

**Министерство образования Российской Федерации
Ухтинский государственный технический университет**

Е.К.ЮНИН, В.Н.РУБАНОВСКИЙ, В.К.ХЕГАЙ

**ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ
НАКЛОННО - НАПРАВЛЕННОМ
БУРЕНИИ**

Ухта 2002

УДК 622.243.23:534

Ю-52

Юнин Е.К. и др. Волновые процессы при наклонно-направленном бурении: Научное издание / Е.К. Юнин, В.Н. Рубановский, В.К. Хегай. – Ухта, 2002. – 60 с.: ил.

ISBN 5-88179-245-9

Проанализирован характер сил, действующих на бурильную колонну со стороны стенок скважины в условиях наклонно-направленного бурения, на основании чего разработана математическая модель бурильной колонны в случае проводки искривленной скважины. Рассмотрены специфические стороны динамики бурильной колонны, имеющие место в условиях наклонно-направленного бурения.

Для научных и инженерно-технических работников предприятий нефтяной, газовой и горной промышленности, аспирантов и студентов нефтяных вузов и факультетов, а также всех интересующихся задачами механики бурения глубоких скважин.

Рецензенты: доктор технических наук, профессор В.Ф. Буслаев, доктор технических наук П.Ф. Осипов.

© Ухтинский государственный технический университет, 2002

© Юнин Е.К., Рубановский В.Н., Хегай В.К., 2002

ISBN 5-88179-245-9

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие мирового промышленного производства и России, в частности, требует все возрастающего расширения энергетической базы. Для обеспечения потребности и прироста запасов нефти и газа необходимо постоянное наращивание объемов буровых работ. Для достижения этой цели необходимо осваивать новые нефтяные и газовые месторождения, а также интенсифицировать разработку эксплуатируемых месторождений, повышать нефтеотдачу пластов. При этом прослеживается тенденция расширения доли глубокого и наклонно-направленного бурения. В связи с этим исследования процесса бурения глубоких и наклонно-направленных скважин приобретают большое теоретическое и практическое значение.

Бурение нефтяных и газовых скважин, как известно, является весьма дорогостоящим процессом. При этом углубление забоя скважины представляет собой одну из основных составляющих этого процесса. Повышение эффективности процесса бурения глубоких и наклонно-направленных скважин в условиях, когда исследователь не имеет непосредственного доступа к забою, во многом определяется шириной и глубиной теоретических и экспериментальных исследований.

В отличие от других областей техники глубокое бурение выделяется тем, что между долотом, разрушающим горную породу на забое, и источником энергии, расположенным на дневной поверхности, имеется бурильная колонна, отличительной чертой которой является большая протяженность при малом поперечном сечении, что во многом определяет кинематику и динамику работы долота. И хотя опыт бурения достаточно велик и исчисляется многими десятилетиями и миллионами метров пробуренных скважин, вопросы, связанные с влиянием бурильной колонны на эффективность разрушения горных пород, стали привлекать внимание исследователей сравнительно недавно. Основной причиной обращения к этим вопросам послужила слишком ощутимая, в ряде случаев, разница между показателями отработки долот в стендовых и промысловых условиях, а также частое несоответствие оптимальных параметров режимов бурения, получаемых из математических моделей для целей оптимизации процесса проводки скважин, реальному положению вещей, поскольку в эти модели вводятся эмпирические зависимости, определяемые на лабораторных установках.

При разработке методов прогнозирования эффективности работы породоразрушающего инструмента на забое скважины и выбора оптимальных режимов бурения до сих пор, как правило, используются эмпирические зависимости, связывающие показатели отработки долот с ре-

жимными параметрами, но не учитывающие механических свойств бурильной колонны. Подобный подход породил немало зависимостей, довольно часто не согласующихся друг с другом. Примеры противоречивости математических моделей углубления забоя, предложенных разными авторами, можно привести в довольно большом количестве. Отмеченные факты при прочих равных условиях имеют место потому, что не учитывается взаимное влияние долота и колонны друг на друга при разрушении породы на забое. Рассмотрение процесса работы породоразрушающего инструмента в отрыве от бурильной колонны может приводить к ложной трактовке результатов исследований закономерностей процесса бурения нефтяных и газовых скважин со всеми вытекающими последствиями для теории и практики этой области техники. Кроме того, весьма важной проблемой является нахождение ограничений, которые необходимо налагать на области применения зависимостей, используемых для целей прогноза эффективности разрушения горных пород и оптимизации режимов бурения, что будет способствовать наиболее эффективному применению этих зависимостей.

При разрушении горных пород шарошечными долотами в бурильной колонне возникают колебания, которые в самом общем случае можно разделить на два вида – высокочастотные и низкочастотные. Высокочастотные колебания органически присущи вращательному способу бурения, поскольку разрушение породы происходит путем периодического воздействия на нее зубцов долота. Низкочастотные колебания имеют гораздо более сложную природу возникновения.

Многочисленными промысловыми наблюдениями установлено весьма негативное влияние низкочастотных колебаний как на долговечность бурильного инструмента, так и на эффективность разрушения горных пород. Это обстоятельство явилось причиной появления различного рода наддолотных амортизаторов. Однако такие устройства, являясь узкополосными механическими фильтрами, не в состоянии эффективно гасить колебания с широким спектром частот, возбуждаемых в бурильной колонне, которая представляет собой механическую систему с распределенными параметрами. И как показывает опыт, применение амортизаторов не всегда является эффективным, а в ряде случаев – даже вредным. Также следует отметить, что пока еще применяемые виброзащитные средства при их высокой стоимости не обладают достаточной надежностью и долговечностью.

Несмотря на большое количество исследований, посвященных динамике бурильного инструмента, все еще не изучена природа появления низкочастотных колебаний бурильной колонны в результате взаимодействия долота с забоем. Выявление и исследование причин возникновения колебаний указанных видов позволит оптимизировать режим бурения и

компоновку бурильной колонны, что приведет к увеличению эффективности бурения и отпадет необходимость применения дорогих и недолговечных наддолотных амортизаторов.

Актуальность вышеобозначенных проблем особенно возрастает в связи с увеличением объемов бурения в труднодоступных районах страны в условиях ограниченного количества трудовых и материальных ресурсов. В этих условиях наиболее эффективным и доступным средством для дальнейшего снижения стоимости буровых работ и повышения производительности труда при бурении является освоение теории и практики управления работой бурильной колонны при проводке глубоких вертикальных и наклонно-направленных скважин.

1. О характере сил сопротивления движению бурильной колонны в наклонной скважине

Рассмотрим наклонный участок скважины, в котором находится бурильная колонна (рис.1), и выделим некоторый элемент колонны длиной ΔS . Рассмотрим условия его работы в процессе проводки скважины. Очевидно, что в общем случае выделенный элемент вращается с некоторой угловой скоростью n (при роторном способе бурения $n \neq 0$; при бурении с применением забойного двигателя $n=0$). Далее, в результате взаимодействия породоразрушающего инструмента с забоем возникают различного рода колебания элемента. Если считать, что скорость продольных колебаний по абсолютной величине существенно превышает механическую скорость бурения (что наиболее оправдано для крепких пород), то забойные возмущения, распространяясь к началу скважины, вызывают циклические перемещения поперечных сечений бурильной колонны. Следовательно, элемент ΔS будет кроме вращения совершать периодическое осевое движение. Пусть Δm - масса выделенного элемента, D - внешний диаметр элемента, α - угол между его осью и вертикалью.

Тогда в осевом направлении на него действует сила $\Delta mg \cos \alpha$, а сила $\Delta mg \sin \alpha$ прижимает к стенке скважины, в результате чего возникает сила сопротивления движению элемента ΔF_c . Именно эта сила и является основной компонентой с точки зрения формирования сил сопротивления движению бурильной колонны в наклонной скважине, а потому и подлежит определению в первую очередь. Если через v обозначить скорость перемещения элемента колонны по стенке бурящейся

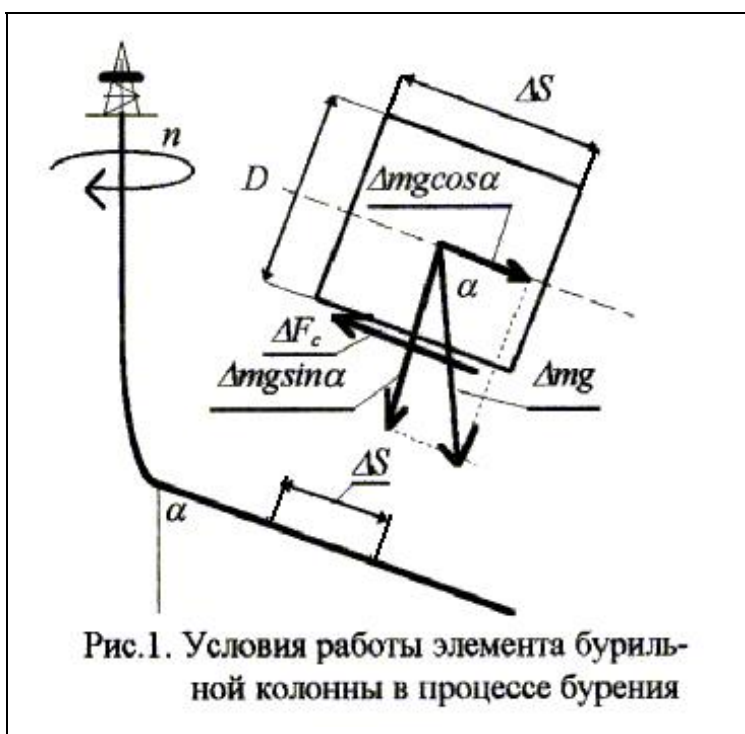


Рис.1. Условия работы элемента бурильной колонны в процессе бурения

скважины, то сила сопротивления движению должна быть функцией этой скорости и величины нормального усилия между контактирующими поверхностями, то есть $\Delta F_c = \Delta F_c(\Delta mg \sin \alpha, v)$. Для выявления характера

этой силы была разработана и создана специальная установка /1/, суть которой состоит в следующем.

При реальных условиях бурения в процессе контакта между элементом и стенкой скважины элемент бурильной колонны вращается и одновременно совершает возвратно-поступательное движение, в то время как стенка скважины неподвижна. В лабораторных условиях, конечно, можно осуществить имитацию подобного процесса, однако установка при этом получается крайне неудобной с точки зрения измерения необходимых параметров. Поэтому была выбрана несколько другая схема взаимодействия между имитаторами стенки скважины и элемента бурильной колонны: стальной цилиндрический образец (элемент колонны) совершает только вращение, а возвратно-поступательное движение совершает контактирующий с ним образец горной породы. Очевидно, что характер относительного перемещения контактирующих поверхностей при этом не изменяется, а потому не изменяется и характер силы сопротивления их движению друг относительно друга. Принципиальная схема установки дана на рис.2.

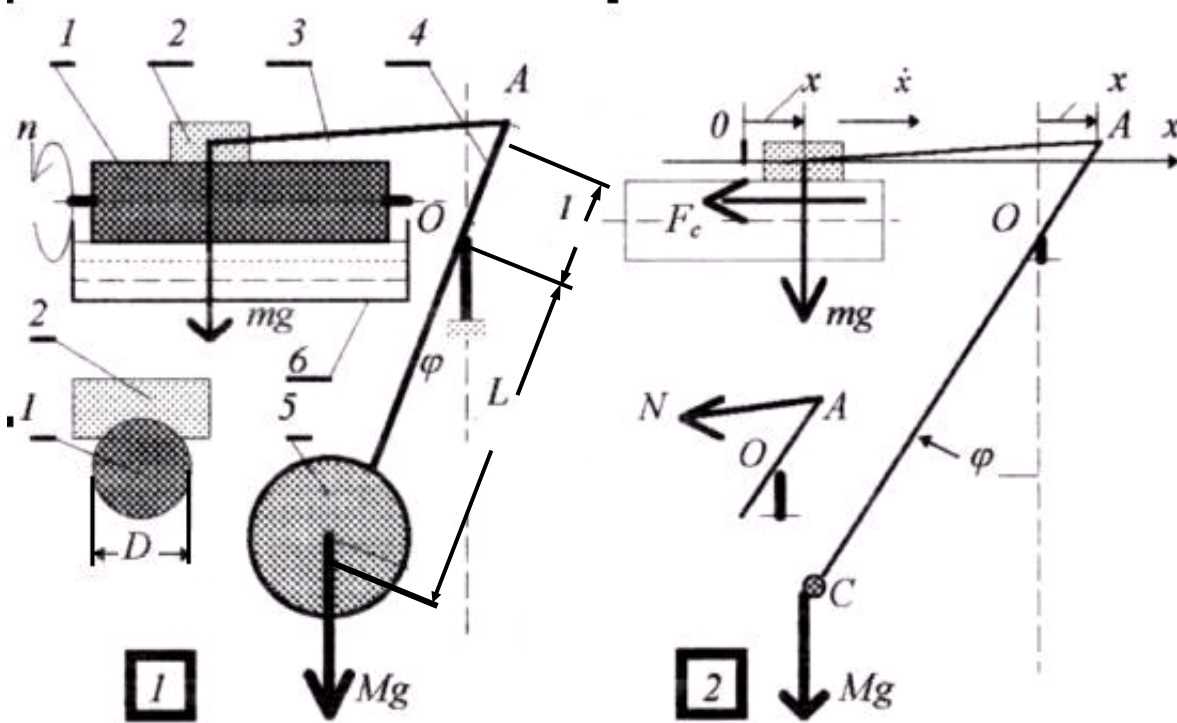


Рис.2. Схема установки для исследования характера силы трения

Установка состоит из стального цилиндрического образца 1 диаметром D , имитирующего участок бурильной трубы, который подсоединен к приводу, позволяющему вращать образец с различными угловыми скоростями n (рис.2, поз.1). Образец испытываемой породы 2 массой m на поверхности, контактирующей с имитатором бурильной трубы, имеет же-

лоб (диаметр желоба несколько больше диаметра трубы) и соединен шарнирно посредством жесткой тяги 3 со стержнем маятника 4 (шарниры расположены соответственно в месте соединения тяги 3 с образцом 2 и в точке A соединения ее со стержнем 4). Стержень маятника может вращаться относительно точки O , в которой расположена шарнирная опора. К концу стержня прикреплено тело 5 массой M . Расстояние от шарнирного соединения A стержней 3 и 4 до опоры O равно l , а расстояние от опоры O до центра тяжести тела 5 равно L . Усилие прижатия образца породы 2 к стальному цилиндру 1 осуществляется посредством силы веса образца mg , который при необходимости может нагружаться дополнительными грузами. Цилиндр 1 помещается в емкость 6, которая заполнена жидкостью. Длина тяги 3 значительно превосходит расстояние l . Это условие требуется для того, чтобы угол между тягой и осью цилиндрического образца был мал по абсолютной величине: в этом случае тяга совершает практически поступательное движение, и тем самым обеспечивается постоянство усилия прижатия образца 2 во времени t . Отклонение маятника от вертикали на некоторый начальный угол с последующим освобождением вызывает его затухающие колебания. Угол отклонения стержня маятника от вертикали $\varphi(t)$ записывается на осциллограф. Закон изменения угла отклонения во времени позволяет произвести оценку характера силы сопротивления движению образца породы 2 по поверхности цилиндра 1.

Детальное описание установки содержится в публикации /1/.

Обратимся теперь к расчетной схеме установки (рис.2, поз.2) и составим уравнения движения маятника. Для этого необходимо найти сумму моментов сил относительно точки O и приравнять ее произведению момента инерции маятника на угловое ускорение. Считая массы стержней 3 и 4 пренебрежимо малыми по сравнению с массами m и M , а движение стержня 3 параллельным оси цилиндра 1, найдем, что колебания маятника описывается следующим уравнением:

$$ML^2\ddot{\varphi} = -MgL \sin \varphi - Nl \cos \varphi. \quad (1.1)$$

Здесь сила N приложена к стержню 4 маятника в точке A со стороны тяги 3 (это показано на рис.2, поз.2), а масса M принимается сосредоточенной в центре тяжести (точка C).

С другой стороны очевидно, что сила N со стороны тяги 3 равна сумме силы инерции массы образца 2 и силы сопротивления его движению F_c . Введя координатную ось Ox параллельно оси цилиндра 1 и взяв начало координат (точка O) при вертикальном положении стержня AC , получаем:

$$N = m \ddot{x} + F_c. \quad (1.2)$$

В силу того, что стержень 3 движется практически поступательно, то очевидно, что величина x определится как степень отклонения точки A от вертикали:

$$x = l \sin \varphi. \quad (1.3)$$

После подстановки (1.3) в (1.2), затем (1.2) в (1.1) и несложных преобразований получим уравнение движения маятника:

$$(ML^2 + ml^2 \cos^2 \varphi) \ddot{\varphi} + (MgL - ml^2 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \sin \varphi + F_c l \cos \varphi = 0. \quad (1.4)$$

Полученное уравнение и является искомым. Однако оно весьма сложно для анализа с целью выявления согласно экспериментальным данным неизвестной силы F_c . Поэтому, принимая углы φ малыми, что позволяет считать верными приближенные равенства $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, и пренебрегая членом, содержащим сомножитель $\dot{\varphi}^2$, получаем линеаризованный вариант уравнения (1.4):

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi + \eta F_c = 0. \quad (1.5)$$

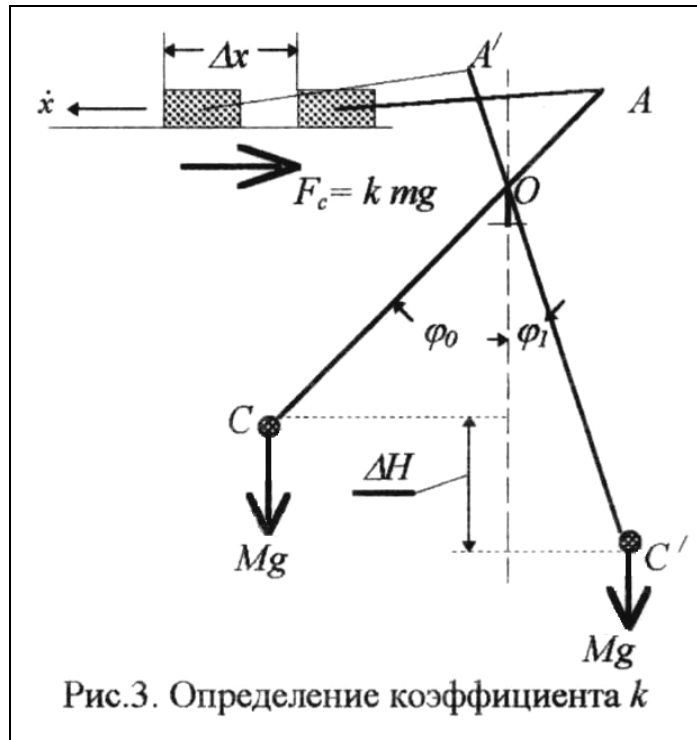
Начальные условия: 1. $\varphi(0) = \varphi_0$,
2. $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Здесь $\omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{ML^2 + ml^2}}$ - собственная круговая частота, а $\eta = \frac{l}{ML^2 + ml^2}$.

