MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE

NELINEÁRNÍ FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA

Vít Dolejší a Karel Najzar

matfyzpress

PRAHA 2010

Katedra numerické matematiky
Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze
Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D., DSc

Text vznikl za podpory výzkumného projektu MSM 0021620839
financovaného MŠMT ČR.

ISBN 978-80-7378-137-8

Obsah

Úvod **5**

1 Základní pojmy a věty **7**

1.1 Označení, definice a základní věty 7
1.1.1 Zdola a shora polospojité funkce, konvexita 11
1.2 Věty o existenci řešení nelineárních rovnic jedné proměnné . . . 18
1.3 Věty o pevném bodu 19
1.4 Monotonie a koercivita funkce a operátoru 25
1.4.1 Řešitelnost nelineárních rovnic více proměnných 27
1.5 Diferenciální počet v normovaných prostorech 28
1.5.1 Konvexita Banachova prostoru a dualizační zobrazení 33
1.6 Němyckého operátor a jeho vlastnosti 35
1.7 Minimum nelineárního funkcionálu 40
1.8 Sobolevovy prostory 51

2 Teorie monotónních operátorů **57**

2.1 Základní pojmy, označení a vztahy 58
2.2 *Pseudomonotónní operátory 78
2.3 Existenční věty 91
2.3.1 Existenční věty v Hilbertových prostorech 91
2.3.2 Existenční věty v Banachových prostorech 105
2.4 Numerické metody 114
2.4.1 Galerkinova metoda 114
2.4.2 Iterační metody 118

3 Potenciální operátory **123**

3.1 Definice a kritéria potenciálnosti operátoru 123
3.2 Potenciální a monotónní operátory 132
3.3 Duální funkcionál 135
3.4 Numerické metody 143
3.4.1 Ritzova metoda 144
3.4.2 Iterační metody 145

4 Aplikace **157**
4.1 Diferenciální rovnice 157
4.1.1 Zobecnění růstových podmínek 162
4.2 Existenční věty 166

5 *Stupeň zobrazení **175**
5.1 Stupeň zobrazení v prostoru $\mathbb{R}_n$ 175
5.1.1 Konstrukce stupně zobrazení v prostoru $\mathbb{R}_n$ 178
5.2 Lerayův-Schauderův stupeň zobrazení 183
5.2.1 Konstrukce stupně zobrazení v Banachově prostoru . . . 184

A Stručný seznam označení **191**

B Seznam vět, lemmat a definic. **193**

Rejstřík **196**

Literatura **201**

Úvod

Předložená skripta vznikla na základě přednášek, které autoři po dobu více než 20 let vedli pro posluchače především numerické a výpočtové matematiky MFF UK. Jsou určena jak pro studenty magisterského tak i doktorského studia matematických, fyzikálních i informatických oborů a také pro doktorandy z jiných vysokých škol a ústavů. Navazují na přednášky z lineární funkcionální anlýzy. Od čtenáře se vyžadují základní znalosti z klasické a lineární funkcionální analýzy, teorie integrálu a z teorie diferenciálních a integrálních rovnic.

Skripta jsou především zaměřena na teorii monotónních a potenciálních operátorů. Probíraná látka je rozložena do pěti kapitol. Ohvězdičkované části v jednotlivých kapitolách představují doplňky, přehledy nejnovějších výsledků a zajímavostí.

V první kapitole nejprve připomeneme definice některých pojmů a uvedeme věty z matematické a z funkcionální analýzy, které budeme potřebovat v dalších kapitolách. Pak bude následovat krátké pojednání o řešitelnosti nelineárních rovnic v jedné a více proměnných, jejichž výběr přímo souvisí s teorií monotónních operátorů. V této kapitole budou uvedeny základní věty o pevném bodu. Bude také provedeno zobecnění pojmu monotónnosti funkce jedné proměnné na funkce více proměnných, zaveden pojem koercitivity a dokázána některá tvrzení o existenci řešení rovnic s více proměnnými. Dále budou definovány potřebné pojmy z diferenciálního počtu v normovaných prostorech a studovány jejich vlastnosti. Stručně pojednáme o operátorech typu Němyckého a o problémech minimalizace nelineárních funkcionálů. Uvedená teorie minimalizace bude využita ke studiu řešitelnosti operátorových rovnic s potenciálními operátory. Na závěr této kapitoly budou uvedeny definice a vlastnosti Sobolevových prostorů, a to především ty, které budou zapotřebí ve čtvrté kapitole pojednávající o slabém řešení diferenciálních okrajových úloh.

V druhé kapitole bude pojednáno o abstraktní teorii monotónních operátorů se zaměřením k řešení operátorových rovnic v Hilbertových a obecně v reflexivních Banachových prostorech. Je zde uveden přehled různých druhů spojitosti, monotónnosti, koercivity a dalších pojmů a jejich vzájemný vztah. Také zde budou dokázány speciální věty z teorie monotónních operátorů v Hilbertových prostorech. Tato teorie je podrobně vyložena v případě reflexivních Banachových prostorů. Také krátce pojednáme o některých zobecněních a numerických metodách řešení operátorových rovnic s monotónními operátory.

Teorie potenciálních operátorů bude vyložena ve třetí kapitole. Budou dokázány základní věty o řešitelnosti operátorových rovnic s těmito typy operátorů a studována problematika duality. Také krátce pojednáme o některých numerických metodách řešení těchto rovnic, mezi které patří především metoda Ritzova.

Ve čtvrté kapitole ve stručnosti uvedeme aplikaci teorie monotónních a potenciálních operátorů k problematice řešení nelineárních diferenciálních rovnic eliptického typu.

V poslední páté kapitole stručně pojednáme o (topologickém) stupni spojitých zobrazení a jeho vlastnostech jak v prostoru $\mathbb{R}_n$ tak i v Banachových prostorech. Na základě těchto vlastností dokážeme Brouwerovu větu a také Schauderovu větu o pevném bodu.

V Praze 31. října 2010 Vít Dolejší a Karel Najzar

Kapitola 1

Základní pojmy a věty

V této kapitole připomeneme definice některých pojmů a vět z matematické a z fukcionální analýzy, které budeme potřebovat v dalších kapitolách. Lineární vektorové prostory, pokud nebude řečeno jinak, budou obecně komplexní a funkcionály v reálných prostorech jsou vždy reálné. Nejprve krátce pojednáme o řešitelnosti nelineárních rovnicv jedné a více proměnných, jejichž výběr přímo souvisí s teorií monotónních operátorů. V druhém odstavci se bude jednat o řešitelnost nelineární rovnice jedné reálné proměnné, ve třetím odstavci budou uvedeny věty o pevném bodu a ve čtvrtém odstavci zobecníme pojem monotonnost funkce z jedné proměnné na funkce více proměnných. Bude zde také definována koercivita a dokázáno několik tvrzení, keré zobecňují věty z prvního odstavce pro funkce více proměnných. V pátém odstavci uvedeme potřebné pojmy a jejich některé vlastnosti z diferenciálního počtu v normovaných prostorech. V šestém odstavci bude uveden stručný přehled o operátorech Němyckého typu a uvedeme základní věty týkající se minimalizace nelineárních funkcionálů. Uvedená teorie minimalizace bude využita ke studiu řešitelnosti operátorových rovnic s potenciálními operátory. Na závěr v posledním sedmém odstavci budou uvedeny definice a vlastnosti Sobolevových prostorů, a to především ty, které budou zapotřebí ve čtvrté kapitole pojednávající o slabém řešení diferenciálních okrajových úloh.

1.1 Označení, definice a základní věty

Nejprve připomeňme některé definice pojmů, se kterými se budeme setkávat. Omezíme se pouze na pojmy v normovaných lineárních prostorech. Poznamenejme, že tyto pojmy lze podobně definovat v metrických prostorech a některé také v topologických prostorech.

Definice 1.1.1

Nechť X a Y jsou lineární normované prostory a A je obecně nelineární operátor s definičním oborem $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ a s oborem hodnot $\mathcal{R}(A) \subseteq Y$.

1. *Podmnožinu $K \subset X$ nazveme kompaktní (sekvenciálně) v prostoru X, jestliže je uzavřená a z libovolné posloupnosti $\{u_n\} \subset K$ lze vybrat konvergentní podposloupnost v X.*

   Ekvivalentní definice: Podmožinu $K \subset X$ nazveme kompaktní, jestliže z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

2. *Podmnožinu $K \subset X$ nazveme prekompaktní, jestliže její uzávěr je množina kompaktní v X.*

3. *Řekneme, že operátor $A : X \to Y$ je na množině $\mathcal{D}(A)$ kompaktní, jestliže její každou omezenou podmnožinu $K \subset \mathcal{D}(A)$ zobrazuje na množinu prekompaktní v prostoru Y, tzn. na množinu, jejíž uzávěr je množina kompaktní v Y.*

   Ekvivalentní definice: operátor $A : X \to Y$ je na množině $\mathcal{D}(A)$ kompaktní, jestliže z každé ohraničené posloupnosti $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ lze vybrat podposloupnost $\{u_{n_k}\}$ takovou, že $\{Au_{n_k}\}$ je konvergentní s limitou v Y.

4. *Řekneme, že operátor $A : X \to Y$ je na množině $\mathcal{D}(A)$ totálně spojitý, jestliže je na $\mathcal{D}(A)$ spojitý a kompaktní.*

Kvůli zjednodušení zápisu budeme symbolem $\|w\|$ označovat normu prvku $w \in X$ v normovaném prostoru X. Připomeme, že je-li operátor $A : X \to Y$ kompaktní a lineární, pak je spojitý. Množinu spojitých lineárních operátorů z normovaného prostoru X do normovaného prostoru Y budeme označovat symbolem $\mathcal{L}(X, Y)$ a množinu lineárních kompaktních operátorů symbolem $Co(X, Y)$. Připomeňme, že v lineárním vektorovém prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$ se zavádí norma pomocí normy operátoru. Je-li prostor Y úplný, pak i prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s touto normou je úplný.

Označení: Nechť X je normovaný (obecně komplexní) lineární prostor. Pak množina všech lineárních a spojitých funkcionálů na X tvoří vektorový prostor, pro který budeme používat označení X^*, přičemž $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je duální vztah mezi oběma prostory, tzn. $\langle x^*, z\rangle$ je hodnota funkcionálu $x^* \in X^*$ v bodě $z \in X$. V některých publikacích se používá pro tento duální vztah opačné „označení“: $\langle z, x^*\rangle$, nebo $x^*(z)$. Připomeňme, že duální prostor je úplný. Prostor všech spojitých funkcionálů nad prostorem X^* - druhý normovaný duální prostor - budeme označovat symbolem X^{**}.

Definice 1.1.2 *Řekneme, že Banachův prostor X je reflexivní, jestliže obor hodnot kanonického zobrazení $J : X \to X^{**}$ (vnoření prostoru X do X^{**}) definovaného předpisem*

$$\langle Jx, x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle \ \forall x^* \in X^*, x \in X,$$

je celý prostor X^{**}.

V případě reflexivního Banachova prostoru X je kanonické zobrazení J lineární, izomorfní a izometrické zobrazení prostoru X na X^{**}. Snadno lze dokázat, že je-li prostor X reflexivní, pak také jeho duál X^* je reflexivní. A naopak, je-li prostor X úplný a X^* je reflexivní, pak také prostor X je reflexivní. Připomeňme, že Hilbertův prostor je reflexivní.

Definice 1.1.3 *Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{u_n\} \in X$ konverguje slabě (X^*-slabě; posloupnost $\{u_n\}$ w-konverguje) k prvku $u \in X$, jestliže pro každé $x^* \in X^*$ platí $\langle x^*, u_n\rangle \to \langle x^*, u\rangle$. Slabou konvergenci budeme zapisovat takto: $u_n \rightharpoonup u$.*

Řekneme, že posloupnost $\{x_n^*\} \subset X^*$ w^*-konverguje k prvku $x^* \in X^*$ (také X-slabě), jestliže pro každé $x \in X$ platí $\langle x_n^*, x\rangle \to \langle x^*, x\rangle$. Tuto slabou konvergenci funkcionálů budeme zapisovat takto: $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

Na prostoru X^* jsou definovány dvě slabé konvergence - w a w^* konvergence. Je-li prostor X reflexivní, pak obě slabé konvergence na X^* splývají (viz věta 3.5 v [10]). Z tohoto důvodu budeme v reflexivních prostorech používat místo w^*- konvergence pojem slabé konvergence se zápisem $x_n^* \rightharpoonup x^*$. Z principu stejnoměrné omezenosti plyne, že každá slabě konvergentní posloupnost je omezená. Platí následující věta známá v literatuře pod názvem Eberlainova-Šmuljanova , která charakterizuje třídu reflexivních Banachových prostorů (viz [10]).

Věta 1.1.1 *Normovaný prostor X je reflexivní právě tehdy, jestliže každá omezená posloupnost obsahuje slabě konvergentní podposloupnost.*

V dalším výkladu uvedeme bez důkazu některá tvrzení z lineární funkcionální analýzy, která budeme potřebovat v následujících kapitolách (viz [10], [12] a j.).

Tvrzení 1.1.1 *Platí:*

1. *Posloupnost $\{u_n\} \subset X$ konverguje slabě (X^*-slabě) k prvku $u \in X$ právě tehdy, když posloupnost $\{u_n\}$ je ohraničená a $\lim_n \langle x^*, u_n\rangle = \langle x^*, u\rangle$ pro každý spojitý lineární funkcionál x^* z nějaké husté podmnožiny M v prostoru X^*.*

2. *Jestliže posloupnost $\{u_n\}$ v Banachově prostoru X konverguje slabě k prvku u, pak*
$$\|u\| \leq \liminf \|u_n\|. \tag{1.1}$$

3. *Konvexní, uzavřená podmnožina K Banachova prostoru X je slabě uzavřená , tj. platí implikace*
$$\{u_n\} \subset K, \quad u_n \rightharpoonup u \implies u \in K. \tag{1.2}$$

4. *V reflexivním Banachově prostoru každá uzavřená koule je slabě kompaktní, tzn. každá posloupnost prvků z této koule obsahuje slabě konvergentní podposloupnost s limitou v této kouli. Jinak řečeno: každá ohraničená posloupnost obsahuje slabě konvergující podposloupnost.*

5. *Nechť* $\{u_n\}$ *je omezená posloupnost v reflexivním Banachově prostoru* X *a nechť všechny slabě konvergující podposloupnosti mají za limitu* (*slabou*) *prvek* u, *pak celá tato posloupnost* u_n *konverguje slabě k prvku* u.

6. *Jestliže uzavřená koule v reflexivním Banachově prostoru leží ve sjednocení nějaké soustavy slabě otevřených množin, pak tato koule leží v nějakém konečném podsystému těchto slabě otevřených množin.*

7. *Nechť* K *je konvexní, ohraničená a uzavřená množina v reflexivním Banachově prostoru* X, *pak je tato množina slabě kompaktní.*

8. *Nechť* K *je neprázdná, uzavřená a konvexní množina v Hilbertově prostoru* H *s normou* $\|\cdot\|$ *a skalárním součinem* $(\cdot,\cdot)$. *Pak pro libovolné* $x \in H$ *existuje jediný prvek* $u \in K$ *takový, že platí*

$$\|x-u\| \;=\; \min_{v\in K} \|x-v\|.$$

Tento prvek u *lze charakterizovat takto*

$$u \in K, \qquad (x-u, v-u) \le 0 \quad \text{pro každé} \quad v \in K. \tag{1.3}$$

Navíc, označme $u = P_K x$, *pak*

$$\|P_K x_1 - P_K x_2\| \le \|x_1 - x_2\| \quad \forall\, x_1,\, x_2 \in H.$$

(P_K *je projekce na množinu* K).

Je-li K *uzavřený lineární podprostor v prostoru* H, *pak* P_K *je lineární spojitý operátor. Prvek* u *lze charakterizovat takto:*

$$u \in K, \qquad (x-u, v-u) = 0 \quad \text{pro každé} \quad v \in K.$$

9. (*Oddělovací věta.*) *Nechť* K *je konvexní uzavřená podmnožina Banachova prostoru* X. *Pak pro každé* $x \notin K$ *existuje funkcionál* $x^* \in X^*$ *tak, že platí*

$$\langle x^*, x\rangle \;>\; \sup_{y\in K} \langle x^*, y\rangle\,. \tag{1.4}$$

10. (*Princip stejnoměrné omezenosti.*) *Nechť* $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, *kde* X *je Banachův prostor a* Y *je normovaný lineární prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

    (*i*) $\sup\{\|A\| :\; A \in \mathcal{G}\} \;<\; +\infty.$

    (*ii*) $\sup\{\|Ax\| :\; A \in \mathcal{G}\} \;<\; +\infty$ *pro každé* $x \in X$.

1.1.1 Zdola a shora polospojité funkce, konvexita

V tomto odstavci uvedeme některé pojmy z teorie topologických prostorů, které budeme potřebovat v dalších kapitolách. Budeme definovat funkci zdola a shora polospojitou (resp. semispojitou) a větu o centrovaných systémech (viz [10] a [15]). Tato věta hraje důležitou roli důkazu surjektivity monotónních operátorů v neseparabilních, reflexivních Banachových prostorech. Nejprve uvedeme definici vlastnosti konečného průniku.

Definice 1.1.4 *Systém množin $\mathcal{F}$ má vlastnost konečného průniku, jestliže průnik libovolného konečného podsystému má neprázdný průnik.*

Věta 1.1.2 (Věta o centrovaných systémech) *Nechť $\{U_i,\, i \in I\}$ je libovolný systém uzavřených podmnožin kompaktního topologického prostoru $\mathcal{T}$ s vlastností konečného průniku. Pak je neprázdný i průnik všech množin tohoto systému, t.j.*

$$\bigcap_{i\in I} U_i \neq \emptyset.$$

□

Definice 1.1.5 *Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že funkce φ je zdola polospojitá na prostoru X, jestliže pro libovolné $x_0 \in X$ platí*

$$\varphi(x_0) \,\leq\, \liminf_{x\to x_0} \,\varphi(x)$$

a shora polospojitá na prostoru X, jestliže pro libovolné $x_0 \in X$ platí

$$\varphi(x_0) \,\geq\, \limsup_{x\to x_0} \,\varphi(x).$$

V případě normovaného prostoru X lze definovat pojem zdola (resp. shora) polospojité funkce na otevřené množině $U \subseteq X$ a slabě zdola (resp. shora) polospojité funkce na prostoru X. Tyto definice jsou speciálním případem definice 1.1.5, ve které topologie v U je generována normou, resp. v prostoru X slabou konvergencí v prostoru. Důkazy všech níže uvedených lemmat a vět tohoto odstavce lze najít v knihách [13], [4] a [6].

Definice 1.1.6 *Nechť X je normovaný lineární vektorový prostor a $U \subseteq X$ otevřená množina. Řekneme, že reálná funkce f (funkcionál) je zdola polospojitá na U, jestliže pro libovolné $x_0 \in U$ a každou posloupnost $\{x_n\} \subset U$, která silně (v normě) konverguje k x_0, platí*

$$f(x_0) \,\leq\, \liminf_{n\to\infty} \,f(x_n),$$

resp. shora polospojitá, jestliže

$$f(x_0) \,\geq\, \limsup_{n\to\infty} \,f(x_n).$$

Řekneme, že reálná funkce f je slabě zdola polospojitá na prostoru X, jestliže pro libovolné x_0 a každou slabě konvergující posloupnost x_n se slabou limitou x_0, platí

$$f(x_0) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n),$$

resp. slabě shora polospojitá , jestliže

$$f(x_0) \ge \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

V dalším výkladu se omezíme pouze na reálné funkce (funkcionály), které jsou (slabě) zdola polospojité a které jsou konečné, tzn. v každém bodě normovaného prostoru nabývají konečné hodnoty. Z definice je patrné, že každá slabě zdola polospojitá funkce je zdola polospojitá. Opačná implikace obecně neplatí a tím je slabá polospojitost silnější než polospojitost. Je však splněna pro poměrně širokou množinu tzv. konvexních funkcionálů.

Definice 1.1.7 *Nechť X je lineární vektorový prostor a K je nějaká neprázdná konvexní podmnožina. Řekneme, že reálný funkcionál f definovaný na množině K je konvexní, jestliže pro libovolné $x, y \in K$ a $\lambda \in (0,1)$ platí*

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Jestliže rovnost nastává pouze v případě $x = y$, pak řekneme, že funkcionál je striktně (ryze) konvexní.

Před tím než dokážeme větu o opačné implikaci (viz např. [4], [13]) uvedeme tři pomocná lemmata. V prvním lemmatu je uvedeno kritérium slabě zdola polospojitosti konečného funkcionálu definovaného na slabě uzavřené podmnožině Banachova prostoru.

Lemma 1.1.1 *K tomu, aby reálný funkcionál f definovaný na slabě uzavřené podmnožině M Banachova prostoru X byl slabě zdola polospojitý je nutné a stačí, aby pro libovolné reálné číslo c byla množina*

$$E_c := \{x \in M,\ f(x) \le c\}$$

slabě uzavřená .

Důkaz. Nechť funkcionál f je slabě zdola polospojitý na M. Zvolme reálné číslo c a nechť posloupnost $\{x_n\} \subset E_c$ slabě konverguje k prvku x_0. Jelikož množina M je slabě uzavřená, je $x_0 \in M$. Z definice zdola polospojitosti obdržíme

$$f(x_0) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \le c,$$

a tedy $x_0 \in E_c$, tj. množina E_c je slabě uzavřená.

Naopak, nechť množina E_c je pro libovolné reálné číslo c slabě uzavřená. Předpokládejme, že funkcionál f není na M slabě zdola polospojitý. Pak existuje $x_0 \in M$ a posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny M tak, že $x_n \rightharpoonup x_0$ a platí

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) < f(x_0).$$

Zvolme $c \in \mathbb{R}$ tak, že platí nerovnost

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) < c < f(x_0).$$

Existuje tedy posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybraná z posloupnosti $\{x_n\}$ taková, že platí: $\{x_{n_k}\} \subset E_c$. Jelikož $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$, E_c je slabě uzavřená, je $x_0 \in E_c$. Tedy

$$f(x_0) \leq c < f(x_0),$$

což je spor a tím funkcionál f je na množině M slabě zdola polospojitý.

$\square$

Poznámka. Podobně lze poměrně snadno dokázat kritérium slabě zdola polospojitosti funkcionálu definovaného na normovaném prostoru (viz [13]):
K tomu, aby reálný funkcionál f definovaný na normovaném prostoru X byl slabě zdola polospojitý je nutné a stačí, aby pro libovolné reálné číslo c byla množina

$$E_c := \{x \in X,\ f(x) \leq c\}$$

slabě uzavřená .

Na druhé straně pro zdola polospojité funkcionály platí

Lemma 1.1.2 *Je-li reálný funkcionál f definovaný na normovaném prostoru X zdola polospojitý, pak pro libovolné reálné číslo c je množina*

$$E_c := \{x \in X,\ f(x) \leq c\}$$

uzavřená .

Důkaz. Zvolme posloupnost $\{x_n\} \subset E_c$ tak, aby $x_n \to x_0$. Předpokládejme, že $x_0 \notin E_c$, tzn. je $f(x_0) > c$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že platí $f(x_0) > c + \varepsilon$. Z definice zdola polospojitosti f v bodě x_0 plyne existence přirozeného čísla $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takového, že pro $n \leq n_0$ je

$$f(x_n) > f(x_0) - \varepsilon/2 > c + \varepsilon/2,$$

což je ve sporu s předpokladem $\{x_n\} \subset E_c$.

$\square$

Pro konvexní funkcionály platí:

Lemma 1.1.3 *Jestliže reálný funkcionál f definovaný na Banachově prostoru X je konvexní a polospojitý zdola, pak pro libovolné reálné číslo c je množina*

$$E_c := \{x \in X,\ f(x) \leq c\}$$

slabě uzavřená.

Důkaz. Z konvexity funkcionálu f ihned plyne konvexita množiny E_c pro libovolné reálné číslo c. Jelikož f je polospojitý zdola, je podle lemmatu 1.1.2 množina E_c uzavřená . Tvrzení lemmatu plyne z vlastnosti, že každá konvexní a uzavřená podmnožina Banachova prostoru je slabě uzavřená (viz (1.2)).

□

Z těchto pomocných lemmat již snadno plyne následující věta, jelikož každá konvexní a uzavřená množina v Banachově prostoru je slabě uzavřená (viz (1.2)).

Věta 1.1.3 *Nechť X je Banachův prostor. Pak každý konvexní a zdola polospojitý funkcionál na prostoru X je slabě zdola polospojitý.*

Poznámka. Tvrzení věty 1.1.3 platí i pro tzv. kvazikonvexní zdola polospojité funkcionály (viz [13]). Reálný kvazikonvexní funkcionál je definován takto:

Nechť K je konvexní množina v lineárním prostoru X. Reálný funkcionál f definovaný na K se nazývá kvazikonvexní, jestliže pro libovolné $x_1,\ x_2 \in K$ a libovolné $\lambda \in (0, 1)$ je splněna nerovnost

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ \leq\ \max[f(x_1), f(x_2)].$$

Jestliže pro $x_1 \neq x_2$ je tato nerovnost ostrá, pak se funkcionál f nazývá ryze kvazikonvexní.

Poznamenejme, že v předpokladech tohoto zobecnění je podmínka zdola polospojitosti nutná, nelze ji odstranit (viz [13]).

Poznámka. Nechť množina M Banachova prostoru X je uzavřená a konvexní. Pak je slabě uzavřená. Předpokládejme, že funkcionál f je na M spojitý, pak pro libovolné reálné číslo c je množina

$$E_c := \{x \in M,\ f(x) \leq c\}$$

zřejmě uzavřená. Je-li navíc funkcionál f konvexní, pak E_c je konvexní pro libovolné reálné číslo c a tím podle (1.2) je E_c slabě uzavřená pro každé reálné číslo c. Použitím lemmatu 1.1.1 obdržíme jednoduchou postačující podmínku pro slabě zdola polospojitost funkcionálu:

Věta 1.1.4 *Spojitý konvexní funkcionál f definovaný na uzavřené konvexní podmnožině M Banachova prostoru X je slabě zdola polospojitý.*

Obecně spojitý funkcionál nemusí být slabě zdola polospojitý. Příkladem spojitého funkcionálu, který není slabě zdola polospojitý, je na prostoru $L_2(0, 1)$ funkcionál (viz [4]):

$$f(u) = 1 - \int_0^1 u^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Konvexitu a slabou polospojitost zdola lze definovat pomocí konvexity a slabé uzavřenosti nadgrafu (epigrafu) funkcionálu.

Definice 1.1.8 *Nechť X je lineární reálný vektorový prostor a nechť funkcionál f je definovaný na prostoru X. Pak množinu*

$$\operatorname{epi} f := \{\{x, c\} \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq c\}$$

nazveme nadgrafem (epigrafem) funkcionálu f.

Lemma 1.1.4 *Reálný funkcionál f definovaný na lineárním vektorovém prostoru X je konvexní právě tehdy, když jeho nadgraf* epi *f je množina konvexní v prostoru $X \times \mathbb{R}$. Je-li navíc prostor X normovaný, pak reálný funkcionál f je slabě zdola polospojitý, právě když jeho nadgraf* epi *f je množina slabě uzavřená v prostoru $X \times \mathbb{R}$.*

Cvičení 1.1.1 Dokažte lemma 1.1.4.

♣

Konvexita reálného funkcionálu souvisí s pojmem opěrného funkcionálu.

Definice 1.1.9 *Nechť X je normovaný prostor a X^* je k němu příslušný duální prostor. Nechť $\mathcal{U} \subset X$ je otevřená množina, na které je definován reálný funkcionál f. Lineární funkcionál $x_0^* \in X^*$ nazveme opěrným funkcionálem k zadanému funkcionálu f v bodě $x_0 \in \mathcal{U}$, jestliže platí*

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle x_0^*, x - x_0 \rangle \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Nyní již lze zformulovat větu pojednávající o vztahu mezi konvexitou a opěrným funkcionálem .

Věta 1.1.5 *Nechť K je otevřená a konvexní podmnožina normovaného prostoru X a f je konvexní funkcionál definovaný na množině K. Pak v každém bodě $x \in K$ existuje k f opěrný funkcionál. Naopak, existuje-li k funkcionálu g, který je definován na otevřené konvexní množině K, v každém jejím bodě opěrný funkcionál, pak g je konvexní a slabě zdola polospojitý funkcionál na množině K.*

Důkaz. Zvolme $x \in K$ a $h \in X$. Protože množina K je otevřená a konvexní, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro libovolné $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ je $x + th \in K$. Na intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definujme reálnou funkci φ předpisem

$$\varphi(t) = f(x + th), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Jelikož f je konvexní, je také funkce φ konvexní. A tim pro $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ a pro libovolné t_1, $t_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ je

$$\varphi(\alpha t_1 + \beta t_2) = f\left[\alpha(x + t_1 h) + \beta(x + t_2 h)\right] \leq \alpha\varphi(t_1) + \beta\varphi(t_2).$$

Z matematické analýzy je známo, že existuje derivace konvexní funkce φ v bodě t zprava, $\varphi'(t+0)$, i zleva, $\varphi'(t-0)$, a platí: $\varphi'(t-0) \leq \varphi'(t+0)$ a tím pro $t = 0$ je $\varphi'(0-) \leq \varphi'(0+)$. Definujme pro $h \in X$

$$V_+ f(x, h) = \lim_{\tau \to 0+} \frac{f(x + \tau h) - f(x)}{\tau} = \varphi'(0+)$$

a

$$V_-f(x,h) = \lim_{\tau\to 0-} \frac{f(x+\tau h)-f(x)}{\tau} = \varphi'(0-).$$

Tedy

$$V_-f(x,h) \le V_+f(x,h)$$

a

$$V_-f(x,h) = -V_+f(x,-h).$$

Zřejmě pro $\alpha > 0$ je $V_+f(x,\alpha h) = \alpha V_+f(x,h)$. Pro $h_1,\ h_2 \in X$ plyne z konvexity f nerovnost

$$\begin{aligned}
V_+f(x,h_1+h_2) &= \lim_{\tau\to 0+} \frac{f\left(x+\frac{\tau}{2}(h_1+h_2)\right)-f(x)}{\tau/2} = \\
&= \lim_{\tau\to 0+} \frac{2f\left(\frac{x+\tau h_1}{2}+\frac{x+\tau h_2}{2}\right)-2f(x)}{\tau} \le \\
&\le \lim_{\tau\to 0+} \frac{f(x+\tau h_1)-f(x)}{\tau} + \lim_{\tau\to 0+} \frac{f(x+\tau h_2)-f(x)}{\tau} = \\
&= V_+f(x,h_1)+V_+f(x,h_2).
\end{aligned}$$

Tudíž $V_+f(x,h)$ je konvexní (sublineární) funkcionál v proměnné $h \in X$. Zvolme pevné $h_0 \in X$, $h_0 \neq 0$, a na podprostoru $X_0 = \{\lambda h_0 :\ \lambda \in (-\infty,+\infty)\}$ definujme spojitý lineární funkcionál x_0^* tak, aby

$$\langle x_0^*, h_0\rangle = V_+f(x,h_0).$$

Pak pro $\lambda \ge 0$ je

$$\langle x_0^*, \lambda h_0\rangle = \lambda\,\langle x_0^*, h_0\rangle = \lambda\, V_+f(x,h_0) = V_+f(x,\lambda h_0).$$

Jelikož $-V_+f(x,h_0) = V_-f(x,-h_0) \le V_+f(x,-h_0)$, je pro $\lambda \le 0$

$$\begin{aligned}
&\langle x_0^*, \lambda h_0\rangle = \lambda\,\langle x_0^*, h_0\rangle = \lambda\, V_+f(x,h_0) = -|\lambda|\, V_+f(x,h_0) \le \\
&\le |\lambda|\, V_+f(x,-h_0) = V_+f(x,-|\lambda| h_0) = V_+f(x,\lambda h_0).
\end{aligned}$$

Odtud plyne pro $z \in X_0$ nerovnost

$$\langle x_0^*, z\rangle \le V_+f(x,z).$$

Jelikož $V_+f(x,h)$ je konvexní (sublineární) funkcionál v proměnné h na prostoru X, existuje podle algebraické Hahnovy-Banachovy věty (viz [10]) lineární spojitý funkcionál $x^* \in X^*$ takový, že platí

$$\langle x^*, z\rangle = \langle x_0^*, z\rangle\ \ \forall z \in X_0 \qquad \text{a} \qquad \langle x^*, h\rangle \le V_+f(x,h) \quad \forall h \in X.$$

Odtud plyne $\forall h \in X$

$$\langle x^*, h\rangle = -\,\langle x^*, -h\rangle \ge -V_+f(x,-h) = V_-f(x,h).$$

Shrnutím obdržíme pro libovolné $h \in X$ nerovnost

$$V_- f(x,h) \le \langle x^*, h\rangle \le V_+ f(x,h). \tag{1.5}$$

Protože funkce $\varphi(t) = f(x+th)$ je konvexní, platí

$$\varphi'(0+) \le \frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{1-0} \le \varphi'(1-),$$

a proto $\varphi(1)-\varphi(0) \ge \varphi'(0+)$, což znamená $f(x+h)-f(x) \ge V_+ f(x,h)$. Odtud a z nerovností (1.5) obdržíme

$$f(x+h)-f(x) \ge \langle x^*, h\rangle\,,$$

tzn. x^* je opěrný funkcionál k f v bodě x.

Nyní dokážeme druhou část věty. Zvolme x_1, $x_2 \in K$, $t \in (0,1)$ a položme $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$. Z definice opěrného funkcionálu plyne existence $x_0^* \in X^*$ tak, že platí

$$g(x) - g(x_0) \ge \langle x_0^*, x - x_0\rangle \quad \forall x \in K. \tag{1.6}$$

Pak po jednoduché úpravě (dosazením do této nerovnosti za x postupně x_1 resp. x_2 a vynásobením obdržených nerovností číslem t resp. $1-t$) obdržíme

$$tg(x_1) + (1-t)g(x_2) \ge g(x_0) + \langle x_0^*, tx_1 + (1-t)x_2 - x_0\,\rangle = g(x_0),$$

což znamená, že g je konvexní funkcionál na množině K.

Dokážeme, že g je funkcionál na množině K slabě zdola polospojitý. Zvolme posloupnost $\{x_n\} \subset K$ tak, aby $x_n \rightharpoonup x_0$ a $x_0 \in K$. Jako výše sestrojme $x_0^* \in X^*$ tak, aby platila nerovnost (1.6). Dosazením $x := x_n$ do této nerovnosti dostaneme

$$g(x_n) - g(x_0) \ge \langle x_0^*, x_n - x_0\rangle\,.$$

Odtud limitním přechodem $n \to \infty$ obdržíme

$$\liminf_{n\to\infty} g(x_n) \ge g(x_0)$$

a odtud plyne slabě zdola polospojitost funkcionálu g na množině K.

□

Z této věty 1.1.5 okamžitě obdržíme následující dvě tvrzení.

Věta 1.1.6 *Nechť K je otevřená a konvexní podmnožina normovaného prostoru X. Pak funkcionál f definovaný na množině K je konvexní tehdy a jen tehdy, když v každém bodě $x \in K$ existuje k f opěrný funkcionál.*

Věta 1.1.7 *Každý konvexní funkcionál definovaný na otevřené konvexní podmnožině normovaného lineárního prostoru je slabě zdola polospojitý.*

Pro zajímavost uvedeme ještě jedno tvrzení, důkaz kterého ponecháme čtenáři.

Lemma 1.1.5 *Nechť reálný funkcionál f definovaný na Banachově prostoru X je konvexní. Zvolme $x_0 \in X$. Pak pro libovolné kladné číslo $d > 0$ existuje spojitý lineární funkcionál $x_0^* \in X^*$ takový, že platí*

$$f(x) - f(x_0) > \langle x_0^*, x - x_0 \rangle - d \quad \forall x \in X.$$

Cvičení 1.1.2 Dokažte lemmu 1.1.5.
Návod. Podle věty 1.1.7 je funkcionál f slabě zdola polospojitý a tím podle lemmatu 1.1.4 je epi f množina konvexní a slabě uzavřená (a tím také uzavřená) v prostoru $X \times \mathbb{R}$. Zřejmě $\{x, f(x) - d\} \notin$ epi f. Použijte větu o oddělování bodu a uzavřené konvexní množiny ([10]):

Nechť M je konvexní a uzavřená podmnožina Banachova prostoru Y. Pak ke každému bodu $y \notin M$ existuje spojitý lineární funkcionál $y^* \in Y^*$ takový, že platí

$$\langle y^*, y \rangle > \sup_{m \in M} \langle y^*, m \rangle .$$

Podle této věty, aplikované s $y := \{x, f(x) - d\}$ a $M :=$ epi f, existuje $x^* \in X^*$ a $a_1 \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\langle x^*, x \rangle + a_1(f(x) - d) > \sup_{\{z,a\} \in \mathrm{epi}\, f} [\langle x^*, z \rangle + a_1\, a] . \tag{1.7}$$

Odtud a z inkluze $\{x, f(x)\} \in$ epi f ukažte, že $a_1 < 0$. Volbou $a_1 = -1$ v nerovnosti (1.7) obdržíte tvrzení lemmatu.

♣

Na konci této kapitoly se vrátíme k této tématice a také krátce pojednáme o lokálním minimu slabě zdola polospojitých funkcionálů.

1.2 Věty o existenci řešení nelineárních rovnic jedné proměnné

Jako první uvedeme větu známou ze základního kurzu matematické anlýzy. Připomeňme, že zadaná funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[a, b]$ monotónní, jestliže je na tomto intervalu neklesající, resp. nerostoucí, tzn.

$$g(x) \le g(y) \quad \text{resp.} \quad g(x) \ge g(y) \quad \text{pro} \quad x < y, \quad x, y \in [a, b] .$$

Jestliže pro všechna $x < y$, $x, y \in [a, b]$ jsou výše uvedené nerovnosti mezi funkčními hodnotami funkce g ostré, pak říkáme, že je funkce g na uvedeném intervalu ryze monotónní (rostoucí resp. klesající).

Věta 1.2.1 *Nechť g je monotónní a spojitá funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Pak rovnice $g(x) = c$ má řešení $x \in \mathbb{R}$ pro každé $c \in (A, B)$, kde*

$$A = \min\{\lim_{x \to a_+} g(x), \lim_{x \to b_-} g(x)\}, \qquad B = \max\{\lim_{x \to a_+} g(x), \lim_{x \to b_-} g(x)\}.$$

Je-li g ryze monotónní a spojitá , pak toto řešení je jediné.

Důkaz. Plyne ze známé věty, že spojitá funkce na zadaném intervalu I nabývá všech hodnot z intervalu (C, D), kde

$$C = \inf_{x \in I} g(x), \qquad D = \sup_{x \in I} g(x).$$

□

Z této věty plyne následující důsledek, který souvisí s níže zavedeným pojmem koercivity operátoru.

Důsledek 1.2.1 *Nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající, spojitá funkce taková, že platí*

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty,$$

pak rovnice $g(x) = b$ má řešení pro každé $b \in \mathbb{R}$. Je-li navíc funkce g rostoucí (ryze monotónní), pak toto řešení je jediné.

1.3 Věty o pevném bodu

Nejprve si připomeňme pojem pevného resp. fixního bodu.

Definice 1.3.1 *Nechť X je nějaký prostor (lineární, normovaný, metrický, topologický) a K je jeho podmnožina. Předpokládejme, že zobrazení A (obecně mnohoznačné) je definované na množině K s oborem hodnot v prostoru X, tzn. $A : K \subseteq X \to X$. Pak bod $x \in K$ nazveme pevným bodem tohoto zobrazení, jestliže platí $Ax = x$.*

V dalším budeme uvažovat pouze případ jednoznačného zobrazení definovaného na nějaké vhodné pomnožině normovaného lineárního vektorového prostoru.

Věty o pevném bodu lze zhruba rozdělit do dvou skupin. Do první skupiny patří ta tvrzení, která zaručují existenci a jednoznačnost pevného bodu, ale obvykle i jeho konstrukci (resp. aproximaci pevného bodu). Do této skupiny patří věta Banachova o pevném bodu kontrahujícího zobrazení a její různá zobecnění. Někteří autoři používají pro tento typ vět termín konstruktivní resp. věty geometrického charakteru. Do druhé skupiny patří věty topologického charakteru, ve kterých je zaručena pouze existence pevného bodu. Typickým příkladem je níže uvedená věta Brouwerova o pevném bodu. K její formulaci si zaveďme následující označení. Zvolme $r > 0$ a symbolem B_r označme otevřenou kouli v reálném Euklidově prostoru $\mathbb{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, se středem v počátku, tzn.

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}_n : \|x\| < r\},$$

kde $\|x\|$ je norma x v prostoru $\mathbb{R}_n$.

Věta 1.3.1 *(Věta Brouwerova) Nechť f je spojité zobrazení definované na uzavřené kouli $\overline{B_r} \subset \mathbb{R}_n$ a zobrazující tuto kouli do sebe, tzn. $f(x) \in \overline{B_r}$ pro každé $x \in \overline{B_r}$. Pak v kouli $\overline{B_r}$ existuje pevný bod tohoto zobrazení, tzn. existuje $x_0 \in \overline{B_r}$ tak, že platí $f(x_0) = x_0$.*

Důkaz této věty (pomocí stupně zobrazení) bude uveden na konci těchto skript. Důkazy této věty naleznete např. v knihách [2], [14], [7]. Tvrzení Brouwerovy věty lze zobecnit pro libovolnou konvexní uzavřenou a omezenou množinu $K \subset \mathbb{R}_n$. V literatuře je tato zobecněná věta známa také jako věta Brouwerova. Někteří autoři ji citují jako zobecněnou větu Brouwerovou .

Věta 1.3.2 *Nechť f je spojité zobrazení definované na uzavřené, konvexní a omezené množině $K \subset \mathbb{R}_n$ a zobrazující tuto množinu do sebe, tzn. $f(x) \in K$ pro každé $x \in K$. Pak existuje pevný bod tohoto zobrazení na množině K, tzn. existuje $x_0 \in K$ tak, že platí $f(x_0) = x_0$.*

Důkaz. Větu dokážeme pomocí Brouwerovy věty a Minkowského funkcionálu. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že 0 je vnitřním bodem množiny K. Skutečně: nechť z je vnitřní bod množiny K. Sestrojme množinu K_1,

$$K_1 = \{-z + x : x \in K\} \equiv -z + K,$$

která je zřejmě uzavřená, konvexní a omezená. Translace T definovaná předpisem

$$Tx = -z + x, \, x \in X,$$

převádí množinu K na K_1, přičemž bod z množiny K je převeden na bod 0 množiny K_1. Je to spojité zobrazení, které jednoznačně zobrazuje prostor X na sebe a 0 je vnitřním bodem K_1. Funkce f_1 definovaná předpisem

$$f_1 x = T \circ f \circ T^{-1} x, \, x \in K_1,$$

je spojitá a zobrazuje množinu K_1 na sebe. Je-li y_0 pevným bodem funkce f_1 na množině K_1, pak zřejmě $x_0 = T^{-1} y_0$ je pevným bodem funkce f na množině K. Stačí tudíž dokázat, že funkce f_1 má pevný bod na K_1.

Sestrojme Minkowského funkcionál p_{K_1} (viz [12]):

$$p_{K_1}(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K_1\}, \quad x \in X,$$

kde $\lambda K_1 = \{\lambda x : x \in K_1\}$. Jelikož množina K_1 je pohlcující, uzavřená a 0 je vnitřním bodem množiny K_1, je

$$K_1 = \{x \in X : p_{K_1}(x) \leq 1\}, \qquad p_{K_1}(x) < 1 \Rightarrow x \in \operatorname{int} K_1$$

a p_{K_1} je spojitý sublineární funkcionál (je homogenní vzhledem k násobení nezápornými čísly a splňuje trojúhelníkovou nerovnost na prostoru X) a navíc platí $p_{K_1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Symbol $\operatorname{int} K_1$ je vnitřek množiny K_1. Definujme zobrazení $h : K_1 \to \overline{B_1}$:

$$h(x) = p_{K_1}(x) \frac{x}{\|x\|} \quad \text{pro} \quad x \neq 0 \quad \text{a} \quad h(0) = 0.$$

Z výše uvedených vlastností Minkowského funkcionálu plyne, že $h : K_1 \to \overline{B_1}$ je spojité zobrazení konvexní množiny K_1 na jednotkovou kouli $\overline{B_1}$, které hranici množiny K_1 zobrazuje na hranici jednotkové koule $\overline{B_1}$, tzn. $\|h(x)\| = 1$ pro $x \in K_1 - \operatorname{int} K_1 \equiv \partial K_1$. Dokažme, že zobrazení je prosté. Jelikož

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

je

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Nechť $h(x) = h(y), x, y \in K_1$ a $x, y \neq 0$. Pak z definice h obdržíme existenci $\lambda > 0$ tak, že $y = \lambda x$. Jelikož $p_{K_1}(y) = \lambda\, p_{K_1}(x)$, je

$$h(x) = h(y) \implies p_{K_1}(x)\,\frac{x}{\|x\|} = p_{K_1}(y)\,\frac{y}{\|y\|} = \lambda\, p_{K_1}(x)\,\frac{x}{\|x\|} \implies \lambda = 1,$$

a proto $x = y$. Tím existuje inverzní zobrazení h^{-1}, které zobrazuje kouli $\overline{B_1}$ na množinu K_1, které je zřejmě také spojité, tzn. h je homeomorfismus K_1 na $\overline{B_1}$. Položme

$$g = h \circ f_1 \circ h^{-1}.$$

Pak $g : \overline{B_1} \to \overline{B_1}$ je spojité a podle Brouwerovy věty 1.3.1 existuje $y_0 \in \overline{B_1}$ tak, že platí

$$y_0 = g(y_0) = (h \circ f_1 \circ h^{-1})(y_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad h^{-1}(y_0) = f_1\left(h^{-1}(y_0)\right),$$

což znamená, že $h^{-1}(y_0) \in K_1$ je pevný bod funkce f_1 na K_1.

□

Větu o pevném bodu lze snadno zobecnit pro konečně dimenzionální normované lineární prostory.

Věta 1.3.3 *Nechť X je konečně dimenzionální normovaný lineární prostor a f je spojité zobrazení definované na uzavřené, konvexní a omezené podmnožině $K \subset X$ a zobrazující tuto množinu do sebe, tzn. $f(x) \in K$ pro každé $x \in K$. Pak existuje pevný bod tohoto zobrazení na množině K, tzn. existuje $x_0 \in K$ tak, že platí $f(x_0) = x_0$.*

Cvičení 1.3.1 Dokažte větu 1.3.3.
Návod. Nechť dimenze prostoru X je n. Prostor X nad tělesem reálných čísel je topologicky izomorfní prostoru $\mathbb{R}_n$ a použitím předcházející věty obdržíte tvrzení.
Podrobněji: Zvolte bázi $x_1, \cdots, x_n$ v prostoru X, pak každý prvek $x \in X$ lze vyjádřit ve tvaru

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i, \quad \alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}_n.$$

Definujme operátor $T : X \to \mathbb{R}_n$ předpisem $Tx = \alpha$. Zřejmě je tento operátor lineární, spojitý a zobrazuje X na prostor $\mathbb{R}_n$. Inverzní operátor $T^{-1} : \mathbb{R}_n \to X$ existuje a je také spojitý. Označme $K_1 = T(K)$ a definujme funkci g,
$g(\alpha) = T(f(T^{-1}\alpha))$. Ukažte, že K_1 je konvexní, uzavřená a ohraničená množina v $\mathbb{R}_n$ a funkce g je spojitá a zobrazuje K_1 do sebe. Použitím předcházející věty obdržíte existenci pevného bodu α_0 funkce g na množině K_1 a odtud již snadno dokážete, že $T^{-1}\alpha_0$ je pevný bod zobrazení f na množině K. ♣

Poznamenejme, že uvedené tvrzení neplatí obecně pro množiny, které nejsou konvexní.

Cvičení 1.3.2 Označme jednotkovou sféru v prostoru $\mathbb{R}_n$ symbolem S, tzn. $S = \{x \in \mathbb{R}_n : \|x\| = 1\}$. Sestrojte spojité zobrazení f definované na množině S takové, že zobrazuje tuto jednotkovou sféru na sebe, přičemž neexistuje na množině S její pevný bod.

♣

Obecně v nekonečně rozměrných Banachových (resp. v metrických) prostorech podobná věta platí pouze v případě spojitého zobrazení definovaného na konvexní a kompaktní množině (viz kniha [1]).

Věta 1.3.4 (* *Věta Schauderova-Tichonovova*) *Nechť K je neprázdná konvexní a kompaktní množina v metrickém prostoru X. Pak každé spojité zobrazení množiny K do sebe má alespoň jeden pevný bod.*

V případě normovaného prostoru je toto tvrzení známo jako věta Schauderova, kterou lze v literatuře najít také v následujícím znění (viz např. knihy [14] a [7]).

Věta 1.3.5 (*Věta Schauderova*) *Nechť K je omezená, uzavřená a konvexní množina v Banachově prostoru X. Pak každý totálně spojitý operátor A zobrazující množinu K do sebe má alespoň jeden pevný bod.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ a sestrojme ε-aproximaci operátoru A.

Jelikož množina K je omezená a operátor A je totálně spojitý, je množina $A(K)$ prekompaktní (viz definice 1.1.1 a skripta [10]), a proto existuje konečná ε-síť $\mathcal{N}_\varepsilon$ množiny $A(K)$,

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \{y_i^\varepsilon\}_{i=1}^{m_\varepsilon} \subset A(K),$$

tzn. k libovolnému $y \in A(K)$ existuje $y_j^\varepsilon \in \mathcal{N}_\varepsilon$ tak, že platí

$$\|y - y_j^\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Na množině $A(K)$ definujme operátor P_ε předpisem

$$P_\varepsilon(y) = \frac{\sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \nu_i^\varepsilon(y)\, y_i^\varepsilon}{\sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \nu_i^\varepsilon(y)},$$

kde

$$\nu_i^\varepsilon(y) = \varepsilon - \|y - y_i^\varepsilon\|, \quad \text{je} - \text{li} \quad \|y - y_i^\varepsilon\| < \varepsilon, \quad \text{jinak} \quad 0.$$

Z této konstrukce ihned plyne, že

$$\sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \nu_i^\varepsilon(y) \;>\; 0 \quad \forall y \in A(K).$$

Jelikož $\nu_i^\varepsilon(y)$ je spojitá funkce proměnné $y \in A(K)$, je operátor P_ε spojitý na množině $A(K)$ a navíc

$$P_\varepsilon(K) \subset \mathcal{L}\{y_i^\varepsilon\}_{i=1}^{m_\varepsilon} \cap K \equiv X_\varepsilon \cap K,$$

kde X_ε je konečně rozměrný podprostor v prostoru X. Tudíž operátor $P_\varepsilon : K \to X_\varepsilon \cap K$ je totálně spojitý. Sestrojme operátor A_ε:

$$A_\varepsilon x = P_\varepsilon A x, \quad x \in K.$$

Zřejmě $A_\varepsilon : K \to X_\varepsilon \cap K$ je také totálně spojitý. Pro $y \in A(K)$ a $x \in K$ obdržíme z definice P_ε a A_ε odhady

$$\|y - P_\varepsilon\| \leq \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \|Ax - A_\varepsilon x\| \leq \varepsilon,$$

což znamená, že $A_\varepsilon x$ konverguje k Ax stejnoměrně pro $\varepsilon \to 0$ na množině K. Množina $K_\varepsilon = K \cap X_\varepsilon$ je konvexní, ohraničená a uzavřená. Vyšetřujme operátor $A_\varepsilon : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$. Podle zobecněné Brouwerovy věty 1.3.3 existuje pevný bod $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ tohoto operátoru, tzn. platí

$$A_\varepsilon x_\varepsilon = x_\varepsilon, \quad x_\varepsilon \in K_\varepsilon.$$

Jelikož A_ε je totálně spojitý, množina $\{x_\varepsilon\} \equiv \{A_\varepsilon x_\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, obsahuje Cauchyovskou podposloupnost $\{x_n\} \subset K,\ n \in \mathbb{N}$. Bod x_n je pevným bodem nějakého operátoru $A_n \in \{A_\varepsilon\}$. Jelikož X je úplný a množina K je uzavřená, posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k nějakému prvku $x_0 \in K$. A_n konverguje stejnoměrně k A pro $n \to \infty$ na K, tzn. k libovolnému $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\|A_n x - Ax\| < \delta \quad \forall x \in K.$$

Operátor A je spojitý a tím

$$Ax_n \quad \longrightarrow \quad Ax_0 \quad \text{jakmile} \quad n \to \infty.$$

Avšak

$$\|x_n - Ax_0\| = \|A_n x_n - Ax_0\| \leq \|A_n x_n - Ax_n\| + \|Ax_n - Ax_0\| \ \to\ 0 \quad \text{pro}\, n \to \infty$$

a současně $x_n \ \to\ x_0$ jakmile $n \to \infty$. Proto $x_0 = Ax_0$ což znamená, že $x_0 \in K$ je pevný bod operátoru A na množině K.

□

Následující Hartmanova-Stampacchiova věta je ekvivalentní zobecněné větě Brouwerově o pevném bodu.

Věta 1.3.6 (* *Věta Hartmanova-Stampacchiova*) *Nechť $K \subset \mathbb{R}_n$ je kompaktní a konvexní množina a operátor $A : K \to \mathbb{R}_n$ je spojitý. Pak existuje $x \in K$ tak, že platí*

$$(Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Důkaz. Větu dokážeme pomocí zobecněné Brouwerovy věty 1.3.2. Sestrojme projekci P_K (viz (1.3)) na množinu K a definujme funkci f na množině K předpisem

$$f(v) = P_K(-Av + v).$$

Z předpokladů plyne, že tato funkce f je spojitá a zobrazuje množinu K do sebe. Podle věty 1.3.2 existuje $u \in K$ tak, že

$$u = P_K(-Au + u).$$

Tudíž z nerovnosti (1.3) ($x := -Au + u$) plyne

$$((-Au + u) - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K \qquad \Longrightarrow \qquad (Au, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K$$

a tím je věta dokázána.

□

Cvičení 1.3.3 *Dokažte Brouwerovu větu 1.3.1 pomocí Hartmanovy-Stampacchiovy věty. Tím bude dokázána ekvivalentnost obou vět.

Návod. Brouwerovu větu (viz větu 1.3.1) stačí dokázat pro $r = 1$. Nechť f je spojité zobrazení definované na uzavřené kouli $\overline{B_1} \subset \mathbb{R}_n$ a zobrazující tuto kouli do sebe. Položme $K := \overline{B_1}$ a definujme operátor $A : K \to \mathbb{R}_n$ předpisem $A = I - f$. Ověřte, že předpoklady Hartmanovy-Stampacchiovy věty 1.3.6 jsou splněny. Pak podle této věty existuje prvek $u \in K$ tak, že platí

$$(u - f(u), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Je-li $u \in \operatorname{int} K$ (tzn. leží uvnitř jednotkové koule $K \equiv \overline{B_1}$), pak pro nějaké $r > 0$ existuje otevřená koule $C_r = \{x : \|x\| < r\}$ taková, že

$$C_r \subset \{v - u : v \in K\}$$

a tím

$$(u - f(u), w) = 0 \quad \forall w \in C_r.$$

Pro pevné $x \in \mathbb{R}_n, x \neq 0$, (a jinak libovolné) existuje $\rho > 0$ tak, že $\rho x \in C_r$. Odtud ukažte, že $(u - f(u), x) = 0$ a tím $u = f(u)$.

Jeli $u \in S_1$ (tzn. u leží na hranici jednotkové koule $\overline{B_1}$, $\|u\| = 1$), položme

$$u - f(u) = a.$$

Ukažte, že pro $w \in W := \operatorname{int} K - u$ je

$$0 \leq (a, w) = |a| \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

a tím $u - f(u) = a = \lambda \leq 0$ pro nějaké $\lambda \leq 0$. Avšak

$$f(u) = (1 - \lambda)u \in K,$$

a proto $\lambda \geq 0$. Tím $\lambda = 0$, což znamená, že $f(u) = u$. ♣

Na závěr tohoto odstavce uvedeme Banachovu větu o kontrahujícím zobrazení reprezentující skupinu vět o pevném bodu mající konstruktivní charakter (viz [14]).

Věta 1.3.7 *Nechť X je Banachův prostor. Předpokládejme, že operátoru A zobrazuje množinu $V \subseteq X$ do sebe a je na této množině kontrahující s parametrem α, tzn. platí*

$$\|Au - Av\| \leq \alpha \|u - v\|, \quad \text{kde} \quad \alpha \in (0,1), \quad u, v \in V.$$

Pak na množině V existuje jediný pevný bod z operátoru A a platí

$$\|u_n - z\| \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \|u_1 - u_0\|,$$

kde u_0 je libovolně zvolený bod množiny V a $u_{n+1} = Au_n$, $n = 0, 1, \cdots$.

Poznámka 1.3.1 Z této věty je patrné, že posloupnost postupných aproximací u_n konverguje k pevnému bodu z operátoru A s rychlostí geometrické posloupnosti s kvocientem α. Je-li tento parametr roven 1, pak tato posloupnost nemusí konvergovat. V literatuře existuje řada zobecnění pro metrické, pseudometrické prostory a také zobecnění, ve kterých je parametr α vhodně zvolený lineární a spojitý operátor.

1.4 Monotonie a koercivita funkce a operátoru

Nejprve uvedeme zobecnění pojmu neklesající funkce reálné proměnné pro funkce více proměnných a obecně pro operátory v Hilbertově a Banachově prostoru. Na závěr pojednáme o koercivitě operátoru.

Předpokládejme, že g je funkce jedné proměnné, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pak zřejmě platí ekvivalence:

$$\{x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (g(x) - g(y))\,(x - y) \geq 0.$$

Na základě této ekvivalence zobecníme pojem neklesající funkce (monotónní) pro funkce v n-rozměrném Euklidově prostoru $\mathbb{R}_n$ a současně pro operátory v reálném Hilbertově a Banachově prostoru.

Definice 1.4.1 *Nechť X je reálný Hilbertův resp. Banachův prostor.*

1. *Funkci $g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$, $g = \{g_i\}_{i=1}^n$ nazveme monotónní, jestliže pro každé $x, y \in \mathbb{R}_n$ platí*

$$(g(x) - g(y), x - y) \equiv \sum_{i=1}^{n} (g_i(x) - g_i(y))(x_i - y_i) \geq 0,$$

kde $x = \{x_i\}_{i=1}^n$, $y = \{y_i\}_{i=1}^n$.

2. *Operátor $A : X \to X$, kde X je reálný Hilbertův prostor, nazveme monotónním, jestliže pro každé $x, y \in X$ platí*

$$(Ax - Ay, x - y) \ge 0,$$

kde $(\cdot,\cdot)$ je skalární součin v prostoru X.

3. *Operátor $A : X \to X^*$, kde X je reálný Banachův prostor, nazveme monotónním, jestliže pro každé $x, y \in X$ platí*

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \ge 0,$$

kde X^* je duální prostor k prostoru X a $\langle Ax, z\rangle$ je hodnota funkcionálu $Ax \in X^*$ v bodě $z \in X$.

4. *Ryze monotónní funkce resp. operátory se definují podobně s tím rozdílem, že nerovnosti v uvedených definicích jsou ostré pro $x \neq y$.*

Předpoklady

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

z důsledku 1.2.1 lze zapsat ve tvaru

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{x\, g(x)}{|x|} = +\infty.$$

Dále se věnujme pojmu koercivity, která souvisí s tímto předpokladem.

Definice 1.4.2 *Nechť X je reálný Hilbertův resp. Banachův prostor.*

1. *Funkci $g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ nazveme koercivní, jestliže platí*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{(g(x), x)}{\|x\|} = +\infty,$$

kde $\|\cdot\|$ je Euklidovská norma v prostoru $\mathbb{R}_n$.

2. *Operátor $A : X \to X$, kde X je reálný Hilbertův prostor, nazveme koercivním, jestliže platí*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{(Ax, x)}{\|x\|} = +\infty,$$

kde $(\cdot,\cdot)$ je skalární součin v prostoru X.

3. *Operátor $A : X \to X^*$, kde X je reálný Banachův prostor, nazveme koercivním, jestliže*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|} = +\infty,$$

kde X^* je duální prostor k prostoru X a $\langle Ax, z\rangle$ je hodnota funkcionálu $Ax \in X^*$ v bodě $z \in X$.

1.4.1 Řešitelnost nelineárních rovnic více proměnných

V tomto odstavci dokážeme dvě tvrzení, která budeme potřebovat v dalším výkladu. Obě dvě plynou z Brouwerovy věty o pevném bodu. Symbolem S_r označme množinu $\{x : \|x\| = r\}$, tzn. je to hranice uzavřené koule $\overline{B_r}$ v prostoru $\mathbb{R}_n$ se středem v počátku a s poloměrem r.

Věta 1.4.1 *Nechť $g : \overline{B_r} \to \mathbb{R}_n$ je spojité zobrazení takové, že pro všechna $x \in S_r$ platí*

$$(g(x), x) \geq K,$$

kde K je nezáporná konstanta. Pak rovnice $g(x) = 0$ má v kouli $\overline{B_r}$ řešení.

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že K je kladná konstanta. Zvolme $\varepsilon > 0$ a sestrojme funkci f_ε

$$f_\varepsilon(x) = x - \varepsilon g(x), \quad x \in \overline{B_r}.$$

Zřejmě je funkce $f_\varepsilon : \overline{B_r} \to \mathbb{R}_n$ spojitá. Ukážeme, že existuje ε_0 tak, aby funkce f_{ε_0} zobrazovala kouli $\overline{B_r}$ do sebe. Pak podle Brouwerovy věty 1.3.1 existuje v kouli $\overline{B_r}$ její pevný bod $x_0 \in \overline{B_r}$, což znamená

$$x_0 = f_{\varepsilon_0}(x_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(x_0) = 0$$

a tím je věta dokázána. K sestrojení ε_0 budeme potřebovat několik odhadů. Jelikož funkce g je spojitá na uzavřené množině $\overline{B_r}$, existuje konstanta $L > 0$ tak, že platí

$$\|g(x)\| \leq L \quad \text{pro} \quad x \in \overline{B_r}.$$

Z předpokladu věty plyne, že pro $x \in S_r$ platí odhad:

$$K \leq (g(x), x) \leq Lr.$$

Ze spojitosti funkce g plyne existence takového čísla $\rho > 0$, že platí:

$$\rho < r \quad \text{a} \quad (g(x), x) \geq \frac{K}{2} \quad \text{pro} \quad x \in S_r \setminus S_\rho.$$

Pak pro $x \in S_r \setminus S_\rho$ je

$$\|f_\varepsilon\|^2 \leq \|x\|^2 + \varepsilon^2 \|g(x)\|^2 - 2\varepsilon\,(g(x), x) \leq r^2 + \varepsilon^2 L^2 - \varepsilon K.$$

Pro $x \in S_\rho$ je

$$\|f_\varepsilon\|^2 \leq \rho^2 + \varepsilon^2 L^2 + 2\varepsilon\rho L$$

Zvolíme-li $\varepsilon > 0$ tak, aby

$$r^2 + \varepsilon^2 L^2 - \varepsilon K \leq r^2 \qquad \text{a} \qquad \rho^2 + \varepsilon^2 L^2 + 2\varepsilon\rho L \leq r^2,$$

pak $\|f_\varepsilon\|^2 \leq r^2$ pro všechna $x \in \overline{B_r}$ a tím funkce f_ε zobrazuje kouli $\overline{B_r}$ do sebe. Z těchto nerovností již snadno plyne volba $\varepsilon_0 > 0$:

$$0 < \varepsilon_0 \leq \min\left\{\frac{K}{L^2}, \frac{1}{L}(r - \rho)\right\}.$$

Je-li $K = 0$, pak zvolme posloupnost $\{\lambda\}$, $\lambda_n > 0$, tak aby $\lambda_n \to 0$ a definujme $g_n : \overline{B_r} \to \mathbb{R}_n$ takto:

$$g_n(x) = g(x) + \lambda_n x \qquad \text{pro} \qquad x \in \overline{B_r}.$$

Pak g_n je spojité zobrazení takové, že pro všechna $x \in S_r$ platí

$$(g_n(x), x) \geq \lambda_n r^2 > 0.$$

Pak podle dokázané této věty pro případ, kdy K je kladná konstanta, má rovnice $g_n(x) = 0$ v kouli $\overline{B_r}$ nějaké řešení u_n. Z kompaktnosti koule $\overline{B_r}$ plyne existence konvergentní podposloupnosti $\{u_{n_k}\}$ s limitou $u \in \overline{B_r}$. Odtud a ze spojitosti funkce g obdržíme limitním přechodem dokazované tvrzení:

$$0 = g_{n_k}(u_{n_k}) = g(u_{n_k}) + \lambda_{n_k} u_{n_k} \quad \longrightarrow \quad g(u) \quad \Longrightarrow \quad g(u) = 0.$$

□

Věta 1.4.2 (Surjektivita) *Nechť $g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ je spojité a koercivní zobrazení. Pak rovnice $g(x) = b$ má řešení pro každé $b \in \mathbb{R}_n$, tzn. g je surjektivní.*

Důkaz. Zvolme $b \in \mathbb{R}_n$ a $K > 0$. Pak z koercivity plyne existence $r > 0$ tak, že pro $x \in S_r$ platí

$$(g(x) - b, x) = (g(x), x) - (b, x) \geq K.$$

Tvrzení již dostáváme ihned z předcházející věty 1.4.1.

□

1.5 Diferenciální počet v normovaných prostorech

V tomto odstavci uvedeme potřebné pojmy diferencovatelnosti nelineárních operátorů a funkcionálů v normovaných prostorech a krátce pojednáme o jejich některých vlastnostech. Při zpracování této tématiky jsme využili především knihu [13].

Gâteaxův diferenciál a G-derivace (Gâteauxova, slabá) v bodě $x \in X$ operátoru A definovaného na prostoru X s hodnotami v Y.

Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $A : X \to Y$ je obecně nelineární operátor, o kterém kvůli zjednodušení výkladu budeme předpokládat, že je definován na celém prostoru X s hodnotami v Y. Zvolme $x \in X$. Jestliže existuje

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[A(x + th) - Ax\right] \equiv VA(x, h) \quad \forall h \in X,$$

řekneme, že operátor A je slabě (Gâteauxovsky) diferencovatelný v bodě x. V tomto případě operátor $VA(x, h)$ se nazývá variací resp. Gâteauxovým diferenciálem operátoru A v bodě x ve směru h. Z této definice ihned plyne, že $VA(x,h)$ je homogenní vzhledem k h, tzn. platí $VA(x,\alpha h) = \alpha VA(x,h)$. Obecně však nemusí být variace additivní. V případě, že je additivní, pak se v literatuře pro variaci používá označení $DA(x,h)$. Je-li navíc tento operátor spojitý v h, pak se nazývá slabou derivací (G-derivací, Gâteauxovou derivací) operátoru A v bodě x ve směru h. V literatuře se pro tuto derivaci používá označení $A^{'}$ resp. $\overset{\bullet}{A}$. Odtud je patrné, že

$$A^{'} : X \to \mathcal{L}(X,Y).$$

Je-li f funkcionál na normovaném lineárním prostoru X a má G-derivaci v každém bodě $x \in X$, pak $f^{'}(x) \in X^*$. Variaci resp. G-derivaci lze stejným způsobem definovat i pro případ operátoru definovaného na nějaké husté množině $\mathcal{D}(A)$ obecně neúplného normovaného prostoru. V tomto případě G-derivace $A^{'}(x)h \equiv DA(x,h)$ je pro každé pevné $x \in \mathcal{D}(A)$ definována pouze pro $h \in \mathcal{D}(A)$. Tento lineární a spojitý operátor v h lineárně a spojitě rozšíříme se zachováním normy na celý prostor X a symbol $A^{'}$ představuje tento rozšířený operátor.

Z diferenciálního počtu nelineárních funkcionálů budeme v dalším výkladu potřebovat Lagrangeovu formuli, která zobecňuje známou formuli platnou pro diferencovatelné funkce jedné proměnné.

Věta 1.5.1 *Předpokládejme, že funkcionál f je G-diferencovatelný v každém bodě konvexní podmnožiny Ω lineárního prostoru X. Pak pro libovolné body $x, x+h \in \Omega$ existuje $\tau \in (0,1)$ tak, že platí*

$$f(x+h) - f(x) = Df(x+\tau h, h).$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) := f(x+th)$, $0 < t < 1$. Pak

$$\varphi'(t) = Df(x+th,h) \ \Rightarrow \ f(x+h) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = Df(x+\tau h, h),$$

kde $0 < \tau < 1$.

□

Důsledek 1.5.1 *Nechť X je normovaný prostor a funkcionál f má v každém bodě $x \in X$ G-derivaci $f'(x) \in X^*$. Pak platí*

$$f(x+h) - f(x) = \langle f'(x+\tau h), h\rangle \quad \forall\, x, h \in X,$$

kde $0 < \tau < 1$.

