремится экспоненциально к нулю при $\varrho \to \infty$. Граничное же условие (6.2.26) заменяется условием

$$y(1) = 0\,. \tag{6.2.30}$$

Предположим, что задача на собственные значения (6.2.28) – (6.2.30) решена и найден спектр собственных значений:

$$\mathcal{E} = -\sigma_0^2,\ -\sigma_1^2,\ \ldots\ -\sigma_{k-1}^2\,, \qquad \sigma_i \in \{\sigma_0,\ \sigma_1,\ \ldots\ \sigma_{k-1}\}\,. \tag{6.2.31}$$

Тогда из формул (6.2.22) получим значения величины

$$\frac{E_i}{cp_0} = \sqrt{1 - \frac{4\sigma_i^2}{3\mu}}\,. \tag{6.2.32}$$

Воспользовавшись формулой (6.2.17), можно заменить точный потенциал на качественно похожий, тогда уравнение (6.2.28) несколько упростится:

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2} + \left\{\mathcal{E} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} + \frac{\mu_{eff}}{\varrho^4}\right\} y = 0\,, \tag{6.2.33}$$

где

$$\mu_{eff} = \frac{1}{4}\mu\,, \tag{6.2.34}$$

если мы хотим получить точную глубину потенциала на границе "дыры" $\varrho = 1$, и

$$\mu_{eff} = \frac{1}{9}\mu\,, \tag{6.2.35}$$

если мы хотим получить точное поведение потенциала на бесконечности. В общем случае аналитическое решение уравнения (6.2.33) не известно, но при $\mathcal{E} = 0$ и $l = 0$ такое решение представлено в справочнике [53] по обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$y = C\,\rho\,\sin\left(\frac{\sqrt{\mu_{eff}}}{\varrho} + \varphi_0\right)\,, \tag{6.2.36}$$

где C, φ_0 – постоянные интегрирования. Это решение не является локальным ни при каких значениях параметров, но если все же формально потребовать выполнение граничных условий

$$R(1) = 0\,, \qquad R(+\infty) = 0\,, \tag{6.2.37}$$

то получим

$$\varphi_0 = 0\,, \qquad \mu_{eff} = \pi^2 m^2\,; \qquad m = 1, 2, 3, ... \tag{6.2.38}$$

Даже при $l = 0$ нам не удалось точно решить задачу (6.2.28) – (6.2.30) на собственные значения σ_i, и поэтому пришлось применять приближенный и численный методы.

Квазиклассическое приближение

Так как формально уравнение (6.2.23) совпадает с уравнением Шредингера [19] для радиальной части волновой функции нерелятивистской частицы, находящейся в центрально-симметричном поле притяжения, то для решения задачи (6.2.28) – (6.2.30) на собственные значения σ_i могут быть применены те же методы, в частности, квазиклассический подход, хотя бы для качественного "описания" ожидаемых точных собственных значений.

С учетом того, что точка $\varrho = 1$ не является точкой поворота и нас интересуют собственные значения самосогласованной задачи, правило квантования Бора для

$$\frac{E^2}{c^2} - p_0^2 < 0 \qquad \text{и} \qquad l = 0 \tag{6.2.39}$$

записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\hbar}\int\limits_{r_0}^{r_*}\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - p_0^2 + p_0^2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2}dr = \pi\left(n + \frac{3}{4}\right)\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{6.2.40}$$

Здесь r_0 (6.2.15) – граница "дыры", а r_* – корень уравнения

$$\frac{E^2}{c^2} - p_0^2 + p_0^2 \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2 = 0 \,. \tag{6.2.41}$$

Перейдем в формуле (6.2.40) от интегрирования по переменной r к интегрированию по переменной ϱ (6.2.15), получим

$$\int\limits_1^{\varrho_*} \sqrt{\mathcal{E} + \mu \cos^2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]} \; d\varrho = \pi \left(n + \frac{3}{4}\right) \,, \tag{6.2.42}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, ...$ Разделим левую и правую части на $\sqrt{\mu}$, введем обозначение

$$-\frac{\mathcal{E}}{\mu} \equiv \lambda^2 \tag{6.2.43}$$

и перепишем формулу (6.2.42):

$$\int\limits_1^{\varrho_*} \sqrt{-\lambda^2 + \cos^2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right]} \; d\varrho = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left(n + \frac{3}{4}\right) \,, \tag{6.2.44}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, ...$, а

$$\varrho_* = \frac{1}{\sqrt{\cos(3 \arccos \lambda - \pi)}} \,, \qquad 1 < \varrho_* < +\infty \,. \tag{6.2.45}$$

Безразмерные энергии связанных состояний будут выражаться через собственные значения $\lambda_i \in \{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{k-1}\}$ следующим образом:

$$\frac{E_i}{c p_0} = \sqrt{1 - \frac{4}{3} \lambda_i^2} \,. \tag{6.2.46}$$

Так как $1 < \varrho_* < \infty$ находится как корень уравнения

$$-\lambda^2 + \cos^2 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)\right] = 0 \,,$$

из этого следует, что

$$0 < \lambda_i < \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 1 > \frac{E_i}{c p_0} > \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0.81649658 \,. \tag{6.2.47}$$

Обозначим интеграл в левой части формулы (6.2.44) как $F(\lambda)$, тогда формула (6.2.44) перепишется следующим образом:

$$F(\lambda) = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\left(n+\frac{3}{4}\right), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots .$$

Заметим, что при $\lambda \neq 0$, $F(\lambda) < F(0)$, причем интеграл $F(0)$ сходится и равен $F(0) \simeq 0,34843550$, поэтому, если параметр μ задан (фиксирован), то для связанных состояний

$$F(0) > \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\left(n+\frac{3}{4}\right), \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

и число связанных состояний k определяется неравенством

$$k < b \equiv \frac{F(0)\sqrt{\mu}}{\pi} + \frac{1}{4}, \tag{6.2.48}$$

то есть, если b – целое, тогда $k = b - 1$, если b – не целое, то k – целая часть числа b. Если же

$$\frac{3}{4} \geq \frac{F(0)\sqrt{\mu}}{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \mu \leq \left[\frac{3\pi}{4F(0)}\right]^2 \simeq 45,7275\ ,$$

локализованные состояния отсутствуют. Можно сказать, что чем больше μ, тем более плотно располагаются значения $\dfrac{E_i}{cp_0}$, относящиеся к локализованным состояниям, на отрезке $\left[1; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.

Так как задача самосогласованная, то должен существовать способ каким-то образам определить параметр μ в рамках задачи на собственные значения. Можно предложить минимум две гипотезы:

1) возникновение нового связанного (локализованного) состояния;

2) состояние $\lambda = 0$ является квазисвязанным и квазиклассическим без точек поворота.

Возникновение нового локализованного состояния

Будем предполагать, что параметр μ имеет дискретный спектр значений, причем каждое значение соответствует возникновению нового локализованного состояния, тогда из формулы (6.2.44) получим этот спектр значений:

$$\mu_k = \left[\frac{\pi\left(k+\frac{3}{4}\right)}{F(0)}\right]^2, \qquad k = 1, 2, 3, \dots . \tag{6.2.49}$$

Уравнение (6.2.44) для определения λ_i в этом случае принимает вид:

$$\frac{F(\lambda)}{F(0)} = \frac{n+\frac{3}{4}}{k+\frac{3}{4}} < 1\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, ..., (k-1)\,; \quad k = 1, 2, 3.... \tag{6.2.50}$$

Число связанных (локализованных) состояний равно k.

Если $k = 1$ существует только одно локализованное состояние $n = 0$ при этом $\dfrac{n+\frac{3}{4}}{k+\frac{3}{4}} = \dfrac{3}{7}$, численный расчет дает

$$\lambda_0 \simeq 0,0871\,, \qquad \frac{E_0}{cp_0} \simeq 0,9949\,. \tag{6.2.51}$$

При $k = 2$ существует два локализованных состояния $n = 0$ с $\dfrac{n+\frac{3}{4}}{k+\frac{3}{4}} = \dfrac{3}{11}$ и $n = 1$ с $\dfrac{n+\frac{3}{4}}{k+\frac{3}{4}} = \dfrac{7}{11}$, при этом численный расчет дает

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_0 \simeq 0,1499\,, & \dfrac{E_0}{cp_0} \simeq 0,9849\,, \\ \lambda_1 \simeq 0,003397\,, & \dfrac{E_1}{cp_0} \simeq 0,9992\,, \end{array}\right\} \qquad \frac{E_0}{E_1} \simeq 0.9857\,. \tag{6.2.52}$$

Квазисвязанное квазиклассическое состояние $\lambda = 0$ без точек поворота

Выше было показано, что для упрощенного потенциала, который качественно описывает точный потенциал, имеет место уравнение (6.2.33). При требовании существования квазилокализованного состояние $\mathcal{E} = 0$, $l = 0$ с граничными условиями (6.2.37) был получен спектр значений (6.2.38) для параметра μ_{eff}. Для того чтобы получить такой спектр значений с помощью квантования Бора, отметим отсутствие точек поворота для такого состояния, поэтому

$$\sqrt{\mu_{eff}} \int\limits_1^\infty \frac{1}{\varrho^2}\, d\varrho = \pi m\,, \qquad m = 1, 2, 3, ... \tag{6.2.53}$$

А так как

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{\varrho^2}\, d\varrho = 1,$$

квантование по правилу Бора без точек поворота совпадает с точным квантованием (6.2.38). Поэтому в случае точного потенциала имеем

$$\sqrt{\mu_k} = \frac{\pi k}{F(0)}\,, \qquad k = 1, 2, 3, ... \tag{6.2.54}$$

и

$$\frac{F(\lambda)}{F(0)} = \frac{n + \frac{3}{4}}{k} < 1\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, ..., (k-1)\,; \quad k = 1, 2, 3.... \tag{6.2.55}$$

При этом k – число связанных состояний.

При $k = 1$ существует только одно локализованное состояние $n = 0$ при этом $\dfrac{n + \frac{3}{4}}{k} = \dfrac{3}{4}$, численный расчет дает

$$\lambda_0 \simeq 0,015923\,, \qquad \frac{E_0}{cp_0} \simeq 0,99987\,. \tag{6.2.56}$$

При $k = 2$ существует два локализованных состояния $n = 0$ с $\dfrac{n + \frac{3}{4}}{k} = \dfrac{3}{8}$ и $n = 1$ с $\dfrac{n + \frac{3}{4}}{k} = \dfrac{7}{8}$, при этом численный расчет дает

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_0 \simeq 0,10592\,, & \dfrac{E_0}{cp_0} \simeq 0,99249\,, \\ \lambda_1 \simeq 0,003966\,, & \dfrac{E_1}{cp_0} \simeq 0,9999895\,, \end{array}\right\} \quad \frac{E_0}{E_1} \simeq 0,992503\,. \tag{6.2.57}$$

Глава 7

НЕКВАДРАТИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой главе именно неквадратичные пространства взяты в качестве основы для построения конформно связанных с ними пространств и изучения последних на конкретных примерах в рамках теории конформного потенциала. В разделах 7.1 – 7.3 исходным пространством выбрано плоское пространство H_4. Как известно, оно обладает метрикой Бервальда-Моора. Разделы 7.2 и 7.3 соответствуют разделам 6.1 и 6.2 предыдущей главы.

7.1 Пространство H_4

Элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством H_4, в специальном изотропном базисе с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ имеет вид:

$$ds = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4} \,. \tag{7.1.1}$$

Здесь $\kappa(\xi) > 0$ – скалярная функция. Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4}\kappa(\xi) \frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i} \,. \tag{7.1.2}$$

Если $\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4$ – координаты касательного центроаффинного пространства в точке $M(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ основного пространства, то уравнение индикатрисы запишется

$$\eta^1 \eta^2 \eta^3 \eta^4 = \frac{1}{\kappa^4(\xi)} \,, \tag{7.1.3}$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1 p_2 p_3 p_4 - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0 \,. \tag{7.1.4}$$

Тогда функция S, определяющая нормальную конгруэнцию геодезических, удовлетворяет следующему нелинейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^3}\frac{\partial S}{\partial \xi^4} = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}\,. \tag{7.1.5}$$

Предположим, что поле коэффициента растяжения-сжатия не задано. В этом случае оно должно быть найдено из принципа экстремальности любого объёма финслерова пространства (см. раздел 1.8). Из формулы (7.1.3) следует, что

$$\left(V_{ind}\right)_{ev} = const \cdot \frac{1}{\kappa^4}\,, \tag{7.1.6}$$

а значит, лагранжиан для скалярного поля S_W, через которое поле коэффициента растяжения-сжатия выражается по формуле

$$\kappa(\xi) = \sqrt[4]{\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}}\,,$$

запишется следующим образом:

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\,. \tag{7.1.7}$$

Соответственно уравнение поля имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi^3}\left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi^4}\left(\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\right) = 0\,.\end{gathered} \tag{7.1.8}$$

Любая функция, зависящая не от всех координат $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ удовлетворяет этому уравнению, но не подходит в качестве S_W, так как в этом случае $\kappa(\xi) \equiv 0$. Любая линейная комбинация компонент аналитической функции переменной H_4 также является решением уравнения (7.1.8).

Пусть поле S_W зависит только от одной переменной

$$s = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}\,, \tag{7.1.9}$$

Подставляя $S(s)$ в уравнение поля (7.1.8) и используя формулу

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^i} = \frac{1}{4}\frac{s}{\xi^i}\,, \tag{7.1.10}$$

получим

$$\frac{d}{ds}\left(s\frac{dS}{ds}\right)=0\,. \tag{7.1.11}$$

Это же уравнение можно получить белее просто, если записать элемент объема

$$dV=\mathfrak{L}\,d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4\,, \tag{7.1.12}$$

выделив переменную s и три угловые переменные, а затем "проинтегрировать" по углам:

$$dV_s=s^3\left(\frac{dS}{ds}\right)^4 ds\,. \tag{7.1.13}$$

Интегрируя уравнение (7.1.11), получим

$$S(s)=S_0+A\ln\frac{s}{s_0}\,, \tag{7.1.14}$$

где S_0, s_0, A – постоянные интегрирования, из которых лишь две являются независимыми. Тогда коэффициент растяжения-сжатия κ определяется формулой

$$\kappa=\frac{|A|}{s}\,. \tag{7.1.15}$$

Интересно сравнить последние две формулы с формулами (1.8.43), (1.8.44) для n-мерного евклидового пространства и с формулами (1.8.60), (1.8.61) для n-мерного псевдоевклидового пространства.