Как показали проведенные экспериментальные исследования, принятые допущения оказались вполне корректными и существенно облегчили поиск зависимости силы сопротивления F_c . Начальные же условия говорят о том, что в процессе проведения экспериментов маятник отклонялся на некоторый начальный угол и затем освобождался без придания ему начальной угловой скорости.

Очевидно, что если верен закон трения Кулона (сила трения пропорциональна нормальному усилию между контактирующими телами), который в нашем случае записывается в виде $F_c = kmg$, где k - коэффициент трения, то данная установка позволяет легко его определить.

Действительно, обратимся к рис.3, где изображена схема проведения эксперимента по определению коэффициента трения между образцом горной породы и имитатором бурильной трубы. При начальном отклонении маятника на угол φ_0 и последующем освобождении он начинает двигаться к вертикали и, отклонившись от нее на угол φ_1 , меняет направление движения. При этом в момент времени, когда стержень маятника AC перейдет в положение $A'C'$, произойдет потеря энергии $Mg \Delta H$, равная работе силы трения F_c на пути Δx . Поскольку в шарнирных соединениях потери на трение ничтожны, то имеем равенство: $F_c \Delta x = Mg \Delta H$. Из рис.3 легко установить, что



$$\Delta H = L(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0), \Delta x = l(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_0).$$

Учитывая (см. выше), что $F_c = k mg$, после подстановки всех значений в равенство работы силы и потери энергии и несложных преобразований получаем:

$$k = \frac{ML}{ml} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}. \quad (1.6)$$

Следовательно, зная параметры установки и замерив углы отклонения маятника φ_0 и φ_1 , легко найдем искомую величину k . Однако вновь вернемся к закону колебаний маятника экспериментальной установки и запишем период его свободных колебаний T . Памятуя, что $\omega_0 = 2\pi/T$ и зная значение параметра ω_0 (см. запись параметров уравнения (1.5)), найдем, что

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \left(1 + \frac{m}{M} \left(\frac{l}{L} \right)^2 \right)}. \quad (1.7)$$

А теперь обратимся к результатам проведенных экспериментов.

Первая серия экспериментов была поставлена при невращающемся цилиндре в случае сухого трения, при смачивании поверхностей пары

трения водой и глинистым раствором. В опытах использовались образцы мрамора, известняка и гранита. На рис.4 приведен типичный характер осциллограмм, полученных в этой серии. Независимо от горной породы и типа смазывающей жидкости колебания происходили таким образом, что огибающими затухающих колебаний являлись прямые линии a и b , а период T оставался неизменным в течение всего процесса и равнялся периоду собственных колебаний (1.7). Установленный факт говорит о том, что в данном случае сила сопротивления движению тел относительно друг друга подчиняется закону трения Амонтона-Кулона [2,3,4 и др.]

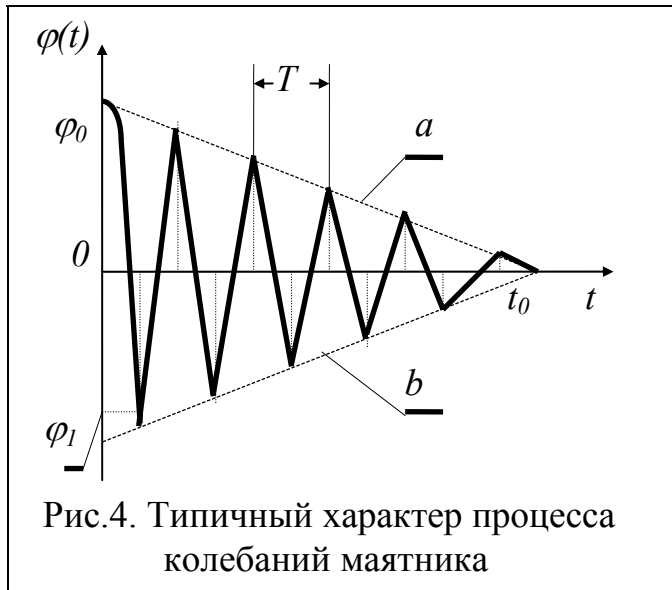


Рис.4. Типичный характер процесса колебаний маятника

$$F_c = k Q \operatorname{sign} V, \quad (1.8)$$

где Q - сила нормального давления между поверхностями тел, V - скорость относительного движения, а функция $\operatorname{sign} V$ есть

$$\operatorname{sign} V = \frac{|V|}{V} = \begin{cases} +1 \text{ при } V > 0, \\ -1 \text{ при } V < 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Следовательно, для маятника дифференциальное уравнение (1.5) принимает вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi + \eta k m g \operatorname{sign} \dot{\varphi} = 0. \quad (1.10)$$

Начальные условия:

1. $\varphi(0) = \varphi_0$,
2. $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Методы решения задачи (1.10) имеются во многих литературных источниках. Поэтому мы сразу запишем амплитуду $A(t)$ затухающих колебаний маятника:

$$A(t) = \varphi_0 - \frac{k \eta m g T}{\pi^2} t, t \in [0, t_0]. \quad (1.11)$$

Здесь t_0 - время полного затухания колебаний маятника (см. рис.4).

Измерив начальный угол φ_0 и время от начала колебаний маятника до его остановки t_0 , из условия $A(t_0)=0$ по формуле (1.11) определим коэффициент трения:

$$k = \frac{\pi^2 \varphi_0}{\eta m g T t_0}. \quad (1.12)$$

Подставив сюда значения η и T , после несложных преобразований получаем, что

$$k = \frac{\pi M}{2m} \sqrt{\frac{L}{g} \left(\frac{m}{M} + \left(\frac{L}{l} \right)^2 \right)} \frac{\varphi_0}{t_0}. \quad (1.13)$$

Соотношения (1.12) и (1.13) позволяют определить коэффициент трения по времени полного затухания колебательного процесса.

Выше была приведена формула (1.6) для определения k по одному качанию маятника (кстати, значение φ_l , содержащееся в (1.6), показано на рис.1.4). Поэтому интересно сравнить значения коэффициентов трения, найденных согласно зависимостям (1.6) и (1.12) (или эквивалентной ей (1.13)). Ниже в таблице приведены данные одного из экспериментов (порода - мрамор):

<i>Коэффициент трения k</i>	<i>Формула (1.6)</i>	<i>Формула (1.12)</i>
<i>Сухое трение</i>	0,87	0,88
<i>Глинистый раствор</i>	0,58	0,58
<i>Вода</i>	0,49	0,52

Из таблицы следует – очень хорошие совпадения значений коэффициентов трения, определенных различными методами. Данный факт лишний раз подтверждает, что сила трения между испытываемыми образцами подчиняется закону Кулона (1.8).

Переходим к случаю вращения цилиндрического имитатора бурильной трубы ($n \neq 0$). На рис.5 показан типичный характер осциллограмм в этом случае. Период колебаний маятника, как и в предыдущем случае, практически равен периоду свободных колебаний (1.7), но огибающие

a и b затухающих колебаний уже не являются прямыми линиями, а приобретают вид плавных кривых, асимптотически приближающихся к оси абсцисс. Проанализируем силу трения в данном случае. Для этого обратимся к рис.6, где показано взаимодействие образцов при $n \neq 0$.

На рис.6, поз.1 изображен вращающийся с угловой скоростью n цилиндр диаметром D , по которому параллельно его оси со скоростью V_1 движется тело массы m . Контактующие поверхности прижаты друг к другу силой веса mg , а потому в процессе движения возникает сила сопротивления F_1 . Проанализируем характер этой силы.

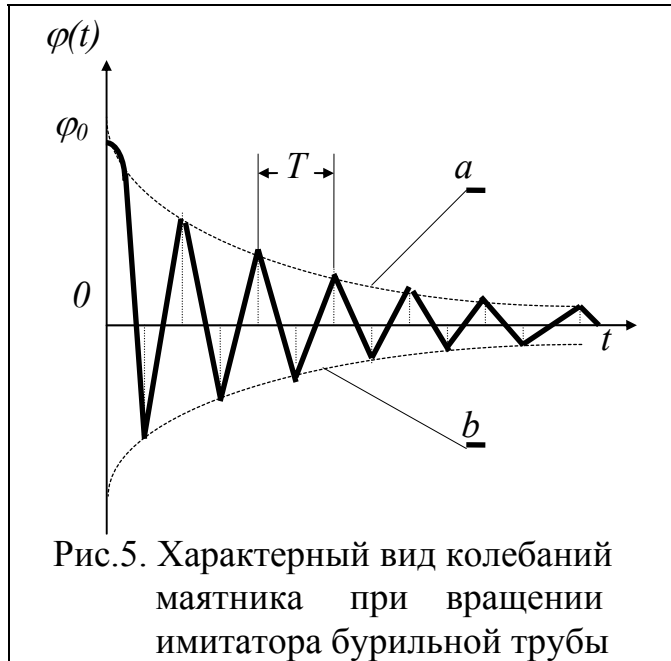


Рис.5. Характерный вид колебаний маятника при вращении имитатора бурильной трубы

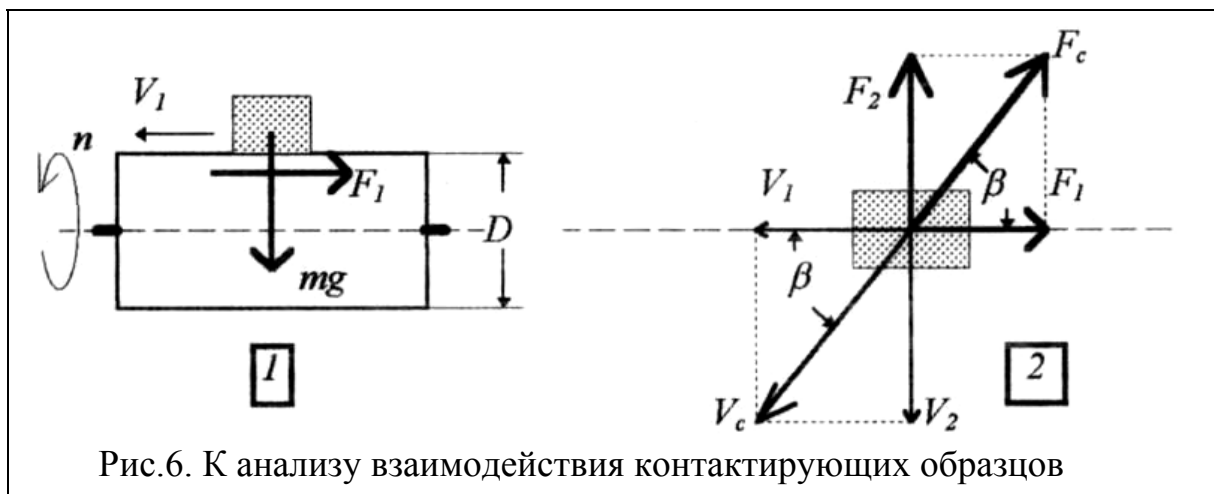


Рис.6. К анализу взаимодействия контактирующих образцов

Рассмотрим контактирующую поверхность движущегося тела (рис.6, поз.2). Скорость относительного скольжения между двумя поверхностями V_c легко вычисляется, если известны скорость поступательного движения тела V_1 и окружная скорость поверхности цилиндра $V_2 = 0,5Dn$:

$$V_c = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}.$$

Сила трения F_c согласно (1.8) будет направлена противоположно V_c , а ее величина запишется, как $F_c = kmg$. Очевидно, что эта сила разлагается на силу трения вдоль образующей цилиндра $F_1 = F_c \cos \beta$ и силу окруж-

ного трения $F_2 = F_c \sin\beta$. Углы между составляющими силы трения равны углам между соответствующими составляющими скоростей относительного скольжения (см. рис.6, поз.2):

$$\cos\beta = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, \sin\beta = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}.$$

Следовательно, имеем:

$$F_1 = \frac{F_c V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, F_2 = \frac{F_c V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}. \quad (1.14)$$

Подставив значения величин, входящих в формулы (1.14), окончательно получаем:

$$F_1 = \frac{kmgV_1}{\sqrt{V_1^2 + (0,5Dn)^2}}, F_2 = \frac{kmgV_2}{\sqrt{V_1^2 + (0,5Dn)^2}}. \quad (1.15)$$

А теперь в уравнение (1.5) необходимо вместо силы F_c подставить значение F_1 , памятуя при этом, что скорость $V_1 = l\dot{\varphi}$ (значение этой скорости получается из (1.3) при условии малости абсолютного значения угла φ):

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi + kmg l \eta \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{(0,5Dn)^2 + (l\dot{\varphi})^2}} = 0. \quad (1.16)$$

Рассмотрим очень быстрое вращение цилиндра. В этом случае $0,5Dn \gg l\dot{\varphi}$, а потому вторым слагаемым под знаком корня можно пренебречь, и уравнение (1.16) становится линейным. Вспомнив значение параметра η , имеем:

$$\ddot{\varphi} + 2\mu\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (1.17)$$

Начальные условия: 1. $\varphi(0) = \varphi_0$,
2. $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Здесь параметр $\mu = k \frac{mgl^2}{Dn(Ml^2 + ml^2)}$.

Решение уравнения (1.17) при заданных граничных условия записывается, как

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0 \varphi_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} e^{-\mu t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t + \arctg \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}}{\mu}\right). \quad (1.18)$$

Очевидно, что амплитуда колебаний маятника носит затухающий характер, что соответствует зависимости, показанной на рис.5. Значения амплитуд в моменты времени, соответствующие целому числу периодов колебаний, записываются в виде:

$$\varphi(jT) = \frac{\omega_0 \varphi_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} e^{-\mu jT}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.19)$$

откуда, определив значения $\varphi(jT)$ и период T непосредственно из осциллограммы, найдем логарифмический декремент затухания μ и, следовательно, коэффициент трения k :

$$k = \frac{Dn}{gT} \left(1 + \frac{M}{m} \left(\frac{L}{l}\right)^2\right) \ln \frac{\varphi(jT)}{\varphi((j+1)T)}. \quad (1.20)$$

Необходимо отметить, что в процессе проведения экспериментов по истечении некоторого времени коэффициенты трения для одних и тех же образцов уменьшались, что объясняется шлифовкой контактирующих поверхностей.

Итак, проведенные эксперименты показали, что силы трения, возникающие при контакте имитатора бурильных труб с образцами горной породы, вполне удовлетворительно описываются зависимостями типа (1.14). При этом для различных способов бурения (бурильная колонна вращается или же неподвижна) характер силы сопротивления движению колонны в скважине может существенно изменяться, что необходимо учитывать при создании соответствующих математических моделей, чем мы и займемся в следующем разделе.

2. Математическая модель бурильной колонны в случае проводки искривленной скважины

Расчетная схема бурильной колонны, находящейся в искривленной скважине, представлена на рис.7. В общем случае скважина состоит из вертикального, наклонного, искривленного и горизонтального участков. Однако уравнения, описывающие состояние бурильной колонны в наиболее общем случае, относятся к искривленному участку. Аналогичные уравнения для остальных участков, как это будет видно ниже, являются частными случаями уравнений для искривленного участка. Поэтому именно этим участком мы сейчас и займемся.

Все необходимые обозначения показаны на рис.7. Криволинейный участок имеет переменный радиус кривизны $R(S)$ и находится между наклонным участком (угол наклона оси скважины к вертикали $\alpha_0 = const$) и горизонтальным прямолинейным участком. Координата S есть расстояние текущего поперечного сечения бурильной колонны от устья скважины. Рассматривается плоская модель.