Fréchetův diferenciál a silná (F-derivace, Fréchetova derivace) v bodě $x \in X$ operátoru A definovaného na prostoru X s hodnotami v Y.

Jestliže existuje operátor $u(x,h): X \times X \to Y$, který je lineární v proměnné $h \in X$ tak, že platí

$$A(x+h) - Ax = u(x,h) + \omega(x,h) \quad \text{a} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\omega(x,h)}{\|h\|} = 0,$$

pak se tento operátor nazývá Fréchetovým diferenciálem operátoru A v bodě $x \in X$ a označuje se symbolem $dA(x,h)$. Je-li navíc tento operátor spojitý vzhledem k h, pak se nazývá silnou derivací (F-derivací, Fréchetovou derivací) operátoru A v bodě x. V literatuře se pro tuto derivaci používá také stejného označení $A^{'}$ jako v případě slabé derivace. Podobně jako u slabé derivace je

$$A^{'} : X \to \mathcal{L}(X,Y).$$

Stejným způsobem jako v případě slabé derivace lze definovat silnou derivaci (resp. F-diferenciál operátoru), který je definován pouze na husté množině nějakého obecně neúplného prostoru. Z definice G-derivace a F-derivace přímo plyne existence G-derivace v nějakém bodě, pokud existuje v tomto bodě F-derivace. Opačné tvrzení neplatí. Existují operátory (např. operátory Němyckého v prostorech $L^p(\Omega)$, viz [13]), které jsou ve všech bodech G-diferencovatelné, avšak v žádném bodě nejsou F-diferencovatelné. Existuje-li G-derivace v nějakém okolí bodu x_0 a je spojitá v tomto bodě ve smyslu topologie prostoru $\mathcal{L}(x,y)$, pak již existuje F-derivace a obě tyto derivace zřejmě se sobě rovnají. Toto tvrzení zobecňuje větu z diferenciálního počtu funkcí více proměnných: jsou-li všechny parciální derivace v nějakém bodě spojité, pak v tomto bodě je funkce diferencovatelná.

Krátce ještě pojednáme o derivacích vyššího řádu. Kvůli zjednodušení výkladu opět předpokládejme, že $A : X \to Y$ je obecně nelineární operátor definovaný na celém normovaném lineárním prostoru X s hodnotami v normovaném lineárním prostoru Y. Zvolme $x_0 \in X$. Předpokládejme, že existuje G-derivace $A^{'}(x)$ v nějakém okolí tohoto bodu $\mathcal{U}(x_0) \subset X$ a tento operátor uvažovaný jako zobrazení $\mathcal{U}(x_0) \to \mathcal{L}(X,Y)$ má v bodě x_0 G-derivaci, pak budeme říkat, že operátor A má druhou derivaci v bodě x_0 a budeme ji značit symbolem $A^{''}(x_0) := \Big(A^{'}(x_0)\Big)^{'}$. To znamená, že pro každé pevné h má zobrazení $A^{'}(x_0)\,h : X \to Y$ G-derivaci, což je pro fixované x_0 spojitý lineární operátor. Z této definice obdržíme pro $h, g \in X$ rovnost

$$\Big(A^{'}(x_0)\,h\Big)^{'}\, g = \Big[A^{''}(x_0)\,h\Big]\, g \equiv A^{''}(x_0)\,hg.$$

Zobrazení $A^{''}(x_0)\,hg$ je bilineární forma na prostoru X. Jestliže existuje druhá F-derivace operátoru A v bodě x_0, pak již bilineární forma $A^{''}(x_0)\,hg$ je symetrická, tzn. pro libovolné $h, g \in X$ platí rovnost

$$A^{''}(x_0)\,hg = A^{''}(x_0)\,gh.$$

Analogicky lze definovat derivace vyššího řádu a také F-derivace a tvrzení o symetrii platí i pro vyšší derivace.

Nechť f je nelineární funkcionál definovaný na normovaném lineárním prostoru X. Jestliže existuje G-derivace f' v bodě x, pak se pro tuto derivaci obvykle používá název gradient funkcionálu f, tzn. $\operatorname{grad} f(x) \equiv f'(x)$. Připomeňme, že gradient je spojitý lineární funkcionál nad prostorem X: $f'(x) \in X^*$.

Předpokládejme, že v každém bodě $x \in X$ existuje G-derivace funkcionálu f, tzn. platí

$$\langle f'(x),\, h\rangle \equiv \langle \operatorname{grad} f(x),\, h\rangle = \frac{d}{dt}\, f(x+th)\,|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}.$$

Pro pevné h označme $\varphi(x;h) := \langle f'(x),\, h\rangle$ a předpokládejme, že funkcionál $\varphi(x;h)$ má v každém bodě $x \in X$ G-derivaci, tzn. platí

$$\langle \varphi'(x;h),\, g\rangle \equiv \frac{d}{dt}\,\varphi'(x+tg;h)\,|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+tg;h)-\varphi(x;h)}{t}.$$

Pak podle definice má funkcionál f druhou G-derivaci a budeme psát

$$f''(x)hg := \langle \varphi'(x;h),\, g\rangle\,, \qquad g,h \in X.$$

Aplikací důsledku 1.5.1 obdržíme pro libovolné $h, g \in X$

$$\begin{aligned} f'(x+g)h - f'(x)h \qquad &= \varphi(x+g;h) - \varphi(x;h) = \langle \varphi'(x+\tau g;h)\,,\, g\rangle = \\ &= f''(x+\tau g)hg, \end{aligned} \tag{1.8}$$

kde $0 < \tau < 1$ a $f'(x)h \equiv \langle f'(x), h\rangle$.

Cvičení 1.5.1 Nechť X je reálný Hilbertův prostor a operátor $A \in \mathcal{L}(X)$. Spočtěte první a druhou G-derivaci funkcionálů f_1 a f_2 zadaných předpisem

$$f_1(x) = (Ax, x) \qquad \text{a} \qquad f_2(x) = (Ax - z, Ax - z),\ \ z \in X.$$

Ukažte, že platí

$$f_1'(x) = (A{+}A^*)(x), \quad f_1''(x) = A{+}A^*, \quad f_2'(x) = A^*(Ax{-}z), \quad f_2''(x) = AA^*,$$

kde A^* je duální operátor, tzn.

$$\begin{aligned} f_1'(x)h &= ((A+A^*)(x), h), \quad f_1''(x)hg = ((A+A^*)h, g) = f_1''(x)gh; \\ f_2'(x)h &= (A^*(Ax-z), h), \quad f_2''(x)hg = (AA^*h, g) = f_2''(x)gh. \end{aligned}$$

♣

Uvedeme bez podrobného odůvodnění (viz [13]) několik příkladů.

Příklady 1.1 Gradient normy.

1. Nechť X je reálný Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)$ a s normou $\|\cdot\|$. Pak

$$\operatorname{grad}\|x\|^2 \;=\; 2\,x, \qquad \text{a} \qquad \operatorname{grad}\|x\| = \frac{x}{\|x\|}\ \text{ pro } x \neq 0,$$

   přičemž prvky na pravé straně těchto rovností reprezentují spojitý lineární funkcionál $\operatorname{grad} f(x)$ pro $f(x) = \|x\|^2$ resp. $f(x) = \|x\|$ (Rieszova věta o obecném tvaru spojitého lineárního funkcionálu).

2. Nechť $X = L^p(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ je měřitelná množina konečné míry. Zvolme $p \in (1, \infty)$. Pak pro $x \neq 0$ je

$$\operatorname{grad} \|x\| = \|x\|^{1-p} \, |x(\tau)|^{p-2} \, x(\tau) \equiv z(\tau), \, \tau \in \Omega,$$

kde funkce $z(\tau)$ je prvkem prostoru $L^q(\Omega)$, $q = p/(p-1)$, reprezentující spojitý lineární funkcionál $\operatorname{grad} \|x\| \in X^* \cong L^q(\Omega)$.

3. Nechť $X = l^p$, kde $p \in (1, \infty)$. Pak pro $x \neq 0$, $x = \{x_i\} \in l^p$, je

$$\operatorname{grad} \|x\| = \|x\|^{1-p} \, u \equiv z; , \quad u = \{|x_i|^{p-2} \, x_i\} \in l^q, \quad q = p/(p-1),$$

kde $z \in l^q$ reprezentuje spojitý funkcionál $\operatorname{grad} \|x\| \in X^* \cong l^q$. ♠

Cvičení 1.5.2 Dokažte tvrzení v příkladech 1.1.
Návod. Stačí uvést návod k tvrzení v bodě 2. Analogicky lze dokázat bod 3.
Pro $1 < p < 2$ definujme funkci f reálné proměnné ψ :

$$f(\psi) = (|1 + \psi|^p - 1 - p\psi) \, |\psi|^{-p}.$$

Dokažte, že tato funkce je ohraničená. Za tím účelem ukažte, že platí

$$\lim_{\psi \to \pm\infty} f(\psi) = 1, \qquad \lim_{\psi \to 0} f(\psi) = 0.$$

Z ohraničenosti této funkce, plyne existence dvou konstant C_1, C_2 takových, že platí

$$C_1 |\psi|^p \leq |1 + \psi|^p - 1 - p\psi \leq C_2 |\psi|^p.$$

Dosazením $\psi = th(u)/x(u)$, kde $h, x \in L^p(\Omega)$, $x(u) \neq 0$, a integrací obdržíte

$$C_1 \|th\|^p \leq \|x + th\|^p - \|x\|^p - pt \int_\Omega h(u) |x(u)|^{p-1} \operatorname{sign} x(u) \, du \, \leq C_2 \|th\|^p.$$

Vydělením t a limitním přechodem $t \to 0$ dostanete

$$\langle \operatorname{grad} g, h \rangle = p \int_\Omega |x(u)|^{p-1} \operatorname{sign} x(u) \, h(u) \, du,$$

kde $g(x) = \|x\|^p$. Pro $p > 2$ obdržíte stejný výsledek, použijete-li funkci f definovanou takto:

$$f(\psi) = (|1 + \psi|^p - 1 - p\psi) \, (|\psi|^p + \psi^2)^{-1}.$$

Jelikož

$$\langle \operatorname{grad} g, h \rangle = p \|x\|^{p-1} \, \langle \operatorname{grad} \|x\|, h \rangle \, ,$$

je

$$\langle \operatorname{grad} \|x\|, h \rangle = \|x\|^{1-p} \int_\Omega |x(u)|^{p-2} \, x(u) \, h(u) \, du,$$

tzn.

$$\operatorname{grad} \|x\| = \|x\|^{1-p} \, |x(u)|^{p-2} \, x(u), \quad x \neq 0.$$ ♣

Nechť X je Banachův prostor. V knize [13] je dokázáno, že norma v tomto prostoru je G-diferencovatelná v každém nenulovém bodě, právě když jednotková sféra $S \equiv \{x : \|x\| = 1\}$ je hladká, tzn. v každém jejím bodě existuje jediná opěrná nadrovina k jednotkové kouli. Jinak řečeno, pro libovolné $x_0 \in S$ existuje lineární funkcionál $f \in X^*$ (závislý na tomto bodě) takový, že platí

$$f(x_0) = \|x_0\| = 1 \quad \text{a} \quad f(x) \le \|x\| \ \forall x \in K \equiv \{x : \|x\| \le 1\}.$$

Je-li funkcionál grad $\|x\|$ (tzn. G-derivace normy) spojitý vzhledem k proměnné x v normě prostoru X, pak je již také F-derivací normy a naopak. Ve všech výše uvedených příkladech je grad $\|x\|$ F-derivací normy. Další vlastnosti G-derivace normy shrneme do lemmatu.

Lemma 1.5.1 *Předpokládejme, že norma v reálném normovaném prostoru X je G-diferencovatelná v každém nenulovém bodě $x \in X$ a $D(\|\cdot\|, h)$ je pouze lineární funkcionál v proměnné h pro každé $x \neq 0$. Pak platí*

1. *G-diferenciál $D(\|\cdot\|, h)$ je spojitý lineární funkcionál vzhledem k proměnné h a tím je G-derivací (gradientem normy), tzn. $D(\|x\|, h) = \operatorname{grad}\|x\|$ pro $x \neq 0$.*

2. *Pro každé $x \neq 0$ a $\alpha \neq 0$ je*

$$\|\operatorname{grad}\|x\|\,\| = 1, \quad \langle \operatorname{grad}\|x\|, x\rangle = \|x\|, \quad \operatorname{grad}\|\alpha x\| = \operatorname{sign}\alpha \operatorname{grad}\|x\|$$

1.5.1 Konvexita Banachova prostoru a dualizační zobrazení

Nejprve uvedeme definici striktně (ryze, ostře) a stejnoměrně konvexního normovaného prostoru a bez důkazů pojednáme o některých vlastnostech těchto prostorů. Podrobnější výklad včetně důkazů lze najít ve skriptech [10]. Omezíme se na Banachovy prostory.

Definice 1.5.1 *Nechť Y je libovolný Banachův prostor. Pak*

1. *Y se nazývá striktně konvexní (resp. norma v prostoru Y je striktně konvexní), jestliže platí implikace*

$$\|u\| = 1,\ \|v\| = 1,\ u \neq v \quad \Longrightarrow \quad \|u + v\| < 2.$$

2. *Y se nazývá stejnoměrně konvexní (resp. norma v prostoru Y je stejnoměrně konvexní), jestliže platí implikace*

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tak, že pro } \|u\| \le 1,\ \|v\| \le 1,\ \|u - v\| \ge \varepsilon \text{ je}$$

$$\|u + v\| \le 2\,(1 - \delta(\varepsilon))\,.$$

Prostory l^p a $L^p(\Omega)$, kde Ω je ohraničená množina v $\mathbb{R}_n$, pro libovolné $p \in (1, \infty)$ jsou ostře konvexní. Prostory l^2 a $L^2(\Omega)$ jsou Hilbertovy a tím jsou stejnoměrně konvexní. Prostor $l^1(n)$ (n-dimenzionální s normou rovnou součtu absolutních hodnot složek n-rozměrného vektoru) není striktně konvexní. Uvedeme bez důkazů (viz např.[13], [10]) několik důležitých vlastností těchto prostorů.

Věta 1.5.2 *1. Nechť Y^* je striktně konvexní . Pak pro libovolné $x \in Y$ existuje jediný prvek $x^* \in Y^*$ tak, že platí*

$$\langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2.$$

2. Nechť Y je striktně konvexní. Pak rovnost

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in X$$

platí pouze, jsou-li prvky x a y lineárně závislé.

3. Nechť Y je striktně konvexní. Pak rovnost

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \|x\| = \|y\|, \quad x, y \in X$$

platí pouze, je-li $x = y$. Odtud plyne, že jednotková sféra S, $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$, neobsahuje žádnou úsečku, tzn. platí implikace

$$x, y \in S,\ x \neq y \quad \Longrightarrow \quad tx + (1-t)y \notin S \quad \text{pro} \quad 0 < t < 1.$$

4. Nechť Y je striktně konvexní. Pak pro libovolné $x^* \in Y^*$ existuje jediný prvek $z \in S$ tak, že platí

$$\|x^*\| = \sup_{x \in S} \langle x^*, x \rangle = \langle x^*, z \rangle, \text{ tzn. } |\langle x^*, w \rangle| < \langle x^*, z \rangle \ \forall w \in S,\ w \neq z.$$

5. Je-li prostor Y stejnoměrně konvexní, pak je reflexivní a platí následující implikace

$$\{x_n \rightharpoonup x,\ \|x_n\| \to \|x\|\} \quad \Longrightarrow \quad x_n \to x.$$

6. Je-li prostor Y reflexivní, pak lze na prostoru Y zavést ekvivalentní striktně konvexní normu, přičemž duální prostor Y^* s jeho duální normou je striktně konvexní a tím po tomto re-normování platí

$$Y \text{ je striktně konvexní} \iff Y^* \text{ je striktně konvexní} \iff$$
$$\iff Y^{**} \text{ je striktně konvexní.}$$

7. Hilbertův prostor je stejnoměrně konvexní.

Poznamenejme, že stejnoměrně konvexní prostor je podle definice zřejmě striktně konvexní. Reflexivní prostor nemusí být striktně konvexní , např. konečně rozměrný prostor $l^1(n)$ je reflexivní, ale není striktně konvexní. Přejděme nyní k pojmu dualizačního zobrazení.

Definice 1.5.2 *Zobrazení $\mathcal{U} : X \to X^*$, kde X je Banachův (nebo normovaný) prostor se nazývá dualizační, jestliže pro libovolný prvek $x \in X$ platí*

$$\|\mathcal{U}(x)\| = \|x\|, \qquad \langle \mathcal{U}(x), x \rangle = \|\mathcal{U}(x)\| \, \|x\| = \|x\|^2.$$

Jestliže norma v Banachově prostoru X je G-diferencovatelná, pak podle lemmatu 1.5.1 je zobrazení $\mathcal{U} : X \to X^*$ definované předpisem

$$\mathcal{U}(x) = \|x\| \, \| \operatorname{grad} \|x\| \, \| \,, \; x \neq 0; \quad \mathcal{U}(0) = 0$$

dualizační. Je-li toto zobrazení jednoznačná funkce, pak budeme používat termínu dualizační operátor. Odtud a z výše uvedených příkladů 1.1 obdržíme explicitní tvar dualizačního operátoru pro prostor $X = L^p(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ je měřitelná množina konečné míry a $p \in (1, \infty)$:

$$\mathcal{U}(x) = \|x\|^{2-p} \; |x(\tau)|^{p-2} \; x(\tau) \equiv z(\tau), \; x \neq 0, \qquad \mathcal{U}(0) = 0,$$

kde funkce $z(\tau)$ je prvkem prostoru $L^q(\Omega)$, $q = p/(p-1)$, reprezentující spojitý lineární funkcionál $\operatorname{grad} \|x\| \in X^* \cong L^q(\Omega)$.

Pro prostor $X = l^p$, kde $p \in (1, \infty)$ a $q = p/(p-1)$, je dualizační operátor definován předpisem

$$\mathcal{U}(x) \;=\; \|x\|^{2-p} \, u \equiv z; \; x = \{x_i\} \in l^p, \; x \neq 0, \quad u = \{|x_i|^{p-2} \, x_i\} \in l^q,$$

kde prvek $z \in l^q$ reprezentuje spojitý lineární funkcionál $\operatorname{grad} \|x\| \in X^* \cong l^q$ a $\mathcal{U}(0) = 0$.

V libovolném Banachově prostoru X lze zkonstruovat dualizační zobrazení $\mathcal{U}$ následujícím způsobem. Podle Hahnovy-Banachovy věty existuje ke každému $x \in X$ alespoň jeden spojitý lineární funkcionál $y_x^* \in X^*$ tak, že platí

$$\|y_x^*\| = 1 \qquad \text{a} \qquad \langle y_x^*, \, x \rangle \;=\; \|x\|.$$

Definujme $\mathcal{U}$ takto:

$$\mathcal{U}(x) \;=\; \|x\| \, y_x^* \quad \text{a} \quad \mathcal{U}(-x) \;=\; - \, \|x\| \, y_x^*.$$

Pak

$$\|\mathcal{U}(x)\| = \|x\|, \qquad \langle \mathcal{U}x, \, x \rangle = \|\mathcal{U}(x)\| \; \|x\| = \|x\|^2$$

a tím zobrazení $\mathcal{U}$ je dualizační. Obecně množina

$$U_x^* \equiv \{x^* \in X^* : \langle x^*, \, x \rangle = \|x\|^2, \; \|x^*\| \;=\; \|x\|\}$$

nemusí být jednoobodová, což znamená, že také dualizační zobrazení $\mathcal{U}$ nemusí být jednoznačné. Lze snadno dokázat, že tato množina je konvexní. Je-li prostor X^* striktně konvexní, pak z této konstrukce ihned plyne, že množina U_x^* je jednobodová a tím dualizační zobrazení je jednoznačné.

1.6 Němyckého operátor a jeho vlastnosti

V aplikacích teorie monotónních a potenciálních operátorů budeme potřebovat vlastnosti superpozice funkcí, tzv. operátor Němyckého a jeho základní vlastnosti. Podrobně s těmito operátory v souvislosti s aplikacemi k diferenciálním a integrálním rovnicím se lze seznámit v knihách [11] a [4].

Definice 1.6.1 *Nechť Ω je oblast konečné míry v $\mathbb{R}_n$ a m je přirozené číslo. Předpokládejme, že funkce $f : \Omega \times \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}$ splňuje Caratheodorovy podmínky*

(i) *$f(\cdot, r)$ je měřitelná pro všechna pevná $r \in \mathbb{R}_m$;*

(ii) *$f(x, \cdot)$ je spojitá pro skoro všechna $x \in \Omega$.*

Na množině funkcí $u : \Omega \to \mathbb{R}_m$, $u(x) = (u_1(x), \cdots, u_m(x))$ definujme operátor Němyckého $\mathcal{N}$ předpisem

$$\mathcal{N}u(x) \;=\; f(x, u(x)).$$

Základní vlastnosti Němyckého operátoru lze shrnout do následující věty.

Věta 1.6.1 *Nechť $\mathcal{N}$ je Němyckého operátor splňující podmínky (i) a (ii). Pak platí*

1. *Operátor $\mathcal{N}$ zobrazuje měřitelné funkce na funkce měřitelné.*
2. *Nechť $1 < p,\ q < \infty$. Jsou-li splněny následující růstové podmínky*
$$|f(x,u)| \;\le\; g_1(x) + c(x) \sum_{i=1}^{m} |u_i|^{\frac{p}{q}},$$
kde $g_1(x) \in L^q(\Omega)$ a c je nezáporná L^∞-funkce, pak Němyckého operátor $\mathcal{N}$ je dobře definovaný, spojitý a ohraničený operátor z prostoru $[L^p(\Omega)]^m \equiv L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$ (m-krát) do prostoru $L^q(\Omega)$.
3. *Zvolme $p = 2$ a $m = 1$. Předpokládejme, že funkce $f(x,r)$ a její parciální derivace podle proměnné r, tzn. $f_r^{'}(x,r)$, splňují podmínky (i) a (ii). Nechť existuje konstanta $C > 0$ taková, že platí*
$$|f_r^{'}(x,r)| \;\le\; C \quad \text{pro} \quad x \in \Omega \quad \text{a} \quad r \in \mathbb{R},$$
pak Němyckého operátor $\mathcal{N} :\ L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ je G-diferencovatelný a je
$$D\mathcal{N}(u,v) = f_r^{'}(x, u(x))\, v(x) \quad \forall u,\, v \in L^2(\Omega).$$
Navíc lineární zobrazení $D\mathcal{N}(u,\cdot)$ je ohraničené a platí odhad
$$|D\mathcal{N}(u,v)| \;\le\; C\|v\|.$$
4. *Nechť $p > 2$ a $m = 1$. Předpokládejme, že funkce $f(x,r)$ splňuje podmínky (i) a (ii) a a její parciální derivace podle proměnné r, tzn. $f_r^{'}(x,r)$, splňuje nerovnost*
$$|f_r^{'}(x,u)| \;\le\; g(x) \;+\; b\,|u|^{p-2} \quad \text{pro} \quad x \in \Omega \quad \text{a} \quad u \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$
kde
$$g \in L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega) \qquad \text{a} \qquad b > 0.$$
Pak Němyckého operátor $\mathcal{N} :\ L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$, kde $p' = \frac{p}{p-1}$, je F-diferencovatelný a platí
$$d\mathcal{N}(u,v) = f_r^{'}(\cdot, u(\cdot))\, v(\cdot) \quad \forall u,\, v \in L^P(\Omega).$$

Důkaz. Uvedeme pouze základní myšlenky důkazů výše uvedených tvrzení a to pro případ m =1. V tomto případě $\mathcal{N}u(x) = f(x, u(x))$, kde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ a Caratheodorovy podmínky jsou tvaru

(i) $f(\cdot, r)$ je měřitelná pro všechna pevná $r \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x, \cdot)$ je spojitá pro skoro všechna $x \in \Omega$.

1. Z teorie měřitelných funkcí je známo, že funkce $f(x, r) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je měřitelná, jestliže funkce $f(x, r)$ je spojitá v proměnné r pro skoro všechna $x \in \Omega$ a měřitelná jako funkce proměnné $x \in \Omega$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$. Odtud plyne tvrzení: operátor $\mathcal{N}$ zobrazuje měřitelnou funkci na funkci měřitelnou.

2. Nechť $1 < p,\, q < \infty$. Růstové podmínky jsou tvaru

$$|f(x, u)| \le g_1(x) + c(x)\,|u|^{\frac{p}{q}},$$

kde $g_1(x) \in L^q(\Omega)$ a c je nezáporná L^∞-funkce. Použitím Minkowského nerovnosti obdržíme

$$\|\mathcal{N}u\|_q \le \left[\int_\Omega (g_1(x) + c(x)\,|u|^{\frac{p}{q}})^q\right]^{\frac{1}{q}} \le \|g_1\|_q + \|c\|_\infty\, \|u\|_p^{\frac{p}{q}},$$

kde $\|\cdot\|_s \equiv \|\cdot\|_{L^s(\Omega)}$ a $s := p, q$ a analogicky $\|\cdot\|_\infty \equiv \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$. Z této nerovnost plyne, že $\mathcal{N}$ je ohraničený operátor z prostoru $L^p(\Omega)$ do prostoru $L^q(\Omega)$.

Spojitost operátoru $\mathcal{N} : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ lze dokázat pomocí Vitaliho věty (z teorie Lebesgeuova integrálu o konvergenci). Předpokládejme, že posloupnost funkcí $\{u_n\}$ konverguje v normě prostoru $L^p(\Omega)$ k funkci $u \in L^p(\Omega)$. Pak existuje vybraná podposloupnost $\{u_k\} \subset \{u_n\}$, která k této funkci konverguje skoro všude. Jelikož funkce $f(x, u)$ je spojitá v proměnné u, konverguje posloupnost $\mathcal{N}u_k(x) = f(x, u_k(x))$ skoro všude k funkci $\mathcal{N}u(x) = f(x, u(x))$. Nyní budeme k posloupnosti $\mathcal{N}u_k$ aplikovat Vitaliho větu. Jelikož $u_k(x) \to u(x)$ skoro všude, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ podoblast $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ s mírou $\mu(\Omega_\varepsilon) < \infty$ a reálné číslo $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\mathcal{A} \subset \Omega$ s mírou $\mu(\mathcal{A}) < \delta$ platí:

$$\int_{\mathcal{A}} |u_k(x)|^p \,\mathrm{d}x \le \varepsilon \quad \text{a} \quad \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} |u_k(x)|^p \,\mathrm{d}x < \varepsilon \;\; \text{stejnoměrně pro} \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Použitím Minkowského nerovnosti a růstových podmínek obdržíme odhad

$$\left(\int_{\mathcal{A}} |\mathcal{N}u_k(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int_{\mathcal{A}} |g_1(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} + \|c\|_\infty\, \varepsilon^{\frac{1}{q}}.$$

Podobný odhad platí i pro integrály přes oblast Ω_ε a tím posloupnost $\mathcal{N}u_k$ splňuje podmínky Vitaliho věty (viz kniha [11], str. 16). Z této věty již plyne konvergence posloupnosti $\mathcal{N}u_k$ v normě prostoru $L^q(\Omega)$ k $\mathcal{N}u$.

3. Podle věty o střední hodnotě existuje $s \in (0,1)$ tak, že platí

$$\frac{1}{t}\left[\mathcal{N}(u+tv) - \mathcal{N}(u)\right] - D\mathcal{N}(u,v) = \left[f_r'(\cdot, u+stv) - f'(\cdot, u)\right] v.$$

Jestliže $t \to 0$, pak $stv(x) \to 0$ a tím

$$f_r'(x, u+stv) \to f_r'(x,u) \quad \text{skoro všude pro} \quad x \in \Omega.$$

Tudíž pro všechna u, $v \in L^2(\Omega)$ platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\mathcal{N}(u+tv) - \mathcal{N}(u)\right] \;=\; D\mathcal{N}(u,v) = f_r^{'}(x, u(x))\, v(x).$$

Odtud a z předpokladu věty o derivaci funkce f obdržíme odhad

$$|D\mathcal{N}(u,v)| \;\le\; C\|v\|,$$

a proto lineární zobrazení $D\mathcal{N}(u,\cdot)$ je ohraničené.

4. Integrací (1.9) obdržíme

$$|f(x,u)| \;\le\; g(x)|u| \;+\; b_1\,|u|^{p-2},$$

kde $b_1 > 0$, což implikuje, že $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^{p'}(\Omega)$ pro všechna $u \in L^p(\Omega)$. Pro libovolné $u, v \in L^p(\Omega)$ definujme funkci H předpisem

$$H(u,v) = \|\mathcal{N}(u+v) - \mathcal{N}(u) - f_r'(\cdot, u)v\|_{p'},$$

kde $N(u+v)(x) = f(x, u(x)+v(x))$. Podle věty o střední hodnotě existuje $s \in (0,1)$ tak, že platí

$$f(x, u+v) - f(x,u) = f_r'(x, u+sv)\, v$$

a proto

$$H(u,v) = \left(\int_\Omega |v(x)w(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}},$$

kde $w(x) = f_r'(x, u(x) + sv(x)) - f_r'(x, u(x))$. Použitím Hölderovy nerovnosti obdržíme

$$H(u,v) \le \|u\|_p\,\|w\|_q, \quad q = \frac{p}{p-2}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p'}\,.$$

Podle tvrzení této věty v bodě 1., Němyckého operátor generovaný funkcí f_r' je spojitý z prostoru $L^p(\Omega)$ do prostoru $L^q(\Omega)$ a proto platí

$$\|w\|_q = \|f_r'(\cdot, u+sv) - f_r'(\cdot, u)\|_q \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad \text{jakmile} \quad \|v\|_p \to 0.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{1}{\|v\|_p}\, H(u,v) \le \|w\|_q \;\to 0 \qquad \text{jakmile} \quad \|v\|_p \to 0.$$

□

V dalším výkladu uvedeme bez důkazu zobecnění této věty 1.6.1. Pro Lebesgueův prostor $L^q(\Omega)$ se v některých publikacích používá označení $L_q(\Omega)$ (např. kniha [4]).

Věta 1.6.2 *Nechť $p_1, p_2, \cdots, p_m$ a r jsou reálná čísla, $p_i \geq 1$ pro $i = 1, \cdots, m$, $r \geq 1$ a $m \in \mathbb{N}$. Nechť $f = f(x, \xi)$ je funkce definována pro $x \in \Omega$ a $\xi \in \mathbb{R}_m$ taková, že splňuje Caratheodorovy podmínky* (i) *a* (ii)*. Označme $\mathcal{N}(u_1, \cdots, u_m)$ Němyckého operátor určený funkcí f:*

$$\mathcal{N}(u_1, \cdots, u_m)(x) \;=\; f(x, u_1(x), u_2(x), \cdots, u_m(x)), \quad x \in \Omega,$$

kde $u_i = u_i(x)$, $i = 1, \cdots, m$, jsou měřitelné funkce na Ω. Pak platí

1. *Pro libovolnou m-tici funkcí $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \cdots, m$, je*

   $$\mathcal{N}(u_1, \cdots, u_m) \in L^r(\Omega)$$

   právě tehdy, je-li splněna tato růstová podmínka:

   existuje funkce $g \in L^r(\Omega)$ a číslo $c \geq 0$ tak, že pro skoro všechna $x \in \Omega$ a pro všechna $\xi \in \mathbb{R}_m$ je

   $$|f(x, \xi_1, \cdots, \xi_m)| \;\leq\; g(x) + c \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^{\frac{p_i}{r}}. \tag{1.10}$$

2. *Je-li tato růstová podmínka splněna, je Němyckého operátor $\mathcal{N}$ dobře definovaný, spojitý a ohraničený z kartézského součinu*

   $$L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega) \cdots \times L^{p_m}(\Omega)$$

   do prostoru $L^r(\Omega)$.

Poznamenejme, že z této věty plyne tato výjimečná vlastnost Němyckého operátoru:

Zobrazuje-li Němyckého operátor $\mathcal{N}$ kartézský součin m prostorů $L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega) \cdots \times L^{p_m}(\Omega)$ do prostoru $L^r(\Omega)$, pak je již spojitý. Důkaz spojitosti lze najít v knize [13].

Cvičení 1.6.1 Dokažte ve větě 1.6.2 postačitelnost růstových podmínek, tzn. je-li splněna podmínka (1.10), pak Němyckého operátor $\mathcal{N}$ zobrazuje kartézský součin $L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega) \cdots \times L^{p_m}(\Omega)$ do prostoru $L^r(\Omega)$ a je ohraničený.
Návod. S využitím nerovnosti

$$(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)^r \leq n^{r-1}(d_1^r + d_2^r + \cdots + d_n^r), \quad d_i \geq 0\ \forall i,\ \ n, r \in \mathbb{N},$$

ukažte, že platí

$$\|\mathcal{N}(u_1, \cdots, u_m)\|_p \leq c_1 + c_2 \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_{p_i}^{p_i/r}, \tag{1.11}$$

kde $c_1 = (m+1)^{(r-1)/r}\, \|g\|_r$ a $c_2 = (m+1)^{(r-1)/r}\, c$.

1.7 Minimum nelineárního funkcionálu

V tomto odstavci uvedeme několik vět o existenci minima nelineárních funkcionálů, které použijeme ve třetí kapitole ke studiu řešitelnosti operátorové rovnice s potenciálním operátorem. K nejdůležitějším patří následující věty. Jejich důkazy lze najít v řadě knih, např. [4], [13] aj. Nejprve zavedeme pojem minimalizující posloupnosti.

Definice 1.7.1 *Nechť X je lineární vektorový prostor a f je reálný funkcionál definovaný na prostoru X. Nechť $\Omega \subset X$ a*

$$d = \inf_{x \in \Omega} f(x).$$

Pak každá posloupnost $\{x_n\} \subset \Omega$, pro kterou platí

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = d$$

se nazývá minimalizující.

Věta 1.7.1 *Nechť X je reflexivní Banachův prostor a F je reálný, slabě zdola polospojitý funkcionál na prostoru X. Pak F nabývá svého minima na každé neprázdné, omezené, uzavřené a konvexní množině K.*

Důkaz. Nechť $\{y_n\} \subset K$ je minimalizující posloupnost pro funkcionál F na K, tzn.

$$\lim_{n \to \infty} F(y_n) = \inf_{y \in K} F(y) = d. \tag{1.12}$$

Jelikož množina K je ohraničená a prostor X je reflexivní, existuje slabě konvergentní podposloupnost $\{x_n\} \subset \{y_n\}$ s limitou x. Množina K je uzavřená a konvexní a proto je slabě uzavřená a tím $x \in K$. Ze slabé polospojitosti zdola funkcionálu F a z (1.12) plyne $F(x) \leq d$. Tudíž $F(x) = \inf_{z \in K} F(z)$. □

Věta 1.7.2 *Nechť X je reflexivní Banachův prostor a F je reálný slabě zdola polospojitý a rostoucí (slabě koercivní) funkcionál na prostoru X, tzn. platí*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} F(x) = +\infty.$$

Pak F nabývá svého minima na každé neprázdné, uzavřené a konvexní množině K. Každá minimalizující posloupnost obsahuje podposloupnost, která slabě konverguje k jednomu z bodů, ve kterých funkcionál F nabývá absolutního minima.

Důkaz. Nechť y je libovolný prvek z množiny K. Z předpokladu věty plyne existence čísla R takového, že pro všechna $x \in X$, $\|x\| > R$, je $F(x) > F(y)$ a současně $K \cap B_R \neq \emptyset$, kde $B_R = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$.
Nyní stačí aplikovat větu 1.7.1 pro ohraničenou, uzavřenou a konvexní množinu $\{u \in K, \|u\| \leq R\} \equiv K \cap B_R$. Podle této věty na této množině nabývá

funkcionál F svého minima v nějakém bodě $x_0 \in K$. Z konstrukce je zřejmé, že v tomto bodě funkcionál F nabývá svého minima a to na celé množině K.

Přejdeme k důkazu poslední části tvrzení věty. Nejprve sporem dokážeme, že každá minimalizující posloupnost $\{x_n\}$ je ohraničená. Nechť tato posloupnost není ohraničená, tzn. platí

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = d = \inf_{x\in K} F(x) \qquad \text{a} \qquad \limsup_n \|x_n\| = +\infty.$$

Pak existuje vybraná podposloupnost $\{y_m\} \subset \{x_n\}$ taková, že

$$\|y_m\| > m \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} F(y_n) = d.$$

Zvolme $m_0 > d$. Jelikož F je rostoucí, existuje $m_1 \in \mathbb{N}$, $m_1 > m_0$ tak, že pro $m \geq m_1$ je $F(m_1) > F(m_0)$. Tím pro $m \geq m_1 > m_0$ je

$$F(y_m) > F(y_{m_0}) \geq m_0$$

a odtud obdržíme spor:

$$d = \lim_{n\to\infty} F(y_n) \geq m_0 > d.$$

Jelikož X je reflexivní Banachův prostor, posloupnost $\{x_n\}$ obsahuje podposloupnost $\{y_m\}$, která slabě konverguje k nějakému prvku y_0. Ze slabé zdola polospojitosti obdržíme

$$F(y_0) \leq \liminf_{m\to\infty} F(y_m) = \lim_{m\to\infty} F(y_m) = F(x_0) = \inf_{x\in K} F(x).$$

Jelikož K je slabě uzavřená , je $y_0 \in K$ a tím $F(y_0) = F(x_0)$, tzn. y_0 je bodem absolutního minima funkcionálu F na množině K.

□

V následujícím cvičení dokažte známou, výše citovanou větu o projekci na konvexní množinu Hilbertova prostoru pomocí věty 1.7.2.

Cvičení 1.7.1 Nechť K je neprázdná, uzavřená a konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro libovolné $x \in H$ existuje jediný prvek $u \in K$ takový, že platí

$$\|x - u\| = \min_{v\in K} \|x - v\|.$$

Tento prvek u lze charakterizovat takto

$$u \in K, \qquad (x - u, v - u) \leq 0 \quad \text{pro každé} \quad v \in K. \tag{1.13}$$

Návod. Funkcionál $F : K \to \mathbb{R}$ definujte předpisem

$$F(v) = \|x - v\| \qquad \forall v \in K.$$

Ukažte, že F je konvexní a spojitý, tzn. že pro $t \in [0,1]$, $v, w \in K$ platí

$$F((1-t)v + tw) \leq (1-t)F(v) + tF(w) \qquad \text{a} \qquad |F(v) - F(w)| \leq \|v - w\|.$$

Navíc

$$\lim_{\|x\| \to \infty} F(x) = \infty.$$

Aplikujte větu 1.7.2. K důkazu nerovnosti (1.13): ukažte, že pro libovolné $v \in K$ a $0 < t < 1$ platí

$$\|x-u\|^2 \leq \|x-u\|^2 - 2t(x-u, v-u) + t^2\|v-u\|^2$$

kde pro prvek u je

$$\|x - u\| \,=\, \min_{v \in K} \|x - v\|.$$

Po úpravě limitním přechodem $t \to 0$ obdržíte nerovnost (1.13).

♣

Konvexita hladkého funkcionálu souvisí s vlastnostmi jeho první resp. druhé G-derivace. Z matematické analýzy je známo následující tvrzení.

Věta 1.7.3 *Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je třídy C^2. Pak f je konvexní na intervalu (a,b) právě tehdy, když $f''(x) \geq 0$ pro $x \in (a,b)$. Toto tvrzení je ekvivalentní podmínce, aby funkce f' byla na intervalu (a,b) neklesající, což lze zapsat ve tvaru*

$$(f'(x) - f'(y))(x-y) \geq 0 \quad \forall x, y \in (a,b).$$

Jinak, řečeno f' je monotónní na intervalu (a,b).

V Hilbertově prostoru platí analogická věta.

Věta 1.7.4 *Nechť H je reálný Hilbertův prostor, $\Omega \subset H$ je otevřená konvexní množina a f je hladký funkcionál (což znamená, že v každém bodě x množiny Ω existuje G-derivace $f'(x) \equiv \operatorname{grad} f(x) \in X^*$ funkcionálu f), tzn. pro každé $x \in \Omega$ existuje $z(x) \in H$ tak, že platí*

$$f'(x)y = \langle \operatorname{grad} f(x), y \rangle = (y, z(x)) \quad \forall y \in H.$$

Pak f je konvexní na množině Ω, právě když

$$(u_2 - u_1, z(u_1) - z(u_2)) \geq 0 \qquad \forall u_1,\, u_2 \in \Omega,$$

t.j. $f'(x)$ je monotónní na Ω.

Důkaz. Zvolme $u, v \in H$ a $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ a položme

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in (0,1) \qquad \text{a} \qquad w = u + \lambda_2 v.$$

Pak
$$f(u+\lambda_1 v) = f\left((1-\lambda)u+\lambda w\right) \leq (1-\lambda)f(u)+\lambda f(w).$$
Takto $\lambda_2 f(u+\lambda_1 v) \leq \lambda_2 f(u) - \lambda_1 f(u) + \lambda_1 f(u+\lambda_2 v)$ a tím
$$\frac{1}{\lambda_1}[f(u+\lambda_1 v)-f(u)] \; - \; \frac{1}{\lambda_2}[f(u+\lambda_2 v)-f(u)] \leq 0,$$
což znamená, že funkce
$$\frac{1}{\nu}[f(u+\nu v)-f(u)]$$
je rostoucí funkce proměnné ν. Avšak
$$\lim_{\nu\to 0+} \frac{1}{\nu}[f(u+\nu v)-f(u)] = f'(u)v,$$
a proto pro $\nu > 0$ je
$$f'(u)v \leq \frac{1}{\nu}[f(u+\nu v)-f(u)].$$
Odtud dosazením $\nu = 1$ a $w = u+v$ obdržíme
$$f(w)-f(u) \geq f'(u)(w-u) = (w-u, z(u))$$
a tím $f(w) \geq f(u)+(w-u,z(u))$. Položme $u = u_1 \in \Omega$ a $w = u_2 \in \Omega$, obdržíme
$$f(u_1)+(u_2-u_1,z(u_1)) \leq f(u_2).$$
Odtud záměnou u_1 a u_2 dostaneme
$$f(u_2)+(u_1-u_2,z(u_2)) \leq f(u_1).$$
Součet obou nerovností dává monotónnost funkce $z(x) = f'(x)$ na Ω:
$$(u_2-u_1, z(u_2)-z(u_1)) \geq 0.$$
Nyní dokážeme opačnou implikaci. Předpokládejme, že $f'(x)$ je monotonní na Ω. Pro pevné $u, v \in \Omega$ definujme funkci $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ takto:
$$\varphi(\lambda) = f(u+\lambda(v-u)).$$
Pak
$$\varphi'(\lambda) = f'(u+\lambda(v-u))(v-u) = (v-u, z(u+\lambda(v-u))).$$
Je-li $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$, pak
$$\begin{aligned}\varphi'(\lambda_2)-\varphi'(\lambda_1) &= (\, v-u\,,\, z(u+\lambda_2(v-u)) - z(u+\lambda_1(v-u))\,) = \\ &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(\, w_2-w_1\,,\, z(w_2)-z(w_1)\,) \geq 0,\end{aligned}$$

kde $w_1 = u + \lambda_1(v-u)$ a $w_2 = u + \lambda_2(v-u)$. Odtud plyne , že funkce φ je neklesající a tím konvexní na intervalu $[0,1]$. Speciálně pro $0 < \lambda < 1$ je

$$\varphi(\lambda) = \varphi((1-\lambda)0 + \lambda\, 1) \le (1-\lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(1),$$

což znamená, že funkce f je konvexní:

$$f(u + \lambda(v-u)) \le (1-\lambda)f(u) + \lambda f(v).$$

□

Tuto větu lze zobecnit i pro normované prostory .

Věta 1.7.5 *Nechť X je reálný normovaný lineární vektorový prostor prostor a f je hladký funkcionál (v každém bodě $x \in X$ existuje G-derivace $f'(x) \in X^*$ funkcionálu f). Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

a) Funkcionál f je konvexní;

b) Operátor $A \equiv f' : X \to X^*$ je monotónní, tzn.

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \;=\; \langle f'(x) - f'(y), x - y\rangle \ge 0 \qquad \forall x,\, y\, \in X\,;$$

c) Pro libovolné $x, y \in X$ platí

$$f(y) \ge f(x) + \langle Ax, y - x\rangle\,;$$

d) Pro libovolné $x, y \in X$ je funkce $f(x+sy) \equiv \psi(s)$ konvexní.

Důkaz. *Implikace* a)$\Rightarrow$ *d):* Pro libovolné $t \in [0,1]$ a $s_1,\, s_2 \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned} & t\psi(s_1) + (1-t)\psi(s_2) - \psi(ts_1 + (1-t)s_2) = \\ = \quad & tf(x+s_1y) + (1-t)f(x+s_2y) - f(t(x+s_1y) + (1-t)x + s_2y) \ge 0. \end{aligned}$$

Implikace d)$\Rightarrow$ b): Jelikož funkce $f(x+sy) \equiv \psi(s)$ je konvexní, je její derivace ψ' neklesající. Z definice G-derivace a definice fukce ψ obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(f(x+ty)) = \psi'(t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\psi(t+\tau) - \psi(t)}{\tau} = \langle f'(x+ty), y\rangle\,.$$

Proto pro $t_1 < t_2$ je $0 \le \psi'(t_2) - \psi'(t_1)$ a

$$\psi'(t_2) - \psi'(t_1) = \frac{1}{t_2 - t_1}\,\langle f'(x+t_2y) - f'(x+t_1y)\,,\,(x+t_2y) - (x+t_1y)\rangle\,.$$

Zvolme libovolné $u, v \in X$. Pak z této nerovnosti dosazením

$$x := \frac{1}{t_2 - t_1}\,[t_2v - t_1u], \qquad y := \frac{1}{t_2 - t_1}\,[u - v]$$

dostaneme monotonnost operátoru $A \equiv f' : X \to X^*$:

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \ge 0.$$

Implikace b)⇒c): V důkaze předcházející implikace jsme spočetli derivaci ψ', ze které ihned obdržíme formuli pro derivaci funkce $\varphi(t) := f(x + t(y - x))$:

$$\varphi'(t) = \langle A(x + t(y - x)) \, , \, y - x \rangle \, .$$

Podle předpokladu je operátor A monotónní a snadno lze dokázat, že funkce $\varphi'(t)$ je neklesající. Protože je tato funkce konečná pro každé $t \in \mathbb{R}$, je

$$f(y) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \, \geq \, \varphi'(0) = \langle Ax, y - x \rangle \, .$$

Implikace c)⇒a): Zvolme $t \in [0,1]$ a položme $x_t := tx + (1-t)y$, $x, y \in X$. Pak z c) dostaneme

$$f(x) \geq f(x_t) + \langle Ax_t, x - x_t \rangle \qquad \text{a} \qquad f(y) \geq f(x_t) + \langle Ax_t, y - x_t \rangle \, .$$

První nerovnost násobme číslem t, druhou číslem $1 - t$ a sečtením obdržíme konvexitu funkcionálu f:

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(x_t) = f(tx + (1-t)y).$$

□

Poznamenejme, že ekvivalentnost tvrzení v bodě a) a v bodě d) platí obecně bez předpokladu diferencovatelnosti funkcionálu f. Z této věty také plyne slabě zdola polospojitost konvexních funkcionálů, které jsou G-diferencovatelné.

Důsledek 1.7.1 *Každý konvexní funkcionál, který je spojitě G-diferencovatelný (existuje G-derivace), je slabě polospojitý zdola.*

Důkaz. Nechť f je konvexní funkcionál spojitě G-diferencovatelný a nechť posloupnost $\{x_n\}$ konverguje slabě k prvku $x \in X$. Pak podle tvrzení v bodě c) předcházející věty 1.7.5 platí

$$f(x) \leq f(x_n) + \langle Ax, x - x_n \rangle$$

a tudíž

$$f(x) \leq \liminf \left[f(x_n) + \langle Ax, x - x_n \rangle \right] = \liminf f(x_n),$$

což podle definice znamená, že funkcionál f je slabě zdola polospojitý.

□

Poznamenejme, že předpoklad G-diferencovatelnosti je podstatný. Existují konvexní funkcionály, které nejsou slabě zdola polospojité.

Na závěr tohoto odstavce poznamenejme, že v knize [13] jsou zformulovány a dokázány další věty o existenci lokálního a globálního minima nelineárního funkcionálu a věty o korektnosti minimalizace funkcionálu. Pod korektností se rozumí, že existuje jediný bod minima funkcionálu a k tomuto bodu konverguje v normě libovolná minimalizující posloupnost.

Z knihy [13] uvedeme dvě věty o minimalizujících posloupnostech a korektnosti úlohy minima funkcionálu. K jejich důkazu budeme potřebovat vlastnosti G-derivace v bodě lokálního minima funkcionálu.

Definice 1.7.2 *Nechť X je normovaný lineární prostor, $x_0 \in \Omega \subset X$ je vnitřní bod Ω a f je reálný funkcionál definovaný na množině Ω. Řekneme, že bod x_0 je bodem lokálního minima funkcionálu f, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset \Omega$ bodu x_0 tak, že platí*

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in \mathcal{U}(x_0).$$

Lemma 1.7.1 *Nechť X je normovaný lineární prostor a f je reálný funkcionál definovaný na množině $\Omega \subset X$. Předpokládejme, že existuje vnitřní bod x_0 množiny Ω, který je bodem lokálního minima funkcionálu f a takový, že existuje G-derivace $f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = 0$.*

Naopak, jestliže funkcionál f je konvexní a má ve vnitřním bodě x_0 množiny Ω G-derivaci, pro kterou platí $f'(x_0) = 0$, pak bod x_0 je bodem lokálního minima funkcionálu f.

Důkaz. Nechť existuje vnitřní bod x_0 množiny Ω, který je bodem lokálního minima funkcionálu f, přičemž existuje G-derivace $f'(x_0)$. Odtud plyne existence otevřené koule $\mathcal{U}(x_0) := \{x \in X, \|x - x_0\| < \delta\}$ takové, že $\mathcal{U}(x_0) \subset \Omega$ a současně $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in \mathcal{U}(x_0)$. Zvolme libovolné $h \in X$. Pak zřejmě existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ je $x_0 + th \in \mathcal{U}(x_0)$. Sestrojme reálnou funkci φ definovanou na intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ takto:

$$\varphi(t) = f(x_0 + th), \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Funkce φ má derivaci v bodě $t = 0$:

$$\varphi'(0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}[\varphi(\tau) - \varphi(0)] = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}[f(x_0 + \tau h) - f(x_0)] = \langle f'(x_0), h \rangle .$$

Jelikož pro všechna $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ je $\varphi(0) \leq \varphi(t)$, je $\varphi'(0) = 0$, což znamená, že

$$\langle f'(x_0), h \rangle = 0.$$

Jelikož h je libovolný prvek prostoru X, je $f'(x_0) = 0$.

Naopak, nechť $f'(x_0) = 0$. Sestrojme funkcionál g takto:

$$g(z) = f(z + x_0) - f(x_0), \quad \|z\| \leq \delta.$$

Za uvedených předpokladů funkcionál g je zřejmě konvexní. Abychom dokázali, že x_0 je bodem lokálního minima funkcionálu f, stačí ukázat, že $g(z) \geq 0$ pro $\|z\| \leq \delta$. Tuto vlastnost dokážeme sporem. Předpokládejme existenci z_1, $\|z_1\| < \delta$, tak, že platí $g(z_1) < 0$. Z konvexity G pro $t \in (0, 1)$ dostaneme

$$g(tz_1 + (1-t)0) \leq tg(z_1) + (1-t)g(0) = tg(z_1) \;\rightarrow\; \frac{1}{t}[g(tz_1) - g(0)] \leq g(z_1) < 0.$$

Limitním přechodem $t \to 0+$ obdržíme

$$\langle g'(0), z_1 \rangle \leq g(z_1) < 0,$$

což je ve sporu s předpokladem $g'(0) = f'(x_0) = 0$.

□

Věta 1.7.6 *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Předpokládejme, že reálný funkcionál f definovaný na prostoru X má G-derivaci $f'(x)$, která má následující vlastnosti:*

1. *Pro libovolné $h, y \in X$ je $\left\langle f^{'}(y+th)\,,\, h\right\rangle$ jako funkce proměnné t integrovatelná na $[0,1]$.*
2. *Existuje nezáporná funkce $\nu(r)$ definovaná pro $r \geq 0$ taková, že platí*

$$\left\langle f^{'}(y+h) - f^{'}(y)\,,\, h\right\rangle \;\geq\; \|h\|\,\nu(\|h\|) \quad \forall y, h \in X$$

a funkce $c(r)$ definovaná předpisem

$$c(r) = \int_0^r \nu(t)\,\mathrm{d}t, \quad r \geq 0, \tag{1.14}$$

je rostoucí a

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_0^r \nu(r)\,\mathrm{d}r \;=\; +\infty. \tag{1.15}$$

Pak úloha minimalizace funkcionálu f je korektní, tzn. existuje jediný bod absolutního minima tohoto funkcionálu a k tomuto bodu konverguje v normě libovolná minimalizující posloupnost.

Důkaz. Z 2. předpokladu plyne, že f' je monotonní a tím podle věty 1.7.5 je funkcionál f konvexní a podle důsledku 1.7.1 je slabě zdola polospojitý. Dokážeme, že funkcionál f je slabě koercivní, tzn. platí

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) \;=\; +\infty.$$

Pak podle věty 1.7.2 f nabývá svého minima na každé neprázdné, uzavřené a konvexní množině K. Zvolíme-li $K := X$, obdržíme existenci $x_0 \in X$ tak, že platí $f(x_0) \leq f(x)\,\forall x \in X$.

Dokažme nyní slabou koercivitu. Analogicky jako ve větě 1.7.5 definujme $\varphi(t) = f(tx)$, $t \in [0,1]$. Pak z 1. předpokladu dostaneme

$$\varphi'(t) = \langle f'(tx), x\rangle \quad \text{a} \quad f(x) - f(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \langle f'(tx), x\rangle\;\mathrm{d}t.$$

Odtud dostaneme po úpravách s využitím 2. předpokladu věty následující odhad

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) \;&=\; \int_0^1 \langle f'(tx) - f'(0), x\rangle\;\mathrm{d}t \,+\, \langle f'(0), x\rangle \geq \\ &\geq\; \int_0^1 \|x\|\,\nu(t\|x\|)\,\mathrm{d}t - \|x\|\,\|f'(0)\| = \\ &=\; \|x\|\left[\frac{1}{\|x\|}c(\|x\|) \;-\; \|f'(0)\|\right]. \end{aligned}$$

Odtud a z vlastnosti (1.15) plyne

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) \;=\; +\infty.$$

Přejdeme k důkazu posledního tvrzení věty.
Z lemmatu 1.7.1 plyne, že $f'(x_0) = 0$ a s využitím 2. předpokladu věty obdržíme

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_0^1 \langle f'(x_0 + t(x - x_0)) - f'(x_0), x - x_0\rangle \,\mathrm{d}t \geq \\ &\geq \int_0^1 \|x - x_0\|\, \nu(t\|x - x_0\|)\,\mathrm{d}t = c(\|x - x_0\|). \end{aligned}$$

Jelikož funkce c je spojitá, rostoucí a $c(0) = 0$ (viz (1.14)), existuje spojitá inverzní funkce c^{-1} k funkci c, $c^{-1}(t) \to 0$ jakmile $t \to 0+$. A tím platí implikace

$$f(x_n) \to f(x_0) \quad\Longrightarrow\quad \|x_n - x_0\| \to 0.$$

□

Předpoklad (1.15) lze zeslabit. Stačí požadovat, aby existovalo číslo $r_0 > 0$ tak, aby byla splněna nerovnost

$$c(r_0) > r_0\|f'(0)\|$$

a tvrzení věty zůstává v platnosti.

Věta 1.7.7 *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Předpokládejme, že reálný funkcionál f definovaný na prostoru X má druhou G-derivaci*

$$\Big[f^{''}(x)\,h\Big]\, g \equiv f^{''}(x)\,hg;\;\; f^{''}(x)h := \Big(f^{'}(x)h\Big)^{'}, \qquad x, h, g \in X,$$

mající následující vlastnosti:

1. *Pro libovolné x, $y \in X$ je $f^{''}(y + tx)\,xx$ jako funkce proměnné t integrovatelná na intervalu $[0, 1]$.*

2. *Existuje spojitá a nezáporná funkce $\nu(r)$ definovaná pro $r \geq 0$ taková, že platí*
$$f^{''}(x)\,hh \;\geq\; \|h\|\,\nu(\|x\|) \quad \forall x, h \in X$$
a
$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_0^r \nu(r)\,\mathrm{d}r \;=\; +\infty.$$

Pak úloha minimalizace funkcionálu f je korektní, tzn. existuje jediný bod absolutního minima tohoto funkcionálu a k tomuto bodu konverguje v normě libovolná minimalizující posloupnost.

Důkaz. Z Lagrangeovy formule (1.8) pro první derivaci a z předpokladu plyne

$$f'(x+h)h - f'(x)h = f''(x+\tau g)hh \geq \|h\|\nu(\|h\|), \quad 0 < \tau < 1$$

a tím f' je monotonní.

Zcela podobně jako v předcházející větě existuje $x_0 \in X$ tak, že platí $f(x_0) \leq f(x)\, \forall x \in X$, pokud dokážeme, že funkcionál f je rostoucí. Tuto vlastnost obdržíme s použitím Lagrangeovy formule (1.8) a předpokladu 1. Pro $x \in X$, $x \neq 0$, je

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 \langle f'(tx) - f'(0), x\rangle \,\mathrm{d}t + \langle f'(0), x\rangle = \\ &= \int_0^1 f''(\tau t x)(tx)x \,\mathrm{d}t + \langle f'(0), x\rangle \\ &\geq \int_0^1 \|x\|\, \nu(t\|x\|) \,\mathrm{d}t - \|x\|\, \|f'(0)\| = \\ &= \|x\| \left[\frac{1}{\|x\|} c(\|x\|) - \|f'(0)\| \right], \end{aligned}$$

kde funkce $c(r)$ je definována vzorcem (1.14). Odtud dostaneme

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty.$$

Podobně jako v předcházející větě se dokáže poslední část tvrzení věty. V tomto případě musíme použít Lagrangeovy formule (1.8) pro první derivaci. Obdržíme:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_0^1 \langle f'(x_0 + t(x-x_0)) - f'(x_0), x - x_0\rangle \,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 f''(x_0 + t\tau(x-x_0))(t(x-x_0))(x-x_0) \,\mathrm{d}t \geq \\ &\geq \int_0^1 \|x-x_0\|\, \nu(t\|x-x_0\|) \,\mathrm{d}t = c(\|x-x_0\|) \end{aligned}$$

a závěr je zcela stejný jako v důkaze předcházející věty. □

Důkaz následující věty ponecháme čtenáři.

Věta 1.7.8 *Nechť reálný funkcionál f definovaný na reflexivním Banachově prostoru X je slabě zdola polospojitý a v každém bodě má G-derivaci. Předpokládejme, že pro nějaké $R > 0$ je splněna podmínka*

$$\langle f'(x), x\rangle > 0 \qquad \text{pro} \qquad x \in S_R \equiv \{x \in X : \|x\| = R\}.$$

Pak existuje bod x_0, $\|x_0\| < R$, který je bodem lokálního minima f a tím $f'(x_0) = 0$.

Cvičení 1.7.2 Dokažte větu 1.7.8.

Na závěr uvedeme větu z knihy [14] o ekvivalentnosti minima konvexních funkcionálů a vlastnosti jejich G-derivací.

Věta 1.7.9 *Nechť H je Hilbertův prostor a $\Omega \subset H$ je uzavřená konvexní množina . Předpokládejme, že funkcionál $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je konvexní a v každém bodě množiny Ω existuje G-derivace. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. $f(u) = \min_{v\in\Omega} f(v)$;
2. $(f'(u), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in \Omega$;
3. $(f'(v), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in \Omega$.

Důkaz. *Implikace 1.⇒ 2.:* Jelikož $f(u) = \min_{v\in\Omega} f(v)$, je pro $v \in \Omega$ a $\lambda \in (0, \delta)$

$$f(u) \leq f((1-\lambda)u + \lambda v) = f(u + \lambda(v-u)).$$

Limitním přechodem obdržíme

$$\lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} \left[f(u + \lambda(v-u)) - f(u)\right] \geq 0,$$

a proto

$$(f'(u), v-u) \geq 0.$$

Implikace 2.⇒ 1.: Předpokládejme, že platí

$$(f'(u), v-u) \geq 0 \quad \forall v \in \Omega.$$

Pak pro $\lambda \in (0, 1)$ s využitím konvexity funkcionál f obdržíme

$$\frac{1}{\lambda} \left[f((1-\lambda)u + \lambda v) - f(u)\right] \leq \frac{1}{\lambda} \left[(1-\lambda)f(u) + \lambda f(v) - f(u)\right] = f(v) - f(u).$$

Limitním přechodem $\lambda \to 0+$ dostaneme

$$0 \leq (f'(u), v-u) \leq f(v) - f(u) \qquad \Longrightarrow \qquad f(u) \leq f(v)\ \forall v \in \Omega,$$

a proto

$$f(u) = \min_{v\in\Omega} f(v).$$

Implikace 2.⇒ 3.: Předpokládejme, že platí

$$(f'(u), v-u) \geq 0 \quad \forall v \in \Omega.$$

Protože f' je monotonní, je

$$(f'(v) - f'(u), v-u) \geq 0 \quad \forall v \in \Omega.$$

Sečtením obou nerovností obdržíme tvrzení v bodě 3.:

$$(f'(v), v-u) \geq 0 \quad \forall v \in \Omega.$$

Implikace 3. ⇒ 2.: Předpokládejme, že platí

$$(f'(v), v-u) \geq 0 \quad \forall v \in \Omega.$$

Zvolme $w \in \Omega$ a položme $v = (1-\lambda)u + \lambda w$, kde $\lambda \in (0,1)$. Pak

$$0 \leq (f'(v), v-u) = \lambda\, (f'((1-\lambda)u + \lambda w), w-u)$$

a tím $(f'((1-\lambda)u + \lambda w), w-u) \geq 0$. Limitním přechodem $\lambda \to 0_+$ dostaneme tvrzení v bodě 2.:

$$(f'(u), w-u) \geq 0 \quad \forall w \in \Omega.$$

□

1.8 Sobolevovy prostory

V tomto odstavci budou uvedeny pouze ty definice a vlastnosti (bez důkazů) Sobolevových prostorů, které budou zapotřebí ve čtvrté kapitole pojednávající o slabém řešení okrajových diferenciálních úloh. Pro hlubší studium včetně důkazů existuje řada knih a učebních textů. Vzhledem ke studované tématice doporučujeme publikace [9], [4] a [14].

V celém odstavci budeme předpokládat, že $\Omega \subset \mathbb{R}_N$ je souvislá, ohraničená oblast s Lipschitzovskou hranicí, tzn. je třídy $\mathcal{C}^{0,1}$, kde $N \in \mathbb{N}$.
Vektor $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, jehož složky jsou nezáporná celá čísla α_i, se nazývá multiindexem (N-rozměrný multiindex) a číslo

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$$

délkou (velikostí) tohoto multiindexu. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ N-rozměrný multiindex a $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$. Označíme symbolem $D^\alpha u$ parciální derivaci

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\, u}{\partial_1^{\alpha_1}\, \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_N^{\alpha_N}}.$$

Pro $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ definujme normu funkce u předpisem

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\beta| \leq k} \left[\int_\Omega |D^\beta u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right]^{1/p} = \sum_{|\beta| \leq k} \|D^\beta u\|_p,$$

kde $\|\cdot\|_p$ je norma v prostoru $L^p(\Omega)$.

Proveďme zúplnění prostoru $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_{k,p}$. Zvolme posloupnost $\{u_n\}, u_n \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$, která je Cauchyovská vzhledem k této normě, a libovolný multiindex β, $|\beta| \leq k$. Jelikož $\{u_n\}$ je Cauchyovská v $L^p(\Omega)$ a protože prostor $L^p(\Omega)$ je úplný, existuje prvek $w \in L^p(\Omega)$ jednoznačně určený posloupností $\{u_n\}$ a takový, že je

$$w = \lim_{n \to \infty} u_n \quad \text{v} \quad L^p(\Omega).$$

Posloupnost $\{D^\beta u_n\}$ je také Cauchyovská v prostoru $L^p(\Omega)$ a proto existuje jednoznačně určený prvek w_β takový, že

$$w_\beta = \lim_{n\to\infty} D^\beta u_n.$$

Snadno lze dokázat, že prvek $w_\beta \in L^p(\Omega)$ nezávisí na volbě posloupnosti mající za limitu v normě $\|\cdot\|_{k,p}$ prvek w. Odtud plyne, že w_β je určen jednoznačně prvkem w. Prvek w_β se nazývá zobecněnou derivací řádu $|\beta|$ funkce w a označíme ho symbolem $D^\beta w$. Zobecněnou derivaci $D^\beta w$ lze charakterizovat též vztahem

$$\int_\Omega D^\beta w(x)v(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\beta|}\int_\Omega w(x)D^\beta v(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.16}$$

platným pro každou funkci $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Dosud byla definována zobecněná derivace $D^\beta w$ pro funkci $w \in L^p(\Omega)$, která je limitou Cauchyovské posloupnosti funkcí $\{u_n\}, u_n \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_{k,p}$. Pomocí vztahu (1.16) lze definovat zobecněnou derivaci $D^\beta w$ libovolné funkce $w \in L^p(\Omega)$.

Definice 1.8.1 *Nechť $w \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$ a β je N-rozměrný multiindex. Řekneme, že funkce w_β je zobecněnou derivací funkce w řádu $|\beta|$, a označíme ji symbolem $D^\beta w$, jestliže pro všechna $v \in C_0^\infty(\Omega)$ je splněna rovnost*

$$\int_\Omega w_\beta(x)v(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\beta|}\int_\Omega w(x)D^\beta v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznamenejme, že pojem zobecněné derivace má rozumný smysl, zobecňuje pojem klasické derivace a má stejné vlastnosti. Funkce w_β je tzv. derivací funkce w ve smyslu distribucí.

Sobolevův prostor $W^{k,p}(\Omega)$.

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $p \geq 1$. Symbolem $W^{k,p}(\Omega)$ označme množinu všech funkcí $u \in L^p(\Omega)$, jejichž všechny zobecněné derivace $D^\beta u$ řádu nejvýše k-tého existují a patří do prostoru $L^p(\Omega)$, tzn.

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) :\ D^\beta u \in L^p(\Omega) \quad \forall|\beta| \leq k\}.$$

Na prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ definujeme normu $\|u\|_{k,p}$ předpisem

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\beta|\leq k} \|D^\beta u\|_p.$$

Tento prostor s touto normou je úplný. Je-li $p \in (1,\infty)$, pak je separabilní. Ekvivalentní norma na prostoru $W^{k,p}(\Omega)$:

$$|||u||| = \|u\|_p + \sum_{|\beta|=k} \|D^\beta u\|_p. \tag{1.17}$$

Jiná ekvivalentní norma na prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ je dána formulí

$$\left(\sum_{|\beta| \leq k} \|D^\beta u\|_p^p \right)^{1/p} .$$

Speciální případ pro $k \in \mathbb{N}$ a $a, b \in \mathbb{R}$:

$$W^{k,p}(a,b) = \{u \in C^{(k-1)}[a,b] : \ u^{(k-1)} \text{ je absolutně spojitá}, \ \ u^{(k)} \in L^p(a,b)\},$$

kde $u^{(k-1)}$ resp. $u^{(k)}$ je $(k-1)$-tá derivace resp. k-tá derivace funkce u.

Zřejmě pro $1 \leq p < r \leq \infty$ platí

$$W^{k,r}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega).$$

Sobolevův prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$.
Množina nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem v Ω, označená symbolem $C_0^\infty(\Omega)$, je podprostor Sobolevova prostoru $W^{k,p}(\Omega)$. Prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$ je uzávěr této množiny v normě $\|\cdot\|_{k,p}$. Na tomto prostoru lze definovat ekvivalentní normu $\|\cdot\|_{k,p,0}$ předpisem

$$\|u\|_{k,p,0} = \sum_{|\beta|=k} \|D^\beta u\|_p.$$

Speciální případ $W_0^{1,p}(a,b)$:

$$\{u \in C^0[a,b] : \ u \text{ je absolutně spojitá}, \quad u(a) = u(b) = 0, \quad u' \in L^p(a,b)\}.$$

Stopa funkce z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ na hranici $\partial\Omega$.
Tento pojem zobecňuje pojem restrikce hodnot spojité funkce na hranici. Platí tato věta:

Věta 1.8.1 *Nechť $p \in [1, \infty)$. Pak existuje právě jediný spojitý lineární operátor T, který každé funkci $u \in W^{1,p}(\Omega)$ přiřazuje funkci $Tu \in L^p(\partial\Omega)$ tak, že platí: pro $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ je $Tu = u|_{\partial\Omega}$.*

Funkce Tu, definovaná na $\partial\Omega$, se nazývá stopa funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$ na hranici $\partial\Omega$. V literatuře se stopa obvykle označuje symbolem $u|_{\partial\Omega}$.

