O CYKLOIDE, NAJKRAJŠEJ KRIVKE NA SVETE. (Historicko - matematická exkurzia do 17. storočia s hodinárskym finále)

Hynek Bachratý, Katedra softvérových technológií, Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Žilina

Ako to začalo

Rozprávkový nadpis zvádza k úvodnej formulke „kde bolo, tam bolo“. My si ju trochu zmeníme na (od)kedy bolo. Aj keď sa ojedinele objavujú aj iné názory (spomínajú sa Bouvelles alebo Cusa) zdá sa, že roku 1599 alebo 1600 sa prvý zaoberal cykloidou sám veľký Galieo Galilei. Necháme na úvahy filozofov, či išlo o objav alebo vynález. V každom prípade ju prvý pomenoval, dostatočne jasne definoval a vytvoril jej drevené a kovové modely – dajú sa vidieť v Galileiho múzeu. Uskutočnil aj prvé skúmania a poznámky o jej význame. Odhadol veľkosť cykloidou ohraničenej oblasti – ovšem pomocou zváženia kovového odrezku z jej modelu. Postrehol jej krásu a navrhol ju ako tvar vhodný pre oblúky mostov. Nepodrobil ju ale dôkladnejšiemu matematickému skúmaniu, ktoré nechal až na svojich nasledovníkov.

Pri spomínaní „prvenstiev“ v tomto prípade treba upozorniť, že (nielen) počas celého 17. storočia bola cykloida jednou z najpopulárnejších, najsledovanejších a najskúmanejších kriviek. Všetky zásluhy od jej definovania, objavenie tých jednoduchších a neskôr stále viac a viac zložitejších geometrických vlastností až po jej opakované využitie v nových a nových oblastiach si môžu (a právom) pripísať mnohí veľkí matematici tohto obdobia. Opakované objavy priniesli mnohým viac či menej nepríjemné prekvapenia a sklamania, vzniklo aj niekoľko vtedy „populárnych“ sporov o prioritu. Dokonca už v 17. storočí sa písali historické traktáty o tom, „ako to naozaj bolo“. Treba si uvedomiť, že sa nachádzame v období kedy už síce zriedkavo, ale ešte stále pretrvávalo utajovanie výsledkov alebo súťaže v riešení úloh. Neexistovali ešte vedecké časopisy, ktoré nahrádzal len listový styk a osobné stretnutia. Nie vždy sa publikovali výsledky a objavy, ale často len „oznámenia“ o nich. Až v druhej polovici storočia vznikali prvé akadémie vied (resp. ich matematické „sekcie“), ktoré poskytovali seriózne fóra pre prezentovanie jednotlivých prác.

Ktorí matematici tohto obdobia sa teda cykloidou zaoberali? Skoro všetci. Bez nároku na úplnosť vymenujem aspoň tých najznámejších: Galileiho žiak Torricelli a ďalší Taliani Ricci a Viviani, Francúzi Mersenne, Pascal, Fermat, Roberval aj Descartes, Wallis a Wren v Anglii, Holanďan Huygens a Belgičan Sluze a mnohí ďalší. A na prelome do 18. storočia (ktoré už sledovať nebudeme) čakali na ďalšiu etapu Johann aj Jacob Bernoulli, Leibnitz, Newton aj l'Hospital.

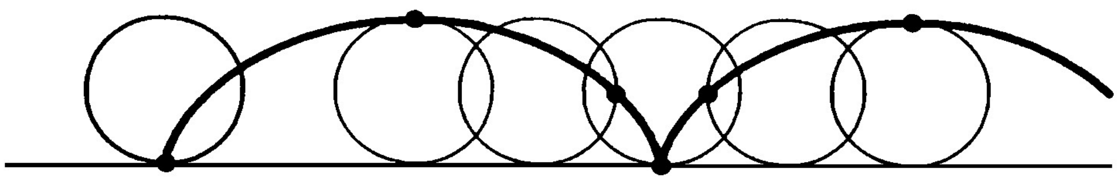
Pri takomto zozname hviezd matematického neba je určite na mieste otázka, čím ich priťahovala. Že išlo o vzťah silný, svedčí aj názov, ktorý v tomto období cykloida získala: Helena geometrov. Helena sa myslí tá trójska, a geometrami sa v tomto období nazývali matematici vo všeobecnosti. Takže aké sú dôvody?

- Pascal sa vyjadril, že cykloida je spolu s priamkou a kružnicou najčastejšou krivkou, ktorú stretávame v našom živote. V určitom zmysle mal pravdu, ale zrejme nejde o hlavný dôvod.