Выделим для некоторого текущего значения угла α элементарный участок бурильной колонны $\Delta S = R(S)\Delta\alpha$ и рассмотрим действующие на него силы (рис.8). На рис.8, поз. 1 показана часть элемента, непосредственно контактирующего со стенкой скважины. Если сравнить изображенную здесь картину с рис.6, поз. 2, то можно увидеть, что с точностью до обозначений входящих в них параметров

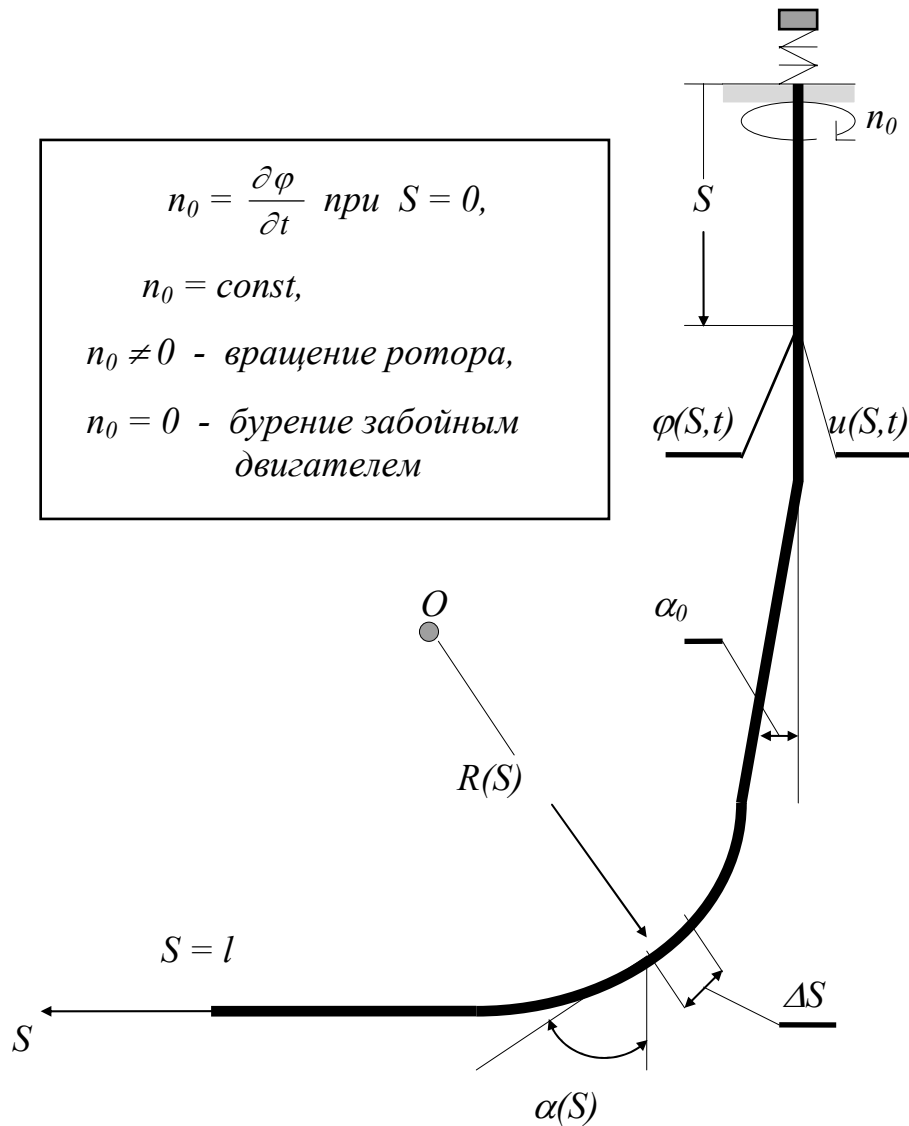
$$V_1 = \frac{\partial u}{\partial t}, V_2 = \frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, V_c = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2}, F_1 = \Delta F_S, F_2 = \Delta F_\tau, \Delta F_c = k\Delta N_c,$$

где ΔF_S - составляющая силы трения между элементом и стенкой скважины в осевом направлении, ΔF_τ - окружная составляющая силы трения, а ΔN_c - суммарная сила прижатия контактирующих поверхностей. Поэтому согласно (1.14) имеем:

$$\Delta F_S = \frac{k\Delta N_c}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2}} \frac{\partial u}{\partial t}, \Delta F_\tau = \frac{k\Delta N_c}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2}} \frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.1)$$

Чтобы можно было пользоваться соотношениями (2.1), необходимо определить силу ΔN_c .





$\varphi(S, t)$ - угол поворота текущего поперечного сечения стержня,
 $u(S, t)$ - осевое перемещение текущего поперечного сечения,
 l - длина стержня (бурильной колонны).

Рис.7. Схематическое изображение бурильной колонны, состоящей из участков различной кривизны (колонна эквивалентна тяжелому упругому стержню)

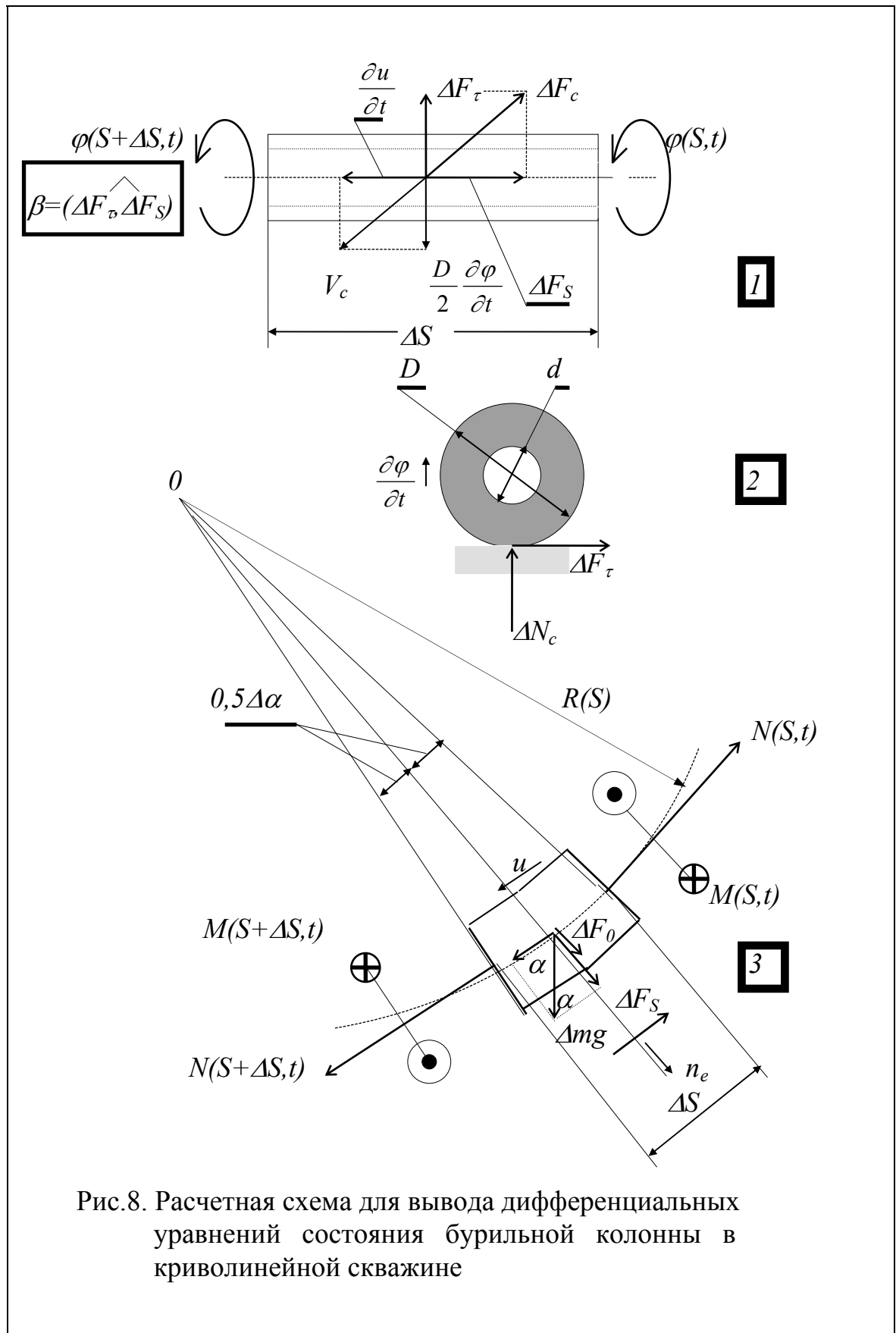


Рис.8. Расчетная схема для вывода дифференциальных уравнений состояния буровой колонны в криволинейной скважине

Обратимся к рис.8, поз.2, где показан характер вращения элемента принятой нами модели. Элемент колонны вращается вокруг своей оси без «накатывания» на стенку скважины; одновременно с этим он может совершать движение в осевом направлении (все это происходит в предположении постоянства контакта элемента и стенки скважины). Сила ΔN_c при этом направлена по нормали к поверхностям контакта.

Проведем из точки O нормаль n_e , делящую пополам угол $\Delta\alpha$, и найдем уравнение движения выделенного элемента в осевом направлении (рис.8, поз.3). В силу малости угла $\Delta\alpha$ криволинейный участок осевой линии элемента можно принять прямолинейным, а массу элемента записать в виде $\Delta m = \rho B \Delta S$, где ρ и B - соответственно плотность материала и площадь поперечного сечения элемента. Спроектировав все силы, действующие на элемент, на осевое направление (оно перпендикулярно нормали n_e), в силу второго закона Ньютона получаем:

$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx N(S + \Delta S, t) \cos \frac{\Delta\alpha}{2} - N(S, t) \cos \frac{\Delta\alpha}{2} + \Delta m g \cos \alpha - \Delta F_s. \quad (2.2)$$

Здесь $N(S + \Delta S, t)$ и $N(S, t)$ - осевые усилия, действующие в торцах элемента, g - ускорение свободного падения, $\alpha(S)$ - угол между осью элемента и вертикалью. Раскроем теперь все силы, входящие в уравнение (2.2).

Разность осевых сил может быть представлена, как

$$N(S + \Delta S, t) \cos \frac{\Delta\alpha}{2} - N(S, t) \cos \frac{\Delta\alpha}{2} \approx \frac{\partial N}{\partial S} \Delta S \cos \frac{\Delta\alpha}{2}.$$

Абсолютная величина силы нормального давления между элементом и стенкой скважины ΔN_c равна сумме проекций на нормаль n_e всех действующих на элемент сил:

$$\Delta N_c = \Delta m g \sin \alpha(S) - N(S + \Delta S, t) \sin \frac{\Delta\alpha}{2} - N(S, t) \sin \frac{\Delta\alpha}{2} + \Delta F_0.$$

Здесь $\Delta F_0 = \frac{\Delta m}{R(S)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$ - центробежная сила, приложенная к элементу.

В силу малости угла $\Delta\alpha$ значение синуса можно заменить его углом, после чего имеем:

$$\Delta N_c = \Delta m g \sin \alpha(S) - 0,5(N(S + \Delta S, t) + N(S, t))\Delta\alpha + \frac{\Delta m}{R(S)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2.$$

Вспомним, что по закону Гука осевое усилие $N(S, t) = EB \frac{\partial u}{\partial S}$, где E - модуль Юнга; элементарный же угол $\Delta\alpha = \frac{\Delta S}{R(S)}$. Подставив эти значения в уравнение (2.2), с учетом записанных соотношений и выражения (2.1) для ΔF_S после перехода к пределу при $\Delta S \rightarrow 0$ получаем уравнение для определения осевого перемещения $u(S, t)$ поперечного сечения бурильной колонны на искривленном участке скважины:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kg \frac{\sin \alpha - \frac{\kappa^2}{gR} \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{gR} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2}} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + g \cos \alpha.$$

Переходим теперь к вращательному движению. Поскольку, как было отмечено выше, длина ΔS элемента мала, а потому его ось можно считать прямолинейной, то второй закон Ньютона для вращательного движения можно записать (см. рис.8, поз.2 и 3):

$$\Delta I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \approx M(S + \Delta S, t) - M(S, t) - 0,5D \Delta F_\tau. \quad (2.3)$$

Здесь $M(S + \Delta S, t)$ и $M(S, t)$ - крутящие моменты, действующие в торцевых сечениях элемента, причем согласно закону Гука $M(S, t) = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial S}$, где G и J_p соответственно модуль сдвига материала бурильной колонны и полярный момент инерции ее поперечного сечения; $\Delta I = \rho J_p \Delta S$ - момент инерции элемента относительно своей оси; $0,5D \Delta F_\tau$ - момент сопротивления вращению элемента со стороны стенки скважины, а сила ΔF_τ определяется согласно (2.1). Разность моментов может быть представлена, как $M(S + \Delta S, t) - M(S, t) \approx \frac{\partial M}{\partial S} \Delta S$. Подставив записанные соотношения в (2.3) (с учетом (2.1) для ΔF_τ) и переходя к пределу при $\Delta S \rightarrow 0$, получаем уравнение для определения угла закручивания $\varphi(S, t)$ поперечного сечения колонны на искривленном участке скважины:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2D^2}{d^2 + D^2} kg \frac{\sin \alpha - \frac{\kappa^2}{gR} \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{gR} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2}.$$

Оба полученных уравнения описывают состояние бурильной колонны, расположенной в искривленной скважине. Поэтому запишем их в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kg \frac{\sin \alpha - \frac{\kappa^2}{gR} \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{gR} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2}} \frac{\partial u}{\partial t} &= \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + g \cos \alpha, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2D^2}{d^2 + D^2} kg \frac{\sin \alpha - \frac{\kappa^2}{gR} \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{gR} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Напомним, что $\kappa = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ и $\lambda = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ суть соответственно скорости распространения продольных и крутильных возмущений вдоль стержня, а α есть текущее значение наклона оси скважины к вертикали, которое является функцией координаты S , то есть $\alpha = \alpha(S)$.

Заметим, что при выводе уравнений (2.4) в силу того, что радиус кривизны скважины R по своей величине много больше диаметра D поперечного сечения бурильной колонны, мы проигнорировали напряжения изгиба. Что же касается граничных и начальных условий, то они конкретизируются в зависимости от анализируемой проблемы.

Как отмечалось выше, уравнения для прямолинейных участков колонны являются частным случаем системы (2.4) при $\alpha(S) = \alpha_0 = const$ и радиусе кривизны скважины $R \rightarrow \infty$. В этом случае система дифференциальных уравнений (2.4) принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kg \frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2}} \frac{\partial u}{\partial t} &= \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + g \cos \alpha_0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2D^2}{d^2 + D^2} kg \frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2}. \end{aligned} \right\} \quad 2.25$$

Очевидно, что, положив в (2.5) $\alpha_0 = 0$ или же $\alpha_0 = 0,5\pi$, получаем соответственно уравнения состояния бурильной колонны для вертикального и горизонтального участков скважины.

3. Исследование математической модели бурильной колонны

Анализ начнем с того, что получим из системы (2.4) уравнение статики бурильной колонны, необходимое для оценки возникающих в ней осевых усилий при невращающейся колонне, что характерно для процесса проводки скважины с использованием забойных двигателей.

Рассмотрим уравнение для осевых перемещений сечений колонны. Положив в нем $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ (вращение колонны отсутствует), получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kg \left(\sin \alpha - \frac{\kappa^2}{gR} \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{gR} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) \text{sign} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + g \cos \alpha. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) описывает динамику продольного движения бурильной колонны в отсутствии ее вращения.

Теперь рассмотрим очень медленное движение бурильной колонны в процессе бурения. В этом случае ускорение практически равно нулю, а в каждый фиксированный момент времени колонна перемещается в направлении оси S (см. рис.7) со скоростью, равной примерно скорости механического бурения, что дает $\text{sign} \frac{\partial u}{\partial t} = 1$ (в случае подъема колонны знак будет противоположным). Положив в (3.1) член, содержащий квадрат скорости, и ускорение равными нулю, имеем:

$$\kappa^2 \frac{d^2 u}{dS^2} + g \cos \alpha = kg \left(\sin \alpha - \frac{\kappa^2}{gR} \frac{du}{dS} \right). \quad (3.2)$$

В записанном уравнении частные производные заменены на обыкновенные, поскольку смещение поперечного сечения в осевом направлении зависит только от координаты S . Приведем уравнение (3.2) к виду, когда искомой функцией является осевое усилие $N(S)$. По закону Гука $N(S) = EB \frac{du}{dS}$ (напомним, что здесь B - площадь поперечного сечения).

Поэтому уравнение (3.2) может быть представлено, как

$$\frac{\kappa^2}{EB} \frac{dN}{dS} + g \cos \alpha = kg \left(\sin \alpha - \frac{\kappa^2}{gREB} N \right).$$

Вспоминая, что $\kappa^2 = E / \rho$, после несложных преобразований искомое уравнение запишется в следующем виде:

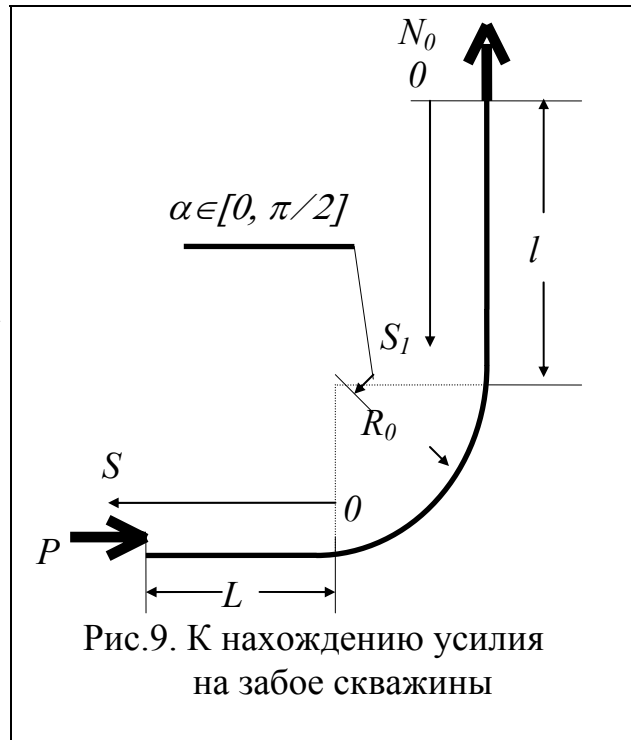
$$\frac{dN}{dS} + \frac{k}{R(S)} N = q(k \sin \alpha(S) - \cos \alpha(S)). \quad (3.3)$$

Здесь $q = \rho g B$ - вес единицы длины (погонный вес) бурильной колонны.