Найдем траектории движения материальных частиц, формирующих пространство, конформно связанное с четырехмерным пространством Бервальда-Моора, если функция S_W, определяющая конгруэнцию "геодезических", имеет вид (7.1.14), то есть коэффициент растяжения-сжатия определяется формулой (7.1.15). Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\dot{\xi}^i=\frac{\dfrac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\dfrac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\dfrac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\dfrac{\partial S_W}{\partial\xi^4}}{\dfrac{\partial S_W}{\partial\xi^i}}\,\lambda(\xi)\,, \tag{7.1.16}$$

где $\lambda(\xi)\neq 0$ – некоторая скалярная функция. С учетом формулы (7.1.10) и при соответствующем выборе $\lambda(\xi)$ уравнения движения принимают более простой вид

$$\dot{\xi}^i=\xi^i\,. \tag{7.1.17}$$

Введем переменную

$$x^0=\frac{1}{4}\left(\xi^1+\xi^2+\xi^3+\xi^4\right)\,, \tag{7.1.18}$$

которая в четырехмерном пространстве Бервальда-Моора играет ту же роль, что и координата x^0 в пространстве Минковского, тогда

$$\frac{d\xi^i}{dx^0} = \frac{\xi^i}{x^0} \qquad \Rightarrow \qquad \xi^i = v_0^i \cdot x^0\,, \tag{7.1.19}$$

где v_0^i – постоянные. Таким образом, все траектории движения – прямые линии, проходящие через начало координат, причем движение материальных тел является равномерным и прямолинейным относительно наблюдателя, соответствующего мировой линии, являющейся временно́й координатной осью x^0.

Пространство Минковского x^0, x^1, x^2, x^3 и пространство Бервальда-Моора в координатах, соответствующих специальному "ортонормированному" финслеровому базису, экспериментально не различимы, если измерения производятся с точностью до вторых степеней отношений компонент пространственных скоростей к скорости света включительно. В силу этого вопрос о том, какова геометрия микромира, где работает квантовая механика, и какова геометрия мегамира, где, как считается, работает ОТО, остается, вообще говоря, открытым. Вполне возможно, что микромир и мегамир ближе к пространству Бервальда-Моора, а макромир остается за пространством Минковского с группой симметрии Лоренца. Это вполне соответствует как гипотезе Павлова [28] – [30] о физической значимости алгебры поличисел H_4, так и гипотезе автора [39] (см. раздел 1.7) о том, что физическому Миру соответствует несколько качественно различных геометрий, или некоторый класс геометрий.

Пространство $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора, является финслеровым пространством и по определению имеет метрическую функцию следующего вида:

$$L(d\xi;\xi) = \kappa(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,, \tag{7.1.20}$$

где $\kappa(\xi) > 0$ – единственное действительное скалярное поле в этом пространстве. Длина отрезка кривой $\xi^i = \xi^i(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ – параметр вдоль кривой, вычисляется в таком пространстве с помощью интеграла вдоль кривой

$$l_{1,2} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa(\xi)\sqrt[4]{\dot\xi^1\dot\xi^2\dot\xi^3\dot\xi^4}\; d\tau\,, \tag{7.1.21}$$

где $\dot\xi^i \equiv \dfrac{d\xi^i}{d\tau}$. Компоненты обобщенного импульса находятся по формулам:

$$p_i = \frac{1}{4}\kappa(\xi)\frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}\,. \tag{7.1.22}$$

Они связаны между собой соотношением

$$p_1 p_2 p_3 p_4 - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0\,, \tag{7.1.23}$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы [1] и записывать следующим образом:

$$\Phi(p;\xi) = 0\,. \tag{7.1.24}$$

Функция Финслера $\Phi(p;\xi)$ определяется неоднозначно, а с точностью до перехода от одного тангенциального уравнения индикатрисы к любому другому эквивалентному уравнению, записанному в виде (7.1.24). Единственное ограничение: записывая новую функцию Финслера Φ', надо следить, чтобы производные $\dfrac{\partial \Phi'}{\partial p_i}$ не обращались в нуль одновременно.

Формулы (7.1.20) – (7.1.23) записаны в специальном базисе, который принято называть изотропным. Эти же формулы можно записать в ковариантном виде, для этого необходимо использовать метрический тензор g_{ijkl} с четырьмя нижними индексами в формулах (7.1.20) – (7.1.22) и соответствующий тензор g^{ijkl} с четырьмя верхними индексами для формулы (7.1.23) (см. раздел 4.8). В специальном изотропном базисе матрицы этих тензоров совпадают:

$$(g_{ijkl}) = (g^{ijkl})\,.$$

Если функция $\kappa(\xi)$ известна, то определены метрическая функция $L(d\xi;\xi)$ и тангенциальное уравнение индикатрисы $\Phi(p;\xi) = 0$, а действие как функция координат $S(\xi)$ может быть найдено как решение уравнения Гамильтона-Якоби

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial \xi};\xi\right) = 0\,. \tag{7.1.25}$$

Тогда уравнения для нахождения экстремалей ("геодезических") записываются или как уравнения Лагранжа-Эйлера

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L(\dot\xi;\xi)}{\partial \dot\xi^i} - \frac{\partial L(\dot\xi;\xi)}{\partial \xi^i} = 0\,, \tag{7.1.26}$$

или в каноническом виде

$$\dot\xi^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\cdot \lambda'(p;\xi)\,, \qquad p_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i}\cdot \lambda'(p;\xi)\,, \tag{7.1.27}$$

где $\lambda'(p;\xi) > 0$ – произвольная функция, или как следствие формализма Гамильтона-Якоби в виде

$$\dot{\xi}^i = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right|_{p_i=\frac{\partial S}{\partial \xi^i}} \cdot \lambda(\xi)\,, \tag{7.1.28}$$

где $\lambda(\xi) > 0$ – некоторая функция только координат.

Формулы (7.1.25) – (7.1.28) справедливы для любого финслерова пространства. В нашем конкретном случае пространства $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, конформно связанного с пространством Бервальда-Моора, уравнение Гамильтона-Якоби (7.1.25) есть

$$\frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^3}\frac{\partial S}{\partial \xi^4} - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0\,, \tag{7.1.29}$$

а уравнения (7.1.28) для нахождения экстремалей ("геодезических") запишутся как

$$\dot{\xi}^i = \frac{\dfrac{\partial S}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^4}}{\dfrac{\partial S}{\partial \xi^i}} \cdot \lambda(\xi)\,. \tag{7.1.30}$$

Так как в пространстве H_4 существует временна́я координата, то можно считать, что экстремали ("геодезические") являются мировыми линиями некоторых материальных объектов (частиц). Если финслерово пространство не содержит временна́ой координаты, то можно ввести понятие *абсолютного времени* и отождествить его неким правильно выбранным параметром эволюции. Таким образом, в любом финслеровом пространстве (в частности, нашем пространстве $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$) определена классическая механика неких материальных частиц вместе с лагранжевым формализмом (7.1.26), аналогом гамильтонова формализма (7.1.27) с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера и методом Гамильтона-Якоби (7.1.25), (7.1.28).

Если следовать гипотезе *самодостаточности финслеровой геометрии* (см. раздел 1.8): все поля, входящие в метрическую функцию и не заданные изначально, должны удовлетворять принципу экстремальности любого объема – то поле $\kappa(\xi)$ не может быть произвольным.

Скалярное действительное поле $\kappa(\xi)$ всегда можно выразить через другое действительное скалярное поле $S_W(\xi)$, которое связано с полем $\kappa(\xi)$ соотношением

$$\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}\,, \tag{7.1.31}$$

поэтому лагранжиан для получения уравнения поля будет иметь вид

$$\mathfrak{L} = const \cdot \kappa^4(\xi) \equiv const \cdot 4^4 \cdot \frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\,, \tag{7.1.32}$$

а само уравнение поля запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \xi^1}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right] + \frac{\partial}{\partial \xi^2}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi^3}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right] + \frac{\partial}{\partial \xi^4}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\right] = 0 \end{gathered} \tag{7.1.33}$$

– с дополнительным условием

$$\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} > 0\,.$$

Это уравнение является *фундаментальным уравнением* для финслеровых пространств, конформно связанных с четырёхмерным пространством Бервальда-Моора, или пространством H_4. Частным случаем таких пространств является само пространство H_4, поэтому уравнение (7.1.33) является фундаментальным уравнением и для четырёхмерного пространства Бервальда-Моора. Решение уравнения (7.1.33) $S_W(\xi)$ будем называть Мировой функцией, или *конформным потенциалом*. Если Мировая функция известна, то всегда можно воспользоваться соотношением (7.1.31) для получения поля коэффициента расширения-сжатия $\kappa(\xi)$:

$$\kappa(\xi) = 4\sqrt[4]{\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}}\,. \tag{7.1.34}$$

Действие как функция координат $S(\xi)$ – это решение уравнения Гамильтона-Якоби (7.1.29) при заданной функции $\kappa(\xi)$, а Мировая функция $S_W(\xi)$ – это решение полевого уравнения (7.1.33), причем скалярное поле $\kappa(\xi)$ в этом случае определяется с помощью полученного решения $S_W(\xi)$ полевого уравнения по формуле (7.1.34).

Мировая функция $S_W(\xi)$ определяет в пространстве $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ нормальную конгруэнцию экстремалей ("геодезических"), которые находятся из уравнений

$$\dot{\xi}^i = \frac{\dfrac{\partial S}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^4}}{\dfrac{\partial S}{\partial \xi^i}} \cdot \lambda(\xi)\,, \tag{7.1.35}$$

где $\lambda(\xi) > 0$ – произвольная функция, $\dot{\xi}^i \equiv \dfrac{d\xi^i}{d\tau}$, τ – параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции. В каком-то смысле, можно считать, что именно по этим экстремалям движутся частицы самого поля $S_W(\xi)$, то есть поля $\kappa(\xi)$. Таким образом, поле $\kappa(\xi)$ и конгруэнция геодезических (7.1.35) являются самосогласованными.

В любом финслеровом пространстве не только определена классическая механика неких материальных частиц, но и начальные квантово-механические представления.

Обычным образом с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера в финслеровом пространстве можно ввести скобки Пуассона, а затем перейти к представлению координат и импульсов в пространстве функций состояния $\Psi(\xi)$ (волновых функций) как эрмитовых операторов (наблюдаемых), заменив скобки Пуассона коммутаторами, но при этом надо учитывать зависимость элемента объема от точки пространства, если таковая имеется. В нашем конкретном случае пространств, конформно связанных с пространством H_4, в координатном представлении

$$p_i \to \hat{p}_i = i\hbar \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \kappa^2 \qquad \Rightarrow \qquad [\hat{p}_i, \xi^j] = i\hbar \delta^i_j \,, \tag{7.1.36}$$

так как элемент объема в пространстве $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ (см. раздел 1.8) имеет вид

$$dV = \kappa^4 \, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4 \,. \tag{7.1.37}$$

При таком подходе возникает ряд проблем: интерпретация самой волновой функции $\Psi(\xi)$ и величины $\overline{\Psi}(\xi)\Psi(\xi)$, и трудности из-за того, что энергия и время становятся наблюдаемыми. Эти проблемы обсуждаться не будут, так как мы ограничимся только задачами на собственные значения.

При переходе от классической механики к квантовой механике тангенциальное уравнение индикатрисы для нерелятивистских частиц переходит в уравнение Шредингера, а для релятивистских частиц – в аналог уравнение Клейна-Гордона; в общем виде с использованием функции Финслера такое уравнение имеет вид

$$\Phi(\hat{p}; \xi)\Psi(\xi) = 0 \,, \tag{7.1.38}$$

где $\Psi(\xi)$ – функция состояния физической системы. Это уравнение является линейным уравнением в частных производных в том смысле, что любая линейная комбинация решений опять же является решением уравнения (7.1.38). В нашем конкретном случае пространства, конформно связанного с пространством H_4, уравнение (7.1.38) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^4}{\partial\xi^1\partial x^2\partial\xi^3\partial\xi^4}\kappa^2\,\Psi = \frac{\kappa^6}{4^4\hbar^4}\,\Psi\,. \tag{7.1.39}$$

Истинное пространственное расстояние

Уравнение (7.1.33) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. Для пространства, конформно связанного с пространством Минковского, аналогичные уравнения поля были решены в предыдущей главе в предположении, что Мировая функция зависит только от времени x^0 и сферического радиуса $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а также при дополнительном требовании на сам вид Мировой функции:

1) в разделе 6.1

$$S_W = \exp(-\gamma x^0)\,\psi(r)\,, \tag{7.1.40}$$

где γ – постоянная;

2) в разделе 6.2

$$S_W = p_0\,x^0 - \psi(r)\,, \tag{7.1.41}$$

где p_0 – постоянная.

В группу симметрии пространства Бервальда-Моора не входит в качестве подгруппы группа трехмерных вращений $SO(3)$, поэтому автоматически перенести подход к решению фундаментального уравнения поля, используемый в разделах 6.1 и 6.2, на пространства, конформно связанные с пространством H_4, нельзя.

Изотропный базис, в котором записаны формулы (7.1.20) – (7.1.23), (7.1.29) – (7.1.35) и (7.1.39) удобен для расчетов, но для физических приложений следует использовать "ортонормированный" базис (или аналогичный ему), в котором координаты x^0, x^1, x^2, x^3 связаны с координатами в изотропном базисе $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ формулами

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1+\xi^2+\xi^3+\xi^4\right)\,,\\ x^1 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1+\xi^2-\xi^3-\xi^4\right)\,,\\ x^2 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1-\xi^2+\xi^3+\xi^4\right)\,,\\ x^3 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1-\xi^2-\xi^3+\xi^4\right)\,,\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^0+x^1+x^2+x^3\,,\\ \xi^2 &= x^0+x^1-x^2-x^3\,,\\ \xi^3 &= x^0-x^1+x^2+x^3\,,\\ \xi^4 &= x^0-x^1-x^2+x^3\,,\end{aligned}\right\} \tag{7.1.42}$$

и в котором принимается, что $x^0 \equiv ct$, где c – скорость света, t – время, а x^1, x^2, x^3 – пространственные координаты. Классический алгоритм ОТО

[18] получения пространственного расстояния между двумя близкими и покоящимися относительно друг друга наблюдателями (мировыми линиями) для метрики Бервальда-Моора в координатах x^0, x^1, x^2, x^3 (7.1.42) дает метрику Богословского [25] в пространстве наблюдателей x^1, x^2, x^3 (в "истинном" трехмерном пространстве):

$$dl = |dx^\alpha| + |dx^\beta| \, ; \qquad \text{причем} \qquad |dx^\gamma| \le |dx^\alpha|, |dx^\beta| \, ; \tag{7.1.43}$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$. Уравнение индикатрисы в касательном пространстве такого метрического пространства определяет негладкую гиперповерхность, которая является ромбододекаэдром [26]. В нашем понимании, это пространство x^1, x^2, x^3 не является финслеровым, так как первые производные от метрической функции по компонентам вектора касательного пространства не являются непрерывными, а вторые не везде существуют; там же, где они существуют, не выполняется условие единственной зависимости между компонентами обобщённого импульса.