- Hlavne prvá časť 17. storočia je obdobím, v ktorom sa veľmi intenzívnym spôsobom zhromažďovali poznatky a skúsenosti vedúce k objavu infinitezimálneho počtu Leibnitzom a Newtonom v 80-tych rokoch. Ten samozrejme nespadol z neba, ale bol zavŕšením skúmania nových metód z budúceho diferenciálneho počtu (konštrukcie dotyčníc, extrémne polohy) a integrálneho počtu (kvadratúry, rektifikácie).
- Ďalšou súvisiacou novinkou je čerstvo objavená súradnicová sústava (Descartes, Fermat), ktorá umožnila nový popis skúmaných objektov a nové metódy riešenia (aj) vyššie spomenutých úloh.
- Tento intenzívny rozvoj matematiky si vyžadoval aj dostatok „experimentálneho materiálu“. Dnes by sme povedali že išlo o funkcie (a ich grafy), v tomto období ešte stále išlo skôr o krivky. A práve tu bol určitý problém. Už dlhé obdobie bol totiž výber dosť chudobný: notoricky známe kužeľosečky a vcelku ľahko zvládnuteľné a už zvládnuté polynomiálne krivky.
- Preto ako dar z nebies zapôsobila práve objavená cykloida. Išlo o zásadne iný typ krivky. Jej relatívne jednoduchý „fyzikálny“ popis umožňoval riešiť novými a inovatívnymi spôsobmi známe problémy, overovať už (na známych krivkách) použité postupy a metódy, a tiež s jej použitím vyriešiť nové, dovtedy nezvládnuté úlohy.
- A spomeniem ešte jeden dôvod, s ktorým dúfam na konci budete súhlasiť aj vy - cykloida je ozaj pekná...

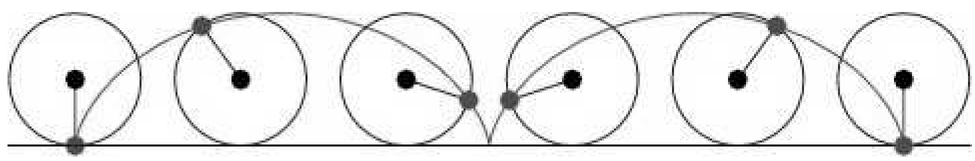
O kom je to reč?

Zrejme je najvyšší čas uviesť definíciu cykloidy. Nazývala sa tiež roulette, alebo podľa svojich vlastností tautochrona, izochrona, neskôr brachystochrona. Dobová definícia je



názorná: cykloida je krivka, ktorú ako svoju stopu zanecháva bod kružnice, ktorá sa kotúľa po rovnej podložke. Kotúľanie kružnice a tým aj jej pohyb vpred je pritom rovnomerný. Najlepšie to asi ilustrujú obrázky.

Z nich je aj jasné, čo sa nám snažil povedať Pascal. Točiace sa kolesá vozov a kočov boli vtedy častým obrazom ulíc a konce ich lúčov vykresľovali pre pozorné oko tisíce cykloíd denne.



V tomto okamžiku by sme mohli definíciu „preložiť“ do reči súčasnej analýzy a používať jej metódy pri riešení nasledujúcich úloh. Zostaňme však radšej v 17. storočí. Záujemcovia môžu súčasnú líniu sledovať paralelne, my si pomocou niekoľkých otázok ujasníme pohybovú definíciu. Otázky na seba nadväzujú a niektoré sa opakujú na „vyššej“ úrovni.

- Aké pohyby vykonáva kružnica „kresliaca“ cykloidu?
- Bod kružnice sa pri kreslení cykloidy pohybuje určitou rýchlosťou. Je táto rýchlosť rovnomerná alebo nie?
- Rýchlosť kresliaceho bodu si v každom okamžiku môžeme predstaviť ako vektor. Vieme ho rozdeliť na dva jednoduchšie? (Odpoveď na túto otázku je kľúčová, dajte si záležať. Mala by súvisieť s prvou odpoveďou.)

- Aká je konštrukcia vektora rýchlosti bodu? Je vektor vždy rovnako veľký?
- Pokiaľ by sme sa na kreslenie cykloidy pozerali „zozadu“, videli by sme len pohyb bodu hore a dole (vodorovný priemet). Je tento pohyb rovnomerný?
- Podobná otázka pre pohľad „zospodu“, pre kolmý priemet rýchlosti.
- V ktorom okamžiku sa bod pohybuje najrýchlejšie, kedy najpomalšie?
- To isté pre vodorovnú a kolmú zložku pohybu.
- Aký je smer vektora rýchlosti bodu v blízkosti najvyššieho a najnižšieho bodu cykloidy?
- Aká je vzdialenosť medzi dvomi nasledujúcimi spodnými polohami bodu?
- Aké sú periódy a symetrie cykloidy?

Pokiaľ ste sa úspešne s týmito otázkami vysporiadali, sme pripravení na ďalšie pokračovanie.

Najskôr trochu geometrie

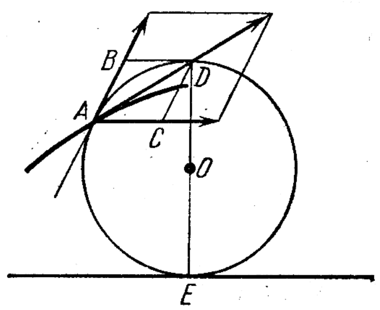
Konštrukcia dotyčnice ku cykloide je jednou zo základných úloh, ktorou často začínali aj vyššie spomenutí velikáni. Budeme nasledovať ich stopy. Priznávam, že mne sa objav tejto konštrukcie nepodaril, ale o to viac som ocenil jej krásu a jednoduchosť. Takže kto má chuť, teraz má čas zobrať si papier a pokúsiť sa objaviť riešenie. Ďalej budeme pokračovať v popise konštrukcie na obrázku.