Иногда удобнее пользоваться уравнением (3.3), когда аргументом является угол α . Так как $dS = R(S) d\alpha$, то в данном случае имеем:

$$\frac{dN}{d\alpha} + kN = qR(\alpha)(k \sin \alpha - \cos \alpha), \quad (3.4)$$

где S и α связаны соотношением: $\alpha = \int \frac{dS}{R(S)}$. А теперь рассмотрим скважину, состоящую из трех участков: вертикального длиной l , криволинейного с постоянным радиусом кривизны R_0 и изменением угла $\alpha \in [0, \pi/2]$, и горизонтального длиной L (рис.9). Пусть усилие, приложенное к верхнему торцу колонны (усилие на крюке), равно N_0 , а все участки бурильной колонны состоят из труб одинакового диаметра и изготовлены из одного и того же материала. Обозначим усилие, приложенное к нижнему торцу колонны со стороны забоя, через P и введем для каждого из участков свою систему координат, как это показано на рис.9.



Положив для вертикального и горизонтального участков в уравнении (3.3) радиус равным бесконечности, а для искривленного участка, воспользовавшись уравнением (3.4) и обозначив через N_b , N_k и N соответственно осевые усилия на вертикальном, искривленном и горизонтальном участках, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_b}{dS_1} &= -q, S_1 \in [0, l], \\ \frac{dN_k}{d\alpha} + kN_k &= qR_0(k \sin \alpha - \cos \alpha), \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \frac{dN}{dS} &= kq, S \in [0, L]. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Граничные условия: 1. $S_1=0$: $N_b=N_0$; 3. $\alpha = \pi/2, S=0$: $N_k=N$;

$$2. S_l=l, \alpha=0: N_b=N_k; \quad 4. S=L: \quad N=-P.$$

Система (3.5) с заданными граничными условиями легко решается, а усилие P , приложенное к забой со стороны породоразрушающего инструмента, записывается в виде:

$$P = \left(ql - \frac{2k}{1+k^2} qR_0 - N_0 \right) e^{-0,5\pi k} + \frac{1-k^2}{1+k^2} qR_0 - kqL. \quad (3.6)$$

Если обозначить через $Q_b=ql$ вес вертикального участка бурильной колонны, через $Q_k=0,5\pi qR_0$ - вес искривленного, а через $Q=qL$ - вес горизонтального участка, то (3.6) преобразуется к следующему виду:

$$P = \left(Q_b - \frac{4}{\pi} \frac{k}{1+k^2} Q_k - N_0 \right) e^{-0,5\pi k} + \frac{2}{\pi} \frac{1-k^2}{1+k^2} Q_k - kQ. \quad (3.7)$$

В частности, при $k=0$ получаем:

$$P = Q_b + \frac{2}{\pi} Q_k - N_0. \quad (3.8)$$

Итак, соотношения (3.6) - (3.8) позволяют произвести оценку величины осевой нагрузки, передаваемой на забой частью веса бурильной колонны, расположенной выше горизонтального участка.

Рассмотрим теперь горизонтальный участок бурильной колонны. Для того, чтобы получить уравнение, описывающее его поведение при отсутствии вращения, достаточно в уравнении (3.1) положить $R=\infty$ и $\alpha=0,5\pi$. В результате имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kg \operatorname{sign} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}. \quad (3.9)$$

Рассмотрим процесс распространения вдоль горизонтального стержня, которому эквивалентен данный участок, волнового возмущения, возникающего от действия на его торец гармонического возбуждения с амплитудой A_0 и круговой частотой ω . В этом случае граничное условие запишется, как $u(0,t) = A_0 \sin \omega t$. Нам необходимо выяснить длину S_0 , на которую распространяется возбуждение до его полного затухания. Поэтому стержень принимаем полубесконечным. Расчетная схема исследуемого процесса изображена на рис.10.

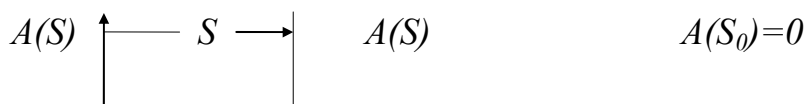
Прежде чем переходить к анализу распространения волнового возмущения, обратимся к рис.10, поз.1: здесь изображен лежащий на горизонтальном основании полубесконечный стержень. Далее рассмотрим рис.10, поз.2, где изображено абсолютно твердое тело массой m , также лежащее на горизонтальном основании и соединенное с неподвижной преградой посредством пружины, имеющей линейную характеристику упругости (жесткость пружины равна c). А теперь введем следующее определение /5,6/.

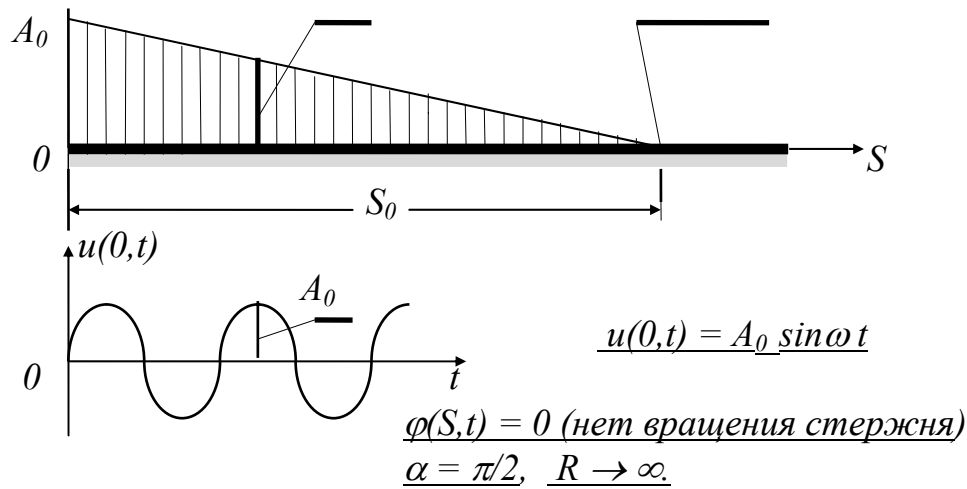
Если между телом массой m в процессе его движения и поверхностью, по которой он движется, действует диссипативная сила, по своему происхождению идентичная силе сопротивления, действующей между стержнем и поверхностью, по которой он перемещается, то в этом случае будем говорить, что механическая система «масса m - жесткость c » является механическим аналогом по отношению к вышеупомянутому стержню.

В рассматриваемом нами случае и для стержня и для механического аналога диссипативная сила описывается законом трения Кулона (соответствующие уравнения движения с необходимыми начальными и граничными условиями показаны на рис.10, поз.1 и 2).

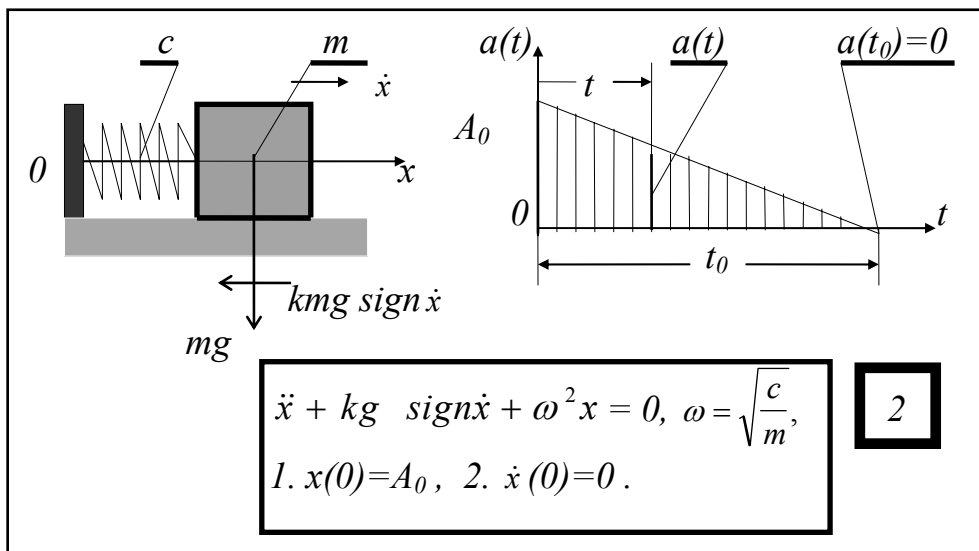
Придадим массе m некоторое начальное смещение $x(0)=A_0$ и затем предоставим самой себе. Очевидно, что с течением времени t амплитуда колебаний $a(t)$ будет уменьшаться, и в некоторый момент времени $t=t_0$ колебания полностью затухнут, то есть $a(t_0)=0$ (рис.10, поз.2). В установленном же режиме колебаний вдоль стержня будут распространяться волновые возмущения с текущей амплитудой $A(S)$, причем $A(0)=A_0$. При некотором значении координаты $S = S_0$ волновое возмущение полностью затухнет, то есть $A(S_0)=0$ (рис.10, поз.1; заметим, что для упрощения последующих выкладок зонами застоя, то есть зонами, в которых движущая сила меньше силы трения, и в том и в другом случае пренебрегаем).

Итак, воздействие гармонического краевого возмущения у стержня характеризуется *границей полного затухания бегущей волны S_0* , а у механического аналога - *временем полного затухания колебаний t_0* . В то же самое время, следуя высказанной сейчас мысли, амплитуде $A(S)$ распространяющегося по стержню граничного возмущения можно сопоставить амплитуду $a(t)$ свободных колебаний механического аналога. Теперь важно отметить, что распространение граничного возмущения в стержне является свободным процессом в том смысле, что по длине





$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kg \operatorname{sign} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \quad \boxed{1}$$



$u(S,t) = A(S) \sin(\omega t + \Psi(S))$ - форма решения для установившегося движения сечения стержня,

$x(t) = a(t) \sin(\omega t + \psi(t))$ - форма решения для нахождения закона движения механического аналога.

Рис.10. К определению понятия «механический аналог»

стержня отсутствуют дополнительные источники подвода энергии, а потому уменьшение $A(S)$ по мере возрастания S проходит только за счет диссипативной силы, действующей между основанием и стержнем. В механическом аналоге амплитуда $a(t)$ также уменьшается с увеличением t лишь за счет диссипативной силы, возникающей между телом массы m

и основанием. А поскольку характер силы сопротивления движению (диссипативной силы) в обоих случаях один и тот же, то, очевидно, должны быть подобными и зависимости $A(S)$ и $a(t)$ в процессе изменения S и t . Высказанная мысль и является отправной точкой при исследовании задачи распространения волнового возмущения вдоль стержня, описываемого уравнением (3.9):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kg \operatorname{sign} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}. \quad (3.10)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $u = A_0 \sin \omega t$; 2. $\lim_{S \rightarrow \infty} u = 0$ при $S \rightarrow \infty$.

Поскольку рассматривается установившийся процесс колебаний, то начальные условия не требуются.

Решение задачи (3.10) ищем в форме

$$u(S,t) = A(S) \sin(\omega t + \Psi(S)), \quad (3.11)$$

где $\Psi(S)$ - фаза колебаний. Очевидно, исходя из краевого условия 1, имеем, что $\Psi(0) = 0$.

После подстановки данного выражения в уравнение (3.10) и несложных преобразований получаем:

$$\left\{ A''(S) + \left[\left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^2 - \Psi'(S)^2 \right] A(S) \right\} \sin \tau + \\ + [A(S)\Psi''(S) + 2A'(S)\Psi'(S)] \cos \tau = \frac{kg}{\kappa^2} \operatorname{sign} \cos \tau, \quad (3.12)$$

где введена новая переменная $\tau = \omega t + \Psi(S)$.

Очевидно, что в силу периодичности величин, входящих в (3.12), по переменной τ , для определения амплитуды и фазы можно воспользоваться методом усреднения: умножить левую и правую части уравнения на $\sin \tau$ и проинтегрировать при изменении $\tau \in [0, 2\pi]$, а затем проделать аналогичную операцию с $\cos \tau$ /5,6/. После проведения указанной операции получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A''(S) + \left[\left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^2 - \Psi'(S)^2 \right] A(S) &= 0, \\ A(S)\Psi''(S) + 2A'(S)\Psi'(S) &= \frac{4kg}{\pi\kappa^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $A=A_0$, $\Psi=0$;

2. $S=S_0$: $A(S_0)=0$.

Значения амплитуды и фазы, получаемые из решения задачи (3.13), носят, естественно, приближенный характер. Тем не менее они дают вполне достаточную степень точности, необходимую для инженерных расчетов, и позволят проанализировать основные стороны изучаемого процесса.

Для решения поставленной задачи обратимся к механическому аналогу (рис.10, поз.2). Соответствующая задача имеет вид:

$$\ddot{x} + kg \operatorname{sign} \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (3.14)$$

Начальные условия: 1. $x(0)=A_0$, 2. $\dot{x}(0)=0$.

Решение данной задачи ищется в виде:

$$x(t) = a(t) \sin(\omega t + \psi(t)), \quad (3.15)$$

где $\psi(t)$ - фаза колебаний, и полностью совпадает с приведенным выше решением уравнения (1.10) с аналогичными начальными условиями для амплитуды затухающих колебаний маятника (1.11). Поэтому сразу же выпишем амплитуду $a(t)$:

$$a(t) = A_0 - \frac{2kg}{\pi\omega} t, \quad t \leq t_0. \quad (3.16)$$

При $t > t_0$ амплитуда колебаний $a(t)=0$ (состояние покоя).

Следовательно, из условия $a(t_0)=0$ легко определим время полного затухания колебаний механического аналога:

$$t_0 = \frac{\pi\omega A_0}{2kg}. \quad (3.17)$$

Переходим к решению задачи (3.13). В силу подобия амплитуд $A(S)$ и $a(t)$ представим искомую амплитуду в виде:

$$A(S) = A_0 - bS,$$

где b - неизвестная постоянная величина. Очевидно, что записанная форма решения удовлетворяет граничному условию 1 для амплитуды.

Подставив это выражение в систему уравнений (3.13), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Psi'(S) &= \pm \frac{\omega}{\kappa}, \\ 2(-b) \left(\pm \frac{\omega}{\kappa} \right) &= \frac{4kg}{\pi\kappa^2}. \end{aligned} \right\}$$

Так как $b > 0$ (это вытекает из требования уменьшения амплитуды в силу затухания возмущения при возрастании координаты S), то с учетом граничного условия 1 для фазы получаем:

$$b = \frac{2kg}{\pi\kappa\omega}, \quad \Psi(S) = -\frac{\omega S}{\kappa}.$$

Следовательно, амплитуда волны имеет вид:

$$A(S) = A_0 - \frac{2kg}{\pi\kappa\omega} S, \quad S \leq S_0. \quad (3.18)$$

При $S > S_0$ амплитуда $A(S) = 0$. Из условия $A(S_0) = 0$ определим границу полного затухания волнового возмущения S_0 :

$$S_0 = \frac{\pi\kappa\omega A_0}{2kg}. \quad (3.19)$$

Из сопоставления (3.17) и (3.19) получаем, что при одинаковых амплитудах A_0 значения S_0 (граница затухания колебаний в стержне) и t_0 (время затухания колебаний в аналоге) связаны соотношением:

$$S_0 = \kappa t_0. \quad (3.20)$$

Подставив значения $A(S)$ и $\Psi(S)$ в выражение (3.11), получим окончательную запись решения задачи (3.10):

$$u(S, t) = \left(A_0 - \frac{2kg}{\pi\kappa\omega} S \right) \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{\kappa} S \right). \quad (3.21)$$

Найдем взаимосвязь амплитуд A_0 граничного возбуждения и силы P_0 , вызывающей это возбуждение.

Так как в силу закона Гука усилие $P(0, t)$, приложенное к торцу стержня, записывается в виде:

$$P(0, t) = EB \frac{\partial u}{\partial S} \text{ при } S=0,$$

где $B = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$ - площадь поперечного сечения стержня, то, подставив сюда $u(S, t)$, даваемое формулой (3.21), после преобразований имеем:

$$P(0, t) = -P_0 \sin\left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{\pi \omega^2 A_0}{2kg}\right), \quad (3.22)$$

где

$$P_0 = \frac{\pi(D^2 - d^2)E}{4} \sqrt{\left(\frac{2kg}{\pi k \omega}\right)^2 + \left(\frac{\omega A_0}{\kappa}\right)^2}. \quad (3.23)$$

Найдем из формулы (3.23), дающей амплитуду P_0 силы, приложенной к торцу стержня, амплитуду колебаний A_0 :

$$A_0 = \frac{2\kappa}{\pi \omega} \sqrt{\left(\frac{2P_0}{E(D^2 - d^2)}\right)^2 - \left(\frac{kg}{\kappa \omega}\right)^2}. \quad (3.24)$$

Очевидно, что выражение (3.24) имеет смысл только при положительности подкоренного выражения. А это возможно только в случае выполнения неравенства

$$P_0 > \frac{kgE(D^2 - d^2)}{2\kappa \omega}. \quad (3.25)$$

Следовательно, неравенство (3.25) является **условием возникновения продольных колебаний стержня**. В случае приложения силы, меньшей значения, даваемого условием (3.25), стержень будет оставаться в состоянии покоя.

Однако вновь вернемся к уравнению (3.1) и рассмотрим случай прямолинейной наклонной скважины при $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$. В этом случае задача о распространении забойного возмущения по бурильной колонне запишется (начало координатной оси $S=0$ поместим на забое скважины):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kg \sin \alpha_0 \operatorname{sign} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + g \cos \alpha_0. \quad (3.26)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $u = A_0 \sin \omega t$,
2. $\lim u = 0$ при $S \rightarrow \infty$.

Решение задачи (3.26) ищем в виде:

$$u(S, t) = A(S) \sin(\omega t + \Psi(S)) - \frac{g}{2\kappa^2} \cos \alpha_0 S^2 + C_1 S + C_2, \quad (3.27)$$

где C_1 и C_2 - постоянные величины, которые могут быть определены из некоторых дополнительных условий.

