

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
WYDZIAŁ CHEMICZNY

KATEDRA FIZYKOCHEMII
I TECHNOLOGII POLIMERÓW

LABORATORIUM Z FIZYKI

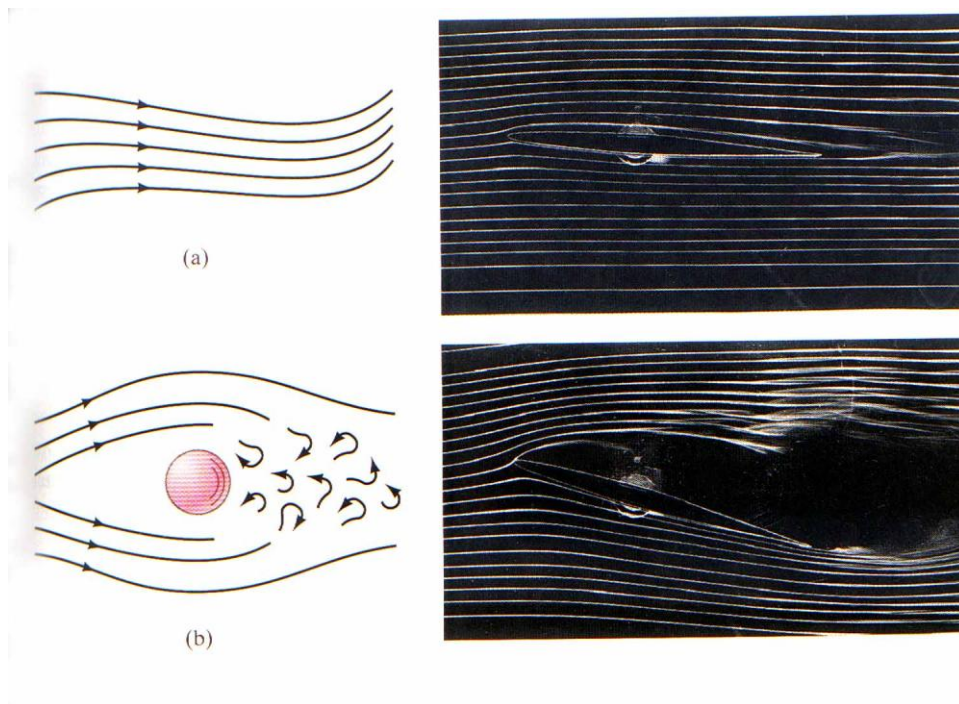
***Badanie przepływu cieczy – prawo ciągłości
strugi, prawo Bernoulliego***

6.1. Wprowadzenie

Na początku zdefiniujemy pojęcie płynu jako „substancji ciekłej, gazowej lub proszku, która mają zdolność płynąć tj. dowolnie zmieniać swój kształt w zależności od naczynia, w którym się znajdują, oraz może swobodnie się przemieszczać (przepływać), np. przepompowywana przez rury.

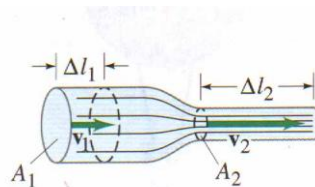
Możemy rozróżnić cztery główne typy przepływów. Przepływ, w którym w każdym punkcie obszaru zajętego przez płyn jego prędkość nie zmienia w czasie nazywamy **przepływem stacjonarnym**. Jeśli natomiast składowe wektorów prędkości elementów płynu są funkcjami czasu to przepływ nazywamy **przepływem niestacjonarnym**. Jeżeli przepływ jest łagodny, gładki tzn., sąsiadujące warstwy płynu ślizgają się po sobie nie zaburzając się wzajemnie, przepływ nazywamy **przepływem laminarnym** (rys. 6.1a). W przepływie laminarnym każdy element płynu porusza się po gładkiej trajektorii zwanej strugą. Sąsiednie strugi nie przecinają się. W miarę wzrostu szybkości przepływu, powyżej pewnej prędkości krytycznej, przepływ staje się **turbulentny**. Przepływ turbulentny charakteryzuje się występowaniem różnego rodzaju wirów oraz ich nagłym znikaniem i pojawianiem się (rys 6.1.b). Przejście z przepływu laminarnego do przepływu turbulentnego odbywa się, gdy energia, a zatem i prędkości „elementów” płynu są tak duże, że wewnętrzne tarcie (lepkość) nie jest już w stanie wytłumić powstających wirów i zaburzeń przepływu. Należy w tym miejscu zauważyć, że każdy przepływ turbulentny jest przepływem niestacjonarnym, a przepływ laminarny może być zarówno stacjonarny jak i nie. Charakter przepływu jest określany przez bezwymiarową liczbę Reynoldsa. Kilka kropel atramentu lub barwnika wkroplonych do płynącego płynu pozwala na doświadczalne stwierdzenie czy mamy do czynienia z przepływem stacjonarnym czy turbulentnym.