Kľúčové je nakresliť si k cykloide a k dotykovému bodu na nej „vykreslujúcu“ kružnicu v príslušnej polohe. Aby sme lepšie uchopili smerovanie ďalších úvah, uvedieme si prekvapujúco jednoduchý návod na konštrukciu dotyčnice: bod dotyku treba spojiť s najvyšším bodom tejto kružnice. Ukážeme si prečo.

Začneme známou fyzikálnou úvahou: pokiaľ sa bod pohybuje po určitej dráhe, vektor okamžitej rýchlosti je dotyčnicou k nej. Hľadáme teda vlastne vektor tejto rýchlosti v bode ***A***.

Pokračujme vo fyzike. Z predchádzajúcej časti by sme mali vedieť, že táto rýchlosť je zložená z dvoch zložiek. Jedna je vodorovná, zodpovedá rovnomernému pohybu kružnice vpred. Druhá zodpovedá otáčaniu kružnice a smeruje preto po dotyčnici ku kružnici. Dôležité a kľúčové je uvedomenie si, že tieto dve zložky sú rovnaké. Treba sa pritom zamyslieť nad spodnou polohu bodu. Pokiaľ by rýchlosti rovnaké neboli, kružnica by pri kotúľaní po podložke preklzavala alebo podkĺzavala. V praxi to môžeme vidieť pri rýchlom štarte auta resp. zablokovaní bŕzd. Výslednú rýchlosť potom podľa známeho pravidla skladania dostaneme ako uhlopriečku príslušného kosoštvorca.

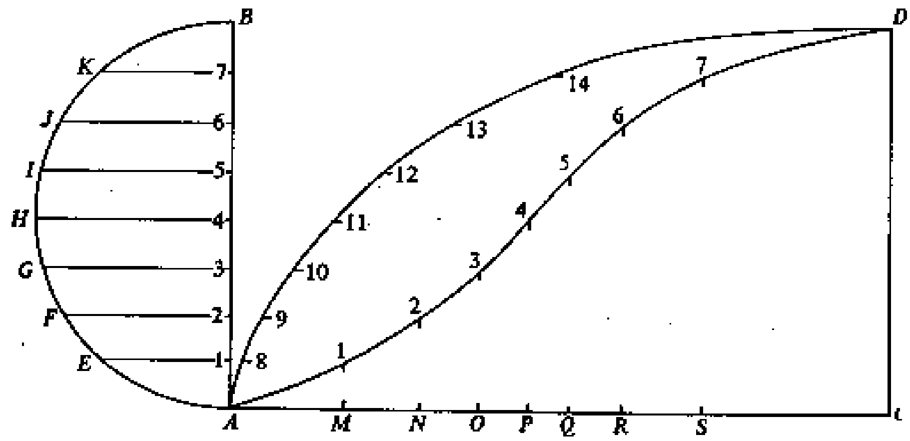
Skúsme sa teraz pozrieť, či túto správnu fyzikálnu úvahu vieme zladiť s inzerovanou konštrukciou. Označme ***D*** najvyšší bod kružnice a veďme ním rovnobežky s oboma vektormi (zložkami) rýchlosti. Dostávame rovnobežník ***ACDB***. Pokiaľ ukážeme, že ide o kosoštvorec, t.j. ***AB*** a ***BD*** sú rovnaké, na základe podobnosti prechádza výsledný vektor rýchlosti a teda aj hľadaná dotyčnica bodom ***D*** a naša konštrukcia je správna. K tomu si stačí všimnúť dva trojuholníky ***ABO*** a ***BDO***, kde ***O*** je stred kružnice. Ukážeme, že sú zhodné podľa vety ***Ssu***. Strany ***AO*** a ***AD*** sú rovnaké (polomer kružnice) a strana ***OB*** je spoločná. A pretože ***AB*** aj ***BD*** sú dotyčnice ku kružnici, uhly $\angle$***OAB*** aj $\angle$***ODB*** sú pravé a teda aj zhodné. Dotyčnica teda naozaj prechádza vrchným bodom kružnice ***D***. Ak si spomenieme na Tálesovu vetu môžeme ešte doplniť, že spojnica ***AE*** zodpovedá normále (kolmici) ku cykloide v bode ***A***.



Teraz trochu integrovania

Zatiaľ čo konštrukcia dotyčnice bola obvyklou „štartovacou“ úlohou, kvadratúra cykloidy, t.j. výpočet plochy ohraničenej jej oblúkom, bola častým vyvrcholením práce. Rôznymi zaujímavými spôsobmi ju zvládli takmer všetci z vyššie menovaných matematikov. Zdá sa, že

ako prvý svoj postup publikoval Torricelli (1644), ale podľa všetkého už okolo roku 1630 úlohu zvládal francúzsky matematik Gilles Roberval. Tento patril medzi významných matematikov svojej doby s veľmi zaujímavým osudom. Vyše 40 rokov bol profesorom na Kráľovskom kolégiu v Paríži. Na toto miesto sa každé tri roky usporadúval nový konkurz – súťaž v riešení úloh, ktoré zadával sám držiteľ tohto miesta. Roberval vďaka svojim metódam riešenia úloh rodiacej sa matematickej analýzy miesto získal v roku 1634 a potom ho mnohokrát obhájil. Keď túto situáciu domyslíte, dostanete logický a správny záver: Roberval nepublikoval takmer žiadny zo svojich objavov, maximálne oznámenia o tom, že k nim dospel (otázne je, čo vlastne učil...). Je tak jedným z najvýznamnejších predstaviteľov skupiny matematikov „čo by bolo, keby písal...“.
Našťastie jeho práce poznáme z pozostalosti a môžeme teraz oceniť krásny a priezračný spôsob jeho kvadratúry. Budeme ho sledovať na originálnom obrázku a takmer jeho slovami. (Detailný popis, z ktorého vychádzam nájdete na
http://www.maths.uwa.edu.au/~schultz/3M3/L17Roberval.html).