Nechť funkce $\varphi = \varphi(x)$ je definovaná na hranici $\partial\Omega$. Pak výrokem

$$u = \varphi \quad \text{na} \quad \partial\Omega \quad \text{ve smyslu stop}$$

se vyjadřuje rovnost $Tu = \varphi$.

Je-li $u \in W^{2,p}(\Omega)$, pak $D^\beta u \in W^{1,p}(\Omega)$ pro $|\beta| = 1$. Stopa první zobecněné derivace funkce u se definuje jako $T(D^\beta u)$, kde T je operátor z věty 1.8.1. Obdobně se definují stopy všech derivací řádu $|\beta| \leq k-1$ funkce $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Stopu k-té deriace nelze definovat. V tomto případě neexistuje spojité zobrazení T z $L^p(\Omega)$ do $L^p(\partial\Omega)$ takové, že pro $u \in C^0(\overline{\Omega})$ je $Tu = u|_{\partial\Omega}$.

Stopa funkce z prostoru $W_0^{k,p}(\Omega)$ na hranici $\partial\Omega$.
Platí

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^{k,p}(\Omega) : \; D^\beta u = 0 \text{ na } \Omega \text{ ve smyslu stop pro } |\beta| \le k-1\}.$$

Proto se prostory $W_0^{k,p}(\Omega)$ nazývají prostory funkcí s nulovými stopami.

Greenova věta.

Věta 1.8.2 *Nechť $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $v \in W^{1,q}(\Omega)$, kde $p \in (1,\infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Pak platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\partial\Omega} uv\nu_i\,\mathrm{d}S,$$

kde $\partial u/\partial x_i$ a $\partial v/\partial x_i$ jsou zobecněné derivace, ν_i je i-tá složka vektoru vnější normály k hranici $\partial\Omega$ a funkce u, v v plošném integrálu jsou stopy funkcí u, v na $\partial\Omega$.

Greenovu větu lze zobecnit i na derivace vyšších řádů. Pro ilustraci uvedeme jedno z nejjednodušších tvrzení:

Věta 1.8.3 *Nechť $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $v \in W_0^{k,q}(\Omega)$, kde $p \in (1,\infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Pak pro $|\beta| \le k$ platí*

$$\int_\Omega D^\beta u(x) v(x)\,\mathrm{d}x \;=\; (-1)^{|\beta|}\int_\Omega u(x) D^\beta v(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $D^\beta u(x)$ resp. $D^\beta v(x)$ jsou zobecněné derivace řádu $|\beta|$ funkce u resp. v.

Věty o vnoření.
Vlastnosti funkcí ze Sobolevova prostoru popisují tzv. věty o vnoření. Výše již byla uvedena věta o vnoření v případě, kdy oblast Ω je úsečka v jednorozměrném prostoru:

$$W^{1,p}(a,b) \subset C^0[a,b], \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

V tomto případě toto vnoření je spojité

$$W^{1,p}(a,b) \hookrightarrow C^0[a,b], \quad a,b \in \mathbb{R},$$

což znamená, že existuje konstanta $c > 0$ tak, že pro všechna $u \in W^{1,p}(a,b)$ je

$$\|u\|_{1,p} \le c\,\|u\|_{C^0[a,b]}.$$

Jinak řečeno, operátor vnoření $I : W^{1,p}(a,b) \to C^0[a,b]$, definovaný předpisem $Iu = u$, je spojitý. Tento operátor je dokonce kompaktní. Následující věta shrnuje důležitá tvrzení o vnoření Sobolevových prostorů.

Věta 1.8.4 *Nechť $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ je oblast v $\mathbb{R}_N$, k přirozené číslo, $N \in \mathbb{N}$ a $p \geq 1$. Pak*

(i) *Je-li $kp < N$, pak pro libovolné q takové, že $1 \leq q \leq (Np/N - kp)$, platí*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

(ii) *Je-li $kp = N$, pak pro libovolné r takové, že $1 \leq r < \infty$, platí*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

(iii) *Je-li $kp > N$, pak platí*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}).$$

Pomocí této věty lze odvodit další, lepší vlastnosti funkce $u \in W^{k,p}(\Omega)$ a jejích zobecněných derivací $D^\beta u$.

Věta 1.8.5 *Nechť $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ je oblast v $\mathbb{R}_N$, k přirozené číslo, $N \in \mathbb{N}$ a $p \geq 1$. Zvolme multiindex β, $|\beta| \leq k$ a $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Pak platí*

(i) *Je-li $|\beta| > k - N/p$, pak*

$$D^\beta u \in L^{q(\beta)}(\Omega), \quad \text{kde} \quad q(\beta) = \frac{Np}{N - (k - |\beta|)\, p}.$$

(ii) *Je-li $|\beta| = k - N/p$, pak*

$$D^\beta u \in L^{q(\beta)}(\Omega), \quad \text{kde} \quad q(\beta) \geq 1 \quad \text{je libovolné.}$$

(iii) *Je-li $|\beta| < k - N/p$, pak*

$$D^\beta u \in C^0(\overline{\Omega}).$$

Navíc existuje konstanta $c > 0$ tak, že pro všechna $u \in W^{k,p}(\Omega)$ platí

$$\|D^\beta u\|_X \leq c\|u\|_{k,p},$$

kde $X = L^{q(\beta)}(\Omega)$ v případě (i), (ii) *a $X = C^0(\overline{\Omega})$ v případě* (iii).

Další důležité věty, např. o kompaktním vnoření, lze nalézt v publikaci [9].

Spojité lineární funkcionály nad prostorem $W^{k,p}(\Omega)$.
V tomto přehledu teorie Sobolevových prostorů se nebudeme zabývat charakterizací všech spojitých lineárních funkcionálů nad prostorem $W^{k,p}(\Omega)$. Uvedeme pouze dva důležité příklady, se kterými se setkáme ve čtvrté kapitole.

1. Nechť $v \in L^q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1, \infty)$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Funkcionál x^* definujme předpisem

$$\langle x^*, u \rangle = \int_\Omega u(x) v(x) \,\mathrm{d}x, \qquad u \in W^{k,p}(\Omega).$$

   Pak $x^* \in (W^{k,p}(\Omega))^*$.

2. Nechť $v_\beta \in L^q(\Omega)$, $|\beta| \le k$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1, \infty)$. Zvolme $k \in N$. Funkcionál x^* definujme předpisem

$$\langle x^*, u \rangle = \sum_{|\beta| \le k} \int_\Omega D^\beta u(x) v_\beta(x) \,\mathrm{d}x, \qquad u \in W^{k,p}(\Omega).$$

   Pak $x^* \in (W^{k,p}(\Omega))^*$.

Sobolevův prostor $W^{k,2}(\Omega)$.
Prostor $W^{k,2}(\Omega)$ je Hilbertův se skalárním součinem

$$(u, v) = \sum_{|\beta| \le k} \int_\Omega D^\beta u(x)\, D^\beta v(x) \,\mathrm{d}x, \quad u, v \in W^{k,2}(\Omega).$$

Budeme jej označovat symbolem $H^k(\Omega)$.

Kapitola 2

Teorie monotónních operátorů

V této kapitole bude pojednáno o abstraktní teorii monotónních operátorů se zaměřením k řešení operátorových rovnic v reálných Hilberových a obecně v reflexivních reálných Banachových prostorech. Pro aplikace této teorie k řešení nelineárních diferenciálních, integrálních a také variačních nerovností je nejen vhodné, ale je také zapotřebí uvést přehled různých druhů spojitosti, monotónnosti, koercivity a dalších pojmů a jejich vzájemný vztah. Tomuto přehledu budou věnovány první dva odstavce. V prvním odstavci jsou zavedeny základní pojmy této teorie a uvedeny některé důležité vztahy mezi nimi. V druhém odstavci budou uvedena některá zobecnění základních pojmů včetně vzájemných vztahů. Ve třetím odstavci budou dokázány speciální věty z teorie monotónních operátorů v Hilbertových prostorech. Tato teorie pak bude ve čtvrtém odstavci podrobně vyložena v případě reflexivních Banachových prostorů. O některých dalších zobecněních bude krátce pojednáno v pátém odstavci. Poslední šestý odstavec je věnován některým numerickým metodám řešení operátorových rovnic s monotónními operátory. V celé této kapitole budeme pod označením X rozumět reálný Hilbertův prostor nebo reflexivní reálný Banachův prostor s duálním prostorem X^*, přičemž $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je duální vztah mezi oběma prostory. V reflexivním prostoru lze z každé ohraničené posloupnosti vybrat podposloupnost, která konverguje slabě (Eberlainova-Šmuljanova věta), což obecně neplatí v nereflexivních prostorech. Tato vlastnost je podstatná pro celou teorii monotónních operátorů. Poznamenejme, že v této kapitole řada definic uvedených pojmů a jejich vlastností nezávisí na reflexivitě a některé i na úplnosti prostoru X a v literatuře jsou tyto monotónní operátory studovány nejen v normovaných, obecně komplexních, ale i v topologických lineárních prostorech. Navíc nemusí být definovány na nějaké husté podmnožině v prostoru X. Podrobněji viz kniha [11].

2.1 Základní pojmy, označení a vztahy

V literatuře se lze setkat s různými formulacemi vět z teorie monotónních operátorů a také s nejednotnou terminologií. Např. někteří autoři nazývají zesíleně spojitý operátor totálně spojitým, nebo také totálně spojitý operátor kompaktním. Na některé nejednotnosti v dalších odstavcích upozorníme. V článcích a publikacích se lze setkat s různými vesměs ekvivalentními definicemi pojmů. V aplikacích k řešení parciálních diferenciálních rovnic a nelineárních integrálních rovnic se setkáváme někdy se slabšími, jindy poměrně silnými požadavky na vlastnosti studovaných operátorů s cílem dokázat existenci, jednoznačnost řešení operátorových rovnic, popřípadě konvergenci numerických metod a jejich rychlost, stabilitu a pod. Mezi základní pojmy, se kterými se budeme setkávat, je kromě monotónnosti a koercivity také spojitost a tzv. vlastnosti (S) a (M) a jejich zeslabení. Ke studiu řešitelnosti úlohy $Au = b$, kde $A : X \to X^*$ a $b \in X^*$, bude v případě separabilního prostoru X použita Galerkinova metoda, která spočívá v aproximaci úlohy soustavou Galerkinových aproximací tvaru $A_n u_n = b_n$, kde $A_n = A|_{X_n} : X_n \to X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $b_n = b|_{X_n} \in X_n^*$ a $X_n \subset X$ je konečněrozměrný prostor. K existenci řešení úlohy $A_n u_n = b_n$ bude použita Browerova věta o pevném bodě resp. některá jiná z této věty odvozená. K její aplikaci je zapotřebí spojitost a koercivita operátoru A_n. Proto budeme požadovat, aby operátor A byl spojitý na konečněrozměrných prostorech a byl koercivní. Z koercivity navíc obdržíme, že množina Galerkinových aproxmací $\{u_n\}$ bude ohraničená a z reflexivity plyne existence slabě konvergující posloupnosti s nějakou limitou u. Jestliže posloupnost $\{Au_n\}$ bude také ohraničená, pak již bude snadné ukázat, že v posloupnosti $\{u_n\}$ existuje podposloupnost u_{n_k}, která jednak slabě konverguje k prvku u a současně posloupnost $A_n u_{n_k}$ konverguje slabě k nějakénu prvku f. Tuto ohraničenost lze např. zajistit požadavkem ohraničenosti operátoru A. Poslední, avšak ne jednoduchý problém, je najít podmínky na operátor A takové, aby $f = b$, což znamená provést limitní přechod v dualitě slabě konvergentních posloupností. Ukazuje se, že tento přechod lze provést, jestliže operátor A splňuje některou z níže definovaných podmínek typu (M). Na druhé straně podmínky typu (S) již zaručují silnou konvergenci Galerkinových aproximací $\{u_n\}$ k řešení studované úlohy. V literatuře lze najít řadu dalších podmínek, slabších nebo silnějších, pomocí kterých lze dokázat existenci řešení úlohy $Au = b$ na základě Galerkinových aproximací. V případě neseparabilního prostoru a monotónního operátoru A lze dokázat existence řešení úlohy $Au = b$ a to za určitých podmínek pomocí vlastností konvexních množin v reflexivních prostorech, aniž by byla použita Galerkinova aproximace. Všechny tyto postupy vyžadují zavést nejen řadu pojmů, ale také studovat jejich vlastnosti a vztahy mezi nimi. A toto bude náplní následujícího výkladu.

Definice 2.1.1 *Operátor $A : X \to X^*$ se nazývá*

1. *monotónní, jestliže pro každé $u, v \in X$ platí*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0.$$

2. *ryze (striktně, angl. strictly) monotónní, jestliže pro každé* $u, v \in X$, $u \neq v$, *platí*
$$\langle Au - Av, u - v\rangle \ > \ 0.$$

3. *silně (strongly) monotónní, jestliže existuje kladné číslo* $M > 0$ *takové, že pro každé* $u, v \in X$ *platí*
$$\langle Au - Av, u - v\rangle \ \geq \ M\,\|u - v\|^2.$$

4. *stejnoměrně (uniformly) monotónní, jestliže existuje rostoucí funkce* $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *taková, že* $a(0) = 0$ *a pro každé* $u, v \in X$ *platí*
$$\langle Au - Av, u - v\rangle \ \geq \ a\left(\|u - v\|\right)\,\|u - v\|.$$

5. α*-monotónní (resp. d-monotónní), jestliže existuje ryze rostoucí funkce* $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *taková, že pro každé* $u, v \in X$ *platí*
$$\langle Au - Av, u - v\rangle \ \geq \ \left(\alpha\left(\|u\|\right) - \alpha\left(\|v\|\right)\right)\left(\|u\| - \|v\|\right).$$

6. *koercivní, jestliže platí*
$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = +\infty.$$
Ekvivalentní definice:
Existuje funkce $\nu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *taková, že platí*
$$\lim_{r \to +\infty} \nu(r) = +\infty \qquad \text{a} \qquad \langle Au, u\rangle \ \geq \ \nu(\|u\|)\|u\| \quad \forall u \in X.$$

7. *slabě koercivní, jestliže platí*
$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \|Au\| = +\infty.$$

8. *splňuje podmínku* (S), *jestliže platí následující implikace*
$$\{u_n \rightharpoonup u,\ \langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \ \to 0\} \ \Rightarrow \ u_n \to u.$$

9. *splňuje podmínku* (M), *jestliže platí následující implikace*
$$\left\{u_n \rightharpoonup u,\ Au_n \rightharpoonup b,\ \limsup_{n \to \infty}\ \langle Au_n, u_n\rangle \ \leq \ \langle b, u\rangle\right\} \ \Rightarrow \ Au = b,\ \ b \in X^*.$$

10. *splňuje podmínku* $(M)_0$, *jestliže je splněna následující implikace*
$$\left\{u_n \rightharpoonup u,\ Au_n \rightharpoonup b,\ \limsup_{n \to \infty}\ \langle Au_n,\, u_n\rangle \ = \ \langle b,\, u\rangle\right\} \ \Rightarrow \ Au = b,\ \ b \in X^*.$$

Poznámka 2.1.1 Zvláštní podmínka $(M)_0$ umožňuje limitní přechod v dualitě slabě konvergentních posloupností:

$$u_n \rightharpoonup u, \;\; b_n = Au_n \rightharpoonup b \quad \Longrightarrow \quad \langle b_n, u_n \rangle \to \langle b, u \rangle ,$$

který obecně neplatí. Příkladem v prostoru $X = L^2(0, \pi) = X^*$ jsou posloupnosti

$$u_n(t) = \sin nt, \quad b_n(t) = \sin nt.$$

Snadno lze ověřit, že platí $u_n \rightharpoonup 0 = u, \; b_n \rightharpoonup 0 = b$, ale

$$\langle b_n, u_n \rangle = \frac{\pi}{2} \neq \langle b, u \rangle .$$

Obvykle se místo podmínky $(M)_0$ předpokládá trochu silnější podmínka (M), která se používá při důkazu existenční věty pro variační nerovnice.

Podmínka (S) zaručuje silnou konvergenci Galerkinových aproximací řešení operátorových rovnic a spolu s demispojitostí umožňují limitní přechod

$$u_n \to u \quad \Longrightarrow \quad Au_n \to Au = b.$$

Poznámka 2.1.2 Pojem monotónního operátoru lze bezprostředně rozšířit pro operátory $T : X \to Y$, kde prostor Y je lineárně izometricky izomorfní prostoru X^*. Označme tento izometrický izomorfismus symbolem $I_Y \in \mathcal{L}(X^*, Y)$ a definujme operátor $A : X \to X^*$ předpisem $A = I_Y^{-1} T : X \to X^*$. Řekneme, že operátor $T : X \to Y$ je monotónní, jestliže je operátor $A : X \to X^*$ monotónní. S tímto rozšířením se lze setkat v případě, kdy prvky prostoru Y reprezentují spojité lineární funkcionály z prostoru X^*. Analogicky lze definovat všechny výše zavedené pojmy.

V následujícím lemmatu uvedeme vztahy mezi výše uvedenými pojmy.

Lemma 2.1.1 *Platí následující implikace:*

$$\boxed{\textit{silně monotónní}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha\textit{-monotónní, } \alpha(s) = M\, s} \;.$$

$$\boxed{\textit{silně monotónní}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textit{stejn. monotónní}} \;.$$

$$\boxed{\textit{stejn. monotónní}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textit{ryze monotónní}} \;.$$

$$\boxed{\textit{stejn. monotónní}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textit{koercivní}} \;.$$

$$\boxed{\textit{stejn. monotónní}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textit{vlastnost } (S)} \;.$$

$$\boxed{\textit{ryze monotónní}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textit{monotónní}}\ .$$

$$\boxed{\alpha\textit{-monotónní, } \lim_{s\to+\infty} \alpha(s) = +\infty} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textit{koercivní}}\ .$$

$$\boxed{\alpha\textit{-monotónní}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textit{monotónní}}\ .$$

Jestliže prostor X je striktně konvexní, pak platí implikace

$$\boxed{\alpha\textit{-monotónní}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textit{ryze monotónní}}\ .$$

Jestliže prostor X je stejnoměrně konvexní, pak platí implikace

$$\boxed{\alpha\textit{-monotónní}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textit{vlastnost } (S) \textit{ a ryze monotónní}}\ .$$

Důkaz. Implikace „silně monotónní ⇒ $\boldsymbol{\alpha}$-monotónní" plyne z definice těchto pojmů s využitím nerovnosti

$$\|u - v\| \geq |\,\|u\| - \|v\|\,|, \quad u, v \in X.$$

Z této nerovnosti ihned dostáváme $\alpha(s) = Ms$, $s \geq 0$, kde M je konstanta v definici silné monotónnosti.

Implikace „silně monotónní ⇒ stejnoměrně monotónní" plyne přímo z definic, přičemž funkce $a(r)$ v definici stejnoměrně monotónního operátoru je dána předpisem $a(r) = Mr$, $r \geq 0$, kde M je konstanta v definici silně monotónního operátoru.

Dokážeme **implikaci „stejnoměrně monotónní ⇒ koercivní"**, tzn. z předpokladu existence rostoucí funkce $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že $a(0) = 0$ a takové, že pro každé $u, v \in X$ platí

$$\langle Au - Av,\, u - v\rangle \;\geq\; a\,(\|u - v\|)\;\|u - v\|,$$

je zapotřebí ukázat, že existuje funkce $\nu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ taková, že platí

$$\lim_{r\to+\infty} \nu(r) = +\infty \qquad \text{a} \qquad \langle Au,\, u\rangle \;\geq\; \nu(\|u\|)\|u\| \quad \forall u \in X.$$

Zvolme $v \in X$. Pak

$$\langle Av,\, v\rangle \;=\; \langle Av - A0,\, v - 0\rangle \;+\; \langle A0,\, v\rangle \;\geq\; a\,(\|v\|)\;\|v\| \;-\; \|v\|\,\|A0\|. \tag{2.1}$$

Z definice stejnoměrné monotónnosti (indukcí) dostaneme pro $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl}
\langle A(2v) - Av,\, v\rangle & \geq & a\,(\|v\|)\;\|v\| \\
\langle A(3v) - A(2v),\, v\rangle & \geq & a\,(\|v\|)\;\|v\| \;\Longrightarrow\; \langle A(3v) - A(v),\, v\rangle \;\geq\; 2\,a\,(\|v\|)\;\|v\| \\
\cdots & & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\langle A(nv) - A(v),\, v\rangle & \geq & (n-1)\,a\,(\|v\|)\;\|v\|\,.
\end{array}$$

Odtud s použitím nerovnosti (2.1) obdržíme

$$\langle A(nv),\, v\rangle \;\geq\; n\, a\,(\|v\|)\, \|v\| \;-\; \|v\|\, \|A0\|. \tag{2.2}$$

K libovolnému $u \in X, \|u\| > 1$, sestrojme $v = u/\|u\|$ a definujme číslo $n \in \mathbb{N}$ jako celou část čísla $\|u\|$. Pak $n \in \mathbb{N}$ a $\|u\| \geq n > \|u\| - 1$. Dosazením do nerovnosti (2.2) a po úpravě obdržíme

$$\langle A(nv),\, u\rangle \;\geq\; (\|u\| - 1)\, a(1)\, \|u| \;-\; \|u\|\, \|A0\|.$$

Jelikož

$$\begin{aligned} \langle Au - A(nv),\, u\rangle \left(1 - \frac{1}{\|u\|}\, n\right) \;&=\; \langle Au - A(nv),\, u - nv\rangle \;\geq \\ &\geq\; a\,(\|u - nv\|)\, \|u - nv\| \;\geq 0, \end{aligned}$$

je

$$\langle Au,\, u\rangle \;=\; \langle Au - A(nv),\, u\rangle \;+\; \langle A(nv),\, u\rangle \;\geq\; (\|u\| - 1)\, a(1)\, \|u| \;-\; \|u\|\, \|A0\|$$

a tím je operátor A koercivní, přičemž $\nu(s) = (s-1)a(1) - \|A0\|$.

Implikace „α-monotónní a $\lim\limits_{s\to+\infty} \alpha(s) = +\infty \Rightarrow$ koercivní“ plyne z definice α-monotonie, ve které za prvek v zvolíme nulový prvek prostoru X:

$$\begin{aligned} &\langle Au - A0,\, u\rangle \;\geq\; (\alpha\,(\|u\|) - \alpha(0))\; \|u\| \quad \text{a tím} \\ &\langle Au,\, u\rangle \;\geq\; \langle A0,\, u\rangle \;+\; (\alpha\,(\|u\|) - \alpha(0))\; \|u\| \;= \\ &= \alpha\,(\|u\|)\; \|u\| \;-\; (\|A0\| \;+\; \alpha(0))\; \|u\|\,. \end{aligned}$$

Pak $\nu(s) = \alpha(s) \;-\; \|A0\| \;-\; \alpha(0)$ v definici koercivity.

Implikaci „stejnoměrně monotónní $\Rightarrow$ vlastnost (S)“ dokážeme sporem. Předpokládejme, že A je stejnoměrně monotónní a existuje posloupnost $\{u_n\}$ taková, že platí

$$[u_n \rightharpoonup u,\; \langle Au_n - Au,\, u_n - u\rangle \;\to 0]\,, \quad u_n \not\to u.$$

Pak existuje $\varepsilon > 0$ a vybraná podposloupnost u_{n_k}, pro kterou je

$$\|u_{n_k} \;- u\,\| \;\geq\; \varepsilon > 0.$$

Z definice stejnoměrně monotónnosti dostaneme

$$\langle Au_{n_k} - Au,\, u_{n_k} - u\rangle \;\geq\; a\,(\|u_{n_k} \;- u\,\|)\, \|u_{n_k} \;- u\,\| \;\geq\; a(\varepsilon)\, \varepsilon > 0,$$

což je ve sporu s předpokladem, že

$$\langle Au_n - Au,\, u_n - u\rangle \;\to 0.$$

Jestliže prostor X je striktně konvexní, dokážeme, že platí implikace

„α-monotónní $\Rightarrow$ ryze monotónní“.

Předpokládejme, že pro nějaké $u, v \in X$ je $\langle Au - Av,\, u - v\rangle = 0$. Pak

$$\begin{aligned} 0 = \quad & \langle Au - Av,\, u - v\rangle \;=\; 2\left\langle Au - A\left(\frac{u+v}{2}\right),\, u - \frac{u+v}{2}\right\rangle + \\ + \quad & 2\left\langle Av - A\left(\frac{u+v}{2}\right),\, v - \frac{u+v}{2}\right\rangle \geq \\ \geq \quad & \left(\alpha\left(\|u\|\right) - \;\alpha\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right)\right)\left(\|u\| - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right) + \\ + \quad & \left(\alpha\left(\|v\|\right) - \alpha\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right)\right)\left(\|v\| - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right) \;\geq\; 0. \end{aligned}$$

Funkce $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ je ryze rostoucí, a proto

$$\|u\| \;=\; \left\|\frac{u+v}{2}\right\| \;=\; \|v\|.$$

Prostor X je striktně konvexní a tím $u = v$ a operátor A je ryze monotónní.

Jestliže prostor X je stejnoměrně konvexní, dokážeme, že platí implikace

$\boldsymbol{\alpha}$-monotónní ⇒ vlastnost ($\boldsymbol{S}$) a ryze monotónní.

Předpokládejme, že

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{a} \qquad \langle Au_n - Au,\, u_n - u\rangle \to 0.$$

Pak z α-monotonnosti plyne

$$\langle Au_n - Au,\, u_n - u\rangle \geq \left[\alpha\left(\|u_n\|\right) - \;\alpha\left(\|u\|\right)\right]\left(\|u_n\| - \|u\|\right) \geq 0 \;\Rightarrow\; \|u_n\| \to \|u\|.$$

Jelikož prostor X je stejnoměrně konvexní, platí implikace

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \|u_n\| \to \|u\| \;\Rightarrow\; u_n \to u$$

a tím je splněna vlastnost (S). Stejnoměrně konvexní prostor je striktně konvexní a proto z předcházející implikace je operátor A ryze monotónní.

Zbývající implikace jsou přímým důsledkem definic příslušných pojmů. □

Poznámka 2.1.3 Množina $\mathcal{M}$ všech monotónních resp. silně monotónních resp. stejnoměrně monotónních resp. ryze monotónních resp. α-monotónních resp. koercivních operátorů je kužel, tzn. je-li A_1, $A_2 \in \mathcal{M}$ pak $A_1 + A_2 \in \mathcal{M}$ a $tA_1 \in \mathcal{M}$ pro $t > 0$. Navíc součet dvou monotónních operátorů z různých výše uvedených množin je operátor „mající silnější monotónii“, např. součet monotónního a ryze monotónního operátoru je ryze monotónní. Navíc součet koercivního a monotónního resp. ryze monotónního operátoru je opět operátor koercivní. Tyto vlastnosti plynou bezprostředně z definic a jsou ponechány čtenáři k samostatnému ověření. Poznamenejme, že tzv. re-normováním, tzn. zavedením ekvivalentní normy do Banachova prostoru se uvedené vlastnosti nemění.

Je-li operátor A stejnoměrně monotónní, tak je splněna vlastnost (S), ale platí i implikace

$$\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \to 0 \quad \Longrightarrow \quad u_n \to u.$$

Definice 2.1.2 *Operátor $A: X \to X^*$*

1. *je ohraničený (omezený), jestliže existuje funkce $M_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechna $u \in X$ platí*
$$\|Au\| \leq M_1(\|u\|).$$

2. *je lokálně ohraničený, jestliže pro každé $u \in X$ existuje $\varepsilon = \varepsilon(u) > 0$ a číslo $M = M(u)$ tak, že platí*
$$\|Av\| \leq M \quad \text{pro všechna} \quad v: \|u - v\| \leq \varepsilon.$$

3. *je spojitý, jestliže je splněna implikace*
$$u_n \to u \implies Au_n \to Au, \; u_n, u \in X.$$

4. *je zesíleně spojitý, jestliže je splněna implikace*
$$u_n \rightharpoonup u \implies Au_n \to Au, \; u_n, u \in X.$$
Někteří autoři používají pro tyto operátory název úplně spojitý resp. totálně spojitý.

5. *je slabě spojitý (weakly continuous), jestliže je splněna implikace*
$$u_n \rightharpoonup u \implies Au_n \rightharpoonup Au, \; u_n, u \in X.$$

6. *je totálně spojitý (completely continuous), jestliže*
$$A \text{ je spojitý a} \quad (M - \text{ ohraničená } \Rightarrow A(M) \quad \text{je kompaktní}).$$
Někteří autoři požadují místo kompaktnosti množiny $A(M)$ prekompaktnost (relativní kompaktnost).

7. *je hemispojitý (slabě spojitý na přímkách, hemicontinuous), jestliže*
$$t_n \in \mathbb{R}, t_n \to 0 \quad \implies \quad A(u + t_n v) \rightharpoonup Au \;\forall\, u, v \in X.$$
Ekvivalentní definice:
funkce $\varphi_{u,v}(t) := \langle A(u + tv), w\rangle$ spojitá na intervalu $[0, 1]\; \forall\, u, v, w \in X$.

8. *je radiálně spojitý (slabší pojem než je hemispojitost)*

   funkce $\varphi_{u,v}(t) := \langle A(u + tv), v\rangle$ je spojitá na intervalu $[0, 1]\; \forall\, u, v \in X$.

9. *je demispojitý (zeslabeně spojitý, demicontinuous), jestliže*
$$u_n \to u \implies Au_n \rightharpoonup Au, \quad u_n, u \in X.$$

10. *je stejnoměrně spojitý, jestliže existuje spojitá funkce* $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $M(0) = 0$, *tak, že platí*

$$\|Au - Av\| \le M\left(\|u - v\|\right) \;\forall\, u, v \in X.$$

11. *Lipschitzovsky spojitý, jestliže existuje* $L > 0$ *tak, že platí*

$$\|Au - Av\| \le L\,\|u - v\| \;\forall\, u, v \in X.$$

12. *spojitý na přímkách, jestliže platí*

$$t_n \in \mathbb{R},\, t_n \to 0 \quad \Longrightarrow \quad A(u + t_n v) \longrightarrow Au \;\forall\, u, v \in X.$$

13. *spojitý na konečně rozměrných podprostorech, jestliže*

$$X_n \subset X,\, \dim X_n < +\infty \quad \Longrightarrow \quad A|_{X_n} : X_n \to X_n^* \quad \text{je spojitý},$$

kde $A|_{X_n}$ *je zúžení operátoru* A *na podprostor* X_n. *Ekvivalentní definice:*

$$X_n \subset X,\, \dim X_n < +\infty, \quad \{u_j\} \subset X_n,\; u_j \to u \Longrightarrow Au_j \to Au.$$

14. *ohraničeně Lipschitzovsky spojitý, jestliže existuje rostoucí funkce* $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *tak, že platí*

$$\|Au - Av\| \le M(R)\,\|u - v\|, \quad R = \max\left(\|u\|, \|v\|\right) \;\forall\, u, v \in X.$$

Lemma 2.1.2 *Nechť* $A : X \to X^*$. *Pak platí následující implikace:*

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\textit{Lipschitz. spojitý}} & & \boxed{\textit{zesíleně spojitý}} & \Rightarrow & \boxed{\textit{slabě spojitý}} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\boxed{\textit{stejnom. spojitý}} & & \boxed{\textit{totálně spojitý}} & & \boxed{\textit{demispojitý}} \\
\Downarrow & \swarrow\searrow & \Downarrow & \nearrow & \Downarrow \\
\boxed{\textit{ohraničený}} & & \boxed{\textit{spojitý}} & & \boxed{\textit{spoj. na } X_n} \\
\Uparrow & & \Downarrow & \swarrow & \Downarrow \\
\boxed{\textit{ohr. Lipschitz. spoj.}} & & \boxed{\textit{spoj. na přímkách}} & \Rightarrow & \boxed{\textit{hemispojitý}} \\
 & & & \nearrow & \Downarrow \\
\boxed{\textit{lokálně ohraničený}} & \Leftarrow & \boxed{\textit{demispojitý}} & \Rightarrow & \boxed{\textit{radiálně spoj.}}
\end{array}$$

X_n *je konečně rozměrný podprostor a symboly* $\swarrow$, $\searrow$ *znamenají implikace.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že každý **demispojitý operátor je lokáně ohraničený**. Tuto vlastnost dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje $u \in X$ a posloupnost $\{u_n\}$ taková, že $u_n \to u$ v prostoru X a současně $\|Au_n\| \to +\infty$. Z definice demispojitosti obdržíme $Au_n \rightharpoonup Au$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n - Au, v\rangle = 0 \quad \forall v \in X.$$

Podle principu stejnoměrné omezenosti, je každá slabě konvergentní posloupnost ohraničená a tudíž existuje konstanta $C > 0$ tak, že $\|Au_n\| \le C$, což je ve sporu s předpokladem.

Nyní dokážeme, že každý **demispojitý operátor je hemispojitý** a tím také **radiálně spojitý**. Nechť operátor A je demispojitý. Pak

$$z_n \to z \Rightarrow Az_n \rightharpoonup Az \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle Az_n - Az, y\rangle \to 0 \ \forall y \in X.$$

Zvolme čísla s_n, $s \in [0,1]$ tak, aby $s_n \to s$ a položme $z_n = u + s_n v$. Z výše uvedené ekvivalence obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} \langle A(u + s_n v), y\rangle = \langle A(u + sv), y\rangle \ \forall y \in X.$$

Odtud již snadno plyne hemispojitost, jelikož platí: funkce $\langle A(u + tv), y\rangle$ je spojitá pro $t \in [0,1]$, právě když

$$\lim_{n\to\infty} \langle A(u + s_n v), y\rangle = \langle A(u + sv), y\rangle\,.$$

Volbou $y := v$ obdržíme, že operátor A je radiálně spojitý.

Implikace „ohraničeně Lipschitzovsky spojitý $\Rightarrow$ ohraničený“ plyne z definic obou pojmů volbou $v := 0$ v definici operátoru, který je ohraničeně Lipschitzovsky spojitý. Pak $M_1(r) = \|A0\| + M(r)\,r$ pro $r \ge 0$, přičemž $M_1(r)$ resp. $M(r)$ jsou funkce v definicích ohraničenosti resp. ohraničené Lipschitzovské spojitosti.

Podobně lze dokázat **implikaci „stejnoměrně spojitý $\Rightarrow$ ohraničený“**. V tomto případě opět volbou $v := 0$ v definici operátoru, který je stejnoměrně spojitý, obdržíme $M_1(r) = \|A0\| + M(r)$ pro $r \ge 0$, kde $M_1(r)$ resp. $M(r)$ jsou funkce v definicích ohraničenosti resp. stejnoměrné spojitosti.

Důkaz **implikace „totálně spojitý $\Rightarrow$ ohraničený“** je o něco složitější. Předpokládejme, že operátor je totálně spojitý. Zvolme $r > 0$ a označme

$$B_r \equiv \{u \in X : \|u\| \le r\}\,.$$

Z definice totálně spojitého operátoru plyne, že množina $A(B_r)$ je kompaktní. Jelikož norma je spojitá funkce, nabývá funkce $\|z\|$ maximální hodnoty na množině $A(B_r)$. Pomocí této maximální hodnoty definujme funkci $M(r)$ v definici ohraničeného operátoru předpisem

$$M(r) := \max_{u\in B_r} \|Au\|.$$

Z této definice ihned plyne, že funkce $M(r)$ je neklesající a zřejmě je pro každé $u \in X$ splněna nerovnost

$$\|Au\| \leq M(\|u\|)$$

a tím je operátor A ohraničený. Poznamenejme, že k důkazu ohraničenosti nebylo zapotřebí, aby tento operátor byl spojitý. Ze spojitosti operátoru A plyne spojitost výše definované funkce $M(r)$. Zvolme konvergentní posloupnost $r_n \in \mathbb{R}^+$, $r_n \to r$. Nejprve dokážeme implikaci

$$r_n \nearrow r \Longrightarrow M(r_n) \to M(r).$$

Z definice funkce $M(r)$ plyne, že $M(r_n)$ je ohraničená shora, je neklesající ($M(r_n) \leq M(r)$) a tím jen konvergentní. Označme její limitu $C := \lim M(r_n)$. Zřejmě $C \leq M(r)$. Stačí ukázat, že $C = M(r)$. Zvolme $u \in X$ tak, aby $\|u\| = r$ a $\|Au\| = M(r)$. Takový prvek $u \in X$ existuje, protože z definice funkce $M(r)$ plyne následující:

Nechť $M(r) = \|Av\|$ a $\|v\| = s < r$. Pak $v \in B_s$ a pro všechna u taková, že $s \leq \|u\| \leq r$ platí

$$M(s) \leq \|Au\| \leq M(r) = \|Av\| \leq M(s) \quad \Longrightarrow \quad \|Au\| = M(r).$$

Definujme posloupnost $\{u_n\}$:

$$u_n := \frac{r_n}{r}\, u.$$

Pak $\|u_n\| = r_n$ a $u_n \to u$.
Ze spojitosti operátoru A plyne konvergence $Au_n \to Au$ a tím také konvergence $\|Au_n\| \to \|Au\|$. Protože $\|Au_n\| \leq M(r_n)$, je

$$C = \lim_n M(r_n) \geq \lim_n \|Au_n\| = \|Au\| = M(r).$$

Jelikož $C \leq M(r)$, je $C = M(r)$.

Implikaci $\boldsymbol{r_n \searrow r \Longrightarrow M(r_n) \to M(r)}$ lze dokázat zcela podobně a odtud již snadno plyne spojitost funkce $M(r)$.

Implikace „spojitý na konečně rozměrných podprostorech ⇒ spojitý na přímkách“ a implikace „ spojitý na konečně rozměrných podprostorech ⇒ hemispojitý“ lze ověřit snadno. Předpokládejme, že operátor A je spojitý na konečně rozměrných podprostorech. Zvolme $t_n \in \mathbb{R}$, $t_n \to 0$ a pevné $u, v \in X$. Pak $u + t_n v \in X_2$, kde X_2 je nejvýše dvoudimenzionální prostor. A tím $A(u + t_n v) \to Au$, což znamená, že operátor A je spojitý na přímkách. Z této konvergence již snadno obdržíme také druhou implikaci, jelikož pro libovolné $y \in X$ platí

$$\langle A(u + t_n v) - Au,\, y\rangle \to 0.$$

Ostatní dosud nedokázané implikace plynou bezprostředně z definic příslušných pojmů a jejich ověření je ponecháno čtenáři.

□

V dalším lemmatu uvedeme nejdůležitější vlastnosti monotónních operátorů.

Lemma 2.1.3 *Nechť operátor $A : X \to X^*$ je monotónní. Pak :*

1. *A je lokálně ohraničený.*
2. *Nechť $K \subset X$ taková, že pro každé $u \in K$ platí*
$$\|u\| \leq M_1 \qquad \text{a} \qquad \langle Au,\, u\rangle \leq M_2,$$
kde M_1 a M_2 jsou konstanty. Pak existuje konstanta M taková, že platí
$$\|Au\| \leq M \quad \forall u \in K.$$
3. *Funkce $\varphi_{u,v}(t) := \langle A(u+tv),\, v\rangle$ je neklesající funkce na intervalu $[0,1]$ pro všechna $u, v \in X$. Naopak: je-li funkce $\psi_{u,v}(t) := \langle B(u+tv),\, v\rangle$ neklesající na intervalu $[0,1]\; \forall\, u, v \in X$, pak operátor $B : X \to X^*$ je monotónní.*
4. *Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:*
   - *a) Operátor A je radiálně spojitý.*
   - *b) $\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \;\forall v \in X \quad \Longrightarrow \quad Au = b,\, b \in X^*$.*
   - *c) Operátor A má vlastnost (M).*
   - *d) Operátor A je demispojitý.*
   - *e) K je hustá v X, $\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \;\forall v \in K \;\Rightarrow\; Au = b,\, b \in X^*$.*
   - *f) Operátor A je hemispojitý.*
5. *(Minty) Je-li operátor A hemispojitý (nebo radiálně spojitý nebo demispojitý) a $u \in X$, pak*
$$\langle Au, v - u\rangle \geq 0 \;\forall v \in X \quad \Longleftrightarrow \quad \langle Av, v - u\rangle \geq 0 \;\forall v \in X.$$
6. *Nechť existuje G-derivace operátoru A, tzn. existuje spojitý lineární operátor $A' : X \to \mathcal{L}(X, X^*)$ takový, že pro všechna $u, v, h \in X$ platí*
$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, \langle A(u+th) - Au, v\rangle \;=\; \left\langle A'(u)h, v\right\rangle.$$
Předpokládejme, že funkce $\left\langle A'(u+tv)v, v\right\rangle$ je spojitá v proměnné t na intervalu $< 0, 1 >$ pro každé $u, v \in X$. Pak $\left\langle A'(u)v, v\right\rangle \geq 0$. Naopak, existuje-li G-derivace operátoru $B : X \to X^*$ a současně funkce $\left\langle B'(u+tv)v,\, v\right\rangle$ je spojitá v proměnné t na intervalu $[0,1]\; \forall\, u, v \in X$ a $\left\langle B'(u)v,\, v\right\rangle \geq 0 \;\forall\, u, v \in X$, pak operátor B je monotónní.

7. *Je-li operátor A lineární, pak je spojitý.*

8. *Nechť K je ohraničená podmnožina v prostoru X, pro kterou platí*

$$\langle Au,\, u\rangle \le M_1 \quad \text{pro všechna} \quad u \in K,$$

kde $M_1 > 0$ je konstanta. Pak existuje konstanta $M > 0$ tak, že

$$\|Au\| \le M \quad \text{pro všechna} \quad u \in K.$$

Důkaz. Nechť operátor $A : X \to X^*$ je monotónní.

1. Lokální ohraničenost dokážeme sporem. Nechť operátor A není lokálně ohraničený. Pak existuje posloupnost $\{u_n\}$ taková, že platí

$$u_n \to u \quad \text{a} \quad \|Au_n\| \to +\infty.$$

Označme

$$\alpha_n := 1 + \|Au_n\|\,\|u_n - u\|.$$

Z monotónnosti dokážeme, že pro každé $v \in X$ je

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \frac{1}{\alpha_n} \langle Au_n, v\rangle \right| < +\infty. \tag{2.3}$$

Tím podle principu stejnoměrné ohraničenosti (viz 10. bod v odstavci 1.1) existuje konstanta $M > 0$ tak, že

$$\frac{1}{\alpha_n}\|Au_n\| \le M \quad \Longrightarrow \quad \|Au_n\| \le M\,(1 + \|Au_n\|\,\|u_n - u\|)$$

a tím pro dostatečně velká $n \ge n_0$, je

$$\|Au_n\| \le \frac{1}{1 - M\,\|u_n - u\|} \le M_1 < +\infty,$$

což je ve sporu s předpokladem.

Dokažme nerovnost (2.3). Zvolme libovolně $v \in X$. Pak z monotonnosti operátoru A postupně dostáváme:

$$\begin{aligned}
0 &\le \langle Au_n - A(u+v), u_n - (u+v)\rangle = \\
&= \langle Au_n,\, u_n - u\rangle - \langle Au_n,\, v\rangle + \langle A(u+v),\, u+v-u_n\rangle \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ \langle Au_n,\, v\rangle \le \langle Au_n,\, u_n - u\rangle + \langle A(u+v),\, u+v-u_n\rangle\,.
\end{aligned}$$

Odtud plyne nerovnost

$$\frac{\langle Au_n,\, v\rangle}{\alpha_n} \le \frac{\|Au_n\|\,\|u_n - u\|}{1 + \|Au_n\|\,\|u_n - u\|} + \frac{1}{\alpha_n}\|A(u+v)\|\,(\|v\| + \|u_n - u\|) \le C,$$

a proto

$$\left| \frac{1}{\alpha_n} \langle Au_n,\, v\rangle \right| \le C < +\infty.$$

A odtud obdržíme nerovnost (2.3).

2. Podle výše dokázaného tvrzení, je operátor A lokálně ohraničený. Z definice tohoto pojmu plyne existence čísla $\varepsilon > 0$ a konstanty $M_3 > 0$ tak, že platí
$$\|Ay\| \leq M_3 \qquad \text{pro} \qquad \|y\| \leq \varepsilon.$$
Z monotonnosti operátoru A již obdržíme tvrzení. Pro $u \in K$ je
$$\begin{aligned} \|Au\| &= \sup_{\|y\|\leq\varepsilon} \frac{\langle Au,\, y\rangle}{\varepsilon} \leq \sup_{\|y\|\leq\varepsilon} \frac{(\langle Au,\, y\rangle + \langle Au - Ay,\, u - y\rangle)}{\varepsilon} \\ &= \sup_{\|y\|\leq\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\left(\langle Au,\, u\rangle + \langle Ay,\, y\rangle - \langle Ay,\, u\rangle\right) \leq M, \end{aligned}$$
kde
$$M = \frac{1}{\varepsilon}(M_2 + M_3\varepsilon + M_3 M_1).$$

3. Zvolme $u, v \in X$ a $t_2 > t_1,\ t_2, t_1 \in < 0, 1 >$. Pak
$$\begin{aligned} &\varphi_{u,v}(t_2) - \varphi_{u,v}(t_1) = \\ &= \left\langle A(u + t_2 v) - A(u + t_1 v),\, \frac{1}{t_2 - t_1}\left[(u + t_2 v) - (u - t_1 v)\right]\right\rangle \geq 0 \end{aligned}$$
a tím je dokázáno, že funkce $\varphi_{u,v}(t)$ je neklesající.
Dokážeme opačné tvrzení. Z předpokladu plyne $0 \leq \psi_{u,v}(1) - \psi_{u,v}(0)$,
$$\psi_{u,v}(1) - \psi_{u,v}(0) = \langle B(u + v) - Bu,\, (u + v) - u\rangle = \langle Bw - Bu,\, w - u\rangle\,,$$
kde $w := u + v$ a u jsou libovolné prvky prostoru X a tím je operátor B monotónní.

4. Ověření ekvivalentností uvedených vlastností provedeme tím, že dokážeme následující implikace:
$$a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c) \Longrightarrow d) \Longrightarrow f) \Longrightarrow a), \qquad d) \Longrightarrow e) \Longrightarrow b).$$
Implikace *a*) $\Longrightarrow$ *b*):

Zvolme $u, v \in X$ a $t > 0$ a definujme $v_t := u - tv$. Z předpokladu v $b)$ obdržíme
$$0 \leq\ \langle b - Av_t,\, u - v_t\rangle\ =\ t\ \langle b - A(u - tv),\, v\rangle\,.$$
Odtud a z definice radiální spojitosti operátoru A plyne:
$$0 \leq \langle b - A(u - tv),\, v\rangle\ \Longrightarrow\ \lim_{t\to 0+} \langle b - A(u - tv),\, v\rangle = \langle b - Au,\, v\rangle \geq 0.$$
Jelikož $v \in X$ je libovolné, dosazením $v := -v$ obržíme rovnost
$$\langle b - Au,\, v\rangle = 0\ \ \forall v$$

a tím $Au = b$. Poznamenejme, že k důkazu této implikace nebyla použita monotonnost operátoru A.

Implikace *b*) $\Longrightarrow$ *c*):

Nechť je splněn předpoklad v podmínce (M), tzn. platí

$$u_n \rightharpoonup u,\ Au_n \rightharpoonup b,\ \limsup \langle Au_n, u_n\rangle \ \leq\ \langle b, u\rangle\,.$$

Odtud a za předpokladu, že je splněna implikace v bodě b), máme dokázat rovnost $Au = b$. Tudíž stačí dokázat, že pro libovolné $v \in X$ je $\langle b - Av,\, u - v\rangle \geq 0$. Pak již $Au = b$. Pišme

$$\begin{aligned}
&\langle b - Av,\, u - v\rangle = \langle b,\, u\rangle - \langle b,\, v\rangle - \langle Av,\, u - v\rangle \ \geq \\
&\geq \limsup\,[\langle Au_n,\, u_n\rangle - \langle b,\, v\rangle - \langle Av,\, u - v\rangle] = \\
&= \limsup\,[\langle Au_n,\, u_n\rangle \ - \ \langle Au_n,\, v\rangle \ - \ \langle Av,\, u_n - v\rangle] \ = \\
&= \limsup \langle Au_n - Av,\, u_n - v\rangle \ \geq 0.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost plyne z monotonnosti operátoru A. Tím z implikace v bodě b) plyne $Au = b$.

Implikace *c*) $\Longrightarrow$ *d*):

Nechť $u_n \to u$ v prostoru X. Za předpokladu, že je splněna implikace v bodě c), je zapotřebí dokázat, že $Au_n \rightharpoonup Au$. Jelikož A je monotónní, je podle 1. tvrzení tohoto lemmatu A lokálně ohraničený. Z definice lokální ohraničenosti plyne existence konstanty C tak, že platí $\|Au_n\| \leq C$. A tím díky reflexivitě prostoru X existuje podposloupnost Au_{n_k}, která slabě konverguje k nějakému prvku $b \in X^*$,

$$Au_{n_k} \rightharpoonup b \quad \Longrightarrow \quad \langle Au_{n_k},\, v\rangle \ \to\ \langle b,\, v\rangle \ \ \forall v \in X.$$

Pišme

$$\langle Au_{n_k},\, u_{n_k}\rangle \ =\ \langle Au_{n_k},\, -u + u_{n_k}\rangle \ +\ \langle Au_{n_k},\, u\rangle\,.$$

Odtud obdržíme

$$\langle Au_{n_k},\, u_{n_k}\rangle \ \to\ \langle b,\, u\rangle\,,$$

jelikož

$$|\langle Au_{n_k},\, -u + u_{n_k}\rangle| \ \leq\ \|Au_{n_k}\|\,\|u - u_{n_k}\| \ \leq\ C\,\|u - u_{n_k}\| \ \to 0.$$

Z vlastnosti (M) operátoru A obdržíme rovnost $Au = b$, tzn. platí: $Au_{n_k} \rightharpoonup Au$. Z důkazu je patrné, že prvek Au je slabou limitou libovolné slabě konvergující posloupnosti $\{Av_{n_k}\} \subset \{Au_n\}$ a tedy podle tvrzení 5. uvedeného v přehledu v odstavci 1.1 v první kapitole platí $Au_n \rightharpoonup Au$, což znamená, že operátor A je demispojitý.

Poznamenejme, že dokázaná implikace platí i za předpokladu, že operátor A splňuje podmínku $(M)_0$.

Implikace $d) \implies f) \implies a)$:

Tyto implikace byly dokázány obecně nejen pro monotónní operátory v lemmatu 2.1.2.

Implikace $d) \implies e)$:

Nechť A je demispojitý operátor. Z výše dokázaných implikací $d) \implies a)$, $a) \implies b)$ obdržíme implikaci uvedenou v $b)$:

$$\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \; \forall v \in X \quad \implies \quad Au = b,\, b \in X^*.$$

Předpokládejme, že platí $\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \; \forall v \in K$. Tudíž stačí dokázat implikaci:

$$\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \; \forall v \in K \quad \implies \quad \langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \; \forall v \in X.$$

Zvolme $v \in X$. Jelikož K je hustá v X, existuje $x_n \in K$ tak, že $x_n \to v$. Pak

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty} \langle b - Ax_n, u - x_n\rangle = \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle b - Ax_n, u - v\rangle + \lim_{n\to\infty} \langle b - Ax_n, v - x_n\rangle = \\ &= \langle b - Av, u - v\rangle, \end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti byla využita definice demispojitosti a lokální ohraničenosti (viz lemma 2.1.3) operátoru A:

$$|\langle b - Ax_n, v - x_n\rangle| \leq C\|v - x_n\| \to 0, \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, z\rangle = \langle Av, z\rangle \; \forall z \in X.$$

Implikace $e) \implies b)$:

Tato implikace je zřejmá, jelikož stačí zvolit $K := X$.

5. Implikace zleva doprava ($\Rightarrow$) plyne přímo z definice monotónnosti:

$$0 \leq \langle Av - Au, v - u\rangle \; \forall v \in X \;\Rightarrow,\; \langle Au, v - u\rangle \leq \langle Av, v - u\rangle \; \forall v \in X.$$

Opačná implikace ($\Leftarrow$):

Nechť $\langle Av, v - u\rangle \geq 0 \; \forall v \in X$. Položme $v = u + t(v - u)$ pro $t > 0$. Pak

$$t\,\langle A\,(u + t(v - u))\,, v - u\rangle \geq 0 \;\Rightarrow\; \langle Au, v - u\rangle \geq 0 \; \forall v \in X.$$

Pravou stranu této implikace snadno dostaneme vydělením výrazu na levé straně implikace číslem t a limitním přechodem $t \to 0+$ díky hemispojitosti.

6. Předpokládejme, že funkce $\left\langle A^{'}(u + tv)v, v\right\rangle$ je spojitá v proměnné t na intervalu $[0, 1]$ pro každé $u, v \in X$. Definujme funkci $\psi_{u,v}(t), u, v \in X$ pro $t \in [0, 1]$ předpisem

$$\psi_{u,v}(t) := \langle A(u + tv)v, v\rangle\,.$$

Z definice G-derivace se dá očekávat, že tato funkce je spojitě diferencovatelná a pro její derivaci platí

$$\psi_{u,v}^{'}(t) \;=\; \left\langle A^{'}(u+tv)v, v \right\rangle .$$

Skutečně,

$$\begin{aligned} \psi_{u,v}^{'}(t) &= \lim_{\tau \to 0} \frac{\psi_{u,v}(t+\tau) - \psi_{u,v}(t)}{\tau} = \\ = \quad & \lim_{\tau \to 0} \frac{\langle A(u+tv+\tau v), v\rangle - \langle A(u+tv), v\rangle}{\tau} = \left\langle A^{'}(u+tv)v, v \right\rangle . \end{aligned}$$

Z monotónnosti operátoru A a s využitím věty o střední hodnotě obdržíme

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \langle A(u+sv) - Au,\, (u+sv) - u\rangle \;=\; s\,\psi_{u,v}(s) - s\,\psi_{u,v}(0) = \\ &= \quad s\int_0^s \psi_{u,v}^{'}(t)\,\mathrm{d}t = s\int_0^s \left\langle A^{'}(u+tv)v,\, v\right\rangle \mathrm{d}t = \\ &= \quad s^2 \left\langle A^{'}(u+t_0v)v,\, v\right\rangle,\; t_0 \in (0,s), \\ &\Rightarrow \quad (s \to 0) \quad \left\langle A^{'}(u)v, v\right\rangle \;\geq\; 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

a tím je dokázána první implikace. Předpokládejme, že existuje G-derivace operátoru $B : X \to X^*$ a současně funkce $\left\langle B^{'}(u+tv)v,\, v\right\rangle$ je spojitá v proměnné t na intervalu $[0,1]$ $\forall\, u,v \in X$ a $\left\langle B^{'}(u)v,\, v\right\rangle \;\geq\; 0$ $\forall\, u,v \in X$. Položme $\varphi_{u,v}(t) := \langle B(u+tv)v,\, v\rangle$. Pak z (2.4) (postupujeme opačným směrem) obdržíme

$$\begin{aligned} &\langle B(u+sv) - Bu,\, (u+sv) - u\rangle \;=\; s\,\varphi_{u,v}(s) - s\,\varphi_{u,v}(0) = \\ &= s\int_0^s \varphi_{u,v}^{'}(t)\,\mathrm{d}t = s\int_0^s \left\langle B^{'}(u+tv)v,\, v\right\rangle \mathrm{d}t = \\ &= s^2 \left\langle B^{'}(u+t_0v)v,\, v\right\rangle \;\geq\; 0. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme $\langle Bw - Bu,\, w-u\rangle \geq 0$ $\forall u, w \in X$, a tím je operátor B monotónní.

7. Předpokládejme, že operátor A je lineární. Nechť $u_n \to u$ v X. Definujme

$$v_n = \begin{cases} \frac{u_n - u}{\|u_n - u\|^{1/2}} & , \quad \text{je}-\text{li} \quad u_n \neq u \\ \\ 0 & , \quad \text{je}-\text{li} \quad u_n = u \end{cases} .$$

Pak $v_n \to 0$ v prostoru X a podle 1. (lokální ohraničenost operátoru A) existuje konstanta $M > 0$ taková, že $\|Av_n\| \leq M$. Pak

$$\|Au_n - Au\| = \|A(u_n - u)\| = \|u_n - u\|^{1/2}\,\|Av_n\| \leq M\,\|u_n - u\|^{1/2} \;\to\; 0,$$

a proto operátor A je spojitý.

8. Množina K je ohraničená, tzn. existuje konstanta M_2 taková, že pro všechna $u \in K$ je $\|u\| \le M_2$. Jelikož operátor A je lokálně ohraničený (viz 1. tvrzení tohoto lemmatu), existuje $\varepsilon > 0$ a číslo M_3 tak, že platí

$$\|Av\| \le M \quad \text{pro všechna} \quad v : \|v\| \le \varepsilon .$$

(v definici lokální ohraničenosti stačí položit $u = 0$). Podobně jako v důkazu vlastnosti v bodě 2., z monotonnosti operátoru A,

$$0 \le \langle Au - Av,\, u - v\rangle = \langle Au,\, u\rangle + \langle Av,\, v\rangle - \langle Au,\, v\rangle - \langle Av,\, u\rangle\,,$$

dostaneme

$$\langle Au,\, v\rangle \le \langle Au,\, u\rangle + \langle Av,\, v\rangle - \langle Av,\, u\rangle\,.$$

Odtud a z výše uvedených nerovností obdržíme odhad $\|Au\|$ pro libovolné $u \in K$:

$$\|Au\| = \sup_{\|v\|\le\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\,\langle Au,\, v\rangle = \sup_{\|v\|\le\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\,(M_1 + \varepsilon\, M_3 + M_2\, M_3) := M$$

a tím je poslední tvrzení tohoto lemmatu dokázáno.

□

Z tohoto lemmatu 2.1.3 plyne, že pro monotónní operátory jsou pojmy radiální spojitost, demispojitost a hemispojitost ekvivalentní. Navíc lze tohoto lemmatu využít k ověřování monotonnosti studovaného operátoru a některých jeho dalších vlastností.

V následujících dvou příkladech ukážeme, že vlastnosti nelineárního operátoru nejsou stejné jako v případě lineárního operátoru. V prvním příkladě bude uveden operátor, který je spojitý, ale není ohraničený a v druhém příkladu operátor, který je totálně spojitý, ale není zesíleně spojitý. Připomeňme, že v lineárním případě je každý spojitý lineární operátor ohraničený a totálně spojitý lineární operátor (z kompaktnosti plyne jeho spojitost) je zesíleně spojitý (někteří autoři používají termín úplně spojitý).

Příklad 2.1 V prostoru $X := l^2$ definujme operátor $A : X \to X$ předpisem

$$Ax = y, \quad x = \{\xi_1, \cdots, \xi_k, \cdots\},\; y = \{(\xi_1)^1, \cdots, (\xi_k)^k, \cdots\}.$$

Operátor A je spojitý, avšak není ohraničený.

Důkaz Nejprve dokážeme spojitost. Zvolme $x^{(n)} = \{\xi_i^{(n)}\} \in X$ tak, aby $x^{(n)} \to x, x = \{\xi_i\}$. Posloupnost $x^{(n)}$ je ohraničená, tzn. existuje $C > 0$ tak, že platí $\|x^{(n)}\| \le C$ a $\|x\| \le C$. Z této konvergence a z definice normy v prostoru X ihned plyne, že existují N_0 a n_0 tak, že pro všechna $i \ge N_0$ a $n \ge n_0$ je $|\xi_i^{(n)}| < 1/2$ a $|\xi_i| < 1/2$. Pak pro $n \ge n_0$ je

$$\|Ax^{(n)} - Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{N_0} \left(\left(\xi_i^{(n)}\right)^i - \xi_i^i \right)^2 + \sum_{i=N_0+1}^{\infty} \left(\left(\xi_i^{(n)}\right)^i - \xi_i^i \right)^2 \le$$

$$\le c_1 \sum_{i=1}^{N_0} \left(\xi_i^{(n)} - \xi_i\right)^2 + c_2 \sum_{i=N_0+1}^{\infty} \left(\xi_i^{(n)} - \xi_i\right)^2 \le c\|x^{(n)} - x\|^2 \to 0\,,$$

kde

$$c_1 = \max_{i=1,\cdots,N_0} (i\, C^{i-1})^2, \quad c_2 = \max_{i=N_0+1,\cdots,\infty} (i\,(1/2)^{i-1})^2, \quad c = \max(c_1, c_2).$$

Pro odvození výše uvedených odhadů jsme použili tuto známou nerovnost:

$$(a^{\,i} - b^{\,i})^2 \le (a-b)^2\, i\, r^{i-1}$$

platnou pro $a \ge 0$, $b \ge 0$, $i \in \mathbb{N}$, $r = \max(a, b)$ a snadno ověřitelné konvergence

$$\lim_{i\to\infty} (i\,(1/2)^{i-1}) \;\to\; 0.$$

Důkaz, že operátor není ohraničený, je jednodušší. Stačí zvolit

$$x^{(n)} = \{\xi_i^{(n)}\}, \quad \xi_n^{(n)} = 2 \quad \text{a} \quad \xi_i^{(n)} = 0 \quad \text{pro} \quad i \ne n.$$

Pak

$$\|x^{(n)}\| \;=\; 2, \quad \|A\,x^{(n)}\| \;=\; 2^n.$$

Odtud je zřejmé, že neexistuje funkce $M_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ taková, že pro všechna $u \in X$ platí

$$\|Au\| \le M_1\,(\|u\|)\,.$$

V případě existence takové funkce by muselo platit

$$\|A\,x^{(n)}\| \;=\; 2^n \;\le M(\|x^{(n)}\|) = M(2)\ \forall n \in \mathbb{N},$$

což není možné.

♠

Příklad 2.2 Nechť $X := l^2$. Definujme operátor $A : X \to X$ předpisem

$$Ax = y, \quad x = \{\xi_1, \cdots, \xi_k, \cdots\}, \quad y = \{\|x\|,\, 0, \cdots\}.$$

Operátor A je zřejmě totálně spojitý (norma je spojitá funkce a obor hodnot je jednorozměrný prostor), avšak není zesíleně spojitý. Skutečně: uvažujme posloupnost $\{u^n\}$,

$$u^n := \{0, \cdots, 1\,(n-\ \text{tá složka})\,0, \cdots\}.$$

Tato posloupnost, jak je známo z přednášky „Úvod do funkcionální analýzy“ (viz skripta [10]), slabě konverguje k nulovému prvku prostoru X, tzn. $u^n \rightharpoonup 0$, avšak $Au^n = u^1$, a proto posloupnost $\{Au^n\}$ nekonverguje k nulovému prvku.

♠

V dalším výkladu uvedeme několik příkladů monotónních operátorů, se kterými se setkáme v následujících kapitolách.

Příklad 2.3 Předpokládejme, že Banachův reflexivní prostor X a duální X^* jsou striktně konvexními prostory (stačí tyto prostory re-normovat tak, aby byly striktně konvexními, viz věta 1.5.2, vlastnost 6.). Pak dualizační zobrazení $\mathcal{U} : X \to X^*$ je ryze monotónní, koercivní a demispojité a tím také radiálně spojité a hemispojité. Navíc je α-monotónní s funkcí $\alpha(s) = s$. Je-li X reálný Hilbertův prostor, pak dualizační zobrazení $\mathcal{U} : X \to X^*$ je navíc lineární, spojité, silně monotónní a tím na základě výše uvedených implikací v lemmatu 2.1.2 také splňuje vlastnost (S).

Důkaz. Koercivita operátoru $\mathcal{U}$ plyne přímo z identity

$$\langle \mathcal{U}x,\, x\rangle \;=\; \|x\|^2,\; x \in X.$$

a proto $\nu(s) = s$. Monotónnost dostaneme snadno z nerovnosti

$$\langle \mathcal{U}x - \mathcal{U}y,\, x-y\rangle = \langle \mathcal{U}x,\, x\rangle + \langle \mathcal{U}y,\, y\rangle - \langle \mathcal{U}x,\, y\rangle - \langle \mathcal{U}y,\, x\rangle \geq (\|x\| - \|y\|)^2, \tag{2.5}$$

jelikož

$$\langle \mathcal{U}x,\, x\rangle = \|x\|^2, \quad \langle \mathcal{U}y,\, y\rangle = \|y\|^2, \quad \langle \mathcal{U}u,\, v\rangle \leq \|u\|\,\|v\| \;\forall u, v \in X.$$

Odtud je patrné, že zobrazení $\mathcal{U}$ je α-monotónní s funkcí $\alpha(s) = s$. Dokážeme, že $\mathcal{U}$ je ryze monotónní. Za tím účelem předpokládejme, že pro nějaké x a y platí rovnost $\langle \mathcal{U}x - \mathcal{U}y,\, x-y\rangle = 0$.

Z nerovnosti (2.5) dostáváme rovnost $\|x\| = \|y\|$. Nechť $x \neq y$. Jelikož prostor X^* je striktně konvexní, existuje jediný prvek $z \in S$ takový, že pro $w \neq z$, $\|w\| = 1$ a $x \in X$ platí

$$\langle \mathcal{U}x,\, w\rangle \;<\; \langle \mathcal{U}x,\, z\rangle = \|\mathcal{U}x\| = \|x\|.$$

Odtud a z jednoznačnosti dostáváme rovnost $z = x/\|x\|$ pro $x \neq 0$. Protože $\mathcal{U}(\alpha x) = \alpha\,\mathcal{U}(x)$ pro $\alpha \geq 0$, je

$$\left\langle \mathcal{U}\left(\frac{x}{\|x\|}\right),\, \frac{x}{\|y\|}\right\rangle < 1 \quad\Longrightarrow\quad \langle \mathcal{U}x,\, y\rangle \;<\; \|x\|\,\|y\|. \tag{2.6}$$

Zcela podobně jako při odvození (2.5) (s využitím nerovnosti (2.6)) obdržíme ostrou nerovnost

$$\langle \mathcal{U}x - \mathcal{U}y,\, x-y\rangle \;>\; (\|x\| - \|y\|)^2 \;=\; 0$$

a tím je ryzí monotónnost operátoru $\mathcal{U}$ dokázána. Poznamenejme, že jsme v důkazu kromě požadavku striktní konvexity prostoru X využili homogennosti operátoru $\mathcal{U}$ v oblasti nezáporných reálných čísel.

Stačí ještě dokázat, že dualizační zobrazení je demispojité. Nechť $x_k \to x_0$ pro $k \to \infty$. Vzhledem k výše uvedené homogenitě operátoru $\mathcal{U}$ lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\|x_k\| = 1$ a tím také $\|x_0\| = 1$. Jelikož $\|\mathcal{U}x_k\| = \|x_k\| = 1$, existuje (prostor X je reflexivní) vybraná podposloupnost $\mathcal{U}x_{n_k}$, pro kterou platí $\mathcal{U}x_{n_k} \rightharpoonup v$, $v \in X^*$ a

$$\|v\| \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} \|\mathcal{U}x_{n_k}\| \;=\; 1. \tag{2.7}$$

A tím $\|v\| \leq 1$. Spočteme normu $\|v\|$ takto:

$$\begin{aligned} \langle v, x_0 \rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle \mathcal{U}x_{n_k}, x_0 \rangle = \lim_{k\to\infty} [\langle \mathcal{U}x_{n_k}, x_0 - x_{n_k} \rangle + \langle \mathcal{U}x_{n_k}, x_{n_k} \rangle] = \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle \mathcal{U}x_{n_k}, x_{n_k} \rangle = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \|v\| \geq 1. \end{aligned}$$

Odtud a z nerovnosti (2.7) plyne rovnost $\|v\| = 1$.

Ze striktní konvexity prostoru X^* a z definice $\mathcal{U}$ ihned obdržíme rovnost $\mathcal{U}x_0 = v$ a tím $\mathcal{U}x_{n_k} \rightharpoonup \mathcal{U}x_0$ pro $k \to \infty$. Zřejmě každá slabě konvergentní podposloupnost vybraná z posloupnosti $\mathcal{U}x_n$ má za slabou limitu prvek $\mathcal{U}x_0$, což znamená, že je splněna implikace

$$x_k \to x_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U}x_n \rightharpoonup \mathcal{U}x_0$$

a podle definice demispojitosti je dualizační operátor demispojitý.

Ryzí monotónnost, koercivita i demispojitost plynou z lemmat 2.1.1, 2.1.2 a z výše dokázané α-monotónnosti s funkcí $\alpha(s) = s$. Je patrné, že důkazy uvedených vlastností jsou jednodušší ve srovnání s důkazy jednotlivých implikací v těchto lemmatech, jelikož byly využity konkrétní vlastnosti dualizačního zobrazení.