Płyn może być ściśliwy albo nieściśliwy. Na ogół ciecze uważa się za nieściśliwe, ale nawet strumienie gazów dających się łatwo ścisnąć, jeśli doznają nieznacznych zmian gęstości, można traktować jako praktycznie nieściśliwe. W naszym ćwiczeniu założymy, że płyn jest nieściśliwy (nie zmienia się znacząco jego gęstość) oraz, że przepływ jest stacjonarny i laminarny.



Rys. 1 (a) Przepływ laminarny; (b) turbulentny.

Rozpatrzmy stały przepływ laminarny przez niezamkniętą rurę (Rys. 6.2).



Rys. 6.2 Przepływ płynu przez rurę o zmiennej średnicy.

W takiej rurze masa płynu musi być zachowana, tzn. gdy wprowadzimy masę m_1 do rury, wtedy masa $m_2=m_1$ musi z niej wypłynąć (przy czym płyn jest nieściśliwy, gdyż w przeciwnym wypadku rura może akumulować pewną ilość masy).

Rozpatrzmy nieskończenie małą masę dm , wprowadzoną w czasie dt do rury. Na podstawie zasady zachowania masy możemy napisać, że:

$$dm_1 = dm_2 \quad (6.1)$$

Znając zależność masy od objętości i gęstości możemy napisać:

$$dV_1\rho = dV_2\rho \quad (6.2)$$

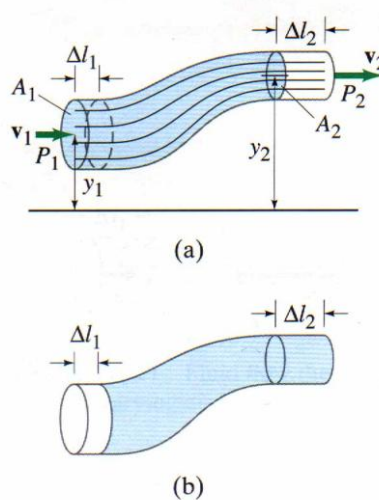
Objętość płynu, jaka wpływa do rury w czasie dt jest równa $V=Adx$, gdzie A jest polem powierzchni przekroju rury, a dx jest grubością strugi, wprowadzanej w czasie dt . Podstawiając to do poprzedniego równania i pamiętając o definicji prędkości otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A_1 dx_1 &= A_2 dx_2 \quad / dt \\ A_1 v_1 &= A_2 v_2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Jest to równanie ciągłości strugi.

Z równania (6.3) wynika, że dla laminarnego przepływu nieściśliwego płynu prędkość strumienia zmienia się tak, jak zmienia się odwrotność powierzchni przekroju poprzecznego i jest największa w najwęższych częściach rurki. Można to zaobserwować w przypadku rzeki, która w miejscach szerokich płynie wolno, a wpływając do wąwozu płynie z dużą szybkością.

Czy zastanawialiście się kiedykolwiek, dlaczego dym wznosi się w górę komina albo jak żagłówek może poruszać się pod wiatr? To są przykłady rozpatrywane przez Daniela Bernoulliego (1700-1782) w osiemnastym wieku. Prawo Bernoulliego mówi, że kiedy prędkość płynu rośnie, ciśnienie maleje.



Rys. 6.3 Przepływ płynu - równanie Bernoulliego.

Bernoulli wyprowadził równanie, opisujące to zjawisko, przy założeniu, że przepływ jest stacjonarny, laminarny oraz, że płyn jest nieściśliwy, a lepkość jest tak mała, że możemy ją pominąć.

Rozpatrujemy układ, gdzie płyn płynie w rurze o zmiennym przekroju i wysokości nad poziomem odniesienia. Rys. 3.

