О.Оре

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980, 336 стр.

Содержание

Предметный указатель

22.174
О-65
УДК 519

Оре О. **Теория графов.**— 2-е изд.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980, 336 с.

Первые пять глав посвящены наглядному материалу и содержат основные понятия и свойства графов. В шестой главе даются основы теории вполне упорядоченных множеств, которая используется в дальнейшем для строго абстрактного рассмотрения бесконечных графов. Особенно подробно, в главе 7, излагается вопрос о паросочетаниях; естественным ее продолжением является глава 12. В главах 8—11 рассматриваются ориентированные графы, и затем на языке ориентированных графов изучаются частично упорядоченные множества. Последние три, очень интересные, главы (13—15) снова имеют дело с более наглядным материалом.

Книга дает достаточно полное представление о направлениях исследований в теории графов; приводятся упражнения и нерешенные задачи; сделана попытка ввести систематическую терминологию. Написана книга ясным и достаточно доступным математическим языком. Она интересна и нужна специалистам-математикам, инженерам, занимающимся прикладными задачами, и студентам старших курсов университетов и технических вузов.

Библ.— свыше 200 назв. Илл. 88.

Ойстин Оре

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

М., 1980 г., 336 стр. с илл.

Редактор *И. М. Овчинникова*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *Н. Б. Румянцева*

ИБ № 11700

Сдано в набор 12.12.79. Подписано к печати 11.06.80. Бумага $84\times108^1/_{32}$, тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 17,64. Уч.-изд. л. 17,18. Тираж 29 000 экз. Заказ № 791. Цена книги 1 р. 50 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»,
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

$О\,\frac{20203-086}{053(02)\text{-}80}$ 48-80 · 1702070000

ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию советского читателя книга О. Оре является второй крупной монографией по теории графов, изданной на русском языке. В 1962 г. вышел перевод книги К. Бержа «Теория графов и ее применения», написанной весьма сжато и абстрактно. Все изложение в ней ведется в сильно алгебраизированной форме. В книге Оре, напротив, графы в большей степени сохраняют свое наглядное, геометрическое содержание, как системы точек, соединенных линиями. Таким образом, обе эти книги хотя и посвящены, в общем, одному кругу вопросов, удачно дополняют друг друга. При этом систематическое изучение теории графов пердпочтительнее начинать именно с книги Оре.

Переводчик и редактор благодарны автору книги, любезно предоставившему в наше распоряжение те исправления, которые он вносит в готовящееся второе издание монографии. Существенную помощь в деле упорядочения русской терминологии теории графов оказали советы А. А. Зыкова. Мы весьма признательны ему за это.

Н. П. Воробьев

Октябрь 1967 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга выросла из курсов лекций по теории графов, которые читались эпизодически в Иельском университете. Первый цикл лекций о бинарных отношениях и графах был прочитан Американскому математическому обществу на летней сессии в Чикаго в 1942 году. В то время рукопись этих лекций не была подготовлена к печати из-за более срочной работы, и соответствующая книга издается теперь к коллоквиум-серии Общества.

Начало теории графов как математической дисциплине было положено Эйлером в его знаменитом рассуждении о Кёнигсбергских мостах. Однако эта статья Эйлера 1736 года была единственной в течение почти ста лет. Интерес к проблемам теории графов возродился около середины прошлого столетия и был сосредоточен главным образом в Англии. Имелось много причин для такого оживления изучения графов. Естественные науки оказали свое влияние на это благодаря исследованиям электрических сетей, моделей кристаллов и структур молекул. Развитие формальной логики привело к изучению бинарных отношений в форме графов. Большое число популярных головоломок поддавалось формулировкам непосредственно в терминах графов, и это приводило к пониманию, что многие задачи такого рода содержат некоторое математическое ядро, важность которого выходит за рамки конкретного вопроса. Наиболее знаменитая среди этих задач — проблема четырех красок, впервые поставленная перед математиками Де Морганом около 1850 года. Никакая другая проблема не вызывала столь многочисленных и остроумных работ в области теории графов. Благодаря своей простой формулировке и раздражающей неуловимости она до сих пор остается мощным стимулом исследований различных свойств графов.

Настоящее столетие было свидетелем неуклонного развития теории графов, которая за последние десять — двадцать лет вступила в новый период интенсивных разработок. В этом процессе явно заметно влияние запросов новых областей приложений: теории игр и программирования, теории передачи сообщений, электрических сетей и контактных цепей, а также проблем биологии и психологии.

Вследствие этого развития предмет теории графов является уже столь обширным, что все его основные направления невозможно изложить в одном томе. В настоящем первом томе предполагаемого двухтомного труда сделан акцент на основные понятия и на результаты, вызывающие особый систематический интерес.

По теории графов имеется очень мало книг; основной была книга Д. Кёнига (1936), которая для своего времени давала превосходнейшее введение в предмет. Довольно странно, что таких книг на английском языке до сих пор не было, несмотря на то, что многие важнейшие результаты были получены американскими и английскими авторами. В настоящей книге сделана попытка изложить содержание теории графов возможно более просто. Почти все доказательства пересмотрены; включено также значительное число новых результатов. Вводится систематическая терминология, и хочется надеяться, что она окажется удобной.

Для читателя приведено значительное число задач. Многие из них совсем просты; другие носят характер предлагаемых для исследования проблем, они отмечены звездочками.

Второй том будет посвящен более частным вопросам: плоским графам, гипотезе четырех красок, теории потоков, играм, электрическим сетям, а также приложениям к ряду других областей, в которых теория графов является основным инструментом

Ойстин Оре

Иельский университет
Апрель 1960

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Определения. Предметом первых задач в теории графов были конфигурации, состоящие из точек и соединяющих их линий. В этих рассмотрениях было несущественно, прямые ли это линии или же они являются криволинейными непрерывными дугами, соединяющими две концевые точки, где расположены эти линии, являются ли они длинными или короткими. Существенно только то, что они соединяют две данные точки.

Это приводит к определению графа как абстрактного математического понятия. Рассматривается множество V, состоящее из соединенных некоторым образом точек. Назовем V *множеством вершин* и элементы $v \in V$ — *вершинами*. Граф

$$G = G(V) \tag{1.1.1}$$

с множеством вершин V есть некоторое семейство сочетаний или пар вида

$$E = (a,\ b), \quad a,\ b \in V, \tag{1.1.2}$$

указывающее, какие вершины считаются соединенными. В соответствии с геометрическим представлением графа каждая конкретная пара (1.1.2) называется *ребром* графа; вершины a и b называются *концевыми точками* или *концами* ребра E [1]).

Можно использовать и другой подход. Если даны два множества V_1 и V_2, то можно образовать множество всех пар

$$(v_1,\ v_2), \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2.$$

Это множество пар называется *произведением* [2]) и обозначается через $V_1 \times V_2$. В нашем случае каждая пара

[1]) Они называются также *граничными* точками ребра. (*Прим. перев.*)

[2]) Иногда для большей ясности это произведение называется *прямым* или *декартовым*. (*Прим. ред.*)

вершин (a, b) есть элемент произведения $V \times V$. Таким образом, можно сказать, что граф G из (1.1.1) с данными ребрами (1.1.2) есть некоторое подмножество произведения $V \times V$.

Это определение графа должно быть дополнено в одном важном отношении. В определении ребра (1.1.2) можно принимать или не принимать во внимание порядок расположения двух его концов. Если этот порядок несуществен, т. е. если

$$E = (a, b) = (b, a),$$

то говорят, что E есть *неориентированное* ребро; если же этот порядок существен, то E называется *ориентированным* ребром[1]). В последнем случае a называется также *начальной вершиной*, а b — *конечной вершиной* ребра E[2]). Можно также говорить, что E есть ребро, *выходящее* из вершины a (*отходящее* от вершины a, *исходящее* из вершины a) и *входящее* в вершину b (*подходящее* к вершине b, *заходящее* в вершину b). Как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра говорят, что ребро E из (1.1.2) *инцидентно* вершинам a и b, а также что a и b *инцидентны* E.

В приложениях граф обычно интерпретируется как *сеть*, в которой вершинами G являются *узлы*. Два узла a и b соединяются непрерывной кривой (в частности, прямолинейным отрезком) тогда и только тогда, когда имеется пара (1.1.2). На рисунках узлы будут обычно обозначаться маленькими кружками, а ориентация ребра, если нужно,— стрелкой на представляющей ребро кривой (рис. 1.1.1).

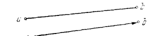


Рис. 1.1.1.

Граф называется *неориентированным*, если каждое его ребро не ориентировано, и *ориентированным*, если ориентированы все его ребра. На рис. 1.1.2 приведены примеры неориентированных графов. На рис. 1.1.3 изображены ориентированные графы.

[1]) Ориентированное ребро часто называется *дугой*. (*Прим. перев.*)

[2]) Для неориентированного ребра каждую из двух его вершин можно называть как начальной, так и конечной. (*Прим. перев.*)

В ряде случаев естественно рассматривать *смешанные графы,* имеющие как ориентированные, так и неориентированные ребра. Например, план города можно рассматривать как граф, в котором ребра представляют улицы, а вершины — перекрестки; при этом по одним улицам может допускаться лишь одностороннее движение, и тогда

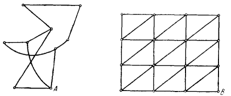


Рис. 1.1.2.

на соответствующих ребрах вводится ориентация; по другим улицам движение двустороннее, и на соответствующих ребрах уже никакой ориентации не вводится.

Мы уже отмечали, что при фактическом изображении графа имеется большая свобода в размещении вершин и в выборе формы соединяющих их дуг. Поэтому

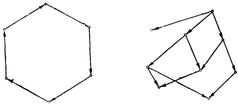


Рис. 1.1.3.

может оказаться, что один и тот же граф представляется совсем различными чертежами. Будем говорить, что два графа G и G' *изоморфны,* если существует такое взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин V и V', что вершины соединены ребрами в одном из графов в том и только в том случае, когда соответствующие им вершины соединены в другом графе. Если ребра ориентированы, то их направления также должны соответствовать друг другу. Для нас в дальнейшем всюду будет несущественно, какое именно изображение графа используется, так как все изоморфные графы имеют одни и те же свойства. На рис. 1.2.1 приведены примеры изоморфных графов, образованных ребрами и вершинами правильных многогранников.

Вершина, не инцидентная никакому ребру, называется *изолированной*. При определении множества вершин V данного графа часто имеет смысл учитывать только неизолированные вершины. Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется *нуль-графом* и может быть обозначен через 0. Другим важным случаем является (неориентированный) *полный граф*

$$U = U(V), \tag{1.1.3}$$

ребрами которого являются всевозможные пары (1.1.2) для двух различных вершин a и b из V. На рис. 1.1.4 даны схемы полных графов для множеств вершин из четырех и из пяти элементов.

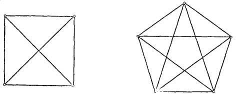


Рис. 1.1.4.

В *ориентированном полном графе* $U^{(d)}$ имеются пары ребер, по одному в каждом направлении, соединяющие любые две различные вершины a и b.

Сформулированное выше определение графа, вместе с соответствующим изображением, достаточно для многих задач. Однако для некоторых целей желательно понятие графа несколько расширить.

Во-первых, можно допускать ребра, у которых обе концевые точки совпадают:

$$L = (a, a). \tag{1.1.4}$$

Такое ребро (1.1.4) будет называться *петлей*. При изображении графа петля будет представляться замкнутой дугой, возвращающейся в вершину a и не проходящей через другие вершины (рис. 1.1.5). Петля обычно считается неориентированной. Можно расширить полный граф U в (1.1.3) до *полного графа с петлями* U_0, добавляя петлю в каждой вершине, так что ребрами U_0 являются все пары (1.1.2), где допускается и $a = b$.

Рис. 1.1.5.

Во-вторых, можно расширить понятие графа, допуская, чтобы пара вершин соединялась несколькими различными ребрами

$$E_i = (a, b)_i, \tag{1.1.5}$$

как это изображено на рис. 1.1.6. Для ориентированного графа две вершины a и b могут соединяться несколькими ребрами в каждом из направлений:

$$E_i = (a, b)_i, \quad E_j' = (a, b)_j$$

(рис. 1.1.7).

Чтобы проиллюстрировать случай, для которого эти понятия оказываются естественными, рассмотрим какое-либо командное соревнование, например турнирную

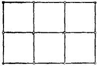
Рис. 1.1.6.

Рис. 1.1.7.

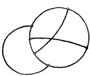
таблицу лиги бейсбола. Вершинами соответствующего графа являются команды. Пара команд A и B связывается ребром каждый раз, когда они сыграли. Если A выиграла у B, то это ребро будем ориентировать от A к B, а если B выиграла у A, то в противоположном направлении; в случае ничьей ребро будет неориентированным.

Для каждого графа G существует *обратный* граф G^*, получаемый изменением ориентации каждого из ребер G на противоположную. Для каждого ориентированного графа существует также *соотнесенный неориентирован-*

ный граф G_u, ребрами которого являются ребра G, но уже без ориентаций. Иногда удобно превратить неориентированный граф G в ориентированный граф G_d при помощи процесса *удвоения*, состоящего в замене каждого ребра G парой ребер с теми же концами и приписывании им противоположных ориентаций [1]).



а)



б)

Рис. 1.1.8.

Граф называется *плоским*, если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются вершинами G. Граф на рис. 1.1.8, *а* плоский, а на рис. 1.1.8, *б* неплоский.

Задачи

1. Показать, что два графа на рис. 1.1.9 изоморфны.
2. «Три дома и три колодца». Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

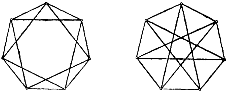


Рис. 1.1.9.

1.2. Локальные степени. Граф называется *конечным*, если число его ребер конечно, и *бесконечным* — в про-

[1]) См. примечание [2]) на стр. 12. (*Прим. перев*).

тивном случае. При таком определении конечный граф может иметь бесконечное число вершин, но все они, кроме конечного числа, изолированные. Однако обычно в конечном графе число вершин также конечно.

Пусть G — неориентированный граф. Число ребер, инцидентных одной вершине a, будем обозначать через

$$\rho(a). \tag{1.2.1}$$

Это число называется *локальной степенью* или просто *степенью* графа в вершине a. Если все числа $\rho(a)$ конечны, то граф называется *локально конечным*. При подсчете ребер, инцидентных вершине a, некоторую неопределенность вносят петли, так как их можно считать и как единственное, и как двойное ребро. В зависимости от рассматриваемой задачи может оказаться более удобным как тот, так и другой способ подсчета. Таким образом, в каждом случае должно быть указано, считается петля *однократной* или *двойной*.

Выведем несколько простых формул для локальных степеней. Число ребер в G, соединяющих вершины a и b, обозначим через

$$\rho(a, b) = \rho(b, a). \tag{1.2.2}$$

Если в G нет кратных ребер, то для *кратностей* (1.2.2) имеются только две возможности:

$$\rho(a, b) = 0, \quad \rho(a, b) = 1.$$

Очевидно, каждая локальная степень (1.2.1) есть сумма кратностей в a:

$$\rho(a) = \sum_{b \in V} \rho(a, b). \tag{1.2.3}$$

Число ребер в G обозначим через

$$\nu_e = \nu_e(G). \tag{1.2.4}$$

Так как каждое ребро учитывается в двух локальных степенях, в a и в b, мы имеем

$$2\nu_e = \sum_{a \in V} \rho(a), \tag{1.2.5}$$

или, на основании (1.2.3),

$$2\nu_e = \sum \rho(a, b). \tag{1.2.6}$$

Ясно, что формула (1.2.5) остается справедливой также и при наличии петель, если только в локальных степенях (1.2.1) их считать дважды. Формула (1.2.5) показывает, что стоящая справа сумма всегда четна; следовательно, выражая это обычным теоретико-числовым способом как сравнение, можно написать

$$\sum_{a\in V} \rho(a) \equiv 0 \pmod 2. \qquad (1.2.7)$$

Сумма слева в (1.2.7) остается четной, если опустить все вершины a с четными локальными степенями $\rho(a)$. Отсюда следует

Теорема 1.2.1. *В конечном графе число вершин нечетной степени четно.*

Граф называется *однородным*[1]) *степени* n, если локальные степени во всех его вершинах равны n:

$$\rho(a) = n, \ a \in V. \qquad (1.2.8)$$

Примерами однородных графов являются графы, составляемые ребрами и вершинами пяти *правильных многогранников*, или *платоновых тел*: тетраэдра куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра (рис. 1.2.1).

На рис. 1.2.2 приведены примеры двух бесконечных однородных графов.

Из формулы (1.2.5) следует, что в однородном графе степени n число ребер равно

$$\nu_e = \frac{1}{2}\nu_v n, \qquad (1.2.9)$$

где ν_v — число вершин G. Если n нечетно, то ν_v должно быть четным.

Мы предполагали, что граф G неориентированный. Рассмотрим теперь случай ориентированного графа G. Обозначим через

$$\rho(a), \quad \rho^*(a) \qquad (1.2.10)$$

числа ребер, соответственно выходящих из вершины a и входящих в a. Эти числа (1.2.10) называются *локальными степенями* G в a. Условимся считать возможные петли в a по одному разу в каждой из этих локальных степеней.

---

[1]) В оригинале — regular. (*Прим. перев.*)

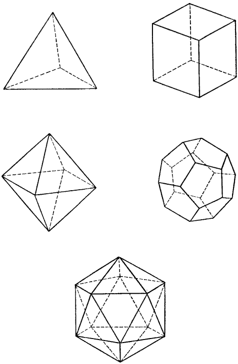


Рис. 1.2.1а.

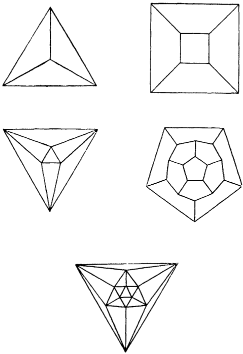


Рис. 1.2.15.

Аналогично кратностям (1.2.2) мы теперь получаем две *кратности*

$$\rho(a,\ b), \quad \rho^*(a,\ b), \tag{1.2.11}$$

означающие числа ребер, направленных от a к b и соответственно от b к a. Из этого определения следует, что

$$\rho(a,\ b) = \rho^*(b,\ a). \tag{1.2.12}$$

Числа выходящих и входящих ребер для вершины a выражаются, таким образом, суммами

$$\rho(a) = \sum_{b \in V} \rho(a,\ b), \quad \rho^*(a) = \sum_{b \in V} \rho^*(a,\ b). \tag{1.2.13}$$

Для числа ребер в G воспользуемся тем же обозначением (1.2.4). Определение локальных степеней (1.2.10)

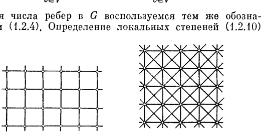


Рис. 1.2.2.

дает тогда для числа ребер два выражения:

$$\nu_e = \sum_{a \in V} \rho(a) = \sum_{a \in V} \rho^*(a). \tag{1.2.14}$$

Согласно (1.2.13) их можно представить в виде

$$\nu_e = \sum_{a,\,b \in V} \rho(a,\ b) = \sum_{a,\,b \in V} \rho^*(a,\ b). \tag{1.2.15}$$

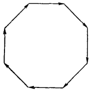
Ориентированный граф называется *однородным степени* n, если все локальные степени (1.2.10) имеют одно и то же значение

$$\rho(a) = \rho^*(a) = n, \quad a \in V, \tag{1.2.16}$$

для любой вершины a. Выражение (1.2.14) для полного числа ребер будет иметь вид

$$\nu_e = n\nu_v, \tag{1.2.17}$$

где, как и выше, ν_v — число вершин в V. На рис. 1.2.3 приведены примеры однородных ориентированных графов степеней 1 и 2.



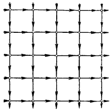


Рис. 1.2.3.

Пусть в ориентированном или неориентированном графе G дано некоторое подмножество A множества всех вершин V. Множество конечных вершин всех ребер, начальные вершины которых принадлежат A, назовем *G-множеством* для A и обозначим через $G[A]$ [1]). В частности, $G[a]$ есть множество конечных вершин выходящих из a ребер. Очевидно, $a \in G[a]$ тогда и только тогда, когда в a есть петля. *Обратное G-множество* $G^*[A]$ состоит из всех вершин, из которых выходит ребро с конечной вершиной в A.

Задачи

1. Найти степени и числа вершин для графов пяти правильных многогранников.
2. Обобщить однородные графы на рис. 1.2.2 на трехмерное и n-мерное пространства и найти степени этих графов.

1.3. Части и подграфы. Граф H называется *частью* графа G, $H \subset G$, если его множество вершин $V(H)$ содержится в множестве вершин $V(G)$ графа G, и все ребра H являются ребрами G [2]). Нуль-граф считается частью каждого графа. Любое единственное ребро графа

[1]) $G[A]$ можно называть *множеством соседства* (см. стр. 48). (*Прим. перев.*)

[2]) В том случае, когда $V(H) = V(G)$, граф H называется *суграфом*. (*Прим. перев.*)

есть его часть. Вообще, все части H графа G можно получить, выбирая в качестве множества ребер H все возможные семейства $\{E\}$ ребер из G. Таким образом, H будет ориентированным или неориентированным в зависимости от того, каким является G.