Подставив (3.27) в уравнение задачи (3.26), получаем:

$$\left\{ A''(S) + \left[\left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^2 - \Psi'(S)^2 \right] A(S) \right\} \sin \tau + [A(S)\Psi''(S) + 2A'(S)\Psi'(S)] \cos \tau = \frac{kg \sin \alpha_0}{\kappa^2} \operatorname{sign} \cos \tau, \quad (3.28)$$

где переменная $\tau = \omega t + \Psi(S)$.

Применим к уравнению (3.28) метод усреднения, описанный выше. Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $A(S)$ и $\Psi(S)$:

$$\left. \begin{aligned} A''(S) + \left[\left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^2 - \Psi'(S)^2 \right] A(S) &= 0, \\ A(S)\Psi''(S) + 2A'(S)\Psi'(S) &= \frac{4kg}{\pi\kappa^2} \sin \alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $A=A_0$, $\Psi=0$;
2. $S=S_0$: $A(S_0)=0$.

Легко видеть, что при значении угла $\alpha_0 = 0,5\pi$ задача (3.29) совпадает с задачей (3.13).

А теперь отметим очевидный факт, что если под k подразумевать произведение $k \sin \alpha_0$, то разница между задачами (3.13) и (3.29) полностью исчезает. Поэтому все результаты, полученные для задачи (3.13), при замене в них k на $k \sin \alpha_0$ будут верными и для задачи (3.29):

$$A(S) = A_0 - \frac{2kg \sin \alpha_0}{\pi\kappa\omega} S, \quad S \leq S_0(\alpha_0), \quad \Psi(S) = -\frac{\omega S}{\kappa}. \quad (3.30)$$

Граница полного затухания волнового возмущения $S_0(\alpha_0)$ в рассматриваемом случае запишется:

$$S_0(\alpha_0) = \frac{\pi\kappa\omega A_0}{2kg \sin \alpha_0}. \quad (3.31)$$

Очевидно, что формула (3.19) является частным случаем формулы (3.31) при $\alpha_0 = 0,5\pi$, а условие развития колебательного процесса в стержне имеет вид:

$$P_0 > \frac{kgE(D^2 - d^2)}{2k\omega} \sin \alpha_0. \quad (3.32)$$

Вернемся теперь к соотношению (3.31) и предположим, что условие (3.32) выполнено для любого значения $\alpha_0 \in [0, 0,5\pi]$. Пусть длина прямой наклонной скважины (или, что то же самое, буровой колонны) от начала до забоя равна некоторой величине S_c . Тогда очевидно, что при $S_0(\alpha_0) > S_c$ от верхнего торца буровой колонны будет отражаться динамическое возмущение, пришедшее с забоя, и прямая волна, суммируясь с обратной, при определенном соотношении фаз может усилить продольные колебания колонны (вызвать состояние резонанса). Наоборот, если $S_0(\alpha_0) < S_c$, то забойное возмущение не достигнет начала скважины, обратная волна отсутствует и состояние резонанса невозможно. Далее очевидно, что согласно формулам (3.19) и (3.31) величины $S_0(\alpha_0)$ и $S_0 = S_0(0,5\pi)$ связаны соотношением:

$$S_0 = S_0(\alpha_0) \sin \alpha_0. \quad (3.33)$$

Пусть породоразрушающий инструмент на забое скважины генерирует продольные колебания с амплитудой A_0 и частотой ω . Тогда, откладывая в плоскости скважины влево и вправо по горизонтали от точки O (начало скважины) величину S_0 и проводя из крайних точек отрезков длиной S_0 две вертикали (рис.11, поз.1), видим, что область между этими двумя вертикалями (на рис.11 она затенена) является не чем иным, как **областью возможного возникновения продольного резонанса буровой колонны**.

Отсюда видно, что если мы проводим прямо-

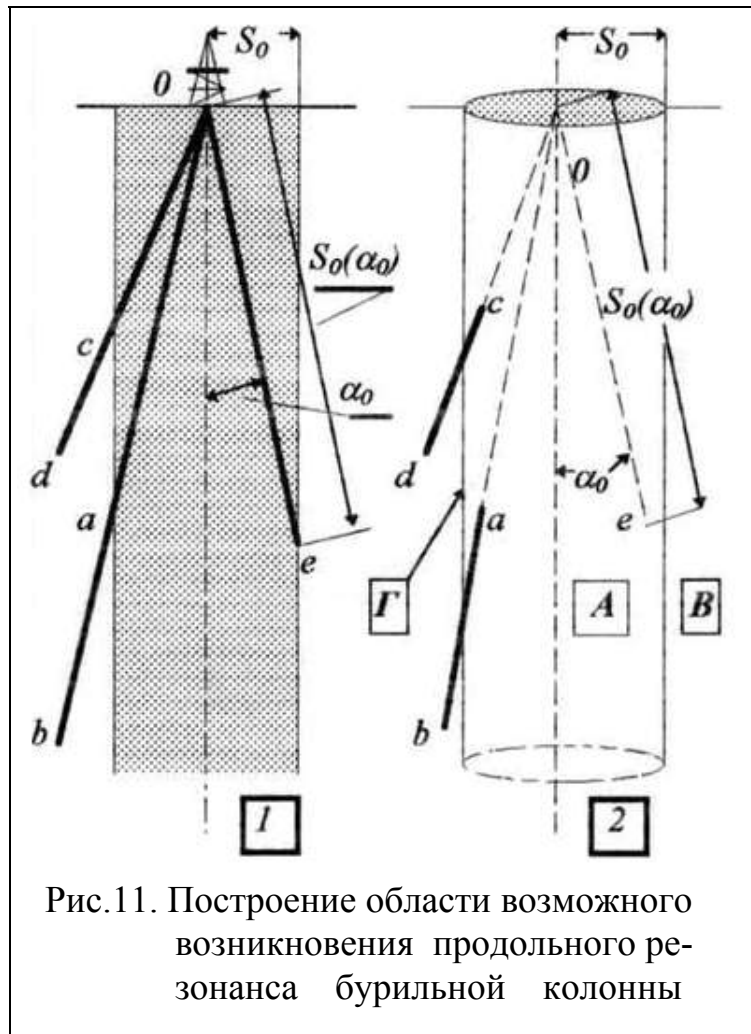


Рис.11. Построение области возможного возникновения продольного резонанса буровой колонны

линейную скважину под углом α_0 к вертикали, то резонансный режим возможен только до тех пор, пока не достигается граница выделенной области (на рис.11, поз.1 эта граница достигается долотом в точке e ; при этом длина бурильной колонны есть $S_0(\alpha_0)$). Как только длина скважины позволяет выйти за пределы указанной зоны, то возникновение резонанса при забойном возмущении с частотой ω и амплитудой A_0 исключено (на рис.11, поз.1 это участки проводки скважины, соответствующие отрезкам ab и cd). Очевидно, вращая плоскость скважины вокруг вертикали, в пространстве мы получим цилиндрическую поверхность Γ , делящую полупространство, в котором проводится скважина, на две области - область возможного возникновения резонанса A и область его отсутствия B (рис.11, поз.2). Следовательно, для того, чтобы построить область возможного возникновения продольного резонанса в случае силы сопротивления движению бурильной колонны в скважине, определяемой законом трения Кулона, по параметрам забойного возмущения A_0 и ω вычисляется величина S_0 , и ею, как радиусом, на дневной поверхности проводится окружность с центром в начале скважины. Круг с центром в начале скважины (точка O) будет основанием вертикального цилиндра, внутренняя область которого и является областью возможного возникновения резонанса (область A на рис.11, поз.2). Понятие области возможного возникновения продольного резонанса бурильной колонны впервые было введено в работе /7/.

А теперь перейдем к случаю искривленной скважины. При этом будем рассматривать слабо искривленные скважины, то есть, когда радиус искривления $R(S)$ велик, а потому членами уравнения (3.1), содержащими множителем R^{-1} , можно пренебречь. В этом случае оно принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kg \sin \alpha(S) \operatorname{sign} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + g \cos \alpha(S). \quad (3.34)$$

Граничные условия: 1. $S=0: u = A_0 \sin \omega t$; 2. $\lim u=0$ при $S \rightarrow \infty$.

Решение задачи (3.34) ищем в виде:

$$u(S,t) = A(S) \sin(\omega t + \Psi(S)) - \frac{g}{\kappa^2} \iint \cos \alpha(S) dS^2 + C_1 S + C_2, \quad (3.35)$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования (см. (3.26) и (3.27)).

После подстановки (3.35) в (3.34) и применения метода усреднения получаем:

$$\left. \begin{aligned} A''(S) + \left[\left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^2 - \Psi'(S)^2 \right] A(S) &= 0, \\ A(S)\Psi''(S) + 2A'(S)\Psi'(S) &= \frac{4kg}{\pi\kappa^2} \sin \alpha(S). \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $A=A_0$, $\Psi=0$;
2. $S=S_0$: $A(S_0)=0$.

Однако в данном случае воспользуемся только вторым уравнением системы (3.36), переписав его в следующем виде:

$$A'(S) + \frac{1}{2} \frac{\Psi''(S)}{\Psi'(S)} A(S) = 2 \frac{kg}{\pi\kappa^2} \frac{\sin \alpha(S)}{\Psi'(S)}. \quad (3.37)$$

Обозначим через Ψ'_0 значение $\Psi'(S)$ при $S=0$. Уравнение (3.37) легко решается относительно $A(S)$:

$$A(S) = A_0 \sqrt{\left| \frac{\Psi'_0}{\Psi'(S)} \right|} \left(1 + \frac{2kg}{\pi\kappa^2 A_0 \sqrt{|\Psi'_0|}} \int_0^S \frac{\sqrt{|\Psi'(S)|}}{\Psi'(S)} \sin \alpha(S) dS \right). \quad (3.38)$$

Формула (3.38) дает выражение амплитуды волнового возмущения, распространяющегося по стержню слабой кривизны в зависимости от характера изменения угла $\alpha(S)$ и производной фазы волны $\Psi'(S)$. В частности, при $\alpha=\alpha_0=const$ и $\Psi(S) = -\omega S / \kappa$ из этой формулы получаются все изложенные выше результаты. Граница же полного затухания волнового возмущения (условие $A(S_{0k})=0$, где через S_{0k} обозначена искомая граница для искривленной скважины), найдется из (3.38) как

$$\int_0^{S_{0k}} \frac{\sqrt{|\Psi'(S)|}}{\Psi'(S)} \sin \alpha(S) dS = - \frac{\pi\kappa^2 A_0 \sqrt{|\Psi'_0|}}{2kg}. \quad (3.39)$$

А теперь в силу слабой искривленности скважины примем фазу бегущей волны такой же, как и в случае прямолинейной скважины (см. (3.30)). Тогда соотношение (3.39) принимает следующую форму:

$$\int_0^{S_{0k}} \sin \alpha(S) dS = S_0. \quad (3.40)$$

Проанализируем полученное выражение, для чего рассмотрим искривленную скважину (рис.12). В плоскости скважины на расстоянии S_0 от ее начала проведем вертикальную прямую, являющуюся образующей цилиндрической поверхности Γ . Внутри этой поверхности лежит область возможного возникновения продольного резонанса (на рис.12 показана часть этой области, лежащая правее вертикали θx , идущей от начала скважины). Начало координатной оси S (ось бурильной колонны) помещено на забое скважины (точка O_1). Выделим элементарный участок стержня (колонны) длиной ΔS , который, в силу его малости, можно считать прямолинейным, и проведем касательную к оси стержня, которая образует с вертикалью угол $\alpha(S)$. Очевидно, что длина проекции этого элемента на горизонталь ΔS_n запишется, как $\Delta S_n = \sin \alpha(S) \Delta S$, или же в дифференциалах: $dS_n = \sin \alpha(S) dS$. Следовательно, с учетом данного соотношения интеграл (3.40) может быть записан, как (см. рис.12):

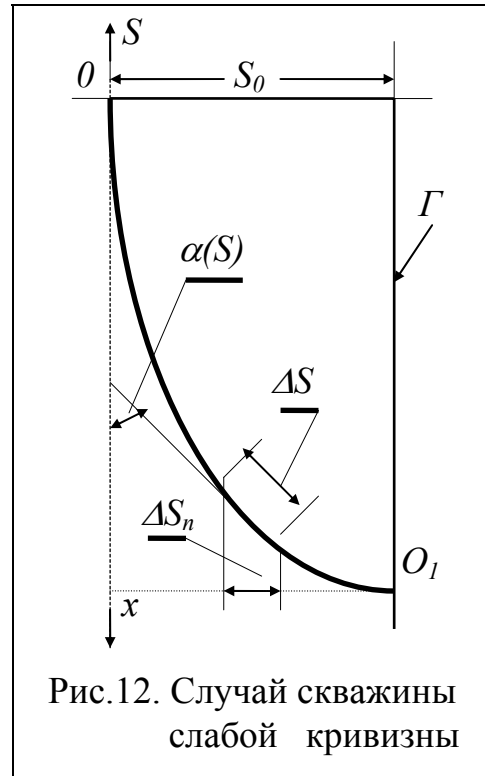


Рис.12. Случай скважины слабой кривизны

с вертикалью угол $\alpha(S)$. Очевидно, что длина проекции этого элемента на горизонталь ΔS_n запишется, как $\Delta S_n = \sin \alpha(S) \Delta S$, или же в дифференциалах: $dS_n = \sin \alpha(S) dS$. Следовательно, с учетом данного соотношения интеграл (3.40) может быть записан, как (см. рис.12):

$$\int_0^{S_0} dS_n = S_0.$$

Установленный факт говорит о том, что область возможного возникновения резонанса для прямолинейной скважины годится для оценки возможности возникновения продольного резонанса и в случае криволинейной скважины. При этом из (3.38) получаем, что

$$A(S) = A_0 - \frac{2kg}{\pi k \omega} \int_0^S \sin \alpha(S) dS. \quad (3.41)$$

Очевидно, что (3.30) является частным случаем зависимости (3.41).

Теперь сделаем замечание следующего рода.

Пусть требуется пробурить скважину из точки θ (начало скважины) в точку O_k (конечное положение забоя). Обратимся к рис.13. Очевидно, что профиль скважины может быть выбран не единственным образом. Построим в массиве разбуриваемой горной породы область A - область возникновения резонанса (на рис.13 она затенена) и рассмотрим два профиля скважины - $\theta a O_k$ и $\theta b O_k$, где точки a и b являются точками пересечения скважин с поверхностью Γ , ограничивающей область A . Срав-

нивая профили скважин, мы видим, что профиль $0bO_k$ предпочтительнее в сравнении с профилем $0aO_k$, поскольку участок проводки скважины $0b$ в области резонанса меньше, чем участок $0a$. Следовательно, в случае профиля $0bO_k$ будет и меньшей вероятностью возникновения различного рода осложнений, причиной которых могут служить резонансные продольные колебания бурильной колонны. Таким образом, посредством несложного качественного анализа мы установили, что **профиль скважины** в определенной степени **влияет на факт возникновения резонансного режима работы бурильного инструмента** при проводке скважины с использованием забойного двигателя (бурильная колонна не вращается).

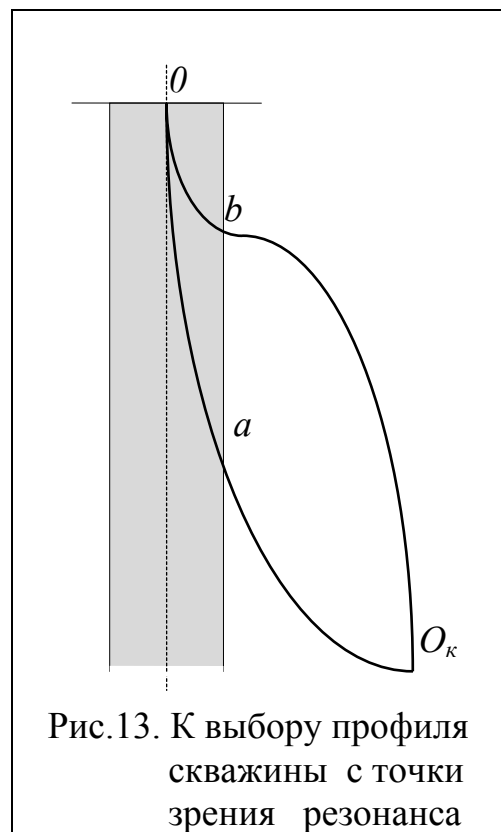


Рис.13. К выбору профиля скважины с точки зрения резонанса

А теперь сделаем замечание относительно распространения крутильных колебаний в случае, когда бурильная колонна не вращается, осевые перемещения отсутствуют (то есть $u(S,t)=0$), а к ее торцу на забое приложено возмущение $\varphi_0 \sin \omega t$. Рассмотрим горизонтальный участок. Расчетная схема процесса показана на рис.14.