Тем не менее, в пространстве Бервальда-Моора, как и в пространстве, конформно с ним связанном, в качестве аналога радиуса сферической системы координат можно попытаться использовать следующую величину:

$$r_d = |x^\alpha| + |x^\beta| \, ; \qquad \text{причем} \qquad |x^\gamma| \le |x^\alpha|, |x^\beta| \, . \tag{7.1.44}$$

Здесь приняты те же соглашения: α, β, $\gamma = 1$, 2, 3; $\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma$. С переменной r_d трудно работать, поэтому проще работать с областями непрерывности – конусами, в каждый из которых попадает одна и только одна грань ромбододекаэдра. Каждому такому конусу удобно сопоставить элемент матрицы 3×4:

$$r_d \equiv \hat{X} \equiv (X_{ab}) \equiv \begin{pmatrix} x^2 + x^3 & -x^2 + x^3 & -x^2 - x^3 & x^2 - x^3 \\ x^1 + x^3 & x^1 - x^3 & -x^1 - x^3 & -x^1 + x^3 \\ x^1 + x^2 & -x^1 + x^2 & -x^1 - x^2 & x^1 - x^2 \end{pmatrix} , \tag{7.1.45}$$

$a \equiv \gamma = 1, 2, 3$; а $b = 1, 2, 3, 4$ – нумерует квадранты в плоскости (x^α, x^β) при положительном вращении вокруг оси x^γ, начиная с квадранта $(+, +)$.

Введем обозначения для четырех матриц того же типа, что и матрица $\hat{X}$:

$$\begin{gathered}
\hat{E} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\hat{E}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{7.1.46}$$

Будем считать, что матрицы $\hat{X}$, $\hat{E}$, $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$, $\hat{E}_3$ и им подобные складываются и умножаются на число, как обычные матрицы, а умножение матрицы на матрицу происходит покомпонентно:

$$\hat{X} \cdot \hat{Y} = \hat{Z} \qquad \Rightarrow \qquad Z_{ab} = X_{ab} Y_{a_- b_-}\,, \tag{7.1.47}$$

где $a = a_-$, $b = b_-$, но по ним не происходит суммирования. Выпишем ряд формул, которые нам понадобятся ниже:

$$\hat{E}_1^3 = \hat{E}_1\,, \qquad \hat{E}_2^3 = \hat{E}_2\,, \qquad \hat{E}_3^3 = \hat{E}_3\,, \tag{7.1.48}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2 + \hat{E}_3^2 = 2\hat{E}\,, \qquad \hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3 = 0\,, \\
&\left(\hat{E}_1 \hat{E}_2\right)^2 + \left(\hat{E}_1 \hat{E}_3\right)^2 + \left(\hat{E}_2 \hat{E}_3\right)^2 = \hat{E}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{7.1.49}$$

$$\hat{E} \cdot \frac{\partial F(r_d)}{\partial x^1} = \hat{E}_1 \cdot \frac{dF}{dr_d},\ \hat{E} \cdot \frac{\partial F(r_d)}{\partial x^2} = \hat{E}_2 \cdot \frac{dF}{dr_d},\ \hat{E} \cdot \frac{\partial F(r_d)}{\partial x^3} = \hat{E}_3 \cdot \frac{dF}{dr_d}\,. \tag{7.1.50}$$

В каждом конусе, в котором содержится одна и только одна из граней ромбододекаэдра, вместо координат x^1, x^2, x^3 можно ввести три новые координаты r_d, ϑ, φ, причем r_d – это одна и та же переменная для всех конусов (7.1.44), (7.1.45), а углы ϑ, φ для каждого конуса свои, например, для $\gamma = 1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3$ и квадранта $(+,+)$ плоскости (x^α, x^β):

$$\left.\begin{aligned}
x^1 &= r_d \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\,, \\
x^2 &= r_d \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\right), \\
x^2 &= r_d \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\right),
\end{aligned}\right\} \tag{7.1.51}$$

причем область изменения углов ϑ и φ ограничена неравенствами:

$$0 \le \operatorname{tg}\vartheta \le \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}}|\cos\varphi|\cdot\operatorname{tg}\vartheta \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\varphi\cdot\operatorname{tg}\vartheta,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi\cdot\operatorname{tg}\vartheta. \quad (7.1.52)$$

Вычисляя якобиан такого преобразования координат

$$\frac{D(x^1,x^2,x^3)}{D(r_d,\ \varphi,\ \vartheta)} = -\frac{r_d^2}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta}\,, \quad (7.1.53)$$

получим

$$dx^0dx^1dx^2dx^3 = \frac{r_d^2}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta}\cdot dx^0dr_d d\vartheta d\varphi\,. \quad (7.1.54)$$

Перепишем лагранжиан (7.1.32), опуская постоянный множитель, в координатах x^0,x^1,x^2,x^3 (7.1.42):

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} = {} & \left(\frac{\partial\mathbf{S_W}}{\partial\mathbf{x^0}}\right)^{\mathbf{4}} - 2\left(\frac{\partial\mathbf{S_W}}{\partial\mathbf{x^0}}\right)^{\mathbf{2}}\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2\right]+ \\ & +8\left(\frac{\partial\mathbf{S_W}}{\partial\mathbf{x^0}}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)+\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^4+\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^4+\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^4 \\ & -2\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2\right].\end{aligned} \quad (7.1.55)$$

Будем считать, что Мировая функция зависит только от переменных x^0, r_d, то есть $S_W = S_W(x^0, r_d)$. Подставим в формулу (7.1.55) производные (7.1.50) и воспользуемся свойствами (7.1.48), (7.1.49) матриц $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3$, получим

$$\mathfrak{L} = \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^4 - 4\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2\,. \quad (7.1.56)$$

Тогда, учитывая формулу (7.1.54), приходим к выражению для элемента объема

$$dV = \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^4 - 4\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2\right]\cdot\frac{r_d^2}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta}\cdot dx^0dr_d d\vartheta d\varphi. \quad (7.1.57)$$

Интегрируя левую и правую часть этого выражения по углам ϑ, φ в пределах конуса содержащего одну и только одну грань ромбододекаэдра и суммируя по всем двенадцати конусам, получим элемент объема в двумерном пространстве x^0, r_d:

$$dV_{r_d} = const \cdot \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^4 - 4 \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 \left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d} \right)^2 \right] \cdot r_d^2 \cdot dx^0 dr_d \,. \qquad (7.1.58)$$

Теперь мы можем записать уравнение поля для Мировой функции $S_W = S_W(x^0, r_d)$ в двумерном пространстве x^0, r_d:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^3 - 2 \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right) \left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d} \right)^2 \right] r_d^2 \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial r_d} \left\{ 2 \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 \left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d} \right) r_d^2 \right\} = 0. \end{gathered} \qquad (7.1.59)$$

Зная решение этого уравнения, получим выражение для коэффициента расширения-сжатия (7.1.34):

$$\kappa(x^0, r_d) = \sqrt[4]{ \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^4 - 4 \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 \left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d} \right)^2 } \,. \qquad (7.1.60)$$

Если ввести обобщенные импульсы p_0, p_{r_d}, соответствующие координатам x^0, r_d двумерного пространства, то тангенциальное уравнение индикатрисы (7.1.23) согласно формуле (7.1.60) следует записать в виде:

$$p_0^4 - 4 p_0^2 p_{r_d}^2 = \kappa^4(x^0, r_d) \,. \qquad (7.1.61)$$

7.2 Зависимость коэффициента Хаббла от расстояния и направления

Запишем уравнение (7.1.59) в предположении, что функция S_W имеет вид

$$S_W(x^0, r_d) = S_0 e^{-\gamma x^0} \psi(r_d) \,, \qquad (7.2.1)$$

где γ и S_0 – постоянные. Подставляя функцию $S_W(x^0, r_d)$ (7.2.1) в уравнение (7.1.59), получим

$$3 r_d^2 \left[\gamma^2 \psi^3 - 2\psi \left(\frac{d\psi}{dr_d} \right)^2 \right] - 2 \frac{d}{dr_d} \left[r_d^2 \psi^2 \frac{d\psi}{dr_d} \right] = 0 \,. \qquad (7.2.2)$$

Введем безразмерную переменную $\xi \equiv \gamma r_d$, тогда данное уравнение перепишется следующим образом:

$$3\xi^2\psi\left[\psi^2 - 2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right] - 2\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\psi^2\frac{d\psi}{d\xi}\right] = 0\,. \tag{7.2.3}$$

Так как это уравнение однородно по искомой функции, то будем ее искать в виде

$$\psi(\xi) = \psi_0 \exp\left(\int\limits_0^\xi \varphi(\xi)d\xi\right)\,, \tag{7.2.4}$$

ψ_0 – постоянная, которая при составлении функции S_W перемножается с постоянной S_0, и поэтому постоянные S_0, ψ_0 не являются независимыми, в силу чего можно положить постоянную ψ_0 равной единице, $\psi_0 = 1$. Для искомой функции $\varphi(\xi)$ получаем уравнение Риккати

$$\xi\frac{d\varphi}{d\xi} + 2\varphi + 6\,\xi\varphi^2 - \frac{3}{2}\,\xi = 0\,. \tag{7.2.5}$$

Выберем решение, которое не имеет особенности в точке $\xi = 0$:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{cth}(3\xi) - \frac{1}{3\xi}\right]\,. \tag{7.2.6}$$

При $\xi \ll 1$

$$\varphi(\xi) \simeq \frac{1}{2}\xi - \frac{3}{10}\xi^3 + \mathcal{O}\left(\xi^5\right)\,, \tag{7.2.7}$$

а при $\xi \to \infty$

$$\varphi(\xi) \to \frac{1}{2}\,. \tag{7.2.8}$$

Коэффициент растяжения-сжатия вычисляется по формуле

$$\kappa = \gamma\sqrt[4]{1 - 4\varphi^2(\xi)} \cdot S_W\,. \tag{7.2.9}$$

Найдем закон движения материальных объектов, формирующих рассматриваемое поле:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= 4\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^3 - 2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2\right]\lambda(x^0, r_d)\,,\\ \frac{dr_d}{d\tau} &= -8\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)\lambda(x^0, r_d)\,, \end{aligned}\right\} \tag{7.2.10}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^0}{d\tau} &= -4\gamma\left[\gamma^2 - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_d}\right)^2\right] S_W^3\lambda(x^0, r_d)\,,\\ \frac{dr_d}{d\tau} &= -8\gamma^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_d}\right) S_W^3\lambda(x^0, r_d)\,,\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^0}{d\tau} &= -4\gamma^3\left[1 - 2\varphi^2(\xi)\right] S_W^3\lambda(x^0, r_d)\,,\\ \frac{dr_d}{d\tau} &= -8\gamma^3\varphi(\xi) S_W^3\lambda(x^0, r_d)\,,\end{aligned}\right\} \qquad (7.2.11)$$

тогда

$$\frac{dr_d}{dx^0} = \frac{2\varphi(\xi)}{1 - 2\varphi^2(\xi)}\,. \qquad (7.2.12)$$

Запишем последнюю формулу для $\xi \ll 1$:

$$\frac{dr_d}{dt} = H_0\left[1 - \frac{1}{10}\left(\frac{H_0}{c}\right)^2 r_d^2\right]\cdot r_d\,, \qquad H_0 \equiv \gamma c\,. \qquad (7.2.13)$$

Таким образом, при достаточно малых расстояниях до космологических объектов $r_d \ll \dfrac{c}{H_0}$ выполняется закон Хаббла с постоянной Хаббла $H_0 \equiv \gamma c$, а при увеличении расстояния коэффициент, определяющий скорость удаления объекта, уменьшается, причём уменьшается медленнее, чем для пространства, конформно связанного с пространством Минковского (6.1.19). В силу этого изучение поведения "постоянной" Хаббла на расстояниях сравнимых с размерами Вселенной может ответить на вопрос: каким метрическим пространством является наше четырехмерное пространство-время на мегарасстояниях.

Выясним, каким образом в данной модели размеры Вселенной связаны с постоянной Хаббла $H_0 \equiv \gamma c$. При $\xi \to \infty$

$$\frac{dr_d}{dt} \to 2c\,. \qquad (7.2.14)$$

Естественно связать "радиус" Вселенной $\left(r_d\right)_W$ с расстоянием, где производная $\dfrac{dr_d}{dt}$ достигает скорости света. Тогда

$$\left(r_d\right)_W \simeq 1,23854\cdot\frac{c}{H_0}\,. \qquad (7.2.15)$$

Что произойдёт, если имеет место закон Хаббла в виде (7.2.13), а наблюдатель будет оперировать не трёхмерным расстоянием r_d, а евклидовым расстоянием $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$? В этом случае, по-видимому, он будет наблюдать зависимость коэффициента Хаббла не только от расстояния, но и от направления.