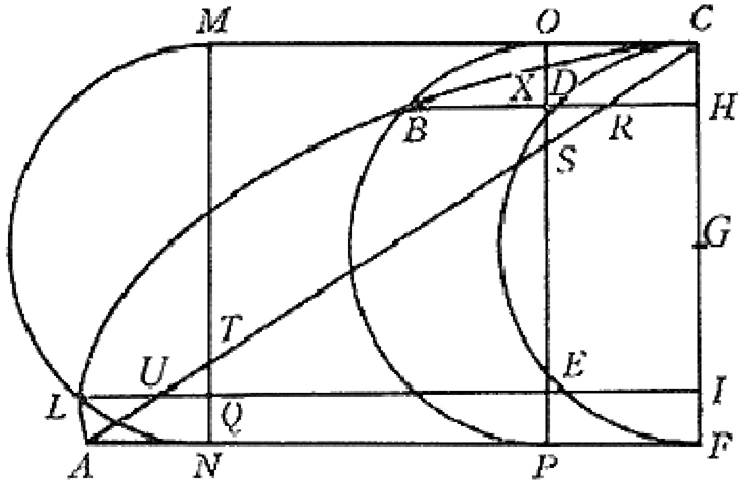


Polovica oblúku cykloidy je vlastne postupne vykreslená bodom ***A*** priemeru ***AB***. Pre vykreslenie každého bodu cykloidy tento priemer vykoná dva pohyby: najskôr posun doprava, a potom pootočenie okolo stredu. Na vykreslenie posledného bodu ***D*** sa teda priemer posunie úplne doprava a otočí hore nohami. Pre vykreslenie prvého bodu cykloidy **8** sa priemer najskôr posunie doprava do bodu ***M***, a potom príslušným pootočením vytvorí bod **8**. Ak by sme vynechali posun doprava, pootočením by vznikol bod ***E***.
Ale pozor, cykloida sa kreslí valením kružnice po podložke. Bod **8** si preto môžeme predstaviť nakreslený aj pootočením bodu ***A*** do body ***E*** za súčasného odvalenia kružnice doprava. Tá sa ale odvalí presne po oblúku ***AE*** (resp. po symetrickom oblúku v pravej polovici kruhu), a teda dĺžka oblúku ***AE*** je rovnaká ako úsečka ***AM***. Premyslite si, ako podobným spôsobom (posuniem a otočím, alebo otočím a odvalím) vznikli aj ďalšie body cykloidy **9**,**10**,... **14**. V tomto okamžiku sa dá nahliadnuť aj určitá symetria situácie, cykloidu by sme mohli kresliť aj opačným presunom priemeru z pozície ***CD*** do pozície ***AB***.
Teraz si ešte jemnejšie rozložíme rotačnú časť pohybu. Pootočenie bodu ***A*** do bodu ***E*** môžeme rozdeliť na dve fázy. Je to zdvihnutie z bodu ***A*** do (ľavého) bodu **1**, a potom posun doľava do bodu ***E***. Podobne pootočenie ***A*** do ***F*** zodpovedá zdvihu z ***A*** do **2** a posunu z **2** doľava do ***F*** atď. Teraz tento rozklad použijeme v postupe kreslenia cykloidy. Z pôvodného kreslenia bodu **8** si zoberieme najskôr posun priemeru doprava do bodu ***M*** a z rotácie len zdvihnutie do (pravého) bodu **1**. Vynechali sme teda posun doľava. Podobne vznikli pravé body **2**, **3**,... **7** a celá „S“ krivka v strede obrázku.
Nasleduje kľúčová úvaha. Vzdialenosť medzi (pozeraj zľava) bodmi ***E*** a **1** je rovnaká ako medzi **8** a **1**, vzdialenosť medzi bodmi ***F*** a **2** je rovnaká ako medzi bodmi **9** a **2** atď. Pridajte v tej dobe vcelku bežnú predstavu, že plochu je možnú vyskladať z nekonečného počtu úsečiek alebo nekonečne tenkých pásikov a máte prvý výsledok: plocha medzi krivkami **8**,**9**,**10**,... **14** (cykloidou) a **1**,**2**, **3**,... **7** je rovnaká ako plocha polovice „kresliaceho“ kruhu. Druhým kľúčom je uvedomenie si, že krivka **1**,**2**, **3**,... **7** je, ako sme už naznačovali,

symetrická. Ak ju preto nahradíme úsečkou ***AD*** (odporúčam dokresliť si), „stratená“ časť medzi úsečkou a touto krivkou (pozerané zľava) je rovnaká ako „získaná“ časť medzi krivkou a úsečkou v druhej časti. Preto aj plocha medzi cykloidou a úsečkou ***AD*** je rovnaká ako plocha polkruhu, t.j. $\frac{1}{2}\, \pi r^2$.