Równanie Bernoulliego w takim układzie możemy określić jako zasadę zachowania energii. Energia płynu w pewnym położeniu w rurze jest sumą energii kinetycznej, potencjalnej energii grawitacji i energii wewnętrznej, spowodowanej działaniem siły wewnętrznej. Dla elementu masy $dm = \rho A dx$, możemy napisać

$$E = E_K + E_P + E_w \quad (6.4.)$$

$$E_K = \frac{dmv^2}{2} \quad (6.5.)$$

$$E_P = dmgh \quad (6.6.)$$

$$E_w = pdV \quad (6.7.)$$

Wzory na energię kinetyczną i potencjalną są powszechnie znane i oczywiste. Musimy jednak w tym miejscu skomentować wzór na energię wewnętrzną płynu. Aby wprowadzić elementarną masę dm do rury musimy pokonać pewne ciśnienie p , które jest w rurze. To ciśnienie generuje siłę $F = pA$, która przeciwdziała ruchowi. Poruszając się po dx , należy wykonać pracę na płynie $W = Fdx = pAdx = pdV$. Ta praca przechodzi w energię wewnętrzną płynu.

Możemy podzielić równanie (6.4.) przez dV otrzymując w ten sposób równanie Bernoulliego, zgodnie z którym energia przepływającego płynu nie zmienia się. Założenie to wydaje się sensowne, ponieważ w żadnym innym miejscu, oprócz wlot, energia nie jest dodawana, ani zabierana z układu. Pamiętając, że $dm = \rho dV$, możemy napisać:

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gy = \text{constant} \quad (6.8)$$

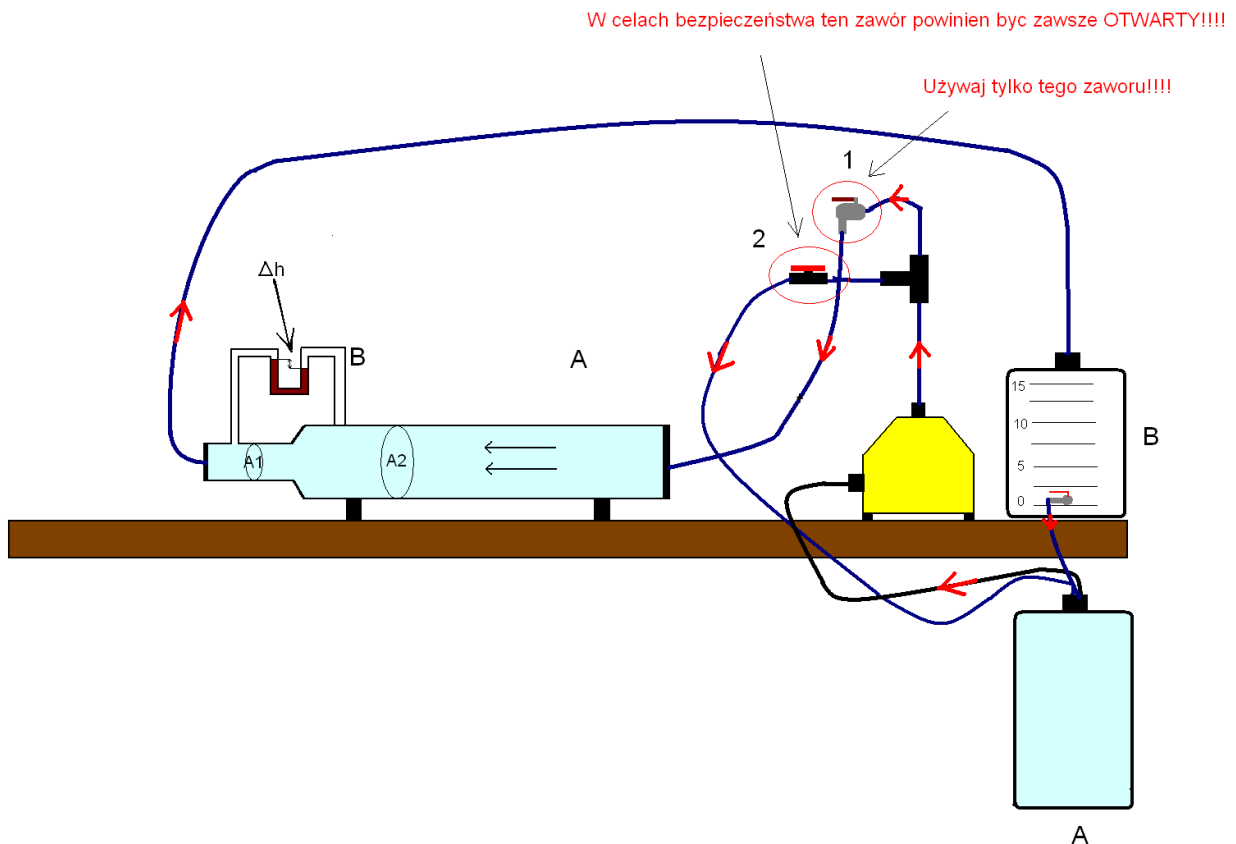
lub biorąc dwa punkty w rurze i rozwijając powyższe równanie:

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2} \quad (6.9)$$

Jest to **równanie Bernoulliego** [w przypadku, gdy nie ma przepływu ($v_1=v_2=0$), równanie (6.9) redukuje się do równania na ciśnienie hydrostatyczne: $P_2-P_1=-\rho g(y_2-y_1)$].