7.3 Стационарное поле коэффициента растяжения-сжатия

Стационарное пространственно "ромбододекаэдрично" симметричное поле $\kappa(x)$ можно получить, если искать решение уравнения (7.1.59) в виде

$$S_W = p_0 x^0 - \psi(r_d)\,, \tag{7.3.1}$$

где $p_0 > 0$ – постоянная. Тогда для неизвестной функции ψ получим уравнение

$$\frac{d}{dr_d}\left(r_d^2 \frac{d\psi}{dr_d}\right) = 0\,. \tag{7.3.2}$$

Интегрирование этого уравнения по r_d приводит к формуле

$$\frac{d\psi}{dr_d} = \frac{C}{r_d^2}\,, \tag{7.3.3}$$

C – постоянная интегрирования. Тогда

$$\kappa(r_d) = p_0 \sqrt[4]{1 - \frac{4C^2}{p_0^2 r_d^4}}\,. \tag{7.3.4}$$

Для того, чтобы подкоренное выражение было строго больше нуля, необходимо выполнение условия

$$\frac{4C^2}{p_0^2 r_d^4} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad r_d > \sqrt{\frac{2|C|}{p_0}}\,. \tag{7.3.5}$$

Таким образом, поля $\kappa(r_d)$ и $S_W(x^0, r_d)$ существуют не во всей области изменения переменной $0 \leq r_d < \infty$. Внутри некой области при достаточно малых r_d поля отсутствуют – аналог "Черной дыры".

Движение материальных объектов рассматриваемого поля определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= 4p_0^3\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2C}{p_0 r_d^2}\right)^2\right] \cdot \lambda(x^0, r_d)\,, \\ \frac{dr_d}{d\tau} &= -4p_0^3\left(\frac{2C}{p_0 r_d^2}\right) \cdot \lambda(x^0, r_d)\,, \end{aligned}\right\} \tag{7.3.6}$$

или

$$\frac{dr_d}{dx^0} = -\frac{\left(\dfrac{2C}{p_0 r_d^2}\right)}{1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2C}{p_0 r_d^2}\right)^2} \,. \tag{7.3.7}$$

Из последней формулы следует, что поле $\kappa(r_d)$ будет соответствовать полю притяжения, если $C > 0$, и что при $r_d = \sqrt{\dfrac{2|C|}{p_0}}$ величина скорости достигает $2c$, поэтому размеры "дыры" будут больше, чем диктуют неравенства (7.3.5). Потребовав, чтобы правая часть соотношения (7.3.7) по модулю была строго больше единицы, получим

$$\frac{4C^2}{p_0^2 r_d^4} < \sqrt{3} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad r_d > \sqrt{\frac{2|C|}{p_0\sqrt{\sqrt{3}-1}}} \equiv (r_d)_0 \tag{7.3.8}$$

где $(r_d)_0$ – радиус "дыры".

Итак, материальные частицы в самосогласованном поле притяжения $\kappa(r_d)$ движутся по лучам, исходящим из центра координат, при $r_d \to \infty$ их скорость равна нулю, затем при приближении к началу координат их скорость по величине увеличивается и достигает скорости света на границе "дыры" $r_d = (r_d)_0$, внутри которой поле отсутствует. При этом коэффициент растяжения-сжатия меняется в пределах:

$$p_0 \sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3} \quad < \quad \kappa(r_d) \quad < \quad p_0 \,. \tag{7.3.9}$$

Постановка задачи на собственные значения

Запишем уравнение (7.1.61) в операторной форме в координатном представлении, приняв

$$\hat{p}_0 = i\hbar \frac{1}{r_d \kappa^2} \frac{\partial}{\partial x^0} r_d \kappa^2 \,, \qquad \hat{p}_{r_d} = i\hbar \frac{1}{r_d \kappa^2} \frac{\partial}{\partial r_d} r_d \kappa^2 \,, \tag{7.3.10}$$

получим

$$\hbar^4 \left[\frac{\partial^4}{(\partial x^0)^4} - 4 \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} \frac{\partial^2}{(\partial r_d)^2} \right] r_d \kappa^2 \Psi(x^0, r_d) = r_d \kappa^6 \Psi(x^0, r_d) \,. \tag{7.3.11}$$

Здесь $\Psi(x^0, r_d)$ – функция состояния физической системы (волновая функция). Приняв, что поле $\kappa(r_d)$ задается выражением (7.3.4), волновую функцию будем искать в виде:

$$\Psi = \frac{1}{r_d \kappa^2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{E}{c} \, x^0 \right) y(r_d) \,. \tag{7.3.12}$$

Подставим (7.3.12) в уравнение (7.3.11), получим

$$4\left(\frac{E}{\hbar c}\right)^2 \frac{d^2y}{dr_d^2} + \left[\left(\frac{E}{\hbar c}\right)^4 - \frac{p_0^4}{\hbar^4} + \frac{p_0^4}{\hbar^4}\left(\frac{(r_d)_0}{r_d}\right)^4\right] y = 0\,. \tag{7.3.13}$$

Перейдем к новой переменной – безразмерному "радиусу"

$$\varrho \equiv \frac{r_d}{(r_d)_0}$$

и введем обозначения для трех безразмерных величин:

$$\mathcal{E} \equiv \mu_0 \frac{\left(\dfrac{E}{p_0 c}\right)^4 - 1}{4\left(\dfrac{E}{p_0 c}\right)^2}\,, \qquad \mu \equiv \frac{\mu_0}{4\left(\dfrac{E}{p_0 c}\right)^2} \qquad \mu_0 \equiv \left(\frac{p_0 r_d}{\hbar}\right)^2\,. \tag{7.3.14}$$

Тогда уравнение (7.3.13) перепишется следующим образом:

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2} + \left\{\mathcal{E} + \mu\frac{1}{\varrho^4}\right\} y = 0\,. \tag{7.3.15}$$

Это уравнение по форме совпадает с одномерным уравнением Шредингера нерелятивистской частицы, находящейся в поле притяжения с потенциалом, который (с точностью до постоянного множителя) равен

$$U = -\frac{\mu}{\varrho^4}\,. \tag{7.3.16}$$

Так как при $\varrho < 1$ никакого поля нет, что, в каком-то смысле, соответствует бесконечно глубокой потенциальной яме, то для всех волновых функций необходимо выполнение граничного условия

$$y(1) = 0\,. \tag{7.3.17}$$

Таким образом, можно ожидать (это следует из общей теории) конечного числа (или ни одного) локализованных (связанных) состояний, которые обязательно должны иметь дискретный спектр отрицательных значений параметра $\mathcal{E}$.

Из уравнения (7.3.15) для $\mathcal{E} < 0$ следует [19], что при $\varrho \to \infty$ функция $y(\varrho)$ связанного состояния ведет себя следующим образом:

$$y = const' \cdot \rho^{const} \exp\left(-\sqrt{-\mathcal{E}}\,\varrho\right)\,, \tag{7.3.18}$$

то есть стремится экспоненциально к нулю при $\varrho \to \infty$.

Предположим, что задача на собственные значения (7.3.15), (7.3.17), (7.3.18) решена и найден спектр собственных значений:

$$\mathcal{E} = -\sigma_0^2,\ -\sigma_1^2,\ \dots\ -\sigma_{k-1}^2\,, \qquad \sigma_i \in \{\sigma_0,\ \sigma_1,\ \dots\ \sigma_{k-1}\}\,. \tag{7.3.19}$$

Тогда из формул (7.3.14) получим значения величины

$$\frac{E}{cp_0} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{2\sigma_i^2}{\mu}\right)^2 + 1} \,-\, \frac{2\sigma_i^2}{\mu}}\,. \tag{7.3.20}$$

В общем случае аналитическое решение уравнения (7.3.15) нам не известно, но при $\mathcal{E} = 0$ такое аналитическое решение существует

$$y = C_0\,\rho\,\sin\left(\frac{\sqrt{\mu_0}}{\varrho} + \varphi_0\right)\,, \tag{7.3.21}$$

где C_0, φ_0 – постоянные интегрирования. Это решение не является локальным ни при каких значениях параметров, но если все же формально потребовать выполнение граничных условий

$$\left.\frac{y(\varrho)}{\varrho}\right|_{\varrho=1} = 0\,, \qquad \left.\frac{y(\varrho)}{\varrho}\right|_{\varrho\to+\infty} = 0\,, \tag{7.3.22}$$

то получим

$$\varphi_0 = 0\,, \qquad \mu_0 = 4\pi^2 m^2\,; \qquad m = 1, 2, 3, \dots \tag{7.3.23}$$

Так как нам не удалось точно решить задачу на собственные значения, применим приближенный метод.

Квазиклассическое приближение

Так как формально уравнение (7.3.15) совпадающее с одномерным уравнением Шредингера для волновой функции нерелятивистской частицы, находящейся в потенциальной яме, то для решения задачи (7.3.15), (7.3.17), (7.3.18) на собственные значения может быть применен квазиклассический подход, хотя бы для качественного описания ожидаемых точных собственных значений.

С учетом того, что точка $\varrho = 1$ не является точкой поворота, правило квантования Бора для рассматриваемой задачи, можно записать [19] следующим образом:

$$\int\limits_1^{\varrho_*} \sqrt{\mathcal{E} + \mu\frac{1}{\varrho^4}}\ d\varrho = \pi\left(n + \frac{3}{4}\right)\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{7.3.24}$$

Разделим левую и правую части на $\sqrt{\mu}$, введем обозначение

$$-\frac{\mathcal{E}}{\mu} \equiv \lambda^2 \tag{7.3.25}$$

и перепишем формулу (7.3.24)

$$\int\limits_1^{\varrho_*} \sqrt{-\lambda^2 + \frac{1}{\varrho^4}}\, d\varrho = \frac{2\pi\sqrt[4]{1-\lambda^2}}{\sqrt{\mu_0}} \left(n + \frac{3}{4}\right), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{7.3.26}$$

где

$$\varrho_* = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \qquad 1 < \varrho_* < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lambda < 1\,. \tag{7.3.27}$$

Безразмерные энергии связанных состояний будут выражаться через собственные значения $\lambda_i \in \{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{k-1}\}$ следующим образом:

$$\frac{E_i}{cp_0} = \sqrt[4]{1 - \lambda_i^2}\,. \tag{7.3.28}$$

С учетом (7.3.23) и (7.3.27) перепишем формулу (7.3.26):

$$\int\limits_1^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \sqrt{-\lambda^2 + \frac{1}{\varrho^4}}\, d\varrho = \sqrt[4]{1-\lambda^2}\; \frac{n + \frac{3}{4}}{m}, \tag{7.3.29}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$

При $m = 1$ существует только одно локализованное состояние $n = 0$, численный расчет дает

$$\lambda_0 \simeq 0,043875\,, \qquad \frac{E_0}{cp_0} \simeq 0,999518\,. \tag{7.3.30}$$

При $m = 2$ существует два локализованных состояния $n = 0$ и $n = 1$, при этом численный расчет дает

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_0 \simeq 0,292175\,, & \dfrac{E_0}{cp_0} \simeq 0,977939\,, \\[2ex] \lambda_1 \simeq 0,0108925\,, & \dfrac{E_1}{cp_0} \simeq 0,9999703\,, \end{array}\right\} \quad \frac{E_0}{E_1} \simeq 0,977968\,. \tag{7.3.31}$$

Глава 8

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Понятие *гиперкомплексного потенциала* является частным случаем понятия конформного потенциала (см. главу V), когда исходное пространство суть невырожденное поличисловое пространство. Поэтому разделы 5.1 – 5.3 имеют непосредственное отношение к настоящей главе.

8.1 Пространства, конформно связанные с пространствами $P_{k+2\cdot m}$

Элемент длины в произвольном невырожденном поличисловом пространстве $P_n \equiv P_{k+2\cdot m}$ над полем действительных чисел имеет вид

$$ds = \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 \ldots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_n}}\,. \qquad (8.1.1)$$

Пространство, конформно связанное с пространством P_n, по определению имеет элемент длины

$$d\tilde{s} = \kappa(x^1, x^2, ..., x^n)\ \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 \ldots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_n}}\,, \qquad (8.1.2)$$

то есть при $\kappa(x) \equiv 1$, мы получим элемент длины в исходном поличисловом пространстве:

$$ds \equiv d\tilde{s}|_{\kappa(x)\equiv 1}\ .$$

Компоненты обобщённого импульса в невырожденном поличисловом пространстве определяются по формуле

$$p_i = \frac{g_{i i_1 \ldots i_{n-1}} dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_{n-1}}}{\sqrt[n]{g_{j_1 j_2 \ldots j_n} dx^{j_1} dx^{j_2} \ldots dx^{j_n}}}\,, \qquad (8.1.3)$$

а в конформно связанном с P_n пространстве компоненты обобщённого импульса $\tilde{p}_i$ можно вычислить через компоненты p_i:

$$\tilde{p}_i = \kappa(x)\, p_i\,. \tag{8.1.4}$$

Соответствующие тангенциальные уравнения индикатрисы выражаются через одну и ту же однородную n-ой степени по всем своим n аргументам функцию $\Phi_n(q_1, q_2, ..., q_n)$:

$$\Phi_n(p_1, p_2, ..., p_n) - 1 = 0\,, \qquad \Phi_n(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, ..., \tilde{p}_n) - \kappa^n(x) = 0\,. \tag{8.1.5}$$

Для всех пространств невырожденных поличисел функция $\Phi_n(q_1, q_2, ..., q_n)$ в ковариантной форме записи имеет вид:

$$\Phi_n(q_1, q_2, ..., q_n) = g^{i_1 i_2 ... i_n} q_{i_1} q_{i_2} ... q_{i_n}\,. \tag{8.1.6}$$

Таким образом, пространство, конформно связанное с пространством $P_{k+2\cdot m}$, является разрешимым. Для всех невырожденных поличисел существует, так называемый, изотропный базис, в котором матрица метрического тензора $g_{i_1 i_2 ... i_n}$, фигурирующего в формуле (8.1.1), (8.1.2), и матрица тензора $g^{i_1 i_2 ... i_n}$, фигурирующего в тангенциальных уравнениях индикатрис (8.1.5), (8.1.6), совпадают с точностью до числового коэффициента

$$(g_{i_1 i_2 ... i_n}) = const \cdot \left(g^{i_1 i_2 ... i_n} \right)\,. \tag{8.1.7}$$

Можно было бы исключить из правой части этой формулы числовой коэффициент, но тогда дополнительный постоянный коэффициент появится в формулах (8.1.5).

Будем обозначать финслерово пространство, конформно связанное с пространством невырожденных поличисел $P_n \equiv P_{k+2\cdot m}$, следующим образом: $\tilde{P}_n \equiv \tilde{P}_{k+2\cdot m}$.