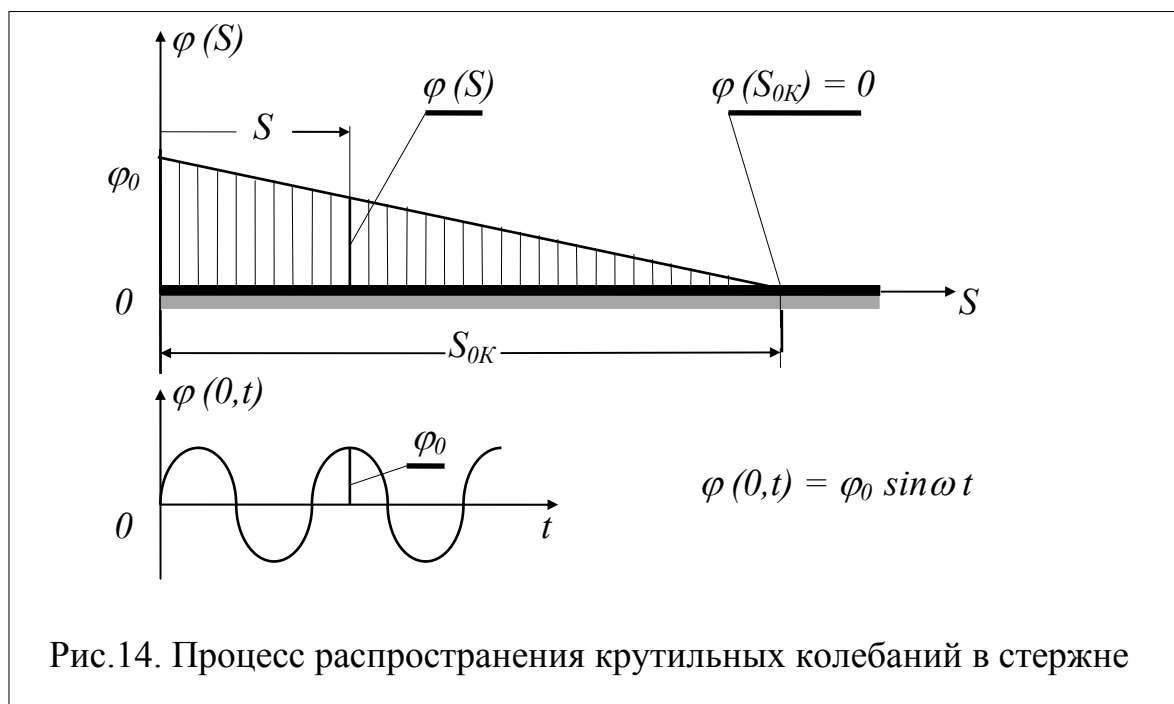


Рис.14. Процесс распространения крутильных колебаний в стержне

В этом случае задача о распространении крутильных колебаний вдоль стержня идентична задаче (3.10) (см. рис.10). Положив во втором уравнении системы (2.5) угол $\alpha_0=0,5\pi$ и $u(S,t)=0$, имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{4Dkg}{d^2 + D^2} \text{sign} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2}. \quad (3.42)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$,
2. $\lim \varphi=0$ при $S \rightarrow \infty$.

Повторяя дословно рассуждения, относящиеся к задаче (3.10), найдем, что при установившемся колебательном процессе функция $\varphi(S,t)$ представляется в виде:

$$\varphi(S, t) = \left(\varphi_0 - \frac{8Dkg}{\pi(D^2 + d^2)\lambda\omega} S \right) \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{\lambda} S\right) \text{ при } S \leq S_{0K}, \quad (3.43)$$

где S_{0K} - граница полного затухания волнового крутильного возмущения:

$$S_{0K} = \frac{\pi(d^2 + D^2) \lambda \omega \varphi_0}{8D kg}. \quad (3.44)$$

При $S > S_{0K}$ функция $\varphi(S,t) = 0$.

Связь между амплитудой забойного возмущения φ_0 и амплитудой момента M_0 , вызывающего это возмущение, имеет вид:

$$\varphi_0 = \frac{8\lambda}{\pi\omega(d^2 + D^2)} \sqrt{\left(\frac{4M_0}{G(D^2 - d^2)} \right)^2 - \left(\frac{Dkg}{\lambda\omega} \right)^2}. \quad (3.45)$$

Отсюда легко определяется условие возникновения крутильных колебаний стержня (подкоренное выражение не должно быть отрицательным):

$$M_0 > \frac{D(D^2 - d^2)Gkg}{4\lambda\omega}. \quad (3.46)$$

Очевидно, что формулы (3.44), (3.45) и (3.46) для крутильных колебаний аналогичны соответственно формулам (3.19), (3.24) и (3.25) для продольных колебаний горизонтального участка бурильной колонны.

А теперь вновь обратимся к рис.9 и вычислим крутящий момент, необходимый для вращения бурильной колонны в скважине при постоянной скорости вращения колонны n_0 . При этом скоростью осевого перемещения колонны в силу его малости при стационарном движении (см. вывод уравнения (3.2)) пренебрегаем.

Получим уравнение крутящего момента, действующего в текущем сечении искривленного участка бурильной колонны при ее равномерном вращении. Для этого обратимся ко второму уравнению системы (2.4). Положив в нем $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = n_0 = const$, имеем:

$$\lambda^2 \frac{d^2 \varphi}{dS^2} = \frac{4Dkg}{D^2 + d^2} \left(\sin \alpha(S) - \frac{\kappa^2}{gR(S)} \frac{du}{dS} \right). \quad (3.47)$$

Здесь вместо частных фигурируют обыкновенные производные, поскольку входящие в уравнение (3.47) функции в исследуемой ситуации от времени не зависят.

Поскольку момент $M(S)$ и осевое усилие $N(S)$ в сечении стержня связаны с соответствующими деформациями, как

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{M(S)}{GJ_p}, \quad \frac{du}{dS} = \frac{N(S)}{EB},$$

то после подстановки этих значений в (3.47) и ряда преобразований это уравнение приводится к виду:

$$\frac{dM(S)}{dS} = 0,5kD \left(q \sin \alpha(S) - \frac{N(S)}{R(S)} \right), \quad (3.48)$$

где $N(S)$ находится из (3.3).

Имея в виду, что $dS = R d\alpha$, уравнение (3.48) можно записать так:

$$\frac{dM(\alpha)}{d\alpha} = 0,5kD(qR(\alpha) \sin \alpha - N(\alpha)). \quad (3.49)$$

Здесь $N(\alpha)$ определяется из (3.4).

Теперь для крутящих моментов различных участков бурильной колонны можно составить систему уравнений с соответствующими граничными условиями, аналогичную системе (3.5) для осевых усилий, и решить ее. Однако мы этого делать не будем, а запишем сразу абсолютное значение величины момента M_{0H} на роторе, которое необходимо для вращения колонны в искривленной скважине (рис.9):

$$M_{0H} = M_H(P, n_0) + D \left\{ \frac{kQ}{2} + \frac{Q_k}{\pi} \left[\frac{2k^2}{1+k^2} + \left(\frac{2k}{1+k^2} + \frac{\pi N_0 - Q_b}{2 Q_k} \right) (1 - e^{-0,5k\pi}) \right] \right\}. \quad (3.50)$$

Здесь $M_H(P, n_0)$ - момент сопротивления вращению долота со стороны забоя, P - осевая нагрузка на долото (ее можно брать, как будет видно далее, согласно формуле (3.8)), а Q_b , Q_k и Q - соответственно веса вертикального, искривленного и горизонтального участков бурильной колонны.

Продолжим анализ математической модели и рассмотрим задачу передачи осевого усилия на горизонтальном участке длиной L (см. рис.9). Вначале обратим внимание на случай невращающейся бурильной колонны. Для названного случая значение силы P , действующей между долотом и забоем, дается соотношением (3.6). Очевидно, что если через N_l обозначить силу, которая приложена к поперечному сечению в начале горизонтального участка и создается весом расположенной выше частью бурильной колонны, то, воспользовавшись третьим уравнением системы (3.5) и граничным условием 3 с учетом того, что сила N_l - сжимающая, а потому берется со знаком «минус», имеем:

$$\frac{dN}{dS} = kq, N(0) = -N_l.$$

Отсюда легко находится закон изменения усилия на горизонтальном участке:

$$N(S) = -N_l + kqS. \quad (3.51)$$

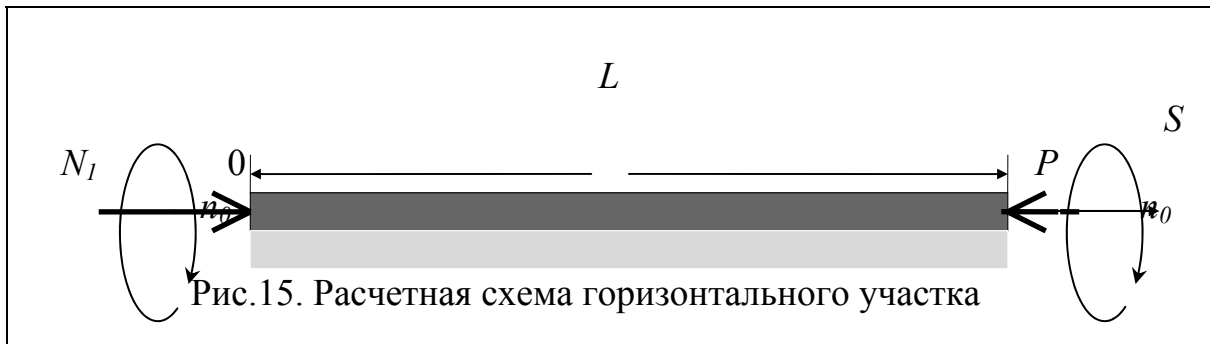
Усилие же $P = -N(L)$ дается формулой $P = N_l - kqL$.

Сравнивая данное выражение с формулой (3.6), видим, что N_l равно сумме двух первых слагаемых, а член kqL дает уменьшение силы за счет трения на участке длиной L . Очевидно, что как только эти потери превысят значение N_l , то сила на забое $P = 0$. Наименьшее значение L определится из равенства $N_l - kqL = 0$. В этом случае распределение усилий в поперечных сечениях согласно (3.51) запишется:

$$N(S) = kq(S-L). \quad (3.52)$$

Итак, при невращающейся бурильной колонне как только $S > L$, определяемой равенством $L = N_l / kq$, осевая нагрузка на долото будет нулевой.

Рассмотрим теперь случай вращения бурильной колонны с постоянной угловой скоростью n_0 и проанализируем передачу осевого усилия на забой. Расчетная схема этого случая показана на рис.15.



Обратимся к первому уравнению системы (2.5). В предположении того, что скорость вращения n_0 велика, а потому $0,5n_0D \gg \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|$, пренебрежем в подкоренном выражении квадратом скорости в осевом направлении. После этого, положив угол $\alpha_0 = 0,5\pi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = n_0$, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2kg}{n_0 D} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}. \quad (3.53)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $EB \frac{\partial u}{\partial S} = -kqL$,

2. $S=L$: $u = 0$.

Начальные условия: 3. $t=0$: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$,

4. $t=0$: $EB \frac{\partial u}{\partial S} = kq(S - L)$.

Граничное условие 1 говорит о том, что усилие $N_1=kqL$ дает в начальный момент процесса нулевое значение забойного усилия P ; граничное условие 2 показывает, что разрушение забоя крайне незначительно, а потому изменением его положения в осевом направлении OS можно пренебречь. Начальные же условия 3 и 4 говорят о том, что колонна находилась в покое, а распределение осевых усилий подчинялось закону (3.52). Конечно, вид уравнения (3.53) говорит о том, что в момент $t=0$ все сечения колонны вращаются с одинаковыми скоростями n_0 . Однако этот факт не учтен в условиях 3 и 4, поскольку сильно затруднил бы исследование сформулированной задачи, не оказав при этом никакого принципиального влияния на конечные выводы.

Представим искомую функцию $u(S,t)$, как

$$u(S,t) = \frac{kqL}{EB}(L - S) + U(S,t). \quad (3.54)$$

После этого исходная задача принимает вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{2kg}{n_0 D} \frac{\partial U}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}. \quad (3.55)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $\frac{\partial U}{\partial S} = 0$,

2. $S=L$: $U = 0$.

Начальные условия: 3. $t=0$: $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$,

4. $t=0$: $\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{kq}{EB} S$.

Забойное осевое усилие $P = -EB \frac{\partial u}{\partial S}$ при $S=L$ с учетом (3.54) запишется:

$$P = kqL - EB \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_{S=L}. \quad (3.56)$$

Решив задачу (3.55) методом разделения переменных и воспользовавшись соотношением (3.56), окончательно получаем:

$$P = N_1 \left(1 - \frac{4}{\pi} e^{-\varepsilon t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_j} \right)^2} \sin \left(\omega_j t + \arctg \frac{\omega_j}{\varepsilon} \right) \right). \quad (3.57)$$

Здесь $N_1 = kqL$, $\varepsilon = \frac{kg}{n_0 D}$, $\omega_j = \sqrt{\left(\frac{(2j+1)\pi\kappa}{2L} \right)^2 - \left(\frac{kg}{n_0 D} \right)^2}$.

Мы видим, что с течением времени второй член в круглых скобках соотношения (3.57) стремится к нулю. Следовательно, с течением времени усилие N_1 полностью передается на забой.

Заметим, что между коэффициентами диссипативных членов перед $\frac{\partial u}{\partial t}$ первого уравнения системы (2.5) (при $\alpha_0=0,5\pi$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = n_0$) имеет место неравенство:

$$\frac{kg}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{n_0 D}{2} \right)^2}} < \frac{2kg}{n_0 D}. \quad (3.58)$$

А это говорит о большем сопротивлении движению стержня во втором случае, чем в первом. Следовательно, при вращении бурильной колонны

(роторный способ) передача осевой нагрузки на долото осуществляется гораздо полнее, чем при бурении с применением забойных двигателей (колонна не вращается).

Выше отмечалось, что усилие на забой при невращающейся колонне записывается:

$$P = N_l - kQ,$$

где Q - вес горизонтального участка бурильной колонны.

Имея в виду, что в формуле (3.57) вес горизонтального участка $Q = qL$, ее можно переписать следующим образом:

$$P = N_l - k(t)Q.$$

Сравнивая ее с предыдущей зависимостью, видим, что в этом случае коэффициент трения не является постоянной величиной, а его вид легко определяется из (3.57):

$$k(t) = k \frac{4}{\pi} e^{-\varepsilon t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_j}\right)^2} \sin\left(\omega_j t + \operatorname{arctg} \frac{\omega_j}{\varepsilon}\right). \quad (3.59)$$

Следовательно, при вращении бурильной колонны коэффициент трения уменьшается от максимально возможного значения $k(0)=k$ до нуля. Именно этот факт и позволяет при вычислении крутящего момента на роторе, потребного для вращения бурильной колонны, в соотношении (3.50) использовать значение осевой нагрузки на долото, определяемое по формуле (3.8).

Итак, нами были рассмотрены случаи стационарного состояния бурильной колонны (определение осевой нагрузки P на забой при невращающейся колонне и нахождение крутящего момента M_{0H} , приложенного к ротору при равномерном вращении), случаи распространения волновых возмущений вдоль бурильной колонны при гармоническом забойном возмущении (границы полного затухания $S_0(\alpha_0)$ и $S_{0K}(\alpha_0)$ соответственно продольных и крутильных колебаний, возбуждаемых на забое породоразрушающим инструментом при невращающейся колонне), а также проблема передачи осевого усилия к забою скважины на горизонтальном участке. Проанализируем теперь возможность возникновения крутильных автоколебаний бурильного инструмента, расположенного в искривленной скважине.

Рассмотрим общий случай криволинейной скважины с переменным

радиусом кривизны $R(S)$. Для этого обратимся ко второму уравнению системы (2.4). Считая, что значения скоростей крутильных колебаний по абсолютной величине много больше скоростей продольных колебаний, примем в нем $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{4Dkg}{D^2 + d^2} \left(\sin \alpha - \frac{\kappa^2}{gR} \frac{\partial u}{\partial S} \right) \text{sign} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2}.$$

Это уравнение путем подстановки в него значений $\kappa^2 = \frac{E}{\rho}$, $\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{N}{EB}$ и несложных преобразований запишется, как

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{4Dkg}{D^2 + d^2} \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) \text{sign} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2}. \quad (3.60)$$

Поскольку процесс в осевом направлении в рассматриваемом случае считается стационарным, но колонна при этом вращается, то осевое усилие в сечении можно определить из уравнения (3.3), положив в нем коэффициент трения $k=0$ (согласно (3.59) с увеличением времени $k \rightarrow 0$; при этом, как отмечалось выше, данный факт имеет место и для криволинейного участка):

$$\frac{dN}{dS} = -q \cos \alpha.$$

Напомним, что параметр α является функцией S , так как радиус кривизны R зависит от S .

А теперь обратимся к расчетной схеме, показанной на рис.16. Верхнее сечение бурильной колонны (ротор) вращается с постоянной скоростью n_0 , а вращение нижнего происходит со скоростью n_l . Длина колонны равна l , а на породоразрушающий инструмент со стороны забоя действует момент сопротивления вращению $M_c(P, n_l)$. К верхнему торцу приложена удерживающая сила N_0 .

Легко видеть, что осевое усилие в текущем сечении будет

$$N = N_0 - q \int_0^S \cos \alpha dS,$$

а усилие на забое $P = -N(L)$ запишется, как

$$P = q \int_0^S \cos \alpha dS - N_0. \quad (3.61)$$

Граничные условия для уравнения (3.60) имеют вид:

1. $S=0$: $\varphi = n_0 t$,
2. $S=l$: $GJ_P \frac{\partial \varphi}{\partial S} = -M_c(P, n_l)$.

Здесь $n_l = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{S=l}$, а осевая нагрузка P определяется согласно зависимости (3. 61).

А теперь повторим рассуждения, изложенные в публикации /8/ при анализе вращательного движения вертикального стержня в режиме крутильных автоколебаний. Для нахождения начальных условий рассмотрим равномерное вращение буровой колонны и запишем угол поворота произвольного сечения в виде $\varphi = n_0 t + \varphi_0(S)$. После подстановки записанного значения φ в (3.60) с учетом $\text{sign} n_0 = 1$ (направление вращения буровой колонны считается положительным) получим:

$$\frac{4Dkg}{D^2 + d^2} \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) = \lambda^2 \varphi_0''(S).$$

Граничные условия:

1. $S=0$: $\varphi_0=0$,
2. $S=l$: $GJ_P \varphi_0' = -M_c(P, n_0)$.