Особенно важный тип частей составляют *подграфы*. Пусть A есть подмножество множества вершин V графа G. Подграф $G(A)$ графа G, определяемый множеством A, есть такая часть графа, множеством вершин которой является A, а ребрами — все ребра из G, оба конца которых лежат в A. Если $A = V$, то подграф $G(A)$ совпадает с G. Для единственной вершины $A = a$ подграф $G(a)$ состоит из петель в a.

Звездный граф, определяемый вершиной a, состоит из всех ребер G, имеющих a концевой точкой. Петли в a могут как включаться, так и не включаться в звезду.

Для любой части H графа G существует единственная *дополнительная часть* (*дополнение*) $\overline{H}$, состоящая из всех ребер графа G, которые не принадлежат H. Этот факт выражается равенством

$$\overline{H} = G - H. \tag{1.3.1}$$

Будем говорить, что часть H является *покрывающим суграфом* графа G (или *покрывает вершины* графа G), если любая вершина графа G является концом по крайней мере одного ребра из H.

Далее, пусть H_1 и H_2 — две части G. *Сумма* этих частей

$$H = H_1 \cup H_2 \tag{1.3.2}$$

есть часть, состоящая из всех ребер, которые принадлежат или H_1, или H_2, или им обоим. Аналогично их *пересечение*

$$D = H_1 \cap H_2 \tag{1.3.3}$$

состоит из всех ребер, принадлежащих H_1 и H_2 одновременно. Эти понятия суммы и пересечения частей можно распространить на произвольные их семейства $\{H_\alpha\}$: сумма

$$H = \bigcup_{\alpha} H_\alpha \tag{1.3.4}$$

состоит из всех ребер G, принадлежащих хотя бы одной из частей H_α; пересечение

$$D = \bigcap_\alpha H_\alpha \tag{1.3.5}$$

состоит из всех ребер, принадлежащих всем частям H_α одновременно.

Две части H_1 и H_2 *не пересекаются* (*по вершинам*), если они не имеют общих вершин, а следовательно, и общих ребер. Если H_1 и H_2 — непересекающиеся, то их сумма (1.3.2) называется *прямой*; аналогично сумма (1.3.4) называется прямой, если каждое слагаемое H_α не имеет общих вершин с остальными.

Части H_1 и H_2 *не пересекаются по ребрам*, если они не имеют общих ребер. В этом случае сумма (1.3.2) называется *прямой по ребрам*; аналогично (1.3.4) есть прямая по ребрам сумма, если любая пара частей H_α и H_β — непересекающаяся по ребрам. В качестве примера отметим, что для части H с дополнением $\overline{H}$, выражаемым равенством (1.3.1), имеет место прямая по ребрам сумма

$$G = H \cup \overline{H}.$$

В ранних применениях теории графов к теории алгебраических инвариантов граф описывали посредством соотнесения каждой вершине a переменной x_a, причем ребру (a, b) соотносили разность

$$x_a - x_b.$$

Это приводило к представлению (неориентированного) графа G в виде формального произведения

$$P(G) = \prod_{a, b \in V} (x_a - x_b).$$

В этих условиях каждая часть H графа G должна соответствовать некоторому определенному делителю $P(H)$ этого произведения; поэтому часть иногда называется *фактором*.

Задачи

1. Найти число частей конечного графа с ν_e ребрами.
2. Найти число частей с данным числом ребер.
3. Каково число ребер в полном графе U_0 или U для множества вершин с ν_v элементами?

1.4. Бинарные отношения. *Бинарное отношение* R определяется как соотношение

$$aRb, \qquad (1.4.1)$$

которое выполняется для некоторых пар элементов заданного множества V. В соответствии со сказанным выше, бинарное отношение может быть представлено в виде графа с множеством вершин V:

$$G(R) = G(V), \qquad (1.4.2)$$

так что (ориентированное) ребро (a, b) принадлежит G тогда и только тогда, когда в R выполняется соотношение (1.4.1). Обратно, любой граф определяет бинарное отношение R на своем множестве вершин, если положить aRb для каждого его ребра (1.1.2). Имеется, однако, небольшое различие между этими двумя понятиями. Приписывать отношению кратность обычно нет надобности. Поэтому можно говорить о взаимно однозначном соответствии между бинарными отношениями на множестве V, с одной стороны, и графами с однократными ребрами на множестве вершин V — с другой.

Остановимся коротко на некоторых связях между бинарными отношениями и графами. Нуль-граф 0 отвечает *нулевому отношению*

$$a0b,$$

которое не выполняется ни для какой пары элементов. Полный граф U отвечает *универсальному отношению*

$$aUb,$$

которое выполняется для любой пары элементов. Каждое отношение R имеет *дополнительное отношение*, или *отрицание*, $\overline{R}$, так что

$$a\overline{R}b$$

тогда и только тогда, когда (1.4.1) *не* выполняется. Например, для отношения $a = b$, т. е. *a одинаково* с *b*, дополнительное отношение есть $a \neq b$, т. е. *a отлично* от *b*. Граф $G(\overline{R})$ *является дополнительным графом* для $G(R)$, т. е. дополнением

$$G(\overline{R}) = U(V) - G(R)$$

по отношению к полному графу U, определенному на V.

Для любого отношения R существует *обратное отношение* R^*, так что

$$bR^*a \tag{1.4.3}$$

тогда и только тогда, когда выполняется (1.4.1). Граф $G(R^*)$ есть, очевидно, обратный граф для $G(R)$. Отношение $R=R^*$, которое является само себе обратным, т. е. из aRb следует bRa и наоборот, называется *симметрическим*. В этом случае вершины a и b должны быть соединены ориентированным ребром в каждом направлении, но проще заменить их одним неориентированным ребром. Таким образом, неориентированные графы отвечают симметрическим отношениям.

Говорят, что из отношения R *следует* отношение R', или что R' *содержит* R, $R'\supset R$, если из aRb всегда вытекает $aR'b$. Очевидно, для соответствующих графов

$$G(R')\supset G(R).$$

Для любых двух отношений R_1 и R_2 *пересечение*

$$R_1\cap R_2$$

есть отношение

$$a(R_1\cap R_2)b,$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда одновременно

$$aR_1b,\quad aR_2b. \tag{1.4.4}$$

Сумма есть отношение

$$R_1\cup R_2,$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из соотношений (1.4.4). Таким образом, для соответствующих графов мы имеем

$$G(R_1\cap R_2)=G(R_1)\cap G(R_2),$$
$$G(R_1\cup R_2)=G(R_1)\cup G(R_2).$$

До сих пор мы рассматривали отношения между элементами одного множества. Можно также вводить отношения

$$aRa',\ a\in V,\quad a'\in V'$$

между элементами двух различных множеств V и V', В качестве иллюстрации можно взять отображение τ элементов из V на элементы из V'; здесь соотношение $a\tau a'$ выполняется тогда и только тогда, когда $a' = \tau(a)$ есть образ a при отображении τ. Другой важный пример мы получим, взяв в качестве V некоторое множество, а в качестве V' — семейство всех подмножеств A множества V; здесь отношение $a \in A$ означает, что a есть элемент A. В графах для таких отношений, связывающих одно множество с другим, все ребра будут соединять V с V'. Такого рода графы называются *двудольными*.

Кроме симметрии часто приходится иметь дело и с другими свойствами отношений. Отношение R называется *рефлексивным*, если aRa для любого $a \in V$. Соответствующий граф имеет петлю в каждой вершине. Обратное отношение также будет рефлексивным. Отношение *антирефлексивно*, если aRa никогда не выполняется, т. е. граф не имеет петель. Отношение $a \neq b$ антирефлексивно; другим примером может служить свойство ортогональности для двух векторов.

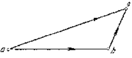


Рис. 1.4.1.

Отношение R *транзитивно*, если из aRb и bRc следует aRc. Для графа это означает, что если $G(R)$ содержит ребра (a, b) и (b, c), то он также содержит и замыкающее ребро (a, c) (рис. 1.4.1).

В дальнейшем будет проведено более детальное изучение бинарных отношений с точки зрения теории графов. Однако имеется два вида отношений, настолько важных и общеупотребительных в математике, что имеет смысл ввести их уже здесь.

Отношения эквивалентности. Отношение R, определенное на множестве V, называется *отношением эквивалентности*, если оно:

1) рефлексивно, 2) симметрично, 3) транзитивно.

Все элементы из V, эквивалентные данному элементу a, образуют множество $R(a)$, которое называется *классом эквивалентности* элемента a. Из рефлексивности R следует, что $a \in R(a)$. Если aRb и bRx, то из транзитивности следует aRx, так что $R(a) \supset R(b)$. Поэтому из симметричности отношения мы получаем, что $R(a) = R(b)$ при aRb.

Наконец, два различных класса эквивалентности $R(a)$ и $R(c)$ не могут иметь какого-либо общего элемента b, так как иначе было бы

$$R(a) = R(b) = R(c).$$

Таким образом, классы эквивалентности образуют *разбиение* V, т. е. разложение V на непересекающиеся подмножества. Класс эквивалентности $R(a) = a$, состоящий из единственного элемента, называется *особым*, в противном случае — *неособым*.

Предположим теперь, что, наоборот, задано разбиение

$$V = \bigcup B_k \tag{1.4.5}$$

множества V на непересекающиеся подмножества B_k. Тогда можно определить отношение эквивалентности с этими классами B_k, полагая aRb тогда и только тогда, когда a и b принадлежат одному множеству B_k. В соответствующем графе $G(R)$ любые две вершины из одного множества B_k будут соединены ребром, и никакое ребро не соединяет вершины из различных множеств. Следовательно,

$$G(R) = \bigcup U_0(B_k) \tag{1.4.6}$$

является прямой суммой полных графов, определенных на различных множествах B_k.

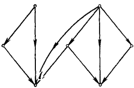


Рис. 1.4.2.

Частичное упорядочение. Отношение

$$a \geqslant b \tag{1.4.7}$$

называется ***частичным упорядочением*** или ***отношением включения***, если оно обладает следующими свойствами:

1. $a \geqslant a$ [1]).
2. Из $a \geqslant b$ и $b \geqslant a$ следует $a = b$ [2]).
3. Транзитивность.

Соответствующий граф транзитивен, имеет петли, и любые две вершины в нем соединены не более чем од-

---

[1]) Рефлексивность. (*Прим. перев.*)
[2]) Антисимметричность (*Прим. перев.*)

ним ребром. Граф на рис. 1.4.2 дает пример частичного упорядочения.

Частично упорядоченное множество есть множество, в котором определено частичное упорядочение.

Отношение включения (1.4.7) называется *отношением упорядочения*, а соответствующее множество V — *упорядоченным*, если помимо перечисленных выполняется также условие:

4. Для любой пары элементов a, $b \in V$ справедливо одно из соотношений $a \geqslant b$, $b \geqslant a$.

На рис. 1.4.3 изображен граф некоторого упорядоченного множества.

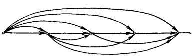


Рис. 1.4.3.

Для семейства подмножеств $\{A\}$ множества V имеет место отношение *включения множеств* $A \geqslant B$, которое означает, что A содержит все элементы множества B. Очевидно, это отношение является частичным упорядочением. С другой стороны, можно показать, что каждое частичное упрядочение P изоморфно такому включению множеств. Для этого каждому элементу a из P соотнесем множество $P(a)$ всех таких элементов x, что $a \geqslant x$. Из аксиом частичного упорядочения следует, что $P(a) = P(b)$ только для $a = b$. Далее, если $a \geqslant b$, то по транзитивности $P(a) \geqslant P(b)$; обратно, очевидно, что из последнего соотношения следует $a \geqslant b$.

В связи с частичным упорядочением заметим, что наряду с ним используется также и несколько другое понятие.

Строгое частичное упорядочение. Отношение $a > b$ называется *строгим частичным упорядочением* или *строгим включением*, если оно удовлетворяет двум условиям:

1. $a > b$ и $b > a$ одновременно не имеют места.
2. Транзитивность.

Легко видеть, что строгое частичное упорядочение можно рассматривать как пересечение частичного упорядочения и отношения $a \neq b$. Таким образом, мы получаем граф строгого частичного упорядочения, удаляя из графа частичного упорядочения все петли. Вместо выражения «строгое включение» иногда используется выражение *собственное включение*.

Отметим, наконец, что свойство быть частичным упорядочением, равно как и свойство быть строгим частичным упорядочением, сохраняется при переходе к обратному отношению.

Задачи

1. Пусть V — множество положительных целых чисел, и отношение $a|b$ означает, что a есть делитель b. Показать, что это отношение является частичным упорядочением.
2. Начертить граф для отношения $a|b$ для множества целых чисел от 1 до 20.
3. Начертить двудольный граф для отношения $a \in A$, где A пробегает все подмножества множества V из 3 или 4 элементов.

1.5. Матрицы смежности и инцидентности. В п. 1.1 мы определили ребро E (1.1.2) графа G (1.1.1) как элемент или точку (a, b) в произведении $V \times V$. Как обычно, элементы этого произведения можно представить в виде клеток квадратной таблицы M с элементами множества V в качестве координат по двум осям (рис. 1.5.1).

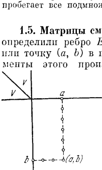


Рис. 1.5.1.

В точку с координатами (a, b) поместим числа 1 или 0 в зависимости от того, существует или не существует в G соответствующее ребро. Таким образом, мы получим конечную или бесконечную *матрицу смежности* (*вершин*) $M(G)$ [1]), которая полностью описывает G, если граф имеет однократные ребра. Обычно обозначения выбираются так, чтобы элементы (a, a), соответствующие петлям, располагались на главной диагонали матрицы M. Если G — неориентированный граф, то ребра (a, b) и (b, a) существуют одновременно, таким образом, неориентированным графам соответствуют симметрические матрицы смежности.

---

[1]) В оригинале — (vertex) incidence matrix. (*Прим. перев.*)

Если G имеет кратные ребра, то числа 0 или 1 в клетках (a, b) можно заменить кратностями $\rho(a, b)$ ребер, соединяющих a и b (см. п. 1.2). Это дает описание графа G матрицей с целыми неотрицательными элементами. Обратно, любая такая матрица может быть интерпретирована как граф, так что любые результаты для графов могут быть сформулированы как свойства таких матриц.

Сказанное приводит к дальнейшему расширению понятия графа, использующему уже все конечные или бесконечные матрицы, элементами которых являются вещественные неотрицательные числа. Такие матрицы встречаются в различных областях математики. Например, стохастические матрицы — в теории вероятностей и в теоретической физике, где рассматриваемая система имеет некоторое множество V возможных состояний, и любая пара состояний (a, b) связывается некоторой вероятностью перехода $\rho(a, b)$. Другим примером является граф, представляющий схему дорог, в котором $\rho(a, b)$ означает соответствующее расстояние между a и b. Мы еще встретимся с рядом других примеров такого рода, где с каждым ребром связывается некоторая мера, или *мощность*[1] $\rho(a, b) \geq 0$.

Графы могут быть также описаны матрицами другого вида. Всякий граф состоит из объектов двух типов — вершин и ребер. Можно построить матрицу $M_1(G)$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы — ребрам. На месте (a, E) в этой матрице поместим значение $\varepsilon = 1$, если a — начальная вершина ребра E, значение $\varepsilon = -1$, если a — конечная вершина, и $\varepsilon = 0$, если a не инцидентно E. Если G — неориентированный граф, то можно использовать только значения $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 0$. Эта матрица $M_1(G)$ называется *матрицей инцидентности* графа G[2].

Введем, наконец, *матрицу смежности ребер* $I(G)$[3], в которой и строки, и столбцы отвечают ребрам G. Для простоты предположим, что G не имеет петель, а ребра неориентированные и однократные. На месте (E, E') в $I(G)$ поместим $\varepsilon = 1$, если E и E' — различные ребра с общим концом, и $\varepsilon = 0$, если $E = E'$ или если они не

[1] Во многих конкретных случаях $\rho(a, b)$ называется *пропускной способностью ребра*, идущего от a к b. (*Прим. ред.*)

[2] В оригинале — vertex-edge incidence matrix. (*Прим. перев.*)

[3] В оригинале — edge incidence matrix. (*Прим. перев.*)

имеют общего конца. Таким образом, $I(G)$ — квадратная матрица, определяемая графом G.

Можно встать на другую точку зрения и рассматривать $I(G)$ как матрицу смежности вершин для нового графа, также обозначаемого через $I(G)$, вершинами которого являются ребра E графа G, а ребрами — пары (E, E') с $\varepsilon = 1$. Назовем $I(G)$ *графом смежности ребер* или *смежностным графом* для G. Существование такого графа, в котором бывшие ребра становятся вершинами и наоборот, объясняет двойственность между вершинами и ребрами, встречающуюся в некоторых вопросах теории графов.

Фактическое построение смежностного графа $I(G)$ по чертежу графа G просто. На каждом ребре E выбираем фиксированную точку e_E, например середину E. Пару таких вершин (e, e') соединяем новым ребром, принадлежащим $I(G)$, тогда и только тогда, когда соответствующие ребра E и E' имеют общую вершину в G. Рис. 1.5.2 дает это построение для графа тетраэдра; смежностным графом для него является граф октаэдра.

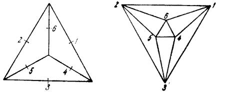


Рис. 1.5.2.

Предположим, что в вершине e сходится $\rho(e)$ ребер $E = (e, e')$ из G. Тогда в $I(G)$ середина e_E ребра E соединяется ребрами с $\rho(e) - 1$ серединами остальных ребер из G, имеющих конец в e. Таким образом, в $I(G)$ эти новые ребра образуют полный граф $U(e)$ с $\rho(e)$ вершинами. В $I(G)$ вершина e_E соединяется ребрами также с $\rho(e') - 1$ серединами остальных ребер из G, имеющих конец в e', и эти новые ребра образуют другой полный граф $U(e')$. Два графа $U(e)$ и $U(e')$ имеют ровно одну общую вершину, именно вершину e_E, определяемую единственным ребром E, соединяющим e и e'. Таким образом, $I(G)$ имеет такое непересекающееся по ребрам разложение

$$I(G) = \bigcup_{e \in V} U(e) \tag{1.5.1}$$

на полные графы $U(e)$ с $\rho(e)$ вершинами, что $U(e)$ имеет единственную общую вершину с каждым из $\rho(e)$ других полных графов $U(e')$. Исключение составляет случай, когда (e', e) — единственное ребро в e', т. е. $\rho(e') = 1$. Тогда не существует графа $U(e')$.

Предположим, что, наоборот, для графа G_1 существует такое разложение (1.5.1) на полные графы, что пара $(U(e), U(e'))$ имеет не более одной общей вершины[1]. Тогда G_1 можно рассматривать как смежностный граф $G_1 = I(G)$ некоторого графа G, считая, что каждое $U(e)$ имеет $\rho_1 \leqslant \rho(e)$ общих вершин с другими $U(e')$. Каждому $U(e)$ поставим в соответствие одну вершину e и соединим e и e' ребром в G тогда и только тогда, когда $U(e)$ и $U(e')$ имеют общую вершину. К этим ребрам добавим $\rho(e) - \rho_1$ ребер (e, e''), идущих к новым вершинам e'', в которых существует только одно это ребро. В п. 15.4 будет решен вопрос о том, когда граф однозначно определяется своим смежностным графом.

Задачи

1. Построить матрицы смежности и инцидентности для правильных многогранников.
2. Найти их смежностные графы.
3. Определить локальные степени и число ребер в конечном смежностном графе.
4. Может ли звездный граф быть смежностным графом другого графа?
5*. Определить все графы, изоморфные своему смежностному графу.
6*. Однозначно ли определяется граф G своим смежностным графом $I(G)$?
7*. Исследовать графы, получаемые повторным применением операции перехода к смежностному графу.

[1] Кроме того, вершина может быть общей не более чем для двух $U(e)$. (*Прим. перев.*)

Глава 2

СВЯЗНОСТЬ

2.1. Маршруты, цепи и простые цепи [1]). Пусть G — неориентированный граф. *Маршрутом* в G называется такая конечная или бесконечная последовательность ребер

$$S = (\ldots, E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots), \qquad (2.1.1)$$

что каждые два соседних ребра E_{i-1} и E_i имеют общую концевую точку. Таким образом, можно написать

$$\ldots, E_0 = (a_0, a_1), \quad E_1 = (a_1, a_2), \ \ldots, \quad E_n = (a_n, a_{n+1}), \ \ldots \qquad (2.1.2)$$

Отметим, что одно и то же ребро E может встречаться в маршруте несколько раз (рис. 2.1.1).

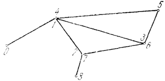


Рис. 2.1.1.

Если в (2.1.1) нет ребер, предшествующих E_0, то a_0 называется *начальной вершиной* S, а если нет ребер, следующих за E_{n-1}, то a_n называется *конечной вершиной* S. Любая вершина a_i в (2.1.2), принадлежащая двум соседним ребрам E_{i-1} и E_i, называется *внутренней* или *промежуточной вершиной*. Так как ребра и вершины в маршруте могут повторяться, внутренняя вершина может также оказаться начальной или конечной вершиной.