В пространстве $\tilde{P}_n$ коэффициент растяжения-сжатия связан с Мировой функцией $S_W(x)$ соотношением

$$g^{i_1 i_2 ... i_n} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_2}} ... \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_n}} = \kappa^n(x)\,, \tag{8.1.8}$$

что приводит к полевому лагранжиану

$$\mathfrak{L} = g^{i_1 i_2 ... i_n} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_2}} ... \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_n}} \tag{8.1.9}$$

и уравнению поля, которому должна удовлетворять Мировая функция,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{i i_1 i_2 ... i_{n-1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_2}} ... \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_{n-1}}} \right) = 0\,, \tag{8.1.10}$$

при выполнении дополнительного условия

$$g^{i_1 i_2 ... i_n} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_2}} ... \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_n}} > 0\,. \qquad (8.1.11)$$

Любая линейная комбинация компонент произвольной аналитической функции поличисловой переменной (см. раздел 4.7) удовлетворяет уравнению (8.1.10).

При $n > 2$ задача (8.1.10), (8.1.11) содержит решения, отличающиеся от линейной комбинации компонент аналитических функций поличисловой переменной.

8.2 Гиперкомплексный потенциал

Для некоторых систем поличисел существует базис с координатами, наиболее близкими к тем, к которым мы привыкли в повседневной жизни и которые фигурируют в классической нерелятивистской механике и СТО. Сформулируем требования, которые предъявляются такому физическому базису $1, j_1, j_2, ..., j_{n-1}$,

$$P_n \ni X = x^0\,1 + x^1\,j_1 + x^2\,j_2 + ... + x^{n-1} j_{n-1}\,. \qquad (8.2.1)$$

1. Такой базис должен содержать единицу алгебры поличисел, именно коэффициент при этом базисном элементе отождествляется с реальным физическим временем, а компонента аналитической функции при этом базисном элементе – с действительной частью потенциала $U \equiv S_W$.
2. В этом базисе при выполнении некоторых дополнительных условий для поличисел имеет место экспоненциальное представление поличисел

$$P_n \supset D \ni X = |X| e^{\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + ... + \alpha_{n-1} j_{n-1}}\,, \qquad (8.2.2)$$

где $|X|$ – норма поличисла; $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ – угловые переменные, а D – область определения ненулевой нормы поличисла.

3. При

$$|dx^\mu| \ll dx^0\,, \qquad dx^0 > 0 \qquad (8.2.3)$$

элемент длины в пространстве P_n приобретает вид элемента длины пространства Галилея, в котором координата x^0 может считаться абсолютным Ньютоновским временем, а пространство $x^1, x^2, ..., x^{n-1}$ есть пространство обобщённых координат некоторой свободной нерелятивистской физической системы, эволюционирующей по законам классической нерелятивистской механики.

Таким образом, базисные элементы $j_1, j_2, ..., j_{n-1}$ должны получаться из базисных элементов $E_2, E_3, ..., E_n$ (см. раздел 4.6) невырожденным линейным преобразованием.

Итак, пусть $U(x) \equiv S_W(x)$ – действительная компонента гиперкомплексного потенциала. Это означает, что $U(x)$ – компонента аналитической функции поличисловой переменной при единице в физическом базисе, то есть функция $U(x)$ является решением задачи (8.1.10), (8.1.11). Поле обобщённых импульсов определяется формулой

$$\tilde{p}_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x^i}\,, \tag{8.2.4}$$

а поле скоростей

$$\dot{x}^i = n \cdot g^{ii_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \tilde{p}_{i_1}(x) \tilde{p}_{i_2}(x) \ldots \tilde{p}_{i_{n-1}}(x) \cdot \lambda(x)\,, \qquad \lambda(x) > 0 \tag{8.2.5}$$

определяет нормальную конгруэнцию мировых линий.

Проанализируем последнюю формулу. Только при $n = 2$ компоненты скорости есть линейные комбинации компонент обобщённого импульса. Двумерные невырожденные поличисла исчерпываются двумя алгебрами: комплексные числа и двойные числа, или H_2. Для пространств $\tilde{P}_{n>2}$ компоненты скорости являются однородными полиномами $(n-1)$-ой степени компонент обобщённого импульса.

Замечание. Тензор $g^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ можно использовать для поднятия нижнего или нижних индексов, но такая процедура качественно отличается от процедуры поднятия индекса тензором с двумя верхними индексами.

8.3 Интерпретация

Поле обобщённых импульсов $\tilde{p}(x)$ (8.2.4) и поле скоростей $\dot{x}$ (8.2.5) определяют некий физический Мир, который можно попытаться интерпретировать непосредственно, но существуют и другие возможности, одну из которых мы рассмотрим в данном разделе.

Используя поле обобщённых импульсов $\tilde{p}(x)$ (8.2.4), построим тензор

$$g^{ij}(x) = \frac{1}{\kappa^n(x)}\, g^{ij i_1 i_2 \ldots i_{n-2}}\, \tilde{p}_{i_1}(x) \tilde{p}_{i_2}(x) \ldots \tilde{p}_{i_{n-2}}(x)\,. \tag{8.3.1}$$

Предположим, что $det(g^{ij}(x)) \neq 0$, это является условием только на функцию $U(x)$ (см. раздел 4.7). Тогда можно построить тензор с двумя нижними индексами $g_{ij}(x)$:

$$(g_{ij}(x)) = (g^{ij}(x))^{-1}\,. \tag{8.3.2}$$

С помощью этого тензора в том же самом координатном пространстве определим ещё одну геометрию с элементом длины вида

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j}\,, \tag{8.3.3}$$

то есть квадратичную геометрию.

Докажем, что такая геометрия имеет нормальную конгруэнцию экстремалей и поле обобщённых импульсов, которые совпадают с нормальной конгруэнцией экстремалей и полем обобщённых импульсов, определяемых гиперкомплексным потенциалом $U(x)$.

Для метрической функции, которая стоит в правой части формулы (8.3.3), вычислим компоненты обобщённого импульса

$$\check{p}_i = \frac{g_{ij}(x)dx^j}{\sqrt{g_{km}(x)dx^k dx^m}}\,. \tag{8.3.4}$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы тогда запишется следующим образом:

$$g^{ij}(x)\check{p}_i\check{p}_j - 1 = 0\,, \tag{8.3.5}$$

или

$$g^{iji_1i_2...i_{n-2}}\,\check{p}_i\check{p}_j\tilde{p}_{i_1}(x)\tilde{p}_{i_2}(x)...\tilde{p}_{i_{n-2}}(x) - \kappa^n(x) = 0\,. \tag{8.3.6}$$

Пусть функция $\check{S}(x)$ определяет некоторую нормальную конгруэнцию экстремалей в квадратичной геометрии (8.3.3), тогда она должна удовлетворять уравнению [1] Гамильтона-Якоби

$$g^{iji_1i_2...i_{n-2}}\,\frac{\partial\check{S}}{\partial x^i}\frac{\partial\check{S}}{\partial x^j}\,\tilde{p}_{i_1}(x)\tilde{p}_{i_2}(x)...\tilde{p}_{i_{n-2}}(x) - \kappa^n(x) = 0\,. \tag{8.3.7}$$

Очевидно, что $\check{S}(x) = U(x)$ является решением этого уравнения, так как превращает его в тождество.

Записав для геометрии (8.3.3), (8.3.5) с $\check{S}(x) = U(x)$ поле скоростей, получим, что оно совпадает с полем скоростей (8.2.5).

Таким образом, нормальная конгруэнция экстремалей (8.2.5) в финслеровом пространстве $\tilde{P}_n$ вместе с полем импульсов (8.2.4) совпадают с нормальной конгруэнцией экстремалей и полем импульсов в квадратичном пространстве с элементом длины (8.3.3).

Итак, вместо того, чтобы интерпретировать результаты полученные в пространстве $\tilde{P}_n$, можно это делать в n-мерном квадратичном пространстве V_n. Пространство V_n будет представлять собой псевдоевклидовое пространство, в котором введены криволинейные координаты, возможно, с особыми точками, линиями, кривыми и даже "вырезанными" областями. Конечно, вне особых объектов пространство (8.3.3) является плоским, то есть тензор кривизны вне особенностей тождественно равен нулю

$$R_{ijkl} \equiv 0\,. \tag{8.3.8}$$

8.4 Нарушение гиперкомплексного потенциала

Предположим, что конформный потенциал S_W отличается от действительной части U гиперкомплексного потенциала на малую аддитивную добавку:

$$S_W(x) = U(x) + \varepsilon\Psi(x)\,, \qquad \varepsilon \to 0\,, \tag{8.4.1}$$

где $\Psi(x)$ – некоторая функция координат. Функция $U(x)$ есть решение уравнения поля (8.1.10). Потребуем, чтобы функция $S_W(x)$ удовлетворяла тому же уравнению поля с точностью до ε в первой степени включительно. Тем самым вместо нелинейного дифференциального уравнения в частных производных для функции $S_W(x)$ получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных для функции $\Psi(x)$, которую будем называть *нарушением гиперкомплексного потенциала.*

Конкретизируем предложенный алгоритм на примере исходного пространства H_4. Уравнение поля для конформного потенциала $S_W(\xi)$ в пространстве, конформно связанным с пространством H_4, в изотропных координатах $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ имеет вид (7.1.8):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right) + \\ +\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi^4}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\right) = 0\,.\end{gathered} \tag{8.4.2}$$

Произвольная функция, зависящая не от всех координат $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, удовлетворяет этому уравнению, но не удовлетворяет условию (8.1.11), которое в данном конкретном случае запишется как

$$\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4} > 0\,.$$

В самом общем случае действительная часть гиперкомплексного потенциала в данной ситуации запишется следующим образом:

$$U(\xi) = f_1(\xi^1) + f_2(\xi^2) + f_3(\xi^3) + f_4(\xi^4)\,. \tag{8.4.3}$$

Для того, чтобы выполнялось условие (8.1.11), потребуем выполнения неравенства

$$\frac{df_1}{d\xi^1}\frac{df_2}{d\xi^2}\frac{df_3}{d\xi^3}\frac{df_4}{d\xi^4} > d > 0\,, \tag{8.4.4}$$

где d – некоторая постоянная.

Подставим в уравнение (8.4.2) $S_W(\xi) = U(\xi) + \varepsilon\Psi(\xi)$ и сохраним лишь члены, содержащие ε в нулевой и первой степени. Так как функция $U(\xi)$ является решением уравнения (8.4.2), получим в результате уравнение для функции $\Psi(\xi)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial f_4}{\partial\xi^4}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \frac{\partial f_2}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_4}{\partial\xi^4}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^1\partial\xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_3}{\partial\xi^3}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^1\partial\xi^4} + \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_4}{\partial\xi^4}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2\partial\xi^3} + \frac{\partial f_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_3}{\partial\xi^3}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2\partial\xi^4} + \frac{\partial f_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_2}{\partial\xi^2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^3\partial\xi^4} = 0\,.\end{aligned} \tag{8.4.5}$$

Условие (8.4.4) позволяет перейти в последнем уравнении к новым переменным:

$$\zeta^i = f_{i_-}(\xi^i)\,. \tag{8.4.6}$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^1\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^1\partial\zeta^3} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^1\partial\zeta^4} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2\partial\zeta^3} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2\partial\zeta^4} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^3\partial\zeta^4} = 0. \tag{8.4.7}$$

Наконец, перейдём к координатам x^0, x^1, x^2, x^3, которые можно назвать физическими и которые связаны с координатами $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\zeta^1 &= x^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\ x^1 + x^2 + x^3)\,,\\ \zeta^2 &= x^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\ x^1 - x^2 - x^3)\,,\\ \zeta^3 &= x^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}(-x^1 + x^2 - x^3)\,,\\ \zeta^4 &= x^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}(-x^1 - x^2 + x^3)\,.\end{aligned}\right\} \tag{8.4.8}$$

Тогда уравнение (8.4.7) приобретёт вид:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}\right]\Psi = 0\,. \tag{8.4.9}$$

Это ничто иное, как волновое уравнение, которое инвариантно относительно группы Пуанкаре.

Итак, множество нарушений гиперкомплексных потенциалов в четырёхмерном пространстве Бервальда-Моора раскладывается в сумму подмножеств, на которых реализуются неприводимые представления группы Пуанкаре.

Глава 9

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

В работе [41] впервые был предложен новый *геометрический подход* в теории поля, который применим к любому финслеровому пространству, для которого в каждой точке основного пространства $x^1, x^2, ..., x^n$ может быть определен объем индикатрисы $(V_{ind}(x^1, x^2, ..., x^n))_{ev}$ в предположении, что касательное пространство является евклидовым с декартовыми прямоугольными координатами в нём. В приближении *малых* полей геометрический подход в теории поля в первом приближении может приводить к линейным уравнениям для нескольких независимых полей. При усилении полей, то есть при переходе ко второму и следующим приближениям, полевые уравнения становятся, вообще говоря, нелинейными, и поля перестают быть независимыми, что приводит к отсутствию закона суперпозиции для каждого отдельного поля и к взаимодействию между разными полями. Проблема объединения в единой теории гравитационного и электромагнитного полей может найти решение, как нам видится, именно в таком геометрическом подходе в теории поля.

Основы геометрического подхода в теории поля изложены в разделе 1.8, а сам этот подход неоднократно использовался выше для геометрий, конформно связанных с плоскими финслеровыми пространствами. Действие S для полей, входящих в метрическую функцию n-мерного финслерова пространства, определяется с точностью до постоянного множителя как объем по некоторой n-мерной области $\mathcal{V}$:

$$S = const \cdot \int\limits_{\mathcal{V}}^{(n)} \frac{dx^1 dx^2 ... dx^n}{[V_{ind}(x^1, x^2, ..., x^n)]_{ev}} \,. \tag{9.0.1}$$

Таким образом, полевой лагранжиан определяется следующим образом:

$$\mathcal{L} = const \cdot \frac{1}{[V_{ind}(x^1, x^2, ..., x^n)]_{ev}} \,, \tag{9.0.2}$$

а принцип экстремальности действия

$$\delta S = 0 \tag{9.0.3}$$

превращается в принцип экстремальности любого объёма финслерова пространства.

Напомним *принцип самодостаточности финслеровой геометрии*: если метрическая функция финслерова пространства содержит неопределённое (незаданное) поле, то это поле должно удовлетворять принципу экстремальности любого объёма, то есть

$$\delta V = 0 \tag{9.0.4}$$

при условии, что вариация поля на границе объёма равняется нулю.