Записанное обыкновенное дифференциальное уравнение легко решается, и для величины φ получаем:

$$\varphi = n_0 t + \frac{4Dkg}{\lambda^2 (D^2 + d^2)} \left[\iint_S \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) dS^2 - S \int_0^H \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) dS \right] - \frac{M_c(P, n_0) S}{GJ_P}.$$

Из данного выражения следует, что при $t=0$ имеем:

$$\varphi = \frac{4Dkg}{\lambda^2 (D^2 + d^2)} \left[\iint_S \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) dS^2 - S \int_0^H \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) dS \right] - \frac{M_c(P, n_0) S}{GJ_P},$$

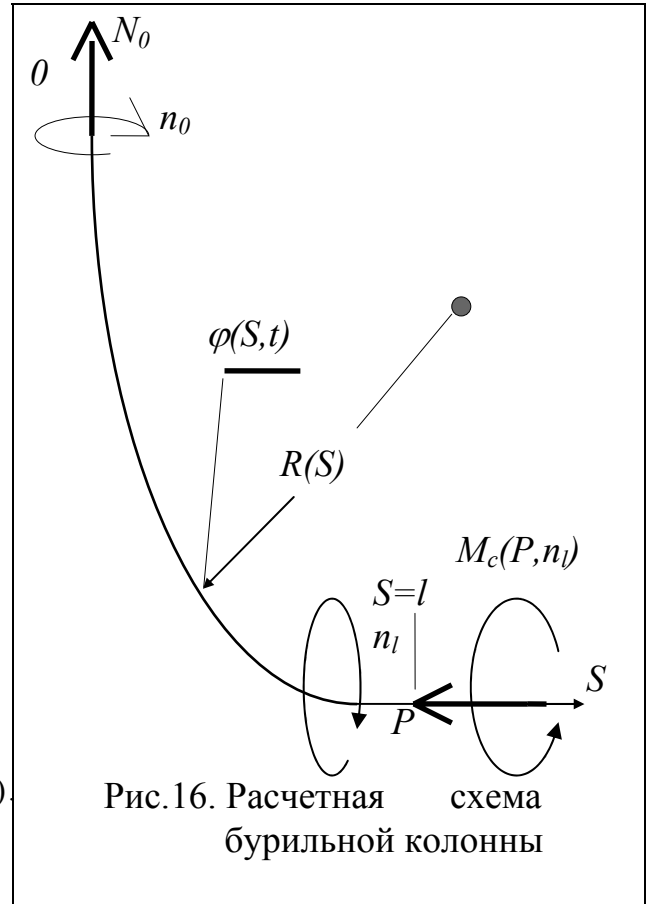


Рис.16. Расчетная схема буровой колонны

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = n_0.$$

Полученные зависимости мы и примем за начальные, после чего исходная задача запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{4Dkg}{D^2 + d^2} \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) \text{sign} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2}. \quad (3.62)$$

Граничные условия:

1. $S=0$: $\varphi = n_0 t$,
2. $S=l$: $GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial S} = -M_c(P, \frac{\partial \varphi}{\partial t})$.

Начальные условия:

3. $t=0$: $\varphi = \frac{4Dkg}{\lambda^2(D^2 + d^2)} \left[\iint_S \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) dS^2 - S \int_0^H \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) dS \right] - \frac{M_c(P, n_0)S}{GJ_p}$,
4. $t=0$: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = n_0$.

Решение задачи (3.62) ищем в виде:

$$\varphi(S, t) = n_0 t + \frac{4Dkg}{\lambda^2(D^2 + d^2)} \left[\iint_S \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) dS^2 - S \int_0^H \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) dS \right] - \frac{M_c(P, n_0)S}{GJ_p} + \Phi(S, t), \quad (3.63)$$

где $\Phi(S, t)$ - угловое смещение текущего сечения относительно его угла поворота при равномерном вращении.

После подстановки (3.63) в (3.62) и несложных преобразований имеем:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{4Dkg}{D^2 + d^2} \left(\sin \alpha - \frac{1}{q} \frac{N}{R} \right) \left(\text{sign} \left(n_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - 1 \right) = \lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S^2}. \quad (3.64)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $\Phi = 0$,

$$2. S=l: \frac{\partial \Phi}{\partial S} = -\frac{1}{GJ_p} \left[M_c(P, n_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial t}) - M_c(P, n_0) \right].$$

Начальные условия: 3. $t=0$: $\Phi = 0$,

$$4. t=0: \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Скорость вращения долота (нижний торец бурильной колонны) запишется:

$$n_l = n_0 + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{S=l}. \quad (3.65)$$

Очевидно, что направление скорости поворота текущего сечения бурильной колонны будет всегда совпадать с направлением n_0 , которое считается положительным. Следовательно, в силу отмеченного имеем, что $\text{sign}(n_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = 1$, и задача (3.64) переходит в следующую:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S^2}. \quad (3.66)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $\Phi = 0$

$$2. S=l: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial S} = -\frac{1}{GJ_p} \left[M_c(P, n_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial t}) - M_c(P, n_0) \right].$$

Начальные условия: 3. $t=0$: $\Phi = 0$,

$$4. t=0: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Итак, исходная задача (3.62) свелась к (3.66), которая полностью совпадает с задачей о вращении вертикального стержня при наличии крутильных автоколебаний, проанализированной в работе /8/.

4. О методе механического аналога

Метод решения при помощи механического аналога задачи о распространении волны по стержню может иметь и самостоятельное значение. Поэтому остановимся на нем более подробно. Пусть распространение волны описывается решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}. \quad (4.1)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $u = A_0 \sin \omega t$,
2. $\lim_{S \rightarrow \infty} u = 0$.

Здесь $f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ - диссипативный член, зависящий в общем случае от смещения и скорости поперечного сечения стержня.

Если искать установившееся решение в форме (3.11), то после подстановки его в (4.1) и применения метода усреднения, описанного при анализе задачи (3.10), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуды $A(S)$ и фазы $\Psi(S)$:

$$A''(S) + \left[\left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^2 - \Psi'(S)^2 \right] A(S) = \frac{1}{\pi \kappa^2} \int_0^{2\pi} f(A(S) \sin \tau, \omega A(S) \cos \tau) \sin \tau d\tau, \quad (4.2)$$

$$A(S) \Psi''(S) + 2 A'(S) \Psi'(S) = \frac{1}{\pi \kappa^2} \int_0^{2\pi} f(A(S) \sin \tau, \omega A(S) \cos \tau) \cos \tau d\tau.$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $A=A_0$, $\Psi=0$;
2. $\lim_{S \rightarrow \infty} A(S) = 0$.

Частным случаем (4.2) при законе трения Кулона является исследованная выше система (3.13).

Механический аналог задачи (4.1) запишется следующим образом:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) + \omega^2 x = 0. \quad (4.3)$$

Начальные условия: 1. $\dot{x}(0) = 0$, 2. $x(0) = A_0$.

Если решение дифференциального уравнения (4.3) найдено в виде

$$x(t) = a(t) \sin(\omega t + \varphi), \quad (4.4)$$

где $a(t)$ - амплитуда, а φ - фаза колебаний, то в силу подобия $A(S)$ и $a(t)$ (см. определение механического аналога и форму амплитуды решения задачи (3.13)) поступаем так.

Сделав замену $t = \beta S$, представим амплитуду, фигурирующую в задаче (4.2), следующим образом:

$$A(S) \cong a(\beta S). \quad (4.5)$$

Здесь β - неизвестная постоянная величина, знак \cong указывает на то, что обе амплитуды с точностью до постоянных сомножителей подобны друг другу.

После подстановки (4.5) в (4.2) получим новую систему уравнений, в которой вместо неизвестной функции $A(S)$ появляется постоянная величина β . После этого решение проводится относительно β и $\Psi(S)$. Изложенное поясним примером.

Пусть диссипативный член в уравнении (4.1) имеет вид:

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \xi u + 2\mu \frac{\partial u}{\partial t},$$

где ξ и μ - постоянные величины.

Тогда (4.1) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \xi u + 2\mu \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}. \quad (4.6)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $u = A_0 \sin \omega t$,
2. $\lim_{S \rightarrow \infty} u = 0$.

Механический аналог для данной задачи запишется в виде решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \xi x + 2\mu \dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (4.7)$$

Начальные условия: 1. $\dot{x}(0) = 0$, 2. $x(0) = A_0$.

Решение задачи (4.7) легко находится и записывается в виде:

$$x(t) = A_0 \sqrt{\frac{\omega^2 + \xi}{\omega^2 + \xi - \mu^2}} e^{-\mu t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 + \xi - \mu^2} t + \arctg \frac{\sqrt{\omega^2 + \xi - \mu^2}}{\mu}\right). \quad (4.8)$$

Система же уравнений (4.2) для задачи (4.6) после проведения операции интегрирования правых частей будет следующей:

$$\left. \begin{aligned} A''(S) + \left[\left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2 - \Psi'(S)^2 \right] A(S) &= \frac{\xi}{\kappa^2} A(S), \\ A(S)\Psi''(S) + 2A'(S)\Psi'(S) &= 2\frac{\mu\omega}{\kappa^2} A(S). \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $A=A_0$, $\Psi=0$;

$$2. \lim_{S \rightarrow \infty} A(S) = 0.$$

Так как амплитуда механического аналога согласно решению (4.8) имеет вид:

$$a(t) = A_0 \sqrt{\frac{\omega^2 + \xi}{\omega^2 + \xi - \mu^2}} e^{-\mu t},$$

то с точностью до постоянных сомножителей из (4.5) следует:

$$A(S) = A_0 e^{-\beta S}. \quad (4.10)$$

Здесь запись амплитуды дана так, чтобы удовлетворялось граничное условие $A(0)=A_0$. При этом, очевидно, постоянная величина $\beta > 0$.

После подстановки (4.10) в (4.9) и несложных преобразований получаем систему уравнений для неизвестных величин β и $\Psi(S)$:

$$\left. \begin{aligned} \Psi'(S)^2 - \beta^2 &= \frac{\omega^2 - \xi}{\kappa^2}, \\ \Psi''(S) - 2\beta\Psi'(S) &= 2\frac{\mu\omega}{\kappa^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Граничное условие: $\Psi(0)=0$.

Так как $\beta = \text{const}$, то из первого уравнения имеем, что $\Psi'(S) = \text{const}$. Следовательно, $\Psi''(S) = 0$, и второе уравнение дает:

$$\Psi'(S) = -\frac{\mu\omega}{\kappa^2} \frac{1}{\beta}. \quad (4.12)$$

Подставив это значение в первое уравнение системы, получим алгебраическое уравнение для нахождения неизвестной величины β :

$$\beta^4 + \frac{\omega^2 - \xi}{\kappa^2} \beta^2 - \left(\frac{\mu\omega}{\kappa^2}\right)^2 = 0. \quad (4.13)$$

С учетом вещественности и положительности β из (4.13) найдем, что

$$\beta = \frac{\omega}{\kappa} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\xi}{\omega^2} - 1\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\omega^2} - 1\right)}. \quad (4.14)$$

Из (4.12) с учетом $\Psi(0)=0$ имеем:

$$\Psi(S) = -\frac{\mu\omega}{\kappa^2\beta}S.$$

Следовательно, искомое решение будет равно:

$$u(S, t) = A_0 e^{-\beta S} \sin\left(\omega t - \frac{\mu\omega}{\kappa^2\beta}S\right), \quad (4.15)$$

где β дается зависимостью (4.14).

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что (4.15) является точным решением исходной задачи (4.6). Конечно, уравнение (4.6) - линейное, а потому его решение находится без особых проблем. Однако метод механического аналога позволил «разобраться» с задачей (3.10), а она - существенно нелинейна.

Небезынтересно отметить следующее /5,6/.

Обычно при исследовании колебаний длинных стержней (в нашем случае этим стержнем является бурильная колонна) волновое уравнение берется в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2},$$

где коэффициент $\mu = const$. Зададимся следующим вопросом: чему должен быть равен коэффициент μ , чтобы данное уравнение описывало волновой процесс при наличии силы сопротивления движению бурильной колонны в скважине, подчиняющейся закону трения Кулона?

Рассмотрим прямолинейную наклонную скважину, составляющую с вертикалью угол α_0 . В этом случае согласно (3.30) и (3.31) имеем:

$$u(S, t) = A_0 \left(1 - \frac{S}{S_0(\alpha_0)}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{\kappa}S\right), \quad (4.16)$$

где $S_0(\alpha_0)$ дается формулой (3.31). При $S > S_0(\alpha_0)$ функция $u(S, t) = 0$.

Подставив (4.16) в волновое уравнение, найдем, что

$$\mu = \frac{\kappa}{S_0(\alpha_0) - S}.$$

Следовательно, в данном случае волновое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\kappa}{S_0(\alpha_0) - S} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}. \quad (4.17)$$

Это уравнение - линейное, но описывает закон распространения волны при кулоновском трении. Здесь важно отметить изменение коэффициента демпфирования с изменением частоты забойных вибраций ω (поскольку от нее зависит параметр $S_0(\alpha_0)$), что замечалось и в экспериментах [9].

Важно отметить, что если при изучении установившихся колебаний стержня, по длине которого действует кулоновская сила трения, заменить уравнение с диссипативным членом $kg \cos \alpha_0$ на уравнение (4.17), то решение можно представить в аналитическом виде. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\kappa}{S_0 - S} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}. \quad (4.18)$$

Граничные условия: 1. $S=0$: $u = A_0 \sin \omega t$,

$$2. S=l: \frac{\partial u}{\partial S} = -h u.$$

Здесь через $S_0 = const$ обозначена длина полного затухания волнового возмущения $S_0(\alpha_0)$, через l - длина стержня (очевидно, что для развития волнового процесса с участием отраженных волн необходимо выполнение неравенства $l < S_0$), а через h - коэффициент упругого закрепления торца стержня.

Установившееся решение задачи (4.18) ищем в виде:

$$u(S, t) = (S_0 - S) [Q_1(S) \cos \omega t + Q_2(S) \sin \omega t], \quad (4.19)$$

где $Q_1(S)$ и $Q_2(S)$ - неизвестные функции только переменной S .

После подстановки выражения (4.19) в уравнение исходной задачи, группировки коэффициентов при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ и приравнивания этих коэффициентов нулю приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $Q_1(S)$ и $Q_2(S)$:

$$\left. \begin{aligned} Q_1''(S) - \frac{2}{S_0 - S} Q_1'(S) + \left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2 Q_1(S) - \frac{2\omega}{\kappa(S_0 - S)} Q_2(S) &= 0, \\ Q_2''(S) - \frac{2}{S_0 - S} Q_2'(S) + \left(\frac{\omega}{\kappa}\right)^2 Q_2(S) + \frac{2\omega}{\kappa(S_0 - S)} Q_1(S) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Введем в рассмотрение комплексную функцию

$$U(S) = Q_1(S) + iQ_2(S), \quad (4.21)$$

где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

После умножения второго уравнения системы (4.20) на i , сложения с первым уравнением и несложных преобразований получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно новой неизвестной функции $U(S)$:

$$U''(S) - \frac{2}{S_0 - S}U'(S) + \left[\left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^2 + i \frac{2\omega}{\kappa(S_0 - S)} \right] U(S) = 0. \quad (4.22)$$

Найдя из (4.22) функцию $U(S)$, определим $Q_1(S)$ и $Q_2(S)$ соответственно как вещественную и мнимую ее части:

$$\begin{cases} Q_1(S) = \operatorname{Re} U(S), \\ Q_2(S) = \operatorname{Im} U(S). \end{cases} \quad (4.23)$$

Испытаем в качестве одного из решений дифференциального уравнения (4.22) функцию

$$U_1(S) = \Pi_1 e^{i\eta S},$$

где Π_1 и η - постоянные величины.

Подставив эту функцию в (4.22), получаем

$$\eta^2 + i \frac{2\eta}{S_0 - S} - \left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^2 - i \frac{2\omega}{\kappa(S_0 - S)} = 0,$$

что можно переписать, как

$$(S_0 - S) \left[\left(\frac{\omega}{\kappa} \right)^2 - \eta^2 \right] + i2 \left(\frac{\omega}{\kappa} - \eta \right) = 0.$$

Это равенство выполняется только при $\eta = \omega/\kappa$, откуда

$$U_1(S) = \Pi_1 e^{i \frac{\omega S}{\kappa}}.$$

Зная одно из решений уравнения (4.22), легко найдем по теореме Лиувилля второе линейно независимое решение

$$U_2(S) = CU_1(S) \int \frac{e^{\int \frac{2dS}{S_0 - S}}}{U_1^2(S)} dS,$$

где C - произвольная постоянная.

После проведения операции интегрирования и переобозначения постоянной интегрирования имеем:

$$U_2(S) = \Pi_2 \int_0^S \frac{e^{\frac{i\omega}{\kappa}(S-2\xi)}}{(S_0 - \xi)^2} d\xi.$$

Итак, решением дифференциального уравнения (4.22) будет

$$U(S) = \Pi_1 e^{\frac{i\omega S}{\kappa}} + \Pi_2 \int_0^S \frac{e^{\frac{i\omega}{\kappa}(S-2\xi)}}{(S_0 - \xi)^2} d\xi, \quad (4.24)$$

где Π_1 и Π_2 - постоянные интегрирования.

Заметим, что из краевых условий задачи (4.18) и записи ее решения в виде формулы (4.19) с учетом (4.21) найдем, что

$$\left. \begin{aligned} U(0) &= i \frac{A_0}{S_0}, \\ U'(l) &= \frac{1-h(S_0-l)}{S_0-l} U(l). \end{aligned} \right\}$$

Подставив сюда решение (4.23), получим систему линейных уравнений для нахождения произвольных постоянных Π_1 и Π_2 .

Можно показать, что окончательное решение представимо в виде:

$$u(S,t) = (S_0 - S) |U(S)| \sin \left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{Q_1(S)}{Q_2(S)} \right), \quad (4.25)$$

где $|U(S)| = \sqrt{Q_1^2(S) + Q_2^2(S)}$ - модуль комплексной функции $U(S)$.

