§5. Недоопределенные СЛАУ

Альтернативным рассмотренному в предыдущем разделе классу СЛАУ с прямоугольной матрицей размера MxN, (при M>N) является случай, когда количество уравнений меньше количества неизвестных. Как несложно сообразить, такие системы либо имеют бесконечное число решений, либо не имеют решения вовсе. Ниже в этом разделе будут разобраны задачи, имеющие бесконечное множество решений.

Приведем пример аналитического решения единственного уравнения с двумя неизвестными (M=1, N=2):

$$x_1 - 2x_2 = 10 \quad . \tag{31}$$

Очевидно, что «решением» этого модельного примера является линейное соотношение между x_1 и x_2:

$$x_1 = 2x_2 + 10 \quad . \tag{32}$$

Хорошей визуализацией, подчеркивающей специфику данной задачи, будет график геометрического места его решений на плоскости (x_1, x_2) (рис. 16). Ясно, что решений бесконечно много, и все они находятся на прямой линии, задаваемой (31) или (32).

Отметим, что нам удалось решить задачу аналитически, причем число решений получилось бесконечным. Для того, чтобы получить возможность осмысленного численного решения подобных (уже не настолько тривиальных) задач, необходимо выделить из бесконечного множества решений одно, оправданное с математической точки зрения, и предложить алгоритм его поиска. Эта проблема решается посредством привлечения понятия *нормального псевдорешения*.

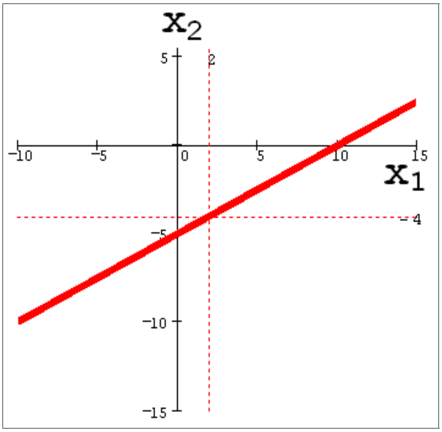

Рис. 16. *График всех решений уравнения (31)*

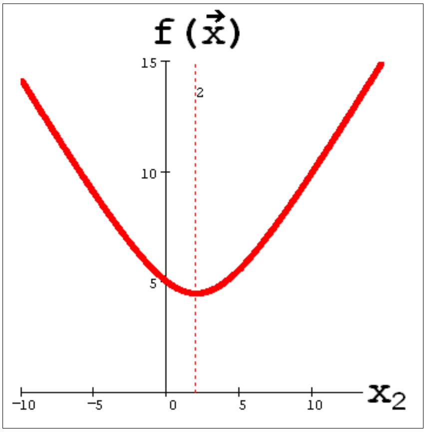

Рис. 17. *График функции невязки f(x)=|**x**| при условии (31)*

Способ выбора одного решения из бесконечного множества, изображенного на рис. 16, подсказывает, по аналогии с переопределенными СЛАУ, сам физический смысл задачи, которую можно интерпретировать как M измерений с N неизвестными (M<N). Для того чтобы получить разумное единственное решение задачи, необходимо «доопределить» ее, добавив некоторые априорные соображения о значении неизвестного вектора **x**.

Если априорной информации о примерной величине вектора **x** нет, единственным образом решить СЛАУ невозможно. Однако, если о неизвестном векторе хоть что-то можно сказать, данная информация позволит дополнить систему уравнений и получить решение, учитывающее как систему, так и априорную информацию. Проще всего ввести в задачу определенные ожидания о величине вектора **x**.

Математически, не теряя общности, можно полагать ожидаемое значение вектора x нулевым, поскольку переход от любого $\mathbf{x}^0$ к нуль-вектору осуществляется линейным преобразованием переменных, которое изменит только вектор правой части **b**.