9.1 Псевдориманово пространство

Рассмотрим псевдориманово пространство с сигнатурой $(+,-,-,-)$, явно выделив в метрическом тензоре $g_{ij}(x)$ этого пространства метрический тензор $\overset{o}{g}_{ij}$ пространства Минковского,

$$g_{ij}(x) = \overset{o}{g}_{ij} + h_{ij}(x)\,. \tag{9.1.1}$$

Будем предполагать, что поле $h_{ij}(x)$ малое, то есть оно почти не меняет метрический тензор пространства Минковского

$$|h_{ij}(x)| \ll 1\,. \tag{9.1.2}$$

Лагранжиан псевдориманова пространства с сигнатурой $(+,-,-,-)$ (см. раздел 1.8) равен

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-det(g_{ij})}\,. \tag{9.1.3}$$

Вычислим величину $[-det(g_{ij})]$ до членов $|h_{ij}(x)|^2$ включительно:

$$-det(g_{ij}) \simeq 1 + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2\,, \tag{9.1.4}$$

где

$$\mathfrak{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{ij}\ h_{ij} \equiv h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33}\,, \tag{9.1.5}$$

а

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_2 = -h_{00}(h_{11} + h_{22} + h_{33}) + h_{11}h_{22} + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - \\ -h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 + h_{03}^2 + h_{02}^2 + h_{01}^2\,.\end{aligned} \tag{9.1.6}$$

Последнюю формулу можно переписать в более удобной форме:

$$\mathfrak{L}_2 = -\begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_{00} & h_{02} \\ h_{02} & h_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_{00} & h_{03} \\ h_{03} & h_{33} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{11} & h_{13} \\ h_{13} & h_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{22} & h_{23} \\ h_{23} & h_{33} \end{vmatrix} . \tag{9.1.7}$$

Тогда

$$\mathfrak{L} \simeq 1 + \frac{1}{2}\mathfrak{L}_1 + \frac{1}{2}\left[\mathfrak{L}_2 - \frac{1}{4}\mathfrak{L}_1^2\right] . \tag{9.1.8}$$

Для того, чтобы получить уравнения для малого поля в первом приближении надо использовать лагранжиан $\mathfrak{L}_1$, а во втором приближении – лагранжиан $\left(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 - \frac{1}{4}\mathfrak{L}_1^2\right)$.

9.2 Скалярное поле

Для единственного скалярного поля $\varphi(x)$ наиболее простое представление тензора $h_{ij}(x)$ имеет вид

$$h_{ij}(x) \equiv h_{ij}^{(\varphi)}(x) = \pm\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} , \tag{9.2.1}$$

поэтому

$$\mathfrak{L}_\varphi = \sqrt{-det(g_{ij})} = \sqrt{1 \pm \mathfrak{L}_1} \simeq 1 \pm \frac{1}{2}\mathfrak{L}_1 - \frac{1}{8}\mathfrak{L}_1^2 , \tag{9.2.2}$$

где

$$\mathfrak{L}_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)^2 . \tag{9.2.3}$$

В первом приближении используя лагранжиан $\mathfrak{L}_1$, получим следующее полевое уравнение:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^0\partial x^0} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^3\partial x^3} = 0 , \tag{9.2.4}$$

которое является волновым уравнением. Стационарное поле, зависящее только от радиуса

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} , \tag{9.2.5}$$

будет соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0\,, \tag{9.2.6}$$

интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\,C_1\,\frac{1}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(r) = C_0 + C_1\,\frac{1}{r}\,. \tag{9.2.7}$$

Во втором приближении надо использовать лагранжиан $\left(\mathfrak{L}_1 - \frac{1}{4}\,\mathfrak{L}_1^2\right)$, при этом получаем уравнение поля во втором приближении:

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\left(\pm 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}_1\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right] = 0\,. \tag{9.2.8}$$

Это уравнение уже является нелинейным.

Точное уравнение поля для тензора $h_{ij}(x)$ (9.2.1) запишется следующим образом:

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}}{\sqrt{1 \pm \mathfrak{L}_1}}\right) = 0\,. \tag{9.2.9}$$

В этом случае стационарное поле, зависящее только от радиуса, должно соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\dfrac{d\varphi}{dr}}{\sqrt{1 \mp \left(\dfrac{d\varphi}{dr}\right)^2}}\right) = 0\,, \tag{9.2.10}$$

интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{C_1}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(r) = C_0 + \int\limits_r^\infty \frac{C_1}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}}\,dr\,. \tag{9.2.11}$$

Поле с верхним знаком и поле с нижним знаком качественно различаются: верхний знак ("+" в формуле (9.2.1)) дает поле конечное без особенностей во всем пространстве, нижний знак ("−" в формуле (9.2.1)) дает поле определенное везде, кроме сферической области

$$0 \le r \le \sqrt{|C_1|}\,, \tag{9.2.12}$$

в которой поле отсутствует, причем при

$$r > \sqrt{|C_1|}\,, \quad r \to \sqrt{|C_1|} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\varphi}{dr} \to -\,C_1 \cdot \infty\,. \tag{9.2.13}$$

В то же время на бесконечности ($r \to \infty$) оба решения $\varphi_\pm(r)$ ведут себя как решение (9.2.7) волнового уравнения.

Зная лагранжиан, можно записать тензор энергии импульса T^i_j для полученных решений и попытаться вычислить энергию системы, деленную на c (скорость света):

$$P_0 = const \int^{(3)} T^0_0 dV\,. \tag{9.2.14}$$

Для полученных стационарных сферически симметричных решений имеем

$$T^0_0 = -\,\frac{r^2}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}}\,, \tag{9.2.15}$$

поэтому и для верхнего, и для нижнего знака $|P_0| = \infty$.

Метрический тензор (9.1.1), (9.2.1) – простейший способ "включения" гравитационного поля в пространстве Минковского – исходном плоском пространстве, не содержащем полей. Аддитивно добавляя еще несколько таких слагаемых как (9.2.1) в метрический тензор, мы сможем описывать все более сложные гравитационные поля с тензором $h_{ij} = h^{(grav)}_{ij}$.

9.3 Ковариантное векторное поле

Для того, чтобы из один раз ковариантного поля $A_i(x)$ построить симметрический дважды ковариантный тензор $h_{ij}(x)$, не прибегая к использованию объектов связности, вспомним, что альтернированная частная производная от тензора есть тензор,

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\,, \tag{9.3.1}$$

но антисимметрический. Построим на основе тензора F_{ij} симметрический тензор. Для этого вначале запишем скаляр

$$\mathfrak{L}_A = \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} F_{ik}F_{jm} = 2\, \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right), \tag{9.3.2}$$

откуда следуют выражения для двух симметрических тензоров

$$h^{(1)}_{ij} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j}\frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right), \tag{9.3.3}$$

$$h_{ij}^{(2)} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2 \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^i} \right) . \tag{9.3.4}$$

Заметим, что не только F_{ij} и $\mathfrak{L}_A$, но и тензоры $h_{ij}^{(1)}$, $h_{ij}^{(2)}$ являются градиентно инвариантными, то есть не изменяются при преобразовании

$$A_i \to A_i + \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} , \tag{9.3.5}$$

где $f(x)$ – произвольная скалярная функция.

Пусть

$$h_{ij} \equiv h_{ij}^{(A_k)} = \chi(x)\, h_{ij}^{(1)} + [1 - \chi(x)]\; h_{ij}^{(2)} , \tag{9.3.6}$$

где $\chi(x)$ – некоторая скалярная функция. Тогда в первом приближении получим

$$\mathfrak{L}_1 = 2\, \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right) \equiv \mathfrak{L}_A , \tag{9.3.7}$$

то есть в первом приближении для поля $A_i(x)$ следует выполнение уравнений Максвелла:

$$\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} A_k - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) = 0 . \tag{9.3.8}$$

Если принять лоренцевскую калибровку

$$\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} = 0 , \tag{9.3.9}$$

то уравнения (9.3.8) принимают вид

$$\Box A_k = 0 . \tag{9.3.10}$$

Вполне возможно, (9.3.6) не самая общая запись тензора h_{ij}, который в первом приближении дает уравнения поля, совпадающие с уравнениями Максвелла.

Для того, чтобы получит уравнения Максвелла не для свободного поля, а с заданными источниками $j_i(x)$, надо аддитивно добавить к $h_{ij}^{(A_k)}$ (9.3.6) еще тензор

$$h_{ij}^{(j_k)} = \left(\frac{16\pi}{c} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(A_i j_j + A_j j_i \right) , \tag{9.3.11}$$

то есть метрический тензор (9.1.1) с тензором

$$h_{ij} = h_{ij}^{(Max)} \equiv h_{ij}^{(A_k)} + h_{ij}^{(j_k)} \tag{9.3.12}$$

описывает малое электромагнитное поле с источниками поля $j_k(x)$. При этом следует отдавать себе отчет в том, что мы считаем поле $j_k(x)$ заранее заданным, а не получающимся из уравнений поля.

Таким образом, метрический тензор (9.1.1) с тензором

$$h_{ij} = \mu h_{ij}^{(A_k)} + \gamma h_{ij}^{(grav)}\,, \tag{9.3.13}$$

где μ, γ – фундаментальные постоянные, в рамках единой псевдоримановой геометрии описывает одновременно свободное электромагнитное и свободное гравитационное поле. Для того, чтобы такая теория включала в себя еще и источники электромагнитного поля $j_k(x)$, необходимо, чтобы метрический тензор, кроме $j_k(x)$, содержал и частные производные этого поля или чтобы поле $j_k(x)$ выражалось через другие поля, например, как показано ниже. Возможен и другой подход: использование условного экстремума, когда некоторые источники пола задаются "руками".

Если гравитационное поле "включено" простейшим образом, как это показано в предыдущем разделе, источники электромагнитного поля можно связать со скалярным полем следующим образом:

$$j_i(x) = q\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,. \tag{9.3.14}$$

В этом случае в первом приближении в случае лоренцевой калибровки имеем

$$\Box A_k = \frac{4\pi}{c} j_k\,, \tag{9.3.15}$$

$$\Box\varphi = 0\,. \tag{9.3.16}$$

А так как плотность тока имеет вид (9.3.14), то из уравнения (9.3.16) следует уравнение непрерывности

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial j_i}{\partial x^j} = 0\,. \tag{9.3.17}$$

9.4 Несколько малых полей

Переход от малых к "более сильным" полям может приводить к переходу от линейных уравнений поля для независимых полей к нелинейным уравнениям поля для взаимосвязанных взаимодействующих полей. Покажем это на примере двух малых скалярных полей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, "включающих" гравитационное поле в пространстве Минковского.

Пусть

$$h_{ij} = \varepsilon_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}, \tag{9.4.1}$$

где ε_φ, ε_ψ – независимые знаковые коэффициенты. Тогда точный лагранжиан может быть записан следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\varphi,\psi} = \sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}\,, \tag{9.4.2}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{ij} \left(\varepsilon_\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j} \right)\,, \tag{9.4.3}$$

а

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = \varepsilon_\varphi\,\varepsilon_\psi\ \Bigg[&- \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^0} \right)^2 \\ &- \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^0} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^1} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^2} \right)^2 \Bigg]\,.\end{aligned} \tag{9.4.4}$$

Формула (9.4.4) проще всего получается из формулы (9.1.7), если использовать следующую упрощающую формулу:

$$\begin{vmatrix} h_{ii_-} & h_{i_-j_-} \\ h_{i_-j_-} & h_{jj_-} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x^{i_-}} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{j_-}} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x^j} \end{vmatrix}^2 = \pm \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\frac{\partial\psi}{\partial x^i} \right)^2 . \tag{9.4.5}$$

В первом приближении в качестве лагранжиана следует использовать $\mathcal{L}_1$, тогда уравнения поля суть система двух независимых волновых уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^0\partial x^0} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^3\partial x^3} = 0\,, \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x^0} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^3\partial x^3} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{9.4.6}$$

При этом поля $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ независимы и для них выполняется закон суперпозиции.

Используя точный лагранжиан для двух скалярных полей (9.4.1), получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}\left(1\pm\overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}\right)\mp\dfrac{\partial\psi}{\partial x^j}\,\overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1+\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2}}\right]=0\,,\\
&\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x^j}\left(1+\overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^s}\right)-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}\,\overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1+\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2}}\right]=0\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(9.4.7)$$

При этом поля $\varphi(x)$, $\psi(x)$ зависят друг от друга, и принцип суперпозиции для них не выполняется. Переход от уравнений (9.4.6) к уравнениям (9.4.7) можно рассматривать как переход от малых полей к "более сильным" полям.

9.5 Невырожденные поличисла P_n

Рассмотрим некоторую систему невырожденных поличисел P_n, то есть n-мерных ассциативно-коммутативных невырожденных гиперкомплексных чисел. Соответствующее координатное пространство $x^1, x^2, ..., x^n$ является финслеровым метрическим плоским пространством с элементом длины вида

$$ds=\sqrt[n]{\overset{o}{g}_{i_1 i_2 ... i_n}\,dx^{i_1}dx^{i_2}...dx^{i_n}}\,,\qquad(9.5.1)$$

$\overset{o}{g}_{i_1 i_2 ... i_n}$ – метрический тензор, не зависящий от точки пространства. Такого рода финслеровы пространства встречаются в математической литературе (см., например, [49] – [52]), но то, что все невырожденные поличисловые пространства относятся именно к такому типу финслеровых пространств, было установлено, начиная с работ [28], [34] и в последующих работах тех же авторов, особо следует выделить работу [42].