6.2. Pomiary

Na rysunku 6.4 pokazano nasz układ pomiarowy:



Rys. 6.4. Układ pomiarowy.

Układ pomiarowy składa się z pompy, która tłoczy wodę ze zbiornika A (czarny wąż), poprzez szklaną rurę o dwóch różnych średnicach przekroju do zbiornika B. Część tłoczonych wody jest zawracana z powrotem do zbiornika A celem uniknięcia gwałtownego wzrostu ciśnienia w

układzie w momencie włączania pompy przy zamkniętym zaworze nr1. Układ posiada także dwa zawory: wspomniany już zawór nr.1 służący do regulacji wielkości przepływu (przy włączeniu pompy musi być zawsze zamknięty) oraz zawór nr.2 (ten zawór musi być zawsze otwarty).

W dwóch miejscach rury – szerokim i wąskim – mierzymy ciśnienie statyczne za pomocą dołączonych do jej ścianek rurek manometrów ciśnieniowych. Taki pomiar nie zakłóca warunków przepływu cieczy. Zgodnie z prawem Bernoulliego ciśnienie statyczne w obu miejscach rury będzie różne. Jeśli rurki manometrów ciśnieniowych połączy się tak, jak to wskazuje rys. 6.4, to otrzyma się rurkę manometryczną, którego różnica poziomów jest miarą różnicy ciśnień statycznych. Znajomość różnicy ciśnień $p_1 - p_2$, nie jest wystarczająca do wyznaczenia szybkości przepływu cieczy. Trzeba przyjąć warunek ciągłości strumienia, czyli należy uwzględnić równanie (1), przy czym konieczną jest znajomość przekrojów A_1 i A_2 .

Na początku ćwiczenia należy za pomocą suwmiarki zmierzyć średnicę przekroju szerszego (1) i węższego (2) oraz obliczyć powierzchnię tych przekroju - A_1 i A_2 (rys. 6.4).

Następnie przygotowujemy się do wykonania pomiarów prędkości przepływu.

Uwaga!!!!

Przed włączeniem pompy należy się upewnić, że zawór nr.2 jest otwarty (rączka zaworu równolegle ustawiona względem węża), a zawór nr.1 zamknięty (rączka zaworu ustawiona prostopadle względem węża). Należy upewnić się także, że zbiornik A jest napełniony wodą, zbiornik B jest pusty (poziom „0” na skali), a wszystkie węże są właściwie podłączone (patrz schemat).

Nigdy nie uruchamiaj pompy bez sprawdzenia ustawień zaworów i połączeń węży!!!!

Przebieg doświadczenia:

- Przed każdym pomiarem zanotuj początkową różnicę poziomów cieczy w rurce manometrycznej (nie powinna przekraczać 15mm).
- Po sprawdzeniu ustawień zaworów i połączeń włącz pompę.

- Pomiaru należy wykonać trzykrotnie, dla trzech różnych stopni otwarcia zaworu nr.1
- Po otwarciu zaworu nr.1 należy notować czasy potrzebne do napełnienia zbiornika B do poziomu: 5L, 10L i 15L.
- Jednocześnie należy zanotować różnice poziomów cieczy Δh w rurce manometrycznej.
- Po zakończonym pomiarze należy zamknąć zawór nr.1, a następnie wyłączyć pompę (dokładnie w tej kolejności)
- Następnie należy przelać wodę ze zbiornika B do zbiornika A i powtórzyć pomiar dla innego stopnia otwarcia zaworu nr.1.

Uwaga!!!!

Nie wolno doprowadzić do pełnego opróżnienia zbiornika A. Gdyby poziom wody w zbiorniku A osiągnął minimalny, bezpieczny poziom, należy natychmiast wyłączyć pompę.