V případě Hilbertova prostoru X, pro dualizační zobrazení $\mathcal{U}$ je $\mathcal{U} = R^{-1}$, kde $R : X^* \to X$ je Rieszovo zobrazení z Rieszovy-Frechétovy věty o obecném tvaru spojitého lineárního operátoru v Hilbertově prostoru. Připomeňme si tuto větu.

„Ke každému lineárnímu, spojitému funkcionálu $x^* \in X^*$ existuje jediný prvek u z prostoru X tak, že platí $\langle x^*, x \rangle = (x, u)\ \forall x \in X$, kde symbol $(\cdot, \cdot)$ znamená skalární součin v prostoru X. Pro tento prvek u platí rovnost $\|x^*\| = \|u\|$."

Tím je jednoznačně definováno tzv. Rieszovo zobrazení R předpisem $Rx^* = u$. Je-li prostor X reálný, je toto zobrazení lineární, spojité a izometricky a izomorfně zobrazuje prostor X^* na prostor X. Z uvedené Rieszovy-Frechétovy věty plyne

$$\|Rx^*\| = \|x^*\| \quad \text{a} \quad \langle x^*, x \rangle = (x, Rx^*) = (x, u) = \left\langle R^{-1}u, x \right\rangle.$$

Odtud a z definice dualizačního zobrazení $\mathcal{U}$ je patrné, že $R^{-1} = \mathcal{U}$. Jelikož

$$\langle \mathcal{U}x - \mathcal{U}v, u - v \rangle = \langle \mathcal{U}(x - v), u - v \rangle = \|u - v\|^2,$$

je dualizační zobrazení $\mathcal{U}$ silně monotónní s konstantou $M = 1$. Z výše uvedených lemmat ihned obdržíme popsané vlastnosti tohoto zobrazení. Poznamenejme, že tyto vlastnosti lze také poměrně snadno odvodit bez použití implikací v těchto lemmatech.

♠

2.2 *Pseudomonotónní operátory

Pseudomonotónní operátor zahrnuje v sobě spojitost i monotonii. Nejprve uvedeme definici tohoto operátoru a některá další zeslabení resp. zesílení vlastnosti (S) a podmínky $(M)_0$.

Definice 2.2.1 *Operátor $A: X \to X^*$*

1. *nazveme pseudomonotónním, jestliže je splněna následující implikace pro všechna $v \in X$*

$$\left\{ u_n \rightharpoonup u,\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n,\, u_n - u\rangle \le 0 \right\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n,\, u_n - v\rangle \ge \langle Au,\, u - v\rangle\,.$$

2. *splňuje podmínku $(S)_+$, jestliže platí následující implikace*

$$\left\{ u_n \rightharpoonup u,\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \le 0 \right\} \quad \Longrightarrow \quad u_n \to u.$$

3. *splňuje podmínku $(S)_0$, jestliže platí následující implikace*

$$\{ u_n \rightharpoonup u,\ Au_n \rightharpoonup b,\ \langle Au_n,\, u_n\rangle \to \langle b,\, u\rangle \} \quad \Longrightarrow \quad u_n \to u.$$

Lemma 2.2.1 *Nechť operátor $A: X \to X^*$ je definován na reflexivním Banachově prostoru X. Pak platí následující implikace*

$\boxed{\textit{monotónní a hemispojitý}} \Rightarrow \boxed{\textit{pseudomonotónní}}$

$\boxed{\textit{demispojitý a } (S)_+} \Rightarrow \boxed{\textit{pseudomonotónní}}$

$\boxed{\textit{pseudomonotónní}} \Rightarrow \boxed{(M)}$

$\boxed{\textit{demispojitý a } (S)_0} \Rightarrow \boxed{(M)_0}$

$\boxed{(M)} \Rightarrow \boxed{(M)_0}$

$\boxed{\textit{zesíleně spojitý}} \Rightarrow \boxed{\textit{pseudomonotónní}}$

$\boxed{\textit{pseudomonotónní a ohraničený}} \Rightarrow \boxed{\textit{demispojitý}}$

$\boxed{(S)_+} \Rightarrow \boxed{(S)}$

$$\boxed{(S)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(S)_0}$$

$$\boxed{(M)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(M)_0} \quad .$$

Důkaz.

1. **Implikace „ monotónní a hemispojitý $\Rightarrow$ pseudomonotónní.“**

   Nechť
$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{a} \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n,\, u_n - u\rangle \,\le\, 0. \tag{2.8}$$
   Jestliže operátor A je monotónní a hemispojitý, je zapotřebí dokázat, že platí
$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n,\, u_n - v\rangle \,\ge\, \langle Au,\, u - v\rangle \quad \forall v \in X. \tag{2.9}$$
   Pišme
$$\langle Au_n,\, u_n - v\rangle \,=\, \langle Au_n,\, u_n - u\rangle \,+\, \langle Au_n,\, u - v\rangle\,.$$
   Nejprve ukážeme, že první člen v této identitě konverguje k nule pro $n \to \infty$ a pak odhadneme druhý člen. Z monotónnosti A obdržíme
$$\langle Au_n - Au,\, u_n - u\rangle \ge 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle Au_n,\, u_n - u\rangle \,\ge\, \langle Au,\, u_n - u\rangle\,.$$
   Odtud a z předpokladu slabé konvergence posloupnosti $\{u_n\}$ (viz (2.8)) dostáváme
$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n,\, u_n - u\rangle \,\ge\, 0.$$
   Tato nerovnost spolu s druhou částí předpokladu (2.8) dává konvergenci prvního členu k nule.

   Odhad druhého členu je poněkud složitější. Abychom využili hemispojitosti zavedeme reálný parametr $t \in \mathbb{R}$ následujícím způsobem. Položme $w = u - t(u - v)$. Z monotonie operátoru A plyne implikace
$$\begin{aligned}\langle Au_n - Aw,\, u_n - w\rangle \quad &\ge \quad 0 \Longrightarrow \langle Au_n,\, u_n - u\rangle \,+\, t\,\langle Au_n,\, u - v\rangle \\ &\ge \quad \langle Aw,\, u_n - u\rangle \,+\, t\,\langle Aw,\, u - v\rangle\,.\end{aligned}$$
   Na levou a pravou stranu aplikujme operaci $\liminf_n$. Za tím účelem připomeňme z matematické analýzy následující vlastnost: Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel takových, že $\lim a_n = 0$. Pak platí
$$\liminf b_n \,=\, \liminf (a_n + b_n). \tag{2.10}$$
   Nyní položme
$$a_n := \langle Au_n,\, u_n - u\rangle \quad \text{a} \quad b_n := t\,\langle Au_n,\, u - v\rangle$$

a dosaďme do vztahu (2.10). Obdržíme

$$\begin{aligned} t & \quad \liminf \langle Au_n,\, u-v\rangle \geq \liminf \{\langle Aw,\, u_n-u\rangle \,+\, t\,\langle Aw,\, u-v\rangle\} = \\ = & \quad \liminf \langle Aw,\, u_n-u\rangle \,+\, t\,\langle Aw,\, u-v\rangle \,=\, t\,\langle Aw,\, u-v\rangle\,. \end{aligned}$$

V poslední rovnosti jsme využili slabé konvergence posloupnosti $\{u_n\}$ k prvku u, tzn.

$$\liminf \langle Aw,\, u_n-u\rangle \,=\, \lim \langle Aw,\, u_n-u\rangle \,=\, 0.$$

Z odvozené nerovnosti vydělením $t>0$ a s využitím hemispojitosti pro $t \to 0+$ dostaneme nerovnost platnou pro druhý člen

$$\liminf \langle Au_n,\, u-v\rangle \,\geq\, \langle Au,\, u-v\rangle\,.$$

Spolu s konvergencí prvního členu k nule plyne požadovaný odhad (2.9) a tím je implikace dokázána.

2. **Implikace „demispojitý a $(S)_+$ $\Rightarrow$ pseudomonotónní.“**

Nechť

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{a} \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n,\, u_n-u\rangle \,\leq\, 0. \tag{2.11}$$

Pak z vlastnosti $(S)_+$ plyne konvergence $u_n \to u$ a z demispojitosti slabá konvergence $Au_n \rightharpoonup Au$. Ze slabé konvergence plyne, že posloupnost $\{Au_n\}$ je ohraničená a tím

$$|\langle Au_n,\, u_n-v\rangle\,| \leq \|Au_n\|\,\|u_n-u\| \,\to 0.$$

$$\text{Pak} \qquad \begin{aligned} &\liminf \langle Au_n,\, u_n-v\rangle \,= \\ &= \lim \langle Au_n,\, u_n-u\rangle \,+\, \langle Au_n,\, u-v\rangle \,=\, \langle Au,\, u-v\rangle\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne pseudomonotonnost operátoru A.

3. **Implikace „zesíleně spojitý $\Rightarrow$ pseudomonotónní.“**

Nechť

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{a} \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n,\, u_n-u\rangle \,\leq\, 0. \tag{2.12}$$

Ze slabé konvergence $u_n \rightharpoonup u$ a z definice zesílené spojitosti plyne $Au_n \to Au$. Proto

$$\begin{aligned} &\liminf \langle Au_n,\, u_n-v\rangle = \\ &= \lim \langle Au_n - Au,\, u_n-u\rangle \,+\, \lim\, \langle Au,\, u_n-v\rangle \,= \langle Au,\, u-v\rangle \end{aligned}$$

a tím je operátor A pseudomonotónní.

4. **Implikace „demispojitý a $(S)_0 \;\Rightarrow\; (M)_0$."**
   Nechť
$$u_n \rightharpoonup u, \quad Au_n \rightharpoonup b \quad \text{a} \quad \langle Au_n,\, u_n\rangle \to \langle b,\, u\rangle\,,\ b \in X^*. \tag{2.13}$$
   Je zapotřebí dokázat, že $Au = b$. Z předpokladu (2.13) a z vlastnosti $(S)_0$ plyne konvergence $u_n \to u$ a z demispojitosti pak slabá konvergence $Au_n \rightharpoonup Au$. Současně podle předpokladu (2.13) tato posloupnost $\{Au_n\}$ slabě konverguje k b a proto z jednoznačnosti slabé limity je $Au = b$.

5. **Implikace „pseudomonotónní $\Rightarrow$ (M)."**
   Nechť
$$u_n \rightharpoonup u, \quad Au_n \rightharpoonup b \quad \text{a} \quad \limsup\, \langle Au_n,\, u_n\rangle \;\le\; \langle b,\, u\rangle\,,\ b \in X^*. \tag{2.14}$$
   Je zapotřebí dokázat, že $Au = b$. Z předpokladu (2.14) plyne
$$\begin{aligned} \limsup\, \langle Au_n,\, u_n - u\rangle \;&=\; \limsup\, \langle Au_n,\, u_n\rangle \;-\; \lim\, \langle Au_n,\, u\rangle \;\le \\ &\le\; \langle b,\, u\rangle \;-\; \langle b,\, u\rangle \;=\; 0. \end{aligned}$$
   Odtud s využitím pseudomonotonnosti obdržíme pro každé $v \in X$
$$\begin{aligned} \langle Au,\, u - v\rangle \;&\le\; \liminf\, \langle Au_n,\, u_n - v\rangle \;\le\; \limsup\, \langle Au_n,\, u_n - v\rangle \\ &\le\; \limsup\, \langle Au_n,\, u_n\rangle \;-\; \lim\, \langle Au_n,\, v\rangle \;\le\; \langle b,\, u - v\rangle\,. \end{aligned}$$
   Obdrželi jsme nerovnost
$$\langle Au,\, u - v\rangle \;\le\; \langle b,\, u - v\rangle \qquad \forall v \in X.$$
   Dosazením $v := 2u - w$, kde w je libovolný prvek z prostoru X, dostáváme opačnou nerovnost
$$\langle Au,\, u - w\rangle \;\ge\; \langle b,\, u - w\rangle \qquad \forall w \in X.$$
   Proto
$$\langle Au,\, u - v\rangle \;=\; \langle b,\, u - v\rangle \qquad \forall v \in X$$
   a tím $Au = b$.

6. **Implikace „pseudomonotónní a ohraničený $\Rightarrow$ demispojitý."**
   Nechť $u_n \to u$. Je zapotřebí dokázat, že $Au_n \rightharpoonup Au$. Protože konvergentní posloupnost je ohraničená, a operátor A je ohraničený, je také posloupnost $\{Au_n\}$ ohraničená. A tím
$$\begin{aligned} |\, \langle Au_n,\, u_n - u\rangle \,| \quad &\le \quad \|Au_n\|\, \|u_n - u\| \;\le\; C\, \|u_n - u\| \to 0 \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad &\quad \lim\, \langle Au_n,\, u_n - u\rangle \;=\; 0. \end{aligned}$$
   Jelikož operátor A je pseudomonotónní, je pro pevné, libovolné $v \in X$
$$C(v) := \liminf\, \langle Au_n,\, u_n - v\rangle \;\ge\; \langle Au,\, u - v\rangle\,.$$

Prostor X^* je také reflexivní a proto existuje vybraná podposloupnost Au_{n_k}, která konverguje slabě k nějakému prvku $b \in X^*$. Pak

$$\begin{aligned}\langle Au,\, u-v\rangle &\leq C(v) \leq \liminf\, \langle Au_{n_k},\, u_{n_k}-v\rangle \,= \\ &= \lim\, \langle Au_{n_k},\, u_{n_k}-u\rangle \,+\, \lim\, \langle Au_{n_k},\, u-v\rangle \,=\, \langle b,\, u-v\rangle\,.\end{aligned}$$

Tudíž

$$\langle Au,\, u-v\rangle \,\leq\, \langle b,\, u-v\rangle \quad \forall v \in X \qquad \Longrightarrow \qquad Au = b.$$

Jelikož slabá limita vybrané posloupnosti Au_{n_k} ($Au_{n_k} \rightharpoonup Au$) je určena jednoznačně, nezávisle na vybrané podposloupnosti Au_{n_k}, celá posloupnost Au_n konverguje slabě k prvku Au ($Au_n \rightharpoonup Au$, viz Tvrzení 1.1.1, bod 5.) a tím je operátor A demispojitý.

7. **Implikace „$(M) \;\Rightarrow\; (M)_0$“, „$(S)_+ \;\Rightarrow\; (S)$“ a implikace „$(S) \;\Rightarrow\; (S)_0$“.**

   Tyto implikace plynou přímo z definic.

□

V dalším výkladu krátce pojednáme o součtu monotónních resp. pseudomonotónních operátorů. Následující lemma je přímým důsledkem definice monotonnosti a jeho ověření ponecháme čtenáři.

Lemma 2.2.2 *Nechť X a X_i, $i = 1, \cdots, n$, jsou Banachovy prostory. Pak platí:*

1. *Zvolme $a_i \in X$ a $x_i^* \in X^*$, $i = 1, \cdots, n$. Jsou-li operátory A_i, $A_i : X \to X^*$, $i = 1, \cdots, n$, monotónní, pak operátor $A : X \to X^*$ definovaný předpisem*

$$Au \,= \sum_{i=1}^{n} \left[A_i(u + a_i) + x_i^*\right], \quad u \in X,$$

   je také monotónní.

2. *Nechť $A_i : X_i \to X_i^*$ pro $i = 1, \cdots, n$ jsou monotónní operátory. Pak operátor $A : Z \to Z^*$, kde $Z = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ (kartézský součin prostorů X_i) definovaný předpisem*

$$A\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \,=\, \{Au_1, Au_2, \cdots, Au_n\}, \quad u_i \in X_i,\; i = 1, \cdots, n$$

   je také monotónní.

Důkaz následujícího lemmatu je podstatně složitější.

Lemma 2.2.3 *Nechť X je reálný reflexivní Banachův prostor a operátory A_i, $A_i : X \to X^*$, $i = 1, 2$, jsou pseudomonotónní. Pak jejich součet je pseudomonotónní operátor.*

Důkaz. Zvolme $\{u_n\} \subset X$ tak, aby $u_n \rightharpoonup u$ a současně

$$\limsup \, \langle A_1 u_n + A_2 u_n, \, u_n - u \rangle \, \leq \, 0. \tag{2.15}$$

Sporem ukážeme, že platí

$$\limsup \, \langle A_i u_n, \, u_n - u \rangle \, \leq \, 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2. \tag{2.16}$$

Nechť např.

$$\limsup \, \langle A_2 u_n, \, u_n - u \rangle \, \geq \, \delta \, > 0.$$

Pak existuje u_{n_k} tak, že platí

$$\lim \, \langle A_2 u_{n_k}, \, u_{n_k} - u \rangle \, = \, \delta \, > 0.$$

Pak z předpokladu (2.15) a ze známé rovnosti

$$\limsup (a_n + b_n) = \limsup a_n + \lim b_n,$$

kde posloupnost čísel $\{b_n\}$ je konvergentní, dostaneme

$$\begin{aligned}
0 \quad &\geq \quad \limsup \, \langle A_1 u_{n_k} + A_2 u_{n_k}, \, u_{n_k} - u \rangle = \\
&= \quad \limsup \, \langle A_1 u_{n_k}, \, u_{n_k} - u \rangle \, + \, \lim \, \langle A_2 u_{n_k}, \, u_{n_k} - u \rangle = \qquad (2.17) \\
&= \quad \limsup \, \langle A_1 u_{n_k}, \, u_{n_k} - u \rangle \, + \, \delta \quad \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \quad \limsup \, \langle A_1 u_{n_k}, \, u_{n_k} - u \rangle \, \leq \, -\delta \, < 0. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Jelikož A_1 je pseudomonotónní a $u_{n_k} \rightharpoonup u$, platí pro každé $v \in X$ nerovnost

$$\liminf \, \langle A_1 u_{n_k}, \, u_{n_k} - v \rangle \, \geq \, \langle A_1 u, \, u - v \rangle \, .$$

Dosazením $v := u$ obdržíme

$$\liminf \, \langle A_1 u_{n_k}, \, u_{n_k} - u \rangle \geq 0,$$

což je ve sporu s nerovností (2.18). Z definice pseudomonotonnosti a z dokázaných nerovností (2.16) nyní již dostaneme

$$\begin{aligned}
&\liminf \, \langle A_i u_n, \, u_n - v \rangle \, \geq \, \langle A_i u, \, u - v \rangle \quad \forall v \in X, \; i = 1, 2 \quad \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \quad \liminf \, \langle (A_1 + A_2) u_n, \, u_n - v \rangle \, \geq \, \langle (A_1 + A_2) u, \, u - v \rangle \, ,
\end{aligned}$$

což znamená, že součet $A_1 + A_2$ je pseudomonotónní operátor.

□

Z tohoto lemmatu a z lemmatu 2.2.1 obdržíme snadno další tvrzení o pseudomonotonnosti součtu dvou operátorů. V následujícím důsledku uvedeme dva takové případy.

Důsledek 2.2.1 Nechť X je reálný reflexivní Banachův prostor. Pak platí:

1. Je-li operátor $A_1 : X \to X^*$ monotónní a hemispojitý a operátor A_2, $A_2 : X \to X^*$, je zesíleně spojitý, pak součet $A_1 + A_2 : X \to X^*$ je pseudomonotónní.

2. Je-li operátor $A_1 : X \to X^*$ demispojitý a má vlastnost $(S)_+$ a operátor $A_2 : X \to X^*$ je pseudomonotónní, pak součet $A_1 + A_2 : X \to X^*$ je pseudomonotónní.

Poznamenejme, že součet dvou operátorů splňující podmínku (M), nemusí tuto podmínku splňovat. Příklad těchto operátorů sestrojil H. Brézis (viz [11]):

Příklad 2.4 Nechť X je separabilní Hilbertův prostor s úplnou ortonormální bází $\{e_n\}$ a se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)$. Definujme operátory A_1, A_2, $A_1, A_2 : X \to X \equiv X^*$, předpisem

$$A_1 u = -u, \quad u \in X$$

$$A_2 u = \begin{cases} u, & \text{pro} \quad \|u\| \le 1 \\ \frac{u}{\|u\|} & \text{pro} \quad \|u\| \ge 1 \end{cases}$$

Připomeňme, že operátor $A : X \to X^*$ splňuje podmínku (M), jestliže platí implikace

$$[u_n \rightharpoonup u,\ Au_n \rightharpoonup Au,\ \limsup \langle Au_n, u_n\rangle \le \langle b, u\rangle] \implies Au = b,\ b \in X^*.$$

Lze snadno ověřit, že oba operátory A_1 a A_2 tuto podmínku (M) splňují. Ukažme, že operátor $A_1 + A_2$ podmínku (M) nesplňuje. Zvolme $u_n = e_1 + e_n$. Pak zřejmě $u_n \rightharpoonup e_1 =: u$ a platí

$$(A_1 + A_2)u_n = (e_1 + e_n)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \rightharpoonup e_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) =: b\,,$$

$$\limsup\ ((A_1 + A_2)u_n,\, u_n) = \limsup\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)(e_1 + e_n, e_1 + e_n) =$$

$$= \sqrt{2} - 2 \le \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = (u, b).$$

Jelikož $(A_1 + A_2)u \equiv (A_1 + A_2)e_1 = e_1 - e_1 = 0 \ne b$, součet operátorů $A_1 + A_2$ podmínku (M) nesplňuje.

♠

Cvičení 2.2.1 Sestrojte operátor, který je totálně spojitý, ale nesplňuje podmínku $(M)_0$.

Návod. Za prostor X zvolte separabilní Hilbertův prostor s úplnou ortonormální bází $\{e_n\}$ a se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)$. Definujte operátor A, $A: X \to X \equiv X^*$, předpisem

$$Au = e_1 \|u\|, \quad u \in X.$$

Ukažte, že tento operátor je totálně spojitý, ale nesplňuje podmínku $(M)_0$.

♣

V dalším výkladu uvedeme příklad pseudomonotónního operátoru, který je důležitý mimo jiné také pro studium řešitelnosti eliptických okrajových úloh resp. jejich variačních formulací. Opět budeme předpokládat, že X je reálný reflexivní Banachův prostor.

Definice 2.2.2 *Operátor $A: X \to X^*$ nazveme semi-monotónním (nebo také variačního typu), jestliže $Au = \phi(u,u)$, kde zobrazení $\phi: X \times X \to X^*$ splňuje následující podmínky:*

1. *Pro libovolné zvolené $w \in X$ je operátor $A_w : X \to X^*$ definovaný předpisem $A_w u = \phi(u,w)$, hemispojitý a monotónní v tomto smyslu:*

   Pro všechna $z \in X$ platí :
   $A_w(u + t_n z) = \phi(u + t_n z, w) \rightharpoonup A_w u = \phi(u,w)$, jestliže $t_n \to 0$;
   pro všechna $y \in X$ platí :
   $\langle A_w w - A_w y,\, w - y\rangle = \langle \phi(w,w) - \phi(y,w),\, w-y\rangle \geq 0.$

2. *Pro libovolné zvolené $y \in X$ je operátor $B_y : X \to X^*$ definovaný předpisem $B_y u = \phi(y,u)$, ohraničený a hemispojitý.*

3. *Pro každé $y \in X$ je splněna implikace*

$$\{u_n \rightharpoonup u,\ \langle \phi(u_n,u_n) - \phi(u,u_n),\, u_n - u\rangle \to 0\} \Rightarrow \phi(y,u_n) \rightharpoonup \phi(y,u).$$

4. *Je splněna implikace*

$$\{u_n \rightharpoonup u\ \ \phi(y,u_n) \rightharpoonup x^*\} \Rightarrow \langle \phi(y,u_n),\, u_n\rangle \to \langle x^*,\, u\rangle\,.$$

Věta 2.2.1 *Nechť X je reálný reflexivní Banachův prostor. Pak semi-monotónní operátor $A: X \to X^*$ je pseudomonotónní.*

Důkaz. Zvolme $\{u_n\} \subset X$ tak, aby $u_n \rightharpoonup u$ a aby platilo

$$\limsup \langle Au_n,\, u_n - u\rangle = \limsup \langle \phi(u_n,u_n),\, u_n - u\rangle \leq 0. \tag{2.19}$$

Máme dokázat (viz definice pseudomonotonnosti), že pro každé $v \in X$ platí nerovnost

$$\liminf \langle Au_n,\, u_n - v\rangle \geq \langle Au,\, u - v\rangle\,.$$

Jelikož posloupnost $\{u_n\}$ konverguje slabě, je ohraničená a tím podle 2. podmínky z definice semi-monotonnosti, je také posloupnost $\{\phi(u, u_n)\}$ ohraničená v prostoru X^*. Tento prostor X^* je také reflexivní a tím existuje vybraná podposloupnost $\{u_{n_k}\}$ taková, že

$$\phi(u, u_{n_k}) \rightharpoonup x^* \quad \text{v prostoru} \quad X^*.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat slabou konvergenci celé posloupnosti $\{\phi(u, u_n)\}$, tzn.

$$\langle \phi(u, u_n),\, y \rangle \to \langle x^*,\, y \rangle \quad \forall y \in X. \tag{2.20}$$

Ze 4. podmínky v definici semi-monotonnosti dosazením $y = u$ dostaneme

$$\langle \phi(u, u_n),\, u_n \rangle \to \langle x^*,\, u \rangle\,.$$

Odtud a z konvergence (2.20) pro $y = u$ dostáváme konvergenci

$$\langle \phi(u, u_n),\, u_n - u \rangle \to 0. \tag{2.21}$$

Dosazením $w = u_n$ do 1. podmínky v definici semi-monotonnosti dostaneme z (2.21) nerovnost

$$\langle \phi(u_n, u_n) - \phi(y, u_n),\, u_n - y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in X.$$

Do této nerovnosti dosaďme $y = u$, obdržíme

$$\langle \phi(u_n, u_n) - \phi(u, u_n),\, u_n - u \rangle \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \liminf \langle \phi(u_n, u_n),\, u_n - u \rangle \geq 0.$$

Odtud a z nerovnosti (2.19) plyne konvergence

$$\lim \langle \phi(u_n, u_n),\, u_n - u \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim \langle Au_n\, u_n - u \rangle = 0. \tag{2.22}$$

Proto (viz konvergence (2.21))

$$\langle \phi(u_n, u_n) - \phi(u, u_n),\, u_n - u \rangle \to 0 \tag{2.23}$$

a tím jsou splněny předpoklady v 3. podmínce v definici semi-monotonnosti. Proto platí implikace

$$\phi(y, u_n) \rightharpoonup \phi(y, u)\, \forall y \in X \;\Rightarrow\; \langle \phi(y, u_n),\, v \rangle \to \langle \phi(y, u),\, v \rangle \;\forall y, v \in X. \tag{2.24}$$

Aplikací 4. podmínky v definici semi-monotonnosti dostaneme konvergenci $(x^* = \phi(y, u))$

$$\langle \phi(y, u_n),\, u_n \rangle \to \langle \phi(y, u),\, u \rangle$$

a konečně s použitím (2.24) obdržíme

$$\langle \phi(y, u_n),\, u_n - u \rangle = \langle \phi(y, u_n),\, u_n \rangle - \langle \phi(y, u_n),\, u \rangle \to 0 \;\forall y \in X. \tag{2.25}$$

Z této konvergence po dosazení $y = u$ a s využitím podmínky 1. s $w = u_n$ v definici semi-monotonnosti plyne

$$\langle Au_n,\, u_n - u \rangle = \langle \phi(u, u_n),\, u_n - u \rangle \to 0.$$

Tato konvergence spolu s konvergencí (2.23) dává

$$\langle Au_n,\, u_n - u\rangle \to 0 \quad \text{jakmile} \quad n \to \infty. \tag{2.26}$$

V podmínce monotonnosti,

$$\langle Au_n - \phi(z, u_n),\, u_n - z\rangle \geq 0,$$

(viz podmínka 1. v definici semi-monotonnosti) dosaďme

$$z := (1-t)u + ty,\ t \in (0,1],\ y \in X,$$

obdržíme

$$t\,\langle Au_n,\, u - y\rangle \geq -\,\langle Au_n,\, u_n - u\rangle + \langle \phi(z, u_n),\, u_n - u\rangle + t\,\langle \phi(z, u_n),\, u - y\rangle\,. \tag{2.27}$$

První člen na pravé straně v nerovnosti (2.27) konverguje k nule (viz (2.26)), druhý člen také k nule (viz (2.25)). Z konvergence (2.24)

$$\langle \phi(y, u_n),\, v\rangle \to \langle \phi(y, u),\, v\rangle\ \forall y, v \in X$$

po dosazení $y := z$, $v := u - y$ dostaneme

$$\langle \phi(z, u_n),\, u - y\rangle \to \langle \phi(z, u),\, u - y\rangle\,.$$

S využitím těchto konvergencí a limitním přechodem $n \to \infty$ v (2.27) dostaneme ekvivalenci

$$\begin{aligned} t \liminf\,\langle Au_n,\, u - y\rangle \quad &\geq \quad t\,\langle \phi(z, u),\, u - y\rangle \iff \\ &\iff \quad \liminf\,\langle Au_n,\, u - y\rangle \geq \langle \phi(z, u),\, u - y\rangle\,. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\langle Au_n,\, u_n - y\rangle = \langle Au_n,\, u_n - u\rangle + \langle Au_n,\, u - y\rangle$$

a první člen $\langle Au_n,\, u_n - u\rangle$ konverguje pro $n \to \infty$ k nule (viz (2.26)), obdržíme s využitím hemispojitosti (2. podmínka v definici semi-monotonnosti) dokazovanou nerovnost. Skutečně

$$\liminf\,\langle Au_n,\, u_n - y\rangle = \liminf\,\langle Au_n,\, u - y\rangle \geq \langle \phi(z, u),\, u - y\rangle$$

a

$$\langle \phi(z, u),\, u - y\rangle \to 0 \quad \text{pro} \quad t \to 0.$$

□

Poznámky.

1. V literatuře o monotónních operátorech není terminologie jednotná. Tak např. H. Brezis ve svých publikacích požaduje v definici pseudomonotónního operátoru navíc, aby tento operátor byl ohraničený. Jinou definici pseudomonotónních operátorů lze najít např. v knize [13], ve které pseudomonotónní operátor je definován takto:

   Operátor $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X^*$, kde $\mathcal{D}(A)$ je definiční obor operátoru A, X je reálný nebo komplexní Banachův prostor, se nazývá pseudomonotónním, jestliže existuje rostoucí funkce ν taková, že $\nu(0) = 0$, $\nu(t) \to +\infty$ pro $t \to +\infty$ a pro všechna $x, y \in \mathcal{D}(A)$ platí nerovnost

   $$|\langle Ax - Ay, x - y\rangle| \geq \|x - y\| \, \nu(\|x - y\|) .$$

2. S konkrétními příklady pseudomonotónních operátorů se lze setkat v případě energetického rozšíření eliptického diferenciálního operátoru, ve kterém podmínku monotónnosti splňuje pouze ta část tohoto operátoru, která odpovídá nejvyšším derivacím zatímco zbývající část splňuje jiné podmínky. V tomto případě nelze na takovou úlohu použít teorii o řešitelnosti operátorových rovnic s monotónními operátory.

3. Teorii monotónních operátorů lze rozšířit i na operátory v komplexních Banachových (nebo pouze normovaných) prostorech. V definicích monotonnosti (včetně ryzí, silné, stejnoměrné a dalších pojmů) se uvažuje pouze reálná část hodnot funkcionálu. Operátor $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X^*$, kde $\mathcal{D}(A)$ je definiční obor operátoru A, X je komplexní Banachův prostor, se nazývá monotónním, jestliže pro všechna $x, y \in \mathcal{D}(A)$ platí nerovnost

   $$\mathrm{Re}\, \langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0 ,$$

   kde Re znamená reálnou složku komplexního čísla. Připomeňme, že v případě spojitého lineárního funkcionálu v komplexním normovaném prostoru, je imaginární část hodnoty tohoto funkcionálu jednoznačně určena pomocí její reálné části.

4. Monotonnost operátoru $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X^*$ lze také definovat pomocí pojmu monotonní množiny a grafu operátoru.

   Řekneme, že množina $E \subset X \times X^*$ je monotónní, jestliže pro libovolné dva body (x_1, y_1^*) a (x_2, y_2^*) z množiny E je splněna nerovnost

   $$\langle y_1^* - y_2^*, x_1 - x_2\rangle \geq 0.$$

   Pak budeme říkat, že operátor A je monotónní, jestliže jeho graf $G(A)$, $G(A) := \{(x, Ax),\, x \in \mathcal{D}(A)\}$, je monotónní množina.

   Množina je maximálně monotónní, jestliže není vlastní podmnožinou nějaké monotónní množiny. Je-li graf operátoru maximálně monotónní množinou, pak řekneme, že operátor je maximálně monotónní operátor. Pomocí těchto definic lze definovat i monotonnost pro mnohoznačná zobrazení, viz [11].

5. V řadě publikací lze najít další zobecnění pojmu monotonnosti a jiných výše uvedených pojmů. Tato zobecnění většinou vycházejí z požadavku dokázat existenci, jednoznačnost, konvergenci numerických metod pro řešení konkrétních tříd nelineárních problémů (včetně variačních nerovnic), získaných z fyzikálních modelů. Hlouběji se těmito zobecněními v těchto skriptech zabývat nebudeme.

6. Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Pak všechny výše definované pojmy jako jsou různé druhy monotonnosti, spojitosti, koercivity a j., lze zavést i pro operátory typu $B: X^* \to X$ pomocí kanonického zobrazení $J: X \to X^{**}$, které je lineární, izomorfní a izometrické a zobrazuje prostor X na X^{**} (viz 1. kapitola). Operátor $B: X^* \to X$ má jednu z uvedených vlastností, jestliže má tuto vlastnost operátor $JB: X^* \to X^{**}$. Tak např. operátor $B: X^* \to X$ je monotónní, jestliže je monotónní operátor $JB: X^* \to X^{**}$, což znamená, že pro každé x^* a y^* z prostoru X^* platí:

$$\langle y^* - x^*, By^* - Bx^* \rangle = \langle JBy^* - JBx^*, y^* - x^* \rangle \geq 0.$$

Cvičení 2.2.2 *Nechť $A: X \to X^*$, kde X je reálný reflexivní Banachův prostor. Předpokládejme, že platí rozklad $A = B + T$, kde $B: X \to X^*$ je radiálně spojitý, monotónní a ohraničený operátor a operátor $T: X \to X^*$ je zesíleně spojitý. Ukažte, že operátor A je pseudomonotónní a ohraničený ve smyslu výše uvedené definice 2.2.1.*

♣

Na závěr krátce pojednáme o akreditivních (také tzv. $\mathcal{U}$-monotónních) operátorech, kde $\mathcal{U}$ je dualizační zobrazení (podrobnosti a další zobecnění viz např. kniha [13]). Tento pojem je zaveden pro operátory $T: \mathcal{D}(T) \subset X \to X$, kde X je reálný i komplexní reflexivní Banachův prostor a $\mathcal{D}(T)$ je podprostor X (definiční obor operátoru T). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že prostory X a X^* jsou striktně konvexní. Pak existuje jednoznačné dualizační zobrazení $\mathcal{U}$ (viz 1. a 2. kapitola), které je demispojité, koercivní, ryze monotónní (dokonce α-monotónní) a zobrazuje celý prostor X na k němu duální prostor X^* (viz [13] a následující odstavec). Na prostoru X lze zavést formu $[u, z]$, $u, z \in X$, která je v první složce lineární a aditivní, zatímco v druhé složce pouze homogenní v oboru nezáporných reálných čísel a navíc splňuje Schwarzovu nerovnost. Pro tuto formu, která připomíná skalární součin, se používá názvu semi-skalární součin (sub-skalární nebo také polo-skalární součin). Poznamenejme, že na rozdíl od tohoto pojmu pseudoskalární součin je lineární i v druhé složce, avšak pseudoskalární součin dvou nenulových stejných prvků může být nulový. Semi-skalární součin $[u, z]$, $u, z \in X$ definujme takto:

$$[u, z] \equiv \langle \mathcal{U}z, u \rangle \quad \text{pro} \quad u, z \in X.$$

Vlastnosti semi-skalárního součinu $[u, z]$:

1. $[\lambda\, u, z] \;=\; \lambda\, [u, z]$ pro $\lambda \in \mathbb{R}$ a $u, z \in X$.
2. $[u + v, z] \;=\; [u, z] + [v, z]$ pro $u, v, z \in X$.
3. $|\, [u, z]\, | \;\leq\; \|u\|\, \|z\|$ pro $u, z \in X$.
4. $[u,\, \lambda\, z] \;=\; \lambda\, [u, z]$ pro $\lambda \geq 0$ a $u, z \in X$.

Definice 2.2.3 *Nechť $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to X$, kde X je reálný reflexivní Banachův prostor a $\mathcal{D}(T)$ je podprostor X (definiční obor operátoru T). Pak řekneme, že operátor T je akreditivní ($\mathcal{U}$-monotónní), právě když platí implikace*

$$x, x + h \in \mathcal{D}(T) \quad \Longrightarrow \quad [T(x + h) - Tx,\, h] \;\geq 0.$$

Jestliže platí opačná nerovnost,

$$x, x + h \in \mathcal{D}(T) \quad \Longrightarrow \quad [T(x + h) - Tx,\, h] \;\leq 0,$$

pak se operátor T nazývá disipativní (také antimonotónní).

Podobně jako v případě monotónních operátorů lze definovat pojem ryze, silně, stejnoměrně akreditivní operátor. Tyto definice lze rozšířit i na komplexní Banachovy prostory. V tomto případě v definici vystupuje reálná část obecně komplexního čísla $[T(x + h) - Tx,\, h]$.

Jestliže prostor X je reálný Hilbertův, pak

$$[u, z] \;=\; \langle \mathcal{U}z,\, u\rangle \;=\; (u, v) \quad \text{pro} \quad u, z \in X,$$

kde v je podle Rieszovy-Frechétovy věty reprezentant spojitého lineárního funkcionálu $\mathcal{U}z$ (připomínáme, že dualizační operátor $\mathcal{U}$ je inverzní k Rieszovu operátoru a je tím spojitý, lineární a izometrický) a $(\cdot,\, \cdot)$ je skalární součin v prostoru X. V tomto případě akreditivní (ryze, silně a j.) operátor je monotónní (ryze, silně a j.) a naopak. V některých publikacích se místo monotónnosti používá termín nezápornost (kladný, pozitivně definitní a pod.)

Obecnější pojem než akreditivní operátor je tzv. J-monotónní operátor. Předpokládejme, že X a Y jsou normované prostory (reálné nebo komplexní) a J a T jsou obecně nelineární operátory takové, že

$$\mathcal{D}(J) = X,\; \mathcal{R}(J) \subset Y,\; \mathcal{D}(T) \subset X,\; \mathcal{R}(T) \subset Y^*.$$

Pak operátor T nazveme J-monotónním, jestliže pro každé $x, y \in \mathcal{D}(T)$ platí

$$\mathrm{Re}\, \langle Tx - Ty,\, Jx - Jy\rangle \;\geq 0\,.$$

Zřejmě, je-li $X \equiv Y$ a J je identický operátor, pak termín J-monotónní operátor je totožný s výše uvedeným pojmem monotónní operátor. V případě, kdy X je reflexivní Banachův prostor, $Y \equiv X^*,\; X^*$ je striktně konvexní a je J dualizační zobrazení, pak J-monotonnost a akreditivita jsou totožné pojmy.

2.3 Existenční věty

V tomto odstavci uvedeme věty o existenci řešení operátorové rovnice $Au = f$, kde $A : X \to X^*$, $f \in X$ a X je reflexivní Banachův prostor. Budeme předpokládat, že operátor A je monotónní resp. pseudomonotónní. Nejprve uvedeme některé základní věty o existenci řešení v Hilbertových prostorech a pak obecně v reflexivních Banachových prostorech.

2.3.1 Existenční věty v Hilbertových prostorech

V případě Hilbertova prostoru X se skalárním součinem $(\cdot\,,\,\cdot)$ budeme vyšetřovat řešitelnost rovnice $Au = f$, kde $A : X \to X$, $f \in X$. Podle Rieszovy-Fréchetovy věty o obecném tvaru spojitého lineárního funkcionálu lze všechny výše uvedené pojmy přenést i na tento speciální případ Banachových reflexivních prostorů, při čemž místo duálního vztahu vystupuje skalární součin. Tak např. operátor $A : X \to X$ je silně monotónní, jestliže existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $x, y \in X$ platí

$$(Ax - Ay\,,\, x - y) \geq c\,\|x - y\|^2.$$

Následující věta pojednává o existenci a jednoznačnosti řešení operátorové rovnice $Au = f$ v případě silně monotónního operátoru A a zobecňuje Laxovu-Milgramovu větu pro případ nelineárních operátorů. Připomeňme pojem operátoru, který je Lipschitzovsky spojitý:

Definice 2.3.1 *Operátor $A : X \to X$ je Lipschitzovsky spojitý, jestliže existuje konstanta $M > 0$ taková, že pro každé $x, y \in X$ platí*

$$\|Ax - Ay\| \;\leq\; M\,\|x - y\|.$$

Věta 2.3.1 *Nechť operátor $A : X \to X$ je silně monotónní a Lipschitzovsky spojitý. Pak pro každé $f \in X$ má rovnice $Au = f$ jediné řešení.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ a definujme operátor T_ε předpisem

$$T_\varepsilon(u) \;=\; u - \varepsilon(Au - f), \quad u \in X.$$

Pak pro libovolné u_1 a u_2 s využitím předpokladů obdržíme

$$\begin{aligned} & \|T_\varepsilon(u_1) - T_\varepsilon(u_2)\|^2 = \\ = \;& \|u_1 - u_2\|^2 - 2\varepsilon(u_1 - u_2\,,\, Au_1 - Au_2) + \varepsilon^2\|Au_1 - Au_2\|^2 \leq \\ \leq \;& (1 + \varepsilon^2 M^2 - 2\varepsilon c)\,\|u_1 - u_2\|^2. \end{aligned}$$

Vyberme ε tak, aby $\varepsilon\, M \; < 2c$. Pak

$$1 + \varepsilon^2 M^2 - 2\varepsilon c \, < 1$$

a tím je operátor T_ε kontrahující. Tvrzení věty již plyne ihned z Banachovy věty o pevném bodu (viz věta 1.3.7). $\square$

Věta 2.3.2 (Lax-Milgram) *Nechť H je reálný Hilbertův prostor a $a(u,v)$ je spojitá a koercivní bilineární forma definovaná na prostoru H, tzn. existují konstanty $c_1 > 0$ a $c_2 > 0$ tak, že pro všechna $u, v \in H$ platí*

$$|a(u,v)| \le c_1\|u\|\,\|v\| \qquad \text{a} \quad a(u,u) \ge c_2\|u\|^2.$$

Pak pro libovolné $F \in H^*$ existuje jediné $u \in H$ takové, že

$$a(u,v) = F(v) \quad \text{pro každé} \quad v \in H. \tag{2.28}$$

Navíc, jestliže bilineární forma $a(u,v)$ je symetrická, pak pro u splňující (2.28) platí:

$$\frac{1}{2}a(u,u) - F(u) = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - F(v)\right\}. \tag{2.29}$$

Důkaz. Důkaz této věty spočívá ve studiu řešitelnosti operátorové rovnice $Au = f$.

Z předpokladu spojitosti bilineární formy $a(u,v)$ plyne, že pro pevné $u \in H$ je zobrazení $v \to a(u,v)$ spojitý lineární funkcionál a tím podle Rieszovy-Fréchetovy věty existuje jediný prvek závislý na prvku u - označme jej symbolem Au - tak, že platí

$$a(u,v) = (Au,v) \quad \text{pro každé} \quad v \in H.$$

Zřejmě A je lineární a z předpokladů lze snadno ověřit, že platí

$$\|Au\| \le c_1\|u\| \qquad \text{a} \quad (Au,u) \ge c_2\|u\|^2.$$

Z první nerovnosti plyne spojitost lineárního operátoru A a druhá nerovnost reprezentuje jeho silnou monotonnost. Tudíž úloha najít $u \in H$ tak, aby platilo (2.28), je ekvivalentní řešení operátorové rovnice $Au = f$, kde f je reprezentant spojitého lineárního funkcionálu $F \in H^*$, tzn. $F(v) = (v,f)\,\forall v \in H$. Odtud je zřejmé, že věta 2.3.1 je zobecněním Laxovy-Milgramovy věty.
Poznamenejme, že dokázat tuto větu lze také jinak a to s využitím linearity operátoru A: z předpokladů Laxovy-Milgramovy věty poměrně snadno lze dokázat, že obor hodnot operátoru A je uzavřená množina a navíc hustá v prostoru H (z koercivity plyne, že neexistuje nenulový prvek ortogonální na obor hodnot) a tím obor hodnot je celý prostor H. Ze silné monotónnosti (pozitivní definitnosti) pak plyne existence spojitého inverzního operátoru k operátoru A a tím je důkaz Laxovy-Milgramovy věty dokončen.

Jestliže bilineární forma $a(u,v)$ je symetrická, pak $a(u,v)$ splňuje axiomy skalárního součinu a

$$a(u,u)^{1/2} \equiv \|u\|_a$$

je normou na prostoru H. Z předpokladů plyne ekvivalentnost této normy s normou původní:

$$c_2\|u\|^2 \le a(u,u) = \|u\|_a^2 \le c_1\|u\|^2.$$

Jelikož $F \in H^*$, je tento funkcionál spojitý i vzhledem k normě $\|u\|_a$, a proto podle Rieszovy-Fréchetovy věty existuje jediný prvek $g \in H$ tak, že platí

$$F(v) = a(g, v) \quad \forall v \in H.$$

Pak

$$a(u, v) = F(v) = a(g, v) \ \forall v \in H \qquad \Longrightarrow \qquad u = g$$

a proto $F(v) = a(u, v)$, $v \in H$, speciálně $F(u) = a(u, u)$. Odtud plyne následující identita

$$\frac{1}{2}a(v-u, v-u) = \left[\frac{1}{2}a(v,v) - F(v)\right] - \left[\frac{1}{2}a(u,u) - F(u)\right]$$

a také rovnost (2.29), jelikož podle předpokladu platí

$$a(v-u, v-u) \ \geq \ c_2\|v-u\|^2.$$

□

Jiné zobecnění Laxovy-Milgramovy věty je uvedeno v následující větě (důkaz viz násl. cvičení a [14]).

Věta 2.3.3 (*Stampacchia) *Nechť H je reálný Hilbertův prostor a $a(u,v)$ je spojitá a koercivní bilineární forma definovaná na prostoru H a K je neprázdná uzavřená konvexní množina v H. Pak pro libovolné $F \in H^*$ existuje jediné $u \in K$ takové, že*

$$a(u, v-u) \ \geq \ F(v-u) \quad \text{pro každé} \quad v \in K. \tag{2.30}$$

Navíc, jestliže bilineární forma $a(u,v)$ je symetrická, pak pro u platí:

$$\frac{1}{2}a(u,u) - F(u) \ = \ \min_{v \in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - F(v)\right\}. \tag{2.31}$$

Cvičení 2.3.1 *Dokažte Laxovu-Milgramovu větu pomocí věty 2.3.3.

Návod. Zvolte $K := H$ a v nerovnosti (2.30) $v = w + u$ resp. $v = -w + u$, kde $w \in H$. Odtud dostanete rovnost $a(u, w) = F(w)$ pro $w \in H$.

♣

Cvičení 2.3.2 *Dokažte větu 2.3.3.

Návod. Podobně jako v důkazu Laxovy-Milgramovy věty nejprve sestrojte lineární spojitý operátor $A : H \to H$ tak, že platí

$$a(u, v) = (Au, v) \quad \text{pro každé} \quad v \in H.$$

Pak

$$\|Au\| \ \leq \ c_1\|u\| \qquad \text{a} \quad (Au, u) \geq c_2\|u\|^2.$$

Nechť f je reprezentant spojitého lineárního funkcionálu $F \in H^*$, tzn. platí $F(v) = (v, f)\, \forall v \in H$. Sestrojte projekci P_K z prostoru H na K definovanou předpisem

$$\|P_K w - w\| = \min_{v \in K} \|w - v\|, \quad w \in H.$$

Z teorie konvexních množin (např. [10], [14]) plyne, že tato projekce je v případě uzavřené konvexní množiny dobře definovaná, přičemž P_K je operátor mající následující vlastnosti:

$$(w - P_K w, v - P_K w) \le 0 \text{ pro } v \in K \qquad \text{a} \quad \|P_K w_1 - P_K w_2\| \le \|w_1 - w_2\|.$$

Je-li K uzavřený podprostor, pak P_K je lineární spojitý operátor, pro který platí:

$$(P_K w - w, v) = 0 \quad \text{pro } v \in K.$$

Ukažte, že pro libovolné kladné $\alpha > 0$ platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned} &\alpha\,(Au, v - u) \ge \alpha\,(f, v - u) \quad \text{pro} \quad v \in K \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow\ (\alpha\, f - \alpha\, Au + u - v\,,\ v - u) \le 0 \quad \text{pro} \quad v \in K \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow\ u = P_K(\alpha\, f - \alpha\, Au + u). \end{aligned}$$

Vyšetřujte zobrazení $S: K \to K$ definované předpisem

$$Sv = P_K(\alpha\, f - \alpha\, Av + v), \quad v \in K.$$

Dokažte, že pro libovolné $x, y \in K$ platí

$$\|Sx - Sy\|^2 \le k^2 \|x - y\|^2, \quad k^2 = 1 - 2\alpha c_2 + \alpha^2 c_1^2.$$

Zvolte $\alpha > 0$ tak, aby $\alpha c_1^2 < 2c_2$. Pak $0 < k < 1$ a proto zobrazení S je na množině K kontrahující. Podle Banachovy věty o pevném bodu (viz věta 1.3.7) existuje jediný prvek $u \in K$ takový, že platí $u = Su$. První část tvrzení věty obdržíte z výše uvedených ekvivalencí.

Je-li bilineární forma $a(u, v)$ symetrická, tak podobně jako v důkaze věty Laxovy-Milgramovy, $a(u, v)$ reprezentuje skalární součin s normou $\|u\|_a$, která je ekvivalentní původní normě v prostoru H. Je-li g prvek, který v prostoru H se skalárním součinem reprezentuje spojitý lineární funkcionál F, pak ukažte, že platí

$$a(g - u, v - u) \le 0 \quad \forall v \in K.$$

Pomocí nerovnosti (1.3) (projekce na uzavřenou konvexní množinu) ukažte, že platí

$$a(g - u, g - u) = \min_{v \in K} a(g - v, g - v).$$

Druhou část tvrzení věty obdržíte s využitím reprezentace funkcionálu

$$F(v) = a(g, v) \ \forall v \in H.$$

♣

V další části tohoto odstavce rozšíříme pojem monotónního operátoru na libovolnou podmnožinu M reálného Hilbertova prostoru H a uvedeme další věty o fixních bodech neexpanzivních operátorů.

Definice 2.3.2 *Nechť H je reálný Hilbertův prostor, $M \subset H$ libovolná neprázdná podmnožina a $A: M \to X$. Pak definujme následující pojmy:*

1. *Operátor A je na množině M monotónní, jestliže pro každé $x, y \in M$ platí nerovnost*
$$(Ax - Ay\,,\, x - y) \;\geq\; 0.$$

2. *Operátor A je na množině M neexpanzivní, jestliže pro každé $x, y \in M$ platí nerovnost*
$$\|Ax - Ay\| \;\leq\; \|x - y\|.$$

3. *Operátor A je na množině M expanzivní, jestliže pro každé $x, y \in M$ platí nerovnost*
$$\|Ax - Ay\| \;\geq\; \|x - y\|.$$

Poznamenejme, že kontrahující zobrazení je neexpanzivní a identické zobrazení je expanzivní i neexpanzivní. Monotonnost operátoru A lze charakterizovat pomocí pojmu expanzivnosti na základě následující věty.

Věta 2.3.4 *Nechť H je reálný Hilbertův prostor, $M \subset H$ je neprázdná podmnožina a $A: M \to X$. Pak operátor A je na množině M monotónní právě tehdy, když operátor $I + \lambda A$ je expanzivní pro každé $\lambda > 0$.*

Důkaz. Nejprve poznamenejme, že operátor $I + \lambda A: M \to X$.

Nechť A je na množině M monotónní. Pak pro $\lambda > 0$ a $x, y \in M$ je

$$((I + \lambda A)x - (I + \lambda A)y\,,\, x - y) = \|x - y\|^2 + \lambda\,(Ax - Ay\,,\, x - y) \;\geq \|x - y\|^2$$

a tím pro $x \neq y$ je

$$\|\,(I + \lambda A)x - (I + \lambda A)y\,\| = \sup_{x_1 \neq y_1} \frac{|((I + \lambda A)x - (I + \lambda A)y\,,\, x_1 - y_1)|}{\|x_1 - y_1\|} \geq$$
$$\geq \frac{|((I + \lambda A)x - (I + \lambda A)y\,,\, x - y)|}{\|x - y\|} \;\geq\; \|x - y\|,$$

což znamená, že operátor $I + \lambda A$ je expanzivní.

K důkazu opačné implikace předpokládejme, že operátor $I + \lambda A$ je expanzivní pro každé $\lambda > 0$. Pak pro $x, y \in M$ je

$$\|(x - y) + \lambda(Ax - Ay)\|^2 \;\geq\; \|x - y\|^2.$$

Odtud dostaneme $\lambda\,\|Ax - Ay\| + 2(Ax - Ay\,,\, x - y) \;\geq\; 0$ a limitním přechodem $\lambda \to 0$ obdržíme monotonnost operátoru A.

$\square$

V lemmatu 2.1.3 byla uvedeno a dokázáno Mintyho lemma pro monotónní operátory v reflexivním Banachově prostoru X:

Mintyho lemma: Je-li operátor A monotónní a hemispojitý a $u \in X$, pak

$$\langle Au, v-u\rangle \geq 0 \ \forall v \in X \quad \Longleftrightarrow \quad \langle Av, v-u\rangle \geq 0 \ \forall v \in X.$$

V následujícím lemmatu je toto tvrzení rozšířeno pro monotónní operátory definované na konvexní podmnožině Hilbertova prostoru.

Lemma 2.3.1 (*Minty) *Nechť H je reálný Hilbertův prostor, $M \subset H$ je neprázdná konvexní podmnožina a $A : M \to H$ je monotónní operátor, slabě spojitý na každé úsečce ležící v M. Zvolme $u \in M$ a $z \in H$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $(Au - z\,,\, v - u) \geq 0$ *pro* $v \in M$.
2. $(Av - z\,,\, v - u) \geq 0$ *pro* $v \in M$.

Je-li u vnitřním bodem množiny M, pak vlastnost 1. implikuje rovnost $Au = z$.

Důkaz. Implikace 1. $\Rightarrow$ 2.:

Nechť $(Au - z\,,\, v - u) \geq 0$ pro $v \in M$. Pak

$$(Av - z\,,\, v - u) - (Au - z\,,\, v - u) = (Av - Au\,,\, v - u) \geq 0.$$

Odtud plyne

$$(Av - z\,,\, v - u) \geq (Au - z\,,\, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in M.$$

Implikace 2. $\Rightarrow$ 1.:

Nechť $(Av - z\,,\, v - u) \geq 0$ pro $v \in M$. Pro $w \in M$ a $0 \leq t < 1$ položme $v = tu + (1-t)w$. Protože M je konvexní, je $v \in M$. Pak

$$0 \leq (Av - z\,,\, v - u) \;=\; (1-t)(Av - z\,,\, w - u) \quad \Rightarrow \quad (Av - z\,,\, w - u) \geq 0.$$

Limitním přechodem $t \to 1$ (s využitím slabé spojitosti operátoru A na každé úsečce ležící v M) dostaneme

$$(Au - z\,,\, w - u) \geq 0.$$

Poslední tvrzení je důsledkem definice vnitřního bodu a vlastnosti 1.

□

S pomocí tohoto lemmatu dokážeme větu o fixních bodech neexpanzivního operátoru.

Věta 2.3.5 **Nechť H je reálný Hilbertův prostor, $M \subset H$ je neprázdná, ohraničená a uzavřená konvexní podmnožina a nechť $A : M \to M$ je neexpanzivní operátor. Pak existuje alespoň jeden fixní bod operátoru A . Navíc množina všech jeho fixních bodů je konvexní.*

Důkaz. Pro libovolné $\lambda \in (0,1)$ je zřejmé, že operátor λA je kontrahující a tím podle Banachovy věty o pevném bodu (viz věta 1.3.7) existuje jediný prvek $x_\lambda \in M$ takový, že platí $x_\lambda = \lambda A x_\lambda$. Definujme operátory B a B_λ pro $\lambda \in (0,1)$ předpisem

$$B = I - A, \qquad B_\lambda = I - \lambda A.$$

Platí:

1. $B_\lambda x_\lambda \; = \; 0.$
2. $\|B_\lambda v - Bv\| = (1-\lambda)\,\|Av\| \;\to\; 0 \quad \text{pro} \quad v \in M,\; \lambda \to 1.$
3. Operátory B_λ a B jsou monotónní:

   $$(B_\lambda u - B_\lambda v\,,\, u - v) = -\lambda(Au - Av, u - v) \,+\, \|u - v\|^2 \geq 0.$$

   Podobně se dokáže monotonnost operátoru B.

Protože množina M je ohraničená a uzavřená, lze z posloupnosti fixních bodů x_λ vybrat slabě konvergující podposloupnost pro $\lambda \to 1$ se slabou limitou $u \in M$. Označme tuto podposloupnost opět symbolem x_λ, tzn.

$$x_\lambda \rightharpoonup u \quad \text{pro} \quad \lambda \to 1.$$

Protože $B_\lambda x_\lambda = 0$, je pro libovolné $v \in M$

$$(B_\lambda v, v - x_\lambda) = (B_\lambda v - B_\lambda x_\lambda, v - x_\lambda) \geq 0.$$

Odtud obdržíme

$$\begin{aligned}(Bv\,,\, v-u) \;&=\; (B_\lambda v, v - x_\lambda) \,+\, (\lambda - 1)\,(Av, v - x_\lambda) \,+\, (Bv, x_\lambda - u) \geq \\ &\geq\; (\lambda - 1)\,(Av, v - x_\lambda) \,+\, (Bv, x_\lambda - u) \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{pro} \quad \lambda \to 1.\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že pro všechna $v \in M$ platí nerovnost

$$(Bv\,,\, v - u) \geq 0.$$

Podle Mintyho lemmatu je

$$(Bu\,,\, v-u) = (u - Au\,,\, v - u) \geq 0$$

a to pro všechna $v \in M$. Dosazením $v := Au$ dostaneme

$$-(u - Au\,,\, u - Au) \geq 0$$

a tudíž $u = Au$, tzn. u je pevný bod operátoru A. Nechť $u \in M$, pak z uvedeného postupu ihned dostáváme následující ekvivalence:

$$u = Au \;\Leftrightarrow\; Bu = 0 \;\Leftrightarrow\; (Bu, v-u) \geq 0 \;\forall v \in M \;\Leftrightarrow\; (Bv, v - u) \geq 0 \;\forall v \in M. \tag{2.32}$$

Nyní dokážeme konvexitu množiny všech fixních bodů operátoru A. Nechť u_1 a u_2 jsou fixní body operátoru A, tzn. platí $u_i = Au_i$, $i = 1, 2$.
Pak pro $0 \le t \le 1$ je (viz (2.32))

$$(Bv, v - [tu_1 + (1-t)u_2]) = t(Bv, v - u_1) \,+\, (1-t)\,(Bv, v - u_2) \ge 0 \;\forall v \in M.$$

Tudíž podle (2.32) je také $tu_1 + (1-t)u_2$ fixním bodem operátoru A.

□

Obecně v Banachových prostorech věta o fixních bodech neexpanzivního operátoru neplatí, viz následující příklad.

Příklad 2.5 Zvolme $X := c_0$, tzn. prostor číselných posloupností konvergujících k nule s maximální normou:

$$c_0 = \{x = \{x_i\} : x_i \to 0 \quad \text{pro} \quad i \to \infty\}\,, \qquad \|x\| = \max_i |x_i|.$$

Zvolme za množinu M jednotkovou kouli v prostoru X a operátor A definujme předpisem

$$Ax = \{1, x_1, x_2, \cdots\}, \quad x = \{x_1, x_2, \cdots\} \in M.$$

Zřejmě je M neprázdná, ohraničená a uzavřená konvexní množina a operátor $A : M \to M$ je neexpanzivní, jelikož

$$\|Ax - Ay\| = \|x - y\|.$$

Předpokládejme, že existuje v M fixní bod $x \in M$. Pak

$$Ax = x \quad \Longrightarrow \quad \{1, x_1, x_2, \cdots\} = \{x_1, x_2, \cdots\} \implies 1 = x_1 = x_2 = \cdots \notin c_0.$$

Operátor A nemá v M fixní bod. ♠

V dalším výkladu dokážeme základní věty z teorie monotónních operátorů v Hilbertových prostorech. Tyto věty se používají k důkazu existence řešení diferenciálních rovnic.

Věta 2.3.6 *Nechť B je uzavřená jednotková koule Hilbertova prostoru H a operátor $A : B \to H$ je monotónní a spojitý na $B \cap M$, kde M je libovolný konečně rozměrný podprostor v prostoru H. Pak*

1. *Existuje $x_0 \in B$ tak, že platí*

$$(Ax_0, y - x_0) \ge 0 \quad \forall y \in B. \tag{2.33}$$

   Navíc, množina prvků splňující tuto nerovnost je konvexní.

2. *Je-li $\|x_0\| < 1$, pak $Ax_0 = 0$.*
   Jestliže $\|x_0\| = 1$ a pro každé $x \in S := \{u \in H : \|u\| = 1\}$ platí

$$x + \lambda\, Ax \ne 0 \quad \forall \lambda \ge 0, \tag{2.34}$$

   pak $Ax_0 = 0$.

Důkaz. Důkaz první části této věty je založen na použití Hartmanovy-Stampacchiovy věty (viz věta 1.3.6), vlastnostech konvexních množin, které byly shrnuty v první kapitole a ve větě 1.1.2.

Pro každé $y \in B$ definujme množinu $S(y)$ předpisem

$$S(y) = \{x \in B : (Ay, y - x) \geq 0\}.$$

Pak

(a) $S(y) \subset B$.

(b) $S(y)$ je konvexní:
Pro libovolné $t \in [0,1]$ a x_1, $x_2 \in S(y)$ je

$$(Ay, y - [(1-t)x_1 + tx_2]) = (1-t)(Ay, y - x_1) + t(Ay, y - x_2) \geq 0.$$

(c) $S(y)$ je uzavřená: pro $\{x_n\} \subset S(y)$, $x_n \to x$, je

$$(Ay, y - x) = \lim_{n\to\infty} (Ay, y - x_n) \geq 0.$$

(d) Nechť $y_1, \cdots, y_m \in B$ a $M = \mathcal{L}\{y_1, \cdots, y_m\}$.
Pak existuje $x \in \bigcap_{y \in M\cap B} S(y)$ tak, že platí

$$(Ay, y - x) \geq 0 \quad y \in M \cap B,$$

tzn. $x \in S(y)$ pro $y \in M \cap B$. Jinými slovy množina $\{S(y)\}$, $y \in B$, má vlastnost konečného průniku. Skutečně, množina $K := M \cap B$ je kompaktní a konvexní v M. Podle Hartmanovy-Stampacchiovy věty (viz věta 1.3.6) existuje $x \in K$ tak, že platí

$$(Ax, y - x) \geq 0 \quad \text{pro} \quad y \in K = M \cap B.$$

Protože operátor A je monotónní, tzn. $(Ay - Ax, y - x) \geq 0$, je

$$(Ay, y - x) \geq (Ax, y - x) \geq 0 \quad y \in M \cap B$$

a tím $x \in S(y)$ pro libovolné $y \in M \cap B$.

(e) Protože $S(y) \subset B, y \in B$, je uzavřená a konvexní, je slabě uzavřená. Z věty 1.1.2 ihned plyne, že průnik všech těchto množin je neprázdný. Stačí v této větě za kompaktní topologický prostor $\mathcal{T}$ zvolit: $\mathcal{T} := B$ se slabou topologií a systém $\{U_i\} := \{S(y),\, y \in B\}$, kde každá z množin $S(y)$ je slabě uzavřená (tzn. uzavřená v topologii prostoru $\mathcal{T}$). V předcházejícím bodě bylo již dokázáno, že tento systém má vlastnost konečného průniku. V tomto konkrétním případě lze snadno dokázat, že průnik všech množin tohoto systému je neprázdný a to bez použití věty 1.1.2.

Sporem dokážeme, že

$$\bigcap_{y \in B} S(y) \neq \emptyset.$$

Předpokládejme, že platí

$$\bigcap_{y\in B} S(y) = \emptyset.$$

Pak

$$B = \bigcap_{y\in B} S(y)^c,$$

kde doplněk $S(y)^c$ je množina slabě otevřená (doplněk je slabě uzavřený). Avšak množina B je slabě kompaktní a tím existuje konečná podmnožina $S(y_1), \cdots S(y_m),\ y_1, \cdots, y_m \in B$ tak, že platí

$$B = S(y_1)^c \cup \cdots \cup S(y_m)^c,$$

tzn. $S(y_1) \cap \cdots \cap S(y_m) = \emptyset$, což je ve sporu s předcházející dokázanou vlastností (d).

K důkazu konvexity definujme množinu K takto:

$$K = \{x_0 \in B : (Ax_0, y - x_0) \geq 0 \quad \forall y \in B\}.$$

Pak

$$K = \{x_0 \in B : (Ay, y - x_0) \geq 0 \quad \forall y \in B\}$$

a odtud plyne přímo konvexita množiny K.

Důkaz první části druhého tvrzení věty je poměrně snadný. Je-li $\|x_0\| < 1$, pak existuje uzavřená koule $B(0, r) = \{x \in H,\ \|x\| \leq r\}$ taková, že platí inkluze

$$B(0, r) \subset \{y - x_0 : y \in B\}.$$

Jelikož $(Ax_0, y - x_0) \geq 0\ \forall y \in B$, je

$$(Ax_0, w) \geq 0 \quad \forall w \in B(0, r).$$

Avšak $-w \in B(0, r)\ \forall w \in B(0, r)$, je také

$$(Ax_0, -w) \geq 0 \quad \forall w \in B(0, r)$$

a odtud dostáváme rovnost

$$(Ax_0, w) = 0 \quad \forall w \in B(0, r).$$

Pro libovolné $x \in H, x \neq 0$, je

$$\frac{x}{\|x\|}\, r \in B(0, r)$$

a proto $(Ax_0, x) = 0$ pro každé $x \in H$ a tím $Ax_0 = 0$.

Je-li $\|x_0\| = 1$, pak k důkazu druhého tvrzení věty potřebujeme předpoklad, že k libovolnému bodu $x \in S$ jednotkové sféry neexistuje opačný prvek tvaru

$-Ax$ (viz předpoklad (2.34)). Předpokládejme, že $Ax_0 \neq 0$ a $\|x_0\| = 1$. Pak $-x_0 \in B$ a dosazením $y := -x_0$ do nerovnosti (2.33) obdržíme

$$(Ax_0, x_0) \leq 0.$$

Sporem dokážeme, že $(Ax_0, x_0) < 0$. Nechť $(Ax_0, x_0) = 0$, pak $(Ax_0, y) \geq 0$ pro všechna $y \in B$ a tím i pro $-y \in B$. Odtud dostáváme rovnost $(Ax_0, y) = 0$ pro všechna $y \in B$. Dosazením

$$y := \frac{Ax_0}{\|Ax_0\|}$$

obdržíme $\|Ax_0\| = 0$ a tím $Ax_0 = 0$, což je ve sporu s předpokladem $Ax_0 \neq 0$. Tudíž $(Ax_0, x_0) < 0$. Sestrojme λ_0 tak, aby $(x_0 + \lambda_0\, Ax_0, x_0) = 0$. Zřejmě stačí položit

$$\lambda_0 = -\frac{1}{(Ax_0, x_0)} > 0.$$

Do nerovnosti (2.33) dosaďme

$$y := \frac{-\,Ax_0}{\|Ax_0\|}.$$

Obdržíme

$$-\|Ax_0\| \geq (Ax_0, x_0) \quad \Longrightarrow \quad \|Ax_0\| \leq -(Ax_0, x_0) \leq \|Ax_0\| \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \|Ax_0\| = -(Ax_0, x_0)$$

a tím

$$(x_0 + \lambda_0\, Ax_0, Ax_0) = (x_0, Ax_0) - \frac{\|Ax_0\|^2}{(Ax_0, x_0)} = -\|Ax_0\| + \|Ax_0\| = 0.$$

Z konstrukce λ_0 je $(x_0 + \lambda_0\, Ax_0, x_0) = 0$. Odtud plyne

$$(x_0 + \lambda_0\, Ax_0, x_0 + \lambda_0\, Ax_0) = (x_0 + \lambda_0\, Ax_0, x_0) + \lambda_0\, (x_0 + \lambda_0\, Ax_0, Ax_0) = 0,$$

a proto $x_0 + \lambda_0 Ax_0 = 0$, kde $\lambda_0 > 0$, což je ve sporu s předpokladem (2.34). Tudíž $Ax_0 = 0$.

□

V předcházející větě lze místo uzavřené jednotkové koule vzít libovolnou uzavřenou kouli.