Компоненты обобщенного импульса в геометрии (9.5.1) вычисляются по формулам:

$$p_i=\frac{\overset{o}{g}_{ij_2...j_n}\,dx^{j_2}...dx^{j_n}}{\left(\overset{o}{g}_{i_1 i_2 ... i_n}\,dx^{i_1}dx^{i_2}...dx^{i_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}}\,.\qquad(9.5.2)$$

Все невырожденные поличисловые пространства разрешимы, поэтому тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве невырожденных поличисел P_n всегда можно записать [42] в виде:

$$\overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 ... i_n}\,p_{i_1}p_{i_2}...p_{i_n}-\mu^n=0\,,\qquad(9.5.3)$$

где $\mu > 0$ – некоторая постоянная. Причём всегда найдется такой специальный базис и такое $\mu > 0$, что матрица метрического тензора и матрица тензора, фигурирующего в тангенциальном уравнении индикатрисы, совпадают:

$$\left(\overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \ldots i_n}\right) = \left(\overset{o}{g}{}_{i_1 i_2 \ldots i_n}\right) . \qquad (9.5.4)$$

Перейдем к новой финслеровой геометрии на основе пространства невырожденных поличисел P_n, которая (новая геометрия) уже не является плоской, но отличие новой геометрии от исходной бесконечно мало, причем элемент длины в такой геометрии пусть имеет вид

$$ds = \sqrt[n]{\left[\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \ldots i_n} + \varepsilon h_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x)\right] dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_n}}\,, \qquad (9.5.5)$$

где ε – бесконечно малая величина. Если в исходном плоском пространстве инвариантный элемент объема определялся формулой

$$dV = dx^1 dx^2 \ldots dx^n\,, \qquad (9.5.6)$$

то в новом пространстве инвариантный элемент объёма с точностью до ε в первой степени запишется следующим образом:

$$dV_h \simeq \left[1 + \varepsilon \cdot C_0 \, \overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \ldots i_n} \; h_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x)\right] dx^1 dx^2 \ldots dx^n\,, \qquad (9.5.7)$$

то есть согласно геометрическому подходу в теории поля лагранжиан малого поля в пространстве с элементом длины (9.5.5) в первом приближении суть

$$\mathfrak{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 \ldots i_n} \; h_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x)\,. \qquad (9.5.8)$$

Эта формула является обобщением формулы (9.1.5).

9.6 Гиперкомплексное пространство H_4

В физическом базисе $1, j, k, jk$ (4.8.4), в котором каждая точка пространства H_4 характеризуется четырьмя действительными координатами x^0, x^1, x^2, x^3 (4.8.5), четвертая степень элемента длины ds_{H_4} определяется формулой

$$\begin{aligned}(ds_{H_4})^4 \equiv \overset{o}{g}_{ijkl}\, dx^i dx^j dx^k dx^l = \\ = (dx^0 + dx^1 + dx^2 + dx^3)(dx^0 + dx^1 - dx^2 - dx^3)\times \\ \times(dx^0 - dx^1 + dx^2 - dx^3)(dx^0 - dx^1 - dx^2 + dx^3) = \\ = (dx^0)^4 + (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 + 8dx^0dx^1dx^2dx^3 - \\ -2(dx^0)^2(dx^1)^2 - 2(dx^0)^2(dx^2)^2 - 2(dx^0)^2(dx^3)^2 - \\ -2(dx^1)^2(dx^2)^2 - 2(dx^1)^2(dx^3)^2 - 2(dx^2)^2(dx^3)^2\,.\end{aligned} \tag{9.6.1}$$

Сравним четвертую степень элемента длины ds_{H_4} в пространстве поличисел H_4 с четвертой степенью элемента длины ds_{Min} в пространстве Минковского:

$$\begin{aligned}(ds_{Min})^4 = (dx^0)^4 + (dx^1)^4 + (dx^2)^4 + (dx^3)^4 - \\ -2(dx^0)^2(dx^1)^2 - 2(dx^0)^2(dx^2)^2 - 2(dx^0)^2(dx^3)^2 - \\ +2(dx^1)^2(dx^2)^2 + 2(dx^1)^2(dx^3)^2 + 2(dx^2)^2(dx^3)^2\,.\end{aligned} \tag{9.6.2}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}(ds_{H_4})^4 = (ds_{Min})^4 + 8dx^0dx^1dx^2dx^3 - \\ -4(dx^1)^2(dx^2)^2 - 4(dx^1)^2(dx^3)^2 - 4(dx^2)^2(dx^3)^2\,,\end{aligned} \tag{9.6.3}$$

а в ковариантной записи имеем

$$(ds_{H_4})^4 = \left(\overset{o}{g}_{ij}\overset{o}{g}_{kl} + \frac{1}{3}\,\overset{o}{g}'_{ijkl} - \overset{o}{G}_{ijkl}\right) dx^i dx^j dx^k dx^l\,, \tag{9.6.4}$$

где

$$\overset{o}{g}'_{ijkl} = \begin{cases} 1\,, & \text{если индексы } i,j,k,l \text{ все разные,} \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{9.6.5}$$

$$\overset{o}{G}_{ijkl} = \begin{cases} 1\,, & \text{если } \ i,j,k,l \neq 0 \text{ и } i = j \neq k = l, \\ & \qquad\qquad \text{или}\, i = k \neq j = l, \\ & \qquad\qquad \text{или}\, i = l \neq j = k; \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{9.6.6}$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве H_4 в физическом базисе можно записать следующим образом:

$$(p_0+p_1+p_2+p_3)(p_0+p_1-p_2-p_3)(p_0-p_1+p_2-p_3)(p_0-p_1-p_2+p_3)-1=0\,, \tag{9.6.7}$$

где p_i – компоненты обобщенного импульса,

$$p_i = \frac{\partial\, ds_{H_4}}{\partial(dx^i)}\,. \tag{9.6.8}$$

Сравнивая формулу (9.6.7) с формулой (9.6.1), имеем

$$\overset{o}{g}{}^{ijkl}\; p_i p_j p_k p_l - 1 = 0\,. \tag{9.6.9}$$

Здесь

$$\overset{o}{g}{}^{ijkl} = \overset{o}{g}{}^{ij}\,\overset{o}{g}{}^{kl} + \frac{1}{3}\,\overset{o}{g'}{}^{ijkl} - \overset{o}{G}{}^{ijkl}\,, \tag{9.6.10}$$

причем

$$\left(\overset{o}{g}{}^{ijkl}\right) = \left(\overset{o}{g}_{ijkl}\right)\,, \quad \left(\overset{o}{g'}{}^{ijkl}\right) = \left(\overset{o}{g'}_{ijkl}\right)\,, \quad \left(\overset{o}{G}{}^{ijkl}\right) = \left(\overset{o}{G}_{ijkl}\right)\,. \tag{9.6.11}$$

Для того, чтобы задать лагранжиан для малых полей в первом приближении, надо задать тензор h_{ijkl} в формуле (9.5.8). В упрощенном варианте его можно разделить на две аддитивные составляющие: гравитационную часть и электромагнитную часть. Гравитационная часть может быть построена аналогично тому, как это делалось в данной главе выше, с учетом того, что возможно использование еще и двух индексных числовых тензоров, так как теперь тензоры $\overset{o}{g}{}^{ijkl}$ и h_{ijkl} имеют четыре индекса, а вот на том, как построить электромагнитную часть, следует остановиться подробнее.

Так как хотелось бы, сохранив градиентную инвариантность лагранжиана, получить и в пространстве H_4 для свободного поля уравнения Максвелла, запишем электромагнитную часть тензора h_{ijkl} для свободного поля следующим образом:

$$h^{A_k}_{ijkl} = \chi(x)\, h^{(1)}_{ijkl} + [1-\chi(x)]\; h^{(2)}_{ijkl}\,, \tag{9.6.12}$$

где тензоры $h^{(1)}_{ijkl}$, $h^{(2)}_{ijkl}$ – это тензоры, стоящие в круглых скобках в правых частях формул (9.3.3), (9.3.4). Тогда

$$\mathcal{L}_A = \overset{o}{g}{}^{ijkl}\; h^{A_k}_{ijkl} \equiv 2\,\overset{o}{g}{}^{ij}\,\overset{o}{g}{}^{km}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m}\right)\,. \tag{9.6.13}$$

Для того, чтобы получить уравнения Максвелла не для свободного поля, а с заданными источниками $j_i(x)$, надо аддитивно добавить к $h^{(A_k)}_{ijkl}$ (9.6.13) ещё тензор

$$h^{(j_k)}_{ijkl} = \left(\frac{16\pi}{c}\right)\cdot\frac{1}{6}\left(2A_i j_j \overset{o}{g}_{kl} - A_i \overset{o}{g}_{jk} j_l - j_i \overset{o}{g}_{jk} A_l\,,\right)\,, \tag{9.6.14}$$

симметризованный по всем индексам, то есть тензор

$$h_{ijkl} = h^{Max}_{ijkl} \equiv h^{(A_k)}_{ijkl} + h^{(j_k)}_{(ijkl)}$$

описывает малое электромагнитное поле с заданными источниками $j_i(x)$. Если же установить связь

$$j_i = \sum_b q_{(a)} \frac{\partial\psi_{(b)}}{\partial x^i}\,, \tag{9.6.15}$$

где $\psi_{(b)}$ – скалярные составляющие гравитационного поля, то и источники электромагнитного поля получаются на основе решений полевых уравнений.

Для того, чтобы получить единую теорию электромагнитного и гравитационного полей следует взять линейную комбинацию тензора $h^{(Max)}_{ijkl}$, отвечающего в первом приближении за электромагнитное поле, и тензора $h^{(grav)}_{ijkl}$, отвечающего в первом приближении за гравитационное поле:

$$h_{ijkl} = \mu h^{(Max)}_{ijkl} + \gamma h^{(grav)}_{ijkl}\,, \tag{9.6.16}$$

где μ, γ – фундаментальные постоянные постоянные. Тензор $h^{(grav)}_{ijkl}$ можно построить, например, так

$$h^{grav}_{ijkl} = \sum_{a=1}^{N} \varepsilon_{(a)} \frac{\partial\varphi_{(a)}}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi_{(a)}}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi_{(a)}}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi_{(a)}}{\partial x^l} + \sum_{b=1}^{M} \epsilon_{(b)} \frac{\partial\psi_{(b)}}{\partial x^{(i}}\frac{\partial\psi_{(b)}}{\partial x^j}\; \overset{o}{g}_{kl)}\,, \tag{9.6.17}$$

или

$$h^{grav}_{ijkl} = \sum_{a=1}^{N} \varepsilon_{(a)} \frac{\partial\varphi_{(a)}}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi_{(a)}}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi_{(a)}}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi_{(a)}}{\partial x^l} + \sum_{b=1}^{M} \epsilon_{(b)} \frac{\partial\psi_{(b)}}{\partial x^{(i}}\frac{\partial\psi_{(b)}}{\partial x^j}\; q_{kl)}\,, \tag{9.6.18}$$

где $\varepsilon_{(a)}$, $\epsilon_{(b)}$ – знаковые множители, $\varphi_{(a)}$, $\psi_{(b)}$ – скалярные поля, а тензор $q_{kl} = p^l_{ik} p^k_{lj}$. Общее количество скалярных полей в последних двух формулах равно $(N + M)$.

9.7 Выводы

Геометрический подход (см. раздел 1.8) в теории поля, который обычно дает нелинейные не разделяющиеся уравнения поля, для малых полей в первом приближении может дать систему независимых линейных уравнений. При усилении полей принцип суперпозиции (линейности) полей нарушается, уравнения поля становятся нелинейными и поля начинают взаимодействовать между собой. Можно считать, что эти изменения уравнений поля при переходе от малых к "более сильным" полям происходят за счет двух механизмов: во-первых, качественное изменение уравнений поля для свободных полей; во-вторых, появление дополнительных источников поля, то есть порождение данного поля другими полями.

В рамках геометрического подхода в теории поля происходит естественное объединение электромагнитного и гравитационного полей как в четырехмерном псевдоримановом пространстве с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, так и в четырехмерном кривом пространстве Бервальда-Моора с метрическим тензором $g_{ijkl}(x)$.

Глава 10

ТЕЗИСЫ

Одна из проблем, которая возникает при описании и изучении физического Мира: установление взаимно однозначного соответствия между событиями и точками некоторого координатного пространства x^0, x^1, x^2, x^3. Мы не будем предполагать, что эта проблема решена, а ограничимся более слабой гипотезой. Работая в координатном пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 и не думая ни о каком взаимно однозначном соответствии точек этого пространства с точками пространства событий, можно получать результаты в физических терминах и физических величинах. Достаточно уметь интерпретировать эти результаты, то есть уметь сопоставлять им физически измеряемые или наблюдаемые величины. Такая частичная связь между координатным пространством и физическим Миром устанавливается гораздо проще. Эту связь назовем *интерпретацией*, а задачу ее установления - *проблемой интерпретации*, и будем предполагать, что она (проблема интерпретации) тем или иным способом хотя бы частично решается.

Четырёхмерное координатное пространство x^0, x^1, x^2, x^3 является выделенным в математическом плане. В нём разрешен переход к любой другой системе координат:

$$x^{i'} = f^i(x^0, x^1, x^2, x^3)\,, \tag{10.0.1}$$

где f^i – достаточное число раз дифференцируемые функции, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между старыми и новыми координатами.

В основном пространстве для любой точки M всегда найдется такая система координат x^0, x^1, x^2, x^3, что в окрестности точки M координату x^0 можно отождествить с точностью до постоянного множителя с измеряемым временем, а координаты x^1, x^2, x^3 – с обычными декартовыми прямоугольными координатами евклидового трехмерного пространства, в котором мы привыкли себя ощущать и в которое мы себя мысленно помещаем.

Взяв за основу представления классической механики и предположив, что в каждой точке пространства событий находится материальная частица, "проследим" мысленно за этими частицами в результате чего, *получим конгруэнцию мировых линий*, которая (конгруэнция) соответствует физическому Миру. Кроме положения каждой частицы в любой момент времени, необходимы еще некоторые энергетические характеристики частицы. Таким образом, "в нулевом приближении" можно описать физический Мир и его эволюцию, если известна пара полей: *{поле скоростей; поле импульсов}* или *{поле обобщенных скоростей; поле обобщенных импульсов}*.

В данной главе попытаемся изложить некий общий взгляд, который сформировался у автора, на окружающую действительность через установление связей между геометрическими и физическими понятиями.

Для конкретности и краткости всё изложение в настоящей главе ведется в четырехмерном пространстве событий x^0, x^1, x^2, x^3 и, конечно, легко обобщается на замкнутую физическую систему, для описания которой требуется, вообще говоря, n-мерное пространство.

10.1 Гипотезы

1. Основное координатное пространство является финслеровым [1], то есть элемент длины в этом пространстве определяется формулой

$$ds = L(dx; x)\,, \tag{10.1.1}$$

где $L(dx; x)$ – метрическая функция.