[1]) В оригинале для этих понятий употребляются соответственно термины: sequence, path, arc. (*Прим. перев.*)

Если маршрут имеет начальную вершину, но не имеет конечной вершины или если он имеет конечную вершину, но не имеет начальной, то он называется *односторонне-бесконечным*. Если маршрут не имеет ни начальной, ни конечной вершины, то он называется *двусторонне-бесконечным*. Маршрут назовем *нетривиальным*, если он содержит хотя бы одно ребро; для систематичности рассуждений вводится еще *нуль-маршрут*, не содержащий никаких ребер.

Если маршрут S имеет как начальную вершину a_0, так и конечную вершину a_n, то можно написать

$$S = S(a_0, a_n) \tag{2.1.3}$$

и назвать a_0 и a_n *концевыми точками*, или *концами* маршрута S. Будем говорить также, что S есть *маршрут длины* n, *соединяющий* a_0 и a_n. Если $a_0 = a_n$, то маршрут называется *циклическим*. Для двух вершин маршрута a_i и a_j подмаршрут

$$S(a_i, a_j) = (E_i, E_{i+1}, \ldots, E_{j-1})$$

называется (конечным) *участком* S.

Маршрут называется *цепью*, а циклический маршрут — *циклом*[1]), если каждое его ребро встречается в нем не более одного раза; вершины в цепи могут повторяться и несколько раз. Любой участок цепи есть цепь. Нециклическая цепь называется *простой цепью*, если в ней никакая вершина не повторяется. Цикл с концом a_0 называется *простым циклом*[2]), если a_0 не является в нем промежуточной вершиной и никакие другие вершины не повторяются. Участок простой цепи или простого цикла есть простая цепь.

До сих пор граф G предполагался неориентированным. Для ориентированного графа можно вводить как *неориентированные маршруты*, *цепи* и *простые цепи*, не принимая во внимание ориентации ребер, так и *ориентированные маршруты* (цепи, простые цепи), в которых все ребра (2.1.2) проходятся в направлении их ориентации[3]).

---

[1]) В оригинале — cyclic path. (*Прим. перев*).

[2]) В оригинале — circuit. (*Прим. перев.*)

[3]) Ориентированную цепь называют также *путем*, а ориентированный цикл — *контуром*. (*Прим. перев.*)

2.2. Связные компоненты. Пусть граф G неориентированный. Две вершины a и b называются *связанными*, если существует маршрут вида (2.1.1) с концами a и b. Если S проходит через какую-нибудь вершину a_i более одного раза, то можно, очевидно, удалить его циклический участок, и при этом остающиеся ребра будут составлять маршрут S', связывающий a и b. Отсюда следует, что связанные маршрутом вершины связаны также простой цепью. Граф называется *связным*, если любая пара вершин связана.

Если в произвольном графе G вершина a связана с b, а вершина b связана с c, то, очевидно, a связана с c. Отношение связанности для вершин является отношением эквивалентности. Следовательно, существует такое разложение множества вершин

$$V = \bigcup_i V_i \tag{2.2.1}$$

на попарно непересекающиеся подмножества, что все вершины в каждом V_i связаны, а вершины из различных V_i не связаны. В соответствии с (2.2.1) мы имеем прямое разложение

$$G = \bigcup_i G(V_i) \tag{2.2.2}$$

графа G на непересекающиеся связные подграфы $G(V_i)$. Эти подграфы называются *связными компонентами* графа G. Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. *Каждый неориентированный граф распадается единственным образом в прямую сумму (2.2.2) своих связных компонент.*

Эта теорема позволяет сводить большинство задач, касающихся графов, к случаю связных графов. В качестве примера разложения на связные компоненты напомним разложение (1.4.6) для отношения эквивалентности в прямую сумму полных графов.

Дополнение $\overline{G}$ графа G в полном графе U с тем же множеством вершин также имеет единственное разложение на свои связные компоненты. Используя попеременно разложения G и $\overline{G}$, мы получим дальнейшее однозначно определенное разложение множества вершин V.

В разложении на компоненты

$$G = \bigcup G_i$$

следует взять дополнение каждого G_i для его множества вершин и рассматривать разложение

$$\overline{G}_i = \bigcup G'_j$$

этого дополнения на компоненты. Для каждой из компонент G'_j можно снова взять разложение дополнения и т. д. Этот процесс приводит к такому представлению G, в котором каждый член является связным графом и дополнение каждого члена для его множества вершин также связно.

Докажем несколько утверждений относительно связности, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 2.2.2. *Если в конечном графе G ровно две вершины a_0 и b_0 имеют нечетную локальную степень, то они связаны.*

Доказательство. По теореме 1.2.1 каждый конечный граф имеет четное число вершин нечетной степени. Так как это условие выполняется и для той компоненты G, которой принадлежит a_0, то b_0 должно принадлежать той же компоненте. Кроме того, легко видеть, что a_0 и b_0 должны остаться связанными в графе $\overline{H}$, полученном из G удалением части H, в которой все локальные степени[1]) четные.

Теорема 2.2.3. *Пусть G — связный граф и H — его часть. Тогда число связных компонент дополнения $\overline{H}$ графа H в G не превосходит числа вершин в H.*

Доказательство. Пусть C — одна из компонент $\overline{H}$. Мы получили C из G в результате удаления ребер части H; поэтому в C найдется хотя бы одна вершина a, инцидентная ребрам H. Так как C — связная компонента, a не может быть инцидентна ребрам из других компонент $\overline{H}$. Таким образом, всем компонентам $\overline{H}$ сопоставляются различные вершины H.

Если H имеет конечное число вершин, то $\overline{H}$ имеет конечное число компонент.

---

[1]) Имеются в виду степени относительно H. (*Прим. перев.*)

Теорема 2.2.4. *Если граф G с однократными ребрами и без петель имеет n вершин и k связных компонент, то максимальное число ребер в G равно*

$$N(n, k) = \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1). \qquad (2.2.3)$$

Доказательство. Пусть в графе G компонента G_i имеет n_i вершин. Тогда максимальное число ребер в G равно

$$N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i - 1).$$

Это число достигается тогда, когда каждый из графов G_i полный и имеет n_i вершин. Допустим, что среди графов G_i найдутся хотя бы два, которые имеют более одной вершины, например $n_2 \geqslant n_1 > 1$. Построим вместо G другой граф G' с тем же числом вершин и компонент, заменяя G_1 и G_2 полными графами G_1' и G_2' соответственно с $n_1 - 1$ и $n_2 + 1$ вершинами. Легко видеть, что это увеличивает число ребер. Таким образом, максимальное число ребер должен иметь граф, состоящий из $k-1$ изолированных вершин и одного полного графа с $n-k+1$ вершинами. Его число ребер описывается формулой (2.2.3).

Из теоремы 2.2.4 для случая $k = 2$ следует

Теорема 2.2.5. *Граф с n вершинами и с числом ребер, большим чем*

$$N(n, 2) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

связен.

Для ориентированного графа G компоненты определяются при помощи соотнесенного неориентированного графа G_u. Связные компоненты G являются подграфами $G(V_i)$, определенными на множествах V_i вершин связных компонент графа G_u. Таким образом, граф G связен тогда и только тогда, когда связен граф G_u.

Задача

1. Каково наименьшее число ребер в связном графе с ν_0 вершинами?

2.3. Взаимно однозначные отображения. Чтобы проиллюстрировать некоторые понятия, введенные в предыдущем пункте, рассмотрим граф, определяемый *взаимно однозначным отображением*, или *подстановкой*

$$a \to a' = \tau(a), \quad a \in V, \tag{2.3.1}$$

элементов множества V. Отображение (2.3.1) можно интерпретировать как бинарное отношение

$$a\tau a',$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда a' есть образ a при отображении τ. Обратное отношение определяется *обратным отображением* τ^{-1}. В графе G отображения τ в каждой вершине a будет единственное выходящее ребро $(a, \tau(a))$ и единственное входящее ребро $(\tau^{-1}(a), a)$. Таким образом, для локальных степеней мы имеем

$$\rho(a) = \rho^*(a) = 1,$$

т. е. G есть однородный граф степени 1. Обратно, любой однородный ориентированный граф степени 1 определяет взаимно однозначное отображение τ множества V на себя, получаемое по формуле $a' = \tau(a)$ для каждого ориентированного ребра (a, a').

Для взаимно однозначного отображения τ каждая вершина a определяет единственный ориентированный маршрут, проходящий через вершины

$$a, \ \tau(a), \ \tau^2(a), \ldots \tag{2.3.2}$$

Возможны два случая.

1. В (2.3.2) существуют повторяющиеся вершины, и, следовательно, найдутся такие целые числа m и n, что

$$\tau^m(a) = \tau^{m+n}(a).$$

Так как каждая вершина является образом единственной вершины, мы получаем

$$\tau^n(a) = a. \tag{2.3.3}$$

Наименьшее $n > 0$ с этим свойством называется *порядком a при отображении* τ. Первая вершина, которая повторяется в (2.3.2), есть a. Таким образом, маршрут состоит из ребер некоторого простого цикла и представляет собой *ориентированный простой цикл длины* n, проходящий через вершины

$$C_n(a) = (a,\ \tau(a),\ \tau^2(a),\ \ldots,\ \tau^{n-1}(a)). \qquad (2.3.4)$$

Очевидно, этот ориентированный цикл является одной из связных компонент графа.

2. Все вершины (2.3.2) различны. Так как a — единственный образ для $\tau^{-1}(a)$, $\tau^{-1}(a)$ — для $\tau^{-2}(a)$ и т. д., (2.3.2) можно продолжить до двусторонне-бесконечной последовательности различных вершин

$$C_\infty(a) = (\ldots,\ \tau^{-2}(a),\ \tau^{-1}(a),\ a,\ \tau(a),\ \tau^2(a),\ \ldots). \qquad (2.3.5)$$

Будем говорить, что a имеет *бесконечный порядок* относительно τ и принадлежит *бесконечному ориентированному простому циклу* (2.3.5). Вершины в (2.3.5) определяют двусторонне-бесконечную ориентированную простую цепь, которая также должна быть одной из компонент графа. Таким образом, установлена

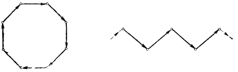


Рис. 2.3.1.

Рис. 2.3.2.

Теорема 2.3.1. *Взаимно однозначные отображения множества V на себя определяются однородными ориентированными графами степени 1 на V. Связные компоненты такого графа являются или ориентированными простыми циклами* (2.3.4), *или двусторонне-бесконечными ориентированными простыми цепями* (2.3.5) (рис. 2.3.1).

В таком графе петля может появиться только в случае $\tau(a) = a$, т. е. если вершина a есть *неподвижная точка* отображения τ. *Транспозиция* (a, b) двух вершин соответствует одному циклу, состоящему из двух ребер противоположной ориентации, соединяющих a и b, и неподвижным всем остальным вершинам (рис. 2.3.2).

2.4. Расстояния. Пусть G — связный неориентированный граф. Так как любые две вершины a и b связаны, существуют простые цепи $S(a, b)$ с концами a и b. Длины этих простых цепей являются неотрицательными целыми числами. Следовательно, между a и b должны существовать *цепи наименьшей длины*. Эта наименьшая длина называется *расстоянием* $d(a, b)$ между a и b. Положим, по определению,

$$d(a, a) = 0.$$

Легко видеть, что эта описывающая расстояние функция удовлетворяет *аксиомам метрики*:

1. $d(a, b) \geqslant 0$.
2. $d(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.
3. $d(a, b) = d(b, a)$.
4. Справедливо *неравенство треугольника*:

$$d(a, b) + d(b, c) \geqslant d(a, c). \tag{2.4.1}$$

Для связного ориентированного графа можно определять расстояние $d(a, b)$ как расстояние между a и b в соотнесенном неориентированном графе.

Выберем некоторую фиксированную вершину $a_0 \in V$. Для каждого целого $n \geqslant 0$ существует множество A_n, состоящее из тех вершин x, для которых

$$d(a_0, x) = n.$$

Таким образом, мы получаем разложение множества V:

$$V = \bigcup_n A_n, \tag{2.4.2}$$

на непересекающиеся подмножества. В графе G вершины из A_n могут быть соединены ребрами только с вершинами из A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, так как если бы существовало ребро от A_n к A_{n+k} $(k \geqslant 2)$, то в A_{n+k} нашлась бы вершина, расстояние которой от a_0 не превосходило бы $n + 1$.

Воспользуемся представлением (2.4.2) для доказательства следующего результата.

Теорема 2.4.1. *Пусть G — связный граф, имеющий не более чем счетные локальные степени. Тогда G имеет не более чем счетное число вершин и ребер.*

Доказательство. Можно считать граф G неориентированным. Чтобы доказать, что число вершин G не более чем счетно, воспользуемся одним хорошо известным свойством счетных множеств.

Лемма. *Объединение последовательности $B_1, B_2, \ldots$ конечных или счетных множеств содержит не более чем счетное число элементов.*

Согласно этой лемме достаточно показать, что множества A_n в (2.4.2) не более чем счетны. Это очевидно для A_0 и A_1 и может быть доказано в общем случае по индукции. Пусть A_n счетно. Множество A_{n+1} содержится в множестве A'_{n+1}, состоящем из всех вершин, каждая из которых соединена ребром с какой-нибудь вершиной из A_n. По лемме A'_{n+1} и, следовательно, A_{n+1} счетны. Таким образом, V счетно. Так как локальные степени не более чем счетны, на основании леммы число ребер также не более чем счетно.

Представляем читателю проверить следующие утверждения, обобщающие теорему 2.4.1.

Пусть N — бесконечное кардинальное число и локальные степени $\rho(a)$ связного графа G не превосходят N. Тогда G имеет не более чем N вершин и не более чем N ребер.

Если $\rho(a) = N$ для некоторой вершины a, то число ребер равно $\nu_e = N$. Если некоторая из таких вершин a связана ребрами с N различными вершинами, например, если G не имеет в a кратных ребер, то

$$\nu_e = \nu_v = N.$$

Это означает, что можно установить взаимно однозначное соответствие между ребрами и вершинами.

Приведем еще одно утверждение, касающееся бесконечных графов.

Теорема 2.4.2. *Пусть G — бесконечный локально конечный связный граф. Тогда из каждой вершины G выходит бесконечная простая цепь.*

Доказательство. Так как граф G бесконечный, а в каждой его вершине имеется только конечное число ребер, в G должно найтись бесконечное, а следовательно, и счетное число вершин a_i. Поэтому из вершины a_0 можно провести бесконечное число кратчайших связывающих простых цепей $P(a_0, a_i)$. Так как в a_0 имеется только конечное число ребер, хотя бы одно ребро $E_0 = (a_0, a_1)$ должно быть начальным для бесконечного числа простых цепей P. Рассуждая так же для вершины a_1, мы получим, что, кроме того, некоторое ребро $E_1 = (a_1, a_2)$ является вторым ребром для бесконечного числа простых цепей P. Продолжая так и дальше, мы построим бесконечную простую цепь от вершины a_0.

Для конечного графа или для графа с ограниченными расстояниями можно определить его *диаметр* как максимальное расстояние между двумя его вершинами:

$$d(G) = \max_{a, b \in V} d(a, b). \tag{2.4.3}$$

Соответствующие кратчайшие простые цепи, связывающие две вершины с максимальным расстоянием, можно называть *диаметральными простыми цепями*.

Выберем некоторую фиксированную вершину c и обозначим через

$$r(c) = \max_{x \in V} d(c, x) \tag{2.4.4}$$

максимальное расстояние от c до вершин G Назовем c_0 *центром* графа G, если величина (2.4.4) принимает для этой вершины минимальное значение

$$r_0 = r(c_0) = \min_{c \in V} r(c). \tag{2.4.5}$$

Значение (2.4.5) назовем *радиусом* G, а любую кратчайшую простую цепь от c_0 до какой-нибудь вершины, имеющей максимальное расстояние от c_0,— *радиальной простой цепью*. Центр не обязательно будет единственным. Предположим, что G — конечный граф с верхней границей $\rho_0 \geqslant 2$ для локальных степеней. Для произвольной вершины a_0 пусть (2.4.2) — разложение V по расстояниям от a_0. Из a_0 выходит не более ρ_0 ребер к вершинам из A_1. Из каждой вершины $a_1 \in A_1$ выходит не более ρ_0 ребер к A_2 и т. д. Отсюда следует, что

$$n < 1 + \rho_0 + \rho_0^2 + \ldots + \rho_0^r \leqslant \frac{1}{\rho_0 - 1}(\rho_0^{r+1} - 1). \tag{2.4.6}$$

где $r = r(a)$ есть максимальное расстояние от a_0[1]). Это дает, в частности, следующий результат, в некотором смысле аналогичный теореме 2.4.2.

Теорема 2.4.3. *В конечных связных графах с верхней границей ρ_0 для локальных степеней радиус стремится к бесконечности при возрастании порядка n.*

Идею центра для конечного связного графа можно выразить и иными понятиями. Для вершины a можно определить среднее *отклонение вершин*

$$m_1(a) = \frac{1}{\nu_v} \sum_{x \in V} d(a, x). \tag{2.4.7}$$

Вершина a_0, для которой эта сумма минимальна, может быть названа *средней вершиной*, а соответствующее значение (2.4.7) — *средним отклонением вершин* графа. Аналогично можно рассматривать сумму

$$m_2(a) = \frac{1}{\nu_v} \sum_{x \in V} d(a, x)^2. \tag{2.4.8}$$

Вершина a_0, минимизирующая ее, называется *центром тяжести* графа, а соответствующее минимальное значение — его *дисперсией*.

Для ребра $E = (x, y)$ можно определить его расстояние от a:

$$d(a, E) = \frac{1}{2}(d(a, x) + d(a, y)).$$

Тогда для *среднего отклонения ребер* мы получаем

$$M_1(a) = \frac{1}{\nu_e} \sum_{E} d(a, E) = \frac{1}{\nu_e} \sum_{x} \rho(x)\, d(a, x).$$

Аналогично (2.4.8) можно рассматривать сумму

$$M_2(a) = \frac{1}{\nu_e} \sum_{x} \rho(x)\, d(a, x)^2.$$

Задачи

1. Показать, что вершина x принадлежит кратчайшей простой цепи между a и b тогда и только тогда, когда

$$d(a, x) + d(x, b) = d(a, b).$$

[1]) n — число вершин графа, называемое его *порядком*. (*Прим. перев.*)

2. Построить графы, для которых $d_0=2$, 3, а также графы, для которых $r_0=2$, 3.
3. Доказать, что $2r_0 \geqslant d_0$.
4. Определить радиусы и диаметры для графов правильных многогранников.
5. Доказать, что если граф G связен, то связен и смежностный граф $I(G)$.
6. Можно определить расстояние $d(E_1, E_2)$ между двумя ребрами в G

$$E_1 = (a_1, b_1), \quad E_2 = (a_2, b_2)$$

как кратчайшее расстояние между любыми двумя их концами. Как связано это понятие с расстоянием между E_1 и E_2 в смежностном графе $I(G)$?

2.5. Протяженность. Мы рассматривали расстояния и кратчайшие цепи в графе. Для конечных связных графов можно также ввести *протяженность* $e(a, b)$ между двумя вершинами a и b как длину самой длинной связывающей их простой цепи. Очевидно, $e(a, b)$ удовлетворяет аксиомам метрики. Существуют *диаметральные по протяженности, или длиннейшие простые цепи;* их длина l_0 называется *диаметром протяженности.* Для каждой вершины v существуют наиболее длинные простые цепи, имеющие v своим концом; их длина

$$e(v) = \max_{x \in V} e(v, x)$$

называется *числом протяженности* для вершины v. *Центрами протяженности* называются вершины s_0 с минимальным числом протяженности

$$e_0 = e(s_0) = \min_{v \in V} e(v).$$

Соответствующие наиболее длинные простые цепи от этих центров можно назвать *радиальными по протяженности простыми цепями,* а их длину e_0 — *радиусом протяженности.*

Из свойств этих понятий отметим прежде всего следующие.

Теорема 2.5.1. *Любые две длиннейшие простые цепи имеют общие вершины.*

Доказательство. Пусть $P(a, b)$ и $Q(c, d)$ — две длиннейшие простые цепи (рис. 2.5.1). Если бы у них не было общих вершин, то нашлась бы некоторая связывающая простая цепь $C(u, v)$, имеющая только концы u и v на P и Q. Если $P(a, u)$ и $Q(v, c)$ — более длинные участки P и Q, определяемые разбивающими точками u и v, то простая цепь

$$P(a, u) \cup C(u, v) \cup Q(v, c)$$

имела бы большую чем l_0 длину.

Теорема 2.5.2. *Число протяженности удовлетворяет неравенству*

$$e(v) \geqslant \frac{1}{2} l_0 \text{ или } e(v) \geqslant \frac{1}{2}(l_0 + 1) \qquad (2.5.1)$$

соответственно для четного и нечетного l_0. Равенство может здесь достигаться только тогда, когда v расположено на каждой длиннейшей простой цепи.