Věta 2.3.7 *Nechť $B(w, r)$ je uzavřená koule Hilbertova prostoru H se středem v bodě $w \in H$ a s poloměrem $r > 0$ a nechť operátor $T : B(w, r) \to H$ je monotónní a spojitý na $B(w, r) \cap M$, kde M je libovolný konečně rozměrný podprostor v prostoru H.*
Jestliže pro každé $z \in S(w, r) := \{u \in H : \|u - w\| = r\}$ platí

$$z - w + \lambda Tz \neq 0 \quad \forall \lambda \geq 0, \tag{2.35}$$

pak existuje $z_0 \in B(w, r)$ tak, že platí $Tz_0 = 0$. □

Cvičení 2.3.3 Dokažte větu 2.3.7.
Návod. Definujte operátor $A : B \to H$ předpisem $Ax = T(xr + w)$, $x \in B$ a použijte větu 2.3.6.

♣

Následující věta pojednává o surjektivitě monotónních, koercivních operátorů v Hilbertových prostorech. Tato věta je důsledkem věty 2.3.6, přesněji věty 2.3.7.

Věta 2.3.8 *Nechť H je Hilbertův prostor a operátor $A : H \to H$ splňuje tyto podmínky:*

1. *A je monotónní,*
2. *A je spojitý na každém konečně rozměrném podprostoru $M \subset H$,*
3. *A je koercivní, tzn.*
$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{(Ax, x)}{\|x\|} = \infty.$$

Pak operátor A je surjektivní, tzn. zobrazuje prostor H na sebe. Jinými slovy, operátorová rovnice $Ax = y$ má řešení pro každou pravou stranu $y \in H$. Je-li navíc operátor A ryze monotónní, pak toto řešení je jediné.

Důkaz. Pro pevné $y \in H$ definujme operátor $T : H \to H$ předpisem
$$Tx = Ax - y \quad \text{pro} \quad x \in H.$$
Pak

a) Operátor T je monotónní:
$$(Tx_1 - Tx_2, x_1 - x_2) = (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \ge 0 \qquad \forall\ x_1,\, x_2 \in H.$$

b) Operátor T je zřejmě spojitý na každém konečně rozměrném podprostoru $M \subset H$.

c) Operátor T je koercivní:
$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{(Tx, x)}{\|x\|} = \lim_{\|x\|\to\infty} \left[\frac{(Ax, x)}{\|x\|} - \frac{(y, x)}{\|x\|}\right] = \infty.$$

Odtud plyne existence čísla $r > 0$ tak, že pro $\|x\| \ge r$ je $(Tx, x) \ge \|x\|$.

Pro $\|x\| = r$ je $Tx \ne \delta x$ pro všechna $\delta < 0$. Tuto vlastnost dokážeme sporem. Nechť $Tx = \delta x$ pro nějaké $\delta < 0$ a $\|x\| = r$. Pak
$$\delta\|x\|^2 = (\delta x, x) = (Tx, x) \ge \|x\| \quad\Longrightarrow\quad \delta r^2 \ge r,$$
což je ve sporu s předpokladem, že $\delta < 0$. Z této vlastnosti a definice T ihned plyne, že pro $\|x\| = r$ a pro všechna $\delta < 0$ je $Tx \ne \delta x$. Tudíž podle věty 2.3.6, resp. 2.3.7 existuje $x \in H$ tak, že platí $Tx = 0$, tzn. $Ax = y$. Jednoznačnost řešení plyne snadno z definice ryzí monotonnosti operátoru. □

Požadavek na koercivitu lze zeslabit. K důkazu následující věty využijeme reflexivitu Hilbertova prostoru a a Mintyho lemma (viz lemma 2.3.1).

Věta 2.3.9 *Nechť H je Hilbertův prostor a operátor $A : H \to H$ splňuje tyto podmínky:*

1. *A je monotónní,*
2. *A je spojitý na každém konečně rozměrném podprostoru $M \subset H$,*
3. *A je slabě koercivní, tzn.*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|Ax\| = \infty.$$

Pak operátor A je surjektivní, tzn. zobrazuje prostor H na sebe. Jinými slovy, operátorová rovnice $Ax = y$ má řešení pro každou pravou stranu $y \in H$. Je-li navíc operátor A ryze monotónní, pak toto řešení je jediné.

Důkaz.
Pro libovolné $\varepsilon > 0$ definujme operátor $T_\varepsilon : H \to H$ předpisem

$$T_\varepsilon = A + \varepsilon I.$$

Pak

a) Operátor T_ε je monotónní, tzn. pro každé x_1, $x_2 \in H$ je

$$(T_\varepsilon x_1 - T_\varepsilon x_2, x_1 - x_2) = (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) + \varepsilon\,(x_1 - x_2, x_1 - x_2) \geq 0.$$

b) Operátor T_ε je zřejmě spojitý na každém konečně rozměrném podprostoru $M \subset H$.

c) Operátor T_ε je koercivní. Z monotonnosti operátoru A plyne nerovnost

$$(Ax - A0, x - 0) \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad (Ax, x) \geq (A0, x).$$

Zřejmě

$$\frac{(A0, x)}{\|x\|} \leq \|A0\|.$$

Odtud již obdržíme koercivitu operátoru T_ε:

$$\frac{(T_\varepsilon x, x)}{\|x\|} = \frac{(Ax, x)}{\|x\|} + \varepsilon\,\|x\| \geq \frac{(A0, x)}{\|x\|} + \varepsilon\,\|x\| \geq \varepsilon\,\|x\| - \|A0\|$$

a tím

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{(T_\varepsilon x, x)}{\|x\|} = \infty.$$

Operátor T_ε splňuje předpoklady věty 2.3.8 a tím zobrazuje prostor H na sebe. Tím pro pevné $y \in H$ existuje nějaké $x_\varepsilon \in H$ tak, že platí

$$Ax_\varepsilon + \varepsilon x_\varepsilon \equiv T_\varepsilon x_\varepsilon = y.$$

Jelikož

$$\frac{|(A0, x_\varepsilon)|}{\|x_\varepsilon\|} \leq \|A0\|,$$

je

$$\begin{aligned}\|y\| \quad &\geq \quad \frac{|(y, x_\varepsilon)|}{\|x_\varepsilon\|} \geq \frac{(y, x_\varepsilon)}{\|x_\varepsilon\|} = \frac{(Ax_\varepsilon, x_\varepsilon)}{\|x_\varepsilon\|} + \varepsilon\|x_\varepsilon\| \geq \\ &\geq \quad \frac{(A0, x_\varepsilon)}{\|x_\varepsilon\|} + \varepsilon\,\|x_\varepsilon\| \geq \varepsilon\,\|x_\varepsilon\| - \|A0\|\,,\end{aligned}$$

tzn.

$$\varepsilon\,\|x_\varepsilon\| \;\leq\; \|A0\| + \|y\| \;\equiv K,$$

kde konstanta K nezávisí na ε. Jelikož $Ax_\varepsilon + \varepsilon x_\varepsilon = y$, je

$$\|Ax_\varepsilon\| \leq \|y\| + \varepsilon\,\|x_\varepsilon\| \leq c,$$

kde konstanta c nezávisí na ε. Z předpokladu 3. plyne, že existuje konstanta d, která nezávisí na ε, tak, že platí $\|x_\varepsilon\| \leq d$. Protože prostor H je reflexivní, existuje slabě konvergující posloupnost s limitou $x \in H$ pro $\varepsilon \to 0$, tzn. platí

$$x_\varepsilon \;\rightharpoonup\; x \quad \text{pro} \quad \varepsilon \to 0.$$

Jelikož $Ax_\varepsilon + \varepsilon\, x_\varepsilon = y$ a množina $\{x_\varepsilon\}$ je omezená, je

$$Ax_\varepsilon \;\longrightarrow\; y \quad \text{pro} \quad \varepsilon \to 0.$$

Z nerovnosti

$$(Ax_\varepsilon - Av, x_\varepsilon - v) \geq 0 \quad \text{pro} \quad v \in H$$

limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ obdržíme

$$(y - Av, x - v) \geq 0 \quad \text{pro} \quad v \in H\,, \quad \text{tzn.} \quad (Av - y, v - x) \geq 0 \quad \text{pro} \quad v \in H.$$

Užitím Mintyho lemmatu dostaneme

$$(Ax - y, v - x) \geq 0 \quad \text{pro} \quad v \in H.$$

Protože množina $\{v - x :\; v \in H\}$ obsahuje nějakou kouli

$$B(x, \delta) := \{v \in H : \|v - x\| \leq \delta\},$$

plyne odtud rovnost $Ax = y$, což znamená ($y \in H$ bylo libovolné), že operátor A zobrazuje prostor H na sebe.

$\square$

2.3.2 Existenční věty v Banachových prostorech

V případě reflexivního Banachova prostoru X budeme vyštetřovat řešitelnost rovnice $Au = b$, kde $A : X \to X^*$, $b \in X^*$. Nejprve dokážeme základní větu o surjektivitě, která zobecňuje podobnou větu o surjektivitě obecně nelineárních zobrazení definovaných na konečně rozměrných prostorech, viz věta 1.4.2. Předpoklady níže uvedené základní věty jsou těžko ověřitelné a v následujících větách budou zaměněny jinými, snadněji ověřitelnými předpoklady, které souvisí s pojmem monotonnosti operátoru.

V těchto skriptech bude prezentován konstruktivní důkaz základní věty o surjektivitě, který je založen na Galerkinově aproximaci rovnice $Au = b$. Kvůli zjednodušení důkazu budeme předpokládat, že Banachův prostor X je separabilní. Tento předpoklad není pro existenci řešení podstatný. V případě neseparabilního prostoru je nutno Galerkinovou aproximaci definovat pro nespočetný systém konečně rozměrných prostorů a místo s posloupnostmi je nutné pracovat se sítěmi (usměrněnými soubory). Jak již bylo výše řečeno, předpoklad reflexivity je pro výklad podstatný. Nejprve definujme Galerkinovu aproximaci rovnice $Au = b$.

Definice 2.3.3 *Nechť X_n je konečně rozměrný podprostor v Banachově prostoru X. Pak Galerkinovou aproximací rovnice $Au = f$ na prostoru X_n rozumíme úlohu*

Najít $u_n \in X_n$ tak, aby

$$\langle Au_n, v\rangle = \langle b, v\rangle \quad \forall v \in X_n. \tag{2.36}$$

Rovnici (2.36) lze chápat jako rovnici

$$A_n u_n = b_n, \tag{2.37}$$

kde $A_n : X_n \to X_n^*$ je zúžení operátoru A na X_n a $A_n u_n$ a b_n jsou funkcionály zúžené z prostoru X na podprostor X_n.

Poznámka 2.3.1 Nechť $X_n = \mathcal{L}\{v_i,\, i = 1, \cdots, n\}$ je konečněrozměrný podprostor v Banachově prostoru X. Symbolem P_n označme operátor projekce z prostoru X do prostoru X_n (spojitý lineární operátor) a sestrojme k tomuto operátoru duální operátor $P_n^* : X_n^* \to X^*$,

$$\langle f_n, P_n x\rangle = \langle P_n^* f_n, x\rangle \qquad \forall\, f_n \in X_n^* \quad \text{a} \quad x \in X.$$

Položme

$$A_n = P_n^*\, A\, P_n \qquad \text{a} \qquad b_n = P_n^*\, b.$$

Pak úloha $A_n u_n = b_n$ je Galerkinovou aproximací úlohy $Au = b$ na prostoru X_n. Skutečně:

Podle definice Galerkinovy aproximace - najít $u_n \in X_n$ tak, aby

$$\langle Au_n, v\rangle = \langle b, v\rangle \quad \forall v \in X_n$$

je po úpravě ekvivalentní úloze - najít $u_n \in X_n$ tak, aby

$$\langle P_n^* A P_n u_n, v\rangle = \langle P_n^* b, v\rangle \quad \forall v \in X_n,$$

což je ekvivalentní úloze - najít $u_n \in X_n$ tak, aby $A_n u_n = b_n$.

Konstrukce projekce P_n.
K bázi v_i, $i = 1, \cdots, n$, v prostoru X_n sestrojme duální bázi $\{v_i^*\}$, $v_i^* \in X_n^*$, $i = 1, \cdots, n$, tzn. platí

$$\langle v_i^*, v_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

Pod stejným označeím v_i^* budeme rozumět spojité lineární rozšíření funkcionálu $v_i^* \in X_n^*$ na celý prostor X (Hahnova-Banachova věta). Definujme projekci P_n předpisem

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i^*, x\rangle\, v_i, \quad x \in X.$$

Zřejmě P_n je projekce a je to lineární a spojitý operátor z prostoru X do podprostoru X_n.

Na základě tohoto analytického vyjádření lze snadno dokázat, že operátor $A_n : X_n \to X_n^*$ má tytéž vlastnosti jako operátor $A : X \to X^*$ (např. A_n je monotónní resp. koercivní atd., je-li A monotónní resp. koercivní atd.)

Věta 2.3.10 (*Základní věta o surjektivitě*) *Nechť X je separabilní, reflexivní Banachův prostor a operátor $A : X \to X^*$ splňuje následující podmínky:*

- *je koercivní, t.j.*
$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = +\infty,$$
- *je spojitý na podprostorech konečné dimenze,*
- *je ohraničený, tzn. existuje funkce $M_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechna $u \in X$ platí*
$$\|Au\| \le M_1(\|u\|),$$
- *splňuje podmínku $(M)_0$, tzn. je splněna následující implikace*

$$\left\{ u_n \rightharpoonup u,\ \ Au_n \rightharpoonup b,\ \ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \longrightarrow \langle b, u\rangle \right\} \implies Au = b.$$

Pak operátor A je surjektivní, tzn. zobrazuje prostor X na prostor X^*. Jinými slovy, řešení rovnice $Au = b$ existuje pro každou pravou stranu $b \in X^*$. Navíc zobrazení A^{-1} (obecně mnohoznačné) je ohraničené, tzn. existuje funkce $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechna $u \in X$ platí

$$\|u\| \le N(\|Au\|).$$

Důkaz. Větu dokážeme v pěti krocích:

1. Sestrojíme posloupnost konečněrozměrných prostorů $\{X_n\}$, které limitně aproximují Banachův prostor X. Získáme tím posloupnost Galerkinových aproximací úlohy $Au = b$.

2. Pomocí věty 1.4.2 dokážeme existenci řešení úlohy (2.37) ($A_n u_n = b_n$). Obdržíme posloupnost přibližných řešení $\{u_n\}$, $u_n \in X_n$ úlohy $Au = b$.

3. Dokážeme, že z posloupnosti $\{u_n\}$ lze vybrat slabě konvergující podposloupnost u_{n_k} s limitou u tak, že platí $Au_{n_k} \rightharpoonup b$.

4. Dokážeme, že tato slabá limita u je řešením rovnice $Au = b$.

5. Nakonec dokážeme, že všechna řešení úlohy $Au = b$ s pevnou pravou stranou b jsou ohraničená.

---

1. Prostor X je separabilní a proto existuje spočetná hustá podmnožina, ze které lze vybrat lineárně nezávislou posloupnost $\{v_n\}$, $\|v_n\| = 1$, takovou, že její lineární obal je množina hustá v prostoru X. Položme

$$X_n := \mathcal{L}\{v_j\}_{j=1}^n \quad \text{a} \quad b_n := b\,|_{X_n^*}.$$

Z této konstrukce plyne, že posloupnost prostorů $\{X_n\}$ je limitně hustá v X , tzn. že pro každé $x \in X$ existuje $\{x_n\}$, $x_n \in X_n$ tak, že $x_n \to x$ v normě prostoru X. Protože $X_n \subset X$, je $X^* \subset X_n^*$, a proto $b \in X_n^*$. Galerkinova aproximace úlohy $Au = b$ na prostoru X_n je podle definice úloha

$$\text{najít} \quad u_n \in X_n \text{ tak, aby } A_n u_n = b_n.$$

2. Zvolme $x_n \in X_n^*$, pak existuje

$$\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^n,\ \alpha_i \in R \quad \text{tak, že} \quad x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Sestrojme zobrazení $g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ takto:

$$g(\alpha) := \{g_j\}_{j=1}^n, \quad g_j = \langle Ax_n, v_j \rangle\,, \quad \alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^n,\ \alpha_i \in R.$$

Z této konstrukce a z předpokladů věty ihned plyne, že zobrazení $g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ je spojité a koercivní. Položme

$$y := \{\langle b, v_j \rangle\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}_n.$$

Pak podle věty 1.4.2 existuje řešení soustavy rovnic $g(\alpha) = y$, $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^n,\ \alpha_i \in R$. Položme

$$u_n := \sum_{j=1}^n \alpha_j\, v_j.$$

Pak zřejmě $A_n u_n = b_n$.

3. Z koercivity operátoru A nejprve dokážeme ohraničenost množiny $\{u_n\}$. Z definice Galerkinovy aproximace je

$$\langle Au_n,\, u_n\rangle \;=\; \langle b,\, u_n\rangle$$

a tím

$$\frac{\langle Au_n,\, u_n\rangle}{\|u_n\|} \;\le\; \|b\|_{X^*}. \tag{2.38}$$

Jelikož operátor A je koercivní, existuje funkce $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ taková, že pro $r > 0$ platí

$$\frac{\langle Au,\, u\rangle}{\|u\|} \ge r \quad \text{pro} \quad u \in X, \quad \|u\| \ge N(r).$$

Odtud a z nerovnosti (2.38) obdržíme ohraničenost množiny $\{u_n\}$:

$$\|u_n\| \;\le\; N(\|b\|_{X^*}) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.39}$$

Z tohoto odhadu a z předpokladu ohraničenosti operátoru obdržíme ohraničenost posloupnosti $\{Au_n\}$:

$$\|Au_n\| \le\; M\,(N(\|b\|_{X^*})) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prostor X je reflexivní a tím i prostor X^* je reflexivní. Posloupnosti $\{u_n\}$ a $\{Au_n\}$ jsou ohraničené, a tudíž podle Eberlainovy-Šmuljanovy věty (viz věta 1.1.1) existuje vybraná posloupnost z $\{u_n\}$ taková, že slabě konverguje k nějakému prvku $u \in X$ a z této vybrané posloupnosti lze opět vybrat podposloupnost $\{u_{n_k}\}$ takovou, že $\{Au_{n_k}\}$ konverguje slabě k nějakému prvku $f \in X^*$:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u,\; u \in X \qquad \text{a} \qquad Au_{n_k} \rightharpoonup f,\; f \in X^*.$$

Nyní dokážeme, že $f = b$. Nechť $v \in X$ je libovolný prvek. Pak z konstrukce (viz 1. krok) existuje posloupnost $v_n \in X_n$ taková, že platí $v_n \to v$. Odtud a s využitím slabé konvergence posloupnosti $\{Au_{n_k}\}$ k prvku $f \in X^*$ a její ohraničenosti dostaneme

$$\langle Au_{n_k},\, v_{n_k}\rangle \;=\; \langle Au_{n_k},\, v_{n_k} - v\rangle \;+\; \langle Au_{n_k},\, v\rangle \;\longrightarrow\; \langle f,\, v\rangle\,.$$

Avšak z definice Galerkinovy aproximace je

$$\langle Au_n,\, v_n\rangle \;=\; \langle b,\, v_n\rangle \;\longrightarrow\; \langle b,\, v\rangle$$

a tím

$$\langle b,\, v\rangle \;=\; \langle f,\, v\rangle \quad \forall v \in X,$$

což znamená, že $b = f$.

4. V předcházejícím kroku jsme dokázali, že platí

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \qquad \text{a} \qquad Au_{n_k} \rightharpoonup b.$$

Z definice Galerkinovy aproximace a s využitím slabé konvergence posloupnosti $\{u_{n_k}\}$ k prvku u obdržíme

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k} \rangle = \langle b, u_{n_k} \rangle \longrightarrow \langle b, u \rangle .$$

Odtud a z předpokladu, že operátor A splňuje podmínku $(M)_0$ dostáváme rovnost $Au = b$.

5. Z odhadu (2.39) a z vlastností slabé konvergence (viz (1.1)) plyne poslední tvrzení věty.

□

Na základě vztahů uvedených v lemmatech 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 a 2.2.1 lze předpoklady v základní větě o surjektivitě (viz věta 2.3.10) nahradit silnějšími předpoklady. V následujícím důsledku jsou uvedeny některé její modifikace.

Důsledek 2.3.1 *Nechť X je separabilní, reflexivní Banachův prostor a operátor $A : X \to X^*$ splňuje jeden z níže uvedených předpokladů.*

(*i*) *A je koercivní, demispojitý, ohraničený a splňuje podmínku (S).*

(*ii*) *A je koercivní, pseudomonotónní a ohraničený.*

Pak platí tvrzení věty 2.3.10.

Cvičení 2.3.4 Dokažte obě tvrzení v důsledku 2.3.1.

♣

Podobně lze dokázat tvrzení věty 2.3.10 i za silnějšího předpokladu, že operátor A je koercivní, monotónní a radiálně spojitý. Připomeňme, že u monotónních operátorů je radiální spojitost ekvivalentní hemispojitosti a demispojitosti a spojitosti na konečněrozměrných prostorech - viz lemmata 2.1.2 a 2.1.3. Navíc nemusíme předpokládat, že operátor A je ohraničený. Zesílením předpokladů získáme i zesílení tvrzení věty 2.3.10.

Věta 2.3.11 (*Minty-Browder.*) *Nechť X je reflexivní Banachův prostor a operátor $A : X \to X^*$ je monotónní, radiálně spojitý a koercivní. Pak operátor A je surjektivní, tzn. zobrazuje prostor X na prostor X^*. Jinými slovy, řešení rovnice $Au = b$ existuje pro každou pravou stranu $b \in X^*$. Množina všech řešení této rovnice je uzavřená a konvexní. Navíc existuje funkce $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechna $u \in X$ platí*

$$\|u\| \leq N(\|Au\|) . \tag{2.40}$$

Jestliž operátor A je ryze monotónní, existuje právě jedno řešení rovnice $Au = b$ a to pro každou pravou stranu $b \in X^*$.

Důkaz. Větu dokážeme odděleně pro separabilní a neseparabilní prostory. Předpokládejme, že prostor X je separabilní. Z předpokladu monotonnosti a radiální spojitosti ihned s využitím lemmatu 2.1.3 a lemmatu 2.2.1 obdržíme, že operátor A je spojitý na konečněrozměrných podprostorech a splňuje podmínku $(M)_0$. Předpoklad ohraničenosti operátoru A byl v důkazu věty 2.3.10 použit pouze pro ohraničenost množiny Au_n, kde posloupnost u_n je ohraničená posloupnost Galerkinovských aproximací, tzn. existuje konstanta M_1 taková, že platí $\|u_n\| \leq M_1$. V případě monotónního operátoru A je podle lemmatu 2.1.3, tvrzení 2, množina Au_n ohraničená. Stačí v tomto tvrzení zvolit

$$K := \{u_n\} \qquad \text{a} \qquad M_2 = \|b\|_{X^*}\, M_1.$$

Skutečně, z definice Galerkinovy aproximace je pro $u \in K$

$$\langle Au\,,\, u\rangle = \langle b\,,\, u\rangle \leq \|b\|_{X^*}\|u\| \leq \|b\|_{X^*}\, M_1.$$

Tím jsou splněny všechny předpoklady Základní věty o surjektivitě (věta 2.3.10) a z ní plyne existence řešení rovnice $Au = b$ pro každou pravou stranu a odhad (2.40). Nyní dokážeme, že množina všech řešení této rovnice je konvexní a uzavřená. Nechť $Au_1 = Au_2 = b$ a $0 \leq t \leq 1$. Sestrojme $u = tu_1 + (1-t)u_2$. Pak z monotonnosti operátoru A obdržíme pro libovolné $v \in X$

$$\langle b - Av,\, u - v\rangle = t\,\langle Au_1 - Av,\, u_1 - v\rangle + (1-t)\,\langle Au_2 - Av,\, u_2 - v\rangle \geq 0.$$

Podle lematu 2.1.3, tvrzení 4e), je $Au = b$. Podobně se dokáže uzavřenost. Nechť $Au_n = b$ a $u_n \to u$. Pak z monotonnosti operátoru A obdržíme pro libovolné $v \in X$

$$\langle b - Av,\, u - v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n - Av,\, u_n - v\rangle \geq 0$$

a opět s využitím lemmatu 2.1.3, tvrzení 4e), obdržíme $Au = b$. Jednoznačnost řešení rovnice $Au = b$ v případě ryzí monotónního operátoru plyne bezprostředně z definice ryze monotonnosti.

V případě neseparabilního prostoru X použijeme Mintyho lemma (viz 2.1.3, tvrzení 4.) a větu o centrovaných systémech (viz věta 1.1.2) podobně jako při důkazu věty 2.3.6 (surjektivita monotónních operátorů v Hilbertově prostoru). Definujme operátor A_1 předpisem $A_1u = Au - b$, $u \in X$. Zřejmě je operátor A_1 monotónní a hemispojitý (a tím i radiálně spojitý a demispojitý). Pak pro každé $u \in X$ podle lemmatu Mintyho (viz 2.1.3, tvrzení 4.) platí ekvivalence

$$\langle A_1u, v - u\rangle \geq 0 \;\forall v \in X \quad \Longleftrightarrow \quad \langle A_1v, v - u\rangle \geq 0 \;\forall v \in X.$$

Označme

$$U(v) = \{u \in X,\ \langle A_1v - Av,\, v - u\rangle \geq 0\}, \quad v \in X,$$

pak je

$$U_X = \bigcap_{v\in X} U(v)$$

množina těch $u \in X$, které splňují druhou část uvedené ekvivalence a proto i její první část. A tím je $A_1 u = 0$ (viz lemma 2.1.3, tvrzení e)) pro všechna $u \in U_X$. Z koercivity podobně jako v důkazu věty 2.3.10, lze dokázat, že existuje funkce $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechna $u \in X$ platí

$$\|u\| \le N\left(\|Au\|\right). \tag{2.41}$$

Označme

$$r = N\left(\|b\|\right).$$

Pak zřejmě každé řešení (pokud existuje) leží v kouli $B_r = \{x \in X : \|x\| \le r\}$. Poloprostory $U(v)$, $v \in X$ jsou zřejmě konvexní a uzavřené, a proto množiny $U_r(v) := U(v) \cap B_r$ jsou také uzavřené a konvexní. Z vlastnosti konvexních množin plyne jejich uzavřenost ve slabé topologii, tzn. jsou slabě uzavřené. Nyní stačí položit ve větě 1.1.2 $\mathcal{T} := B_r$ (což je kompaktní topologický prostor ve slabé topologií, protože množina B_r je slabě kompaktní) a

$$\{U_i\} \equiv \{U_r(v),\ v \in X\}.$$

Jestliže dokážeme, že množina $\{U_r(v),\ v \in X\}$ má vlastnost konečného průniku, pak již z věty 1.1.2 plyne, že množina U_X je neprázdná, což znamená, že existuje řešení úlohy $Au = b$. Zvolme $v_1, \cdots, v_n \in X$ a sestrojme prostor

$$X_n = \mathcal{L}(v_1, \cdots, v_n).$$

Podobně jako v první části důkazu existuje řešení u_n Galerkinovy aproximace $Au = b$ na podprostoru X_n. Tím také

$$\|u_n\| \le N\left(\|b|_{X_n}\|\right) \le r$$

a z definice Galerkinovy aproximace prvek u_n splňuje rovnost

$$\langle A_1 u_n, v - u_n \rangle \;=\; 0 \ \forall v \in X_n.$$

Z monotonnosti A_1 (resp. aplikací Mintyho lemmatu (viz 2.1.3, tvrzení 4.) pro prostor X_n) obdržíme

$$\langle A_1 v, v - u_n \rangle \;=\; \langle A_1 v - A_1 u_n, v - u_n \rangle \;+\; \langle A_1 u_n, v - u_n \rangle \;\ge 0 \quad \forall v \in X_n.$$

Odtud plyne, že $u_n \in U_r(v_i)\, \forall i = 1, \cdots, n$, a proto průnik

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_r(v_i) \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} U(v_i) \bigcap B_r$$

je neprázdný, jelikož obsahuje aspoň prvek u_n. Odtud již plyne, že množina $\{U_r(v),\ v \in X\}$ má vlastnost konečného průniku a první část tvrzení věty včetně odhadu (2.40) je dokázána. Protože všechny množiny $U(v)$ jsou uzavřené a konvexní, je také jejich průnik U_X uzavřená a konvexní množina, což znamená, že množina všech řešení úlohy $Au = b$ je konvexní a uzavřená. Jednoznačnost řešení v případě ryze monotónního operátoru plyne přímo z definice ryzí monotonnosti. □

Cvičení 2.3.5 Dokažte tvrzení věty 2.3.11 v případě neseparabilního prostoru X bez použití věty o centrovaných systémech (viz věta 1.1.2) a to podobně jako při důkazu věty 2.3.6 (surjektivita monotónních operátorů v Hilbertově prostoru).

♣

Předpoklad koercivity v Základní větě o surjektivitě (viz věta 2.3.10) lze vypustit, pokud zajistíme existenci ohraničené posloupnosti řešení Galerkinových aproximací (tzn. konečně rozměrných aproximací úlohy $Au = b$). Ohraničenost lze např. zajistit pomocí věty 1.4.1. Jako příklad si uvedeme následující větu, jejíž důkaz ponecháme jako cvičení čtenáři.

Věta 2.3.12 *Nechť X je separabilní, reflexivní Banachův prostor, $b \in X^*$ a operátor $A : X \to X^*$ splňuje následující podmínky:*

- *existuje konstanta $R > 0$ taková že platí*
$$\langle Au - b, u\rangle \,\geq\, 0 \qquad \forall u \in X,\ \|u\| \,=\, R,$$
- *je demispojitý,*
- *je ohraničený, tzn. existuje funkce $M_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechna $u \in X$ platí*
$$\|Au\| \leq M_1\left(\|u\|\right),$$
- *splňuje podmínku $(M)_0$, tzn. je splněna následující implikace*
$$\left\{u_n \rightharpoonup u,\ \ Au_n \rightharpoonup b,\ \limsup_{n\to\infty}\,\langle Au_n,\, u_n\rangle \,\longrightarrow\, \langle b,\, u\rangle\right\} \implies Au = b.$$

Pak řešení rovnice $Au = b$ existuje.

Cvičení 2.3.6 Dokažte větu 2.3.12.

♣

S využitím Základní věty o surjektivitě (viz věta 2.3.10) lze dokázat surjektivitu i pro nemonotónní operátory. Jako příklad uvedeme následující větu důležitou v teorii parciálních diferenciálních rovnic.

Věta 2.3.13 *Nechť X je reflexivní a separabilní Banachův prostor a operátor $A : X \to X^*$ je koercivní a platí rozklad*

$$A \,=\, B \,+\, T,$$

přičemž operátor $B : X \to X^*$ je monotónní, radiálně spojitý a operátor $T : X \to X^*$ je slabě spojitý. Jestliže funkce $\varphi(x) := \langle Tx,\, x\rangle$ je slabě zdola polospojitá na prostoru X (viz definice 1.1.5 se slabou topologií v prostoru X), pak rovnice $Au = b$ je řešitelná pro každou pravou stranu $b \in X^*$ a navíc množina všech řešení této rovnice je slabě uzavřená. □

Cvičení 2.3.7 Dokažte větu 2.3.13.
Návod. Nejprve dokažte, že operátor B splňuje podmínku (M) a tím také podmínku $(M)_0$ (viz lemma 2.2.1):
Předpokládejte, že jsou splněny předpoklady v podmínce (M) pro operátor A. Z předpokladů věty ukažte, že operátor B splňuje podmínku (M) (s použitím lemmatu 2.1.3). Pak již snadno dokážete, že i operátor A tuto podmínku splňuje. Nyní stačí použít Základní větu o surjektivitě (viz věta 2.3.10) a dokázat slabou uzavřenost množiny řešení pro každou pravou stranu.

♣

Další věty o surjektivitě, jednoznačnosti a odhadech chyb Galerkinovy aproximace lze nalézt v literatuře, např v knihách [6], [11], [14] a dalších. V knize [11] jsou studovány otázky související se surjektivitou pseudomonotónních, semimonotónních, maximálně monotónních operátorů a dalších tříd splňující podmínky analogické výše uvedeným podmínkám typu (M) a (S) a to obecně pro mnohoznačné zobrazení. Jsou v ní rozebrány aplikace této teorie na integrální a diferenciální rovnice a také nerovnice. Pro ilustraci uvedeme bez důkazu z této knihy některá tvrzení:

- Nechť operátor A je pseudomonotónní, ohraničený a koercivní. Pak je surjektivní. Poznamenejme, že podle 2.2.1 je operátor A demispojitý a splňuje podmínku (M) a tím i $(M)_0$.
- Je-li reflexivní Banachův prostor X striktně konvexní a operátor A je maximálně monotónní a koercivní, pak je již surjektivní.
- Nechť $T : \mathcal{D}(T) \to X^*$ je ohraničený, pseudomonotónní operátor z reflexivního Banachova prostoru X do prostoru X^* s definičním oborem $\mathcal{D}(T)$, přičemž $\mathcal{D}(T)$ je konvexní množina. Nechť K je uzavřená konvexní podmnožina $\mathcal{D}(T)$. Jestliže T je koercivní vzhledem k $x_0 \in K$, tzn. platí
$$\frac{\langle Tx\,,\, y - x_0\rangle}{\|x\|} \longrightarrow \infty \quad \text{pro} \quad \|x\| \longrightarrow \infty,$$
pak existuje alespoň jedno řešení variační nerovnosti ($f \in X^*$)
$$x \in K, \quad \langle Tx - f\,,\, y - x\rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in K.$$

Základním prostředkem pro studium existence slabého řešení okrajových úloh je jednak věta Browderova a jednak následující věta Lerayova-Lionsova. Její důkaz je technicky náročnější a lze jej najít v původní práci autorů (viz článek [8]).

Věta 2.3.14 *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Budiž T operátor definovaný na prostoru X s hodnotami v prostoru X^*. Předpokládejme, že jsou splněny tyto podmínky:*

(a) *operátor T je omezený;*

(*b*) *operátor T je demispojitý;*

(*c*) *operátor T je koercivní.*

Nechť existuje ohraničené zobrazení ϕ z prostoru $X \times X$ do prostoru X^* takové, že platí:

(*d*) *pro každé $u \in X$ je*

$$\phi(u,u) = Tu;$$

(*e*) *pro všechna $u, v, h \in X$ a libovolnou posloupnost reálných čísel $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $t_n \to 0$, platí*

$$\phi(u + t_n h, w) \rightharpoonup \phi(u, w);$$

(*f*) *pro všechna $u, w \in X$ je splněna tzv. podmínka monotonie v hlavní části*

$$\langle \phi(u,u) - \phi(w,u)\,,\, u - w \rangle \;\geq\; 0;$$

(*g*) *jestliže $u_n \rightharpoonup u$ a $\lim_{n\to\infty} \langle \phi(u_n,u_n) - \phi(u,u_n)\,,\, u_n - u \rangle = 0$, pak pro libovolné $w \in X$ platí*

$$\phi(w,u_n) \;\to\; \phi(w,u);$$

(*h*) *jestliže $w \in X$, $u_n \rightharpoonup u$, $\phi(w,u_n) \rightharpoonup z$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} \langle \phi(w,u_n)\,,\, u_n \rangle \;=\; \langle z\, u \rangle\,.$$

Potom rovnice $Tu = f$ má pro každé $f \in X^*$ alespoň jedno řešení $u \in X$.

2.4 Numerické metody

V tomto odstavci pojednáme o základních numerických metodách řešení operátorových rovnic s monotónními operátory. K nim patří metoda Galerkinova, která již byla použita v důkazech existence řešení, a iterační metody. Omezíme se pouze na případy, kdy řešení operátorových rovnic je jediné a existuje pro každou pravou stranu. K odhadu chyby budeme potřebovat poněkud silnější předpoklady.

2.4.1 Galerkinova metoda

V Základní větě o surjektivitě 2.3.10 bylo dokázána existence vybrané posloupnosti řešení Galerkinových aproximací, která slabě konverguje k řešení úlohy $Au = b$. Za určitých silnějších předpokladů lze dokázat i silnou konvergenci popřípadě odhadnout chybu aproximace. Výsledky týkající se konvergence Galerkinových aproximací shrneme do následující věty.

Věta 2.4.1 *Nechť X je reflexivní a separabilní Banachův prostor a posloupnost konečně rozměrných podprostorů $X_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, je limitně hustá v prostoru X, tzn., že pro libovolné $x \in X$ existuje posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in X_n$ tak, že platí $\|x_n - x\| \to 0$ pro $n \to \infty$. K zadané úloze $Au = b$, kde $A : X \to X^*$, $b \in X^*$, sestrojme Galerkinovu aproximaci $A_n u_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}$, na prostoru X_n, t.j.*

$$A_n = P_n^* \, A \, P_n : \, X_n \to X_n^* \qquad \text{a} \qquad b_n = P_n^* \, b$$

a P_n je vnoření prostoru X_n do prostoru X. Pak platí:

1. *Je-li operátor $A : X \to X^*$ ryze monotónní, radiálně spojitý a koercivní, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje jediné řešení u_n Galerkinovy aproximace úlohy $Au = b$ na prostoru X_n a posloupnost $\{u_n\}$ konverguje slabě k jedinému řešení u této úlohy. Inverzní operátor $A^{-1} : X^* \to X$ definovaný předpisem $A^{-1}b = u$, $b \in X^*$, je ryze monotónní, ohraničený a demispojitý.*

2. *Je-li operátor $A : X \to X^*$ ryze monotónní, radiálně spojitý, koercivní a splňuje podmínku (S), tzn. je splněna následující implikace*

$$[u_n \rightharpoonup u, \; \langle Au_n - Au, u_n - u \rangle \to 0] \quad \Longrightarrow \quad u_n \to u,$$

   pak posloupnost $\{u_n\}$ konverguje silně (v normě prostoru X) k jedinému řešení u úlohy $Au = b$. Inverzní operátor A^{-1} je ryze monotónní, ohraničený a spojitý.

3. *Je-li operátor A silně monotónní a Lipschitzovsky spojitý, tzn. existují kladná čísla $M > 0$ a $L > 0$ taková, že pro každé $u, v \in X$ platí*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \, \geq \, M \, \|u - v\|^2 \quad \text{a} \quad \|Au - Av\| \, \leq \, L \, \|u - v\|,$$

   pak pro chybu Galerkinovy aproximace u_n od přesného řešení u úlohy $Au = b$ platí odhad

$$\|u_n - u\| \, \leq \, \frac{L}{M} \inf_{v \in X_n} \|v - u_n\|.$$

   Je-li A silně monotónní, pak A^{-1} je Lipschitzovsky spojitý. Jestliže operátor A je navíc Lipschitzovsky spojitý, pak inverzní operátor A^{-1} je již silně monotónní a Lipschitzovsky spojitý.

Důkaz. Jelikož P_n je lineární operátor, pro který platí $P_n u = u$ pro všechna $u \in X_n \subset X$, přenáší se všechny vlastnosti operátoru A na vlastnosti operátoru A_n na prostoru X_n.

1. Ve větě 2.3.11 byla dokázána existence řešení u_n Galerkinovy aproximace úlohy $Au = b$ na prostoru X_n. Jednoznačnost plyne ihned z ryzí monotonnosti operátoru A_n:

$$\begin{aligned} \langle A_n u - A_n v, u - v \rangle \quad &= \quad \langle AP_n u - AP_n v, P_n u - P_n v \rangle = \\ &= \quad \langle Au - Av, u - v \rangle \, > \, 0 \quad \forall u \neq v, \;\; u, v \in X_n. \end{aligned}$$

Protože posloupnost u_n je ohraničená (viz (2.40)) a řešení u úlohy $Au = b$ je jediné, z reflexivity prostoru X a z důkazu věty 2.3.10 vyplývá, že každá slabě konvergující podposloupnost $\{u_{n_k}\}$ má za slabou limitu prvek u a tím z vlastností slabě konvergujících posloupností v reflexivním prostoru také celá posloupnost $\{u_n\}$ slabě konverguje k prvku u.

Operátor A^{-1} je ryze monotónní: Zvolme $x^* \neq x^* \in X^*$ a označme $x = A^{-1}x^*$ a $y = A^{-1}y^*$. Pak

$$\left\langle x^* - y^* , A^{-1}x^* - A^{-1}y^* \right\rangle = \langle Ax - Ay , x - y \rangle > 0.$$

Operátor A^{-1} je ohraničený: Nechť $Au = b$ a $\|b\| \leq M$. Jelikož operátor A je koercivní, existuje funkce $\nu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ taková, že platí

$$\lim_{r \to +\infty} \nu(r) = +\infty \qquad \text{a} \qquad \langle Av, v \rangle \geq \nu(\|v\|)\|v\| \quad \forall v \in X$$

a tím

$$\nu(\|u\|) \leq \|b\|.$$

Jelikož $\nu(r) \to \infty$ pro $r \to \infty$, existuje konstanta K, která závisí na M tak, že platí

$$\|u\| = \|A^{-1}b\| \leq K(M), \qquad \|b\| \leq M.$$

Operátor A^{-1} je demispojitý: Podle lematu 2.1.3 monotónní operátor je radiálně spojitý (resp. demispojitý), právě když je splněna implikace

$$\langle b_1 - Av, u_1 - v \rangle \geq 0 \ \forall v \in X \quad \Longrightarrow \quad Au_1 = b_1,\ b_1 \in X^*.$$

Dosaďme $b_1 := b$ a $u_1 := u$. Jelikož monotónní operátor A je podle předpokladu radiálně spojitý, platí implikace

$$\langle b - Av, u - v \rangle \geq 0 \ \forall v \in X \quad \Longrightarrow \quad Au = b.$$

Avšak

$$0 \leq \langle b - Av, u - v \rangle = \left\langle b - g, u - A^{-1}g \right\rangle \ \forall g = Av \in X^* \ \Rightarrow \ u = A^{-1}b,$$

což znamená, že monotónní operátor A^{-1} je podle lematu 2.1.3 radiálně spojitý.

2. Podle dokázáného tvrzení v bodě 1., posloupnost $\{u_n\}$ slabě konverguje k prvku u. Posloupnost $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$, je limitně hustá v prostoru X a tím existuje posloupnost $\{v_n\}$, $v_n \in X_n$, taková, že platí $v_n \to u$. Z definice Galerkinovy aproximace obdržíme

$$\begin{aligned} \langle Au_n - Au, u_n - v_n \rangle &= \langle Au_n, u_n - v_n \rangle - \langle b, u_n - v_n \rangle = \\ &= \langle b, u_n - v_n \rangle - \langle b, u_n - v_n \rangle = 0. \end{aligned} \qquad (2.42)$$

Jelikož množina $\{Au_n\}$ je ohraničená (viz důkaz věty 2.3.11), obdržíme z této rovnosti splnění předpokladu v podmínce (S):

$$\begin{aligned} \langle Au_n - Au, u_n - u \rangle &= \langle Au_n - Au, u_n - v_n \rangle + \langle Au_n - Au, v_n - u \rangle \leq \\ &\leq C_n \|v_n - u\|, \end{aligned}$$

kde $C_n = (\|Au_n\| + \|Au\|) \le C < +\infty$ a $0 \le \langle Au_n - Au, u_n - u\rangle$. Proto

$$\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \longrightarrow 0.$$

Jelikož operátor A splňuje podmínku (S), konverguje posloupnost $\{u_n\}$ silně k řešení u úlohy $Au = b$.
Operátor A^{-1} je spojitý: Nechť $b_n \to b,\ b_n, b \in X^*$.
Označme $u_n = A^{-1}b_n$ a $u = A^{-1}b$. Podle dokázaného tvrzení v předcházejícím bodě je monotónní operátor A^{-1} radiálně spojitý a tím také demispojitý. Odtud plyne, že posloupnost $\{u_n = A^{-1}b_n\}$ konverguje slabě k bodu $u = A^{-1}b$ a proto je omezená. Z konvergence $b_n \to b$ obdržíme

$$\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle = \langle b_n - b, u_n - u\rangle \longrightarrow 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Operátor A splňuje podmínku (S) a tím

$$\|A^{-1}b_n - A^{-1}b\| = \|u_n - u\| \longrightarrow 0,$$

což znamená, že operátor A^{-1} je spojitý.

3. Jelikož operátor A je silně monotónní, splňuje podle lemmatu 2.1.1 podmínku (S) a je ryze monotónní. Tím podle tvrzení v bodě 2. platí: $\|u_n - u\| \to 0$ pro $n \to \infty$. Pro libovolné $v_n \in X_n$ je (viz rovnost (2.42))

$$0 = \langle Au_n - Au, u_n - v_n\rangle = \langle Au_n - Au\,,\, u_n - u\rangle + \langle Au_n - Au\,,\, u - v_n\rangle\,.$$

Z této rovnosti s využitím předpokladů obdržíme

$$M\,\|u - v\|^2 \le \langle Au_n - Au\,,\, u_n - u\rangle \le \|u - v_n\|\,L\,\|u_n - u\|$$

a odtud plyne odhad

$$\|u_n - u\| \le \frac{L}{M}\,\|v_n - u_n\| \quad v_n \in X_n.$$

Inverzní operátor A^{-1} je Lipschitzovsky spojitý: Tuto vlastnost obdržíme pouze z předpokladu silné monotonnosti operátoru A:
Pro libovolné $b, g \in X^*$ a pro $u = A^{-1}b$ a $v = A^{-1}g$ je

$$\begin{aligned} \|b - g\|\,\|u - v\| &\ge \langle Au - Av\,,\, u - v\rangle \ge M\|u - v\|^2 = \\ &= M\|A^{-1}b - A^{-1}g\|\,\|u - v\|. \end{aligned}$$

Odtud již plyne Lipschitzovská spojitost operátoru A^{-1}:

$$\|A^{-1}b - A^{-1}g\| \le \frac{1}{M}\,\|b - g\|.$$

Vlastnost, že inverzní operátor A^{-1} je silně monotónní obdržíme z předpokladu Lipschitzovské spojitosti a silné monotonnosti operátoru A:

$$\begin{aligned} \|b - g\|\,\|A^{-1}b - A^{-1}g\| &= \langle Au - Av\,,\, u - v\rangle \ge M\|u - v\|^2 \le \\ &\le \frac{M}{L^2}\,\|Au - Av\|^2 = \frac{M}{L^2}\,\|b - gv\|^2. \end{aligned}$$

Cvičení 2.4.1 Nechť X je reflexivní a separabilní Banachův prostor a posloupnost konečně rozměrných podprostorů $X_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$ je limitně hustá v prostoru X. Jestliže operátor $A : X \to X^*$ je stejnoměrně monotónní, tzn. existuje rostoucí funkce $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ taková, že $a(0) = 0$ a pro každé $u, v \in X$ platí

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq a(\|u - v\|)\, \|u - v\|,$$

pak operátor A^{-1} je spojitý. Dokažte.

Předpokládejme, že pro funkci $a(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, v definici stejnoměrné monotonnosti platí odhad

$$a(t) \geq t^{1+\alpha} \qquad \text{pro} \quad 0 < t \leq t_0, \quad t_0 > 0, \qquad \text{a} \qquad \alpha > 0$$

a operátor A je navíc Lipschitzovsky spojitý, pak existuje n_0 tak, že pro chybu Galerkinovy aproximace u_n (na prostoru X_n) od přesného řešení u úlohy $Au = b$ platí odhad

$$\|u_n - u\| \leq \left[\frac{L}{M} \inf_{v \in X_n} \|v - u_n\|\right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \text{pro} \qquad n \geq n_0.$$

Dokažte.

♣

2.4.2 Iterační metody

V tomto odstavci budou uvedeny tři iterační metody řešení rovnice $Au = b$, kde $A : X \to X^*$ je monotónní operátor a X je reálný, separabilní Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$. Studovaná rovnice je za určitých předpokladů ekvivalentní úloze na pevný bod operátoru T_t,

$$T_t x = x - tBx, \quad Bx = \mathcal{U}^{-1}(Ax - b), \quad x \in X,$$

t je dostatečně malé nezáporné číslo a $\mathcal{U} : X \to X^*$ je dualizační zobrazení pro prostor X. Připomeňme z 1. kapitoly, že $\mathcal{U}$ izometricky a izomorfně zobrazuje prostor X na prostor X^* a pro každé $x \in X$ a $y \in X$ platí

$$\|\mathcal{U}(x)\| = \|x\|, \qquad \langle \mathcal{U}x, z\rangle = (z, x), \quad z \in X.$$

Poznamenejme, že $\mathcal{U} \equiv \mathcal{R}^{-1}$, kde $R : X^* \to X$ je Rieszův operátor definovaný v Rieszově-Fréchetově větě o obecném tvaru spojitého lineárního funkcionálu na Hilbertově prostoru.

Metoda postupných aproximací pro nalezení tohoto pevného bodu je iterační metodou řešení studované úlohy $Au = b$. Tuto myšlenku konstrukce iterační metody řešení tohoto problému nelze obecně rozšířit pro případ obecného reflexivního prostoru. V tomto případě nemusí být dualizační zobrazení jednoznačné, je obecně nelineární a vlastnosti operátoru A (monotonnost a j.) se nepřenášejí na výše definovaný operátor B jako v případě Hilbertova prostoru. To má za následek, že operátor T_t nemusí být kontrahující pro jakékoliv nezáporné reálné t. Avšak níže studované iterační metody lze rozšířit i na případy monotónních potenciálních operátorů v striktně konvexních Banachových prostorech X a X^*. Podrobnosti budou uvedeny v následující kapitole. Důkazy konvergence těchto metod budou ponechány čtenáři k procvičení pojmů z výše uvedené teorie.

Věta 2.4.2 *Nechť X je reálný, separabilní Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)$. Předpokládejme, že operátor $A : X \to X^*$ splňuje následující předpoklady:*

1. *Operátor A je silně monotónní, tzn. existuje konstanta $M > 0$ taková, že pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq M\|x - y\|^2.$$

2. *Operátor A je Lipschitzovsky spojitý, tzn. existuje konstanta $L > 0$ taková, že pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \leq L\|x - y\|^2.$$

Zvolme $b \in X^*$. Pro libovolné $v_0 \in X$, $t \in (0, 2M/L^2)$ sestrojme posloupnost $\{v_i\}$ definovanou předpisem

$$\mathcal{U}(v_i) = \mathcal{U}(v_{i-1}) - t\,(Av_{i-1} - b), \quad i = 1, \cdots,$$

Pak posloupnost $\{v_i\}$ konverguje k jedinému řešení u úlohy $Au = b$ s chybou

$$\|v_i - u\| \leq \frac{k^i t}{1-k}\,\|Av_0 - b\|,$$

kde

$$k = k(t)(1 - 2Mt + L^2t^2)^{1/2} < 1.$$

□

Cvičení 2.4.2 Dokažte větu 2.4.2.
Návod. Nejprve ukažte, že úloha $Au = b$ je ekvivalentní nalezení pevného bodu operátoru T_t:

$$Au = b \quad \Longleftrightarrow \quad u = T_t u, \qquad T_t x = x - t\mathcal{U}^{-1}(Ax - b)\ \forall x \in X.$$

Podobně jako v důkaze věty 2.3.1 dokažte, že operátor T_t je kontrahující:

$$\|T_t x - T_t y\|^2 \leq (k(t)\|x - y\|)^2 \quad \forall x, y \in X$$

a tím podle Banachovy věty o pevném bodu (viz věta 1.3.7) existuje jediný pevný bod u operátoru T_t, k němuž konverguje posloupnost postupných aproximací u_i, $u_i = T_t u_{i-1}$, kde u_0 je libovolně zvolený prvek z prostoru X. K dokončení důkazu věty stačí položit $v_i = u_i$ a použít Banachovu větu. ♣

Cvičení 2.4.3 Nechť jsou splněny předpoklady věty 2.4.2. Ukažte, že funkce $k = k(t)$ nabývá svého minima na intervalu $(0, 2M/L^2)$ v bodě $t = t_0$, kde

$$t_0 = \frac{M}{L^2} \qquad \text{a} \quad k_0 \equiv k(t_0) = \left(1 - (\frac{M}{L})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zvolme $t = t_0$ a $v_0 = 0$. Dokažte, že pro všechna $i \in \mathbb{N}$ je

$$\|v_i\| \leq \frac{3}{M}\,\|A0 - b\|.$$

Návod. Ukažte, že platí

$$\|v_i\| \leq \|v_i - u\| + \|u\| \leq \frac{t_0}{1-k_0}\|A0 - b\| + \|u\| \leq \frac{2}{M}\|A0 - b\| + \|u\|$$

a

$$M\|u\|^2 \leq \langle Au - A0, u\rangle \leq \|A0 - b\|\,\|u\|, \ \ Au = b.$$

Odtud plyne, že předpoklady věty lze zeslabit tak, aby operátor A splňoval uvedené nerovnosti v bodě 1. a 2. pro x a y pouze v kouli

$$K = \{v \in X;\ \|v\| \leq \frac{3}{M}\,\|A0 - b\|\}.$$

♣

Nechť jsou splněny předpoklady věty 2.4.2 a nechť posloupnost $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, konečně rozměrných podprostorů je limitně hustá v prostoru X, tzn., že pro libovolné $x \in X$ existuje posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in X_n$ tak, že platí $\|x_n - x\| \to 0$ pro $n \to \infty$. K zadané úloze $Au = b$, kde $A : X \to X^*$ a $b \in X^*$ sestrojme Galerkinovu aproximaci $A_n u_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}$, na prostoru X_n (viz věta 2.4.1), t.j.

$$A_n = P_n^*\,A\,P_n : X_n \to X_n^* \qquad \text{a} \qquad b_n = P_n^*\,b$$

a P_n je vnoření prostoru X_n do prostoru X. K sestrojení Galerkinovy aproximace je zapotřebí řešit soustavu obecně nelineárních rovnic $A_n u_n = b_n$ na prostoru X_n.

Kombinovaná Galerkinova a iterační metoda spočívá v tom, že aproximaci $u_n \in X_n$ budeme konstruovat pomocí věty 2.4.2 aplikované k operátorové rovnici $A_n u_n = b_n$ na prostoru X_n. Tímto způsobem řešení nelineárních rovnic $A_n u_n = b_n$ je pro každé $n \in \mathbb{N}$ převedeno na řešení soustav lineárních algebraických rovnic. O konvergenci této metody pojednává následující tvrzení, jehož důkaz také ponecháme čtenáři jako cvičení.

Věta 2.4.3 *Za předpokladu věty 2.4.2 existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ jediné řešení u_n úlohy $A_n u_n = b_n$ na prostoru X_n. Pro libovolné $v_{n,0} \in X$, $t \in (0, 2M/L^2)$ sestrojme posloupnost $\{v_{n,i}\}_i$ definovanou předpisem*

$$\mathcal{U}_n(v_{n,i}) = \mathcal{U}_n(v_{n,i-1}) - t\,(A_n v_{n,i-1} - b_n), \quad i = 1, \cdots,$$

kde $\mathcal{U}_n : X_n \to X_n^*$ *je dualizační zobrazení pro prostor* X_n. *Pak posloupnost* $\{v_{n,i}\}$ *konverguje pro* $i \to \infty$ *k jedinému řešení* u_n *úlohy* $A_n u_n = b_n$ *s chybou*

$$\|v_{n,i} - u_n\| \leq \frac{k^i t}{1-k} \|A_n v_{n,0} - b_n\| \leq \frac{k^i t}{1-k} \|A v_{n,0} - b\|$$

kde

$$k = k(t) = (1 - 2Mt + L^2 t^2)^{1/2} < 1.$$

□

Cvičení 2.4.4 Dokažte větu 2.4.3.
Návod. Ověřte, že operátor A_n je pro každé $n \in \mathbb{N}$ silně monotónní (s tou samou konstantou M jako u operátoru A), tzn. platí

$$\langle A_n x - A_n y, x - y\rangle \geq M\|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in X_n$$

a je Lipschitzovsky spojitý, tzn.

$$\langle A_n x - A_n y, x - y\rangle \leq L\|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in X_n.$$

Aplikujte větu 2.4.2 pro operátor $A_n : X_n \to X_n^*$.

♣

Na závěr tohoto odstavce uvedeme tzv. **projekčně-iterační metodu**, která spočívá v aplikaci Galerkinovy a výše uvedené iterační metody, avšak pro každé $n \in \mathbb{N}$ se aplikuje pouze jeden krok této iterační metody, zvětší se n o jednotku a získaná aproximace se použije jako počáteční hodnota pro následující krok iterační metody. K důkazu konvergence popsané metody je zapotřebí následující tvrzení.

Lemma 2.4.1 *Nechť* Z *je Banachův prostor s normou* $\|\cdot\|$, $\{Z_n\}$ *je rostoucí posloupnost uzavřených podprostorů v* Z,

$$Z_1 \subset Z_2 \subset \cdots Z_n \subset \cdots,$$

a nechť posloupnost operátorů $\{U_n\}$, $U_n : Z_n \to Z_n$, *je stejně kontrahující v tomto smyslu: existuje konstanta* $k \in (0,1)$ *taková, že platí*

$$\|U_n u - U_n v\| \leq k\|u - v\| \quad \forall u, v \in Z_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Předpokládejme, že posloupnost pevných bodů $\{u_n\}$, $U_n u_n = u_n$, *konverguje v normě prostoru* Z *k prvku* $u \in Z$. *Pak pro libovolné* $v_0 \in Z$ *posloupnost* $\{v_i\}$ *sestrojená podle předpisu*

$$v_i = U_i v_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

také konverguje k u.

Důkaz. Jelikož $U_n u_n = u_n$, je

$$\begin{aligned}\|v_n - u_n\| &= \|U_n v_{n-1} - U_n u_n\| \le k\|v_{n-1} - u_{n-1}\| + k\|u_{n-1} - u_n\| \\ &\le k^2\|v_{n-2} - u_{n-2}\| + k^2\|u_{n-2} - u_{n-1}\| + k\|u_{n-1} - u_n\| \\ &\le \cdots \le k^n\|v_0 - u_1\| + s_{n-1}, \qquad (2.43)\end{aligned}$$

kde

$$s_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} k^{n-i}\, \|u_{i+1} - u_i\|.$$

Nejprve dokážeme, že $s_n \to 0$ pro $n \to \infty$. K zjednodušení zápisu označme $a_i = \|u_{i+1} - u_i\|$. Pak

$$s_i = \sum_{i=1}^{n} k^{n+1-i}\, a_i.$$

Jelikož $u_n \to u$, existuje konstanta $C > 0$ tak, že $\|u_i\| \le C$ $\forall i \in \mathbb{N}$ a $a_i \to 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a sestrojme n_0 a n_1 tak, aby platilo

$$a_i \le \frac{\varepsilon}{2}(1-k) \quad \forall i \ge n_0 \quad \text{a} \quad n_0 k^{1+n-n_0}\, C \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \ge n_1.$$

Pak pro $n \ge \max(n_0, n_1)$ je

$$s_n = \sum_{i=1}^{n_0} k^{n+1-i}\, a_i + \sum_{i=n_0+1}^{n} k^{n+1-i}\, a_i \le n_0 k^{1+n-n_0}\, C + \frac{\varepsilon}{2}(1-k)k^{n-n_0}\frac{1}{1-k} \le \varepsilon.$$

Odtud plyne $s_n \to 0$. Z nerovnosti (2.43) obdržíme $\|v_n - u_n\| \to 0$ a z trojúhelnikové nerovnosti tvrzení věty:

$$\|v_n - u\| \le \|v_n - u_n\| + \|u_n - u\| \;\to\; 0.$$

□

Věta 2.4.4 *Za předpokladu věty 2.4.2 a s označením jako ve větě 2.4.3 projekčně-iterační posloupnost w_n sestrojená podle předpisu*

$$\mathcal{U}_n(w_n) = \mathcal{U}_n(w_{n-1}) - t\,(A_n w_{n-1} - b_n), \quad n = 1, \cdots, \;,$$

kde $\mathcal{U}_n : X_n \to X_n^*$ je dualizační zobrazení pro prostor X_n, konverguje pro libovolné $w_{n,0} \in X$ a libovolné $t \in (0, 2M/L^2)$ k jedinému řešení u úlohy $Au = b$.

□

Cvičení 2.4.5 Dokažte větu 2.4.4.
Návod. Projekčně-iterační posloupnost w_n lze zapsat ve tvaru $w_n = U_n w_{n-1}$, kde

$$U_n w = w - t\mathcal{U}_n^{-1}\,(A_n w - b_n) \quad \forall w \in X_n.$$

Aplikujte lemma 2.4.1.

Kapitola 3

Potenciální operátory

Řada výsledků týkající se řešitelnosti operátorových rovnic z druhé kapitoly byla nejprve dokázána pro potenciální úlohy. Tento pojem je převzat z terminologie popisu fyzikálních úloh. Existují úlohy, u kterých nelze bez předpokladu potenciálnosti studovat existence popř. jednoznačnost řešení.

V prvním odstavci budou popsány nutné a postačující podmínky potenciálnosti s uvedením několika příkladů. V druhém odstavci bude pojednáno o monotónních operátorech, které jsou současně potenciálními operátory. Budou dokázány základní věty o řešitelnosti operátorových rovnic s těmito typy operátorů. Dualita bude studována v třetí kapitole a v poslední kapitole bude pojednáno o některých numerických metodách řešení rovnic s potenciálními operátory. Pokud nebude řečeno jinak budeme v této kapitole předpokládat, že uvažované funkcionály jsou konečné, tzn. nabývají v každém bodě svého definičního oboru konečné hodnoty, a definiční obor studovaných operátorů bude reálný reflexivní Banachův prostor.

3.1 Definice a kritéria potenciálnosti operátoru

Definice 3.1.1 *Nechť X je reálný normovaný prostor. Řekneme, že operátor $A : X \to X^*$ je potenciální, jestliže existuje funkcionál F definovaný na prostoru X takový, že v každém bodě $x \in X$ existuje G-derivace* $\operatorname{grad} F(x)$*:* $\operatorname{grad} F(x) \equiv F'(x) : X \to X^*$ *tak, že platí $A = \operatorname{grad} F$, tzn.*

$$\langle Ax, y\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(F(x+ty) - F(x)\right) \qquad \forall x,\, y \in X.$$

Funkcionál F se nazývá potenciálem operátoru A.

Poznámka 3.1.1 Pojem potenciálního operátoru lze bezprostředně rozšířit i pro operátory $T : X \to Y$, kde prostor Y je lineárně izometricky izomorfní prostoru X^*.

Označme tento izometrický izomorfismus symbolem $I_Y \in \mathcal{L}(X^*, Y)$, a definujme operátor $A : X \to X^*$ předpisem $A = I_Y^{-1} T : X \to X^*$. Řekneme, že operátor $T : X \to Y$ je potenciální, jestliže operátor $A : X \to X^*$ je potenciální a potenciál F operátoru A je potenciálem operátoru T. S tímto rozšířením se lze setkat v případě, kdy prvky prostoru Y reprezentují spojité lineární funkcionály z prostoru X^*.

Za výše uvedených předpokladů je pro libovolné $x, u \in X$

$$\langle Ax, u\rangle = \left\langle I_Y^{-1}Tx, u\right\rangle = \left\langle I_Y^{-1}y, u\right\rangle = a(y, u),$$

kde $y = Tx$ a $a(y, u)$ je spojitá bilineární forma na prostoru $Y \times X$,

$$|a(y, v)| \leq \|y\|_Y \, \|v\|_X.$$

Je-li operátor $A : X \to X^*$ potenciální s potenciálem F, pak

$$\langle Ax, u\rangle = \langle \operatorname{grad} F(x)\,, u\rangle = \left\langle I_Y^{-1}Tx, u\right\rangle \quad \forall x, u \in X$$

a tím

$$\operatorname{grad} F = I_Y^{-1}T \quad \Longrightarrow \quad T = I_Y \operatorname{grad} F.$$

Poznamenejme, že bilineární forma a reprezentuje obecný tvar funkcionálu x^*:

$$x^*(u) = \left\langle I_Y^{-1}y, u\right\rangle = a(y, u), \quad \text{kde} \quad y = I_Y x^* \in Y, \;\; u \in X.$$

♠

Potenciál radiálně spojitých potenciálních operátorů lze explicitně vyjádřit v integrálním tvaru.

Lemma 3.1.1 *Nechť operátor $A : X \to X^*$ je radiálně spojitý potenciální s potenciálem F. Pak pro každé $x \in X$ platí*

$$F(x) = F(0) + \int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Zvolme $x \in X$ a vyšetřujme funkci $\varphi(t) = F(tx)$ pro $t \in [0, 1]$. Zřejmě

$$\varphi'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(F(tx + sx) - F(tx)\right) = \langle Atx, x\rangle\,.$$

Protože A je radiálně spojitý, je funkce $\langle Atx, x\rangle = \varphi'(t)$ spojitá na intervalu $[0, 1]$ a odtud dostaneme

$$F(x) - F(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t.$$

□

Z tohoto lemmatu plyne, že potenciál radiálně spojitých potenciálních operátorů je určen až na konstantu jednoznačně.

V následujícím lemmatu budou uvedeny kritéria potenciálnosti operátoru.

Lemma 3.1.2 *Nechť X je reflexivní Banachův prostor a operátor A, $A : X \to X^*$ je demispojitý. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

a) Operátor A je potenciální.

b) Pro libovolné $x, y \in X$ platí

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle A(y + t(x-y)), x-y\rangle \,\mathrm{d}t.$$

c) Pro libovolné x, y a libovolné spojitě diferencovatelné zobrazení u, $u : [0,1] \to X$, takové, že $u(0) = x$ a $u(1) = y$ platí

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle Au(t), u'(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. *Implikace a) $\Rightarrow$ b):* Podle lemmatu 2.1.2 je demispojitý operátor radiálně spojitý a podle lemmatu 3.1.1 je pro libovolné $x, y \in X$

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle \,\mathrm{d}t = F(x) - F(y) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} F(y + t(x-y))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle A(y + t(x-y)), x-y\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Implikace b) $\Rightarrow$ c): Z demispojitosti operátoru A plyne existence konstanty $M > 0$ tak, že pro každé $\tau, t, s \in [0,1]$ platí

$$\|A\,(u(s) + \tau(u(t) - u(s)))\,\| \le M.$$

Skutečně, nechť taková konstanta neexistuje. Pak existuje posloupnost čísel t_n, τ_n, $s_n \in [0,1]$ tak, že množina $\|A\,(u(s_n) + \tau_n(u(t_n) - u(s_n)))\,\|$ není ohraničená. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $t_n \to t$, $\tau_n \to \tau$, $s_n \to s$. Pak ze spojitosti funkce $u : [0,1] \to X$ obdržíme

$$u(s_n) + \tau_n(u(t_n) - u(s_n)) \to u(s) + \tau(u(t) - u(s)) \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Avšak A je demispojitý a tím posloupnost $\{A\,(u(s_n) + \tau_n(u(t_n) - u(s_n)))\}$ konverguje slabě. Avšak každá slabě konvergentní posloupnost je v prostoru X^* ohraničená (prostor X je reflexivní), což je ve sporu s předpokladem.

Na intervalu $[0,1]$ vyšetřujme reálnou funkci φ:

$$\varphi(t) = \int_0^1 \langle A\tau u(t), u(t)\rangle \,\mathrm{d}\tau.$$

Z předpokladu v b) obdržíme pro $t, s \in [0,1]$

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| = \left|\int_0^1 \langle A\tau u(t), u(t)\rangle \,\mathrm{d}\tau - \int_0^1 \langle A\tau u(s), u(s)\rangle \,\mathrm{d}\tau\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \langle A(u(s) + \tau(u(t) - u(s))), u(t) - u(s)\rangle \,\mathrm{d}\tau\right| \le M\|u(t) - u(s)\| \le$$

$$\le M|t-s| \max_{\tau\in[0,1]} \|u'(\tau)\|,$$

což znamená, že funkce φ je Lipschitzovsky spojitá a tím je absolutně spojitá. Tudíž

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle \, \mathrm{d}t = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) \, \mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Z věty o střední hodnotě obdržíme

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lim_{s\to t} \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t} = \\ &= \lim_{s\to t} \left\langle A(u(t)+\tau_0(u(s)-u(t))), \frac{u(s)-u(t)}{s-t} \right\rangle = \langle Au(t), u'(t)\rangle \end{aligned}$$

a tím odtud a z rovnosti (3.1) plyne tvrzení c).

Implikace c) ⇒ a): Dokážeme, že funkcionál F,

$$F(x) = \int_0^1 \langle Asx, x\rangle \, \mathrm{d}s,$$

je potenciál operátoru A. Položme $u_t(s) = x + sty$. Pro libovolné $t \in \mathbb{R}$, $x, t \in X$ a odpovídající hodnoty $s_0 \in [0,1]$ (z věty o střední hodnotě) obdržíme

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} \frac{F(x+ty)-F(x)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\int_0^1 \langle As(x+ty), x+ty\rangle \, \mathrm{d}s - \int_0^1 \langle Asx, x\rangle \, \mathrm{d}s \right) = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \langle Au_t(s), u_t'(s)\rangle \, \mathrm{d}s = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \langle Au_t(s), ty\rangle \, \mathrm{d}s = \\ &= \lim_{t\to 0} \langle A(x+s_0ty), y\rangle = \langle Ax, y\rangle . \end{aligned}$$

□

Cvičení 3.1.1 Dokažte ekvivalentnost v tvrzení a) a b) v lemmatu 3.1.2 za předpokladu, že operátor $A : X \to X^*$ je radiálně spojitý.