Obliczenia:

Z równania (6.14) (wyprowadzonego z równania ciągłości strugi i Bernoulliego) należy obliczyć szybkość przepływu wody przez przekrój 2:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (6.10)$$

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} \quad (6.11)$$

$$p_1 + \rho_w \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho_w \frac{v_2^2}{2} \quad (6.12)$$

$$p_1 + \rho_w \frac{v_2^2 A_2^2}{2A_1^2} = p_2 + \rho_w \frac{v_2^2}{2} \quad (6.13)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{-2\Delta p A_1^2}{\rho_w (A_1^2 - A_2^2)}} \quad (6.14)$$

gdzie Δp jest różnicą ciśnień między przekrojami A_2 i A_1 :

$$-\Delta p = -(p_2 - p_1) = p_1 - p_2$$

Różnicę ciśnień należy wyliczyć używając zmierzonych różnic w poziomach cieczy w rurce manometrycznej, stosując znany wzór:

$$p_1 - p_2 = \rho_m \Delta h g \quad (6.15)$$

gdzie:

ρ_m – jest gęstością cieczy wypełniającej manometr (przyjmujemy gęstość taką samą jak dla wody)

Δh – jest różnicą wysokości cieczy w ramionach manometru (Należy uwzględnić początkową, zanotowaną różnicę poziomów).

Ostatecznie możemy napisać, że:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\rho_m \Delta h g A_1^2}{\rho_w (A_1^2 - A_2^2)}} \quad (6.16)$$

Inną metodą wyznaczania prędkości wypływu wody z rury v_2 jest metoda oparta o mierzenie objętości wypływającej wody w określonym czasie:

$$V = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} t \quad (6.17)$$

lub

$$v_2 = \frac{4V}{\pi d_2^2 t} \quad (6.18)$$

Wyniki pomiarów należy zapisać w tabeli 6.1

W danym pomiarze (dla danego ustawienia stopnia otwarcia zaworu nr.1) dla każdej zmierzonej pary (objętość wody w zbiorniku b – czas potrzebny jej osiągnięcia) wartość Δh jest stała (taka jak zmierzona na końcu danego pomiaru)

Lp.	d_1	A_1	d_2	A_2	h	V	t	v_{2a} z równ. 6.16	v_{2b} z równ. 6.18

Tabela 6.1

6.3. Wyniki, obliczenia, analiza niepewności:

1. Z danych zebranych w tabeli 6.1 należy obliczyć średnie wartości:

$$\bar{v}_{2a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{2a i} \quad (6.19)$$

oraz

$$\bar{v}_{2b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{2b i} \quad (6.20)$$

Przeprowadzić analizę błędów zmierzonych prędkości metodą obliczenia niepewności danej poniższym wzorem dla równań 6.16 i 6.18 (dla każdego z osobna).

$$dv_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial v_2}{\partial h_1}\right)^2 dh^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial A_1}\right)^2 dA_1^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial A_2}\right)^2 dA_2^2} \quad (6.21)$$

Przyjąć: $\rho_m, \rho_w = 1000 \text{kg/m}^3$

Końcowe wyniki przedstawić w formie:

$$v_2 = \bar{v}_2 \pm dv_2 \quad (6.22)$$

2. Mając v_2 , należy obliczyć v_1

a) z równania ciągłości strugi $A_1v_1 = A_2v_2$

b) z równania Bernoulliego $\rho(v_1^2 - v_2^2) = \Delta p$

A następnie należy narysować wykres zależności $v_2 = f(v_1)$ i porównać współczynnik kierunkowy uzyskanej prostej ze zmierzoną wartością $\frac{A_1}{A_2}$.

6.4 Pytania

1. Wyprowadź równanie ciągłości.
2. Równanie ciągłości jest szczególnym przypadkiem pewnej zasady zachowania. Jaka to zasada? Omów ją.
3. Wyprowadź równanie Bernoulliego.
4. Równanie Bernoulliego jest szczególnym przypadkiem pewnej zasady zachowania. Jaka to zasada? Omów ją.
5. Jakiego rodzaju założenia musiałeś przyjąć, aby wyprowadzić te równania?
6. Wy tłumacz jak działa pompka wodna.
7. Wy tłumacz siłę wznoszenia, która działa na samolot.
8. Wy tłumacz doświadczenie z monetą prezentowane na wykładzie.
9. Co to jest liczba Reynoldsa?
10. Podczas wykonywania doświadczenia można zaobserwować wzrost temperatury przepływającej wody (rura staje się cieplejsza). Omów to zjawisko.

6.5 Literatura

1. Szczeniowski S., Fizyka Doświadczalna, Część I, Mechanika i Akustyka, PWN, Warszawa, 1980
2. Resnick R., Halliday D., Fizyka, Tom I, PWN, Warszawa, 1966
3. Giancoli D.C., Physics. Principles with Applications, Prentice Hall, 2000
4. Young H.D., Freedman R.A., University Physics with Modern Physics, Addison-Wesley Publishing Company, 2000

5. Szydłowski H., Pracownia fizyczna, PWN, Warszawa, 1994