2. Конгруэнция мировых линий, соответствующая физическому Миру, является *нормальной* [1]. Скалярная функция $S_W(x)$ (действие как функция координат, Мировая функция [39], конформный потенциал), которая определяет эту конгруэнцию, связана с физически измеряемыми полями.
3. Если основное координатное пространство не содержит физических полей, а значит и материальных объектов, то оно плоское.
4. Если имеется теоретическая возможность "выключать" физические поля, то после "выключения" всех физических полей получается плоское финслерово пространство, которое будем называть исходным.
5. Требование, чтобы исходное пространство являлось поличисловым, несет в себе не только математический, но и фундаментальный физический смысл, так как при этом каждому событию ставится во взаимно однозначное соответствие ассоциативно-коммутативное гиперкомплексное число.

6. Исходное пространство должно обладать следующим свойством: при
$$\left|\frac{dx^\alpha}{dx^0}\right| \equiv \varepsilon \ll 1$$
с точностью до членов порядка ε^2 включительно его метрическая функция должна совпадать с метрической функцией пространства Галилея:
$$L(dx) \simeq const \cdot \left[mc\, dx^0 - mc\,\frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{2dx^0}\right]. \qquad (10.1.2)$$
7. "Создание" модели физического Мира "в нулевом приближении" можно рассматривать как выбор некоторого исходного финслерова пространства, а затем наполнение этого пространства физическими полями, "включением" физических полей.
8. Все не заданные изначально физические поля должны удовлетворять полевым уравнениям [41], которые следуют из принципа *самодостаточности финслеровой геометрии* [41] (см. раздел 1.8).
9. *Принципа самодостаточности финслеровой геометрии* [41]: все неопределённые (незаданные) поля, которые присутствуют в метрической функции, должны удовлетворять необходимому условию экстремума любого объема при нулевой вариации полей на границе этого объёма.

10.2 Следствия

1. Пара *{поле скоростей; поле импульсов}* эквивалентна паре $\{S_W(x), L(dx;x)\}$, или паре $\{S_W(x), \Phi(x)\}$, где $\Phi(x)$ – функция Финслера, и понимается нами (любая из вышеперечисленных пар) как физический Мир (модель физического Мира в нулевом приближении).
2. Физическому Миру соответствует, вообще говоря, несколько, а возможно, и бесконечно много *качественно различных финслеровых геометрий*, то есть таких геометрий, которые не переходят одна в другую с помощью преобразования координат.
3. Таким образом, исходных финслеровых пространств также много. Но даже для одного основного финслерова пространства исходных финслеровых пространств может быть несколько, так как "выключать" поля можно по-разному.
4. Пусть в каждой точке основного пространства x^0, x^1, x^2, x^3 в соответствующем касательном пространстве может быть определен объем индикатрисы $[V_{ind}(x^0, x^1, x^2, x^3)]_{ev}$ в предположении, что касательное пространство является евклидовым, а координаты декартовы прямоугольные. Тогда действие I для полей, входящих в метрическую функцию

финслерова пространства, в любой системе координат определяется с точностью до постоянного множителя как объем некоторой четырехмерной области (см. раздел 1.8):

$$I = const \cdot \int_V^{(4)} \frac{dx^0 dx^1 dx^2 dx^3}{[V_{ind}(x^0, x^1, x^2, x^3)]_{ev}}\,. \qquad (10.2.1)$$

Это означает, что полевой лагранжиан определяется следующим образом:

$$\mathfrak{L} = const \cdot \frac{1}{[V_{ind}(x^0, x^1, x^2, x^3)]_{ev}}\,. \qquad (10.2.2)$$

5. Особый интерес вызывают исходные пространства, которые являются пространствами невырожденных поличисел. Таких четырехмерных пространств всего три:

$$H_4 \equiv R \oplus R \oplus R \oplus R, \; P_{2+2\cdot 1} \equiv R \oplus R \oplus C, \; H_{2,2} \equiv C \oplus C. \qquad (10.2.3)$$

6. Поличисла H_4 наиболее близки нашим представлениям о пространстве событий как пространстве Минковского. С точностью до отношений скоростей к скорости света во второй степени включительно пространство H_4 и пространство Минковского совпадают.
7. Через Мировую функцию $S_W(x)$ выражается коэффициент растяжения-сжатия $\kappa(x) > 0$, который возникает при переходе от некоторого финслерова пространства с метрической функцией $L'(dx; x)$, которая не содержит независимого мультипликативного поля, к основному пространству с метрической функцией $L(dx; x)$, причем эти метрические функции связаны соотношением

$$L(dx; x) = \kappa(x)\, L'(dx; x)\,, \qquad (10.2.4)$$

что позволяет записать уравнения поля для Мировой функции $S_W(x)$ (см. главы 5 – 8).

10.3 Задачи

1. Из геометрических построений найти отношение массы протона к массе электрона.
2. Найти формулу для вычисления объема индикатрисы, которая задается в n-мерном пространстве $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ уравнением

$$g_{i_1 i_2 \dots i_n} \xi^1 \xi^2 \dots \xi^n = 1\,. \qquad (10.3.1)$$

3. Найти формулу для вычисления во втором и третьем приближении по параметру $\varepsilon \to 0$ объема индикатрисы, которая задается в n-мерном пространстве $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ уравнением

$$(g_{i_1 i_2 ... i_n} + \varepsilon \cdot h_{i_1 i_2 ... i_n})\, \xi^1 \xi^2 ... \xi^n = 1\,. \tag{10.3.2}$$

4. Доказать, что любая полилинейная форма представима в сверхсимметрическом виде или привести хотя бы один пример полилинейной формы, которую нельзя представить в сверхсимметрическом виде.
5. Если не все полилинейные формы представимы в сверхсимметрическом виде, найти условия (критерии), при которых полилинейная форма представима или не представима в сверхсимметрическом виде.
6. Доказать, что любая сверхсимметрическая форма m-го порядка в n-ом пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$, представленная в сверхсимметрическом виде

   $$\omega_{i_1 i_2 ... i_m} x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_m}\,,$$

   содержится в разбиении полинома

   $$(x^1 + x^2 + ... + x^n)^m$$

   на полиномы, на которых реализуются неприводимые представления группы S_n.
7. Доказать, что задача (8.1.10), (8.1.11) в пространстве $P_{k+2\cdot m}$ при $n > 2$ обязательно содержит решения, не сводящиеся к линейной комбинации компонент аналитической функции соответствующей поличисловой переменной.
8. Для всякой ли невырожденной системы поличисел существует "ортонормированный" базис?
9. Описать все разрешимые полилинейные формы, которые не позволяют понижение порядка.

Литература

[1] Рашевский П. К.: Геометрическая теория уравнений с частными производными. М. - Л., ОГИЗ, 1947.

[2] Рашевский П. К.: Риманова геометрия и тензорный анализ. М., "Наука", 1967.

[3] Рашевский П. К.: О догмате натурального ряда, Успехи математических наук, Т. XXVIII, Вып. 4(172), 1973, с. 243 – 246.

[4] Кантор И. Л., Солодовников А. С.: Гиперкомплексные числа. М., "Наука", 1973.

[5] Свешников А. Г., Тихонов А. Н.: Теория функций комплексной переменной. М., 1967.

[6] Эльсольц Л. Э.: Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., "Наука", 1969.

[7] Гельфанд И. М.: Лекции по линейной алгебре, "Наука", М., 1971.

[8] Нетер Э: Инвариантные вариационные задачи. Вариационные принципы механики (сб. статей под ред. Полака Л. С.). М., "ГИФМЛ", 1959, стр. 611 – 630.

[9] Allenby, R. B. J. T.: An Introduction to Abstract Algebra, 2nd edition. Rings, Fields and Groups, 1991.

[10] Понтрягин Л. С.: Непрерывные группы. М., "Наука", 1973.

[11] Барут А., Рончка Р.: Теория представлений групп и её приложение, Т. 1. М., "Мир", 1980.

[12] Виленкин. Н. Я.: Специальные функции и теория представлений групп. М., "Наука", 1965.

[13] Гельфанд И. М., Фомин С. В.: Вариационное исчисление. М., "Государственное издательство физико-математической литературы", 1961.

[14] Колмогоров А. Н., Фомин С.В.: Элементы теории функций и функциональный анализ. М., "Наука", 1976.

[15] Корн Г., Корн Т.: Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., "Наука", 1970.

[16] Будак Б. М., Фомин С. В.: Кратные интегралы и ряды. М., "Наука", 1967.

[17] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: Механика. М., "Наука", 1965.

[18] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: Теория поля. М., "Наука", 1967.

[19] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: Квантовая механика. М., "Наука", 1948.

[20] Боголюбов Н. Н, Ширков Д. В.: Введение в теорию квантованных полей, М.: "Наука", 1973.

[21] Мёллер К.: Теория относительности. М., АТОМИЗДАТ, 1975.

[22] Богословский Г. Ю.. ДАН СССР, **213** (1973), 925.

[23] Богословский Г. Ю.: Теория локально анизотропного пространства-времени. М., Изд-во МГУ, 1992.

[24] Богословский Г. Ю.: Статус и перспективы теории локально анизотропного пространства-времени. Физика ядра и частиц (под ред. Ишханова Б. С. и др.). М., Изд-во МГУ, 1997.

[25] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H.F.: On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time. Phys. Lett. A 244 (1998) 222 – 228.

[26] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F.: Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry. Gen. Relativ. Gravit., 31 (1999) 1565–1603.

[27] Богословский Г. Ю.: 4-импульс частицы и уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(4), (2005), стр. 27 – 43.

[28] Павлов Д. Г.: Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1(1)** (2004), стр. 5 - 19.

[29] Павлов Д. Г.: Хронометрия трёхмерного времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1(1)** (2004), стр. 20 - 32.

[30] Павлов Д. Г.: Четырёхмерное время, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1(1)** (2004), стр. 33 - 42.

[31] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г.: Нормальное сопряжение на множестве поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2(2)** (2004), стр. 6 – 14.

[32] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И.: Понятия расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1(3)** (2005), стр. 6 – 14.

[33] Павлов Д. Г.: Симметрии и геометрические инварианты. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2(6)**, Т. 3 (2006), стр. 21 – 32.

[34] Гарасько Г. И.: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1(1)** (2004), стр. 75 – 88.

[35] Гарасько Г. И.: Тричисла, куб нормы которых – невырожденная триформа. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1(1)** (2004), стр. 128 – 139.

[36] Гарасько Г. И.: Обобщенно-аналитические функции и конгруенции геодезических. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2(2)** (2004), стр. 15 – 23.

[37] Гарасько Г. И.: Обобщенние понятия конформных преобразований. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике,**1(3)** (2005), стр. 16 – 25.

[38] Гарасько Г. И.: Связь элементарных обобщённо-конформных преобразований с обобщённо-аналитическими функциями в поличисловом пространстве. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2(4)** (2005), стр. 19 – 26.

[39] Гарасько Г. И.: О Мировой функции и связи между геометриями. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(5), Т. 3 (2006), стр. 3 – 18.

[40] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И.: Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(5), Т. 3 (2006), стр. 19 – 27.

[41] Гарасько Г. И.: Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(6), Т. 3 (2006), стр. 6 – 20.

[42] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г.: Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(7), Т. 4 (2007), стр. 3 – 25.

[43] Гарасько Г. И.: Частное стационарное решение уравнения поля для пространства, конформно связанного с пространством Минковского. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(7), Т. 4 (2007), стр. 26 – 37.

[44] Гарасько Г. И.: Пространство, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(7), Т. 4 (2007), стр. 38 – 51.

[45] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И.: Об аналоге решения Фридмана в финслеровом пространстве-времени Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(7), Т. 4 (2007), стр. 52 – 62.

[46] Гарасько Г. И.: Слабые поля. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(8), Т. 4 (2007), стр. 3 – 12.

[47] Чернов В. М.: Об определяющих уравнениях для элементов ассоциативно-коммутативных конечномерных алгебр и ассоциированных метрических формах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(4), 2005, стр. 57 – 74.

[48] McClure M. L., Dyer C. C.: Ayisotropy in the Hubble constant as jbserved in the HST Extragalactic Distance Scale Key Project results. arXiv:astro-po/0703556v1.

[49] Matsumoto M., Numata S.: On Finsler spaces with 1-form metric. Tensor, N.S., Vol. 32 (1978), p. 161.

[50] Matsumoto M., Numata S.: On Finsler spaces with 1-form metric II. Berwald-Moor's metric. Tensor, N.S., Vol. 32 (1978), p. 275.

[51] Matsumoto M., Numata S.: On Finsler spaces with a cubir metric. Tensor, N.S., Vol. 33 (1979), p. 153.

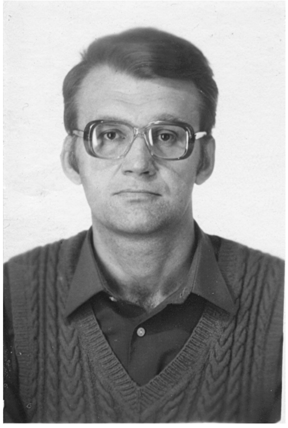
[52] Shimada H.: On Finsler spaces with the metric L of m-th root metric. Tensor, N.S., Vol. 33 (1979), p. 365–372.

[53] Камке Э.: Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., "Наука", 1976.

[54] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И.: Группа Лоренца как подгруппа комплексифицированных групп конформных преобразований пространств с метрикой

Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(9), Т. 5 (2008), стр. 3–11.

[55] Гарасько Г. И.: Нарушение гиперкомплексного потенциала в четырёхмерном пространстве Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(9), Т. 5 (2008), стр. 12–17.



Григорий Иванович Гарасько, к.ф.-м.н.,
с.н.с. лаборатории финслеровой геометрии
НИИ гиперкомплексных систем
в геометрии и физике,
с.н.с. ФГУП ВЭИ,
gri9z@mail.ru

$$\mathcal{L} = \frac{const}{V_{ind}}$$

G. I. Garas'ko

Basics of Finsler geometry for physicists

The monograph is dedicated to fundamental ideas, methods and physical applications of Finsler geometry. It has been shown that the physical World corresponds not only to one but to some class of Finsler geometries. The proposed self-efficiency principle of Finsler geometries permits to apply geometrical approach in the field theory in this case gravitation and electromagnetism unite in natural way. For spaces conformally associated with Finsler spaces the notion of conformal potential is introduced that gives possibility to create in arbitrary Finsler space of any dimension the analogue of the complex potential theory on Euclidian plane. The notion of conformal potential is closely connected with the notion of the World function.

Г. И. Гарасько

Начала финслеровой геометрии для физиков

НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике
http://www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru

ISBN 978-5-98396-012-1