K ploche pod cykloidou už treba prirátať len obsah trojuholníka ***ACD*** (rozmery by ste mali poznať z otázok vyššie), a tá je $\frac{1}{2}\ (1/2\ .\ 2\pi r\ .\ 2r) = \pi r^2$. Spolu je plocha pod polovicou cykloidy $3/2\ \pi r^2$ a pod celým oblúkom $3\pi r^2$.

Verím, že aj vás tento postup očaril. Záujemcovia si môžu na adrese http://galileo.imss.firenze.it/multi/torricel/etorat32.html pozrieť aj Torricelliho postup. Ten pomocou trochu zložitejšej geometrie priamo smeruje k ploche medzi úsečkou ***AC*** a cykloidou. Ako motiváciu uvádzam jeho obrázok. Všimnite si chybne nakreslený začiatok cykloidy pri bode A. V čom chyba spočíva?



Najvyšší čas na čas

Ďalším hrdinom, ktorého si pri sledovaní osudov cykloidy všimneme podrobnejšie, je Holanďan Christian Huygens. Záber jeho aktivít bol veľmi široký: od matematiky a fyziky až po mechaniku. Známym sa stal už ako mladý zásluhou objavu prstencov planéty Saturn a jeho mesiaca Titan. Bol považovaný (a aj sám sa považoval) za „duchovného syna“ Galilea: vážil si ho a pracoval na veľmi podobných a niekedy rovnakých problémoch a projektoch. Pritom sa nikdy nestretli a boli často skôr súpermi.

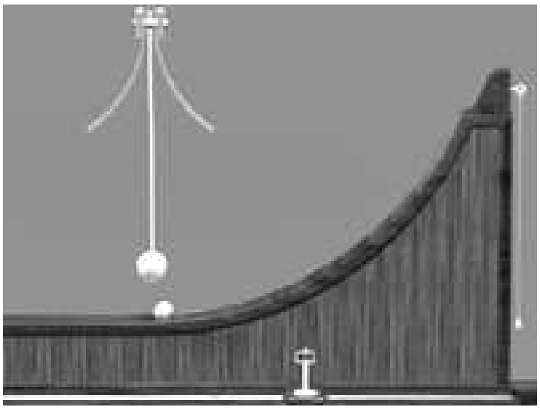
Pohľad na Huygensove aktivity musíme preto zúžiť. S cykloidou sa zrejme intenzívne zoznámil v roku 1658, keď sa zúčastnil súťaže v riešení 6 úloh o cykloide vyhlásenej Pascalom. (V súťaži nedopadol najhoršie, ale víťazom sa stal pod pseudonymom vystupujúci vyhlasovateľ).

Zhruba v tom istom období sa Huygens prvý krát zaoberal dosť odlišným problémom – zostrojením čo najpresnejších hodín. Táto úloha bol vtedy veľmi dôležitá a kľúčová pre ďalší rozvoj moreplavby, presnejšie navigácie. Na určenie zemepisnej šírky stačí merať výšku Polárky alebo iných objektov nad horizontom. Určenie zemepisnej dĺžky je zložitejší oriešok. Jednoduchým riešením sú presné hodiny nastavené na astronomický čas známeho miesta. Pokiaľ pri našom poludní (ktoré ľahko určíme napr. kompasom alebo dĺžkou tieňa) ukazujú 11 hodín, ste o jednu hodinu od tohto miesta na západ. Ak viete na akej ste rovnobežke a aké sú rozmery zemegule, viete si tento údaj prepísať do kilometrov a nájsť si svoju polohu v mape. K zložitosti tohto problému malý prepočet: pokiaľ pri plavbe po rovníku do Strednej Ameriky vo vtedy štandardnej dĺžke 30 dní vaše hodiny meškajú denne o jednu minútu, na konci ste „vedľa“ o cca 830 kilometrov. Pokiaľ sa chcete v noci vyhnúť nebezpečnému pobrežiu alebo na svitaní neočakávane zaútočiť na prístav, je to viac než dosť.

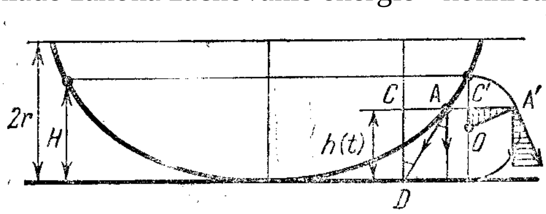
Mimochodom Huygens na tomto probléme pracoval v podstate na zakázku holandskej vlády. Uhádnete kto pre toho istého zadávateľa nad tou istou úlohou pracoval pár rokov skôr? Samozrejme Galilei. Vôbec pri tom nevadilo, že bol v dlhoročnom domácom vázení za známe „a predsa sa točí“. Galilei ponúkal originálne riešenie založené na pozorovaní vzájomných polôh ním objavených mesiacov Jupitera. Huygens veril klasike, čas chcel merať hodinami.