Доказательство. Если P — диаметральная по протяженности простая цепь и v не лежит на ней, то можно к P подстроить связывающую простую цепь $C(v, u)$, и для длины простой цепи $C(v, u) \cup P(u, a)$ в (2.5.1) будет иметь место строгое неравенство.

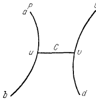


Рис. 2.5.1.

В частности, радиус протяженности удовлетворяет (2.5.1). Заметим, однако, что центры протяженности не обязательно лежат на диаметральной по протяженности простой цепи, а если даже это и так, то для e_0 в (2.5.1) не обязательно должно иметь место равенство.

Для графа с однократными ребрами иногда можно установить существование циклов на основании следующего утверждения.

Теорема 2.5.3. *Если $P(a, b)$ — простая цепь из вершины a, которую нельзя продолжить за b, то b лежит на простом цикле, длина которого не меньше чем* $\rho(b) + 1$[1].

Доказательство. $\rho(b)$ ребер могут отходить от b только к вершинам на P.

---

[1]) Предполагается, что $\rho(b) \neq 1$. (*Прим. перев.*)

Если P является диаметральной по протяженности простой цепью, то и a и b должны лежать на простых циклах длины не меньше $\rho(a)+1$ и $\rho(b)+1$ [1]).

Пусть L — некоторая простая цепь в графе G. Если удалить из G все вершины L и все инцидентные им ребра, то остающийся граф $G(V-V(L))$ будет иметь некоторое число $i(L)$ связных компонент; назовем $i(L)$ *индексом компонент* для L.

Теорема 2.5.4. *В конечном графе G без петель и кратных ребер пусть l_0 есть длина длиннейшей простой цепи, а i_0 — максимальный индекс компонент по всем простым цепям. Тогда для локальных степеней в G существует верхняя граница*

$$\rho(v) \leqslant b(l_0, i_0), \quad v \in V, \tag{2.5.2}$$

не зависящая от G.

Доказательство. Концы диаметральных по протяженности простых цепей не могут иметь локальных степеней больше l_0, так как такую простую цепь нельзя продолжить. Множество остальных вершин разобьем по их числам протяженности и предположим, что уже доказано существование границы

$$\rho(v) \leqslant b_r(l_0, i_0) \tag{2.5.3}$$

для всех вершин с числом протяженности r или больше. На основании этого получается существование границы для каждой вершины v_{r-1} с $e(v_{r-1})=r-1$. Последнее означает, что в v_{r-1} есть простая цепь $P(x_0, v_{r-1})$ максимальной длины $r-1$. Обозначим через Y множество всех вершин, не принадлежащих P, которых можно достигнуть от x_0, продолжая простую цепь P за v_{r-1}. Тогда для всех $y \in Y$ мы имеем $e(y) \geqslant r$. Далее, каждая компонента графа $G(Y)$ должна быть компонентой $G(V-V(P))$, так как простая цепь от $y \in Y$ может дойти до вершины, не принадлежащей Y, только через вершину на P. Поэтому $G(Y)$ имеет не более i_0 компонент $G(Y_i)$. По предположению локальные степени в $G(Y_i)$ имеют верхнюю границу (2.5.3); следовательно, по (2.4.6)

---

[1]) При условиях, что $\rho(a), \rho(b) \neq 1$ и в a, b нет кратных ребер. (*Прим. перев.*)

порядок n_i графа $G(Y_i)$ имеет верхнюю границу

$$n_i < \frac{1}{b_r - 1}\left(b_r^{l_0+1} - 1\right).$$

Так как ребра в v_{r-1} идут или к вершинам на P, или к вершинам в Y, мы имеем

$$\rho(v_{r-1}) < l_0 + \frac{i_0}{b_r - 1}\left(b_r^{l_0+1} - 1\right),$$

что и требовалось.

Задачи

1. Определить диаметры протяженности и числа протяженности для графов правильных многогранников.

2. Пусть $P(a_0, b_0)$ — простая цепь, которую нельзя продолжить за ее концы. Показать, что a_0 и b_0 лежат на одном простом цикле, если

$$\rho(a_0) + \rho(b_0) > l(P).$$

3*. Исследовать свойства переплетения двух или более длиннейших простых цепей.

2.6. Матрицы и цепи. Произведение графов. Пусть H и K — два графа с одним и тем же множеством вершин V. *Произведение графов*

$$G = K \cdot H \tag{2.6.1}$$

есть граф с G-множествами (п. 1.2)

$$G[a] = H[K[a]]. \tag{2.6.2}$$

Геометрически это означает, что в произведении графов (2.6.1) множество соседних с a вершин состоит из всех

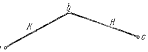


Рис. 2.6.1.

вершин, достижимых из a маршрутом длины 2, первое ребро которого принадлежит K, а второе — H (рис. 2.6.1).

Задание G-множеств (2.6.2) определяет все ребра произведения графов (2.6.1). Если H и K имеют кратные ребра, то естественно ввести кратности также и для произведения. Пусть

$$E_K = (a, b), \quad E_H = (b, c) \tag{2.6.3}$$

— ребра из K и H с кратностями

$$\rho_K(a, b), \quad \rho_H(b, c).$$

Комбинируя эти ребра, можно образовать

$$\rho_K(a, b) \cdot \rho_H(b, c)$$

2-маршрутов от a к c. Полное число таких маршрутов выразится суммой

$$\rho_{KH}(a, c) = \sum_b \rho_K(a, b) \cdot \rho_H(b, c), \tag{2.6.4}$$

взятой по всем b, являющимся средними вершинами в некотором K, H-маршруте от a к c.

Этот результат можно сформулировать при помощи матриц смежности M_K и M_H для K и H, определенных в п. 1.5. Формула (2.6.4) показывает, что

$$M_{KH} = M_K \cdot M_H. \tag{2.6.5}$$

Определение произведения графов можно распространить на произвольное число графов. В некоторых вопросах встречаются степени G^n графа G. Здесь соседние множества

$$G^n[a], \quad G^{*n}[a]$$

состоят из всех вершин, достижимых из a маршрутами длины n в G или в G^*. Элементы соответствующих матриц

$$M(G^n), \quad M(G^{*n})$$

дают число таких маршрутов, связывающих различные пары вершин. Множество всех вершин, достижимых из a цепью в G, есть

$$G^\infty[a] = \bigcup_{i=0,1,\ldots} G^i[a].$$

Это — наименьшее среди множеств A, содержащих a и обладающих свойством

$$G[A] \subseteq A.$$

При умножении матриц (2.6.5) можно не учитывать кратности ребер и считать

$$\rho(a, c) = 1 \quad \text{или} \quad \rho(a, c) = 0$$

в зависимости от того, существует или нет пара ребер вида (2.6.3). Это соответствует булевскому умножению матриц. Тогда матрица степени $M(G^n)$ имеет 1 или 0 на месте (a, b) в зависимости от существования маршрута длины n между a и b.

Другой способ определения умножения матриц смежности состоит в следующем. Предположим, что каждому ребру (a, b) в G приписана неотрицательная мера $\mu(a, b)$, и воспользуемся операциями

$$\alpha \oplus \beta = \min(\alpha, \beta), \quad \alpha \odot \beta = \alpha + \beta$$

вместо обычных арифметических операций сложения и умножения. Сопоставим графу G *матрицу мер*

$$M\mu(G) = M(\mu(a, b)).$$

В произведении матриц

$$M\mu(KH) = M\mu(K) \otimes M\mu(H)$$

на месте (a, c) оказывается тогда элемент

$$\min_b (\mu(a, b) + \mu(b, c)).$$

Можно проверить, что при таком определении (a, b)-элемент в матрице степени $M\mu(G^n)$ дает кратчайшее по мере расстояние от a до b в G.

Кроме введенных здесь суммы и произведения графов существуют еще декартовы сумма и произведение. Пусть

$$H_1, H_2, \ldots, H_k$$

— семейство графов, определенных на множествах вершин V_i. *Декартово произведение* этих графов

$$\pi = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k$$

имеет своим множеством вершин произведение

$$V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k,$$

состоящее из всех k-наборов

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_k), \qquad v_i \in V_i.$$

В графе π имеется ребро (v, w),

$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_k), \qquad w_i \in V_i,$$

тогда и только тогда, когда существует семейство ребер

$$E_1 = (v_1, w_1), \ \ldots, E_k = (v_k, w_k), \qquad E_i \subset H_i. \quad (2.6.6)$$

Декартова сумма графов

$$\Sigma = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_k$$

определена также на произведении V, но в этом случае в Σ имеется ребро (v, w) тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно ребро E_i из (2.6.6) в одном из графов H_i. Эти декартовы операции можно распространить на произвольные семейства графов.

2.7. Головоломки. Целый ряд хорошо известных головоломок можно описать в терминах графов, и тогда их решение будет зависеть от существования некоторой цепи, соединяющей данную вершину с какой-либо другой вершиной. В каждой задаче такого рода имеется некоторое множество допустимых позиций или состояний. Их можно взять в качестве вершин соответствующего задаче графа, а ребра будут указывать возможные ходы из одной позиции в другую. Ребро будет неориентированным или ориентированным в зависимости от того, обратим переход или нет. Обычно задача имеет некоторую начальную позицию, а решение ее зависит от нахождения ряда ходов, т. е. от нахождения цепи, соединяющей эту первую позицию с выигрывающей позицией. Эта интерпретация весьма проста, но она редко приносит существенную пользу при решении.

Проиллюстрируем сказанное на нескольких очень старых головоломках.

Перевозчик. Перевозчику ($П$) нужно переправить через реку волка ($В$), козу ($К$) и мешок с капустой ($М$). Лодка так мала, что кроме перевозчика может взять только один из этих объектов. Кроме того, капусту нельзя оставлять вместе с козой, а козу — с волком. Как можно осуществить переправу?

Различные позиции могут быть описаны объектами, находящимися на первом берегу. Первоначально мы имеем группу *ПВКМ*. Первый возможный ход может состоять только в перевозке козы, и остается BM. Различных возможных позиций здесь совсем мало. Они представлены графом на рис. 2.7.1.

Читатель может начертить графы для следующих задач.

Ревнивые мужья. Три ревнивых мужа и их жены должны переправиться через реку. Имеется только одна маленькая лодка, которая может выдержать одновременно только двоих. Как могут переправиться все шестеро, если никакой муж не оставит жену в присутствии других мужчин?

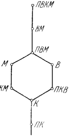


Рис. 2.7.1.

Задача о разделении. Два человека имеют полный кувшин вина в 8 литров, а также два пустых кувшина в 5 и в 3 литра. Как они могут разделить вино поровну?

Ханойская башня. Доска имеет три колышка. На первом находится m дисков убывающего вверх диаметра. Как можно, перекладывая диски по одному, расположить их в том же порядке на другом колышке, если ни на каком шаге больший диск не может лежать выше меньшего?

З а д а ч и

1. Начертить граф для задачи о ханойской башне при $m = 4$.
2. Исследовать возможность обобщений задач, описанных в этом пункте.

Глава 3

ЗАДАЧИ О ЦЕПЯХ

3.1. Эйлеровы цепи. Как указано в предисловии, *задача о Кёнигсбергских мостах* послужила началом математической теории графов. План расположения семи мостов в Кёнигсберге приведен на рис. 3.1.1, *а*. Задача состоит в том, чтобы пройти каждый мост по одному разу и вернуться в исходную точку C.

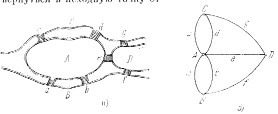


Рис. 3.1.1.

Так как существенны только переходы через мосты, план города можно свести к изображению графа, в котором ребра соответствуют мостам, а вершины — различным разделенным частям города (рис. 3.1.1, *б*). Очевидно, не существует циклических обходов, проходящих по всем ребрам по одному разу. На рис. 3.1.2 приводится план воображаемого города, который Эйлер использовал для иллюстрации.

Развлечения, в которых требуется обрисовать некоторую фигуру, не прерывая и не повторяя линии, являются, по-видимому, очень давними. Считается, что фигура, называемая *саблями Магомета*, имеет арабское происхождение (рис. 3.1.3).

Эйлер обратился к общей задаче, касающейся графов: в каких случаях в конечном графе можно найти такой цикл, в котором каждое ребро графа участвовало бы один раз?

Такой цикл, если он существует, называется *эйлеровым циклом*, а граф, содержащий такой цикл,— *эйлеровым графом*. Ответ на поставленный Эйлером вопрос состоит в следующем.

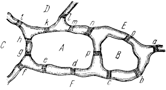


Рис. 3.1.2.

Теорема 3.1.1. *Конечный граф G является эйлеровым графом тогда и только тогда, когда*

1) *G связен*; 2) *Все его локальные степени четны.*

Доказательство. Условие 1), очевидно, необходимо. Далее, каждый раз, когда эйлеров цикл проходит через какую-то вершину, он должен войти в нее по одному ребру и выйти по другому; поэтому условие 2) также необходимо.

Предположим теперь, что эти два условия выполнены. Начнем цепь P в произвольной вершине a графа G и будем продолжать ее, насколько возможно, все время через новые ребра. Так как в каждой вершине число

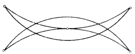


Рис. 3.1.3.

ребер четно, этот процесс может закончиться только в a. Если P содержит не все ребра графа G, то удалим из G часть P, состоящую из ребер этого цикла.

Графы P и G имеют четные локальные степени; то же должно быть справедливо и для остающегося графа $\overline{P}$. Так как граф G связен, в P должна найтись вершина b, инцидентная также ребрам из $\overline{P}$. Из b можно построить новую цепь P', содержащую ребра только из $\overline{P}$. Снова такая цепь может закончиться только при возвращении в b. Но тогда из P и P' можно составить новый цикл

$$P_1 = P(a,\ b) \cup P' \cup P(b,\ a),$$

который возвращается в a и содержит больше ребер, чем P. Если P_1 не является эйлеровым циклом, то это построение повторяется. Когда процесс закончится, эйлеров цикл будет построен (рис. 3.1.4).

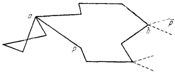


Рис. 3.1.4.

Обобщая задачу Эйлера, можно искать наименьшее число непересекающихся по ребрам цепей P_i, которое необходимо для того, чтобы *покрыть* конечный связный граф G, т. е. включить все его ребра в цепи P_i. Решение этой задачи можно свести к решению задачи Эйлера.

Если G не является эйлеровым графом, то обозначим через k число его вершин нечетной степени. По теореме 1.2.1 k четно. Очевидно, каждая вершина нечетной степени должна быть концом хотя бы одной из покрывающих G цепей P_i. Следовательно, таких цепей будет не менее чем $\frac{1}{2}k$. С другой стороны, таким количеством цепей граф G покрыть можно. Чтобы убедиться в этом, расширим G до нового графа G', добавив $\frac{1}{2}k$ ребер E', соединяющих различные пары вершин нечетной степени. Тогда G' оказывается эйлеровым графом и имеет эйлеров цикл P'. После удаления из P' ребер E' граф разложится на $\frac{1}{2}k$ участков, покрывающих G. Таким образом, доказана

Теорема 3.1.2. *Пусть G — конечный связный граф с k вершинами нечетной степени. Тогда минимальное* *число непересекающихся по ребрам цепей, покрывающих G, равно $\frac{1}{2}k$* [1]).

Две последние теоремы справедливы также для графов с петлями, если в локальных степенях петли считать с кратностью два.

Аналогичные задачи можно рассматривать для ориентированных графов. Рассуждение, подобное использованному при доказательстве теоремы 3.1.1, приводит к следующему результату.

Теорема 3.1.3. *Пусть G — конечный ориентированный связный граф. Для того чтобы существовал ориентированный цикл, содержащий все ребра G, необходимо и достаточно, чтобы в каждой вершине число входящих и выходящих ребер было одинаково, т. е.*

$$\rho(a) = \rho^*(a), \qquad a \in V.$$

Формулу для числа таких путей вывели Аарден-Эренфест и де Брёйн.

Как граф с эйлеровым циклом можно рассматривать, например, разумную схему обхода выставки, по различным коридорам которой посетители должны согласно указателям пройти так, чтобы увидеть каждый экспонат по одному разу. Если экспонаты расположены по обе стороны коридоров, то можно направлять посетителей через них дважды, чтобы каждая сторона была осмотрена отдельно. Однако, как показывает следующая теорема, это не накладывает ограничений на основной план расположения выставки.

Теорема 3.1.4. *В конечном связном графе всегда можно построить ориентированный цикл, проходящий через каждое ребро по одному разу в каждом из двух направлений.*

Доказательство. Достаточно удвоить ребра в данном графе G, расщепляя каждое на пару ребер противоположной ориентации. Удвоение G_d графа G является тогда ориентированным графом, удовлетворяющим условиям теоремы 3.1.3.

[1]) В случае $k=2$ соответствующая цепь называется *эйлеровой*. (*Прим. перев.*)

Для нахождения такого цикла, как указано в теореме 3.1.4, можно использовать очень простое правило, предложенное Тэрри (см. Люка, гл. 1). Эта конструкция дает также решение так называемой *задачи о лабиринте*, рассматриваемой в п. 3.3. Начиная с произвольной вершины a_0, нужно идти по какой-нибудь цепи P, помечая на каждом ребре направление, в котором оно было пройдено. Если мы приходим в некоторую вершину g в первый раз, то особо отмечается первое входящее ребро. Из вершины g всегда следуем по ребру (g, r), которое или вообще еще не было пройдено, или же было пройдено в противоположном направлении. При этом по первому входящему в g ребру можно идти только тогда, когда других возможностей не остается.

Очевидно, при каждом проходе через вершину g в цепи P будет одно входящее ребро и одно выходящее ребро; следовательно, P может кончиться только в a_0. Покажем, что P должно покрывать все ребра G по одному разу в каждом направлении. Сначала проверим это для всех ребер с концом в a_0. Так как P в вершине a_0 кончается, все ребра с концом в a_0 должны быть уже покрыты в направлении от a_0; так как в P число входящих и выходящих ребер одно и то же для каждой вершины, каждое ребро в a_0 должно оказаться покрытым в обоих направлениях.

Требуемое утверждение получается индукцией по остальным вершинам из P. Пройдем по P от a_0 до некоторой вершины a_n и предположим, что в предыдущих вершинах a_i все ребра покрыты в обоих направлениях. Входящее в a_n ребро имеет вид (a_i, a_n) и, по предположению, покрыто в обоих направлениях. Но первое входящее в a_n ребро может быть использовано в P только при отсутствии других свободных выходов; следовательно, все ребра в a_n также должны оказаться покрытыми в обоих направлениях.

Задача о существовании эйлеровых цепей возникает в различных играх и головоломках. Обычно различным позициям отвечают вершины соответствующего графа, а ходам — соединяющие их ребра. Можно поставить вопрос: когда существует циклическая последовательность соседних ходов, в которой все возможные ходы между двумя позициями содержатся по одному разу?

Задачи

1. Определить, какие из графов пяти правильных многогранников имеют эйлеровы циклы; в тех случаях, когда эйлерова цикла нет, определить, сколько требуется цепей, чтобы покрыть все ребра.
2. Начертить граф для плана Эйлера (рис. 3.1.2) и определить, существует ли в нем эйлеров цикл.
3. Кости домино помечены парами точек от 0 до 6. Начиная от кости (0, 0), сколько можно составить расположений, содержащих все кости?
4. На шахматной доске поместить одну из фигур (король, ферзь, ладья, конь) в некоторую позицию и определить, существует ли последовательность ходов, содержащая все возможные переходы по одному разу.
5. Сформулировать теорему для ориентированных графов, аналогичную теореме 3.1.2 для неориентированных графов.
6*. Полный граф U_n с n вершинами имеет четные степени $n-1$, когда n нечетно. Построить очевидный эйлеров цикл и определить число всех таких циклов.
7. Когда смежностный граф данного графа имеет эйлеров цикл?

3.2. Эйлеровы цепи в бесконечных графах. В бесконечном графе G также могут существовать эйлеровы цепи, покрывающие все ребра. Для такой цепи P имеется только две возможности:

1. P есть одностороние-бесконечная цепь.
2. P есть двусторонне-бесконечная цепь.

Очевидно, два следующих условия необходимы в обоих случаях:

α) Граф G связен.

β) Граф G имеет счетное число ребер.

Если имеется одностороние-бесконечная эйлерова цепь, то либо начальная вершина должна иметь нечетную степень, либо цепь P должна проходить через нее бесконечное число раз. Остальные вершины имеют или четную степень, или бесконечную. Таким образом, в этом случае к двум указанным условиям добавляется условие:

γ_1) Граф G имеет не более одной вершины нечетной степени; если такой вершины нет, то должна существовать по крайней мере одна вершина бесконечной степени.

Для двусторонне-бесконечных цепей мы получаем условие:

γ_2) Не существует вершин нечетной степени.

Однако, как показывают примеры на рис. 3.2.1, этих условий недостаточно для существования бесконечных эйлеровых цепей.

Необходимые и достаточные условия для существования эйлеровых цепей в бесконечных графах нашли Эрдёш, Грюнвальд и Важоньи. (См. также Эрдёш, Грюнвальд и Вайсфельд.) Мы выведем их результаты несколько более простым способом.