Таким образом, вполне логично объявить решением недоопределенной СЛАУ такое из решений, которое ближе всего находится к нулевому вектору, т. е. обладает минимальной нормой:

$$|\mathbf{x}| \sim \min. \quad (33)$$

Это решение называют *нормальным псевдорешением* СЛАУ, и искать его следует, минимизируя норму вектора **x** на предварительно полученном семействе решений СЛАУ. Иными словами, решение недоопределенной СЛАУ сводится к условной минимизации функции $f(x)=|\mathbf{x}|$, при условии выполнения самой СЛАУ (рис. 17). Геометрический смысл нормального псевдорешения (в рассматриваемом случае одного уравнения с двумя неизвестными) очевиден: это точка, лежащая на пересечении прямой семейства всех решений и перпендикуляра к этой прямой, восстановленного из начала координат. На рис. 16 нормальное псевдорешение выделено пунктиром.

Снова возвращаясь к примеру с грушами и яблоками, можно интерпретировать недоопределенную СЛАУ (31) как единственное измерение, которого недостаточно для однозначного определения веса одной груши и одного яблока. Однако если учесть априорную оценку об этих весах (пусть даже весьма грубую), это позволит отыскать решение, которое будет осмысленным. Конечно, следует выбрать соответствующий вектор априорной оценки и, кроме того, добавить дополнительное условие на положительную определенность неизвестных.

Если недоопределенная СЛАУ не имеет бесконечного множества решений, а является несовместной, то описанный способ использовать нельзя, т. к. условие минимизации заведомо невыполнимо. Подход к решению таких задач заключается в поиске компромиссного решения, минимизирующего как норму невязки, так и норму решения (см. следующий параграф).

В завершение параграфа приведем еще один пример недоопределенной системы, на этот раз, двух уравнений и трех неизвестных:

$$\begin{array}{l} x_1+3x_2+5x_3=10 \\ 2x_1+4x_2+6x_3=10 \end{array} . \qquad (34)$$

Как и в предыдущем примере, данная СЛАУ имеет бесконечное множество решений. Если обозначить x_3=z, то, как несложно убедиться, решение (34) можно записать следующим образом:

$$x=\begin{pmatrix} z-5 \\ 5-2z \\ z \end{pmatrix} . \qquad (35)$$

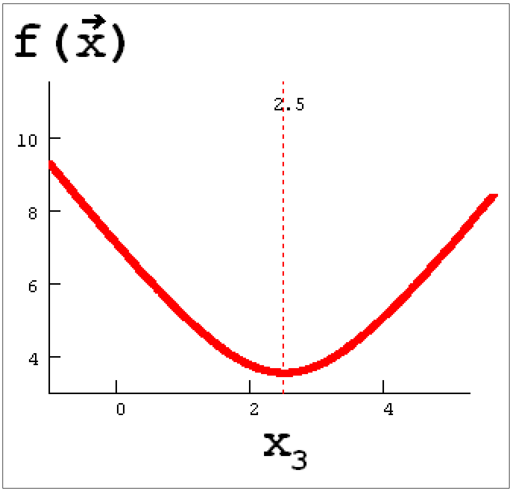

Рис. 18. *График функции невязки вектора **x** (35): f(z)=f(x_3)=|**x**|*

Повторимся, что вектор **x**, выраженный в форме (35), является решением СЛАУ (34) для любого z. Как и в прошлый раз, для того, чтобы выделить из всего семейства решений одно, следует выбрать вектор **x**, удовлетворяющий СЛАУ и обладающий минимальной нормой. Напомним, что данное требование мы записали в виде формулы (33). Решая соответствующую задачу минимизации (33), мы получим, что искомое z^{min}=2.5 (рис. 18), что даст в результате, согласно (35), нормальное псевдорешение исходной СЛАУ (34):

$$x=\begin{pmatrix} -2.5 \\ 0 \\ 2.5 \end{pmatrix} . \qquad (36)$$