Najnovším výkrikom hodinárskej techniky boli v tomto období kyvadlové hodiny. Pre ich presnosť bolo kľúčové kyvadlo, ktoré malo v rovnakých, izochrónnych okamžikoch uvoľňovať energiu dodávanú závažím alebo pružinou na chod hodín. Táto energia zároveň udržiavala v chode aj kyvadlo. Na prvý pohľad ide o zacyklený problém: kyvadlo má zabezpečiť rovnomerné dávkovanie energie, k tomu by sa malo rovnomerne kývať, a k tomu by malo dostávať rovnomerne dávkovanú energiu.

Riešením je tzv. izochrónne kyvadlo, ktorého dĺžka kyvu (perióda kývania) nezáleží od jeho výchylky (amplitúdy kývania). Takéto kyvadlo vie eliminovať prvotné, nerovnomerné dávkovanie energie pre pohon kyvadla a umožní mu nezávisle na „nerovnomernom vstupe“ generovať „rovnomerný výstup“. Kyvadlo podrobnejšie skúmal asi ako prvý Galileo a bolo presvedčený, že klasické matematické kyvadlo, t.j. závažie na šnúrke, je izochrónne. Tento predpoklad dokonca využíval na meranie času pri svojich pohybových experimentoch a získal správne vzťahy pre rovnomerne zrýchlený pohyb a pod. Huygens asi ako prvý podrobne preskúmal toto tvrdenie (som zvedavý, akým prístrojom meral čas kolísania kyvadla) a odhalil, že platí len približne. Zistil, že pri malých výchylkách je kyvadlo takmer presné, pri väčších chyba rastie. Dĺžka kyvu pri výchylke 45^o má k časom pri minimálnych výchylkách pomer 34 ku 29. Túto nedokonalosť obyčajného kyvadla sa najskôr snažil riešiť ako mechanik. Do cesty kývajúcej sa šnúrke inštaloval sadu zarážok, takže pri väčších výchylkách sa skracovala „aktívna“ dĺžka kyvadla a skracoval aj čas kyvu. Ladením polôh zarážok vedel vylepšovať izochrónnosť kyvadla, ale tento postup ho neuspokojoval. V problému sa priebežne vracal a o 15 rokov neskôr sa rozhodol riešiť ho poriadne, matematicky.



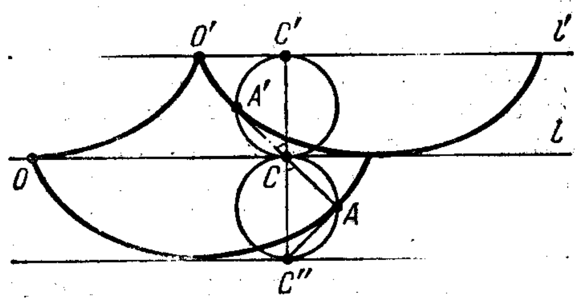
Začal tým, že z kyvadla odstránil šnúrku. Úlohu teraz musíme preformulovať: hľadáme takú krivku, z ktorej ľubovoľného bodu sa gulička skotúľa do dolnej polohy (prejde ňou) za rovnaký čas. Takáto krivka sa nazýva izochrónna alebo tautochrónna. Predchádzajúci odstavec by sa dal zhrnúť tak, že Galileo veril, že je to polkružnica. Huygens zistil, že to tak nie je a musel si vybrať iného kandidáta Určite už tušíte, že to bola cykloida. Ako presne na túto myšlienku prišiel nevieme, ale postup „skúsme, či to nebude cykloida“ bol v tomto období dosť rozšírený a používali ho aj ďalší. Samozrejme vzápätí uvidíme, že kľúčová bola aj rozhľadenosť Huygensa, ktorý sa dobre orientoval v mnohých oblastiach matematiky a fyziky a vedel ich prepájať. Samotný dôkaz, že cykloida má požadovanú vlastnosť nie je extra zložitý, ale ani triviálny. Preto ho popíšem len približne a obrázok je skôr informatívny. Huygens uvažuje o guličke, ktorá sa kotúľa „dolu cykloidou“ z výšky H. Okamžitú rýchlosť guličky vo výške ***h(t)*** vie určiť pomocou ***H*** na základe zákona zachovanie energie - konkrétne porovnaním jej kinetickej a pohybovej energie v čase ***t***. Vzhľadom na aj nám už známy súvis rýchlosti, dotyčnice a jej konštrukcie vie spočítať aj kolmú zložku tejto rýchlosti, tj. rýchlosť akou gulička klesá dole. Treba ukázať, že nezávisle od ***H*** je táto rýchlosť (samozrejme meniaca sa v čase) taká, že do výšky **0** sa gulička dostane vždy za rovnaký čas. Toto by bolo asi ťažké aj na Huygensa.



Teraz ale dostal geniálny nápad. Použije kružnicu s priemerom ***H*** (vidíme ju vpravo so stredom ***O***) a sleduje kolmú zložku rýchlosti pohybu bodu ***A´*** kružnice pri jej rovnomernom otáčaní. Je otázka odkiaľ tento nápad dostal. Mohol ho inšpirovať jasný súvis cykloidy a rotácie kružnice. Tiež je známe, že ako fyzik skúmal harmonické oscilačné pohyby. Vedel, že sú generované aj takýmito zložkami rýchlosti pri otáčaní bodu po kružnici a mohol si všimnúť podobnosť vzorčekov.