♣

Poznámka 3.1.2 Jestliže jsou splněny předpoklady v lemmatu 3.1.2, pak operátor $A : X \to X^*$ je potenciální, právě když pro každé spojitě diferencovatelné zobrazení $u : [0,1] \to X$ takové, že $u(0) = u(1)$ platí

$$\int_0^t \langle Au(\tau), u'(\tau)\rangle \, \mathrm{d}\tau = 0.$$

V případě, kdy operátor $A : X \to X^*$ je G-diferencovatelný, lze k ověření potenciálnosti využít následující ekvivalence.

Lemma 3.1.3 *Nechť X je reflexivní Banachův prostor a operátor A, $A: X \to X^*$ má v každém bodě $x \in X$ G-derivaci $A'(x)$ takovou, že pro všechna $x, y, h \in X$ je funkce ψ,*

$$\psi(s,t) = \langle A'(h + sx + ty)x, y \rangle \,,$$

spojitá na množině $[0,1] \times [0,1]$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

a) Operátor A je potenciální.

b) Pro všechna $x, y, h \in X$ platí

$$\langle A'(h)x, y \rangle = \langle A'(h)y, x \rangle \,.$$

Důkaz. *Implikace a) $\Rightarrow$ b):*
Nechť operátor A je potenciální s potenciálem F. Definujme funkci $\varphi_{h,x,y}(t)$ předpisem:

$$\varphi_{h,x,y}(t) := [F(h + tx + ty) - F(h + tx)] - [F(h + ty) - F(h)].$$

Pomocí lemmat 3.1.1 a 3.1.2 obdržíme

$$\begin{aligned}
&F(h + tx + ty) - F(h + tx) = \\
&= \int_0^1 \langle A\tau(h + tx + ty), h + tx + ty \rangle \, \mathrm{d}\tau - \int_0^1 \langle A\tau(h + tx), h + tx \rangle \, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^1 \langle A(h + tx + \tau ty), ty \rangle \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \langle A(h + tx + s_1 y), y \rangle \, \mathrm{d}s_1
\end{aligned}$$

a podobně

$$F(h + ty) - F(h) = \int_0^t \langle A(h + s_1 y), y \rangle \, \mathrm{d}s_1.$$

Odtud dostaneme

$$\varphi_{h,x,y}(t) = \int_0^t \langle A(h + tx + s_1 y) - A(h + s_1 y), y \rangle \, \mathrm{d}s_1.$$

Taylorova formule se zbytkem v integrálním tvaru (viz např. [13]) má tvar

$$\langle A(u + v) - Av, y \rangle = \int_0^1 \langle A'(v + \tau v))v, y \rangle \, \mathrm{d}\tau,$$

kde $u, v, y \in X$. Použitím této formule po úpravě obdržíme

$$\begin{aligned}
&\langle A(h + tx + s_1 y) - A(h + s_1 y), y \rangle = \int_0^1 \langle A'(h + s_1 y + \tau tx)tx, y \rangle \, \mathrm{d}\tau = \\
&= \int_0^t \langle A'(h + s_1 y + s_2 x)x, y \rangle \, \mathrm{d}s_2
\end{aligned}$$

a pomocí věty o střední hodnotě obdržíme

$$\varphi_{h,x,y}(t) =$$
$$= \int_0^t \int_0^t \langle A'(h + s_2 x + s_1 y)x, y\rangle \,\mathrm{d}s_2 \,\mathrm{d}s_1 = t^2 \,\langle A'(h + \tau_2 x + \tau_1 y)x, y\rangle\,,$$

kde $\tau_i \in [0,t]$ a $i = 1,2$. Z definice $\varphi_{h,x,y}(t)$ ihned plyne rovnost $\varphi_{h,x,y}(t) = \varphi_{h,y,x}(t)$, a proto

$$\langle A'(h + \tau_2 x + \tau_1 y)x, y\rangle \;=\; \langle A'(h + \tau_4 x + \tau_3 y)x, y\rangle\,,$$

kde $\tau_3, \tau_4 \in [0,t]$. Limitním přechodem $t \to 0$ obdržíme tvrzení v bodě b).

Implikace b) $\Rightarrow$ a):
Podobně jako v důkazu předcházející implikace obdržíme použitím lemmatu 3.1.2 a Taylorovy formule rovnosti, které platí pro libovolné x, $y \in X$:

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle \,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 \langle Atx, x - y\rangle \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \langle Atx - Aty, y\rangle \,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 \langle Atx, x - y\rangle \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \int_0^t \langle A'(ty + s(x-y))(x-y), y\rangle \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 \langle Atx, x - y\rangle \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \int_s^1 \langle A'(ty + s(x-y))y), y\rangle \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_0^1 \langle Atx, x - y\rangle \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \langle A(y + s(x-y)) - Asx, x - y\rangle \,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_0^1 \langle A(y + s(x-y)), x - y\rangle \,\mathrm{d}s.$$

Z těchto rovností a z lemmatu 3.1.2 již plyne, že operátor A je potenciální.

$\square$

Cvičení 3.1.2 Nechť X je reálný Hilbertův prostor a operátor $A \in \mathcal{L}(X)$. Dokažte, že tento operátor je potenciální, právě když je samoadjungovaný. Sestrojte jeho potenciál.

Návod. Aplikujte všechna výše uvedená kritéria z lemmat 3.1.2, 3.1.3 a cvičení 1.5.1. K sestrojení analytického vyjádření potenciálu využijte lemma 3.1.1 a spojitosti operátoru A. Ukažte, že potenciál F tohoto operátoru (viz cvičení 1.5.1) je tvaru $F(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) \quad \forall x \in X$.

♣

V následují části tohoto odstavce uvedeme několik příkladů potenciálních operátorů, se kterými se lze setkat v aplikacích.

Příklad 3.1 Nechť prostor X^* je striktně konvexní, kde X je Banachův prostor. Pak existuje jednoznačně definované zobrazení $\mathcal{U} : X \to X^*$, tzv. dualizační (viz 1. kapitola, definice 1.5.2), mající pro libovolný prvek $x \in X$ tyto vlastnosti:

$$\|\mathcal{U}(x)\| = \|x\|, \qquad \langle \mathcal{U}x, x\rangle = \|\mathcal{U}(x)\|\ \|x\| = \|x\|^2.$$

V 2. kapitole bylo v příkladě 2.3 dokázáno, že je-li prostor X navíc reflexivní, pak dualizační zobrazení $\mathcal{U} : X \to X^*$ je ryze monotónní, koercivní a demispojité a tím také radiálně spojité a hemispojité.

Operátor $\mathcal{U}$ je potenciální s potenciálem

$$F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad x \in X.$$

Důkaz. Pro libovolné $x, y \in X$ platí

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}y, y - x\rangle = \langle \mathcal{U}y, y\rangle - \langle \mathcal{U}y, x\rangle \geq \\ \geq \|y\|^2 - \|x\|\,\|y\| \geq \|y\|^2 - \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geq \\ \geq -\|x\|^2 + \|x\|\,\|y\| \geq \langle \mathcal{U}x, y - x\rangle\,. \end{aligned}$$

Dosazením $y := x + th,\ h \in X$, obdržíme

$$t\,\langle \mathcal{U}x, h\rangle \leq \frac{1}{2}\|x + th\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \leq t\ \langle \mathcal{U}(x + th), h\rangle\,.$$

Operátor $\mathcal{U}$ je radiálně spojitý a proto odtud po vydělení $t \neq 0$ a limitním přechodem $t \to 0$ obdržíme

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[F(x + th) - F(x)\right] = \langle \mathcal{U}x, h\rangle\,, \quad \text{kde} \quad F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad x \in X.$$

a tím je tvrzení dokázáno.

♠

Příklad 3.2 Nechť $\Omega = (a, b),\ a, b \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že funkce f splňuje Caratheodorovy podmínky

(i) $f(\cdot, r)$ je měřitelná pro všechna pevná $r \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x, \cdot)$ je spojitá pro skoro všechna $x \in \Omega$.

Na množině funkcí $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definujme operátor Němyckého (viz definice 1.6.1 v 1. kapitole) $\mathcal{N}$ předpisem

$$\mathcal{N}u(x) = f(x, u(x)).$$

Zopakujme základní vlastnosti Němyckého operátoru v uvedeném případě:

1. Operátor $\mathcal{N}$ zobrazuje měřitelnou funkci u na funkci měřitelnou.

2. Nechť $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$. Jsou-li splněny následující růstové podmínky
$$|f(x,r)| \le g_1(x) + c(x)\,|r|^{p-1},$$
kde $g_1 \in L^q(\Omega)$ a c je nezáporná L^∞-funkce, pak Němyckého operátor $\mathcal{N}$ je dobře definovaný, spojitý a ohraničený z prostoru $L^p(\Omega)$ do prostoru $L^q(\Omega)$.

Operátor $\mathcal{N}$ je potenciální s potenciálem

$$F(x) = F(0) + \int_a^b \int_0^{x(\tau)} f(\tau, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\,\tau, \quad x \in L^p(a,b).$$

(iii) Je-li funkce $f(x, r)$ neklesající v proměnné r pro skoro všechna $x \in \Omega$, pak operátor $\mathcal{N}$ je monotónní, tzn. platí

$$\int_a^b (\mathcal{N}\,u - \mathcal{N}\,v)(\tau)(u(\tau) - v(\tau))\,\mathrm{d}\tau \ge 0 \quad \forall u, v \in L^p(a,b).$$

Důkaz. Operátor $\mathcal{N}$ je spojitý a tím je také radiálně spojitý a také demispojitý. K ověření, že je potenciální využijme kritéria v lemmatu 3.1.2. Připomeňme, že na základě vět o obecném tvaru spojitého lineárního funkcionálu v prostoru $X = L^p(a,b)$ je duální prostor k prostoru $X \equiv L^p(a,b)$ izometricky izomorfní prostoru $L^q(a,b)$, tzn. k $x^* \in X^*$ existuje jediný prvek $y \in L^q(a,b)$ tak, že pro všechna $x \in X$ platí

$$x^*(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Navíc $\|x^*\| = \|y\|$ a tím operátor $I_q \in \mathcal{L}(L^q(a,b), X^*)$ definovaný předpisem $I_q\,y = x^*$ izometricky izomorfně zobrazuje prostor $L^q(a,b)$ na X^*.
Defimujme $A : X \to X^*$, $X = L^p(a,b)$, takto: $Au = I_q\,f(\cdot, u)$, $u \in X$, tzn.

$$\langle Au, v\rangle = \int_a^b f(\tau, u(\tau))v(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad u, v \in L^p((a,b)).$$

Snadno se ověří, že pro $x \in L^p(a,b)$ platí

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \int_a^b f(\tau, tx(\tau))x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \int_a^b \int_0^{x(\tau)} f(\tau, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau. \tag{3.2}$$

Analogicky formule platí pro $y \in L^p(a,b)$. Odtud dostaneme pro $x, y \in L^p(a,b)$

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle\ \mathrm{d}t - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle\ \mathrm{d}t = \int_a^b \int_{y(\tau)}^{x(\tau)} f(\tau, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau.$$

Avšak

$$\int_0^1 \langle A(y+t(x-y)), x-y\rangle \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 \int_a^b f(\tau, tx(\tau) + (1-t)y(\tau))(x(\tau) - y(\tau)) \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int_a^b \int_{y(\tau)}^{x(\tau)} f(\tau, z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\tau$$

a podle tvrzení b) v lemmatu 3.1.2 je operátor $A : X \to X^*$ potenciální. Jelikož $\mathcal{N} = I_q^{-1} A$ a operátor $I_q \in \mathcal{L}(L^q(a,b), X^*)$ je izometrický izomorfismus, je operátor $\mathcal{N}$ potenciální (viz poznámka 3.1.1).

Z lemmatu 3.1.1, poznámky 3.1.1 a identity (3.2) je potenciál F operátoru $\mathcal{N}$ tvaru

$$F(x) \;=\; F(0) + \int_a^b \int_0^{x(\tau)} f(\tau, z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\tau, \quad x \in L^p(a,b).$$

Analogicky jako u pojmu potenciálnosti se definuje monotonnost (ryzí, stejnoměrná, silná) operátoru $\mathcal{N}$ přes monotonnost výše definovaného operátoru $A : X \to X^*$ (viz poznámka 2.1.2 v 2. kapitole). Pak pro $u, v \in X$ za předpokladu (iii) je

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_a^b \left(f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))\right)\left(u(\tau) - v(\tau)\right) \mathrm{d}\tau \ge 0$$

a tím je operátor $\mathcal{N}$ monotónní.

♠

Cvičení 3.1.3 Nechť Ω je oblast konečné míry v $\mathbb{R}_n$ a m je přirozené číslo. Předpokládejme, že funkce f splňuje Caratheodorovy podmínky

(i) $f(\cdot, r)$ je měřitelná pro všechna pevná $r \in \mathbb{R}_m$;

(ii) $f(x, \cdot)$ je spojitá pro skoro všechna $x \in \Omega$.

Na množině funkcí $u : \Omega \to \mathbb{R}_m,\;\; u(x) = (u_1(x), \cdots, u_m(x))$ definujme operátor Němyckého $\mathcal{N}$ předpisem

$$\mathcal{N}u(x) \;=\; f(x, u(x)).$$

Nechť $1 < p < \infty,\; q = p/(p-1)$ a předpokládejme, že jsou splněny následující růstové podmínky

$$|f(x,u)| \;\le\; g_1(x) + c(x) \sum_{i=1}^m |u_i|^{p-1},$$

kde $g_1(x) \in L^q(\Omega)$ a c je nezáporná L^∞-funkce. Pak podle věty 1.6.1 je Němyckého operátor $\mathcal{N}$ dobře definovaný, spojitý a ohraničený z prostoru

$[L^p(\Omega)]^m \equiv L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$ (m-krát) do prostoru $L^q(\Omega)$. Dokažte, že operátor Němyckého $\mathcal{N}$ je potenciální a ukažte, že F definované předpisem

$$F(x) \;=\; F(0) + \int_\Omega \int_0^{x(\tau)} f(\tau, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau, \quad x \in [L^p(\Omega)]^m ,$$

je jeho potenciál. Nalezněte podmínky, za kterých je tento operátor monotónní.

♣

Příklad 3.3 Nechť X je reálný normovaný prostor. Předpokládejme, že norma $\|x\|$ je G-diferencovatelná v každém nenulovém bodě $x \in X$.
Pak podle lemmatu 1.5.1 tento G-diferenciál je G-derivací a pro $c \neq 0$ platí

$$\|\operatorname{grad}\|x\|\,\| \;=\; 1, \quad \langle \operatorname{grad}\|x\|, x\rangle = \|x\|, \quad \operatorname{grad}\|cx\| \;=\; \operatorname{sign} c \operatorname{grad}\|x\|.$$

Zvolme $\alpha > 0$ a vyšetřujme funkcionál F,

$$F(x) = \|x\|^{\alpha+1}, \quad x \in X.$$

Z definice G-derivace obdržíme pro $x \neq 0$

$$\langle \operatorname{grad} F(x), h\rangle = (\alpha+1)\|x\|^\alpha \,\langle \operatorname{grad}\|x\|, h\rangle\,,$$

tzn.

$$Ax \equiv \operatorname{grad} F(x) = (\alpha+1)\|x\|^\alpha \operatorname{grad}\|x\| \in X \to X^*.$$

Dodefinujme $A0 = 0$. Tím operátor A je potenciální s potenciálem F. Navíc A je monotónní a koercivní. Pro $x \neq 0$, $y \neq 0$ je

$$\begin{aligned}
\langle Ax - Ay, x - y\rangle \;&=\; \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle - \langle Ax, y\rangle - \langle Ay, x\rangle \geq \\
&\geq\; (\alpha+1)\left[\|x\|^{\alpha+1} + \|y\|^{\alpha+1} - \|x\|^\alpha\|y\| - \|y\|^\alpha\|x\|\right] = \\
&=\; (\alpha+1)(\|x\| - \|y\|)\,(\|x\|^\alpha - \|y\|^\alpha) \geq 0.
\end{aligned}$$

Koercivita plyne z rovnosti

$$\langle Ax, x\rangle = (\alpha+1)\|x\|^\alpha \,\langle \operatorname{grad}\|x\|, x\rangle = (\alpha+1)\|x\|^{\alpha+1}, \quad x \in X.$$

♠

3.2 Potenciální a monotónní operátory

Mezi monotónními operátory a konvexními funkcionály existuje velmi úzký vztah podobně jako v reálné analýze mezi konvexitou funkcionálu a monotónností funkce. V 1. kapitole jsme již ve větě 1.7.5 dokázali, že je-li potenciální operátor monotónní, pak jeho potenciál je konvexní funkce a naopak - je-li potenciál operátoru konvexní, pak tento operátor je již monotónní. V důsledku 1.7.1 bylo ukázáno, že každý konvexní funkcionál, který je spojitě G-diferencovatelný (existuje G-derivace), je slabě polospojitý zdola. Dále připomeňme, že v 1. kapitole byly zformulovány dvě věty o existenci bodu, ve kterém nabývá svého minima slabě zdola polospojitý funkcionál. Jedná se o větu 1.7.1 a větu 1.7.2. V první větě (za předpokladu reflexivity Banachova prostoru X) bylo dokázáno, že slabě zdola polospojitý funkcionál na prostoru X nabývá svého minima na každé neprázdné, omezené, uzavřené a konvexní množině. Je-li navíc funkcionál rostoucí (slabě koercivní) na prostoru X (viz druhá věta 1.7.2), pak toto tvrzení platí i pro neomezené uzavřené konvexní množině a tím i pro celý prostor X.

Předtím než zformulujeme základní větu o řešitelnosti rovnic s monotónními potenciálními operátory, dokážeme pomocné lemma.

Lemma 3.2.1 *Nechť $A : X \to X^*$ je potenciální operátor s potenciálem F. Pak k tomu, aby prvek $u \in X$ byl řešením rovnice $Au = f$, $f \in X^*$, stačí, aby byla splněna následující podmínka:*

$$F(u) - \langle f, u\rangle = \min_{v\in X}(F(v) - \langle f, v\rangle). \tag{3.3}$$

Je-li operátor A navíc monotónní, pak tato podmínka je i nutná.

Důkaz. Nechť

$$F(u) - \langle f, u\rangle = \min_{v\in X}(F(v) - \langle f, v\rangle),$$

tzn. funkcionál g definovaný na množině X,

$$g(v) = F(v) - \langle f, v\rangle, \quad v \in X,$$

nabývá svého minima v bodě u a má v každém bodě $v \in X$ G-derivaci $g'(v)$:

$$\langle g'(v), h\rangle = \langle \operatorname{grad} F(v), h\rangle - \langle f, h\rangle \qquad \Longleftrightarrow \quad g'(v) = F'(v) - f.$$

Pak podle lemmatu 1.7.1 je $g'(u) = 0$, a proto pro libovolné $h \in X$

$$0 = \langle \operatorname{grad} F(u), h\rangle - \langle f, h\rangle = \langle Au - f, h\rangle$$

a tím $Au = f$.

Předpokládejme, že operátor A je navíc monotónní a $Au = f$. Pak pro libovolné $v \in X$ je podle tvrzení c) věty 1.7.5

$$F(v) \ge F(u) + \langle Au, v - u\rangle$$

a odtud plyne

$$(F(v) - \langle f, v\rangle) - (F(u) - \langle f, u\rangle) = F(v) - F(u) - \langle Au, v - u\rangle \ge 0,$$

což znamená, že podmínka (3.3) je splněna.

□

K důležitým vlastnostem monotónních potenciálních operátorů patří demispojitost.

Lemma 3.2.2 *Každý monotónní potenciální operátor je demispojitý.*

Důkaz. Na základě lemmatu 2.1.3 stačí dokázat platnost implikace

$$\langle f - Av, u - v\rangle \geq 0 \ \forall v \in X \quad \Longrightarrow \quad Au = f,\ f \in X^*.$$

Dosaďme do této implikace $v_t = u + t(v - u)$, $t > 0$, a použijme nerovnosti tvrzení c) věty 1.7.5

$$F(v) \geq F(u) + \langle Au, v - u\rangle\,.$$

Obdržíme

$$\langle f, t(v-u)\rangle \leq t\,\langle Av_t, v - u\rangle \leq t\,(F(v + t(v-u)) - F(v_t))\,.$$

Vydělením $t \neq 0$ a limitním přechodem $t \to 0$ obdržíme

$$\langle f, v - u\rangle \leq \lim_{t\to 0}\,(F(v + t(v-u)) - F(v_t)) = F(v) - F(u).$$

Z lemmatu 3.2.1 plyne platnost dokazované implikace.

□

Důsledek 3.2.1 *Nechť $A : X \to X^*$ je monotónní potenciální operátor. Pak k tomu, aby prvek $u \in X$ byl řešením rovnice $Au = f$, $f \in X^*$, je nutné a stačí, aby*

$$\int_0^1 \langle Atu, u\rangle\ \mathrm{d}t\ -\ \langle f, u\rangle = \min_{v\in X}\left[\int_0^1 \langle Atv, v\rangle\ \mathrm{d}t\ -\ \langle f, v\rangle\right]. \tag{3.4}$$

Důkaz. Z předchozího lemmatu 3.2.2 je operátor A demispojitý. Protože je monótonní, je i radiálně spojitý (viz lemma 2.1.3) a podle lemmatu 3.1.1 potenciál F tohoto operátoru lze vyjádřit ve tvaru

$$F(v) = F(0) + \int_0^1 \langle Atv, v\rangle\ \mathrm{d}t, \quad v \in X,$$

kde $F(0)$ je konstanta. Tvrzení již bezprostředně plyne z lemmatu 3.2.1.

□

Funkcionál G,

$$G(v) := \int_0^1 \langle Atv, v\rangle\ \mathrm{d}t\ -\ \langle f, v\rangle\,,$$

příslušný úloze $Au = f$, $f \in X^*$, se v literatuře nazývá potenciálem této úlohy.

Nyní již můžeme zformulovat větu o existenci řešení operátorové rovnice s monotónním potenciálním operátorem. Důkaz této věty se neopírá o Browerovu větu o pevném bodě, ale o existenci bodu, ve kterém potenciál úlohy nabývá svého minima (viz důsledek 3.2.1)

Věta 3.2.1 *Nechť $A : X \to X^*$ je monotónní, koercivní a potenciální operátor. Pak rovnice $Au = f$ má řešení pro každou pravou stranu $f \in X^*$. Je-li operátor A ryze monotónní, pak toto řešení je jediné.*

Důkaz. Potenciál F operátoru A je konvexní funkce (viz věta 1.7.5), který je spojitě G-diferencovatelný (existuje G-derivace) a podle důsledku 1.7.1 je slabě polospojitý zdola. K důkazu existence řešení úlohy $Au = f$ stačí podle důsledku 3.2.1 ukázat, že funkcionál G nabývá svého minima na prostoru X. Jelikož $G = F - f$, kde f je lineární spojitý funkcionál, je i slabě polospojitý zdola potenciál G úlohy $Au = f$. Podle věty 1.7.2 stačí ukázat, že G je rostoucí (slabě koercivní) funkcionál v prostoru X a pak již bude G nabývat svého minima na prostoru X. Slabou koercivitu funkcionálu G dokážeme na základě koercivity operátoru A. Z monotonnosti operátoru A obdržíme pro libovolné $x \in X$ a $1 \geq t > \frac{1}{2}$

$$\langle Atx, x\rangle - \left\langle A\frac{1}{2}x, x\right\rangle = \frac{1}{t-\frac{1}{2}}\left\langle Atx - A\frac{1}{2}x, tx - \frac{1}{2}x\right\rangle \geq 0.$$

Tuto nerovnost a koercivitu operátoru A (viz definice 2.1.1) využijeme pro odhad funkcionálu G:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t - \langle f, x\rangle = \\ &= \int_0^1 \langle Atx - A0, tx\rangle \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \langle f - A0, x\rangle \geq \\ &\geq \int_{\frac{1}{2}}^1 \langle Atx - A0, tx - 0\rangle \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \langle f - A0, x\rangle \geq \\ &\geq \left\langle A\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x\right\rangle - \left\langle f - \frac{1}{2}A0, x\right\rangle \geq \|x\|\left(\frac{1}{2}\nu\left(\frac{\|x\|}{2}\right) - \|f - \frac{1}{2}A0\|\right). \end{aligned}$$

Odtud plyne slabá koercivita $G : G(x) \to +\infty$ pro $\|x\| \to +\infty$.

□

Důsledek 3.2.2 *Potenciál F,*

$$F(x) = \int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t, \quad x \in X,$$

monotónního koercivního potenciálního operátoru $A : X \to X^*$ je ohraničen zdola.

Důkaz. Nechť $u \in X$ je řešení rovnice $Au = 0$ (existence je zaručena větou 3.2.1). Pak podle lemmatu 3.2.1 je $F(u) \leq F(v)$ pro každé $v \in X$.

□

3.3 Duální funkcionál

V tomto odstavci opět X bude reflexivní Banachův prostor a F funkcionál definovaný na celém prostoru s hodnotami v intervalu $(-\infty, +\infty]$.

Definice 3.3.1 *Nechť F je funkcionál definovaný na reflexivním Banachově prostoru X. Jestliže $F(x) \in (-\infty, +\infty)$ $\forall x \in X$, pak funkcionál F se nazývá konečný. Je-li $F(x) = +\infty$ $\forall x \in X$, pak funkcionál F se nazývá triviální, jinak se jedná o netriviální funkcionál. Body, ve kterých funkcionál nabývá konečných hodnot tvoří tzv. efektivní oblast jeho definičního oboru, zkráceně efektivní oblast. Tuto množinu budeme označovat symbolem* $\operatorname{dom} F$, *tzn.*

$$\operatorname{dom} F = \{x \in X : F(x) < +\infty\}.$$

Duální funkcionál definujme takto:

Definice 3.3.2 *Nechť F je netriviální funkcionál. Pak funkcionál F^* definovaný na prostoru X^* předpisem*

$$F^*(x^*) = \sup_{x \in X} \left(\langle x^*, x \rangle - F(x) \right), \quad x^* \in X^*,$$

se nazývá duální funkcionál (sdružený, adjungovaný) k funkcionálu F.

Vlastnosti duálního funkcionálu sepíšeme do následujícího lemmatu.

Lemma 3.3.1 *Nechť F je netriviální funkcionál. Pak platí:*

1. *Pro každé $x \in X$ a $x^* \in X^*$ je*
$$F(x) + F^*(x^*) \ \geq\ \langle x^*, x \rangle .$$
2. *Funkcionál F^* je konvexní a slabě zdola polospojitý.*
3. *Je-li funkcionál F, slabě zdola polospojitý a konvexní, pak funkcionál F^* je netriviální.*

Důkaz. Postupně dokážeme uvedené vlastnosti.

1. Z definice funkcionálu F^* dostaneme pro každé $x \in X$ a $x^* \in X^*$
$$\begin{aligned} F(x) + F^*(x^*) \ &= \ F(x) + \sup_{y \in X} \left(\langle x^*, y \rangle - F(y) \right) \geq \\ &\geq \ F(x) + \langle x^*, x \rangle - F(x) = \langle x^*, x \rangle . \end{aligned}$$
2. Funkcionál F^* je konvexní: pro $t \in [0,1]$ a $x_t^* = tx^* + (1-t)y^*$ je
$$\begin{aligned} F^*(x_t^*) &= \sup_{x \in X} \left(\langle x_t^*, x \rangle - F(x) \right) \leq \\ \leq t \sup_{x \in X} \left(\langle x^*, x \rangle - F(x) \right) \ + \ (1-t) &\sup_{x \in X} \left(\langle y^*, x \rangle - F(x) \right) = \\ &= tF^*(x^*) + (1-t)F^*(y^*). \end{aligned}$$

   Funkcionál F^* je slabě zdola polospojitý: zvolme $\{x_n^*, d_n\} \subset X^* \times \mathbb{R}$ tak, aby
$$F^*(x_n^*) \leq d_n, \quad x_n^* \rightharpoonup x^* \text{ v } X^*, \quad d_n \longrightarrow d.$$

Stačí ukázat, že $F^*(x^*) \le d$. Předpokládejme, že $F^*(x^*) \ge d+\varepsilon,\ \varepsilon > 0$. Pak existuje $x \in X$ (definice duálního funkcionálu) tak, že platí

$$\begin{aligned} F^*(x^*) &\ge \langle x^*, x\rangle - F(x) \ge d + \frac{\varepsilon}{2}, \\ F^*(x_n^*) &\ge \langle x_n^*, x\rangle - F(x) = \langle x^*, x\rangle - F(x) + \langle x_n^* - x^*, x\rangle \ge \\ &\ge d + \frac{\varepsilon}{2} + \langle x_n^* - x^*, x\rangle . \end{aligned}$$

Tím

$$d = \lim_{n\to\infty} d_n \ge \limsup_{n\to\infty} F^*(x_n^*) \ge \lim_{n\to\infty} \Big(d + \frac{\varepsilon}{2} + \langle x_n^* - x^*, x\rangle \Big) = d + \frac{\varepsilon}{2},$$

což není možné.

3. Nechť funkcionál F je netriviální, tzn. existuje $x \in X$ tak, že $F(x) < +\infty$. Odtud dostaneme odhad

$$F^*(x^*) = \sup_{y\in X} \left(\langle x^*, y\rangle - F(y)\right) \ge \langle x^*, x\rangle - F(x) > -\infty \quad \forall x^* \in X^*.$$

Jelikož funkcionál F je slabě zdola polospojitý a konvexní, pak pro každé $d > 0$ podle lemmatu 1.1.5 existuje $x^* \in X^*$ takové, že platí

$$F(y) \ge F(x) + \langle x^*, y - x\rangle - d \quad \forall y \in X.$$

Pro tento funkcionál x^* obdržíme odhad

$$F^*(x^*) = \sup_{y\in X} \left(\langle x^*, y\rangle - F(y)\right) \le \langle x^*, x\rangle - F(x) + d < +\infty$$

a tím je poslední tvrzení dokázáno.

□

Pro ilustraci uvedeme několik příkladů na konstrukci duálních funkcionálů.

Příklad 3.4 Nechť $F \in X^*$. Pak

$$F^*(x^*) = \sup_{x\in X} \langle x^* - F, x\rangle .$$

Z lineární funkcionální analýzy je známo, že existuje x_0, $\|x_0\| = 1$, tak, že platí $\langle x^* - F, x_0\rangle = \|x^* - F\|$. Pak pro $x_1 = cx_0,\ c > 0$, je pro $x^* \ne F$

$$F^*(x^*) \ge \langle x^* - F, x_1\rangle = c\|x^* - F\| \quad \longrightarrow \quad \infty \quad \text{jakmile} \quad c \to \infty$$

a tím

$$F^*(x^*) = \infty \quad \text{jakmile} \quad x^* \ne F \quad \text{a} \quad F^*(x^*) = 0 \quad \text{pro} \quad x^* = F.$$

♠

Příklad 3.5 Zvolme $\alpha > 1$ a $F(x) = \|x\|^\alpha$. Pak

$$F^*(x^*) = c\|x^*\|^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad c = (\alpha - 1)\,\alpha^{-\alpha/(\alpha-1)}.$$

Řešení.

$$F^*(x^*) \le \sup_{x\in X} \left(\|x^*\|\,\|x\| - \|x\|^\alpha\right).$$

Pro $t \ge 0$ definujme funkci $f(t)$:

$$f(t) = \|x^*\|\,t - t^\alpha.$$

Jelikož $f(0) = 0$ a $f(t) \to -\infty$ pro $t \to +\infty$, nabývá tato funkce zřejmě své maximální hodnoty pro t_0:

$$t_0 = \left(\frac{1}{\alpha}\,\|x^*\|\right)^{1/(\alpha-1)}, \qquad f(t_0) = c\|x^*\|^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad c = (\alpha - 1)\,\alpha^{-\alpha/(\alpha-1)}$$

a tím

$$F^*(x^*) \le c\|x^*\|^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

Sestrojme $x_0 \in X, \|x_0\| = 1$, tak, aby

$$\langle x^*, x_0\rangle = \|x^*\|$$

a položme

$$x_1 = kx_0, \quad k = \|x^*\|^{1/(\alpha-1)} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Pak

$$F^*(x^*) \ge \langle x^*, x_1\rangle - \|x_1\|^\alpha = c\|x^*\|^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad c = (\alpha - 1)\,\alpha^{-\alpha/(\alpha-1)}.$$

Odtud spolu s výše dokázanou opačnou nerovností obdržíme požadovaný výsledek. ♠

Cvičení 3.3.1 Zvolte $F(x) = \|x\|$. Sestrojte funkcionál F^*.
Návod. Využijte odhad

$$F^*(x^*) \le \sup_{x\in X} \left(\|x^*\| - 1\right)\,\|x\|.$$

Odtud a z definice F^* obdržíte

$$F^*(x^*) = \begin{cases} 0, & \|x^*\| \le 1, \\ +\infty, & \|x^*\| > 1\,. \end{cases}$$

♣

Jelikož prostor X je reflexivní, definujme na prostoru X k funkcionálu F dvakrát duální (sdružený, adjungovaný) funkcionál F^{**} takto:

Definice 3.3.3 *Nechť $F^*: X^* \to (-\infty, +\infty)$ je netriviální funkcionál. Pak funkcionál F^{**} definujme na prostoru X předpisem*

$$F^{**}(x) = \sup_{x^* \in X^*} \left(\langle x^*, x \rangle - F^*(x^*) \right).$$

Připomeňme z lineární funkcionální analýzy vlastnost spojitých lineárních operátorů v Hilberově prostoru: je-li A spojitý lineární operátor, pak $A = A^{**}$. Vzniká otázka, za jakých předpokladů je také $F = F^{**}$. Ukazuje se, že k tomu stačí, aby netriviální funkcionál F byl slabě zdola polospojitý a konvexní. Předtím než toto tvrzení dokážeme, uvedeme pomocné tvrzení o efektivní oblasti funkcionálu.

Lemma 3.3.2 *Je-li netriviální funkcionál F slabě zdola polospojitý a konvexní, pak*

$$\operatorname{dom} F^{**} \subset \overline{\operatorname{dom} F}.$$

Důkaz. Nechť $x \notin \overline{\operatorname{dom} F}$. Množina $\overline{\operatorname{dom} F}$ je uzavřená a konvexní a tím existuje spojitý lineární funkcionál $x_0^* \in X^*$, který odděluje bod x od této konvexní množiny (viz (1.4)), tzn. platí

$$\langle x_0^*, x \rangle > \sup_{y \in \overline{\operatorname{dom} F}} \langle x_0^*, y \rangle .$$

Podle lemmatu 3.3.1 je funkcionál F^* netriviální, tzn. existuje $x_1^* \in X^*$ tak, že platí $F^*(x_1^*) < \infty$. Pak pro $t > 0$ je

$$F^*(x_1^* + t x_0^*) = \sup_{y \in X} \left(\langle x_1^* + t x_0^*, y \rangle - F(y) \right) \le F^*(x_1^*) + t \sup_{y \in \overline{\operatorname{dom} F}} \langle x_0^*, y \rangle$$

a proto

$$\begin{aligned} F^{**}(x) &\ge \langle x_1^* + t x_0^*, x \rangle - F^*(x_1^* + t x_0^*) \ge \\ &\ge \langle x_1^*, x \rangle - F^*(x_1^*) + t \left(\langle x_0^*, x \rangle - \sup_{y \in \overline{\operatorname{dom} F}} \langle x_0^*, y \rangle \right) \;\to\; +\infty \text{ pro } t \to +\infty. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $x \notin \operatorname{dom} F^{**}$ a tím $\operatorname{dom} F^{**} \subset \overline{\operatorname{dom} F}$.

□

Věta 3.3.1 *Nechť F je netriviální funkcionál. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Funkcionál F je slabě zdola polospojitý a konvexní.*

2. $F = F^{**}$.

Důkaz. *Implikace* 1. $\Rightarrow$ 2. Z lemmatu 3.3.1, tvrzení 1., obdržíme

$$F^{**}(x) = \sup_{x^* \in X^*} (\langle x^*, x\rangle - F^*(x^*)) \leq \sup_{x^* \in X^*} F(x) = F(x).$$

Pro $x \notin \operatorname{dom} F^{**}$ je zřejmě $F^{**}(x) \geq F(x)$. Nechť $x \in \operatorname{dom} F^{**}$. Předpokládejme, že $F(x) > F^{**}(x)$. Pak $\{x, F^{**}(x)\} \neq \operatorname{epi}(F)$, kde

$$\operatorname{epi}(F) := \{\{x, c\} \in X \times \mathbb{R} : F(x) \leq c\}.$$

Funkcionál F je konvexní, a tudíž podle lemmatu 1.1.4 je $\operatorname{epi}(F)$ také konvexní a zřejmě uzavřená množina v prostoru $X \times \mathbb{R}$. Na základě oddělovací věty (viz (1.4)) existuje $\{x^*, a^*\} \in X^* \times \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\langle x^*, x\rangle + a^* F^{**}(x) > \sup_{\{y,a\} \in \operatorname{epi} F} (\langle x^*, y\rangle + a^* a).$$

Dokážeme, že $a^* < 0$. Nechť $a^* = 0$, pak

$$\langle x^*, x\rangle > \sup_{y \in \operatorname{dom} F} \langle x^*, y\rangle,$$

což je ve sporu s předpokladem, že $x \in \operatorname{dom} F^{**} \subset \overline{\operatorname{dom} F}$ (viz lemma 3.3.2). Nechť $a^* > 0$, pak

$$\langle x^*, x\rangle + a^* F^{**}(x) > +\infty,$$

a opět je to ve sporu s předpokladem $x \in \operatorname{dom} F^{**}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a^* = -1$. Pak

$$\langle x^*, x\rangle - F^{**}(x) > \sup_{\{y,a\} \in \operatorname{epi} F} (\langle x^*, y\rangle - a) =$$
$$= \sup_{y \in \operatorname{dom} F} (\langle x^*, y\rangle - F(y)) == \sup_{y \in X} (\langle x^*, y\rangle - F(y)) = F^*(x^*),$$

což je ve sporu s prvním tvrzením v lematu 3.3.1. Tím $F(x) \leq F^{**}(x)$, což s výše dokázanou nerovností $F(x) \geq F^{**}(x)$ dává rovnost.

Implikace 2. $\Rightarrow$ 1. Z defnice F^{**} plyne, že tento funkcionál je duální k funkcionálu F^* a tím podle druhého tvrzení v lematu 3.3.1 je $F = F^{**}$ slabě zdola polospojitý a konvexní.

□

Následující věta patří mezi důležitá tvrzení týkající se duálního funkcionálu. Duální funkcionál F^* je za určitých předpokladů potenciálem inverzního operátoru A^{-1}, pokud původní funkcionál F je potenciálem operátoru $A : X \to X^*$.

Věta 3.3.2 *Nechť F je konečný, slabě zdola polospojitý a konvexní funkcionál a $A : X \to X^*$. Předpokládejme, že existuje inverzní operátor $A^{-1} : X^* \to X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Funkcionál F je potenciálem operátoru $A : X \to X^*$, tzn.* $\operatorname{grad} F = A$.

2. *Operátor A je radiálně spojitý a pro libovolné $x, y \in X$ platí*

$$F(x) + F^*(Ax) = \langle Ax, x \rangle , \quad F(y) \geq F(x) + \langle Ax, y - x \rangle .$$

3. *Operátor A^{-1} je radiálně spojitý a pro libovolné x^*, $y^* \in X^*$ platí*

$$F(A^{-1}x^*) + F^*(x^*) = \left\langle x^*, A^{-1}x^* \right\rangle ,$$

$$F(y^*) \geq F(x^*) + \left\langle y^* - x^*, A^{-1}x^* \right\rangle .$$

4. *Funkcionál F^* je potenciálem operátoru $A^{-1} : X^* \to X$, tzn.*

$$\operatorname{grad} F^* = A^{-1}.$$

Důkaz. *Implikace* 1. $\Rightarrow$ 2. Z lemmatu 3.2.2 plyne, že operátor A je demispojitý a podle lemmatu 2.1.2 je radiálně spojitý. Tvrzení c) věty 1.7.5 zaručuje, že operátor A je monotónní a platí nerovnost ve 2. tvrzení. S použitím této nerovnosti obdržíme pro libovolné $x \in X$

$$\begin{aligned} F(x) + F^*(Ax) &= F(x) + \sup_{y \in X} \left(\langle Ax, y \rangle - F(y) \right) \leq \\ &\leq F(x) + \sup_{y \in X} \left(\langle Ax, x \rangle - F(x) \right) = \langle Ax, x \rangle . \end{aligned}$$

Na druhé straně z lemmatu 3.3.1 je

$$F(x) + F^*(Ax) \geq \langle Ax, x \rangle$$

a tím je dokázána rovnost v tvrzení 2.
Implikace 2. $\Rightarrow$ 3. Z 2. je

$$F(y) - F(x) \geq \langle Ax, y - x \rangle \quad \text{a} \quad F(x) - F(y) \geq \langle Ay, x - y \rangle .$$

Sečtením obou nerovností obdržíme

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in X,$$

což znamená, že operátor A je monotónní. Jelikož existuje inverzní operátor $A^{-1} : X^* \to X$, plyne z této nerovnosti také monotonnost operátoru A^{-1}. Dokážeme, že operátor A^{-1} je radiálně spojitý. Podle lemmatu 2.1.3 stačí ukázat, že je splněna implikace

$$\left\langle x^* - y^*, x - A^{-1}y^* \right\rangle \geq 0 \; \forall y^* \in X^* \quad \Longrightarrow \quad A^{-1}x^* = x .$$

Dosazením $y^* = Ay$ do levé strany této implikace, obdržíme

$$\langle x^* - Ay, x - y \rangle \geq 0 \; \forall y \in X$$

a tím je dokázána radiální spojitost operátoru A^{-1} . Jelikož operátor A je radiálně spojitý, plyne odtud a z lemmatu 2.1.3 rovnost $Ax = x^*$ a tudíž

$$A^{-1}x^* = x,$$

což bylo zapotřebí dokázat.

První rovnost v 3.tvrzení obdržíme přímo z první rovnosti v 2.tvrzení dosazením $x := A^{-1}x^*$. K důkazu druhé části v 3.tvrzení dosaďme do první rovnosti v 2. $x = A^{-1}x^*$, $y = A^{-1}y^*$, kde x^* a y^* jsou libovolné prvky z prostoru X^*. S využitím nerovnosti ve 2.tvrzení ($x \leftrightarrow y$) obdržíme nerovnost v 3.tvrzení:

$$\begin{aligned}
F^*(y^*) - F^*(x^*) &= -F(y) + F(x) - \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle = \\
&= -F(y) + F(x) - \langle Ay, x - y\rangle + \langle Ay - Ax, x\rangle \geq \\
&\geq \langle Ay - Ax, x\rangle = \left\langle y^* - x^*, A^{-1}x^*\right\rangle .
\end{aligned}$$

Implikace 3. $\Rightarrow$ 4. Záměnou $x^* \leftrightarrow y^*$ v nerovnosti ve tvrzení 3. obdržíme

$$F^*(x^*) \geq F^*(y^*) + \left\langle x^* - y^*, A^{-1}y^*\right\rangle .$$

Odtud a z nerovnosti v 3. tvrzení dostaneme

$$\left\langle y^* - x^*, A^{-1}x^*\right\rangle \leq F^*(y^*) - F^*(x^*) \leq \left\langle y^* - x^*, A^{-1}y^*\right\rangle .$$

Do této nerovnosti dosaďme $y^* := x^* + tz^*$, $t > 0$, $z^* \in X^*$. Po vydělení t obdržíme

$$\left\langle z^*, A^{-1}x^*\right\rangle \leq \frac{1}{t}\left[F^*(x^* + tz^*) - F^*(x^*)\right] \leq \left\langle z^*, A^{-1}(x^* + tz^*)\right\rangle .$$

Limitním přechodem $t \to 0$ obdržíme (A^{-1} je radiálně spojitý): $\operatorname{grad} F^* = A^{-1}$.
Implikace 4. $\Rightarrow$ 1. Funkcionál F^* je potenciál operátoru A^{-1} a tím je konečný a na základě druhého tvrzení v lemmatu 3.3.1 je slabě zdola polospojitý a konvexní. Z implikace 1. $\Rightarrow$ 4., je operátor $(A^{-1})^{-1}$ potenciální s potenciálem F^{**}, tzn. $\operatorname{grad} F^{**} = (A^{-1})^{-1}$. Jelikož $A = (A^{-1})^{-1}$ a (podle věty 3.3.1) $F = F^{**}$, je $\operatorname{grad} F = A$.

□

Důsledek 3.3.1 *Jestliže k operátoru $A : X \to X^*$ existuje inverzní operátor $A^{-1} : X^* \to X$, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

a) Operátor A je monotónní potenciální operátor.

b) Operátor A^{-1} je monotónní potenciální operátor.

Důkaz. Vzhledem k symetrii obou tvrzení, stačí dokázat implikaci $a) \Rightarrow b)$. Z definice monotónnosti je zřejmé, že je-li operátor A monotónní, pak je také monotónní operátor A^{-1} a naopak. Potenciál F operátoru A je konečný konvexní funkcionál (viz věta 1.7.5), který je spojitě G-diferencovatelný (existuje G-derivace) a podle důsledku 1.7.1 je slabě polospojitý zdola. Podle tvrzení 4. věty 3.3.2 je $\operatorname{grad} F^* = A^{-1}$ a tím operátor A^{-1} je potenciální.

□

Na závěr tohoto odstavce a to za poněkud silnějších předpokladů shrneme výše uvedené vlastnosti potenciálních operátorů

$$A : X \to X^* \quad \text{a} \quad A^{-1} : X^* \to X$$

a jejich potenciálů. Důkaz věty a jednoho důsledku ponecháme čtenáři k procvičení uvedené teorie potenciálních operátorů.

Věta 3.3.3 *Nechť operátor $A : X \to X^*$ je ryze monotónní, koercivní a potenciální operátor. Pak existuje inverzní operátor $A^{-1} : X^* \to X$, který je také ryze monotónní a potenciální. Funkcionál F,*

$$F(x) = \int_0^1 \langle Atx, x\rangle \; \mathrm{d}t, \quad x \in X,$$

je potenciálem operátoru A a pro libovolné $x \in X$ a $x^* \in X^*$ platí vztahy

$$F^*(x^*) = F^*(0) + \int_0^1 \left\langle x^*, A^{-1}tx^*\right\rangle \; \mathrm{d}t, \qquad F^*(0) = -\,F(A^{-1}0),$$

$$F(x) + F^*(x^*) - \langle x^*, x\rangle \geq 0, \qquad F(x) + F^*(Ax) - \langle Ax, x\rangle = 0,$$

kde F^* je potenciál operátoru A^{-1}.

□

Důsledek 3.3.2 *Nechť $A : X \to X^*$ je ryze monotónní, koercivní a potenciální operátor s potenciálem F. Pak pro libovolné $f \in X^*$ existuje jediné řešení $u \in X$ rovnice $Au = f$, které minimizuje potenciál úlohy $G = F - f$ a platí*

$$\begin{aligned} G(u) \quad &\equiv \quad F(u) - \langle f, u\rangle \;=\; \min_{v\in X} \left[\int_0^1 \langle Atv, v\rangle \; \mathrm{d}t \;-\; \langle f, v\rangle\right] \\ &= \quad -\int_0^1 \left\langle f, A^{-1}tf\right\rangle \; \mathrm{d}t \;+\; \int_0^1 \left\langle AtA^{-1}\,0, A^{-1}\,0\right\rangle \; \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Cvičení 3.3.2 Dokažte větu 3.3.3 a důsledek 3.3.2.

♣

3.4 Numerické metody

V tomto odstavci pojednáme o základních numerických metodách řešení operátorových rovnic s monotónními potenciálními operátory. K nim patří metoda Ritzova, gradientní metoda (největšího spádu) a projekčně-iterační metoda, která již byla vyšetřována v 2. kapitole. Omezíme se také pouze na případy, kdy řešení operátorových rovnic je jediné a existuje pro každou pravou stranu. Kvůli zjednodušení výkladu budeme předpokládat, že prostor X je separabilní a reflexivní Banachův prostor.

3.4.1 Ritzova metoda

Z teorie lineárních operátorových rovnic je známo, že Galerkinova metoda a Ritzova metoda řešení těchto rovnic se symetrickými a nezápornými operátory dávají za určitých podmínek stejnou aproximaci. Toto také platí v případě obecně nelineární rovnice $Au = f$, kde $A : X \to X^*$ a $f \in X^*$, A je ryze monotónní, koercivní a potenciální operátor. Pak podle věty 3.4.1 tato rovnice má jediné řešení. Nejprve uvedeme definici Ritzovy aproximace řešení rovnice $Au = f$ s potenciálním operátorem A.

Definice 3.4.1 *Nechť $A : X \to X^*$ je potenciální operátor s potenciálem F. Nechť $\{h_i\}$ je hustá množina v prostoru X. Pak u_n se nazývá n-tá Ritzova aproximace řešení rovnice $Au = f$, $f \in X^*$, jestliže platí*

$$F(u_n) - \langle f, u_n \rangle \;=\; \min_{v \in X_n} \left(F(v) - \langle f, v \rangle \right),$$

kde

$$X_n = \mathcal{L}(\{h_i\}_{i=1}^n).$$

Vztah mezi Ritzovou a Galerkinovou aproximací je uveden v následující větě.

Věta 3.4.1 *Nechť $A : X \to X^*$ je monotónní a potenciální operátor s potenciálem F. Pak u_n je Ritzovou aproximací řešení rovnice $Au = f$, $f \in X^*$, právě tehdy, když u_n je Galerkinovou aproximací na prostoru X_n, t.j.*

$$A_n u_n = b_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Jestliže u_n je Ritzova aproximace, pak pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ a $h \in X_n$ je

$$F(u_n + th) - F(u_n) \geq t \langle f, h \rangle .$$

Odtud snadno plyne pro libovolné $h \in X_n$ rovnost

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(F(u_n + th) - F(u_n) \right) \;-\; \langle f, h \rangle \;=\; \langle Au_n - f, h \rangle$$

a tím u_n je také Galerkinova aproximace na prostoru X_n.

Na druhé straně, je-li $u_n \in X_n$ Galerkinova aproximace, pak podle věty 1.7.5, je pro libovolné $x, y \in X$

$$F(y) \geq F(x) + \langle Ax, y - x \rangle$$

a odtud dostaneme, že pro libovolné $v \in X_n$ je

$$\left(F(v) - \langle f, v \rangle \right) \;-\; \left(F(u_n) - \langle f, u_n \rangle \right) \;\geq\; \langle Au_n - f, v - u_n \rangle = 0,$$

což znamená, že u_n je Ritzova aproximace.

□

Na základě této ekvivalence a s pomocí výše uvedených vět o Galerkinově metodě, lze zformulovat věty o konvergenci Ritzovy metody. Uvedeme jedinou, která je důležitá pro aplikace.

Věta 3.4.2 *Nechť $A : X \to X^*$ je ryze monotónní, koercivní a potenciální operátor, který splňuje podmínku (S), tzn. je splněna následující implikace*

$$[w_n \rightharpoonup w,\ \langle Aw_n - Aw, w_n - w\rangle \to 0] \quad \Longrightarrow \quad w_n \to w.$$

Pak rovnice $Au = f$ má pro každou pravou stranu $f \in X^*$ jediné řešení, ke kterému konverguje Ritzova aproximace $u_n \in X_n$.

□

Cvičení 3.4.1 Dokažte větu 3.4.2.
Návod. Využijte ekvivalence Ritzovy a Galerkinovy metody a tvrzení věty 2.4.1.

♣

3.4.2 Iterační metody

V tomto odstavci budou uvedeny dvě iterační metody řešení rovnice $Au = b$, kde $A : X \to X^*$ je monotónní operátor a potenciální operátor a X je reálný, separabilní Banachův prostor takový, že prostory X a X^* jsou striktně konvexní. Je-li prostor X^* striktně konvexní, pak dualizační zobrazení $\mathcal{U} : X \to X^*$ pro prostor X je jednoznačné (viz 1. kapitola). Zvolme za t_i, $i = 0, 1, \cdots$ dostatečně malá nezáporná čísla a sestrojme posloupnost $\{v_i\}$ definovanou předpisem

$$v_{i+1} = v_i - t_i z_i, \qquad \mathcal{U} z_i = Av_i - b, \quad i = 0, 1, \cdots, \tag{3.6}$$

kde $v_0 \in X$ je libovolně zvolený prvek. Tato posloupnost je podobná posloupnosti v iterační metodě řešení operátorové rovnice s monotónním operátorem v Hilbertově prostoru (viz věta 3.4.3). Jak již bylo řečeno v 2. kapitole, nelze obecně v Banachových prostorech použít metodu postupných aproximací pro nalezení pevného bodu operátoru T_t:

$$Au = b \quad \Longleftrightarrow \quad u = T_t u, \qquad T_t x = x - t\mathcal{U}^{-1}(Ax - b)\ \forall x \in X$$

k řešení studované úlohy $Au = b$. Za určitých předpokladů lze však dokázat konvergenci takto sestrojené posloupnosti k řešení studované úlohy s monotónním a potenciálním operátorem A. Dokážeme jednu z hlavních vět týkající se konvergence uvedené iterační metody. Na závěr tohoto odstavce pak bude uvedena věta, která zpřesňuje věty o konvergenci iteračních metod uvedené v předcházející kapitole (viz věta 2.4.2 a věta 2.4.3). Ukazuje se, že za předpokladu potenciálnosti lze najít o něco lepší odhad chyby uvedených iteračních metod.

Věta 3.4.3 *Nechť X je reálný, separabilní a reflexivní Banachův prostor takový, že prostory X a X^* jsou striktně konvexní. Předpokládejme, že operátor $A : X \to X^*$ splňuje následující předpoklady:*

1. *Operátor A je ryze monotónní, koercivní a potenciální operátor splňující podmínku (S).*

2. *Operátor A je ohraničeně Lipschitzovsky spojitý, tzn. existuje rostoucí funkce $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tak, že platí*

$$\|Au - Av\| \le M(R)\,\|u - v\|, \quad R = \max(\|u\|, \|v\|) \ \forall\, u, v \in X.$$

Navíc budeme předpokládat, že $M(R) \to +\infty$ pro $R \to +\infty$.

Zvolme $a > 0$. Pro libovolné $v_0 \in X$ sestrojme posloupnost $\{v_i\}$ definovanou předpisem

$$v_{i+1} = v_i - t_i z_i, \qquad \mathcal{U} z_i = Av_i - b, \quad i = 0, 1, \cdots,$$

kde

$$t_i = \min\left\{1,\ \frac{2}{a + M(\|v_i\| + \|Av_i - b\|)}\right\}.$$

Pak posloupnost $\{v_i\}$ konverguje k jedinému řešení u úlohy $Au = b$.

Důkaz. Označme potenciál úlohy symbolem G, $G = F - b$, tzn. platí

$$G(x) = \int_0^1 \langle Atx, x\rangle \,\mathrm{d}t - \langle b, x\rangle \quad \forall x \in X.$$

Postupně dokážeme následující vlastnosti.

1. $G(v_i) \ge G(v_{i+1})$ a $G(v_i) - G(v_{i+1}) \to 0$.
2. $G(v_0) \ge G(v_i) \ge \|v_i\| \left(\frac{1}{2} M\left(\frac{\|v_i\|}{2}\right) - \|b - \frac{1}{2} A0\|\right)$.
3. Existuje $+\infty > R > 0$ takové, že platí $\|u\|,\ \|v_i\| \le R \quad \forall i = 0, 1, \cdots$.
4. $z_i \to 0$.
5. $v_i \rightharpoonup u$.
6. $\langle Av_i - Au, v_i - u\rangle \to 0$.
7. $v_i \to u$.

1. Označme $M_i = M(\|v_i\| + \|Av_i - b\|)$ a $s_i = \langle Av_i - b, v_i - v_{i+1}\rangle$. Pak z lemmatu 3.1.2, vlastnost b), obdržíme

$$
\begin{aligned}
G(v_i) - G(v_{i+1}) = \int_0^1 \langle A(v_{i+1} + s(v_i - v_{i+1})) - b, v_i - v_{i+1}\rangle \,\mathrm{d}s = \\
= s_i + \int_0^1 \langle A(v_{i+1} + s(v_i - v_{i+1})) - Av_i, v_i - v_{i+1}\rangle \,\mathrm{d}s = \\
= t_i\|z_i\|^2 + \int_0^1 \langle A(v_{i+1} + s(v_i - v_{i+1})) - Av_i, v_i - v_{i+1}\rangle \,\mathrm{d}s \geq \\
\geq t_i\|z_i\|^2 - M_i\|v_i - v_{i+1}\|^2 \int_0^1 (1-s)\,\mathrm{d}s = \\
= t_i\|z_i\|^2 \left(1 - \frac{M_i t_i}{2}\right) \quad \geq \quad \frac{t_i\, a}{M_i + a}\|z_i\|^2 \quad \geq 0.
\end{aligned}
$$

Jelikož posloupnost $G(v_i)$ je zdola ohraničená (viz důsledek 3.2.2) a nerostoucí, existuje konečné číslo d tak, že platí $G(v_i) \to d$ a tím

$$G(v_i) - G(v_{i+1}) \to 0.$$

2. Z nerovnosti odvozené v bodě 1. obdržíme

$$
\begin{aligned}
G(v_0) \geq G(v_i) = \int_0^1 \langle Asv_i, v_i\rangle \,\mathrm{d}s - \langle b, v_i\rangle = \\
= \int_0^1 \langle Asv_i - A0, sv_i\rangle \,\frac{\mathrm{d}s}{s} - \langle b - A0, v_i\rangle \geq \\
\geq \int_{1/2}^1 \langle Asv_i - A0, sv_i\rangle \,\frac{\mathrm{d}s}{s} - \langle b - A0, v_i\rangle \geq \\
\geq \left\langle A\frac{v_i}{2}, \frac{v_i}{2}\right\rangle - \left\langle b - \frac{1}{2}A0, v_i\right\rangle \geq \\
\geq \|v_i\| \left(\frac{1}{2}M\left(\frac{\|v_i\|}{2}\right) - \|b - \frac{1}{2}A0\|\right).
\end{aligned}
$$

3. Z nerovnosti v bodě 2. a z předpokladu věty týkající se funkce $M(r)$ plyne existence kladného čísla R takového, že platí $\|v_i\| \leq R \quad \forall i = 0, 1, \cdots$.

4. Pro $i = 0,\, 1, \cdots$ je

$$
\begin{aligned}
M_i &= M(\|v_i\| + \|Av_i - b\|) \leq M(R + 2RM(R)) = c_0 \\
t_i &= \min\left\{1,\, \frac{2}{a + M_i}\right\} \geq \min\left\{1,\, \frac{2}{a + c_0}\right\} = c > 0.
\end{aligned}
$$

Odtud a z nerovnosti v bodě 1. plyne

$$\frac{c_0}{c_0 + a}\,\|z_i\|^2 \leq G(v_i) - G(v_{i+1}) \;\to\; 0,$$

tzn. $\|z_i\| \to 0$.

5. Posloupnost $\{v_i\}$ je ohraničená a tím existuje (prostor X je reflexivní) vybraná podposloupnost v_{i_k}, která slabě konverguje k nějakému prvku v. Z konstrukce iterací obdržíme pro libovolné $x \in X$

$$\begin{aligned} &\langle b - Ax, v - x\rangle = \\ &= \langle Av_{i_k} - Ax, v_{i_k} - x\rangle - \langle Uz_{i_k}, v_{i_k} - x\rangle + \langle b - Ax, v - v_{i_k}\rangle = \\ &= \lim_{k\to+\infty} \langle Av_{i_k} - Ax, v_{i_k} - x\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

   Podle lemmatu 2.1.3, tvrzení 4.b), je $Av = b$ a proto $v = u$. Dokázali jsme, že každá vybraná slabě konvergující podposloupnost z posloupnosti $\{v_i\}$ má za slabou limitu řešení u, a proto $v_i \rightharpoonup u$ (viz tvrzení 1.1.1).

6. Z konstrukce iterací a z konvergence $\|z_i\| \to 0$ (viz bod 4.) obdržíme pro $i \to +\infty$:

$$\langle Av_i - Au, v_i - u\rangle = \langle Av_i - b, v_i - u\rangle = \langle Uz_i, v_i - u\rangle \leq 2R\|z_i\| \to 0.$$

7. Z podmínky (S) plyne $v_i \to u$.

$\square$

Zřejmě

$$Uz_i = Av_i - b = \operatorname{grad} G(v_i)$$

a z tohoto důvodu patří metoda definovaná předpisem (3.6) k tzv. gradientním metodám. Jelikož $-z_i$ reprezentuje směr největšího poklesu hodnot potenciálu G v bodě v_i, patří tato metoda k metodám největšího spádu.

Z důkazu věty 3.4.3 je patrné, že "dynamický" krok v iteracích (3.6) reprezentovaný parametrem t_i lze zaměnit konstantou c,

$$c = \min\left\{1, \frac{2}{a + c_0}\right\}, \ c_0 = M(R + 2Rm(R)).$$

Cvičení 3.4.2 V předcházející větě předpokládejme, že operátor A je Lipschitzovsky spojitý s konstantou L , tzn. pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \leq L\|x - y\|^2.$$

Ukažte, že v iterační metodě (3.6) lze zvolit

$$t_i = \frac{2}{a + L} \quad \forall i.$$

Cvičení 3.4.3 Předpokládejme, že operátor A je ohraničeně Lipschitzovsky spojitý a stejnoměrně monotónní, potenciální operátor. Dokažte, že jsou splněny předpoklady věty 3.4.3.

Projekčně-iterační metoda je kombinace Ritzovy metody a výše uvedené gradientní metody, přičemž po jednom kroku Ritzovy metody následuje jeden krok gradientní metody. Nechť $\{h_i\}$ je hustá množina v prostoru X a u_n je n-tá Ritzova aproximace řešení rovnice $Au = b,\ b \in X^*$, tzn. platí

$$F(u_n) - \langle b, u_n\rangle \;=\; \min_{v\in X_n} (F(v) - \langle b, v\rangle),$$

kde

$$X_n = \mathcal{L}(\{h_i\}_{i=1}^n).$$

Symbolem P_n označme vnoření prostoru X_n do prostoru X. Sestrojme následující operátory:

$$\mathcal{U}_{n+1} = P^*_{n+1}\,\mathcal{U}\,P_{n+1}, \qquad A_{n+1} = P^*_{n+1}\,A\,P_{n+1}, \qquad b_{n+1} = P^*_{n+1}\,b.$$

Pak na základě věty 3.4.3 lze zformulovat následující větu o konvergenci projekčně-iterační metody. Důkaz se liší od důkazu věty 3.4.3 jen velmi málo a z tohoto důvodu jej přenecháme s návodem čtenáři.

Věta 3.4.4 *Nechť jsou splněny předpoklady věty 3.4.3. Zvolme libovolně počáteční prvek w_0 a kladné číslo a. Sestrojme posloupnost $\{w_n\}$ takto:*

$$w_{n+1} = w_n - t_n z_n, \qquad \mathcal{U}_{n+1} z_n = A_{n+1} w_n - b_{n+1}, \quad n = 0,\, 1, \cdots,$$

kde

$$t_n = \min\left\{1,\ \frac{2}{a + M(\|w_n\| + \|Aw_n - b\|)}\right\}.$$

Pak posloupnost $\{w_n\}$ konverguje k jedinému řešení u úlohy $Au = b$.

□

Cvičení 3.4.4 Dokažte větu 3.4.4
Návod. Postupně dokažte jako v důkaze věty 3.4.3 následující vlastnosti:

1. $G(w_n) \geq G(w_{n+1})$ a $G(w_n) - G(w_{n+1}) \to 0$.
2. $G(w_0) \geq G(w_n) \geq \|w_n\| \left(\frac{1}{2} M\left(\frac{\|w_n\|}{2}\right) - \|b - \frac{1}{2}A0\|\right)$.
3. Existuje $+\infty > R > 0$ takové, že platí $\|u\|,\ \|w_n\| \leq R \quad \forall n = 0, 1, \cdots$.
4. $z_n \to 0$ jakmile $n \to +\infty$.
5. $w_n \rightharpoonup u$. Posloupnost $\{w_n\}$ je ohraničená a tím existuje vybraná podposloupnost w_{n_k}, která slabě konverguje k nějakému prvku w. Podle lemmatu 2.1.3 dokažte, že $Aw = b$ a proto $w = u$. Za tím účelem zvolte za $x \in X$ libovolný prvek. Sestrojme posloupnost $\{x_i\}$ tak, aby $x_i \to x$. Dokažte, že platí

$$\begin{aligned} \langle b - Ax, w - x\rangle &= \lim_{i\to\infty} \langle b - Ax_i, w - x_i\rangle = \\ &= \lim_{i\to\infty}\lim_{k\to\infty} (\langle Aw_{n_k} - Ax_i, w_{n_k} - x_i\rangle - \langle \mathcal{U}\, z_{n_k}, w_{n_k} - x_i\rangle) = \\ &= \lim_{i\to\infty}\lim_{k\to\infty} \langle Aw_{n_k} - Ax_i, w_{n_k} - x_i\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

6. $\langle Aw_n - Au, w_n - u\rangle \to 0$. Nejprve s využitím lemmatu 2.1.3 dokažte, že množina $\{Aw_n\}$ je ohraničená, tzn. existuje konstanta $R_2 < \infty$ tak, že platí $\|Aw_n\| \le R_2$. Za tím účelem dokažte nerovnost

$$\langle Aw_n, w_n\rangle = \langle \mathcal{U}z_n + b, w_n\rangle \le R_1 < \infty, \quad R_1 = R(\|z_n\| + \|b\|).$$

Nechť u_n je n-tá Ritzova aproximace řešení u studované úlohy. Pak

$$\langle Aw_n - Au, w_n - u\rangle = \langle Aw_n - Au, w_n - u_n\rangle + \langle Aw_n - Au, u_n - u\rangle\,,$$

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{U}z_n, w_n - u_n\rangle + \langle Aw_n - b, u_n - u\rangle \le \\ &\le \|z_n\|\, 2R + (R_2 + \|b\|)\, \|u_n - u\| \to 0.\end{aligned}$$

7. Z podmínky (S) a z bodu 6. plyne $w_n \to u$.

♣

Cvičení 3.4.5 Nechť jsou splněny předpoklady věty 2.4.3 a operátor A je navíc potenciální. Pak posloupnost $\{w_n\}$ sestrojená podle předpisu uvedeného v této větě, tzn.

$$\mathcal{U}_n(w_n) = \mathcal{U}_n(w_{n-1}) - t\,(A_n w_{n-1} - b_n), \quad n = 1, \cdots,$$

konverguje pro libovolné $t \in (0, 2/L)$ a libovolné w_0 k řešení u úlohy $Au = b$.
Návod. Ze silné monotonnosti plyne ryzí monotonnost, koercivita a splnění podmínky (S). Jelikož operátor A je Lipschitzovsky spojitý, lze zvolit ve větě 3.4.4

$$t_i = \frac{2}{a + L} \quad \forall i.$$

Jelikož dualizační zobrazení $\mathcal{U}$ je v Hilbertově prostoru spojité a lineární, jsou posloupnosti sestrojené podle předpisu ve větách 2.4.3 a 3.4.4 totožné za předpokladu, že počáteční prvek je stejný.

♣

Následující věta zpřesňuje tvrzení věty 2.4.2 a věty 2.4.3 v případě, že operátor je navíc potenciální.