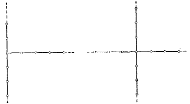


Рис. 3.2.1.

Теорема 3.2.1. *Для того чтобы граф G имел односторонне-бесконечную эйлерову цепь, необходимо и достаточно выполнение условий* α, β, γ_1 *и, кроме того,*

δ_1) *Любая конечная часть H графа G должна иметь такое дополнение $\overline{H}$, в котором только одна связная компонента бесконечна.*

Чтобы доказать необходимость δ_1, допустим, что G имеет односторонне-бесконечную эйлерову цепь P. Тогда для любой конечной части H существует такой участок P_0 цепи P от начальной вершины a_0, что P_0 содержит все ребра из H. Мы имеем

$$P = G = P_0 \cup P_\infty,$$

где P_∞ есть остающийся бесконечный участок. После удаления P_0 из G остается связный бесконечный граф P_∞. Граф $\overline{H}$ получается из P_∞ добавлением конечного числа ребер.

Доказательство достаточности опирается на следующий вспомогательный результат.

Лемма. *Пусть G — связный граф, удовлетворяющий условию γ_1. Обозначим через a_0 вершину нечетной сте-*

пени, если она существует; в противном случае a_0 — вершина бесконечной степени. Если $P(a_0, a_n)$ есть цепь, соединяющая a_0 с некоторой вершиной a_n, то существует также цепь $Q(a_0, a_n)$ между теми же вершинами, содержащая все ребра из P и притом такая, что дополнение $\overline{Q}$ не имеет конечных компонент и удовлетворяет условию γ_1.

Доказательство. По теореме 2.2.3 граф $\overline{P}$ имеет конечное число компонент. Пусть F — некоторая конечная компонента графа $\overline{P}$. Покажем, что все локальные степени в F четны. Так как граф F конечен, все его локальные степени $\rho_F(v)$ конечны, и, так как удалялись только ребра, принадлежащие P, степени $\rho_G(v)$ в G конечны. Но по условию γ_1 все числа

$$\rho_G(v), \quad v \neq a_0,$$

четны; поэтому и числа

$$\rho_F(v), \quad v \neq a_0, \quad v \neq a_n$$

должны быть четными. Остается рассмотреть возможности $v = a_0$ и $v = a_n$.

Случай 1. $a_0 \neq a_n$. Если $v = a_0$, то $\rho_G(a_0)$ конечно и, следовательно, нечетно по предположению. В a_0 имеется нечетное число ребер из P; поэтому $\rho_F(a_0)$ четно. Тогда и $\rho_F(a_n)$ четно на основании теоремы 1.2.1.

Случай 2. $a_0 = a_n$. В этом случае a_0 не может принадлежать конечной компоненте F, так как тогда $\rho_G(a_0)$ было бы конечным и потому нечетным по предположению. Число ребер из P в a_0 четно, так что вершина a_0 была бы в этом случае в F единственной вершиной нечетной степени, что противоречит теореме 1.2.1.

Образуем теперь конечный связный граф

$$Q = P \cup \bigcup F_i, \tag{3.2.1}$$

где сумма берется по всем конечным компонентам F_i графа $\overline{P}$. В случае 1 в этом графе все степени

$$\rho_Q(v), \quad v \neq a_0, \quad v \neq a_n,$$

четны, а для $v = a_0$ и $v = a_n$ степени нечетны. Следовательно, по теореме 3.1.2 существует цепь $Q(a_0, a_n)$, покрывающая все ребра из Q. По построению $\overline{Q}$ не имеет конечных компонент. Если степень $\rho_G(a_0)$ бесконечна, то степень a_0 остается бесконечной и в $\overline{Q}$, и этот граф не может иметь вершин нечетной степени. Если $\rho_G(a_0)$ конечно, и следовательно, нечетно, вершина a_0 имеет в $\overline{Q}$ четную степень, и a_n оказывается единственной возможной вершиной нечетной степени в $\overline{Q}$. В случае 2 граф Q в (3.2.1) есть эйлеров граф, так что существует покрывающий его цикл $Q(a_0, a_0)$. Снова $\overline{Q}$ не имеет конечных компонент, а степень a_0 в $\overline{Q}$ нечетна или бесконечна, как и в G. Все остальные вершины $\overline{Q}$, очевидно, имеют или четную степень, или бесконечную; следовательно, $\overline{Q}$ удовлетворяет условию γ_1.

Переходим к доказательству достаточности условий теоремы 3.2.1 для существования односторонне-бесконечной эйлеровой цепи. Граф G имеет, согласно условию β, счетное число ребер. Их можно расположить в виде некоторой последовательности

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \tag{3.2.2}$$

Так как граф G связен, существует цепь $P_1(a_0, a_1)$ из a_0, содержащая E_1 [1]). По лемме существует цепь $Q_1(a_0, a_1)$, содержащая P_1 и притом такая, что $\overline{Q}_1$ не имеет конечных компонент. Так как выполняется δ_1, это означает, что граф $\overline{Q}_1$ связен. Кроме того, $\overline{Q}_1$ удовлетворяет γ_1 с a_1 в качестве исключительной вершины. Пусть E_k — первое ребро в (3.2.2), не содержащееся в Q_1. Тем же способом можно построить цепь $Q_2(a_1, a_2)$ в $\overline{Q}_1$, которая содержит E_k и имеет связное дополнение в $\overline{Q}_1$. Это построение можно продолжать неограниченно, и

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots$$

будет искомой эйлеровой цепью.

Для двусторонне-бесконечных эйлеровых цепей имеется следующий критерий.

---

[1]) a_0 — вершина, о которой говорится в лемме. (*Прим. перев.*)

Теорема 3.2.2. *Для того чтобы граф G имел двусторонне-бесконечную эйлерову цепь, необходимо и достаточно выполнение условий* α, β, γ_2 *и*

δ_2) *Если H — любая конечная часть графа G, то $\overline{H}$ имеет не более двух бесконечных связных компонент.*

δ_3) *Если H — конечная часть с четными локальными степенями, то $\overline{H}$ имеет ровно одну бесконечную связную компоненту.*

Доказательство. Докажем сначала необходимость двух последних условий. Пусть G имеет двусторонне-бесконечную эйлерову цепь P. Для данной конечной части H можно найти конечный участок

$$P_0 = P(a_0, a_n)$$

цепи P, содержащий все ребра H; мы получаем

$$G = P = P_{-\infty} \cup P_0 \cup P_\infty.$$

Очевидно, граф

$$\overline{P}_0 = P_{-\infty} \cup P_\infty \qquad (3.2.3)$$

имеет не более двух бесконечных компонент, следовательно, это же справедливо для $\overline{H}$.

Далее, пусть H — конечная часть с четными степенями. Тогда два слагаемых в графе (3.2.3) связаны цепью в $\overline{H}$. Это очевидно при $a_0 = a_n$. Если $a_0 \neq a_n$, то граф $P_0 - H$ будет иметь четные локальные степени во всех вершинах, кроме a_0 и a_n, в которых степени будут нечетными. Из теоремы 2.2.2 заключаем, что существует цепь в $P_0 - H$, связывающая a_0 и a_n. Таким образом, в этом случае $\overline{H}$ не может иметь более одной бесконечной компоненты.

Для доказательства достаточности расположим ребра G в последовательность, как в (3.2.2). Пусть $P(a_0, a_n)$ есть цепь, содержащая некоторые из этих ребер. Как и в предыдущей лемме, показываем, что конечный граф (3.2.1) имеет четные степени во всех вершинах, отличных от a_0 и a_n. Если $a_0 \neq a_n$, то эти вершины имеют нечетные локальные степени, а если $a_0 = a_n$, то четные степени. В любом случае существует цепь $Q(a_0, a_n)$, содержащая все ребра из P, причем граф $\overline{Q}$ не имеет конечных компонент.

Предположим сначала, что вершины a_0 и a_n не связаны в $\overline{Q}$. Тогда по δ_2 граф $\overline{Q}$ должен разбиваться на две бесконечные компоненты:

$$\overline{Q} = A_1 \cup A_2.$$

Каждая из них, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 3.2.1; следовательно, в них существуют односторонне-бесконечные эйлеровы цепи, соответственно $P_1(a_0)$ и $P_2(a_n)$. Если их соединить с $Q(a_0, a_n)$, то получается двусторонне-бесконечная эйлерова цепь для G.

Пусть теперь a_0 и a_n связаны в $\overline{Q}$. Тогда можно объединить соответствующую цепь $P_1(a_n, a_0)$ в $\overline{Q}$ с $P(a_0, a_n)$ и затем получить цикл $Q_1(a_0, a_n)$, содержащий P и P_1 и притом такой, что $\overline{Q}_1$ не имеет конечных компонент. Так как Q_1 есть конечный эйлеров граф, по условию δ_3 граф $\overline{Q}_1$ связен.

Пусть E_k — первое ребро в (3.2.2), не содержащееся в Q_1. Тогда из некоторой вершины a_1 в Q_1 можно построить в $\overline{Q}_1$ цепь $Q_2(a_1, a_1')$, содержащую E_k. Как и выше, можно считать, что цепь

$$Q_2 = Q_2(a_1, a_1)$$

является циклом и такова, что ее дополнение относительно $\overline{Q}_1$ связно. Продолжая эту конструкцию, мы получим последовательность эйлеровых графов

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots, \qquad (3.2.4)$$

содержащую все ребра G. Графы (3.2.4) не пересекаются по ребрам, но каждые два соседних графа имеют хотя бы одну общую вершину. Очевидно, эйлеровы циклы графов (3.2.4) можно перестроить в двусторонне-бесконечную эйлерову цепь для G.

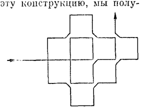


Рис. 3.2.2.

В качестве примера рассмотрим бесконечный граф, состоящий из ребер единичных квадратов на плоскости; по теореме 3.2.2 он имеет двусторонне-бесконечную эйлерову цепь. Построение приведено на рис. 3.2.2.

Для бесконечного графа, состоящего из ребер единичных кубов в n-мерном пространстве, по теореме 3.2.2 должна существовать двусторонне-бесконечная эйлерова цепь. В явном виде конструкцию указал Важоньи.

Доказанная выше теорема 3.1.4 распространяется на бесконечные графы следующим образом.

Теорема 3.2.3. *Для того чтобы граф G имел бесконечную цепь, проходящую через каждое ребро по одному разу в каждом направлении, необходимо и достаточно, чтобы G удовлетворял условиям α, β, δ_1.*

Доказательство простое и предоставляется читателю.

Задачи

1. Построить граф, удовлетворяющий всем условиям теоремы 3.2.2, кроме δ_3.
2. Найти эйлерову цепь для бесконечной сети, изображенной на рис. 3.2.3.

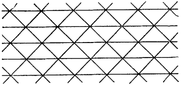


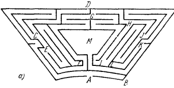
Рис. 3.2.3.

3*. Пусть G — бесконечный граф с четными или счетными степенями. Найти условие, при котором G будет прямой по ребрам суммой ровно k (но не меньше) двусторонне-бесконечных цепей.

4*. Найти условие, при котором бесконечный граф будет прямой по ребрам суммой k (но не меньше) конечных или бесконечных цепей.

3.3. О лабиринтах. Уже начиная с мифа о том, как Тезей, убив Минотавра, нашел путь по коридорам лабиринта в Кноссе, задача о поиске прохода через лабиринт стала популярной головоломкой. Во многих средневековых храмах на мозаичных полах изображены лабиринты. Возможно, метод нахождения пути был бы полезен для группы, заблудившейся в пещере. Однако, кроме этого, задачи о лабиринте представляют теперь интерес главным образом для развлечения детей, а также для психологов, когда они выпускают своих подопытных крыс в запутанные лабиринты.

Говоря коротко, лабиринт состоит из коридоров и их перекрестков. Таким образом, он может быть представлен графом, в котором ребра соответствуют коридорам, а вершины — перекресткам. На рис. 3.3.1, *а* изображен план известного лабиринта в саду в Хемптон Корт, а на рис. 3.3.1, *б* — соответствующий граф.



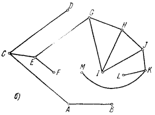


Рис. 3.3.1.

В терминах графов *задача о лабиринте* может быть сформулирована следующим образом. Определить метод, позволяющий найти маршрут в графе, который начинается в заданной вершине a_0 и наверняка приводит в другую заданную вершину a_1 (*выход*). Очевидно, чтобы не было бесконечного блуждания по циклическим маршрутам, необходимо иметь возможность запоминать уже пройденные вершины и ребра; поэтому нужно предполагать, что заблудившийся располагает средствами помечать каким-то способом проходимые им ребра и вершины.

Большинство сборников математических задач содержит задачи о лабиринте. (По поводу методов, примеров, ссылок см., например, Роуз-Болл, Люка, а также Кёниг (глава 1).) Задача о лабиринте ставится всюду в следующей форме: в данном конечном графе G найти некоторый маршрут, начинающийся в a_0 и содержащий *все* ребра G. В конце концов выход a_1 также попадется.

Первый систематический процесс для нахождения выхода из лабиринта, по-видимому, был предложен Винером (1873). Его правило таково. Из данной вершины a_0 следует проходить по ребрам графа возможно дальше, выбирая в каждой вершине еще не пройденное ребро. Из вершины, от которой дальше двигаться нельзя, маршрут возвращается до такой вершины, в которой есть еще не использованное ребро. Последняя операция тогда будет состоять в возвращении по всей линии к вершине a_0. Ясно, что такой маршрут покроет все ребра. Однако он будет содержать много повторяющихся участков, и, чтобы их различить, требуется нечто вроде «нити Ариадны».

Более экономичным является метод Тэрри, описанный в п. 3.1. Здесь каждое ребро проходится дважды, по одному разу в каждом направлении. Такой же результат получается другим способом по методу, предложенному Тремо, описанному Люка и разобранному довольно подробно им и Кёнигом.

Все эти методы имеют дело с задачей о лабиринте в такой форме, когда требуется покрыть все ребра графа. Однако для фактического нахождения выхода эта точка зрения не представляется наилучшей. Если заблудившийся находится в некоторой точке a_0, то он должен был попасть в нее, совершив переход ограниченной длины, и выход должен находиться в пределах этого расстояния. Но тогда нет никакой необходимости проходить по всем извилинам лабиринта до его самых удаленных углов. Нужен скорее метод поиска, гарантирующий попадание во все вершины, расположенные не далее некоторого расстояния; этот метод можно было бы применять даже для бесконечных графов.

Ко всем вершинам, находящимся на расстоянии 1, подойти легко. Для этого нужно проходить по различным ребрам в a_0 до их концов, возвращаясь каждый раз в a_0. Чтобы систематически проводить поиск, нужно как-то помечать эти ребра. Каждое ребро $E = (a_0, a_1)$ помечается один раз, когда мы выходим по нему из a_0, и в a_1 оно помечается как входящее. Если окажется, что в a_1 нет ребер, кроме E, то, вернувшись в a_0, помечаем E как закрытое. Если некоторое другое ребро $E' = (a_0, a_1)$ также ведет из a_0 в a_1, то помечаем его как закрытое с обоих концов; то же делается для любой петли в a_0.

Чтобы попасть в вершины, находящиеся от a_0 на расстоянии 2, берем некоторое открытое ребро $E = (a_0, a_1)$ и помечаем его снова. В a_1 открытые ребра также проходятся и помечаются, причем как закрытые, если они ведут к уже пройденным вершинам. Когда все это будет выполнено, возвращаемся в a_0 из a_1 по ранее помеченному входящему ребру. Если не осталось ребер, открытых в a_1, то это входящее ребро закрывается в a_0. После возвращения в a_0 та же операция повторяется для других открытых ребер, и процесс продолжается, пока все ребра в a_0 не будут помечены дважды.

После того как все вершины на расстоянии n пройдены, мы получаем следующую ситуацию. Все открытые ребра в a_0 помечены n раз; открытые ребра в любой вершине a_1 помечены $n-1$ раз и т. д. Чтобы подойти к вершинам на расстоянии $n+1$, мы переходим последовательно в каждую вершину a_1 на расстоянии 1 и посещаем все вершины на расстоянии n от a_1, используя при этом только открытые ребра и помечая их в соответствии с описанным выше правилом.

Такой процесс *постепенного покрывания* графа несколько сложен по формулировке, но фактически в конкретных примерах этот радиальный метод очень упрощается из-за быстрого закрывания многих ребер. (См. Оре.)

С задачами о лабиринте связаны задачи о схеме дорог. Предположим, что G представляет собой схему дорог с участками (a, b), связывающими различные перекрестки или вершины a и b. Чтобы найти цепь (путь)

$$P(a_0, b_0) = (a_0, a_1) \ldots (a_{n-1}, a_n), \qquad a_n = b_0, \quad (3.3.1)$$

между двумя пунктами a_0 и b_0, можно действовать описанным выше для задачи о лабиринте методом постепенного покрывания. Как известно, обычно такая цепь находится без чрезмерно большого числа проб — частично благодаря специфике структуры дорог, частично от того, что граф плоский.

Однако основной задачей о схеме дорог обычно считается другая, именно — определение кратчайшего (по времени или по расстоянию) пути между двумя пунктами. Здесь каждому ребру $E = (a, b)$, $a \neq b$, графа приписывается некоторая *мера* $\mu(a, b) > 0$, и нужно найти путь (3.3.1), для которого *расстояние в смысле этой меры*

$$\mu(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu(a_i, a_{i+1})$$

минимально.

Для этой задачи о минимальном расстоянии существует остроумный *процесс редукции индекса*. (См. Форд или Бекман, Макгир, Винстен.) Начальная вершина a_0 помечается числом $M(a_0) = 0$; каждая из остальных вершин b помечается числом $M(b)$ (или ∞), превосходящим все меры $\mu(u, v)$ для различных ребер (u, v). Повторная редукция проводится следующим образом. Если существует такая пара вершин u и v с числами $M^{(i)}(u)$ и $M^{(j)}(v)$, что

$$\mu(u, v) < M^{(j)}(v) - M^{(i)}(u),$$

то число $M^{(j)}(v)$ заменяется на

$$M^{(j+1)}(v) = M^{(i)}(u) + \mu(u, v).$$

Кроме того, в v указывается, что последняя редукция была выполнена относительно вершины u. Так как граф конечный, этот процесс редукции должен оборваться. Для вершины a_n мы получаем тогда соседнюю вершину a_{n-1}, использованную в последней редукции; также и для a_{n-1} имеется вершина a_{n-2} последней редукции, и т. д. Соответственно мы получаем убывающую последовательность индексов:

$$M(a_n) = M(a_{n-1}) + \mu(a_{n-1}, a_n),$$
$$M(a_{n-1}) = M(a_{n-2}) + \mu(a_{n-2}, a_{n-1}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Очевидно, соответствующая цепь P может кончаться только в a_0. Суммируя, мы получаем

$$M(a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu(a_i, a_{i+1}).$$

Чтобы доказать, что P является кратчайшей по мере цепью, допустим, что

$$Q = (a_n, b_1, b_2, \ldots, a_0)$$

есть другая цепь, проходящая через вершины b_i. Так как никакие редукции невозможны, должно быть

$$M(a_n) \leqslant M(b_1) + \mu(a_n, b_1),$$
$$M(b_1) \leqslant M(b_2) + \mu(b_1, b_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и суммирование дает нам

$$M(a_n) \leqslant \sum \mu(b_i, b_{i+1}).$$

Таким образом, Q не может быть короче P.

Этот метод редукции индекса хотя и изящен, но не очень практичен, так как имеет те же недостатки, что и методы, применяемые в задаче о лабиринте. В частности, он требует редукции всего графа целиком. Описываемый далее процесс более эффективен и может применяться к любому локально конечному графу.

Будем, начиная от a_0, переходить в G ко всем вершинам, достижимым по одному ребру, и в каждой вершине записывать ее расстояние от a_0. Затем, как выше при методе постепенного покрывания, переходим ко всем вершинам, которые можно соединить с a_0 2-реберными цепями, и снова помечаем их расстояния по мере от a_0. Если имеется несколько цепей к такой вершине, то мы учитываем только кратчайшие из них и указываем, от каких вершин они приходят. Это постепенное покрывание G от a_0 продолжается до тех пор, пока некоторая цепь P_1 длины M_1 не достигнет b_0. Затем из рассмотрения исключаются все вершины, расстояния которых превосходят M_1, и построение продолжается на оставшихся вершинах. Если b_0 достигается некоторой другой цепью P_2 длины $M_2 < M_1$, то все вершины с расстоянием, большим чем M_2, выбрасываются и т. д. Так как все расстояния возрастают, это построение после некоторого числа шагов закончится.

Задачи

1. Применить этот метод к графам правильных многогранников и сравнить его с методом Тэрри. Сколько шагов нужно сделать в каждом случае, чтобы достигнуть всех вершин?

2. Применить этот метод, чтобы найти путь через лабиринт в Хемптон Корте.

3*. В рассмотренном выше способе нахождения кратчайшей цепи для схем дорог с помощью редукции индекса получается только одна кратчайшая цепь. Могут ли быть найдены и все остальные такие цепи при надлежащем видоизменении редукции?