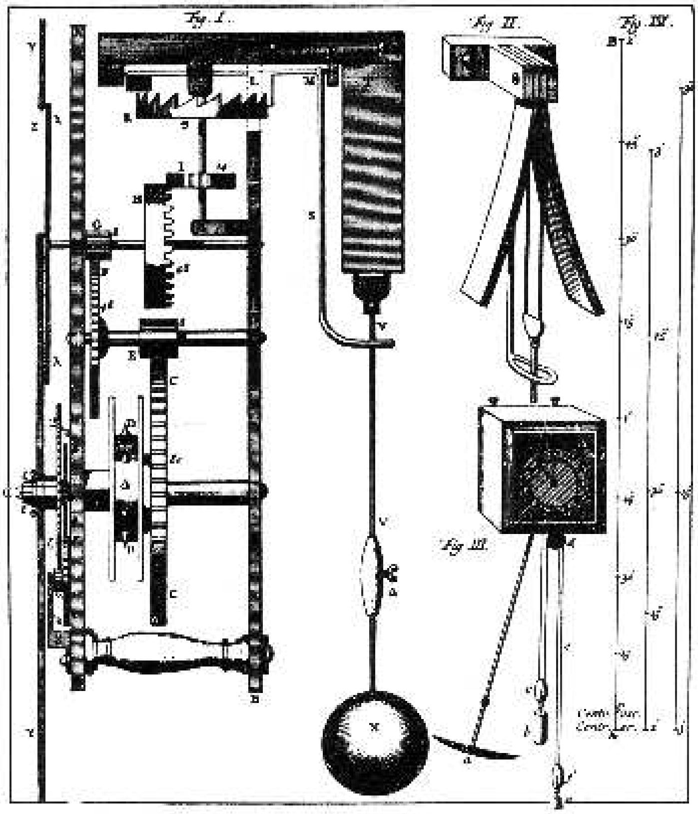
V každom prípade sa ukázalo, že pri vhodne zvolenej rýchlosti otáčania (v jej vyjadrení je opäť použitá aj hodnota ***H***) je vzorec popisujúci túto kolmú rýchlosť zhodný so vzorcom pre kolmú rýchlosť guličky kotúľajúcej sa po cykloide! Určenie času, za ktorý sa gulička skotúľa na „dno“ cykloidy sa teda mení na triviálnu otázku, za aký čas sa kružnica s priemerom ***H*** otočí známou rýchlosťou o polovicu. To už Huygens zrátal a podčiarkol. Vyšlo mu $T=4\pi\sqrt{(r/g)}$ (odmocnina až do konca). Vidíte to kúzlo? Hodnota ***H*** sa vykrátila a čas od nej nezávisí. Cykloida je ozaj hľadanou krivkou!
V tomto okamžiku by matematici a fyzici mohli začať oslavovať. Huygens ale stále bol aj hodinár a cykloida sa mu teraz zlomyseľne vyškierala: uviaž kyvadlo tak, aby sa jeho koniec pohyboval po mne! Našťastie Huygens už mal nazbierané skúsenosti so skracovaním kyvadla a vedel, že pokiaľ sa šnúra opiera o určité zarážky, zmení sa dráha kyvadla. V zásade keď sa kyvadlo upevnené v bode ***O´*** pri kývaní navíja na zvolenú „hornú“ krivku, táto tým určuje „dolnú“ krivku, po ktorej sa pohybuje jeho koniec (pozri krivky ***l´***a ***l*** na obrázku).

Svoje skúmanie Huygens začal takouto úvahou: šnúrka závažia z bodu ***A´***, kde sa prestáva dotýkať hornej krivky, smeruje po dotyčnici k tejto nej. Dôvod je fyzikálny, treba si premyslieť, ktorým smerom pôsobí odstredivá sila kyvadla a ako súvisia vektor sily, rýchlosti a dotyčnica. Úvaha ďalej pokračuje: dotyčnica k dolnej krivke v bode ***A*** smeruje po kolmici k rovnej časti šnúrky kyvadla ***A´A***. Tu máme k dispozícii pekné „analytické“ vysvetlenie: Ak by v bode ***A´*** končila horná, „navíjacia“ krivka, kyvadlo by sa za bodom ***A*** pohybovalo po kružnici a tvrdenie by bolo „sprava“ správne (dolná krivka za bodom ***A*** by mala tvar kružnice a pre ňu je dotyčnica kolmá na polomer). Táto zmena pohybu kyvadla v bodoch ***A*** resp. ***A´*** by ale bola bez „skoku“ (po našom spojitá), a teda musí platiť aj pre ľavú časť kriviek. Ak ale existuje dotyčnica v ***A***, je rovnaká pre ľavú, pravú a aj pre celú dolnú krivku. (Dnes by sme doplnili, že musí byť diferencovateľná, ale to bolo v 17. storočí ešte vidieť voľným okom.)
Opäť na vysvetlenie doplním, že rôzne spôsoby konštrukcie dotyčníc a normál ku krivkám pomocou vhodného „priloženia“ kružníc boli vtedy relatívne nové, ale o to populárnejšie a dostatočne známe.