Věta 3.4.5 *Nechť X je reálný, separabilní Banachův prostor. Předpokládejme, že operátor $A : X \to X^*$ splňuje následující předpoklady:*

1. *Operátor A je silně monotónní, tzn. existuje konstanta $M > 0$ taková, že pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \ge M\|x - y\|^2.$$

2. *Operátor A je Lipschitzovsky spojitý, tzn. existuje konstanta $L > 0$ taková, že pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \le L\|x - y\|^2.$$

3. Operátor A je potenciální s potenciálem F.

Zvolme $b \in X^*$.

a) Pro libovolné $v_0 \in X$ a $t \in (0, 2/L)$ sestrojme posloupnost $\{v_i\}$ definovanou předpisem

$$\mathcal{U}(v_i) = \mathcal{U}(v_{i-1}) - t\,(Av_{i-1} - b), \quad i = 1, \cdots .$$

Pak posloupnost $\{v_i\}$ konverguje k jedinému řešení u úlohy $Au = b$ s chybou

$$\|v_i - u\| \le \frac{q^i t}{1-q}\,\|Av_0 - b\|,$$

kde

$$q = q(t) = \max\,[1 - tM, tL - 1] < 1.$$

b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje jediné Galerkinovo řešení u_n úlohy $A_n u_n = b_n$ na prostoru X_n, kde

$$A_n = P_n^*\,A\,P_n : X_n \to X_n^* \qquad \text{a} \qquad b_n = P_n^*\,b,$$

P_n je vnoření prostoru X_n do prostoru X a posloupnost $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, konečně rozměrných podprostorů je limitně hustá v prostoru X. Pro libovolné $v_{n,0} \in X$ a $t \in (0, 2M/L)$ sestrojme posloupnost $\{v_{n,i}\}_i$ definovanou předpisem

$$\mathcal{U}_n(v_i) = \mathcal{U}_n(v_{i-1}) - t\,(A_n v_{n,i-1} - b_n), \quad i = 1, \cdots,$$

kde $\mathcal{U}_n : X_n \to X_n^*$ je dualizační zobrazení pro prostor X_n. Pak posloupnost $\{v_{n,i}\}$ konverguje pro $i \to \infty$ k jedinému řešení $u_{n,i}$ úlohy $A_n u_n = b_n$ s chybou

$$\|v_{n,i} - u_n\| \le \frac{q^i t}{1-q}\,\|A_n v_{n,0} - b_n\| \le \frac{q^i t}{1-q}\,\|Av_{n,0} - b\|$$

kde

$$q = q(t) = \max\,[1 - tM, tL - 1] < 1.$$

□

Srovnejme odhad chyby v této větě a ve větách 2.4.2 a 2.4.3. Platí

$$\min q(t) = q(t_1) = \frac{L-M}{L+M} \qquad \text{a} \quad \min k(t) = k(t_0) = \left(1 - (\frac{M}{L})^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

kde

$$t_0 = \frac{M}{L^2} \qquad \text{a} \quad t_1 = \frac{2}{L+M}.$$

Odtud obdržíme

$$q(t_1) = k(t_0)\,\frac{L}{L+M}\,\left(\frac{L-M}{L+M}\right)^{1/2} < k(t_0).$$

Snadno se ověří, že pro $t \in (0, 2/L)$ je $q(t) < k(t)$.

Cvičení 3.4.6 Nechť jsou splněny předpoklady věty 3.4.5. Ukažte, že funkce $q = q(t)$ nabývá svého minima na intervalu $(0, 2/L)$ v bodě $t = t_1$,

$$t_1 = \frac{2}{L+M}, \qquad \text{a} \quad q_1 \equiv q(t_1) = \frac{L-M}{L+M}.$$

Dokažte, že pro $t \in (0, 2/L)$ je $q(t) < k(t)$.

Zvolme $t = t_1 = \frac{2}{L+M}$ a $v_0 = 0$. Dokažte, že pro všechna $i \in \mathbb{N}$ je

$$\|v_i\| \leq \frac{2}{M}\,\|A0 - b\|$$

a tím k platnosti tvrzení věty 3.4.5 stačí předpokládat splnění podmínek kladených na operátor A pouze uvnitř koule K,

$$K = \{v \in X;\ \|v\| \leq \frac{2}{M}\,\|A0 - b\|\}.$$

♣

K důkazu věty 3.4.5 je zapotřebí následující tvrzení, jehož důkaz je poněkud technicky náročnější.

Lemma 3.4.1 *Nechť X je reálný, separabilní Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)$. Předpokládejme, že potenciální operátor $B : X \to X$ s potenciálem F splňuje následující předpoklady:*

1. *Operátor B je silně monotónní, tzn. existuje konstanta $M > 0$ taková, že pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$(Bx - By, x - y) \geq M\|x - y\|^2.$$

2. *Operátor B je Lipschitzovsky spojitý, tzn. existuje konstanta $L > 0$ taková, že pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$(Bx - By, x - y) \leq L\|x - y\|^2.$$

Pak pro operátor U_t definovaný předpisem

$$U_t x = x - tBx \quad \forall x \in X,$$

platí pro $t > 0$ odhad

$$\|U_t x - U_t y\| \ \leq\ q(t)\,\|x - y\|, \qquad q(t) = \max\{1 - tM, tL - 1\}.$$

Je-li $t \in (0, 2/L)$, pak operátor U_t je kontrahující, tzn. $0 < q(t) < 1$.

Důkaz. Označme G_t potenciál operátoru U_t. Podle lemmatu 3.2.2 je operátor U_t demispojitý a podle lemmatu 3.1.2 je pro každé $x \in X$

$$G_t(x) = G_t(0) + \int_0^1 (U_t sx, x)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\|x\|^2 - t\int_0^1 (Bsx, x)\,\mathrm{d}s. \tag{3.7}$$

Podle definice G-derivace je pro každé $x, y, z \in X$

$$(U_t y - U_t x, z) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left[G_t(y + sz) - G_t(y) - G_t(x + sz) + G_t(x) \right]. \qquad (3.8)$$

Dokážeme, že pro libovolné $x, u, v \in X$ platí odhad

$$G_t(x + u + v) - G_t(x + u) - G_t(x + v) + G_t(x) \;\le\; q(t)\|u\|\|v\|, \qquad (3.9)$$

kde $q(t) = \max\{1 - tM, tL - 1\}$ Pak dosazením do (3.8) obdržíme

$$(U_t y - U_t x, z) \le \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left[q(t)\|y - x\|\|z\|\, s \right] \;=\; q(t)\|y - x\|\|z\|$$

a odtud plyne nerovnost v lemmatu:

$$\|U_t y - U_t x\| \;=\; \sup_{\|z\|=1} (U_t y - U_t x, z) \;\le\; q(t)\, \|x - y\|,$$

kde $q(t) = \max\{1 - tM, tL - 1\}$ Stačí tedy dokázat platnost nerovnosti (3.9). Jelikož operátor B je potenciální, podle lemmatu 3.1.2 pro libovolné $x, y \in X$ platí

$$\int_0^1 \langle Bsx, x\rangle \,\mathrm{d}s \;-\; \int_0^1 \langle Bsy, y\rangle \,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^1 \langle B(y + s(x - y)), x - y\rangle \,\mathrm{d}s. \qquad (3.10)$$

Jelikož

$$\|x+u+v\|^2 - \|x+u\|^2 - \|x+v\|^2 + \|x\|^2 = 2(u, v) = 2\left(\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 \right),$$

plyne z (3.7)

$$G_t(x+u+v) - G_t(x+u) - G_t(x+v) + G_t(x) \;=\; \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 - I_t, \qquad (3.11)$$

kde

$$I_t = t \int_0^1 \left[J_1 \;-\; J_2 \right] \mathrm{d}s,$$

$J_1 \;=\; (Bs(x + u + v), x + u + v) \;-\; (Bs(x + u), x + u)$ a
$J_2 \;=\; (Bs(x + v), x + v) \;-\; (Bsx, x)$.

Přidáním a odečtením dalších členů, které obsahují výraz $(u+v)/2$ a výraz $(u - v)/2$ dostaneme

$$I_t = t(I_1 + I_2 - I_3 - I_4) = t(I_1 - I_4) - t(I_3 - I_2), \qquad (3.12)$$

kde

$$I_1 = \int_0^1 (Bs(x + u + v), x + u + v)\,\mathrm{d}s - \int_0^1 (Bs(x + \frac{u+v}{2}), x + \frac{u+v}{2})\,\mathrm{d}s,$$

$$I_2 = \int_0^1 (Bs(x + \frac{u+v}{2}), x + \frac{u+v}{2})\mathrm{d}s - \int_0^1 (Bs(x+u), x+u)\,\mathrm{d}s,$$

$$I_3 = \int_0^1 (Bs(x+v), x+v)\,\mathrm{d}s - \int_0^1 (Bs(x + \frac{u+v}{2}), x + \frac{u+v}{2})\,\mathrm{d}s,$$

$$I_4 = \int_0^1 (Bs(x + \frac{u+v}{2}), x + \frac{u+v}{2})\,\mathrm{d}s - \int_0^1 (Bs(x), x)\,\mathrm{d}s.$$

Výrazy I_1, I_2, I_3, I_4 upravíme použitím (3.10). Dostaneme

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left(B(x + \frac{u+v}{2} + s\frac{u+v}{2})\,,\ \frac{u+v}{2}\right)\,\mathrm{d}s,\\
I_2 &= \int_0^1 \left(B(x + u + s\frac{v-u}{2})\,,\ \frac{v-u}{2}\right)\,\mathrm{d}s,\\
I_3 &= \int_0^1 \left(B(x + \frac{u+v}{2} + s\frac{v-u}{2})\,,\ \frac{v-u}{2}\right)\,\mathrm{d}s,\\
I_4 &= \int_0^1 \left(B(x + s\frac{v+u}{2})\,,\ \frac{v+u}{2}\right)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Z předpokladů věty obdržíme následující odhady:

$$I_1 - I_4 = \int_0^1 \left(B(x + \frac{u+v}{2} + s\frac{u+v}{2}) - B(x + s\frac{v+u}{2}, \frac{u+v}{2}\right)\,\mathrm{d}s \geq$$

$$\geq\ M\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2,$$

$$I_3 - I_2 = \int_0^1 \left(B(x + \frac{u+v}{2} + s\frac{v-u}{2}) - B(x + u + s\frac{v-u}{2}), \frac{v-u}{2}\right)\,\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq L\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2.$$

Dosazením do (3.12) dostaneme odhad

$$I_t \geq tM\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 - tL\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2$$

a spolu s identitou (3.11) obdržíme

$$\begin{aligned}
&G_t(x+u+v) - G_t(x+u) - G_t(x+v) + G_t(x)\ \leq\\
&\leq\ (1 - tM)\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + (tL - 1)\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 \leq\\
&\leq\ \frac{q(t)}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).
\end{aligned}$$

Složitější je z tohoto odhadu získat odhad (3.9). Pro libovolné $k, l \in \mathbb{N}$ označme

$$u_{i,k} = \frac{i}{k}u, \quad v_{i,l} = \frac{i}{l}v, \quad x_{i,j} = x + u_{i,k} + v_{j,l}, \quad i = 0, 1, \cdots, k, \quad j = 0, 1, \cdots, l.$$

Pak postupně s použitím výše odvozeného odhadu obdržíme

$$G_t(x+u+v) - G_t(x+u) - G_t(x+v) + G_t(x) =$$
$$= G_t(x_{k,l}) - G_t(x_{0,l}) - G_t(x_{k,0}) + G_t(x_{0,0}) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left[G_t(x_{i,j}) - G_t(x_{i,j} - u_{1,k}) - G_t(x_{k,j} - v_{1,l}) + G_t(x_{i,j} - u_{1,k} - v_{1,l})\right] \leq$$

$$\leq \frac{q(t)}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left[\|u_{1,k}\|^2 + \|v_{1,l}\|^2\right] = \frac{q(t)}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left[\left\|\frac{u}{k}\right\|^2 + \left\|\frac{v}{l}\right\|^2\right] =$$
$$= \frac{q(t)}{2}\left[\frac{l}{k}\|u\|^2 + \frac{k}{l}\|v\|^2\right].$$

Zvolme k a l tak, aby pro $v \neq 0$ platilo

$$\left|\left\|\frac{u}{v}\right\| - \frac{k}{l}\right| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak pro $n > n_0$ je

$$\frac{\|u\|^2\,\|v\|}{\|v\| + \frac{1}{n}\|v\|} + \|u\|\|v\| - \frac{1}{n}\|v\|^2 < \frac{l}{k}\|u\|^2 + \frac{k}{l}\|v\|^2 <$$
$$< \frac{\|u\|^2\,\|v\|}{\|v\| - \frac{1}{n}\|v\|} + \|u\|\|v\| + \frac{1}{n}\|v\|^2.$$

Odtud limitním přechodem $n \to \infty$ obdržíme

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{l}{k}\|u\|^2 + \frac{k}{l}\|v\|^2\right\} = 2\|u\|\|v\|,$$

a tím je dokázána nerovnost (3.9) (která zřejmě platí i pro $v = 0$) a odhad

$$\|U_t x - U_t y\| \leq q(t)\,\|x - y\|, \qquad q(t) = \max\{1 - tM, tL - 1\}.$$

Nechť $t \in (0, 2/L)$. Z definice funkce $q(t)$ ihned obdržíme

$$q(t) = \begin{cases} 1 - tM, & \text{je} - \text{li} \quad 0 < t \leq \frac{2}{M+L}, \\ \\ tL - 1, & \text{je} - \text{li} \quad \frac{2}{M+L} \leq t < \frac{2}{L}. \end{cases}$$

Odtud plyne nerovnost $0 < q(t) < 1$.

□

S pomocí lemmatu 3.4.1 lze již snadno dokázat větu 3.4.5, což ponecháme čtenáři.

Cvičení 3.4.7 Dokažte větu 3.4.5.

♣

Na závěr tohoto odstavce dokážeme, že každá posloupnost, která konverguje k přesnému řešení rovnice s monotónním a potenciálním operátorem, je minimalizující.

Věta 3.4.6 *Nechť $A : X \to X^*$ je monotónní, potenciální operátor s potenciálem F a $u \in X$ je jediné řešení rovnice $Au = b$, $b \in X^*$. Pak každá posloupnost, která konverguje v normě prostoru X k řešení u, je minimalizující, tzn. platí implikace*

$$u_n \to u \quad \Longrightarrow \quad G(u_n)$$

a

$$\begin{aligned} & G(u_n) \equiv F(u_n) - \langle b, u_n \rangle = \\ & = \left[\int_0^1 \langle Atu_n, u_n \rangle \, \mathrm{d}t \; - \; \langle b, u_n \rangle \right] \; \to \; G(u) = \min_{x \in X} G(u). \end{aligned}$$

Důkaz. Z lemmatu 3.2.1 a s použitím věty 1.7.5 obdržíme

$$\begin{aligned} G(u) \qquad & \le G(u_n) \le G(u) + \langle Au_n - b, u_n - u \rangle \le \\ & \le G(u) + (\|Au\| + \|b\|) \, \|u_n - u\| \; \to \; G(u) \end{aligned}$$

a tím je věta dokázána.

□

Kapitola 4

Aplikace

V této kapitole ve stručnosti uvedeme aplikaci teorie monotónních a potenciálních operátorů k problematice řešení nelineárních diferenciálních rovnic. Pro hlubší seznámení s touto látkou doporučujeme publikace [4],[9], [11], [13] a [6], které jsme nejvíce používali pro přípravu těchto skript. V těchto publikacích naleznete také aplikace této teorie k řešení variačních nerovnic ([4], [11]) a nelineárních integrálních rovnic ([4], [13]).

4.1 Diferenciální rovnice

V tomto odstavci zavedeme označení podobné jako v knize [9]. Pokud nebude řečeno jinak, tak budeme předpokládat, že $\Omega \subset \mathbb{R}_N$ je souvislá, ohraničená oblast s Lipschitzovskou hranicí, tzn. je třídy $\mathcal{C}^{0,1}$ (viz [9]). Budeme vyšetřovat existenci a jednoznačnost slabého řešení eliptické okrajové úlohy $2k$-tého řádu. Nejprve zavedeme potřebná označení a také pojmy používané v teorii parciálních diferenciálních rovnic a v teorii Sobolevových prostorů.

Označení a pojmy.

1. Nechť $N \in \mathbb{N}$. Připomeňme z 1. kapitoly, že vektor $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, jehož složky jsou nezáporná celá čísla α_i, se nazývá multiindexem (přesněji N-rozměrný) a číslo
$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$$
délkou tohoto multiindexu. Snadno se spočte, že počet κ všech N-rozměrných multiindexů α délky nejvýše k je
$$\kappa = \frac{(N+k)!}{N!\,k!}.$$

2. Nechť $N \in \mathbb{N}$. Je-li $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ N-rozměrný multiindex a $u = u(x)$ funkce definovaná na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, označíme symbolem D^α parciální derivaci (viz 1. kapitola)

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_N^{\alpha_N}}.$$

Zavedeme symbol $\delta_k u$ pro vektorovou funkci, jejíž složky tvoří všechny derivace funkce u postupně řádu $0, 1, \cdots, k$,

$$\delta_k u = \{D^\alpha u\}_{|\alpha| \le k} = \left\{ u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \cdots, \frac{\partial^k u}{\partial x_N^k} \right\},$$

přičemž u smíšených derivací nerozlišujeme pořadí derivování, ztotožňujeme je a tyto stejné derivace vystupují ve vektoru $\delta_k u$ pouze jednou, např.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad \delta_k u = \left\{ \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \cdots \right\}.$$

Složky vektoru $\delta_k u$ uspořádáme lexikograficky takto: první složka bude funkce u, pak následují derivace prvního řádu, pak druhého řádu atd., až nakonec derivace k-tého řádu. Derivace stejného řádu budou uspořádány takto: jsou-li $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ a $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_N)$ dva multiindexy délky $s \le k$, bude derivace $D^\alpha u$ před derivací $D^\beta u$, je-li pro nějaké $n \in \{1, \cdots, N\}$

$$\alpha_n > \beta_n, \quad \alpha_i = \beta_i \quad \text{pro} \quad i = 1, \cdots, n-1.$$

Označíme ještě symbolem $\widehat{\delta}_k u$ vektor všech k-tých derivací funkce u, tj.

$$\widehat{\delta}_k u = \{D^\alpha u\}_{|\alpha| = k}.$$

Pak lze vektor $\delta_k u$ rozdělit na dvě části:

$$\delta_k u = \left\{ \delta_{k-1} u, \widehat{\delta}_k u \right\}.$$

Vektor $\widehat{\delta}_k u$ se někdy nazývá hlavní částí vektoru $\delta_k u$.

Hodnotu $\delta_k u$ v bodě $x \in \Omega$ budeme zapisovat takto: $\delta_k u(x)$.

3. Jestliže funkce $h(x, \xi)$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}_\kappa$ splňuje Caratheodorovy podmínky, tzn. je měřitelná pro všechna pevná $\xi \in \mathbb{R}_\kappa$ a spojitá pro skoro všechna $x \in \Omega$, pak budeme psát $h \in CAR$.

Jestliže $p \ge 1$ a funkce h bude navíc splňovat růstové podmínky

$$|h(x, \xi)| \le g(x) + c \sum_{|\beta| \le k} |\xi_\beta|^{p-1}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

kde $g \in L^q(\Omega)$ a $c > 0$, pak budeme psát $h \in CAR(p)$. Poznamenejme, že pro $p = 1$ je $q = +\infty$.

4. **Diferenciální rovnice $2k$-tého řádu v divergentním tvaru**:

$$\sum_{|\alpha|\le k} D^{\alpha} a_{\alpha}(x,\delta_k u(x)) = f(x), \tag{4.1}$$

kde $N \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$, α je N-rozměrný multiindex, $a_\alpha = a_\alpha(x,\xi)$, $\alpha \le k$ jsou funkce $N+\kappa$ proměnných definované pro $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}_\kappa$ a f je funkce definovaná na Ω.

Klasické řešení diferenciální rovnice.
Předpokládejme, že koeficienty a_α v rovnici (4.1) mají spojité derivace řádu $|\alpha|$ podle všech proměnných, tj.

$$a_\alpha \in C^{|\alpha|}\left(\Omega \times \mathbb{R}_\kappa\right).$$

Dále předpokládejme, že $f \in C^0(\Omega)$. Řekneme, že funkce $u = u(x)$ definovaná na Ω je klasickým řešením rovnice (4.1), jestliže $u \in C^{2k}(\Omega)$ a rovnice (4.1) je splněna pro všechna $x \in \Omega$.

Formální diferenciální operátor.
Nechť $p > 1$ a $k \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že pro koeficienty v rovnici (4.1) platí

$$a_\alpha \in CAR(p) \quad \text{pro} \quad |\alpha| \le k,$$

tzn. existují funkce $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ a konstanty $c_\alpha > 0$ pro $|\alpha| \le k$ tak, že platí

$$|a_\alpha(x,\xi)| \le g_\alpha(x) + c_\alpha \sum_{|\beta|\le k} |\xi_\beta|^{p-1}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Jelikož pro $u \in W^{k,p}(\Omega)$ je $\delta_k u \in L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$ (κ-krát),
je podle věty 1.6.1 a cvičení 1.11 Němyckého operátor příslušný funkci $a_\alpha(x,\delta_k u(x))$ spojitý a ohraničený z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ do $W^{k,q}(\Omega)$,
$1/p + 1/q = 1$, a platí odhad

$$\|a_\alpha(x,\delta_k u(x))\|_q \le c_{\alpha 1} + c_{\alpha 2} \sum_{|\beta|\le k} \|D^\beta u\|_p^{p-1},$$

kde $c_{\alpha 1}$ a $c_{\alpha 2}$ jsou konstanty.
Odtud a z Hölderovy nerovnosti je pro $v \in W^{k,p}(\Omega)$ a $|\alpha| \le k$

$$\left|\int_\Omega a_\alpha(x,\delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left(c_{\alpha 1} + c_{\alpha 2} \sum_{|\beta|\le k} \|D^\alpha u\|_p^{p-1}\right) \|D^\alpha v\|_p.$$

Pak operátor, definovaný vzorcem

$$(\mathcal{A}u)(x) = \sum_{|\alpha|\le k} D^\alpha a_\alpha(x,\delta_k u(x)), \tag{4.2}$$

se nazývá formálním diferenciálním operátorem (vzorec představuje jen jistý formální zápis - nelze např. derivování ve vzorci vůbec provést).

Z výše uvedeného ihned dostáváme: formální diferenciální operátor $\mathcal{A}$ definuje vztahem

$$\langle Au, v\rangle = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega a_\alpha(x, \delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x, \qquad v \in W^{k,p}(\Omega), \tag{4.3}$$

operátor A z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ do duálního prostoru $\big(W^{k,p}(\Omega)\big)^*$. Operátor A je ohraničený a spojitý.

Slabé řešení diferenciální rovnice.
Řekneme, že funkce $u \in W^{k,p}(\Omega)$ je slabým řešením formální diferenciální rovnice $\mathcal{A}u = f$, jestliže pro všechna $v \in W_0^{k,p}(\Omega)$ platí

$$\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle\,,$$

kde $f \in \Big(W_0^{k,p}(\Omega)\Big)^*$ je funkcionál určený vzorcem

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \quad v \in L^p(\Omega),$$

s funkcí $f \in L^q(\Omega)$ a $\mathcal{A}$ je formální diferenciální operátor definovaný vzorcem (4.2), tzn. platí

$$\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega a_\alpha(x, \delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \langle f, v\rangle \quad \forall v \in W_0^{k,p}(\Omega). \tag{4.4}$$

5. **Okrajové úlohy.**
Řešení okrajové úlohy spočívá v tom, že se hledá řešení diferenciální rovnice na Ω, které splňuje jisté podmínky na hranici.

Uvažujme diferenciální rovnici (4.1) $2k$-tého řádu a nechť $\varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}$ jsou zadané funkce na hranici $\partial\Omega$ oblasti Ω. Okrajová úloha, při níž hledáme řešení diferenciální rovnice (4.1) s okrajovými podmínkami

$$D^j u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \varphi_j \text{ na } \partial\Omega, \quad j = 0, 1, \cdots, k-1,$$

kde vlevo vystupuje derivace j-tého řádu ve směru vnější normály ν k hranici $\partial\Omega$, se nazývá Dirichletovou úlohou pro rovnici (4.1). Jsou to tzv. stabilní okrajové podmínky. Uvedené podmínky jsou lineární, obecně mohou být také nelineární (podrobnosti viz [4]).

Slabé řešení Dirichletovy úlohy.
Nechť $\mathcal{A}$ je formální diferenciální operátor $2k$-tého řádu zadaný formulí (4.3). Nechť f je spojitý lineární funkcionál nad prostorem $W_0^{k,p}(\Omega)$ a φ je funkce z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$. Řekneme, že funkce $u \in W^{k,p}(\Omega)$ je slabým řešením Dirichletovy úlohy pro operátor $\mathcal{A}$, jestliže

(i) $u - \varphi \in W_0^{k,p}(\Omega)$;

(ii) pro každé $v \in W_0^{k,p}(\Omega)$ platí rovnost

$$\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega a_\alpha(x, \delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \langle f, v\rangle\,.$$

Podmínka (i) říká, že pro $|\beta| \le k-1$ je

$$D^\beta(u-\varphi)|_{\partial\Omega} \;=\; 0 \quad \text{čili} \quad D^\beta u = D^\beta\varphi \quad \text{na} \quad \partial\Omega$$

ve smyslu stop. Tudíž hledané řešení u a jeho derivace do řádu $k-1$ včetně nabývají na $\partial\Omega$ předepsaných hodnot. Jestliže hodnoty funkce φ jsou zadané pouze na hranici, pak najít funkci φ znamená prodloužit tyto hodnoty na celou oblast tak, aby toto prodloužení patřilo do prostoru $W^{k,p}(\Omega)$. Existence a konstrukce takového prodloužení není vůbec jednoduchá.

Slabé řešení okrajové úlohy.
Nechť $\mathcal{A}$ je formální diferenciální operátor $2k$-tého řádu zadaný formulí (4.3) s koeficienty $a_\alpha \in CAR(p)$ pro $|\alpha| \le k,\ p > 1$. Nechť $\mathcal{V}$ je lineární množina funkcí definovaných na Ω, pro níž platí

$$C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{V} \subset C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Označme V uzávěr množiny $\mathcal{V}$ v normě $\|\cdot\|_{k,p}$ Sobolevova prostoru $W^{k,p}(\Omega)$. Pak platí

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset V \subset W^{k,p}(\Omega).$$

Nechť dále je dán Banachův prostor Q funkcí definovaných na Ω, s normou $\|\cdot\|_Q$ a takový, že množina $C_0^\infty(\Omega)$ je hustá v Q a že prostor V je spojitě vnořitelný do prostoru Q; zapsáno $V \hookrightarrow Q$. Konečně nechť jsou dány

(a) funkce $\varphi \in W^{k,p}(\Omega)$;

(b) funkcionál $g \in V^*$ takový, že pro každé $v \in W_0^{k,p}(\Omega)$ je $\langle g, v\rangle_V = 0$;

(c) funkcionál $f \in Q^*$.

Řekneme, že funkce $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ je slabým řešením okrajové úlohy $(\mathcal{A}, V, Q)$, jestliže

(a) $u - \varphi \in V$;

(b) pro každé $v \in V$ platí

$$\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega a_\alpha(x, \delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \langle f, v\rangle_Q + \langle g, v\rangle_V\,.$$

Parametry - Ω, formální diferenciální operátor $2k$-tého řádu $\mathcal{A}$, prostory V a Q, funkce φ a funkcionály $g \in V^*$ a $f \in Q^*$ - se nazývají data okrajové úlohy $(\mathcal{A}, V, Q)$. Poznamenejme, že hledat slabé řešení okrajové úlohy $(\mathcal{A}, V, Q)$ znamená řešit operátorovou rovnici $Au = \Phi$ na množině $\{u \in W^{k,p}(\Omega) : u - \varphi \in V\}$. Zde A je operátor definovaný vztahem (4.3) a funkcionál $\Phi \in V^*$ je definovaný takto:

$$\langle \Phi, v \rangle = \langle f, v \rangle_Q + \langle g, v \rangle_V .$$

Rovnice $Au = \Phi$ je chápána v tomto smyslu: Najít $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tak, aby $u - \varphi \in V$ a

$$\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega a_\alpha(x, \delta_k u(x)) D^\alpha v(x) \, \mathrm{d}x \; = \; \langle f, v \rangle_Q + \langle g, v \rangle_V \quad \forall v \in V.$$

Prostor Q a funkcionál $f \in Q^*$ reprezentují pravou stranu formální diferenciální rovnice $\mathcal{A}u = f$. Obvykle se volí za prostor Q prostor $L^r(\Omega)$ s vhodně zvoleným parametrem $r \ge 1$ a funkcionál f volíme ve speciálním tvaru

$$\langle f, v \rangle_Q = \int_\Omega f(x) v(x) \, \mathrm{d}x, \quad v \in L^r(\Omega)$$

s funkcí

$$f \in L^s(\Omega), \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Místo symbolu $\langle f, v \rangle_Q$ se občas používá symbol $\langle f, v \rangle_\Omega$.

Množina $\mathcal{V}$ generující prostor V reprezentuje tzv. stabilní okrajové podmínky (okrajové podmínky obsahující derivace nejvýše $(k-1)$-tého řádu) a funkce φ (přesněji stopy funkcí $D^\beta \varphi$, $|\beta| \le k-1$) pak reprezentuje pravé strany v těchto okrajových podmínkách.

Funkcionál g reprezentuje tzv. nestabilní okrajové podmínky (okrajové podmínky obsahující derivace řádu vyššího než $k - 1$). Často se tento funkcionál volí ve tvaru

$$\langle g, v \rangle_V = \int_{\partial\Omega} g(x) v(x) \, \mathrm{d}S$$

s funkcí g z prostoru $L^t(\partial\Omega)$ s vhodně zvoleným indexem $t \ge 1$. Místo symbolu $\langle g, v \rangle_V$ se občas používá symbol $\langle g, v \rangle_{\partial\Omega}$.

4.1.1 Zobecnění růstových podmínek

Z věty 1.8.5 plyne, že funkce $u \in W^{k,p}(\Omega)$ a její zobecněné derivace $D^\beta u$ až do řádu $k-1$ mají lepší vlastnosti (lze říci, že jsou hladší než nejvyšší derivace řádu k). Dá se očekávat, že lze zeslabit růstové podmínky na koeficienty a_α v rovnici (4.1), přičemž operátor A v definici slabého řešení okrajové úlohy bude také ohraničený a spojitý z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ do duálního prostoru $\big(W^{k,p}(\Omega)\big)^*$. Nejprve zeslabíme předpoklady v tvrzeních uvedených výše a v bodě 4. týkajícím se formálního diferenciálního operátoru s aplikací věty 1.6.2.

Věta 4.1.1 *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $r \geq 1$. Nechť $f = f(x,\xi)$ je funkce definována pro $x \in \Omega$ a $\xi \in \mathbb{R}_\kappa$ a $f \in CAR$. Předpokládejme, že existuje spojitá funkce $c = c(t) \geq 0$, definovaná pro $t \geq 0$, a funkce $g \in L^r(\Omega)$ tak, že pro všechna $\xi \in \mathbb{R}_\kappa$ a pro skoro všechna $x \in \Omega$ platí*

$$|f(x,\xi)| \leq c\left(\sum_{|\beta|<k-N/p} |\xi_\beta|\right)\left[g(x) + \sum_{k-N/p\leq|\beta|\leq k} |\xi_\beta|^{q(\beta)/r}\right], \qquad (4.5)$$

kde

(i) *pro $|\beta| > k - N/p$ je*

$$q(\beta) = \frac{Np}{N-(k-|\beta|)\,p};$$

(ii) *pro $|\beta| = k - N/p$ je*

$$q(\beta) \geq 1 \quad \text{libovolné.}$$

Pak pro každé $u \in W^{k,p}(\Omega)$ je

$$f(x,\delta_k u(x)) \in L^r(\Omega)$$

a Němyckého operátor $\mathcal{N}$ určený funkcí f, $\mathcal{N}(u)(x) = f(x,u(x))$, $x \in \Omega$, je spojitý a ohraničený z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ do $L^r(\Omega)$.

Poměrně snadno, lze dokázat, že Němyckého operátor $\mathcal{N}$ zobrazuje $W^{k,p}(\Omega)$ do prostoru $L^r(\Omega)$ a je ohraničený. Důkaz ponecháme čtenáři jako cvičení s návodem. Důkaz spojitosti je mnohem složitější a je podobný důkazu uvedenému ve větě 1.6.1. Snažší je dokázat demispojitost Němyckého operátoru $\mathcal{N}$. Důkaz je za předpokladů věty 1.6.1 uveden v knize [6].

Cvičení 4.1.1 Dokažte ve větě 4.1.1 ohraničenost Němyckého operátoru $\mathcal{N}$ z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ do $L^r(\Omega)$, tzn. je-li splněna podmínka (4.5), pak Němyckého operátor $\mathcal{N}$ zobrazuje $W^{k,p}(\Omega)$ do prostoru $L^r(\Omega)$ a je ohraničený.
Návod. S využitím nerovnosti

$$(a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r + b^r), \quad a,\, b \geq 0, \quad n, r \in \mathbb{N},$$

ukažte, že platí

$$|f(x,\delta_k u(x))|^r \leq$$
$$\leq\ c_1 \left| c\left(\sum_{|\beta|<k-N/p} |D^\beta u(x)|\right)\right|^r \left\{|g(x)|^r + \sum_{k-N/p\leq|\beta|\leq k} |D^\beta u(x)|^{q(\beta)}\right\}, (4.6)$$

kde c_1 je konstanta. Funkce c je spojitá, oblast Ω je ohraničená a tím podle tvrzení (iii) věty 1.8.5 existuje konstanta $c_2 > 0$ taková, že pro všechna $x \in \overline{\Omega}$ platí

$$|f(x,\delta_k u(x))|^r \leq\ c_1\, c_2 \left\{|g(x)|^r + \sum_{k-N/p\leq|\beta|\leq k} |D^\beta u(x)|^{q(\beta)}\right\}.$$

Integrací této nerovnosti přes Ω obdržíte dokazované tvrzení. ♣

Poznámka 4.1.1 Je-li $kp \leq N$, neexistuje multiindex β tak, aby platilo $|\beta| \leq k - N/p$. V tomto případě je zapotřebí modifikovat podmínku (4.5) takto: je nutno požadovat, aby tato podmínka byla splněna s nějakou konstantou $c > 0$ místo funkce $c(t)$. Tvrzení věty 4.1.1 platí i v tomto případě.

V následující větě ukážeme, že operátor $A : W^{k,p}(\Omega) \to \left(W^{k,p}(\Omega)\right)^*$ příslušný formálnímu diferenciálnímu operátoru $\mathcal{A}$ je ohraničený a spojitý i za slabších předpokladů kladených na koeficienty a_α.

Věta 4.1.2 *Nechť $\mathcal{A}$ je formální diferenciální operátor $2k$-tého řádu zadaný formulí*

$$(\mathcal{A}u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha a_\alpha(x, \delta_k u(x)), \tag{4.7}$$

a nechť funkce $a_\alpha \in CAR$ splňují pro skoro všechna $x \in \Omega$ a pro $\xi \in \mathbb{R}_\kappa$ tyto růstové podmínky:

$$|a_\alpha(x,\xi)| \leq c_\alpha \left(\sum_{|\beta| < k - N/p} |\xi_\beta| \right) \left[g_\alpha(x) + \sum_{k - N/p \leq |\beta| \leq k} |\xi_\beta|^{r(\alpha,\beta)} \right], \tag{4.8}$$

kde $p > 1$ a

(i) *$c_\alpha = c_\alpha(t)$ je nezáporná spojitá funkce proměnné $t \geq 0$,*
$c_\alpha = \text{konst}$ *pro $k - \frac{N}{p} \leq 0$;*

(ii) *$g_\alpha \in L^s(\Omega)$, kde*

$$s = \begin{cases} \frac{q(\alpha)}{q(\alpha)-1} & \text{pro} \quad |\alpha| \geq k - \frac{N}{p}, \\ 1 & \text{pro} \quad |\alpha| < k - \frac{N}{p}; \end{cases}$$

(iii)

$$r(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{[q(\alpha)-1]q(\beta)}{q(\alpha)} & \text{pro} \quad |\alpha| \geq k - \frac{N}{p}, \\ q(\beta) & \text{pro} \quad |\alpha| < k - \frac{N}{p}; \end{cases}$$

(iv)

$$q(\nu) = \begin{cases} \frac{Np}{N-(k-|\nu|)p} & \text{pro} \quad |\nu| \geq k - \frac{N}{p}, \\ \geq 1 \text{ libovolné} & \text{pro} \quad |\nu| = k - \frac{N}{p}. \end{cases}$$

Pak operátor A definovaný vztahem

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega a_\alpha(x, \delta_k u(x)) D^\alpha v(x) \, \mathrm{d}x, \qquad v \in W^{k,p}(\Omega), \tag{4.9}$$

je ohraničený a spojitý z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ do duálního prostoru $\left(W^{k,p}(\Omega)\right)^*$.

Důkaz této věty není složitý a ponecháme jej čtenáři jako cvičení.

Cvičení 4.1.2 Dokažte větu 4.1.2.
Návod. Pro odhad integrálů tvaru

$$\int_\Omega a_\alpha(x, \delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x, \qquad u, v \in W^{k,p}(\Omega),\ |\alpha| \le k$$

využijte větu 1.8.5 a větu 4.1.1, ve které místo funkce f vezměte funkci a_α a v nerovnosti (4.5) volte číslo r takto:

$$r = \frac{q(\alpha)}{q(\alpha)-1}, \quad \text{je}-\text{li} \quad |\alpha| \ge k - \frac{N}{p}; \qquad r = 1, \quad \text{je}-\text{li} \quad |\alpha| < k - \frac{N}{p}.$$

♣

Označení. Jestliže funkce $a_\alpha \in CAR$ a splňuje růstové podmínky (4.8), pak budeme psát

$$a_\alpha \in CAR^*(p).$$

V podmínkách $a_\alpha \in CAR(p)$ vystupoval parametr p ve formě exponentu $p-1$ u všech proměnných ξ_β, zatímco u podmínek $a_\alpha \in CAR^*(p)$ vystupuje v této formě jen u proměnných ξ_β s $|\beta| = k$, a to navíc pouze v těch funkcích a_α, kde také $|\alpha| = k$. Je totiž ve větě 4.1.2

$$r(\alpha, \beta) = p - 1 \quad \text{pro} \quad |\alpha| = |\beta| = k.$$

Je-li $\alpha < k$ nebo $\beta < k$, je $r(\alpha, \beta) > p - 1$ a tím se připouští rychlejší růst než u podmínek typu $CAR(p)$. Odtud plyne, že pro stanovení prostoru $W^{k,p}(\Omega)$, v němž se hledá slabé řešení, je rozhodující především růst koeficientů a_α s $|\alpha| = k$ vzhledem k proměnným ξ_β s $|\beta| = k$. Ovšem ani růst vzhledem ke zbývajícím proměnným ani růst koeficientů a_α s $|\alpha| < k$ není libovolný a je opět závislý na parametru p, viz vztahy uvedené ve větě 4.1.2.

Příklad 4.1 Zvolme $n = 1$, $k = 1$, $\Omega = (0, 1)$ a formální diferenciální operátor $\mathcal{A}$ definujme vztahem

$$(\mathcal{A}u)(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_1(x, u(x), u'(x)) + a_0(x, u(x), u'(x)) \tag{4.10}$$

Pak růstové podmínky $a_i \in CAR(p),\ i = 0, 1$ jsou tvaru

$$|a_i(x, \xi_0, \xi_1)| \le g_i(x) + c_i \left(|\xi_0|^{p-1} + |\xi_1|^{p-1}\right),$$

kde $g_i \in L^q(0, 1),\ q = p/(p-1)$, a $c_i \ge 0$ jsou konstanty.

Růstové podmínky $a_i \in CAR^*(p)$ pro $i = 0, 1$ mají tvar

$$\begin{aligned} |a_1(x, \xi_0, \xi_1)| &\le c_1(|\xi_0|)\left[g_1(x) + |\xi_2|^{p-1}\right], \\ |a_0(x, \xi_0, \xi_1)| &\le c_0(|\xi_0|)\left[g_0(x) + |\xi_2|^{p}\right], \end{aligned}$$

kde c_0, c_1 jsou spojité funkce, $g_1 \in L^q(0, 1),\ q = p/(p-1)$ a $g_0 \in L^1(0, 1)$.

Zvolme $a_1(x, \xi_0, \xi_1) = \xi_1$ a $a_0(x, \xi_0, \xi_1) = e^{\xi_0}$. V tomto případě formální diferenciální operátor $\mathcal{A}$ je tvaru

$$\mathcal{A}u = -u'' + e^u.$$

Snadno lze ověřit, že $a_i \in CAR^*(2)$, $i = 0, 1$, jelikož stačí zvolit

$$c_0(t) = e^t, \quad c_1(|\xi_0|) \equiv 1, \quad g_0(x) = g_1(x) \equiv 1.$$

Avšak $a_0 \notin CAR(p)$ pro libovolné $p > 1$ a proto při použití růstových podmínek $a_i \in CAR(p)$ nelze zavést pojem slabého řešení.

♠

4.2 Existenční věty

V tomto odstavci dokážeme existenci slabého řešení okrajové úlohy $(\mathcal{A}, V, Q)$ jednak pomocí Mintyho-Browderovy věty (viz věta 2.3.11), jednak pomocí věty 3.2.1 z teorie potenciálních operátorů a konečně použitím věty Lerayovy-Lionsovy (viz věta 2.3.14).

Nechť $\mathcal{A}$ je formální diferenciální operátor $2k$-tého řádu zadaný formulí

$$(\mathcal{A}u)(x) = \sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha a_\alpha(x, \delta_k u(x)) \tag{4.11}$$

a nechť $p \in (1, \infty)$ a funkce $a_\alpha \in CAR^*(p)$ pro $|\alpha| \le k$. Nechť V je takový prostor, že platí

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subset V \subset W^{k,p}(\Omega).$$

Nechť dále je dán Banachův prostor Q funkcí definovaných na Ω, s normou $\|\cdot\|_Q$ a takový, že množina $C_0^\infty(\Omega)$ je hustá v Q a že prostor V je spojitě vnořitelný do prostoru Q, tzn. $V \hookrightarrow Q$. Konečně nechť jsou dány

(a) funkce $\varphi \in W^{k,p}(\Omega)$;

(b) funkcionál $g \in V^*$ takový, že pro každé $v \in W_0^{k,p}(\Omega)$ je $\langle g, v \rangle_V = 0$;

(c) funkcionál $f \in Q^*$.

Formálnímu diferenciálnímu operátoru $\mathcal{A}$ přiřaďme operátor A,
$A : W^{k,p}(\Omega) \to \left(W^{k,p}(\Omega)\right)^*$, tak, aby pro každé $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ platilo:

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega a_\alpha(x, \delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\, dx. \tag{4.12}$$

Podle věty 4.1.2 je operátor A ohraničený a spojitý z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ do duálního prostoru $\left(W^{k,p}(\Omega)\right)^*$. Definujme operátor T na prostoru V takto:
pro $u \in V$ nechť Tu je takový prvek z prostoru V^*, že platí

$$\langle Tu, v \rangle = \langle A(u + \varphi), v \rangle - \langle f, v \rangle_Q - \langle g, v \rangle_V$$

pro všechna $v \in V$. Podle výše zavedeného pojmu slabého řešení okrajové úlohy $(\mathcal{A}, V, Q)$ je množina všech slabých řešení této úlohy totožná s množinou všech řešení rovnice $Tu = 0$ na prostoru V. Existenci řešení této rovnice budeme vyšetřovat pomocí výše uvedených vět 2.3.11, 3.2.1 a 2.3.14. Jedná se tedy o ověření předpokladů těchto vět, tzn. reflexivity prostoru V, monotonnosti a potenciálnosti operátoru T a tzv. podmínky monotonie v hlavní části u věty 2.3.14. Jedná se tedy o nalezení dalších předpokladů na koeficienty $a_\alpha(x, \xi)$, které budou zaručovat splnění uvedených podmínek.

Reflexivita prostoru V.
Prostory $W^{k,p}(\Omega)$ a $W_0^{k,p}(\Omega)$ jsou pro $p \in (1, \infty)$ reflexivní. Jelikož uzavřený podprostor libovolného reflexivního prostoru je sám reflexivní, je tím prostor V reflexivní.

Ohraničenost a demispojitost operátoru $T : V \to V^*$.
Ohraničenost plyne bezprostředně z definice operátoru T a z ohraničenosti operátoru A. Předpokládejme, že $u_n \to u_0$ v prostoru V. Ze spojitosti Němyckého operátoru (viz věta 4.1.1) plyne

$$a_\alpha(x, \delta_k u_n(x) + \delta_k\varphi(x)) \;\to\; a_\alpha(x, \delta_k u_0(x) + \delta_k\varphi(x))$$

v prostoru $L_{r(\alpha)}$, a tedy pro libovolné $v \in V$ a pro libovolné α, $|\alpha| \le k$, platí

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_\Omega a_\alpha(x, \delta_k u_n(x) + \delta_k\varphi(x)) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_\Omega a_\alpha(x, \delta_k u_0(x) + \delta_k\varphi(x)) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tudíž pro libovolné $v \in V$ je

$$\lim_{n\to\infty} \langle Tu_n, v\rangle = \langle Tu_0, v\rangle\,,$$

což znamená, že $Tu_n \rightharpoonup Tu_0$ v prostoru V^* a tím je dokázáno, že operátor T je demispojitý.

Monotonie operátoru T.
Je ihned patrné, že jestliže pro všechna $\xi, \eta \in \mathbb{R}_\kappa$ a pro skoro všechna $x \in \Omega$ platí

$$\sum_{|\alpha|\le k} \left[a_\alpha(x, \xi) - a_\alpha(x, \eta)\right] (\xi_\alpha - \eta_\alpha) \;\ge\; 0,$$

pak operátor T je monotónní, neboť

$$\begin{aligned} &\langle Tu - Tv, u - v\rangle = \langle A(u + \varphi) - A(v + \varphi), u - v\rangle = \\ = &\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \left[a_\alpha(x, \delta_k u(x) + \delta_k\varphi(x)) \;-\; a_\alpha(x, \delta_k v(x) + \delta_k\varphi(x))\right] F(x)\,\mathrm{d}x \ge 0, \end{aligned}$$

kde $F((x) = D^\alpha u(x) - D^\alpha v(x)$.

Koercivita operátoru T.
Z definice operátoru T a z konstrukce prostoru V obdržíme následující ekvivalence

$$\lim_{\|u\|_{k,p}\to\infty} \frac{\langle Tu,u\rangle}{\|u\|_{k,p}} = \infty \iff \lim_{\|u\|_{k,p}\to\infty} \frac{\langle A(u+\varphi),u\rangle}{\|u\|_{k,p}} = \infty \iff \tag{4.13}$$

$$\iff \lim_{\|u\|_{k,p}\to\infty} \frac{1}{\|u\|_{k,p}} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x,\delta_k u(x)+\delta_k\varphi(x))D^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \infty. \tag{4.14}$$

Tyto rovnosti platí, jestliže existují konstanty $c_1>0$, $c_2>0$, $c_3\ge 0$ (v případě prostoru $V=W_0^{k,p}(\Omega)$ stačí $c_2\ge 0$) tak, že pro všechna $\xi\in\mathbb{R}_\kappa$ a pro skoro všechna $x\in\Omega$ je

$$\sum_{|\alpha|\le k} \xi_\alpha a_\alpha(x,\xi) \ \ge\ c_1 \sum_{|\alpha|=k} |\xi_\alpha|^p \ +\ c_2|\xi_{(0,\cdots,0)}|^p \ -\ c_3. \tag{4.15}$$

Ověření poslední rovnosti v (4.13) provedeme jen pro případ růstových podmínek $a_\alpha\in CAR(p)$. Obecný případ lze dokázat analogicky. Z podmínek (4.15) na koeficienty a_α a z ekvivalentnosti norem v prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ (viz (1.17)) plyne existence konstant $d>0$, $d_1>0$ a $c_4>0$ tak, že platí

$$\begin{aligned}
&\langle A(u+\varphi),u\rangle = \langle A(u+\varphi),u+\varphi\rangle - \langle A(u+\varphi),\varphi\rangle\,;\\
&\langle A(u+\varphi),u+\varphi\rangle \ge \int_\Omega \left[c_1\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha u+D^\alpha\varphi|^p + c_2|u+\varphi|^p - c_3\right]\mathrm{d}x \ge\\
&\ge\ d_1\|u+\varphi\|_{k,p}^p - c_3\mu(\Omega);\\
&\langle A(u+\varphi),\varphi\rangle \le \sum_{|\alpha|\le k}\|a_\alpha(x,\delta_k u+\delta_k\varphi)\|_q\,\|D^\alpha\varphi\|_p \le\\
&\le \left(\sum_{|\alpha|\le k}\|a_\alpha(x,\delta_k u+\delta_k\varphi)\|_q^q\right)^{1/q} \|\varphi\|_{k,p} \le\\
&\le \left(c_1+c_2\|u+\varphi\|_{k,p}^p\right)^{1/q}\|\varphi\|_{k,p} \le \left(c_4+d\|u+\varphi\|_{k,p}^{p/q}\right)\|\varphi\|_{k,p} =\\
&= \left(c_4+d\|u+\varphi\|_{k,p}^{p-1}\right)\|\varphi\|_{k,p}.
\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned}
&\frac{\langle A(u+\varphi),u\rangle}{\|u\|_{k,p}} \ \ge\\
&\ge d_1\frac{\|u+\varphi\|_{k,p}^p}{\|u\|_{k,p}} - d\frac{\|\varphi\|_{k,p}\,\|u+\varphi\|_{k,p}^{p-1}}{\|u\|_{k,p}} - \frac{1}{\|u\|_{k,p}}c_4\|\varphi\|_{k,p} -\\
&- \frac{1}{\|u\|_{k,p}}c_3\mu(\Omega).
\end{aligned}$$

Limitním přechodem $\|u\|_{k,p}\to\infty$ obdržíme koercivitu (4.13).

Potencialita operátoru T.
Za určitých předpokladů na koeficienty a_α lze dokázat, že operátor T je potenciální s potenciálem F, tzn. pro každé $u, v \in V$ platí

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(u+tv)|_{t=0} = \langle Tu, v\rangle =$$
$$= \langle A(u+\varphi), v\rangle \;-\; \langle f, v\rangle_Q \;-\; \langle g, v\rangle_V =$$
$$= \sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega a_\alpha(x, \delta_k u(x) + \delta_k\varphi(x))D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \langle f, v\rangle_Q - \langle g, v\rangle_V\,.$$

Na prostoru V hledejme funkcionál F ve tvaru

$$F(u) = \int_\Omega b(x, \delta_k u(x) + \delta_k\varphi(x))\,\mathrm{d}x \;-\; \langle f, u\rangle_Q - \langle g, u\rangle_V\,,$$

kde funkce $b(x,\xi)$ je definována pro skoro všechna $x \in \Omega$ a všechna $\xi \in \mathbb{R}_\kappa$. Integrál na pravé straně této formule bude konečný, jestliže $b \in CAR(p{+}1)$. Pak podle věty 4.1.1 Němyckého operátor příslušný funkci b je ohraničený z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ do prostoru $L_s(\Omega)$, kde $s = 1 + (1/p)$. Avšak $L_s(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ a tím je integrál konečný. Podobně lze ukázat, že tento integrál je konečný i v případě, kdy $b \in CAR^*(p+1)$. V tomto případě je nutné použít větu 4.1.2.

Předpokládejme, že existují pro skoro všechna $x \in \Omega$ a všechna $\xi \in \mathbb{R}_\kappa$ parciální derivace

$$\frac{\partial b(x,\xi)}{\partial\xi_\alpha},\quad |\alpha| \le k \quad \text{a} \quad \frac{\partial b}{\partial\xi_\alpha} \in CAR^*(p) \quad \forall\alpha,\ |\alpha|\le k.$$

Pak lze zaměnit pořadí derivace a integrace (teorie Lebesgueova integrálu) a postupně obdržíme

$$G(u,v) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(u+tv)|_{t=0} =$$
$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} b(x, \delta_k u(x) + \delta_k\varphi(x) + t\delta_k v(x))|_{t=0}\,\mathrm{d}x \;-\; \langle f, v\rangle_Q - \langle g, v\rangle_V =$$
$$= \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} b(x, \delta_k u(x) + \delta_k\varphi(x))D^\alpha v(x)\mathrm{d}x \;-\; \langle f, v\rangle_Q - \langle g, v\rangle_V\,.$$

Z definice G-derivace plyne, že jakmile pro každé pevné $u \in V$ je $G(u,v)$ lineární a spojitý funkcionál v proměnné v na prostoru V, pak $G(u,\cdot) =< F'(u), \cdot >$ je G-derivací funkcionálu F v bodě u. Linearita je zřejmá ihned z uvedeného vzorce.

Spojitost dokážeme za předpokladu, že platí

$$\frac{\partial b}{\partial\xi_\alpha} \in CAR(p) \quad \forall\alpha,\ |\alpha|\le k.$$

Podle věty 4.1.1 obdržíme

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial b}{\partial\xi_\alpha}(x; \delta_k u(x) + \delta_k\varphi(x))D^\alpha v(x)\right|\,\mathrm{d}x \le$$

$$\le \; c_\alpha \left(1 + \sum_{|\nu|\le k} \|D^\nu u + D^\nu \varphi\|_p^{p-1} \right) \|D^\alpha v\|_p \le$$

$$\le c_\alpha \left(1 + \sum_{|\nu|\le k} \|D^\nu u + D^\nu \varphi\|_p^{p-1} \right) \|v\|_{k,p}.$$

Odtud plyne existence konstanty $c > 0$ tak, že pro všechna $u, v \in V$ platí odhad

$$|G(u,v)| \le \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \left| \frac{\partial b}{\partial \xi_\alpha}(x; \delta_k u(x) + \delta_k \varphi(x)) \right| |D^\alpha v(x)| \,\mathrm{d}x \;\; +$$

$$+ \left(\|f\|_{Q^*} + \|g\|_{V^*}\right) \|v\|_{k,p} \le c \left(1 + \sum_{|\nu|\le k} \|D^\nu u + D^\nu \varphi\|_p^{p-1} \right) \|v\|_{k,p}$$

a tím také spojitost:

$$\sup_{\|v\|_{k,p}=1} |G(u,v)| \; < \; \infty \quad \forall u \in V.$$

Podobně lze dokázat pomocí věty 4.1.2 i spojitost v případě

$$\frac{\partial b}{\partial \xi_\alpha} \in CAR^*(p) \quad \forall \alpha,\; |\alpha| \le k.$$

Srovnáme-li výše uvedené vzorce, nabízí se zvolit funkci $b(x,\xi)$ tak, aby pro všechna $|\alpha| \le k$ platilo

$$\frac{\partial b(x,\xi)}{\partial \xi_\alpha} = a_\alpha(x,\xi).$$

Pak již operátor T bude potenciální s potenciálem F. Funkci $b(x,\xi)$ definujme takto:

$$b(x,\xi) = \int_0^1 \left[\sum_{|\alpha|\le k} \xi_\alpha a_\alpha(x, t\xi) \right] \mathrm{d}t.$$

Předpokládejme, že pro skoro všechna $x \in \Omega$, všechna $\xi \in \mathbb{R}_\kappa$ a všechny multiindexy β, $|\beta| \le k$ existují parciální derivace

$$\frac{\partial a_\alpha(x,\xi)}{\partial \xi_\beta} = a_{\alpha\beta}(x,\xi)$$

a že platí

$$a_{\alpha\beta}(x,\xi) = a_{\beta\alpha}(x,\xi) \quad \forall \alpha,\, \beta,\, |\alpha| \le k,\, |\beta| \le k. \tag{4.16}$$

Dále předpokládejme, že $\xi_\alpha a_{\alpha\beta}(x,\xi) \in CAR^*(p)$. Tento předpoklad je možno nahradit předpokladem $a_{\alpha\beta}(x,\xi) \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_\kappa)$. Z vět o spojité závislosti integrálu na parametru ihned obdržíme tvrzení $b \in CAR$ a z uvedených předpokladů inkluze $b \in CAR^*(p+1)$. Ukážeme, že pro skoro všechna $x \in \Omega$ a všechna $\xi \in \mathbb{R}_\kappa$ platí

$$\frac{\partial b(x,\xi)}{\partial \xi_\alpha} = a_\alpha(x,\xi).$$

Z věty o derivaci integrálu podle parametru s využitím symetrie (4.16) plyne

$$\frac{\partial b(x,\xi)}{\partial \xi_\beta} = \int_0^1 a_\beta(x,t\xi)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t \sum_{|\alpha|\le k} a_{\alpha\beta}(x,t\xi)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 a_\beta(x,t\xi)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_\beta(x,t\xi))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 a_\beta(x,t\xi)\,\mathrm{d}t \;+\; a_\beta(x,\xi) \;-\; \int_0^1 a_\beta(x,t\xi)\,\mathrm{d}t \;=\; a_\beta(x,\xi).$$

Poznamenejme, že předpoklad symetrie (4.16) znamená, že derivace druhého řádu funkce $b(x,\xi)$ podle proměnných ξ_α a ξ_β jsou záměnné, tzn. platí

$$\frac{\partial^2 b(x,\xi)}{\partial\xi_\alpha\partial\xi_\beta} = \frac{\partial^2 b(x,\xi)}{\partial\xi_\beta\partial\xi_\alpha}.$$

Aplikace věty Lerayovy-Lionsonovy (viz věta 2.3.14).
K aplikaci této věty je zapotřebí definovat ohraničené zobrazení ϕ z prostoru $V \times V$ do prostoru V^* tak, aby platilo:

1. pro každé $u \in V$ je $\phi(u,u) = Tu$;
2. pro všechna $u, v, h \in V$ a libovolnou posloupnost reálných čísel $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ takovou, že $t_n \to 0$, platí
$$\phi(u + t_n h, w) \rightharpoonup \phi(u,w);$$
3. pro všechna $u, w \in V$ je splněna tzv. podmínka monotonie v hlavní části
$$\langle \phi(u,u) - \phi(w,u)\,,\, u - w\rangle \;\ge\; 0;$$
4. jestliže $u_n \rightharpoonup u$ a $\lim_{n\to\infty} \langle \phi(u_n,u_n) - \phi(u,u_n)\,,\, u_n - u\rangle \;=\; 0$, pak pro libovolnou $w \in V$ platí
$$\phi(w,u_n) \;\to\; \phi(w,u);$$
5. jestliže $w \in X,\; u_n \rightharpoonup u,\; \phi(w,u_n) \rightharpoonup z$, pak
$$\lim_{n\to\infty} \langle \phi(w,u_n)\,,\, u_n\rangle \;=\; \langle z,\, u\,\rangle\,.$$

Zobrazení ϕ z prostoru $V \times V$ do prostoru V^* definujme takto:

$$\langle \phi(u,w), v\rangle =$$
$$= \int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, \delta_{k-1}w(x) + \delta_{k-1}\varphi(x), \widehat{\delta}_k u(x) + \widehat{\delta}_k\varphi(x)) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x \;+$$
$$+ \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k-1} a_\alpha(x, \delta_k w(x) + \delta_k\varphi(x)) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \langle f, v\rangle_Q - \langle g, v\rangle_V\,,$$

kde $\widehat{\delta}_k w = \{D^\nu w : |\nu| = k\}$. Připomeňme, že

$$\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x, \delta_k u(x) + \delta_k \varphi(x)) D^\alpha v(x)\, \mathrm{d}x \;-\; \langle f, v\rangle_Q - \langle g, v\rangle_V\, .$$

Porovnáním obou vztahů ověříme, že je splněna vlastnost 1.:

$$\phi(u, u) = Tu \;\; \forall u \in V.$$

Vlastnost 2. lze dokázat podobně jako výše dokázanou demispojitost operátoru T.

Předpokládejme, že koeficienty $a_\alpha(x, \xi)$ splňují tzv. *podmínku monotonie v hlavní části* - pro všechna $\eta \in \mathbb{R}^{\kappa(N,k-1)}$, ξ, $\widehat{\xi} \in \mathbb{R}^m$,
kde $m = \kappa(N, k) - \kappa(N, k-1)$, a pro skoro všechna $x \in \Omega$ platí

$$\sum_{|\alpha|=k} \left[a_\alpha(x, \eta, \xi) - a_\alpha(x, \eta, \widehat{\xi})\right] (\xi_\alpha - \widehat{\xi}_\alpha) \ge 0.$$

Do této podmínky dosaďme

$$\eta = \delta_{k-1}u(x) + \delta_{k-1}\varphi(x), \quad \xi = \widehat{\delta}_k u(x) + \widehat{\delta}_k \varphi(x), \quad \widehat{\xi} = \widehat{\delta}_k w(x) + \widehat{\delta}_k \varphi(x)$$

a výslednou nerovnost integrujme přes množinu Ω a tím zjistíme, že je splněna vlastnost 3. K ověření vlastností 4. a 5. je zapotřebí některých hlubších vět z teorie Lebesgueova integrálu a vět o kompaktním vnoření Sobolevových prostorů (viz [4], str.235).

Nyní již lze zformulovat věty o existenci slabého řešení okrajové úlohy $(\mathcal{A}, V, Q)$ jednak pomocí Mintyho-Browderovy věty (viz věta 2.3.11), jednak pomocí věty 3.2.1 z teorie potenciálních operátorů a jednak pomocí věty Lerayovy-Lionsovy (viz věta 2.3.14).

Věta 4.2.1 (*Aplikace Mintyho-Browderovy věty.*) *Předpokládejme, že koeficienty $a_\alpha(x, \xi)$ splňují tyto podmínky*

1. $a_\alpha \in CAR^*(p)$;
2. $\sum_{|\alpha|\le k} [a_\alpha(x, \xi) - a_\alpha(x, \eta)]\; (\xi_\alpha - \eta_\alpha) \;\ge\; 0$;
3. $\sum_{|\alpha|\le k} \xi_\alpha a_\alpha(x, \xi) \;\ge\; c_1 \sum_{|\alpha|=k} |\xi_\alpha|^p \;+\; c_2 |\xi_{(0,\cdots,0)}|^p \;-\; c_3$,

   kde $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 \ge 0$.

Pak existuje alespoň jedno slabé řešení okrajové úlohy $(\mathcal{A}, V, Q)$. Jestliže navíc v nerovnosti 2. platí rovnost pouze pro $\xi = \eta$, pak okrajová úloha $(\mathcal{A}, V, Q)$ má právě jedno slabé řešení.

Věta 4.2.2 (*Aplikace věty 3.2.1.*) *Předpokládejme, že koeficienty $a_\alpha(x,\xi)$ splňují tyto podmínky*

1. $a_\alpha \in CAR^*(p)$;
2. $\frac{\partial a_\alpha(x,\xi)}{\partial \xi_\beta} \equiv a_{\alpha\beta}(x,\xi) = a_{\beta\alpha}(x,\xi) \equiv \frac{\partial a_\beta(x,\xi)}{\partial \xi_\alpha} \quad \forall\alpha,\ \beta,\ |\alpha| \le k,\ |\beta| \le k$;
3. $\xi_\alpha a_{\alpha\beta}(x,\xi) \in CAR^*(p) \quad \forall\alpha,\ \beta,\ |\alpha| \le k,\ |\beta| \le k$;
4. $\sum_{|\alpha|\le k} \left[a_\alpha(x,\xi) - a_\alpha(x,\eta)\right] (\xi_\alpha - \eta_\alpha) \ \ge\ 0$;
5. $\sum_{|\alpha|\le k} \xi_\alpha a_\alpha(x,\xi) \ \ge\ c_1 \sum_{|\alpha|=k} |\xi_\alpha|^p \ +\ c_2|\xi_{(0,\cdots,0)}|^p \ -\ c_3$,

   kde $c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ c_3 \ge 0$.

Pak existuje alespoň jedno slabé řešení okrajové úlohy $(\mathcal{A}, V, Q)$. Jestliže navíc v nerovnosti 4. platí rovnost pouze pro $\xi = \eta$, pak okrajová úloha $(\mathcal{A}, V, Q)$ má právě jedno slabé řešení.

Věta 4.2.3 (*Aplikace Lerayovy-Lionsovy věty.*) *Předpokládejme, že koeficienty $a_\alpha(x,\xi)$ splňují tyto podmínky*

1. $a_\alpha \in CAR^*(p)$;
2. $\sum_{|\alpha|=k} \left[a_\alpha(x,\eta,\xi) - a_\alpha(x,\eta,\widehat{\xi})\right] (\xi_\alpha - \widehat{\xi}_\alpha) \ge 0.$
3. $\sum_{|\alpha|\le k} \xi_\alpha a_\alpha(x,\xi) \ \ge\ c_1 \sum_{|\alpha|=k} |\xi_\alpha|^p \ +\ c_2|\xi_{(0,\cdots,0)}|^p \ -\ c_3$,

   kde $c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ c_3 \ge 0$.

Pak existuje alespoň jedno slabé řešení okrajové úlohy $(\mathcal{A}, V, Q)$.

Poznamenejme, že v poslední větě týkající se operátorů, které jsou monotónní pouze v hlavní části, nelze obecně nic říci o jednoznačnosti řešení. Porovnáním uvedených tří vět je patrné, že věta 4.2.3 je nejobecnější, zatímco věta 4.2.2 je nejméně obecná. K procvičení uvedeme jednu poměrně jednoduchou okrajovou úlohu.

Cvičení 4.2.1 Uvažujme klasickou Dirichletovu úlohu v jednorozměrném případě

$$-u'' + g(u) = h \quad \text{na} \quad \Omega = (0,1)$$

s nulovými okrajovými podmínkami $u(0) = u(1) = 0$, kde $g \in C(-\infty,+\infty)$ a $h \in C(0,1)$ jsou spojité funkce. Okrajovou úlohu $(\mathcal{A}, V, Q)$ definujme takto:

$$\mathcal{A}u = -u'' + g(u), \quad V = W_0^{1,2}(\Omega), \quad Q = L^2(\Omega),$$

$$\langle f, v\rangle_Q = \int_0^1 h(x)v(x)\,\mathrm{d}x,\ v \in V, \quad \varphi = g = 0.$$

Operátor T definujme na prostoru V takto:
pro $u \in V$ je Tu takový prvek z prostoru V^*, že pro všechna $v \in V$ platí

$$\begin{aligned}\langle Tu, v\rangle &= \langle Au, v\rangle - \langle f, v\rangle_Q = \\ &= \int_0^1 [u'(x)v'(x) + g(u(x))v(x)]\,\mathrm{d}x - \int_0^1 h(x)v(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Podle výše zavedeného pojmu slabého řešení okrajové úlohy $(\mathcal{A}, V, Q)$ je množina všech slabých řešení této úlohy totožná s množinou všech řešení rovnice $Tu = 0$ na prostoru V. Nalezněte podmínky na funkce g a h, za kterých je operátor T monotónní, ryze monotónní, silně monotónní, koercivní a potenciální. Zformulujte věty o existenci slabého řešení okrajové úlohy $(\mathcal{A}, V, Q)$ pomocí výše uvedených vět 4.2.1, 4.2.2 a 4.2.3.

Řešení. V okrajové úloze je $N = 1$, $k = 1$, $\kappa = 2$ a koeficienty a_α jsou tvaru $a_0(x, \xi_0, \xi_1) = g(\xi_0)$ a $a_1(x, \xi_0, \xi_1) = \xi_1$. Snadno se ověří, že $a_i \in CAR^*(2)$ pro $i = 0, 1$ a tím $p = 2$. Operátor T je potenciální s potenciálem F,

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 [u'(x)]^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 G(u(x))\,\mathrm{d}x - \int_0^1 h(x)u(x)\,\mathrm{d}x, \quad u \in W^{1,2}(\Omega),$$

kde G je primitivní funkce k funkci g. Je-li funkce g neklesající, pak operátor T je silně monotónní. Jestliže

$$\liminf_{|t|\to\infty} g(t)\,\mathrm{sign}\, t = c \in \mathbb{R},$$

pak T je koercivní. Operátor T je monotónní v hlavní části.

♣

Kapitola 5

*Stupeň zobrazení

V této kapitole stručně pojednáme o (topologickém) stupni spojitých zobrazení a jeho vlastnostech jak v prostoru $\mathbb{R}_n$ tak i v Banachových prostorech. V prvním odstavci bude uvedena věta, pomocí které se definuje Brouwerův stupeň zobrazení. Na základě vlastností uvedené v této větě dokážeme Brouwerovu větu a také Schauderovu větu o pevném bodu. V druhém odstavci této kapitoly uvedeme definici a podrobněji budeme studovat vlastnosti stupně zobrazení v konečně rozměrném Euklidově prostoru. Vzhledem k zaměření těchto skript nebudou uváděny všechny důkazy, které lze nalézt především v knihách [3] a [14]. Poslední odstavec je věnován konstrukci stupně zobrazení v Banachových prostorech.

5.1 Stupeň zobrazení v prostoru $\mathbb{R}_n$

V tomto odstavci nejprve uvedeme větu o existenci stupně zobrazení a jeho podstatných vlastnostech. Výklad omezíme na funkce spojité definované na uzavřené kouli se středem v počátku v Euklidově prostoru $\mathbb{R}_n$ s cílem dokázat Brouwerovu větu o pevném bodu. Všechny věty a definice lze snadno zformulovat pro případ funkcí spojitých na uzávěru otevřené a ohraničené množiny v prostoru $\mathbb{R}_n$ (viz [3] a [14]). Nejprve si připomeňme označení otevřené koule zavedené v 1. kapitole. Zvolme $r > 0$ a symbolem B_r označme otevřenou kouli v reálném Euklidově prostoru $\mathbb{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, se středem v počátku, tzn.