Заметим, что для случая отсутствия силы трения путем предельного перехода при $S_0 \rightarrow \infty$ из (4.24) получим точное решение задачи (4.18) при коэффициенте трения $k=0$. Однако оценка погрешности полученного решения изложенным методом для стержня конечных размеров требует проведения дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в результате проведенного анализа установлено, что в массиве разбуриваемой породы можно построить область возможного возникновения резонансных колебаний бурильного инструмента, границы которой определяются параметрами забойного возмущения (амплитудой и частотой), генерируемого долотом на забое, а также величиной коэффициента трения бурильной колонны о стенки скважины. Введение понятия механического аналога при рассмотрении распространения волнового возмущения в стержне дало возможность разработать метод построения указанной области. Более того, такой подход позволил установить следующее: состояние резонанса (а вернее - степень вероятности его возникновения) связано не только с параметрами забойного возмущения, механическими свойствами бурильной колонны и характером силы сопротивления движению, но и с профилем скважины (рис.13). Следовательно, имеется шанс учета профиля скважины при разработке методов борьбы с негативными явлениями, возникающими в процессе бурения из-за наличия интенсивных колебаний инструмента.

Библиографический список

1. Юнин Е.К., Аксенов В.Е., Симонов В.В., Шорина Е.И. Устройство для исследования процесса трения между горной породой и бурильными трубами. - А.С. СССР N 1432219. Б.И. N 39, 1988.
2. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. - М.: Высшая школа, 1975.
3. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. - Ленинград: Машиностроение (Ленинградское отделение), 1976.
4. Тимошенко С.П. Теория колебаний в инженерном деле.- М.-Л.: Гос. научн.-тех. Из-во, 1931.
5. Симонов В.В., Юнин Е.К. Влияние колебательных процессов на работу бурильного инструмента. - М.: Недра, 1977.
6. Юнин Е.К. Управление низкочастотными колебаниями бурильной колонны с целью повышения эффективности процесса бурения: Дис. ... д-ра техн. наук. - М., 1983, 367 с.
7. Юнин Е.К. К вопросу динамики бурильной колонны в случае наклонной скважины. - М., 1980 - 9 с. Рус. - Деп. в ВИНТИ 20.6.1980, N 2668-80.
8. Сумбатов А.С., Юнин Е.К. Очерки о трении. - М.: Вычислительный центр РАН, 2000.
9. Ангона Ф.А. Затухание колебаний в колонне буровых труб и его значение для метода бурения с поверхностным вибратором.- Труды американского общества инженеров-механиков, 1965, вып.2. – М.: Мир, С. 25-30.
10. Основные теории колебаний / В.В.Мигулин, В.И.Медведев, Е.Р.Мустель, В.Н.Парыгин. – М.: Наука, 1987.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Свободные колебания при кулоновом трении

Простейшая механическая модель с сухим трением (закон Кулона) может быть представлена механической системой, показанной на рис.П.1. Здесь масса m скользит по плоской поверхности, совершая колебания вдоль координатной оси x за счет инерции массы и упругости пружины (коэффициент упругости ее равен $c=const$). На тело действует сила трения F_c , равная по абсолютной величине kmg при скорости скольжения $\dot{x} \neq 0$ (здесь k - коэффициент трения, g - ускорение свободного падения) и направленная противоположно скорости скольжения (нижняя часть

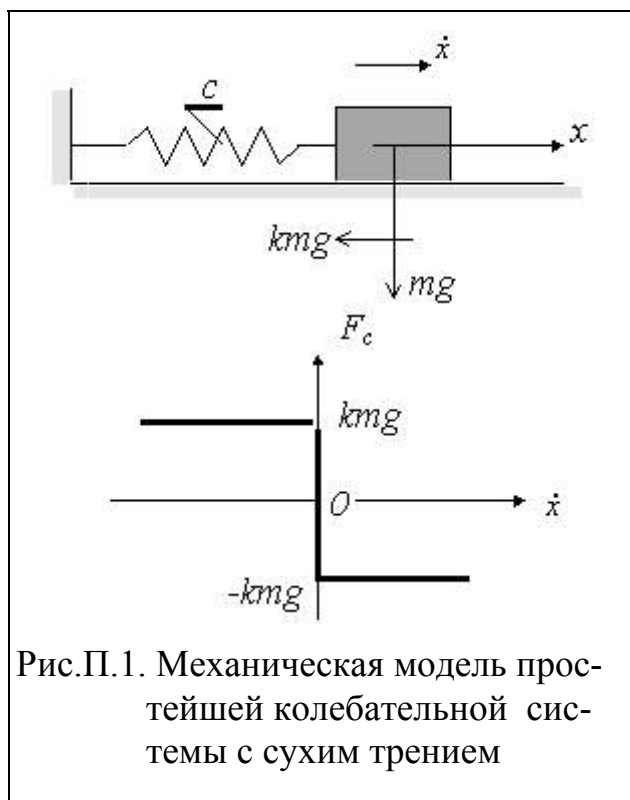


Рис.П.1. Механическая модель простейшей колебательной системы с сухим трением

рис.П.1). При $\dot{x} = 0$ она может, в зависимости от суммы сил инерции тела и упругости пружины, принимать любое значение из интервала $[-kmg, kmg]$. Запишем уравнения движения тела массой m .

Если через x обозначить величину смещения тела от положения равновесия в случае отсутствия трения, то уравнениями движения будут:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -cx - kmg, \forall \dot{x} > 0, \\ m\ddot{x} = -cx + kmg, \forall \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (\text{П.1})$$

Начальные условия: 1. $t=0$: $x=x_0$,
2. $t=0$: $\dot{x} = 0$.

Задачу (П.1) преобразуем к следующему виду:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a, \quad (\text{П.2})$$

где $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$; $a = -kg$ при $\dot{x} > 0$, $a = kg$ при $\dot{x} < 0$. Начальные условия остаются без изменения.

В записанных выражениях t - время, а точки над символом x обозначают его дифференцирование по времени.

Поставленную задачу решим двумя способами: точным и приближенным.

Точный метод /10/

Сделаем следующие подстановки:

$$\begin{cases} x = x_1 - kg / \omega^2, \forall \dot{x} > 0, \\ x = x_2 + kg / \omega^2, \forall \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Тогда из (П.2) получим уравнение, одинаковое и для x_1 , и для x_2

$$\ddot{x}_{1,2} + \omega^2 x_{1,2} = 0;$$

его решением будет

$$x_{1,2} = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

где A и B - постоянные интегрирования. Начальные условия: $t=0, x=x_0, \dot{x}=0$.

Рассмотрим первый этап движения тела, когда $\dot{x} < 0, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$. В этом случае решение задачи (П.2) запишется, как

$$x = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + kg / \omega^2,$$

или с учетом начальных условий

$$x = (x_0 - kg / \omega^2) \cos \omega t + kg / \omega^2.$$

В конце этапа $t = \pi/\omega, \dot{x} = 0, x_{\pi/\omega} = -x_0 + 2kg/\omega^2$. Это значение $x_{\pi/\omega}$ следует считать начальным для второго этапа.

Второй этап соответствует $\dot{x} > 0, \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$. Так как при $t = \pi/\omega, x = -x_0 + 2kg/\omega^2$, то

$$x = (x_0 - 3kg / \omega^2) \cos \omega t - kg / \omega^2.$$

К концу этого этапа при $t = 2\pi/\omega$ получаем $x_{2\pi/\omega} = x_0 - 4kg/\omega^2$. Для рассмотрения второго периода колебаний надо продолжить рассмотрение по этапам.

Третий этап соответствует $\dot{x} < 0, \frac{2\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{3\pi}{\omega}$ и

$$x = A_3 \cos \omega t + B_3 \sin \omega t + km g / \omega^2.$$

Для $t = 2\pi/\omega, x = x_0 - 4kg/\omega^2, \dot{x} = 0$ имеем:

$$x = (x_0 - 5kg / \omega^2) \cos \omega t + kg / \omega^2.$$

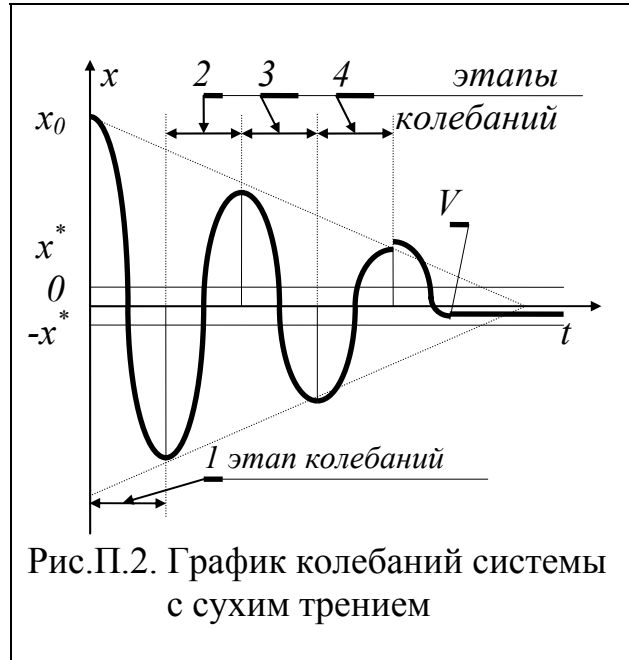
К концу этапа при $t = 3\pi/\omega$ получаем $x_{3\pi/\omega} = -x_0 + 6kg/\omega^2$. Аналогично для следующего этапа при $\dot{x} > 0$ и $3\pi/\omega \leq t \leq 4\pi/\omega$ находим:

$$x = (x_0 - 7kg / \omega^2) \cos \omega t - kg / \omega^2,$$

и в конце этапа $x_{4\pi/\omega} = x_0 - 8kg/\omega^2$.

Вычисления, подобные приведенным, можно продолжать до тех пор, пока при $\dot{x} = 0$ соблюдается неравенство $|x| > kg/\omega^2$, то есть пока система не пришла в зону застоя. При изменении знака неравенства на противоположный движение полностью прекращается, так как сила упругости пружины будет недостаточна для преодоления силы трения.

График колебаний дан на рис.П.2. Он состоит из отрезков синусоид с одинаковым периодом, но различной амплитудой. За каждый период колебаний амплитуда уменьшается на величину $4kg/\omega^2$, то есть по закону арифметической прогрессии, а огибающими графика являются две прямые наклонные линии, имеющие при $t=0$ соответственно ординату x_0 (верхняя прямая) и $-x_0$ (нижняя прямая) и сходящиеся на оси Ot . Две горизонтальные прямые $x = \pm x^*$, где $x^* = kg/\omega^2$, определяют зону застоя: если скорость обращается в нуль в пределах этой зоны, то движение прекращается (точка V на рис.П.2).



Очевидно, что через N целых периодов абсолютная величина отклонения будет равна

$$|x| = x_0 - \frac{4Nkg}{\omega^2}. \quad (\text{П.3})$$

Отсюда следует, что система совершит только конечное число колебаний, определяемое из условия $0 < x_0 - 4Nkg < kg/\omega^2$. Из этого условия вытекает, что N заключено в пределах

$$\frac{x_0\omega^2}{4kg} - \frac{1}{4} < N < \frac{x_0\omega^2}{4kg}. \quad (\text{П.4})$$

Приближенный метод /3/

Рассмотрим свободные колебания при сопротивлении, пропорциональном n -й степени скорости. В этом случае имеем нелинейное дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} + q\dot{x}|\dot{x}|^{n-1} + cx = 0, \quad (\text{П.5})$$

которое при $n=0$ и $q=ktg$ описывает случай кулоновского трения.

В общем случае это уравнение не решается в замкнутой форме. Для его приближенного решения воспользуемся способом энергетического баланса, который позволит найти уравнение огибающей (штриховые линии на рис.П.3). Способ основан на равенстве работы силы сопротивления $-q\dot{x}|\dot{x}|^{n-1}$ (эта работа, очевидно, отрицательна) приращению (тоже отрицательному) энергии системы. Данное равенство

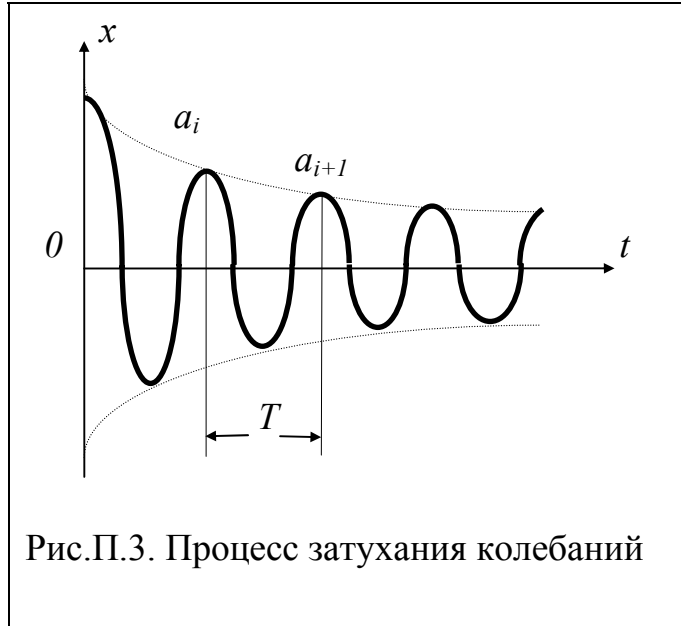


Рис.П.3. Процесс затухания колебаний

записывается для интервала времени T , соответствующего одному колебательному циклу. Естественно, что обе приравняемые величины выражаются приближенно, поскольку для точного их определения необходимо знать закон движения.

Найдем приращение потенциальной энергии за один колебательный цикл (рис.П.3). Потенциальная энергия, соответствующая двум последовательным пиковым значениям a_i и a_{i+1} , равна:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} c a_i^2, \Pi_{i+1} = \frac{1}{2} c a_{i+1}^2.$$

Следовательно, искомое приращение будет:

$$\Delta \Pi_i = \frac{c}{2} (a_{i+1}^2 - a_i^2).$$

Пусть затухание колебаний происходит медленно. Тогда последнее выражение может быть представлено так:

$$\Delta \Pi_i = \frac{c}{2} (a_{i+1} + a_i)(a_{i+1} - a_i) \approx c a_i \Delta a_i, \quad (\text{П.6})$$

где $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$ - приращение пикового значения за рассматриваемый колебательный цикл.

Обозначим через $a = a(t)$ искомое уравнение верхней огибающей (верхняя штриховая линия на рис.П.3); тогда можно приближенно принять, что

$$\Delta a = \frac{da}{dt} T, \quad (\text{П.7})$$

где T - длительность колебательного цикла, которая приближенно равна периоду колебаний той же системы, но при отсутствии силы трения.

Окончательно, опуская индексы, имеем

$$\Delta\Pi = caT \frac{da}{dt}. \quad (\text{П.8})$$

Определим работу, совершаемую силой сопротивления за рассматриваемый цикл колебаний:

$$\Psi = -\int_0^T q \dot{x}^2 |\dot{x}|^{n-1} dt = -q \int_0^T |\dot{x}|^{n+1} dt.$$

Здесь начало отсчета времени совмещено с началом цикла колебаний.

Примем приближенно, что в течение одного цикла движение описывается зависимостью

$$x = a \cos \omega t. \quad (\text{П.9})$$

Тогда $\dot{x} = -a\omega \sin \omega t$ (изменением величины a за данный промежуток времени пренебрегаем), и мы получим

$$\Psi = -qa^{n+1}\omega^{n+1} \int_0^T |\sin \omega t|^{n+1} dt,$$

или же

$$\Psi = -qa^{n+1}\omega^n S, \quad (\text{П.10})$$

где величина

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin \beta|^{n+1} d\beta \quad (\text{П.11})$$

зависит только от показателя степени n :

n	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
S	4,000	3,500	3,142	2,874	2,667	2,498.

Приравняв правые части соотношений (П.8) и (П.10), получим дифференциальное уравнение для верхней огибающей:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{q\omega^{n+1}S}{2\pi c} a^n. \quad (\text{П.12})$$

Данное уравнение - уравнение с разделяющимися переменными, и с учетом начального условия $a(0) = x_0$ его решение запишется:

$$a(t) = x_0 \left(1 + (n-1) \frac{a_0^{n-1} q \omega^{n+1} S}{2\pi c} t \right)^{\frac{1}{n-1}} \text{ при } n \neq 1. \quad (\text{П.13})$$

При $n=1$ необходимо либо раскрыть неопределенность выражения (П.13), либо положить $n=1$ в дифференциальном уравнении (П.12).

Итак, формулой (П.13) и определяется закон затухания свободных колебаний для любых значений $n \neq 1$. В частности, при $n=0$ (кулоновское трение) с учетом того, что в данном случае $q = kmg$, согласно (П.13) уравнение огибающей примет вид прямой линии, **в точности соответствующей** верхней огибающей на графике рис.П.2.

Оглавление

Введение	3
1. О характере сил сопротивления движению бурильной колонны в наклонной скважине	6
2. Математическая модель бурильной колонны в случае проводки искривленной скважины	16
3. Исследование математической модели бурильной колонны	22
4. О методе механического аналога	47
Заключение	54
Библиографический список.....	54
Приложение	55

Научное издание

Евгений Константинович Юнин
Владимир Николаевич Рубановский
Валерий Константинович Хегай

Волновые процессы при наклонно-направленном бурении Монография

Редактор В.П.Кипрова
Технический редактор Л.П.Коровкина

Лицензия серия ЛР № 020827 от 29 сентября 1998 г.
План 2002, позиция 13. Подписано в печать 18.09.2002 г.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл.печ.-л. 3,5. Уч.-изд.л. 3,4.
Тираж 100 экз. Заказ №139.

Ухтинский государственный технический университет.
169300, г. Ухта, ул. Первомайская, 13.
Отдел оперативной полиграфии УГТУ.
Лицензия серия ПД №00578 от 25.05.2000 г.
169300, г. Ухта, ул. Октябрьская, 13.