4*. Граф имеет ориентированные и неориентированные ребра, как, например, город с односторонним и двусторонним движением по разным улицам. Описать методы нахождения путей из одного пункта в другой, а также методы нахождения кратчайшего из этих путей.

3.4. Гамильтоновы циклы. Эйлеровы циклы характеризуются тем свойством, что существуют циклы, содержащие каждое ребро один раз. *Гамильтоновы циклы* определяются для конечных связных графов аналогичным образом, но только по отношению к вершинам: простой цикл называется *гамильтоновым,* если он проходит через каждую вершину графа. На рис. 3.4.1 указаны гамильтоновы циклы для нескольких простых графов.

Распространенная интерпретация задачи о гамильтоновых циклах состоит в следующем. Обед накрыт на круглом столе. Среди гостей некоторые являются друзьями. При каких условиях можно рассадить всех так, чтобы по обе стороны каждого из присутствующих сидели его друзья?

В применениях графов к играм вершины соответствуют различным позициям. Таким образом, существование гамильтонова цикла равносильно существованию циклической последовательности ходов, содержащей каждую позицию по одному разу. Примером является известная *задача о шахматном коне*: можно ли, начиная из произвольного поля на доске, ходить конем в такой последовательности, чтобы пройти через каждое из шестидесяти четырех полей и вернуться в исходное? На рис. 3.4.2 указано одно из возможных решений.

Гамильтоновой цепью в графе называется простая цепь, проходящая через все вершины по одному разу. Таким образом, в графе, изображающем ходы игры, гамильтонова цепь соответствует такой последовательности ходов из данной позиции, которая ведет всегда в новую позицию и проходит через все позиции. Бесконечный граф с гамильтоновой цепью имеет счетное число вершин.

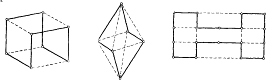


Рис. 3.4.1.

Как и в случае эйлеровых циклов, вопросы, связанные с гамильтоновыми циклами, можно обобщать в различных направлениях. Если не существует гамильтоновых циклов, то можно искать сумму непересекающихся простых циклов, проходящих через все вершины.

56	41	58	35	50	39	60	33
47	44	55	40	59	34	51	38
42	57	46	49	36	53	32	61
45	48	43	54	31	62	37	52
20	5	30	63	22	11	16	13
29	64	21	4	17	14	25	10
6	19	2	27	8	23	12	15
1	28	7	18	3	26	9	24

Рис. 3.4.2.

В ориентированных графах можно искать ориентированные циклы, проходящие через каждую вершину по одному разу.

Так называемая *задача о бродячем торговце*[1]) является задачей, относящейся к гамильтоновым цепям.

[1]) Иногда ее также называют задачей о коммивояжере. (*Прим. перев.*)

Район, который должен посетить бродячий торговец, содержит какое-то количество городов. Расстояния между ними известны, и нужно найти кратчайшую дорогу, проходящую через все пункты и возвращающуюся в исходный. Эта задача имеет ряд приложений в исследовании операций, например в вопросах о наиболее эффективном использовании подвижного состава или оборудования.

В задаче о бродячем торговце города можно представлять как вершины графа G, в котором каждой паре вершин приписывается расстояние $\mu(a, b)$. Если какие-нибудь две вершины не соединены, то можно положить $\mu(a, b) = \infty$. Задача тогда состоит в том, чтобы найти такой гамильтонов цикл P, для которого сумма

$$\mu(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu(a_i, a_{i+1})$$

минимальна. Так как обычно речь идет только о конечном числе вершин, задача может быть решена перебором; однако никакого эффективного алгорифма не известно. Имеются некоторые частные схемы для отдельных случаев. Один довольно большой пример определения кратчайшей воздушной линии, соединяющей все столицы штатов в США, просчитали до конца Данциг, Фалкерсон и Джонсон.

Несмотря на сходство в определениях для эйлеровых и гамильтоновых циклов, соответствующие теории для этих понятий имеют мало общего. Критерий существования эйлеровых циклов был установлен просто; для гамильтоновых циклов никакого общего правила не известно. Более того, иногда даже для конкретных графов бывает очень трудно решить, можно ли найти такой цикл. Очевидно, для изучения вопроса о существовании гамильтоновых циклов в связном графе предположение об отсутствии петель или кратных ребер не является ограничением.

Выведем некоторые условия, при которых можно утверждать, что гамильтонов цикл существует. Эти рассмотрения тесно связаны со свойствами максимальных простых цепей.

Обозначим через

$$A:\ (a_0, a_1)(a_1, a_2) \ldots (a_{l-1}, a_l) \qquad (3.4.1)$$

некоторую простую цепь длины l в графе G. Будем говорить, что A имеет *тип цикла*, если подграф

$$G_0 = G(a_0, a_1, \ldots, a_l) \tag{3.4.2}$$

имеет гамильтонов цикл. Отсюда, в частности, следует, что A является гамильтоновой цепью в G_0. Обозначим соответственно через $\rho_0^{(0)}$ и $\rho_l^{(0)}$ локальные степени вершин a_0 и a_l в графе (3.4.2). Пусть (a_0, a_i) — некоторое

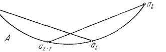


Рис. 3.4.3.

ребро в G_0. Если существует также ребро (a_l, a_{i-1}), то в G_0 будет гамильтонов цикл, а именно (рис. 3.4.3)

$$(a_0, a_i) \cup A(a_i, a_l) \cup (a_l, a_{i-1}) \cup A(a_{i-1}, a_0).$$

Если, однако,

$$\rho_l^{(0)} > l - \rho_0^{(0)},$$

то ясно, что хотя бы для одного ребра (a_0, a_i) должно существовать соответствующее ребро (a_l, a_{i-1}). Поэтому, если

$$\rho_0^{(0)} + \rho_l^{(0)} \geqslant l + 1,$$

то простая цепь A имеет тип цикла.

Будем говорить, что простая цепь (3.4.1) *полная*, если ее нельзя продолжить при помощи добавления ребер к какому-нибудь из концов. Тогда все ребра от a_0 и от a_l должны идти к вершинам графа (3.4.2), так что

$$\rho(a_0) = \rho_0^{(0)}, \quad \rho(a_l) = \rho_l^{(0)}.$$

Это дает нам теорему.

Теорема 3.4.1. *Полная простая цепь длины l имеет тип цикла, если*

$$\rho(a_0) + \rho(a_l) \geqslant l + 1.$$

Докажем, далее, следующее.

Теорема 3.4.2. *Максимальная*[1]) *простая цепь в связном графе может иметь тип цикла только тогда, когда граф имеет гамильтонов цикл.*

Доказательство. Если граф (3.4.2) имеет гамильтонов цикл, но G_0 не составляет всего графа, то из-за связности G существует некоторое ребро (a_i, b), в котором b не принадлежит G_0. Это, однако, невозможно, так как тогда нашлась бы простая цепь, которая была бы длиннее данной простой цепи A.

Из теорем 3.4.1 и 3.4.2 следует

Теорема 3.4.3. *В связном графе либо имеется гамильтонов цикл, либо длина его максимальных простых цепей удовлетворяет неравенству*

$$l \geqslant \rho(a_0) + \rho(a_l). \qquad (3.4.3)$$

Из условия (3.4.3) вытекает, что

$$l \geqslant \min(\rho(a_0) + \rho(a_l))$$

для всех пар вершин a_0 и a_l, причем можно даже ограничиться теми парами, для которых нет ребра (a_0, a_l). Отсюда следует

Теорема 3.4.4. *В графе без гамильтоновых циклов длина его длиннейших простых цепей удовлетворяет неравенству*

$$l \geqslant \rho_1 + \rho_2,$$

где ρ_1 и ρ_2 — две наименьшие локальные степени.

Как частный случай приведенных результатов получается

Теорема 3.4.5. *Если в графе G с n вершинами для любой пары вершин a_0 и a_l*

$$\rho(a_0) + \rho(a_l) \geqslant n - 1,$$

то G имеет гамильтонову цепь. Если

$$\rho(a_0) + \rho(a_l) \geqslant n,$$

то G имеет гамильтонов цикл.

Отсюда, в частности, следует результат Дирака о том, что граф имеет гамильтонов цикл, если для каждой его вершины $\rho(a) \geqslant \frac{1}{2} n$.

---

[1]) То есть длиннейшая (см. стр. 45). (*Прим. перев.*)

Приведем два вспомогательных утверждения, которые установили Эрдёш и Галлаи; эти утверждения понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 3.4.6. *Пусть G имеет гамильтонов цикл, вершины которого перечислены в циклическом порядке*:

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}. \tag{3.4.4}$$

Если две вершины, например a_0 и a_j, не связываются гамильтоновой цепью, то

$$\rho(a_1) + \rho(a_{j+1}) \leqslant n. \tag{3.4.5}$$

Доказательство. Указанные в условии вершины a_0 и a_j не могут быть соседними в (3.4.4); поэтому вершины a_0, a_1, a_j, a_{j+1} различны. Если G содержит ребро

$$(a_1, a_g), \quad 2 \leqslant g \leqslant j-1,$$

то не может быть ребра (a_{j+1}, a_{g-1}), так как это приводило бы к гамильтоновой цепи

$$a_0, a_{n-1}, \ldots, a_{j+1}, a_{g-1}, \ldots, a_1, a_g, \ldots, a_j.$$

Если имеется ребро

$$(a_1, a_g), \quad j+2 \leqslant g \leqslant n-1,$$

то нет ребра (a_{j+1}, a_{g+1}), а также нет ребра (a_1, a_{j+1}). Теперь неравенство (3.4.5) получается так же, как и в доказательстве теоремы 3.4.1.

Вершина называется *гамильтоновым центром*, если из нее выходит гамильтонова цепь к каждой из остальных вершин.

Теорема 3.4.7. *Пусть G — граф с гамильтоновым циклом (3.4.4). Если для всех вершин a_i, связанных с a_0 гамильтоновой цепью,*

$$\rho(a_1) + \rho(a_i) > n, \tag{3.4.6}$$

то a_0 есть гамильтонов центр.

Доказательство. Ясно, что существуют гамильтоновы цепи, идущие от a_0 к a_1 и к a_{n-1}, и доказательство проводится по индукции. Если есть гамильтонова цепь от a_0 к a_i, то (3.4.6) выполнено по предположению, и на основании теоремы 3.4.6 существует гамильтонова цепь, идущая от a_0 к a_{i-1}.

Задачи

1. Какие из графов правильных многогранников имеют гамильтоновы цепи и циклы?
2. Почему в теореме 3.4.4 можно не предполагать, что граф связен?

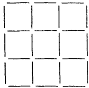


Рис. 3.4.4.

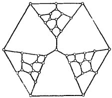


Рис. 3.4.5.

3. Разбить квадрат на n^2 мелких квадратов прямыми, параллельными его сторонам. (На рис. 3.4.4 изображен случай $n=3$.) Имеют ли такие графы гамильтоновы цепи и циклы?
4. Найти бесконечную гамильтонову цепь для случая $n=\infty$, аналогичного изображенному на рис. 3.4.4. Эта задача была решена Важовьи для произвольного числа измерений.
5. Имеют ли решения задачи о коне на шахматной доске с n^2 полями? Проверить для $n=3, 4, 5, 6, 7$.
6. Граф на рис. 3.4.5 плоский и однородный степени 3. Татт показал, что он не имеет гамильтонова цикла. Имеет ли он гамильтоновы цепи?

Глава 4

ДЕРЕВЬЯ

4.1. Свойства деревьев. Связный неориентированный граф называется *деревом*, если он не имеет циклов. В частности, дерево не имеет петель и кратных ребер. *Граф без циклов* есть граф, связные компоненты которого являются деревьями; иногда такой граф называется *лесом.* Любая цепь в графе без циклов является простой; любая часть такого графа также будет графом без циклов.

Теорема 4.1.1. *В дереве любые две вершины связаны единственной цепью.*

Доказательство. Если бы было две связывающие цепи, то был бы и цикл. Условие этой теоремы является также достаточным для того, чтобы граф был деревом.

Наглядное представление для дерева T можно получить при помощи следующей конструкции. Выберем произвольную вершину a_0. От a_0 проведем все ребра к вершинам, находящимся на расстоянии 1. От этих вершин проведем ребра к вершинам, находящимся на расстоянии 2 от a_0, и т. д. Из вершины a_n, расположенной на расстоянии n от a_0, выходит одно ребро к единственной предшествующей вершине a_{n-1}, находящейся от a_0 на расстоянии $n-1$, а также некоторое семейство ребер к вершинам a_{n+1}, находящимся на расстоянии $n+1$. Ни для какой из этих вершин a_n не может быть ребер, соединяющих ее с вершинами с тем же или меньшим расстоянием, кроме (a_{n-1}, a_n). Таким образом, дерево может быть представлено в форме, указанной на рис. 4.1.1.

В произвольном графе G вершина a называется *концевой*, если $\rho(a) = 1$, т. е. существует единственное ребро $E = (a, b)$ с концом a; ребро E называется ***концевым ребром.*** Из приведенного выше построения следует

Теорема 4.1.2. ***Любое нетривиальное конечное дерево имеет хотя бы две концевые вершины и хотя бы одно концевое ребро.***

Если выбрана некоторая вершина a_0, как на рис. 4.1.1, то назовем a_0 *корнем* дерева T, а само дерево — *деревом с корнем*.

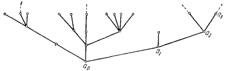


Рис. 4.1.1.

Иногда оказывается удобным выделить в дереве T некоторую определенную цепь

$$P = \ldots, (a_{-2}, a_{-1}), (a_{-1}, a_0), (a_0, a_1), (a_1, a_2), \ldots \quad (4.1.1)$$

и называть P *стволом* T. Этот ствол может быть или конечным, или одностороние-бесконечным, или двусторонне-бесконечным. Каждая вершина v в T связана

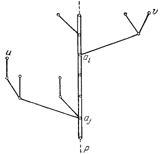


Рис. 4.1.2.

с ближайшей вершиной a_i из P единственной цепью. Будем говорить в этом случае, что *v принадлежит ветви дерева T, выходящей из a_i* (рис. 4.1.2).

Следующий результат о деревьях принадлежит Кэли, который исследовал эти графы в связи с химическими структурными формулами.

Теорема 4.1.3. *Число различных деревьев, которые можно построить на n данных вершинах, равно*

$$t_n = n^{n-2}. \tag{4.1.2}$$

Доказательство. Чтобы вывести эту формулу, воспользуемся методом, принадлежащим Прюферу. Обозначим элементы данного множества V, расположенные в некотором фиксированном порядке, числами

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{4.1.3}$$

Для любого дерева T, определенного на V, введем некоторый символ, характеризующий его однозначно. Согласно теореме 4.1.2 в T существуют концевые вершины. Обозначим через b_1 первую концевую вершину в последовательности (4.1.3), а через $E_1 = (a_1,\ b_1)$ — соответствующее концевое ребро. Удалив из T ребро E_1 и вершину b_1, мы получим новое дерево T_1. Для T_1 найдется первая в (4.1.3) концевая вершина b_2 с ребром $E_2 = (a_2,\ b_2)$. Эта редукция повторяется, пока после удаления ребра

$$E_{n-2} = (a_{n-2},\ b_{n-2})$$

не останется единственное ребро

$$E_{n-1} = (a_{n-1},\ b_{n-1}),$$

соединяющее две оставшиеся вершины. Тогда скобки

$$\sigma(T) = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-2}] \tag{4.1.4}$$

однозначно определяются деревом T, и двум различным деревьям T и T', очевидно, соответствуют разные символы такого вида. Каждая вершина a_i появляется в (4.1.4) $\rho(a_i) - 1$ раз.

Наоборот, каждый символ вида (4.1.4) определяет дерево T с помощью обратного построения. Если дано (4.1.4), то находится первая вершина b_1 в (4.1.3), которая не содержится в (4.1.4). Это определяет ребро $E_1 = (a_1,\ b_1)$. Далее удаляем вершины a_1 из (4.1.4) и b_1 из (4.1.3) и продолжаем построение для остающихся чисел. Получающийся в результате граф является деревом, что может быть установлено, например, по индукции. После удаления E_1 символ (4.1.4) будет содержать $n-3$ элемента. Если он соответствует дереву T_1, то граф T, получаемый из него добавлением E_1, также есть дерево, так как вершина b_1 не принадлежит T_1.

В (4.1.4) каждая вершина a_i может принимать все n возможных значений. Все они соответствуют различным деревьям, откуда и получается формула (4.1.2).

Упомянем кратко другую формулировку, также представляющую некоторый интерес. Пусть G — граф с n вершинами (4.1.3), не имеющий петель и кратных ребер. Каждое ребро тогда может быть представлено в форме

$$E_{ij} = (i,\ j), \qquad i \neq j. \tag{4.1.5}$$

Множество всех подстановок n произвольных объектов (например, чисел) образует *симметрическую группу* S_n. В этой группе каждую пару $(i,\ j)$ можно рассматривать как *транспозицию* двух элементов. *Базисом транспозиций* для S_n называется минимальное множество транспозиций, порождающее S_n. Можно показать, что семейство (4.1.5) транспозиций оказывается базисом транспозиций тогда и только тогда, когда оно состоит из $n-1$ транспозиций и соответствующий граф является деревом. Формула Кэли показывает, что число базисов транспозиций в S_n равно n^{n-2} (см. Джобек; другое доказательство формулы Кэли дает Бол; Ботт и Майберри, а также Уайтин используют деревья для вычисления определителей).

В формуле Кэли подсчитывается число всех деревьев с данными n вершинами. Многие из них изоморфны, и возникает вопрос о числе не изоморфных среди них. Это — более трудная задача, но она очень важна для многих приложений. По этому и по аналогичным вопросам, связанным с перечислением всех не изоморфных графов частных типов, существует обширная литература. Большинство этих работ опирается на общий принцип, сформулированный Пойа. Полный анализ таких задач о перечислении вывел бы нас за рамки этой книги; читатель может обратиться к блестяще написанной книге Риордана.

Обычная, популярная форма задачи Кэли следующая. Нужно соединить n городов железнодорожными линиями так, чтобы не строить лишних линий. Сколькими способами можно построить такую систему? Вопрос такого типа можно обобщить и прийти к вполне практическим задачам. Предположим, что известна стоимость $\mu(a, b)$ строительства железнодорожных линий для каждой пары городов a и b. Какова сеть дорог, соединяющая все города и имеющая минимальную возможную стоимость? Аналогичный вопрос возникает при проектировании электрических сетей. В терминологии теории графов его можно сформулировать следующим образом. В конечном графе G каждому ребру $E=(a, b)$ приписывается мера $\mu(a, b)$. Задача состоит в построении связной части T, содержащей все вершины G и такой, чтобы ее полная мера

$$\mu(T)=\sum_{E<T}\mu(E) \tag{4.1.6}$$

была минимальной. Очевидно, T есть дерево.

Эта *задача о минимальном соединении* внешне напоминает задачу о бродячем торговце. Однако, как мы увидим, эта задача гораздо проще, и для ее решения найдены эффективные алгорифмы. По-видимому, первый метод для решения этой задачи дал Борувка; сходный процесс предложил Краскал. (См. также статьи Шоке и Ярник — Косслера.)

Построение начинается с выбора кратчайшего ребра $A_1=E_1$ в G. На каждом последующем шаге строится часть A_i при помощи добавления к A_{i-1} такого ребра E_i, что оно является кратчайшим и граф A_i не имеет циклов. Если имеется несколько таких ребер одинаковой длины, то можно выбирать любое из них. Ясно, что последний граф A_{n-1} должен покрывать[1]) все вершины G и быть деревом. Докажем, что A_{n-1} имеет минимальную полную меру (4.1.6).

Допустим, что T является покрывающим вершины деревом с минимальной мерой

$$\mu(T)<\mu(A_{n-1}).$$

Тогда в A_{n-1} найдется первое не содержащееся в T ребро E_i, и граф $T\cup E_i$ будет иметь один цикл C. Так как A_{n-1} не имеет циклов, существует ребро E' в C, не принадлежащее A_{n-1}. Граф $T_1=T\cup E_i-E'$ также будет покрывающим вершины деревом для G, и, так как T имеет

[1]) См. п. 1.3. (*Прим. перев.*)

минимальную меру, мы получаем

$$\mu(E_i) \geqslant \mu(E').$$

Здесь знак строгого неравенства невозможен, так как иначе при построении A_i вместо E_i было бы выбрано E'. Поэтому

$$\mu(E_i) = \mu(E'), \quad \mu(T_1) = \mu(T),$$

так что T_1 также является деревом с минимальной мерой (4.1.6). Но T_1 имеет больше общих с A_{n-1} ребер, чем T, и, повторяя эту редукцию, мы получим

$$\mu(A_{n-1}) = \mu(T).$$

Задачи

1. Показать, что пересечение $T_1 \cap T_2$ двух поддеревьев T_1 и T_2 дерева T есть дерево.
2*. Определить полное число графов без циклов с n вершинами и m ребрами.
3*. Определить условия, при которых множество целых положительных чисел ρ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, было бы множеством локальных степеней дерева с n вершинами.
4. Показать, что в описанном выше решении задачи о минимальном соединении при подходящем выборе ребер E_i, получаются все минимальные соединения.
5. Как следовало бы преобразовать приведенное выше решение задачи, если потребовать, чтобы все графы A_i были деревьями?