Časť šnúrky kyvadla ***A´A*** tak určuje zvláštny súvis hornej a dolnej krivky: dotyčnice ku hornej sú zároveň normálami k dolnej. Dnes takéto dvojice kriviek nazývame involúta a evolúta. Objaviteľom tejto časti teórie kriviek je práve Huygens a prvý krát ju publikoval presne v dňoch, ktoré sledujeme v knihe o kyvadlových hodinách. Problém pritom riešil v skutočnosti všeobecnejšie a objavené postupy použil aj v iných prácach. My zostaneme pri našej úlohe a zamyslíme sa, aká je evolúta cykloidy. Má niekto nejaký návrh? Skúsime cykloidu? Áno, správna odpoveď. Treba ju len „o poschodie“ zdvihnúť a posunúť o polovicu doprava. Ukážeme si zdôvodnenie. Poloha dvoch zobrazených „kresliacich“ kružníc je potom symetrická, dolná kružnica urobila o polovicu otáčky viac ako horná. Čiara ***A´CA*** je teda (priama) úsečka a môže zodpovedať šnúrke kyvadla. Bod ***C*** je jej stred a body ***A´*** a ***A*** tiež ležia na o 180^o pootočených miestach kružnice. Preto podľa konštrukcie zo začiatku článku je pre bod ***A´*** bod ***C*** vrcholom kružnice a úsečka ***A´C*** je dotyčnicou, a pre bod ***A*** je bod ***C*** „spodkom“ kružnice a úsečka ***AC*** je normálou. Teraz je naozaj hotovo. Na ďalšom obrázku vidíme ilustráciu z Huygensovej knihy, kde je naozaj použité cykloidálne kyvadlo.

Ešte trochu analýzy



Diagrams from Huygens' Horologium oscillatorium (1673). The one labeled Fig. II shows the cycloidal jaws that caused the pendulum to swing in a cycloidal arc.

Obrázok cykloidy ako svojej vzájomnej involúty a evolúty nám triviálnym spôsobom dáva odpoveď na ešte jednu v 17. storočí dôležitú otázku. Stačí sledovať obrázok a odpovedať na triviálne otázky:

- Aká je dĺžka šnúrky kyvadla (v polomeroch „kresliacej“ kružnice cykloidy)?
- Aká je maximálna výchylka kyvadla, kde sa pri nej nachádza jeho koniec?
- Kde je v tomto okamžiku šnúrka kyvadla?
- Aká dlhá je polovica cykloidy?
- Aký dlhý je oblúk cykloidy?

Ak ste správne zvládli všetky otázky, posledná odpoveď je **8*r***. Zvládli sme teda „hodinárskym“ spôsobom rektifikáciu cykloidy. Aj tento výsledok má významné miesto v histórii. Prvému sa rektifikácia cykloidy podarila Angličanovi Christofferovi Wrenovi v roku 1658. Vzápätí jeho postup pochválil a zovšeobecnil sám Huygens. Jeho geometrickú rektifikáciu cykloidy môžete nájsť na http://tidsskrift.kb.dk/centaurus/volcontents.pl?per_id&vol_id=13. Ide už o ozaj ťažkú, ale stále čitateľnú geometriu. Na ukážku jeden z obrázkov. (Na stránke je možné nájsť aj veľa iných historických článkov a vrelo ju odporúčam.) Význam rektifikácie cykloidy spočíva v tom, že ide o prvú známu a publikovanú rektifikáciu vôbec (niektoré ďalšie úspešné výsledky už boli schované v šuplíkoch iných matematikov, ale ešte neboli známe). Medzi časťou matematikov dokonca panovalo presvedčenie, že na rozdiel od kvadratúr je rektifikácia matematikou neriešiteľný problém. Wren prelomil hranicu a Huygens ukázal, aké to môže byť s použitím kyvadla jednoduché.

Na koniec nový začiatok

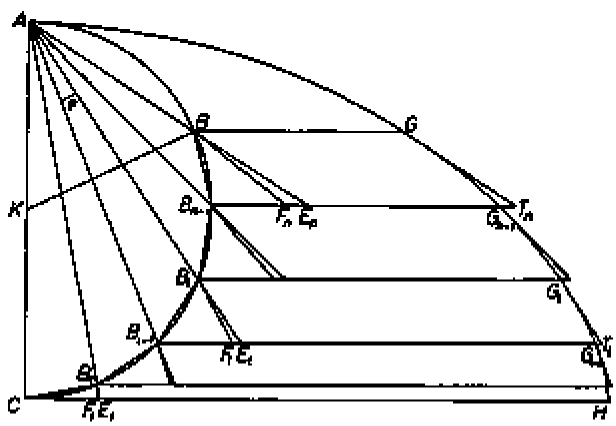


Fig. 2.

Huygensovými prácami sa zavŕšilo jedno obdobie skúmania cykloidy. Už v tomto okamžiku sa mohla odobrať na určite zaslúžený odpočinok. V roku 1696 si ale Johann Bernoulli položil inú veľmi jednoduchú otázku: Po akej krivke sa z daného bodu ***A*** do daného bodu ***B*** skotúľa gulička najskôr? Tušíte odpoveď? Ale o tom až nabudúce...

e-mail: hynek@kst.fri.utc.sk