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}_n : \|x\| < r\},$$

kde $\|x\|$ je norma x v prostoru $\mathbb{R}_n$. Její hranici označme symbolem ∂B_r:

$$\partial B_r := \{x \in \mathbb{R}_n : \|x\| = r\}.$$

Věta 5.1.1 *Nechť f je spojité zobrazení definované na uzavřené kouli $\overline{B_r}$ s hodnotami v $\mathbb{R}_n$ takové, že platí $f(x) \neq 0$ pro každé $x \in \partial B_r$. Pak existuje celé číslo $d\,[f(x);\, B_r, 0]$ tak, že platí:*

(*i*) $d\,[f(x);\ B_r, 0] = 1$ *pro* $f(x) = x$.

(*ii*) *Je-li* $d\,[f(x);\ B_r, 0] \neq 0$, *pak existuje* $x_0 \in B_r$ *takové, že* $f(x_0) = 0$.

(*iii*) (*Invariance vzhledem k homotopii.*)
Nechť $h(x,t)$ *je spojité zobrazení množiny* $\overline{B_r} \times [0,1]$ *do* $\mathbb{R}_n$ *takové, že pro všechna* $t \in [0,1]$ *a pro všechna* $x \in \partial B_r$ *je* $h(x,t) \neq 0$. *Pak*

$$d\,[h(x,0);\ B_r, 0] = d\,[h(x,1);\ B_r, 0]\,.$$

(*iv*) *Je-li zobrazení* f *navíc liché, tzn. platí-li* $f(x) = -f(-x)$ *pro všechna* $x \in \overline{B_r}$, *pak* $d\,[f(x);\ B_r, 0]$ *je liché číslo* (*a tedy nenulové*).

□

Definice 5.1.1 *Číslo* $d\,[f(x);\ B_r, 0]$ *se nazývá Brouwerův* (*topologický*) *stupeň zobrazení* f *vzhledem ke kouli* B_r *a bodu* 0 (*krátce stupeň zobrazení* f).

Význam Brouwerova stupně zobrazení spočívá v tom, že má-li zobrazení f nenulový stupeň, pak podle vlastnosti (ii) věty 5.1.1 plyne, že rovnice $f(x) = 0$ má alespoň jedno řešení v kouli B_r. Výpočet stupně konkrétního zobrazení, jak uvidíme v následujícím odstavci, je téměř vyloučen. Podle vlastnosti (i) věty 5.1.1 má identické zobrazení stupeň 1 a také každé liché zobrazení má stupeň nenulový (viz vlastnost (iv) věty 5.1.1). Pokud zobrazení není liché, tak se nabízí možnost pokusit se o homotopické spojení zobrazení f s identickým zobrazením (nebo s nějakým lichým zobrazením) a použít vlastnost (iii) věty 5.1.1, což provedeme v případě důkazu Brouwerovy věty. Předtím než tuto větu dokážeme, si připomeňme definici pojmu homotopického zobrazení.

Definice 5.1.2 *Dvě spojitá zobrazení* f_0 *a* f_1 *na množině* $\overline{B_r}$ *se nazývají homotopická, jestliže existuje spojité zobrazení* $h(x,t)$ *na* $\overline{B_r} \times [0,1]$ *takové, že pro všechna* $\overline{B_r}$ *platí*

$$h(x,0) = f_0(x), \quad h(x,1) = f_1(x)$$

a pro všechna $x \in \partial B_r$ *a všechna* $t \in [0,1]$ *je* $h(x,t) \neq 0$. *Zobrazení* $h(x,t)$ *s uvedenými vlastnostmi se nazývá homotopie zobrazení* f_0 *a* f_1.

Nyní dokážeme Brouwerovu větu o pevném bodu.

Věta 5.1.2 (*Věta Brouwerova.*)
Nechť f *je spojité zobrazení definované na uzavřené kouli* $\overline{B_r} \subset \mathbb{R}_n$ *a zobrazující tuto kouli do sebe, tzn.* $f(x) \in \overline{B_r}$ *pro každé* $x \in \overline{B_r}$. *Pak v kouli* $\overline{B_r}$ *existuje pevný bod tohoto zobrazení, tzn. existuje* $x_0 \in \overline{B_r}$ *tak, že platí* $f(x_0) = x_0$.

Důkaz. Nechť $x - f(x) \neq 0$ pro každé $x \in \partial B_r$. Pak jsou splněny předpoklady věty 5.1.1 a tím lze definovat stupeň zobrazení $d\,[x - f(x);\ B_r, 0]$. Položme $h(x,t) = x - tf(x)$. Zřejmě je $h(x,t)$ spojité zobrazení na množině $\overline{B_r} \times [0,1]$. Dokážeme, že jsou splněny předpoklady (iii) věty 5.1.1 , což znamená, že funkce

$h(x,t)$ je homotopie zobrazení x a $f(x)$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje $\widetilde{x} \in \partial B_r$ a $\widetilde{t} \in [0,1]$ tak, že platí

$$h(\widetilde{x},\widetilde{t}) = \widetilde{x} - \widetilde{t} f(\widetilde{x}) = 0.$$

Jelikož $|f(\widetilde{x})| \leq r$ a $|\widetilde{x}| = r$, je

$$0 = \left|\widetilde{x} - \widetilde{t} f(\widetilde{x})\right| \geq |\widetilde{x}| - \widetilde{t}|f(\widetilde{x})| \geq (1-\widetilde{t})r \geq 0$$

a tím $\widetilde{t} = 1$. To je však spor s předpokladem, že na ∂B_r je $x - f(x) \neq 0$.

Z vlastnosti (iii) věty 5.1.1 plyne existence $x_0 \in B_r$ tak, že $x_0 = f(x_0)$, což znamená, že x_0 je pevný bod f. V případě, že existuje $x_0 \in \partial B_r$ tak, že $x_0 = f(x_0)$, pak není co dokazovat - tento bod je pevným bodem zobrazení f.

□

Cvičení 5.1.1 Nechť f je spojité zobrazení definované na uzavřené kouli $\overline{B_r} \subset \mathbb{R}_n$ a zobrazující tuto kouli do prostoru $\mathbb{R}_n$. Předpokládejme, že pro všechna $x \in \partial B_r$ platí buďto $(f(x),x) \leq 0$ nebo $(f(x),x) \geq 0$, kde $(\cdot,\cdot)$ je skalární součin v prostoru $\mathbb{R}_n$. Pak v kouli $\overline{B_r}$ existuje pevný bod tohoto zobrazení, tzn. existuje $x_0 \in \overline{B_r}$ tak, že platí $f(x_0) = x_0$. Dokažte.

Návod. Tvrzení dokažte zcela analogicky jako Brouwerovu větu pomocí stupně zobrazení.

♣

Cvičení 5.1.2 Nechť f_1 a f_2 jsou spojitá zobrazení definovaná na uzavřené kouli $\overline{B_r} \subset \mathbb{R}_n$ a zobrazující tuto kouli do prostoru $\mathbb{R}_n$. Předpokládejme, že pro všechna $x \in \partial B_r$ platí $\|f_1(x) - f_2(x)\| < \|f_1(x)\|$.
Pak $d\,[f_1(x);\, B_r, 0] = d\,[f_2(x);\, B_r, 0]$. Dokažte. Toto tvrzení je v literatuře známé jako věta Rouchého.

Návod. Definujte $h(x,t)$ na množině $\overline{B_r} \times [0,1]$ takto:

$$h(x,t) = f_1(x) + t(f_2(x) - f_1(x)).$$

Použijte vlastnost (iii) věty 5.1.1.

♣

Cvičení 5.1.3 Nechť f je spojité zobrazení definované na uzavřené kouli $\overline{B_r} \subset \mathbb{R}_n$ a zobrazující tuto kouli do prostoru $\mathbb{R}_n$. Předpokládejme, že pro všechna $x \in \partial B_r$ a pro všechna $\lambda \geq 0$ platí $f(x) + \lambda x \neq 0$. Pak existuje $x_0 \in B_r$ tak, že platí $f(x_0) = 0$. Dokažte.

Návod. Položme

$$h(x,t) = tf(x) + (1-t)x \quad \text{pro} \quad x \in \overline{B_r},\ t \in [0,1].$$

Tvrzení dokažte užitím vlastnosti invariance stupně zobrazení vzhledem k homotopii:

$$d\,[f(x);\, B_r, 0] = d\,[x;\, B_r, 0] = 1.$$

♣

Cvičení 5.1.4 Nechť $g : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ je spojité zobrazení, pro které platí

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{(g(x), x)}{\|x\|} = \infty.$$

Pak rovnice $g(x) = y$ má řešení pro každé $y \in \mathbb{R}_n$. Dokažte.

Návod. Definujte funkci $f \equiv g - y$. Ukažte, že existuje $r > 0$ tak, že platí

$$(f(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in \partial B_r.$$

Jestliže $f(x) \neq 0$ pro $x \in \partial B_r$, pak odtud plyne, že jsou splněny předpoklady předcházejícího cvičení:

$$f(x) + \lambda x \neq 0 \quad \forall x \in \partial B_r,\ \lambda \geq 0.$$

Je-li $f(x_0) = 0$ pro nějaké $x_0 \in \partial B_r$, pak $g(x_0) = y$.

♣

5.1.1 Konstrukce stupně zobrazení v prostoru $\mathbb{R}_n$

V tomto odstavci uvedeme podle knihy [3] obecnou definici, konstrukci a nejdůležitější vlastnosti stupně zobrazení v prostoru $\mathbb{R}_n$. Výklad bude proveden v několika krocích převážně bez důkazů.

Nechť D je neprázdná, ohraničená a otevřená množina v $\mathbb{R}_n$ s hranicí ∂D. Nechť $f = \{f_1, \cdots, f_n\}$ je spojité zobrazení definované na množině $\overline{D}$ a zobrazující tuto množinu do prostoru $\mathbb{R}_n$. Zvolme $p \in \mathbb{R}_n$ tak, aby $p \in f(\overline{D}) - f(\partial D)$.

1. krok konstrukce. Předpokládejme

1. $f \in C^1(D)$, tzn. všechny parciální derivace prvního stupně funkce $f = \{f_1, \cdots, f_n\}$ jsou na množině D spojité. Sestrojme Jacobián $J(f(x))$, $x = \{x_1 \cdots, x_n\} \in D$, tj. determinant matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots, & \cdots, & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

2. Definujme množinu $f^{-1}(p)$ takto:

$$f^{-1}(p) = \{x \in D : \ f(x) = p\}.$$

Předpokládejme, že všechny body množiny $f^{-1}(p)$ jsou regulární, tzn., že platí $J(f(x)) \neq 0$ pro všechna $x \in f^{-1}(p)$.

Na základě těchto předpokladů lze snadno zjistit, že množina $f^{-1}(p)$ je konečná. Skutečně, nechť existuje posloupnost navzájem různých bodů $x_i \in D$ taková, že $f(x_i) = p$. Množina D je ohraničená, a proto existuje vybraná konvergující podposloupnost $\{x_{n_i}\}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_i \to x_0$. Pak ze spojitosti funkce f plyne $f(x_0) = p$ a proto $x_0 \notin \partial D$. Jelikož $x_0 \in f^{-1}(p)$, je podle uvedených předpokladů bod x_0 regulární a Jacobián $J(f(x_0)) \neq 0$. Jelikož Jacobián $J(f(x))$ je spojitý v okolí bodu x_0 ($f \in \mathbb{C}^1(D)$) existuje $\varepsilon > 0$ tak, že platí (věta o inverzním zobrazení)

$$f(x_0 + h) \neq f(x_0) = p \quad \text{pro} \quad \|h\| \in (0, \varepsilon).$$

Avšak $\|x_n - x_0\| \in (0, \varepsilon)$ pro $n \geq n_0$, a proto $f(x_n) \neq p$, $n \geq n_0$, což je ve sporu s předpokladem, že $f(x_i) = p$ pro všechna i.

Definujme číslo $d[f;\ D, p]$ takto:

$$d[f;\ D, p] = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sign} J(f(x)). \tag{5.1}$$

Poznamenejme, že součet na pravé straně je nulový, pokud množina $f^{-1}(p)$ je prázdná. Toto číslo se nazývá stupeň zobrazení f vzhledem k množině D a k bodu p. Z této definice je zřejmé, že stupeň zobrazení je celé číslo. Existují také jiné ekvivalentní definice stupně zobrazení. Z nich uvedeme definici v integrálním tvaru, která se používá v důkazech vlastností stupně zobrazení.

Za výše uvedených předpokladů 1. a 2. je množina $f^{-1}(p)$ konečná, nechť

$$f^{-1}(p) = \{x_1, \cdots, x_k\}.$$

Jelikož body x_i, $i = 1, \cdots, k$, jsou regulární, existují otevřená okolí $U(x_i), i = 1, \cdots, k$ tak, že platí

1. $U(x_i) \subset D$,
2. $U(x_i) \cap U(x_j) = \emptyset$ pro $i \neq j$,
3. $J(f(y)) \neq 0$ pro $y \in \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)$,
4. zobrazení f je vzájemně jednoznačné na $U(x_i)$ pro $i = 1, \cdots, k$.

Položme $\psi = f - p$. Pak množina $\psi(U(x_i))$ je okolí bodu 0 a tím existuje $\eta > 0$, pro které platí

$$\bigcap_{i=1}^{k} \psi(U(x_i)) \supset \{y \in \mathbb{R}_n :\ \|y\| < \eta\}.$$

Ze spojitosti funkce ψ plyne existence čísla $\delta > 0$ tak, že

$$\|\psi(x)\| \geq \delta \quad \forall x \in \overline{D} - \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i).$$

Zřejmě $J(f(x)) = J(\psi(x))$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a funkci ϕ tak, aby platilo:

$$\phi \in C([0,\infty)) \cap C^\infty((0,\infty)), \quad \int_{\mathbb{R}_n} \phi(\|x\|)\,\mathrm{d}x = 1 \;\operatorname{supp}\phi = [0, \min(\varepsilon, \delta, \eta)]\,, \tag{5.2}$$

kde $\operatorname{supp}\phi$ je nosič funkce ϕ. Pak použitím věty o substituci z teorie Lebesgueova integrálu obdržíme

$$\begin{aligned}
&\int_D \phi(\|f(x) - p\|)J(f(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^k \int_{U(x_i)} \phi(\|\psi(x)\|)J(\psi(x))\,\mathrm{d}x = \\
&= \sum_{i=1}^k \operatorname{sign} J(\psi(x_i)) \int_{U(x_i)} \phi(\|\psi(x)\|)|J(\psi(x))|\,\mathrm{d}x = \\
&= \sum_{i=1}^k \operatorname{sign} J(\psi(x_i)) \int_{\psi(U(x_i))} \phi(\|x\|)\,\mathrm{d}x = \\
&= \sum_{i=1}^k \operatorname{sign} J(\psi(x_i)) = d[f;\, D, p].
\end{aligned}$$

Pravá strana této rovnosti nezávisí na výběru funkce ϕ, která musí pouze splňovat podmínky (5.2), a tím také na této funkci nezávisí hodnota integrálu na levé straně. Stupeň zobrazení f splňující výše uvedené předpoklady 1. a 2. lze vyjádřit v integrálním tvaru:

$$d[f;\, D, p] = \int_D \phi(\|f(x) - p\|)J(f(x))\,\mathrm{d}x, \tag{5.3}$$

kde funkce ϕ je libovolná funkce splňující podmínky (5.2). V literatuře se definice stupně zobrazení založená na této rovnosti nazývá Heinzův integrální stupeň zobrazení f (viz [14]).

2. krok konstrukce. Pojem stupně zobrazení $d[f;\, D, p]$ roršíříme pro všechna $p \in \mathbb{R}_n - f(\partial D)$. Z 1. kroku konstrukce je ihned zřejmé, že pro $p \notin f(\overline{D})$, je $d[f;\, D, p] = 0$. Označme

$$B = \{x \in D : \; J(f(x)) = 0\}\,.$$

Podle Sardovy věty (viz [3]) neobsahuje množina $f(B)$ vnitřní bod. Zvolme $p \in f(B)$ (tzn. množina $F^{-1}(p)$ obsahuje neregulární body). Pak existuje posloupnost $p_n \in \mathbb{R}_n$ mající následující vlastnosti

$$p_n \notin f(B), \quad p_n \to p, \quad p_n \neq f(x)\ \forall x \in \partial D. \tag{5.4}$$

Tedy stupeň zobrazení $d[f;\, D, p_n]$ lze tím definovat pomocí vzorce (5.1) z 1. kroku pro každé $n \in \mathbb{N}$. V knize [3] je dokázáno, že posloupnost $\{d[f;\, D, p]\}$

konverguje a její limita nezávisí na výběru $\{p_n\}$ za předpokladu, že jsou splněny podmínky (5.4). Na základě této vlastnosti lze definovat stupeň zobrazení funkce $f \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$ vzhledem k D a k bodu $p \in \mathbb{R}_n - f(\partial D)$ předpisem

$$d[f;\, D, p] = \lim_{n\to\infty} d[f;\, D, p_n.]$$

3. krok konstrukce. V tomto kroku rozšíříme pojem stupně zobrazení $d[f;\, D, p]$ pro $f \in C(\overline{D})$, přičemž $p \in \mathbb{R}_n - f(\partial D)$. Pomocí Weierstrassovy věty o aproximaci spojité funkce pomocí polynomů lze sestrojit polynomy f_n tak, že platí

$$f_n \in C^1(D) \cap C(\overline{D}), \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ stejnoměrně na } \overline{D}, \quad p \notin f_n(\partial D)\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

V knize [3] je dokázáno, že posloupnost $\{d[f_n;\, D, p]\}$ konverguje a její limita nezávisí na výběru $\{f_n\}$ za předpokladu, že jsou splněny podmínky (5.5). Na základě této vlastnosti lze definovat stupeň zobrazení funkce $f \in C(\overline{D})$ vzhledem k D a k bodu $p \in \mathbb{R}_n - f(\partial D)$ předpisem

$$d[f;\, D, p] = \lim_{n\to\infty} d[f_n;\, D, p.]$$

V následujícím přehledu budou uvedeny nejdůležitější vlastnosti stupně zobrazení. K důkazům se převážně používá integrálního tvaru stupně (5.3) a limitních přechodů uvedených v druhém a třetím kroku konstrukce stupně zobrazení. Pro ilustraci uvedeme pouze několik nejjednodušších důkazů. Ostatní důkazy a další vlastnosti lze najít v knize [3].

Vlastnosti stupně zobrazení.

1. Nechť D je ohraničená a otevřená množina v $\mathbb{R}_n$. Nechť $f(x) = x$ (identické zobrazení). Je-li $p \in D$, pak $d[f;\, D, p] = 1$. Je-li $p \notin \overline{D}$, pak $d[f;\, D, p] = 0$.
   Tvrzení plyne besprostředně z definice stupně (5.1).

2. Nechť D_1 a D_2 jsou dvě disjunktní otevřené a ohraničené množiny v $\mathbb{R}_n$. Předpokládejme, že zobrazení $f : \overline{D_1} \cup \overline{D_2} \to \mathbb{R}_n$ je spojité a $p \neq f(x)$ pro $x \in \partial D_1 \bigcup \partial D_2$. Pak platí

   $$d[f;\ D_1 \cup D_2, p] = d[f;\ D_1, p] + d[f;\ D_2, p].$$

   Rovnost plyne bezprostředně z definice stupně (5.1) a z druhého a třetího kroku konstrukce stupně zobrazení.

3. Nechť D je ohraničená a otevřená množina v $\mathbb{R}_n$. Předpokládejme, že zobrazení $f : \overline{D} \to \mathbb{R}_n$ je spojité, $p \neq f(x)$ pro $x \in \partial D$ a $d[f;\, D, p] \neq 0$. Pak existuje alespoň jeden bod $x_0 \in D$ takový, že platí
$$f(x_0) = p.$$
Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Nechť $f(x) \neq p$ pro $x \in D$. Pak existuje kladné číslo $\varepsilon > 0$ takové, že pro $x \in \overline{D}$ platí
$$\|f(x) - p\| > 2\varepsilon.$$
Sestrojme posloupnost $\{f_n\}$ splňující podmínky (5.5) (viz 3. krok konstrukce). Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_0$ a $x \in \overline{D}$ platí odhad
$$\|f_n(x) - p\| > 2\varepsilon.$$
Zvolme funkci ϕ tak, aby byly splněny podmínky (5.2). Pak pro $n \geq n_0$ obdržíme (viz (5.3))
$$d[f_n;\, D, p] = \int_D \phi(\|f_n(x) - p\|) J(f_n(x))\, \mathrm{d}x = 0.$$
Tudíž
$$d[f;\, D, p] = \lim_{n\to\infty} d[f_n;\, D, p] = 0,$$
což je ve sporu s předpokladem.

4. (Invariance vzhledem k homotopii.) Nechť D je ohraničená a otevřená množina v $\mathbb{R}_n$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Nechť $h(x,t)$ je spojité zobrazení množiny $\overline{D} \times [a,b]$ do $\mathbb{R}_n$ takové, že pro všechna $t \in [a,b]$ a pro všechna $x \in \partial D$ je $h(x,t) \neq p$. Pak $d\,[h(\cdot,t);\, D, p]$ je konstantní na $[a,b]$, tzn.
$$d\,[h(x,t_1);\, D, p] = d\,[h(x,t_2);\, D, p] \quad \forall t_1, t_2 \in [a,b].$$
Důkaz je poněkud složitější a nebudeme jej uvádět.

5. (Rouchého věta.) Nechť D je ohraničená a otevřená množina v $\mathbb{R}_n$. Předpokládejme, že zobrazení $f_i : \overline{D} \to \mathbb{R}_n$ pro $i = 1, 2$, jsou spojitá, a pro $x \in \partial D$ je splněna nerovnost
$$\|f_1(x) - f_2(x)\| < \|f_1(x) - p\|.$$
Pak
$$d[f_1;\, D, p] = d[f_2;\, D, p].$$
Tvrzení plyne z předcházející vlastnosti invariance vzhledem k homotopii. Stačí položit
$$h(x,t) = f_1(x) + t(f_2(x) - f_1(x)) \quad \text{a} \quad a = 0,\, b = 1.$$

6. (Borsukova věta.) Nechť D je symetrická, ohraničená a otevřená množina v $\mathbb{R}_n$ obsahující počátek, tzn. $0 \in D$.
   Předpokládejme, že zobrazení $f : \overline{D} \to \mathbb{R}_n$ je spojité, liché na ∂D (tzn. $f(x) = -f(-x)$ pro všechna $x \in \partial D$) a takové, že $0 \notin \partial D$. Pak $d[f;\, D, 0]$ je liché číslo (a tím je nenulové).
   Důkaz je poněkud složitější a v knize [3] je toto tvrzení dokázáno pomocí dalších pěti netriviálních lemmat.

7. Nechť D je symetrická, ohraničená a otevřená množina v $\mathbb{R}_n$ obsahující počátek, tzn. $0 \in D$. Předpokládejme, že zobrazení $f : \overline{D} \to \mathbb{R}_n$ je spojité a takové, že $0 \notin f(\partial D)$. Nechť pro každé $x \in \partial D$ platí

$$\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \neq \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|}.$$

   Pak $d[f;\, D, 0]$ je liché číslo (a tím je nenulové).
   Důkaz. Položme $g(x) = f(x) - f(-x)$ a $h(x,t) = f(x) - tf(-x)$ pro $x \in \overline{D}$ a $t \in [0,1]$. Z předpokladu plyne, že $h(x,t) \neq 0$ pro $x \in \partial D$ a $t \in [0,1]$. Z vlastnosti invariance stupně zobrazení vzhledem k homotopii obdržíme

$$d[f;\ D, 0] = d[h(x,0);\ D, 0] = d[h(x,1);\ D, 0] = d[g;\ D, 0].$$

   Tvrzení plyne použitím Borsukovy věty pro lichou funkci g.

5.2 Lerayův-Schauderův stupeň zobrazení

Stupeň zobrazení lze snadno rozšířit i pro případ spojitých funkcí definovaných na reálném Banachově prostoru konečné dimenze. Je-li Banachův prostor nekonečně dimenzionální, pak neexistuje stupeň spojitého zobrazení s vlastnostmi uvedenými ve větě 5.1.1. Existuje řada příkladů, ve kterých spojitá funkce homeomorfně zobrazuje jednotkovou kouli na sebe a nemá pevný bod. V následujícím odstavci bude uveden jeden z těchto příkladů. V první kapitole byla dokázána Schauderova věta 1.3.5. Stejnou metodou, jakou byla dokázána tato věta, lze zobecnit pojem Brouwerova stupně zobrazení pro totálně spojité operátory definované v Banachově prostoru.

Zvolme $r > 0$ a symbolem B_r označme otevřenou kouli v reálném Banachově prostoru X, se středem v počátku, tzn.

$$B_r := \{x \in X : \|x\| < r\},$$

kde $\|x\|$ je norma x v prostoru X. Její hranici označme symbolem ∂B_r:

$$\partial B_r := \{x \in X : \|x\| = r\}.$$

Věta 5.2.1 *Nechť T je totálně spojitý operátor definovaný na uzavřené kouli $\overline{B_r}$ s hodnotami v X takový, že platí $T(u) \neq u$ pro každé $u \in \partial B_r$ a I je identický operátor. Pak existuje celé číslo $d\,[I - T;\, B_r, 0]$ tak, že platí:*

(*i*) $d\,[I;\, B_r,\, 0] = 1.$

(*ii*) *Je-li* $d\,[I - T;\, B_r,\, 0] \neq 0$, *pak existuje* $u_0 \in B_r$ *takové, že* $T(u_0) = u_0$.

(*iii*) (*Invariance vzhledem k homotopii*). *Nechť* G *je totálně spojité zobrazení množiny* $\overline{B_r}$ *s hodnotami v* X *takové, že pro všechna* $t \in [0,1]$ *a pro všechna* $u \in \partial B_r$ *je* $u - T(u) - tG(u) \neq 0$. *Pak*

$$d\,[I - T;\, B_r,\, 0] = d\,[I - T - G;\, B_r,\, 0]\,.$$

(*iv*) *Je-li operátor* T *navíc lichý, tzn. platí-li* $T(u) = -T(-u)$ *pro všechna* $u \in \overline{B_r}$, *pak* $d\,[I - T;\, B_r, 0]$ *je liché číslo* (*a tedy nenulové*).

□

Definice 5.2.1 *Číslo* $d\,[I - T;\, B_r,\, 0]$ *se nazývá Lerayův-Schauderův stupeň zobrazení* $I - T$ *vzhledem ke kouli* B_r *a bodu* 0 (*krátce stupeň zobrazení* $I - T$).

Způsob použití Larayova-Schauderova stupně zobrazení je stejný jako způsob použití Browerova stupně. V následujícím cvičení bude tento způsob ilustrován na důkazu Schauderovy věty.

Cvičení 5.2.1 Pomocí věty 5.2.1 dokažte speciální případ Schauderovy věty:
Každý totálně spojitý operátor T zobrazující kouli $\overline{B_1}$ do sebe má alespoň jeden pevný bod.
Návod. Ve větě 5.2.1 zvolte $G = -T$. Stačí dokázat implikaci

$$T(u) \neq 0 \;\; \forall u \in \partial B_1 \quad \Longrightarrow \quad u - T(u) - tG(u) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1] \quad \text{a} \quad \forall u \in \partial B_1.$$

K důkazu této implikace využijte předpokladu, že totálně spojitý operátor T zobrazuje kouli $\overline{B_1}$ do sebe.

♣

5.2.1 Konstrukce stupně zobrazení v Banachově prostoru

V tomto odstavci uvedeme podle knihy [3] obecnou definici, konstrukci a nejdůležitější vlastnosti stupně zobrazení v reálném Banachově prostoru X.

Nejprve budeme definovat stupeň zobrazení v n-rozměrném Banachově prostoru X. Z funkcionální analýzy je známo, že tento prostor je izometricky izomorfní s prostorem $\mathbb{R}_n$. Nechť h je nějaké zobrazení, které izometricky a izomorfně zobrazuje prostor X na prostor $\mathbb{R}_n$. Nechť D je neprázdná, ohraničená a otevřená množina v X s hranicí ∂D. Nechť f je spojité zobrazení definované na množině $\overline{D}$ a zobrazující tuto množinu do prostoru X. Předpokládejme, že $f(x) \neq 0$ pro $x \in \partial D$. Pak s využitím integrálního tvaru stupně zobrazení (viz (5.3)) a z věty o substituci obdržíme pro funkci $f \in C^1(D) \cap \overline{C(D)}$

$$\begin{aligned} d[h \circ f \circ h^{-1};\, h(D), 0] &= \int_{h(D)} \phi(\|h(f(h^{-1}(y)))\|) J(h \circ f \circ h^{-1}(y))\, \mathrm{d}y = \\ &= \int_{(D)} \phi(\|f(x)\|) J(f(x))\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že levá strana této rovnosti nezávisí na výběru funkce h a tím lze definovat (aplikací druhého a třetího kroku jako v případě Browerova stupně zobrazení) stupeň zobrazení funkce f vzhledem k D a vzhledem k 0 takto:

$$d_X[f;\, D, 0] = d[h \circ f \circ h^{-1};\, h(D), 0]. \tag{5.6}$$

Z této definice ihned plyne, že vlastnosti stupně zobrazení v konečně rozměrném Banachově prostoru jsou tytéž jako vlastnosti Brouwerova stupně v prostoru $\mathbb{R}_n$.

V nekonečně rozměrném Banachově prostoru X nelze dokázat větu, která by byla analogií Browerovy věty a také nelze definovat pojem stupně libovolného spojitého zobrazení Banachova prostoru X do sebe s týmiž vlastnostmi jako v případě konečně rozměrných prostorů. Podstata této skutečnosti spočívá v tom, že jednotková sféra v nekonečně rozměrném Banachově prostoru není kompaktní. Uvedeme dva příklady, ve kterých spojité zobrazení uzavřené jednotkové koule do sebe nemá pevný bod.

Příklad 5.1 (Kakutani.) Nechť H je separabilní Hilbertův prostor s úplnou ortonormální bází $\{y_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Označme symbolem B jenotkovou uzavřenou kouli v H, tzn.

$$B = \{x \in H :\ \|x\| \le 1\}.$$

Definujme transformaci U předpisem

$$U(y_n) = y_{n+1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

a lineárně tuto definici rozšiřme na celý prostor H:

$$U(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i U(y_i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i y_{i+1} \quad \text{pro} \quad x = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i y_i.$$

Zřejmě lineární transformace U izometricky izomorfně zobrazuje prostor H na sebe a také jednotkovou sféru S,

$$S = \{x \in H :\ \|x\| = 1\}$$

jednoznačně na sebe. Definujme zobrazení f na H předpisem

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \|x\|)y_0 + U(x).$$

Poměrně snadno lze dokázat, že toto zobrazení je spojité a homeomorfně zobrazuje kouli B na sebe a také zobrazuje homeomorfně jednotkovou sféru S na S. Zobrazení f nemá v kouli B pevný bod. Tuto vlastnost dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje $x_0 \in B$ tak, že platí $x_0 = f(x_0)$. Odtud plyne

$$x_0 - U(x_0) = \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|)y_0.$$

Mohou nastat tři případy:

1. $x_0 = 0$. Pak
$$0 = x_0 - U(x_0) = \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|)y_0.$$
Proto $1 - \|x_0\| = 0$, což je ve sporu s předpokladem $x_0 = 0$.

2. $\|x_0\| = 1$. Pak $x_0 = U(x_0)$. Avšak snadno se ověří, že zobrazení U nemá pevný bod na jednotkové sféře S.

3. $0 < |x_0\| < 1$. Pišme
$$x_0 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i y_i, \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i|^2 = |x_0\|^2 < 1.$$
Avšak
$$x_0 - U(x_0) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (a_i - a_{i-1})y_i = \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|)y_0,$$
a tím
$$a_0 - a_{-1} = \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|) > 0 \quad \text{a} \quad a_i = a_{i-1}\ \forall i \neq 0.$$
Odtud plyne, že
$$\cdots = a_{-3} = a_{-2} = a_{-1} < a_0 = a_1 = \cdots,$$
což znamená, že
$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i|^2 = \infty.$$
Spor.

Speciální případ. Nechť $H = l^2$ je Hilbertův prostor se standardní úplnou ortonormální posloupností $\{e_i\},\ i = 1, 2, \cdots$, kde
$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \cdots),\ e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \cdots), \cdots.$$
Pak $x \in H$ lze zapsat do tvaru
$$x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i; \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2.$$
Definujme posloupnost $\{y_i\}$ takto:
$y_0 = e_1,\ y_n = e_{2n},\ y_{-n} = e_{2n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ a operátor U jako výše. V tomto případě obdržíme $Ue_1 = e_2,\ U(e_{2n}) = e_{2n+2},\ U(e_{2n+1}) = e_{2n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Označme
$$B = \{x \in H : \ \|x\| \leq 1\} \quad \text{a} \quad S = \{x \in H : \ \|x\| = 1\}.$$
Pak U zobrazuje prostor H na sebe a navíc platí
$$\|U(x)\| < 1 \Leftrightarrow \|x\| < 1, \quad \|U(x)\| = 1 \Leftrightarrow \|x\| = 1.$$

Snadno se ověří, že U nemá pevný bod na jednotkové sféře S. Zobrazení f má v tomto speciálním případě tvar

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \|x\|)e_1 + U(x) = U\left(\frac{1}{2}(1 - \|x\|)e_3 + x\right),$$

tzn.

$$f = U \circ g, \quad g(x) = \frac{1}{2}(1 - \|x\|)e_3 + x \quad \forall x \in H.$$

Jako výše se snadno ověří, že spojité zobrazení $f : B \to B$ nemá v kouli B pevný bod.

♠

Cvičení 5.2.2 Nechť $H = l^2$ je Hilbertův prostor se standardní úplnou ortonormální posloupností $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \cdots$, jako v předcházejícím příkladě. Zobrazení $f : B \to B$, kde B je uzavřená jednotková koule v prostoru l^2, definujme předpisem

$$f(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \cdots\right), \quad x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2.$$

Ukažte, že $f(B) \subset f(S)$, $f(B) \neq S$ a dokažte, že spojité zobrazení f nemá v kouli B pevný bod.

♣

Předpokládejme, že Banachův prostor X je nekonečně rozměrný, množina $D \subset X$ je ohraničená a otevřená s hranicí ∂D a navíc, že $0 \in D$. Symbolem I označme identický operátor a předpokládejme, že

$$0 \notin (I - T)(\partial D),$$

kde $T : \overline{D} \to X$ je totálně spojitý operátor. Stupeň $d\,[I - T;\, D, 0]$ zobrazení $I - T$, tzn. stupeň zobrazení $I - T$ vzhledem k množině D a vzhledem k 0 budeme definovat jako limitu posloupnosti $\{d_{X_n}\,[I - T_n;\, D_n, 0]\}$, kde $T_n : X_n \to X_n$ je aproximace operátoru T, X_n je konečně rozměrný podprostor X a $D_n = X_n \cap D$.

Z důkazu Schauderovy věty 1.3.5 vyplývá, že existuje posloupnost totálně spojitých operátorů $\{T_n\}$ z $\overline{D}$ do X takových, že platí

(i) $T_n(\overline{D}) \subset X_n$, kde X_n je konečně rozměrný podprostor X;

(ii) konvergence $\|T_n(x) - T(x)\| \to 0$ pro $n \to \infty$ je stejnoměrná na množině $\overline{D}$, tzn. existuje $\varepsilon_n > 0$ tak, že platí

$$\|T(x) - T_n(x)\| < \varepsilon_n \quad \forall x \in \overline{D} \quad \text{a} \quad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Označme $D_n = D \cap X_n$. Snadno se dokáže, že D_n je neprázdná ($0 \in D_n$), otevřená množina s hranicí $\partial D_n \subset \partial D$. Z totálně spojitostí a z předpokladu

$0 \notin (I-T)(\partial D)$ lze poměrně snadno (např. sporem) dokázat, že existuje $r > 0$ tak, že platí

$$\inf_{x \in \partial D} \|x - T(x)\| \geq r.$$

Odtud a ze stejnoměrné konvergence (vlastnost (ii)) obdržíme existenci n_0 tak, že pro $n \geq n_0$ a $x \in \partial D$ je

$$\|x - T_n x\| \geq \frac{r}{2}$$

a tím

$$\inf_{x \in \partial D_n} \|x - T_n x\| \geq \frac{r}{2}.$$

Jelikož $(I - T_n)(\overline{D_n}) \subset X_n$, lze definovat stupeň $d_{X_n}[I - T_n;\, D_n, 0]$ zobrazení $I - T_n$ vzhledem k D_n a vzhledem k 0 stejným způsobem jako na začátku tohoto odstavce (viz vzorec (5.6)). Poněkud složitější je dokázat, že posloupnost $\{d_{X_n}[I - T_n;\, D_n, 0]\}$ je konvergentní a její limita nezávisí na výběru aproximací T_n (viz [3]). Na základě této vlastnosti lze již definovat stupeň zobrazení $I - T$ vzhledem k množině D a vzhledem k 0 (Lerayův-Schauderův stupeň):

$$d\,[I - T;\, D, 0] = \lim_{n \to \infty} d_{X_n}[I - T_n;\, D_n, 0]\,. \tag{5.7}$$

Analogicky lze definovat stupeň zobrazení $I-T$ vzhledem k množině D a vzhledem k bodu p, pro který platí $p \in X - (I - T)(\partial D)$. Pak lze snadno dokázat, že

$$d\,[I - T;\, D, p] = d\,[I - T_1;\, D, 0]\,, \quad \text{kde} \quad T_1 x = Tx + p \quad \forall x \in X$$

a $d\,[I - T;\, D, p] = 0$ pro $p \notin (I - T)(\overline{D})$. Pro aplikace je důležitá následující vlastnost, která je přímým důsledkem definice a níže dokázané vlastnosti 2.: je-li $d\,[I - T;\, D, p] \neq 0$, pak existuje $x_0 \in D$ tak, že $x_0 - Tx_0 = p$.

Vlastnosti Lerayova-Schauderova stupně zobrazení.

Níže uvedené vlastnosti lze poměrně snadno odvodit z vlastností Brouwerova stupně zobrazení v $\mathbb{R}_n$. Pro ilustraci uvedeme odvození jen jedné z těchto vlastností.

1. $d\,[I;\, D, 0] = 1$.

2. Je-li $d\,[I - T;\, D, 0] \neq 0$, pak existuje $x_0 \in D$ tak, že platí $(I-T)(x_0) = 0$.
   Důkaz. Z definice stupně zobrazení (5.7), z vlastností stupně zobrazení v konečně rozměrném Banachově prostoru a z výše uvedené konstrukce plyne, že pro $n \geq n_0$ existuje $x_n \in D_n$ tak, že platí $(I - T_n)x_n = 0$. Ze stejnoměrné aproximace obdržíme $(I - T)x_n = y_n$, kde $\|y_n\| < \varepsilon_n$. Jelikož T je totálně spojitý operátor a posloupnost $\{x_n\} \subset D$ je ohraničená, existuje vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ a bod $y \in X$ tak, že platí

$$\lim_{k \to \infty} Tx_{n_k} = y.$$

Jelikož $x_{n_k} = y_{n_k} + Tx_{n_k}$ a $\varepsilon_n \to 0$ pro $n \to \infty$, je

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y \quad \text{a tedy} \quad y \in \overline{D}.$$

Dále, operátor $I - T$ je spojitý a proto

$$\lim_{k\to\infty} (I-T)x_{n_k} = (I-T)y.$$

Avšak

$$\lim_{k\to\infty} (I-T)x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} - \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = 0;$$

tudíž $(I-T)y = 0$. Z předpokladu $0 \notin (I-T)(\partial D)$ plyne $y \in D$.

3. (Invariance vzhledem k homotopii.) Nejprve zavedeme pojem homotopie kompaktních transformací na podmnožině E Banachova prostoru X. Nechť $T(t)$ je zobrazení z intervalu $[0,1]$ do množiny totálně spojitých transformací definovaných na množině $E \subset X$ s hodnotami v Banachově prostoru X. Řekneme, že zobrazení T je homotopie kompaktních transformací na E jestliže k danému $\varepsilon > 0$ a k libovolné ohraničené množině $M \subset E$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $t_1, t_2 \in [0,1]$, $|t_1 - t_2| < \delta$ a všechna $x \in M$ je
$$\|T(t_1)x - T(t_2)x\| < \varepsilon.$$
Nechť $T(t)$ je homotopie kompaktních transformací na $\overline{D}$ a nechť $(I - T(t))x \neq 0$ pro všechna $t \in [0,1]$ a pro všechna $x \in \partial D$. Pak pro všechna $t \in [0,1]$ stupeň zobrazení $d\,[I - T(t);\, D, 0]$ existuje a je konstantní. Důkaz je technicky poněkud složitější a nebudeme jej uvádět.

4. (Borsukova věta.) Nechť D je symetrická, ohraničená a otevřená množina v X obsahující počátek, tzn. $0 \in D$. Předpokládejme, že operátor $T: \overline{D} \to X$ je totálně spojitý a lichý na ∂D (tzn. $Tx = -T(-x)$ pro všechna $x \in \partial D$). Předpokládejme, že $Tx \neq x$ pro $x \in \partial D$. Pak $d[I - T;\ D, 0]$ je liché číslo (a tím je nenulové).
Důkaz je poněkud složitější a v knize [3] je důkaz tohoto tvrzení naznačen.

5. Nechť D je symetrická, ohraničená a otevřená množina v X obsahující počátek, tzn. $0 \in D$. Předpokládejme, že operátor $T:\ \overline{D} \to X$ je totálně spojitý a pro $x \in \partial D$ je $Tx \neq x$ a
$$\frac{x - Tx}{\|x - Tx\|} \neq \frac{-x - T(-x)}{\|-x - T(-x)\|}.$$
Pak $d[I - T;\ D, 0]$ je liché číslo (a tím je nenulové).
Důkaz je stejný jako důkaz vlastnosti 7. v případě Brouwerova stupně zobrazení v R^n.

Na závěr uvedeme jednu z verzí Lerayho-Schauderových vět o pevném bodu, o které je podrobně pojednáno v knize [14].

Věta 5.2.2 (*Lerayho-Schauderova věta o pevném bodu.*) *Nechť je X Banachův prostor, $B_r \subset X$ je otevřená koule se středem v počátku a o poloměru r. Nechť $T : \overline{B_r} \to X$ je kompaktní operátor takový, že $T(\partial B_r) \subset B_r$. Pak operátor T má v kouli B_r pevný bod.*

Cvičení 5.2.3 Dokažte Lerayho-Schauderovu větu o pevném bodu.

Návod. Definujme pro $t \in [0,1]$ homotopii kompaktních transformací $T(t)$ na $\overline{B_r}$: $T(t) = tT$ a ověřte, že $(I - T(t))(x) \neq 0$ pro všechna $t \in [0,1]$ a všechna $x \in \partial D$. Aplikujte vlastnosti 3., 1. a 2. Lerayova-Schauderova stupně zobrazení.

♣

Příloha A

Stručný seznam označení

$\mathbb{N}$	přirozená čísla
$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\mathbb{C}$	komlexní čísla
$\mathbb{R}_n$	n-rozměrný Euklidův prostor
$[a, b]$	uzavřený interval
(a, b)	otevřený interval
$\mathbb{R}^+$	nezáporná čísla
$\mathcal{L}(\{h_i\}_{i=1}^n)$	lineární obal $\{h_i\}_{i=1}^n$
$\mathcal{D}(A)$	definiční obor operátoru A
$\mathcal{R}(A)$	obor hodnot operátoru A
$\mathcal{L}(X, Y)$	prostor spoj.lin. operátorů z X do Y
$Co(X, Y)$	prostor totálně spoj. operátorů z X do Y
$X \times Y$	kartézský součin prostorů X a Y
$(\cdot, \cdot)$	skalární součin
$\|\cdot\|$	norma
$\hookrightarrow$	spojité vnoření
$\subset$	inkluze
$[u, z]$, $u, z \in X$	semiskalární součin prvků u a z v prostoru X
P_K	projekce na množinu K
$\lvert\alpha\rvert,\ \alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^N$	délka N-rozměr. multiindexu α
$D^\alpha u$	parc. derivace funkce u řádu $\lvert\alpha\rvert$
$\mathcal{N}$	Němyckého operátor
$\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$	souvislá, ohran. oblast s Lipschitz. hranicí, (třídy $\mathcal{C}^{0,1}$)
$\operatorname{dom} F$	efektivní oblast funkc.F
X^*	(topolofický) duál
X^{**}	druhý normovaný duální prostor
x^*	spojitý lineární funkcionál
$\langle x^*, z\rangle$	hodnota funkc. x^* v bodě z
$\|x\|$	norma prvku x
(u, v)	skalární součin prvků $u, v \in X$

$J : X \to X^{**}$	kanonické zobrazení prostoru X do X^{**})
$\mathcal{U} : X \to X^*$	dualizační zobrazení
$\operatorname{int} K$	vnitřek množiny K
$\overline{\Omega}$	uzávěr množiny Ω
$\delta\Omega$	hranice množiny Ω
B_r, C_r	otevřené koule, střed v 0 a poloměr r
S_r	hranice $\overline{B_r}$
S	jednotková sféra v $\mathbb{R}_n$
$u_n \rightharpoonup u$	slabá konvergence $\{u_n\}$ k u
$x_n^* \overset{w^*}{\to} x^*$	slabá konvergence funkcionálů
$h \circ f$	složení funkcí h a f
h^{-1}	inverzní funkce
$\operatorname{epi} f$	nadgraf (epigraf) funcionálu f
$\operatorname{grad} f(x) \equiv f'(x)$	gradient funkcionálu f
$VA(x,h)$	Gâteaux. difer. oper. A v bodě x ve směru h
$DA(x,h)$	additivní variace $VA(x,h)$
$A^{'}(x)h \equiv DA(x,h)$	G-derivace operátoru A v bodě x ve směru h
$\varphi'(t-0)$	derivace φ v bodě t zleva
$\varphi'(t+)$	derivace φ v bodě t zprava
$r_n \nearrow r,\ r_n \searrow r$	monotónní konvergence posl. čísel $\{r_n\}$ k r
$r_n \to r$	konvergence posl. $\{r_n\}$ k r
$\operatorname{sign} \alpha$	znaménko čísla $\alpha \neq 0$
$L^q(\Omega)$	Lebesgueův prostor
$\\|\cdot\\|_q$	norma na prostoru $L^q(\Omega)$
$W^{k,p}(\Omega)$	Sobolevův prostor
$\\|\cdot\\|_{k,p}$	norma na prostoru $W^{k,p}(\Omega)$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Sobolevův prostor funkcí s nulovými stopami
$\\|\cdot\\|_{k,p,0}$	norma na prostoru $W_0^{k,p}(\Omega)$
$\\|\|\cdot\\|\|$	ekviv. norma na prostoru $W^{k,p}(\Omega)$
$C^k(\Omega)$	k- krát spoj. diferenc. funkce na Ω
l^p	reálný prostor číselných posl.
$h \in CAR$	h splňuje Caratheodorovy podmínky
$h \in CAR(p)$	$h \in CAR$ a splňje růstové podmínky
$a_\alpha \in CAR^*(p)$	$a_\alpha \in CAR$ a splňuje zobecněné růst. podm.
$(\mathcal{A}, V, Q)$	okrajová úloha
$d\,[f(x);\, B_r, 0]$	Brouwerův stupeň f vzhledem ke kouli B_r a 0
$d\,[I-T;\, B_r,\, 0]$	Leray-Schauder stupeň operátoru $I-T$

Příloha B

Seznam vět, lemmat a definic.

Definice 1.1.1	str.7	vybrané pojmy v normovaných prostorech
Definice 1.1.2	str.8	reflexivita Banachova prostoru
Definice 1.1.3	str.9	slabá konvergence prvků a funkcionálů
Věta 1.1.1	str.9	Eberleinova-Šmuljanova věta
Tvrzení 1.1.1	str.9	vybraná tvrzení z lineární funkcionální analýzy
Definice 1.1.4	str.11	definice vlastnosti konečného průniku
Věta 1.1.2	str.11	věta o centrovaných systémech
Definice 1.1.5	str.11	def. zdola a shora polospoj. funkce v top. prost.
Definice 1.1.6	str.11	def. zdola a shora polospoj. funkce v norm. prost.
Definice 1.1.7	str.12	konvexita a striktní konvexita funkcionálu
Lemma 1.1.1	str.12	nutná a post. podm. slabě zdola polospoj. funkc.
Lemma 1.1.2	str.13	vlastnost zdola polospoj. funkcionálů
Lemma 1.1.3	str.13	vlastnost konvexních a zdola polospoj. funkc.
Věta 1.1.3	str.14	konvexita, zdola polospoj. a slabě zdola polospoj.
Věta 1.1.4	str.14	post.podmínka pro slabě zdola polospoj.
Definice 1.1.8	str.15	nadgraf (epigraf) funkcionálu
Lemma 1.1.4	str.15	vztahy mezi vlastnostmi funkc. a jeho nadgrafu
Definice 1.1.9	str.15	definice opěrného funkcionálu
Věta 1.1.5	str.15	vztah mezi konvexitou a opěrným funkcionálem
Věta 1.1.6	str.17	nutná a post. podmínka konvexity funkc.
Věta 1.1.7	str.17	konvexita a slabě zdola polospojitost funkcionálu
Lemma 1.1.5	str.18	zeslabení pojmu opěrného funkcionálu
Věta 1.2.1	str.15	ex. a jedn. řešení rovnice jedné reálné proměnné
Definice 1.3.1	str.19	pojem pevného (fixního) bodu
Věta 1.3.1	str.19	věta Brouwerova o pevném bodu
Věta 1.3.2	str.20	zobecněná věta Brouwerova o pevném bodu
Věta 1.3.3	str.21	zobecnění věty Brouwerovy

Věta 1.3.4	str.22	věta Schauderova-Tichonovova o fix. bodu
Věta 1.3.5	str.22	věta Schauderova o pevném bodu
Věta 1.3.6	str.23	věta Hartmanova-Stampacchiova o fix. bodu
Věta 1.3.7	str.25	věta Banachova o kontrahujícím zobrazení
Definice 1.4.1	str.25	definice monotonnosti funkce a operátoru
Definice 1.4.2	str.26	definice koercivity funkce a operátoru
Věta 1.4.1	str.26	ex. řešení nelin. rovnic více proměnných
Věta 1.4.2	str.28	surj. spoj. a koerc. zobrazení v $\mathbb{R}_n$
Věta 1.5.1	str.29	Lagrangeova formule pro G-diferenc. funkc.
Lemma 1.5.1	str.33	vlastnosti G-derivace normy
Definice 1.5.1	str.33	striktně a stejn. konvex. norm. prostor
Věta 1.5.2	str.34	striktně a stejn. konv. norm. prostor
Definice 1.5.2	str.34	definice dualizačního zobrazení
Definice 1.6.1	str.36	definice Němyckého operátoru
Věta 1.6.1	str.36	vlastnosti Němyckého operátoru
Věta 1.6.2	str.39	zobecnění věty 1.6.1
Definice 1.7.1	str.40	minimalizující posloupnost
Věta 1.7.1	str.40	minimum slabě zdola polospoj. funkc.
Věta 1.7.2	str.40	minimum slabě zdola polospoj. a rost. funkc.
Věta 1.7.3	str.42	konvexita a monotonností funkce
Věta 1.7.4	str.42	konv. a monot. funkc. v Hilbert. prostoru
Věta 1.7.5	str.44	zobecnění věty 1.7.4 pro norm. prostory
Definice 1.7.2	str.46	definice bodu lokálního minima funkc.
Lemma 1.7.1	str.46	vlastnosti G-derivace v bodě lok. minima
Věta 1.7.6	str.47	korektnost (ex. jediného bodu absol. minima)
Věta 1.7.7	str.48	zeslabení předpokladů věty 1.7.6
Věta 1.7.8	str.50	věta o existenci bodu lokálního minima funkc.
Věta 1.7.9	str.50	minima konv. funkc. a jejich G-derivací
Definice 1.8.1	str.52	definice zobecněné derivace
Věta 1.8.1	str.53	stopa funkce na $\partial\Omega$
Věta 1.8.2	str.54	Greenova věta pro derivace prvního řádu
Věta 1.8.3	str.54	Greenova věta pro derivace vyšších řádů
Věta 1.8.4	str.55	zákl. vlastnosti vnoření Sobol.prostorů
Věta 1.8.5	str.55	vlastn. funkce z $W^{k,p}(\Omega)$
Definice 2.1.1	str.58	def. pojmů v teorii monotónních op.
Lemma 2.1.1	str.60	vztahy mezi pojmy uvedeným v def. 2.1.1
Definice 2.1.2	str.64	nejdůl. pojmy op. v refl. prostoru
Lemma 2.1.2	str.65	vztahy mezi vlastnostmi uvedeným v def.
Lemma 2.1.3	str.68	nejdůl. vlastností monotónních op.
Definice 2.2.1	str.78	def. pseudomon. oper.
Lemma 2.2.1	str.78	vztahy mezi pojmy uvedenými v def. 2.2.1
Lemma 2.2.2	str.82	součet monotónních operátorů
Lemma 2.2.3	str.82	součet pseudomonotónních operátorů
Definice 2.2.2	str.85	definice semi-monotónního operátoru
Věta 2.2.1	str.85	vztah mezi se-mimonotónností a pseudomon.

Definice 2.2.3	str.90	akreditivní a disipativní operátor
Definice 2.3.1	str.91	Lipschitzovsky spojitý operátor
Věta 2.3.1	str.91	rovnice se silně monot. a Lipssch. spoj. op.
Věta 2.3.2	str.92	Laxova-Milgramova věta
Věta 2.3.3	str.93	Stampacchiova věta (zob. Lax-Milgram v.)
Definice 2.3.2	str.95	monot. oper. na podmn. Hilbert. prostoru
Věta 2.3.4	str.95	monot. a expanz. oper. v Hilbert. prostoru
Lemma 2.3.1	str.96	Mintyho l. pro monot. oper. v Hilbert. p.
Věta 2.3.5	str.96	věta o fixních bodech neexpanz. operátoru
Věta 2.3.6	str.98	zákl. věta o monot. oper. v Hilbert. prost.
Věta 2.3.7	str.101	zobecnění věty 2.3.6 pro uzavřenou kouli
Věta 2.3.8	str.102	surj. monot., koerc. oper. v Hilbert. p.
Věta 2.3.9	str.103	zeslabení předpokladů věty 2.3.8
Definice 2.3.3	str.105	def. Galerkinovy aprox. op. rovnic
Věta 2.3.10	str.106	surjektivita oper. v refl., seper. Banach. p.
Věta 2.3.11	str.109	Mintyho-Browderova v. (zob. v. 2.3.10)
Věta 2.3.12	str.112	věta analogická k větě 2.3.10 o surj.
Věta 2.3.13	str.112	zob. věty 2.3.10 pro nemonotónní operátory
Věta 2.3.14	str.113	věta Lerayova-Lionsova
Věta 2.4.1	str.115	konvergence Galerkinových aproximací
Věta 2.4.2	str.119	konvergence iter. metody v Hilbert. p.
Věta 2.4.3	str.120	komb. Galerkinova a iterační metoda
Lemma 2.4.1	str.121	konvergence pevných bodů posl. operátorů
Věta 2.4.4	str.122	konvergence projekčně-iterační metody
Definice 3.1.1	str.123	definice pojmu potenciál
Lemma 3.1.1	str.124	expl. tvar radiálně spoj.potenc. operátorů
Lemma 3.1.2	str.125	kritéria potenc. demispojitého operátoru
Lemma 3.1.3	str.127	kritéria potenc. G-diferenc. operátorů
Lemma 3.2.1	str.133	podm. řeš. rovnice s monot. potenc. oper.
Lemma 3.2.2	str.134	demispoj. monotónního potenc. operátoru
Věta 3.2.1	str.134	řešení rovnice s monot. potenc. oper.
Definice 3.3.1	str.136	efektivní oblasti funkcionálu
Definice 3.3.2	str.136	duální funkcionál
Lemma 3.3.1	str.136	vlastnosti duálního funkcionálu
Definice 3.3.3	str.139	dvakrát duální funkcionál
Lemma 3.3.2	str.139	efekt. oblast dvakrát duál. funkc.
Věta 3.3.1	str.139	vztah mezi funkc. a dvakrát duálním funkc.
Věta 3.3.2	str.140	čtyři ekv. tvrzení pro duální funkcionál
Věta 3.3.3	str.143	vlastností potenc. operátorů A, A^{-1}
Definice 3.4.1	str.144	definice Ritzovy aproximace řešení
Věta 3.4.1	str.144	vztah mezi Ritzovou a Galerkin. metodou
Věta 3.4.2	str.145	konvergence Ritzovy metody
Věta 3.4.3	str.146	konvergence iterační metody
Věta 3.4.4	str.149	konvergence projekčně-iterační metody
Věta 3.4.5	str.150	iter. metoda a komb. Galerk. a iter. metoda
Lemma 3.4.1	str.152	kontraktivita spec. operátoru

Věta 3.4.6	str.156	minimalizující vlastnost posloupnosti
Věta 4.1.1	str.163	spojitost a ohraničenost Němyckého op.
Věta 4.1.2	str.164	Ohr. a spoj. oper. přísl. k form. dif. op.
Věta 4.2.1	str.172	slabé řeš. okraj. úlohy (apl. v. Minty-Browd.)
Věta 4.2.2	str.173	slabé řeš. okraj. úlohy (apl. v. 3.2.1)
Věta 4.2.3	str.173	slabé řeš. okraj. úlohy (apl. v. Leray-Lions)
Věta 5.1.1	str.175	existence stupně zobrazení v prostoru $\mathbb{R}_n$
Definice 5.1.1	str.176	definice Brouwerova stupně zobrazení
Definice 5.1.2	str.176	definice pojmu homotopického zobrazení
Věta 5.1.2	str.176	věta Brouwerova (důkaz pomocí stupně zobr.)
Věta 5.1.2	str.176	ex. stupně zobrazení na Banachově prostoru
Věta 5.2.1	str.183	vlastnosti Laray-Schauder stupně zobrazení
Definice 5.2.1	str.184	Larayova-Schauderova stupně zobrazení
Věta 5.2.2	str.190	Larayho-Schauderova věta o pevném bodu

Rejstřík

w konvergence, 9
w^* konvergence, 9

$W^{k,p}(\Omega)$
  stopa na $\partial\Omega$, 53

aplikace
  věta Lerayova-Lionsova, 173
  věta Mintyho-Browderova, 172
  věta z teorie potenc. operátorů, 173
  věty Lerayovy-Lionsonovy, 171

bilineární forma, 92
  symetrická, 92

Caratheodorovy podmínky, 36, 158

derivace funkce
  distribuce, 52
divergentní tvar, 159
důsledek
  modif. zákl. v. o surj., 109

existenční věty, 166

formální diferenciální operátor, 159
  vlastnosti, 164
funkce
  nulové stopy, 54
  zobecněné derivace, 55
  koercivní, 26
  monotónní, 25
    spojitá, 18
  ryze monotónní
    spojitá, 18
  shora polospojitá, 11
  slabě shora polospojitá, 12
  slabě zdola polospojitá, 12
  zdola polospojitá, 12
  zdola polospojitá, 11
funkcionál
  duál k $W^{k,p}(\Omega)$, 55
  duální, 136
    konstrukce, 137
    vlastnosti, 136
  dvakrát duální, 139
  efektivní oblast, 136
  konečný, 12
  konvexní, 12, 13
    spojitý, 14
  korektnost minimalizace, 47
  kvazikonvexní, 14
  lineární
    spojitý, 8
  lokální minimum, 45
  minimum, 40
  Minkowského, 20
  nadgraf (epigraf), 15
  netriviální, 136
  opěrný, 15
  ryze kvazikonvexní, 14
  shora polospojitý, 11
  slabá konvergence, 9
  slabě koercivní, 47
  slabě zdola polospojitý, 13, 14
  spojitý
    sublineární, 20
  striktně konvexní, 12
  zdola polospojitý, 11, 13

Galerkinova aproximace, 105

Hilbertův prostor
  projekce, 41

hlavní část vektoru $\delta_k u$, 158

Kakutaniho příklad, 185
klasické řešení, 159
konečně dimenzionální
  normované
    prostory, 21
konvergence
  w konvergence, 9
konvexní, 10, 17, 29
koule
  uzavřená, 9, 10
kritérium
  slabě zdola polospoj. funkc., 12

lemma
  Mintyho, 96
  zobecn. lemmatu Mintyho , 96
limita, 8

množina, 12, 32, 35, 50
  kompaktní, 8
  konvexní, 10
    ohraničená a uzavřená, 10
    uzavřená, 9, 14
  maximálně monotónní, 88
  monotónní, 88
  prekompaktní, 8
  slabě kompaktní, 9, 10
  slabě otevřená, 10
  slabě uzavřená, 9, 12–14
  uzavřená, 8, 13, 14
    pohlcující, 20
multiindex, 51
  délka, 51

neprázdný průnik množin, 11
norma
  ekvivalentní na $W^{k,p}(\Omega)$, 52
  F-derivace, 33
  G-derivace, 33
  gradient, 31
  na $W^{k,p}(\Omega)$, 52
  na $W_0^{k,p}(\Omega)$, 53
  operátoru, 8
  prvku, 8
  stejnoměrně konvexní, 33
  striktně konvexní, 33
normované prostory, 44
num. metody
  projekčně-iterační , 121
numerické metody
  odhady chyb, 151
  Galerkinova metoda, 114
  gradientní, 148
  iterační metody, 118
  komb. Galerkin. a iter., 120
  metoda největšího spádu, 148
  minimalizující posloupnost, 156
  projekčně-iterační metoda, 149
  Ritzova, 144, 145
    konvergence, 145

obor
  definiční, 7
  hodnot, 7
okrajová úloha, 160
  data, 161
  Dirichletova, 160
    slabé řešení, 160
  pravá strana, 162
  slabé řešení, 161
operátor
  J-monotónní, 90
  α-monotónní, 59
  akreditivní, 90
  demispojitý, 64
  derivace vyššího řádu, 30
  disipativní, 90
  dualizační, 35
  expanzivní , 95
  F-derivace, 30
  Fréchetův diferenciál, 30
  G-derivace, 29
  hemispojitý, 64
  koercivní, 26, 59
  kompaktní, 8
  kritéria potenciálnosti, 124
  lineární, 8
    kompaktní, 8
  Lipschitzovsky spojitý, 65
  lokálně ohraničený, 64
  maximálně monotónní, 88

monotónní, 26, 58, 95
potenciální, 133
potenciální, 132
součet, 82
neexpanzivní, 95
nelineární, 7
Němyckého, 36
vlastnosti, 36, 131
zobecnění, 39
ohraničeně Lipsch. spoj., 65
ohraničený, 64
podmínka (M)
součet, 84
potenciál, 123
potenciální, 123
vlastnosti, 143
pseudomonotónní, 78
součet, 82
radiálně spojitý, 64
potenciální, 124
ryze monotónní, 26, 59
semi-monotónní, 85
silně monotónní, 59
slabě diferencovatelný, 28
slabě spojitý, 64
spoj. na kon. rozměr. podprost., 65
spojitý, 8, 64
lineární, 8
spojitý na přímkách, 65
stejnoměrně monotónní, 59
stejnoměrně spojitý, 65
totálně spojitý, 8, 22, 64
variace operátoru, 29
zesíleně spojitý, 64
operátorové rovnice, 91
ex. a jednoznačnost řešení, 91
označení
CAR, 158
$CAR(p)$, 158
$CAR^*(p)$, 165

podmnožina
kompaktní
sekvenciálně, 8
konvexní, 12
omezená, 8
prekompaktní, 8
slabě uzavřená, 12
podmožina
kompaktní, 8
podmínka
(M), 59
$(M)_0$, 59
(S), 59
$(S)_+$, 78
$(S)_0$, 78
podmínky
monotonie v hlavní části, 167
nestabilní okrajové, 162
růstové, 36, 158
stabilní okrajové, 162
zob. růst. podmínek, 162
podposloupnost
konvergentní, 8
pokrytí
konečné podpokrytí, 8
otevřené, 8
posloupnost
omezená, 10
konvergence
slabá, 9
konvergence X^*-slabá, 9
limitně hustá, 120
minimalizující, 40
ohraničená, 8, 9
omezená, 9
podposloupnost, 8
konvergentní, 8
potenciál úlohy, 134
princip stejnoměrné omezenosti, 9, 10
projekce, 10
prostor
Banachův
reflexivní, 9, 10
druhý duální, 8
duální, 8
metrický, 7
normovaný, 7
reflexivní, 8, 9
separabilní, 105
Sobolevův, 51

Sobolevův $W^{k,p}(\Omega)$, 52
Sobolevův $W_0^{k,p}(\Omega)$, 53
stopa na $\partial\Omega$, 54
stejnoměrně konvexní, 33
striktně konvexní, 33
topologický, 7, 11
vlastnosti konv. prostorů, 33
úplný, 8

rovnice
existence a jednoznačnost, 18

Semi-skalární součin, 89
slabá konvergence, 9
slabé řešení, 160
stupeň zobrazení, 175
n-rozm. Banach prostor, 184
Banachův prostor
vlastnosti, 185
Brouwerův, 176
Brouwerův
konstrukce, 178
vlastnosti, 175, 181
Heinzův integrální stupeň, 180
Leray-Schauder
vlastnosti, 188
Lerayův-Schauderův, 184, 188
vlastnosti, 183

uzávěr, 8

vektorová funkce-$\delta_k u$, 158
vlastnost konečného průniku, 11
vnoření, 8
vztah
konv. a opěrný funkc., 15
duální, 8
konvexita a G-derivace, 42
věta
Leray-Schauder v. o fix. bodu, 189
vnoření, 54
Banachova o kontrah. zobr., 25
Borsukova, 189
Brouwerova, 19, 176
Eberlainova-Šmuljanova, 9
Greenova, 54
Hartmanova-Stampacchiova, 23
Lagrangeova formule, 29
Laxova-Milgramova, 92
Lerayova-Lionsova, 113
Mintyho-Browdera, 109
o surjektivitě v prostoru $\mathbb{R}_n$, 28
o centrovaných systémech, 11, 112
o ex. řešení v Hilbert. prostorech, 98
o fix. bodech neexpanz. oper., 96
o pevném bodu, 21
o surjekt. v Hilbert. prostoru, 102
Rieszova-Fréchetova věta, 91
Schauderova, 22, 184, 187
Schauderova-Tichonovova, 22
Stampacchiova, 93
zobecněná Brouwerova, 20
zobecnění Lax-Milgram v., 91
zákl. v. o surj., 106

zobecněná derivace, 52
zobrazení
dualizační, 34
vlastnosti, 129
inverzní, 21
kanonické, 8, 89
lineární
izomorfní a izometrické, 8
pevný bod, 19
Rieszovo, 77

Literatura

[1] K. Deimling (Springer Verlag 1985): Nonlinear funkcional analysis.

[2] N. Dunford, J.T. Schwartz (Interscience, New York 1958, rusky: Moskva, nakl. Mir 1962): Linear operators (3 volumes).

[3] S. Fučík, J. Nečas, J. Souček a S. Souček (Springer Verlag, 1973): Spectral analysis of nonlinear operators.

[4] S. Fučík, A. Kufner (SNTL, Praha 1978): Nelineární diferenciální rovnice.

[5] J. Franců: Úvod do teorie monotónních operátorů (Seminární text, Brno 1987, KMA PF UJEP).

[6] H. Gajewski, K. Gröger and K. Zacharias (Akademie-Verlag, Berlin 1974, rusky Moskva 1978): Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen.

[7] L.V. Kantorovich, G. P. Akilov (Pergamon Press 1964, rusky: Fizmatgiz, Moskva 1959): Functional analysis in normed spaces.

[8] Leray, J.-Lions, J.-L.: Quelques résultats de Višik sur les problémes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder. Bull. Soc. Math. France 93, 1965, str. 97-107.

[9] A. Kufner, O. John, S. Fučík (Academia, Praha 1977): Function spaces.

[10] J. Lukeš (skripta, Karolinum - nakl. University Karlovy, Praha 1998): Zápisky z funkcionální analýzy.

[11] Dan Pascali, Silviu Sburlan (Editura Academici, Bucuresti 1978): Nonlinear mappings of monotone type.

[12] A. E. Taylor (Wiley 1958, překlad: Academia, Praha 1973): Úvod do funkcionální analýzy.

[13] M. M. Vainberg (Wiley & Sons 1974, rusky: nakl. Nauka, Moskva 1972): Variational methods and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations.

[14] Hwai-Chiuan Wang (National Tsing Hua University Press, Taiwan 2003): Nonlinear analysis.

[15] K. Yosida (Springer-Verlag 1965, rusky: nakl. Mir, Moskva 1967): Functional analysis.

[16] E. Zeidler (Springer-Verlag, 1984): Nonlinear analysis and its applications I: Fixed point theorems.

Vít Dolejší, Karel Najzar

NELINEÁRNÍ FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA

Vydal
MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 331. publikaci

Z připravených předloh v TEXu
vytisklo Reprostředisko UK MFF
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

Vydání první

Praha 2010

ISBN 978-80-7378-137-8