4.2. Центры в деревьях. Предположим, что T — дерево, в котором расстояния $d(a, b)$ между вершинами ограничены в совокупности. Как и в п. 2.4, цепь $P(a_0, a_\delta)$ называется *диаметральной*, если ее длина δ максимальна; δ называется *диаметром T*.

Выберем в качестве ствола в T некоторую его диаметральную цепь P. Пусть v — вершина, принадлежащая ветви дерева T, выходящей из вершины a_i в P. Тогда должно быть

$$d(v, a_i) \leqslant i, \quad d(v, a_i) \leqslant \delta - i, \tag{4.2.1}$$

так как иначе одна из цепей

$$Q(v, a_i, a_0), \quad Q(v, a_i, a_\delta)$$

имела бы длину, бóльшую чем δ.

Предположим, с другой стороны, что условие (4.2.1) выполняется для всех вершин v. Рассмотрим расстояние $d(u, v)$ между двумя вершинами u и v в T, принадлежащими соответственно ветвям из вершин a_i и a_j (рис. 4.1.2).

Пусть сначала $i = j$, так что

$$d(u, v) \leqslant d(u, a_i) + d(a_i, v) \leqslant i + \delta - i = \delta.$$

Равенство здесь может быть только в том случае, когда

$$d(u, a_i) = i = \delta - i = \frac{1}{2}\delta,$$

$$d(v, a_i) = \frac{1}{2}\delta$$

и две цепи $Q(u, a_i)$ и $Q(v, a_i)$ не имеют общих ребер. Объединенная цепь

$$Q(u, v) = Q(u, a_{\delta/2}) \cup Q(a_{\delta/2}, v)$$

оказывается диаметральной, и $a_{\delta/2}$ есть единственная вершина в Q, принадлежащая стволу P. Очевидно, этот случай возможен только при четном диаметре δ.

Пусть теперь $i \neq j$, а обозначения соответствуют приведенным на рис. 4.1.2 с $i > j$. Тогда

$$d(u, v) = d(u, a_j) + i - j + d(a_i, v),$$

и по (4.2.1)

$$d(u, v) \leqslant j + i - j + \delta - i = \delta.$$

Равенство выполняется здесь только в случае

$$d(u, a_j) = j, \quad d(v, a_i) = \delta - i, \tag{4.2.2}$$

и тогда цепь

$$Q(u, v) = Q(u, a_j) \cup P(a_j, a_i) \cup Q(a_i, v)$$

является диаметральной. Из (4.2.1) и (4.2.2) следует

$$i \geqslant \frac{1}{2}\delta, \quad j \leqslant \frac{1}{2}\delta.$$

Мы получили следующую теорему.

Теорема 4.2.1. *Для того чтобы цепь $P(a_0, a_\delta)$ в дереве T была диаметральной, необходимо и достаточно, чтобы условия (4.2.1) выполнялись для каждой верши-*

6*

ны v. Каждая другая диаметральная цепь имеет общий с P участок

$$P(a_i, a_j), \quad i \geqslant \frac{1}{2}\delta \geqslant j,$$

который, в частности, если диаметр δ четный, может быть единственной вершиной $a_{\delta/2}$.

В п. 2.4 были определены понятия *радиуса* и *центров* для произвольного графа. В случае деревьев они имеют простые свойства. Мы будем пользоваться старыми обозначениями. Когда δ четно, максимальное расстояние от

$$c_0 = a_{\delta/2} \tag{4.2.3}$$

до любой другой вершины равно $\frac{1}{2}\delta$. Далее, если

$$d(u, c_0) = \frac{1}{2}\delta,$$

то u является концом диаметральной цепи, проходящей через c_0. Если δ нечетно, то максимальное расстояние от двух вершин

$$c_1 = a_{(\delta-1)/2}, \quad c_2 = a_{(\delta+1)/2} \tag{4.2.4}$$

не превосходит $\frac{1}{2}(\delta+1)$. Как и прежде, если

$$d(u, c_i) = \frac{1}{2}(\delta+1), \quad i = 1 \text{ или } 2,$$

то u является концом диаметральной цепи, проходящей через c_i. Для каждой из остальных вершин из P или для вершин, лежащих вне P, очевидно, максимальные расстояния превосходят эти значения.

Теорема 4.2.2. *Пусть T — дерево с диаметром δ и $P(a_0, a_\delta)$ — диаметральная цепь. Если δ четно, то T имеет единственный центр c_0, определенный в (4.2.3), и радиус $\rho = \frac{1}{2}\delta$; все диаметральные цепи проходят через c_0 и являются суммами пар радиальных цепей. Если δ нечетно, то T имеет два центра (4.2.4) и радиус $\rho = \frac{1}{2}(\delta+1)$; все диаметральные цепи проходят через эти центры и через центральное ребро $E_0 = (c_1, c_2)$; они являются суммами пар радиальных цепей по одной из каждого центра.*

В некоторых вопросах оказывается важным другое понятие — ***центра масс*** дерева. Для вершины v из дерева T обозначим через

$$E_i = (v, u_i)$$

произвольное ребро с концом v. Все ребра, принадлежащие цепям из v с первым ребром E_i, образуют часть

$$B_i = B(v, E_i),$$

которая называется *ветвью*, определяемой E_i и v; при этом ребро E_i включается в B_i. Число ребер в B_i есть $\nu_e(B_i)$, так что

$$\nu_e(T) = \sum_{i=1}^{\rho(v)} \nu_e(B_i). \qquad (4.2.5)$$

Число

$$w(v) = \max_{i=1,2,\ldots,\rho(v)} \nu_e(B_i)$$

называется *весом* дерева в v, а любая ветвь B_i, для которой

$$\nu_e(B_i) = w(v),$$

— *ветвью с весом. Центром масс* m_0 называется вершина с минимальным весом, а

$$w(m_0) = w(T)$$

— *весом* дерева T.

Сравним вес $w(v)$ с весом $w(u_1)$ в соседней вершине u_1, соединенной с v ребром $E_1 = (v, u_1)$. Ветви в u_1 обозначим через B_j', причем так, что E_1 содержится в B_1'. Из рассмотрения рис. 4.2.1 немедленно вытекает соотношение

$$\nu_e(B_1) + \nu_e(B_1') = \nu_e(T) + 1. \qquad (4.2.6)$$

Предположим, что некоторое B_j', $j \neq 1$, есть ветвь с весом в u_1. Из рис. 4.2.1 мы убеждаемся, что

$$\nu_e(B_1) = \sum_{j \neq 1} \nu_e(B_j') + 1,$$

так что в этом случае

$$\nu_e(B_1) \geqslant 1 + w(u_1),$$

или $w(v) > w(u_1)$. Это неравенство показывает, что если v есть центр масс, то для каждой соседней вершины u_1 единственной ветвью с весом является B_1'.

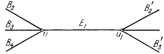


Рис. 4.2.1.

Пусть теперь B_1 есть ветвь с весом в центре масс v, так что

$$\nu_e(B_1) = w(v) = w(T).$$

Тогда, как мы видели,

$$(u_1) = \nu_e(B_1') \geqslant w(v)$$

и (4.2.6) превращается в

$$w(v) + w(u_1) = \nu_e(T) + 1. \qquad (4.2.7)$$

Случай 1. u_1 не является центром масс. Тогда

$$w(u_1) \geqslant w(v) + 1,$$

и из (4.2.7) следует

$$w(T) = w(v) \leqslant \frac{1}{2}\nu_e(T).$$

В этом случае в T может быть только один центр масс. В самом деле, из рис. 4.2.1 видно, что никакая вершина

$$v' \in \bigcup_{i \neq 1} B_i, \qquad v \neq v',$$

не может быть центром масс, так как она имеет ветвь, содержащую B_1 в качестве собственной части. Точно так же никакая вершина

$$v'' \in \bigcup_{j \neq 1} B_j'$$

не может быть центром масс, так как она имеет ветвь, содержащую B_1'.

Случай 2. u_1 есть центр масс:

$$w(v) = w(u_1) = w(T).$$

Тогда из (4.2.7) следует

Теорема 4.2.3. *Конечное дерево T имеет единственный центр масс, если*

$$w(T) \leqslant \frac{1}{2} \nu_e(T),$$

и имеет два соседних центра масс, если

$$w(T) = \frac{1}{2}(\nu_e(T) + 1).$$

Этот последний случай может встретиться только тогда, когда T имеет нечетное число ребер и, следовательно, четное число вершин.

Задача

1*. Исследовать для случая деревьев какое-нибудь из других понятий, введенных в п. 2.4.

4.3. Циклический ранг (цикломатическое число). Заметим, что выбор в дереве T корня a_0 (как это сделано на рис. 4.1.1) устанавливает взаимно однозначное соответствие между ребрами $E = (a, b)$ и теми их концами b, которые более удалены от a_0. Следовательно, для любого конечного дерева выполняется соотношение

$$\nu_v - \nu_e = 1 \qquad (4.3.1)$$

между числом вершин ν_v и числом ребер ν_e.

Пусть теперь G — произвольный конечный связный граф. Можно построить G из его ребер, выбрав сначала произвольное ребро, а затем добавляя последовательно по одному ребру так, чтобы каждое новое ребро имело хотя бы одну общую вершину с уже выбранными ребрами. Для первого ребра мы имеем

$$\nu_e = 1, \quad \nu_v = 2.$$

На каждом последующем шаге добавляется одно ребро и не более одной вершины. Таким образом, для конечного связного графа получается

$$\gamma(G) = \nu_e - \nu_v + 1 \geqslant 0. \qquad (4.23)$$

Определенное таким образом число $\gamma(G)$ называется *циклическим рангом* или *цикломатическим числом* графа G. Проведенный анализ показывает, что циклический ранг обращается в нуль только тогда, когда можно так выполнить построение G, чтобы каждое добавляемое ребро имело только один общий конец с ранее построенной частью. Отсюда следует, что G не будет иметь циклов. С другой стороны, для дерева выполняется (4.3.1), так что $\gamma(G) = 0$. Если граф G имеет только один цикл, то он превращается в дерево после удаления одного ребра; следовательно, $\gamma(G) = 1$. Обратно, если $\gamma(G) = 1$, то при построении G найдется одно ребро, после добавления которого образуется цикл. Отсюда следует

Теорема 4.3.1. *Для любого конечного связного графа G циклический ранг удовлетворяет неравенству*

$$\gamma(G) \geqslant 0. \tag{4.3.3}$$

При этом $\gamma(G) = 0$ тогда и только тогда, когда G является деревом, и $\gamma(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G содержит единственный цикл.

Согласно (4.3.2), графы с $\gamma(G) = 1$ могут быть охарактеризованы также тем свойством, что в них число ребер равно числу вершин.

Можно распространить понятие циклического ранга на произвольные конечные графы, полагая

$$\gamma(G) = \sum_i \gamma(G_i), \tag{4.3.4}$$

где суммирование происходит по всем связным компонентам G_i графа G. Очевидно, G является графом без циклов тогда и только тогда, когда $\gamma(G) = 0$. Из формулы (4.3.2) следует, что в общем случае

$$\gamma(G) = \nu_e - \nu_v + \tau_G, \tag{4.3.5}$$

где τ_G — число связных компонент.

4.4. Однозначные отображения. В п. 2.3 мы изучали с точки зрения теории графов взаимно однозначные отображения множества V на себя. Сделаем теперь то же для (*много-*)*однозначного отображения* τ множества V в себя и покажем, как можно описать граф отображения τ при помощи деревьев.

Отображение τ определяет бинарное отношение на V:

$$a \to \tau(a),\ a \in V.$$

Граф этого отношения является ориентированным и имеет по одному ребру

$$E = (a,\ \tau(a)),$$

выходящему из каждой вершины. Таким образом, отображение τ множества V в себя определяется ориентированным графом G с локальными степенями

$$\rho(a) = 1,\quad \rho^*(a),\quad a \in V.$$

Число $\rho^*(a)$ входящих в a ребер, т. е. число элементов V, которым при отображении τ соответствует a, может быть 0 или произвольным кардинальным числом.

Распространим терминологию п. 2.3 на наш случай. Назовем связные компоненты G_k графа G *обобщенными циклами отображения* τ.

Теорема 4.4.1. *Для того чтобы две вершины a и b принадлежали одному обобщенному циклу отображения, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие неотрицательные целые числа i и j, что*

$$\tau^i(a) = \tau^j(b). \tag{4.4.1}$$

Доказательство. Если (4.4.1) выполнено, то существует выходящая из a ориентированная цепь длины i, приводящая к некоторой вершине c, а также ориентированная цепь от b длины j к той же вершине c. Обратно, пусть a и b — вершины, связанные маршрутом, без учета направлений ребер

$$E_0 = (a,\ a_1),\ \ldots,\ E_{n-1} = (a_{n-1},\ b). \tag{4.4.2}$$

Если $n = 1$, то соотношение (4.4.1) выполняется, так как либо a есть образ b, либо наоборот. Пусть (4.4.1) выполняется для маршрута (4.4.2) с n ребрами. Если добавить еще ребро $E_n = (b,\ b')$, то реализуется одна из двух возможностей:

$$b = \tau(b'),\quad b' = \tau(b),$$

и из (4.4.1) мы соответственно получим

$$\tau^i(a) = \tau^{j+1}(b'),\quad \tau^{i+1}(a) = \tau^j(b').$$

Предположим теперь, что некоторая вершина a имеет *конечный порядок* n при отображении τ, т. е. $n > 0$ является минимальным показателем, для которого

$$a = \tau^n(a). \tag{4.4.3}$$

Тогда все вершины

$$C = \{a, \tau(a), \tau^2(a), \ldots, \tau^{n-1}(a)\} \tag{4.4.4}$$

различны и соединяются ориентированным простым циклом или *конечным циклом отображения* τ.

Теорема 4.4.2. *Каждый обобщенный цикл отображения содержит не более одного конечного цикла.*

Доказательство. Допустим, что найдется такая не содержащаяся в (4.4.4) вершина b, что

$$b = \tau^m(b).$$

Так как вершины a и b связаны, существуют такие показатели i и j, что выполнено (4.4.1), откуда

$$b = \tau^m(b) = \tau^{mj}(b) = \tau^{mi}(a),$$

что противоречит предположению относительно b.

Теорема 4.4.3. *Конечный обобщенный цикл отображения всегда содержит конечный цикл.*

Доказательство. Из конечности следует, что для каждого a найдутся показатели $m < n$, для которых

$$\tau^m(a) = \tau^n(a) = \tau^{n-m}(\tau^m(a)),$$

так что конечный цикл существует.

Этот цикл может оказаться петлей, если

$$\tau(a) = a,$$

т. е. если a является *неподвижной точкой* отображения τ.

Займемся теперь описанием вида графа G для отображения τ. Предположим сначала, что G_k есть один из его обобщенных циклов, содержащий конечный цикл (4.4.4). Для каждого $b \in G_k$, не принадлежащего C, найдется такой наименьший показатель $h > 0$, что

$$\tau^h(b) = \tau^i(a) = a_i \in C.$$

Будем говорить в этом случае, что b *относится к* a_i *с высотой* h. Существует единственная ориентированная цепь длины h, отходящая от b к a_i. Среди вершин, относящихся к a_i, будет некоторая вершина b_1 высоты 1:

$$\tau(b_1) = a_i.$$

Каждая из таких вершин соединена с a_i ребром, входящим в a_i и не принадлежащим циклу, определяемому вершинами из C. Далее, для каждого b_1 найдутся такие вершины b_2 высоты 2, что

$$\tau(b_2) = b_1$$

для некоторого b_1. Каждое b_2 соединяется со своим b_1 входящим в b_1 ребром. Повторяя это построение конечное или, быть может, счетное число раз, мы получим ребра из ориентированного обобщенного цикла.

В том случае, когда обобщенный цикл G_k не содержит конечного цикла, из теоремы 4.4.3 следует, что G_k бесконечен. Для любой вершины a существует бесконечная ориентированная цепь с вершинами

$$a, \ a_1 = \tau(a), \quad a_2 = \tau^2(a), \ \ldots$$

Для каждого b, не принадлежащего этой последовательности, существует такой наименьший показатель h, что

$$\tau^h(b) = \tau^i(b) = a_i.$$

Здесь мы также будем говорить, что b *относится к* a_i *с высотой* h. Множество вершин и их ребер может быть построено для каждого a_i, как и выше.

Рассмотрим теперь неориентированный граф $G_k^{(u)}$, определяемый обобщенным циклом G_k. Если некоторый $G_k^{(u)}$ содержит простой цикл $C^{(u)}$, то из единственности выходящего ребра для вершин из G_k следует, что C должно быть ориентированным простым циклом в G_k с вершинами (4.4.4). По теореме 4.4.2 $G_k^{(u)}$ может иметь не более одного цикла. Предположим, что такой цикл $C^{(u)}$ существует. В каждой вершине a_i цикла $C^{(u)}$ будет присоединяться конечное или бесконечное дерево с корнем a_i, связывающее вершину a_i со всеми относящимися к ней вершинами. Если $G_k^{(u)}$ не имеет цикла, то он должен быть деревом с бесконечными цепями (рис. 4.4.1 и 4.4.2).

Обратно, если некоторый неориентированный граф $G^{(u)}$ имеет компоненты двух описанных типов, то его ребра можно ориентировать так, что он станет графом G некоторого отображения τ. Допустим сначала, что в $G_k^{(u)}$ существует один простой цикл $C^{(u)}$. Чтобы определить τ, построим прежде всего из $C^{(u)}$ ориентированный цикл C.

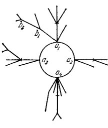


Рис. 4.4.1

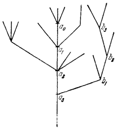


Рис. 4.4.2.

Всем остальным ребрам дается ориентация по направлению к корню $a_i \in C$ того дерева, которому они принадлежат. Если циклов нет, то выбираем некоторую бесконечную цепь P в $G_k^{(u)}$ с вершинами

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

в качестве ствола этого дерева. Ориентация на P вводится как указано в этой последовательности. Любое другое ребро E из $G_k^{(u)}$ принадлежит некоторой ветви из вершины a_i на P, и единственная соединяющая E с a_i цепь получает однозначно определенную ориентацию по направлению к a_i. Подведем итоги (см. Оре).

Теорема 4.4.4. *Для того чтобы неориентированный граф $G^{(u)}$ соответствовал некоторому отображению τ множества вершин V в себя, необходимо и достаточно, чтобы каждая его связная компонента либо содержала единственный цикл (возможно, петлю), либо являлась деревом с бесконечной цепью.*

Для конечного графа это условие упрощается.

Теорема 4.4.5. *Конечный граф $G^{(u)}$ является неориентированным графом, определяемым некоторым отображением, тогда и только тогда, когда каждая его связ-*

ная компонента $G_k^{(u)}$ содержит единственный цикл или, что то же самое, если ее циклический ранг равен

$$\gamma\left(G_k^{(u)}\right) = 1.$$

Последнее утверждение следует из теоремы 4.3.1.

Описанные представления отображений при помощи графов связаны с так называемыми *инцидентными паросочетаниями*. Будем говорить, что неориентированный граф G имеет *реберно-вершинное инцидентное паросочетание*, если существует взаимно однозначное отображение, сопоставляющее каждому ребру E единственную вершину v_E, инцидентную с ним.

Для некоторых типов графов непосредственно видно, что такие паросочетания должны существовать. В дереве можно выбрать корень a_0 и сопоставить каждому ребру E тот его конец v_E, который находится дальше от a_0. Точно так же, если G есть граф отображения τ, то каждое его ребро имеет вид $E = (v, \tau(v))$ с единственным v, и можно определить $E \to v$.

Теорема 4.4.6. *Для того чтобы граф G имел реберно-вершинное инцидентное паросочетание, необходимо и достаточно, чтобы каждая связная компонента графа G имела не более одного цикла.*

Доказательство. Предыдущие рассуждения вместе с теоремой 4.4.5 доказывают достаточность этого условия. Чтобы проверить его необходимость, покажем, что никакой связный граф, имеющий более одного цикла, не может иметь реберно-вершинного инцидентного паросочетания. Пусть граф G имеет простой цикл C с ребрами

$$E_0 = (a_0, a_1), \quad E_1 = (a_1, a_2), \; \ldots, \; E_{n-1} = (a_{n-1}, a_0), \quad (4.4.4')$$

и пусть в инцидентном паросочетании ребру E_0 отвечает a_1. Тогда каждому E_i должно при паросочетании сопоставляться a_{i+1} и ребру E_{n-1} сопоставляться a_0. Следовательно, всем ребрам вне C должны сопоставляться вершины вне C. Это показывает, что если бы граф G имел другой простой цикл C_1, то у C и C_1 не могло бы быть общих вершин. Тогда существовала бы такая простая цепь

$$P(c, c_1), \qquad c \in C, \quad c_1 \in C_1,$$

что c и c_1 — единственные вершины, общие у P с C и C_1.

Так как c уже является образом ребра из C, первому ребру в P должен при паросочетании сопоставляться его другой конец. Проведенное рассуждение может быть повторено последовательно для каждого ребра в P, пока последнему ребру не будет сопоставлено c_1. Это противоречит тому, что все вершины в C_1 являются образами ребер из C_1.

Вершинно-реберным инцидентным паросочетанием называется такое взаимно однозначное отображение множества вершин V в множество ребер $v \to E_v$, для которого E_v и v инцидентны.

Теорема 4.4.7. *Граф имеет вершинно-реберное инцидентное паросочетание тогда и только тогда, когда каждая его связная компонента содержит хотя бы один цикл или же бесконечную простую цепь.*

Доказательство. Чтобы доказать необходимость, заметим, что каждое дерево с вершинно-реберным паросочетанием должно иметь бесконечные простые цепи. Такая простая цепь получается построением цепи $P(a_0)$ из любой вершины a_0, если считать, что за каждой вершиной a_i из P следует ее образ — ребро E_i. Если циклов нет, то, очевидно, P не может кончиться.

Доказательство достаточности условий теоремы 4.4.7 производим в три шага.

Лемма 1. *В связном графе всегда можно инцидентно сопоставить при паросочетании ребра всем вершинам, кроме одной заданной вершины a_0.*

Доказательство. Разложим множество вершин

$$V = a_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

так, что каждое множество A_i состоит из всех вершин, находящихся на расстоянии i от a_0. Каждое $a_i \in A_i$ соединяется некоторым семейством ребер с вершинами из A_{i-1}, и для a_i выбираем одно из них.

Лемма 2. *Связный граф, содержащий хотя бы один цикл, имеет вершинно-реберное инцидентное паросочетание.*

Доказательство. Пусть C — произвольный простой цикл в G с ребрами (4.4.4′). Сопоставим при паросочетании каждой вершине a_i из C ребро $E_i = (a_i, a_{i+1})$. Затем удаляем из G все ребра и вершины цикла C, а также все ребра, инцидентные его вершинам a_i. Остающийся граф G' распадается на связные компоненты:

$$G' = \bigcup G'_k, \tag{4.4.5}$$

где G'_k может оказаться отдельной вершиной. Так как граф G связен, каждая компонента G'_k должна быть связана ребром хотя бы с одной вершиной a_i из C. Для каждого G'_k выберем одно такое ребро

$$E_k = (v_k, a_i) \tag{4.4.6}$$

и образуем граф

$$G''_k = E_k \bigcup G'_k. \tag{4.4.7}$$

По лемме 1 можно найти такое паросочетание для G''_k, что всем вершинам, кроме a_i, инцидентно сопоставлены ребра из G''_k. Объединяя эти паросочетания с вершинно-реберным паросочетанием для C, мы получим требуемое паросочетание.

Лемма 3. *Связный граф с бесконечной простой цепью имеет вершинно-реберное инцидентное паросочетание.*

Доказательство. Пусть P — бесконечная простая цепь с ребрами

$$E_0 = (a_0, a_1), \quad E_1 = (a_1, a_2), \ \ldots$$

Вершине a_i соотнесем E_i. Как в предыдущем доказательстве, удаляем из G все ребра и вершины простой цепи P, а также все ребра, инцидентные вершинам a_i. Для остающегося графа G' имеет место разложение (4.4.5) на связные компоненты G'_k. Для каждого G'_k выбираем одно ребро (4.4.6), связывающее его с вершиной a_i из P. Для каждого связного графа (4.4.7) по лемме 1 можно найти вершинно-реберное инцидентное паросочетание для всех вершин, кроме a_i. Если их объединить с паросочетанием в P, то мы получим требуемое паросочетание. Эти леммы завершают доказательство теоремы 4.4.7.

Изложенные результаты можно выразить в следующей, более популярной, форме. Город имеет улицы и площади, являющиеся пересечениями улиц. Спрашивается: можно ли назвать площади и улицы так, чтобы *к каж-*

дой площади подходила улица с тем же названием, например, к площади Эйзенхауэра всегда подходила бы улица Эйзенхауэра? Согласно теореме 4.4.7 обычно это возможно, лишь бы город был настолько велик, чтобы он имел по крайней мере один цикл из улиц. Однако если потребовать, чтобы *каждая улица* подходила к площади того же названия, то, согласно теореме 4.4.6, это оказывается невозможным, кроме небольших поселков, где либо совсем нет циклов из улиц, либо есть только один цикл.

Задачи

1. Определить число графов с n вершинами, являющихся неориентированными графами отображений.
2. Среди таких графов определить число неизоморфных.

4.5. Произвольно вычерчиваемые графы. Изучим одну частную задачу о цепях в графах. Пусть дан некоторый конечный эйлеров граф G; на основании п. 3.1 граф G связен и имеет четные локальные степени. В процессе построения эйлерова цикла обычно приходится соединять его из нескольких циклических участков. В качестве очень простого примера можно взять напоминающий восьмерку граф на рис. 4.5.1. Если начинать с вершины a, то можно пройти сначала цикл $abcda$; чтобы вычертить все ребра, необходимо затем присоединить цикл $cefgc$. Это приводит к рассмотрению следующей задачи, касающейся эйлеровых графов.

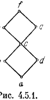


Рис. 4.5.1.

В каких случаях эйлеров граф будет обладать тем свойством, что эйлеров цикл всегда получится, если идти по любой цепи из некоторой вершины a, соблюдая единственное правило: в каждой вершине выбирать одно из еще не пройденных ребер?

Граф с таким свойством будет называться *произвольно вычерчиваемым* из вершины a. Такой граф может пригодиться как план расположения выставки, при котором все экспонаты будут автоматически просмотрены по разу, если всегда идти по еще не пройденным переходам.

Могут встречаться различные случаи. На рис. 4.5.2 изображен граф, произвольно вычерчиваемый из a, но не из какой-либо другой вершины; в то же время граф на рис. 4.5.3 произвольно вычерчиваем как из a, так и из b. Граф, который состоит из непересекающихся по ребрам простых циклов, имеющих только две общие вершины a и b, назовем *мотком*.

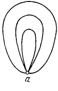


Рис. 4.5.2.

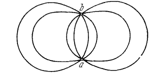


Рис. 4.5.3.

Чтобы определить общий вид произвольно вычерчиваемого графа, необходимо сначала вывести несколько вспомогательных утверждений.

Теорема 4.5.1. *Пусть G — граф, произвольно вычерчиваемый из вершины a, и H — некоторая его часть, являющаяся эйлеровым графом, содержащим a. Тогда как H, так и ее дополнение $\overline{H}$ произвольно вычерчиваемы из a.*

Доказательство. Граф H имеет эйлеров цикл, возвращающийся в a, и так как G произвольно вычерчиваем из a, остающийся граф $\overline{H}$ должен также быть вычерчиваемым из a. То же рассуждение применяется к H, как к дополнению графа $\overline{H}$.

Теорема 4.5.2. *Если G произвольно вычерчиваем из вершины a, имеющей локальную степень*

$$\rho(a) = 2n,$$

то G является прямой по ребрам суммой

$$G = \bigcup C_i \tag{4.5.1}$$

n простых циклов C_i, проходящих через a.

Доказательство. Эйлеров цикл в G из a возвращается в a; следовательно, существует также некоторый простой цикл C_1, возвращающийся в a. Так как C_1 — эйлеров граф, по теореме 4.5.1 остающийся граф $\overline{C}_1$ произвольно вычерчиваем из a. Повторяя эту операцию, мы получим (4.5.1).

Простые циклы в (4.5.1) имеют следующее свойство.

Теорема 4.5.3. *Любые два простых цикла C_1 и C_2 из* (4.5.1) *пересекаются не более чем в одной вершине, отличной от a.*

Доказательство. Граф $C_1 \cup C_2$ произвольно вычерчиваем из a согласно теореме 4.5.1. Пройдем по C_1 от a в двух возможных направлениях до первой встречи с C_2. Получаемые при этом две соответствующие вершины обозначим через b и c (рис. 4.5.4).

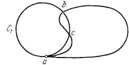


Рис. 4.5.4.

При вычерчивании $C_1 \cup C_2$ пройдем сначала тот участок C_1 до b, который не содержит c, а затем вернемся в a по участку простого цикла C_2, также не содержащему c. Далее пройдем из a по участку C_1 до c, не содержащему b, и затем вернемся в a по участку C_2, не содержащему b. После этого в a больше не остается непройденных ребер. Таким образом, по предположению весь граф $C_1 \cup C_2$ должен быть уже покрыт. Но если $b \neq c$, то участок $C_1(b, c)$ оказался бы непройденным; следовательно, $b = c$.

Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.5.4. *Для того чтобы эйлеров граф G был произвольно вычерчиваем из вершины a, необходимо и достаточно, чтобы все циклы графа G проходили через a.*

Доказательство. Предположим, что в G существует некоторый простой цикл C, не проходящий через a. Граф $\overline{C}$ имеет четные локальные степени; он может оказаться несвязным, но должен иметь некоторую связную компоненту K, которая содержит a. K является эйлеровым графом; поэтому по теореме 4.5.1 этот граф произвольно вычерчиваем из a. Сказанное должно быть справедливо и для связного графа $G_1 = K \cup C$. Но это приводит к противоречию. Действительно, существует эйлеров цикл в K, выходящий из a и в a возвращающийся. Тогда в a больше не остается ребер из G_1, и все ребра из C оказываются непройденными.

Наоборот, пусть каждый цикл в G проходит через a. Если бы граф G не был произвольно вычерчиваемым, то нашелся бы цикл P, проходящий через a и исчерпывающий все ребра в этой вершине, но не покрывающий весь граф G. Дополнение $\overline{P}$ тоже являлось бы эйлеровым графом, а так как каждый эйлеров граф имеет цикл, то мы приходим к противоречию.

Из теоремы 4.5.4 получается простой критерий для графов, произвольно вычерчиваемых более чем из одной вершины.

Теорема 4.5.5. *Граф, произвольно вычерчиваемый более чем из одной вершины, является мотком.*

Доказательство. Пусть a и b — две вершины, из которых граф G произвольно вычерчиваем. Согласно теореме 4.5.4 каждый цикл в G проходит через a и через b. В представлении (4.5.1) простые циклы могут иметь общими вершинами только a и b, следовательно, они образуют моток.

Теорема 4.5.4 определяет простой способ построения всех произвольно вычерчиваемых графов. Обозначим через S_a звезду в a, состоящую из всех ребер с концом в этой вершине; S_a включает также все петли в a. Тогда

$$G = S_a \cup G_1.$$

Теорема 4.5.4 показывает, что граф G произвольно вычерчиваем из a тогда и только тогда, когда он является эйлеровым графом и G_1 не имеет циклов.

Пусть, наоборот, дан некоторый граф G_1 без циклов; тогда G_1 есть прямая сумма деревьев. Выберем не принадлежащую G_1 вершину a и проведем ребра от a к вершинам из G_1 так, чтобы эти вершины имели четные локальные степени в новом графе G. Это можно сделать, проводя только по одному ребру от a к вершинам нечетной степени в G_1 и совсем не проводя ребер к вершинам четной степени. Вообще, можно провести произвольное нечетное число ребер к каждой вершине нечетной степени и произвольное четное число ребер к каждой вершине четной степени (рис. 4.5.5). К этим ребрам можно добавить петли в a. Получающийся граф эйлеров, так как по теореме 1.2.1 $\rho(a)$ также будет четно. Мы установили следующее.

Теорема 4.5.6. *Все произвольно вычерчиваемые графы получаются из графов без циклов G_1 при помощи соединения вершин G_1 ребрами с новой вершиной a так, чтобы построенный граф имел четные степени; в a могут быть добавлены петли.*

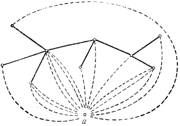


Рис. 4.5.5.

Изложенные здесь результаты взяты из статьи автора (Оре). Изучение произвольно вычерчиваемых графов было продолжено Беблером и Харари.

Глава 5

ЛИСТЫ И БЛОКИ

5.1. Соединяющие ребра и вершины. Обозначим через A некоторое подмножество множества вершин V графа G, а через

$$\overline{A} = V - A$$

его дополнение. Это множество определяет разложение множества ребер G на три непересекающихся класса (рис. 5.1.1).

1. *Внутренние ребра* $E_1 = (a_1, a_2)$, $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, лежащие в A, т. е. E_1 есть ребро в подграфе $G(A)$.

2. *Соединяющие ребра* (*связывающие ребра*, или *касающиеся A ребра*) $E_2 = (a, \overline{a})$, $a \in A$, $\overline{a} \in \overline{A}$, с одной вершиной в A и другой вершиной в $\overline{A}$.

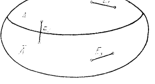


Рис. 5.1.1.

3. *Внешние ребра* $E_3 = (\overline{a}_1, \overline{a}_2)$, $\overline{a}_1 \in \overline{A}$, $\overline{a}_2 \in \overline{A}$, которые являются внутренними для $\overline{A}$.

Число соединяющих ребер для множества A будем обозначать через

$$k = \rho(A, \overline{A}) \qquad (5.1.1)$$

и называть *числом реберного соединения* A и $\overline{A}$. Можно также говорить, что A *k-реберно соединено*, или что A есть *полуостров ранга k*. *Полуостровом* называется множество A, для которого $k = 1$.

Сумма

$$\rho(A) = \sum_{a \in A} \rho(a) \qquad (5.1.2)$$

локальных степеней вершин из A представляет собой полное число выходящих из них ребер, причем лежащие в A ребра (включая петли) считаются дважды, а соединяющие ребра — один раз. Поэтому, если мы вычтем из (5.1.2) число реберного соединения (5.1.1), то получим удвоенное число лежащих в A ребер. Следовательно, число ребер в каждом из трех введенных классов равно соответственно

$$\frac{1}{2}(\rho(A) - \rho(A, \overline{A})), \quad \rho(A, \overline{A}), \quad \frac{1}{2}(\rho(\overline{A}) - \rho(A, \overline{A})). \quad (5.1.3)$$

Отсюда непосредственно получаем утверждение:

Теорема 5.1.1. *Число реберного соединения для конечного множества A удовлетворяет условию*

$$k = \rho(A, \overline{A}) \equiv \rho(A) \pmod 2. \quad (5.1.4)$$

В частности, если локальные степени $\rho(A)$ в A четны, то k четно. Конечный граф с четными локальными степенями не может иметь полуостровов.

Граф G называется *k-реберно связным*, если для любого множества $A \neq \varnothing$ и $A \neq V$ число реберного соединения не меньше k. Максимальное число k_0 такого вида называется *реберной связностью* графа G. Граф связен тогда и только тогда, когда $k_0 \geqslant 1$. Очевидно,

$$k_0 \leqslant \min_{v \in V} \rho(v). \quad (5.1.5)$$

Аналогичные понятия можно ввести для вершин. Любая часть H и ее дополнение

$$\overline{H} = G - H$$

определяют разложение множества вершин на три класса.

1. *Внутренние вершины* H, не инцидентные никаким ребрам из $\overline{H}$.

2. *Соединяющие вершины*, инцидентные ребрам как из H, так и из $\overline{H}$.

3. *Внешние вершины*, т. е. внутренние вершины $\overline{H}$.

Эти понятия будут использоваться главным образом по отношению к подграфу $H = G(A)$. Обозначим через $C(A)$ множество соединяющих вершин для H (или A). Оно состоит из тех концов соединяющих ребер, которые принадлежат A. Множество оставшихся концов соединяющих ребер обозначим через $C'(A)$. Мы имеем:

$$C'(A) \cap C(A) = \varnothing, \quad C(\overline{A}) = C'(A),$$
$$C(A) \subset A, \qquad C'(A) \subset \overline{A}.$$

Соединяющий граф $G(A, \overline{A})$ есть двудольный граф, ребрами которого являются соединяющие ребра, а множествами вершин — $C(A)$ и $C'(A)$. Ясно, что

$$G = G(A) \cup G(\overline{A}) \cup G(A, \overline{A}).$$

Числом вершинного соединения $l(H)$ части H называется число ее соединяющих вершин; будем говорить, что часть H (и $\overline{H}$) *$l(H)$-вершинно соединена.* Таким образом, одно ребро не более чем 2-вершинно соединено. Эти понятия применяются также к множествам вершин, если при этом брать подграф $H = G(A)$, определяемый множеством A. В соответствии с этим определением одна неизолированная вершина 1-вершинно соединена; множество из l вершин не более чем l-вершинно соединено.

Предположим, теперь, что A — такое множество, для которого оба графа

$$G(A), \ \overline{G(\overline{A})} = G(\overline{A}) \cup G(A, \overline{A}) \qquad (5.1.6)$$

имеют внутренние вершины. Если для каждого такого множества A имеет место

$$l(G(A)) = \nu(C(A)) \geqslant l,$$

то будем говорить, что граф G *l-вершинно связен.* Наибольшее l_0, для которого G l_0-вершинно связен, называется *вершинной связностью* графа G. Легко видеть, что граф G связен в обычном смысле тогда и только тогда, когда $l_0 \geqslant 1$.

Согласно этому определению формально можно было бы считать, что граф имеет произвольно большую вершинную связность, если не существует таких множеств A, что оба графа (5.1.6) имеют внутренние вершины.

Теорема 5.1.2. *Для того чтобы в графе G не существовало таких множеств A, что оба графа (5.1.6) имеют внутренние вершины, необходимо и достаточно, чтобы G содержал полный граф U, покрывающий множество вер-*

шин V; другими словами, граф G должен иметь диаметр $d_0 = 1$.

Доказательство. Если граф U существует, то каждая вершина из A соединена ребром с каждой вершиной из $\bar{A}$, так что $G(A)$ не может иметь внутренних вершин. Обратно, пусть нет таких множеств A, что оба графа (5.1.6) имеют внутренние вершины. Возьмем произвольную вершину v_0 с инцидентными ей ребрами

$$E_i = (v_0, v_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Тогда v_0 — внутренняя вершина графа

$$G(A), \quad A = \{v_0, v_1, \ldots\}. \tag{5.1.7}$$

Так как все вершины в $\bar{A}$ должны быть инцидентны ребрам из $G(A)$, мы имеем $A = V$.

Такое положение вызывает иногда потребность ограничить определение вершинной связности, вводя его лишь для графов с $d_0 \geqslant 2$. Для такого графа G число вершин должно быть не менее чем $l_0 + 2$. Аналогично (5.1.5) мы имеем

$$l_0 \leqslant \rho(v_0) \tag{5.1.8}$$

для всех вершин v_0, для которых существуют вершины v на расстоянии не менее 2. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть граф (5.1.7), построенный при доказательстве теоремы 5.1.2.

Понятия разделяющих вершин и ребер были расширены до понятия разделяющих графов. Изучение разделения при помощи кратчайших цепей было проведено Маклейном; ряд других обобщений ввели Неттльтон, Гольдберг и Грин.

Задачи

1. Определить реберную и вершинную связности для графов правильных многогранников.

2*. Исследовать соотношения между реберной и вершинной связностями для графа и его смежностного графа.

3. Доказать, что максимальное число ребер в графе с $n \geqslant 3$ вершинами и реберной связностью k_0 равно

$$\nu_e = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + k_0,$$

и найти соответствующие графы с максимальным числом ребер.

4. Та же задача для вершинной связности.

5.2. Листы. Ребро $E=(a,\ b)$ в графе G называется *циклическим ребром*, если оно принадлежит некоторому циклу. Петля есть циклическое ребро. Никакое концевое ребро не может быть циклическим. Дерево не имеет циклических ребер, и, обратно, связный граф без циклических ребер является деревом.

Ребро $E=(a,\ b)$ называется *разделяющим ребром* (или *мостом*, или *разрезающим ребром*) в G, если в графе G_1, получающемся после удаления E, вершины a и b не связаны. Таким образом,

$$G_1 = H_1 \cup H_2, \tag{5.2.1}$$

где H_1 и H_2 не пересекаются, H_1 содержит a и H_2 содержит b. Будем также считать E разделяющим ребром, если оно является концевым; в этом случае один из графов H_1 или H_2 в (5.2.1) сведется к одной вершине. Связный граф имеет разделяющее ребро тогда и только тогда, когда его реберная связность равна $k_0=1$. Из теоремы 5.1.1. следует

Теорема 5.2.1. *Конечный граф с четными локальными степенями не может иметь разделяющих ребер.*

Отметим еще одно простое свойство.

Теорема 5.2.2. *Ребро E является разделяющим тогда и только тогда, когда оно не является циклическим.*

Доказательство. Если E — циклическое ребро, то два его конца a и b остаются связанными после его удаления, так что разложение (5.2.1) невозможно. Обратно, если ребро E не циклическое, то не существует цепей, соединяющих a и b и не содержащих E.

Будем говорить, что две вершины a_0 и b_0 *циклически-реберно связаны*, если существует маршрут P из циклических ребер

$$P=(a_0,\ a_1)(a_1,\ a_2)\ \dots\ (a_{n-1},\ b_0), \tag{5.2.2}$$

имеющий a_0 и b_0 своими концами. Очевидно, можно считать, что P есть цепь или даже простая цепь. Этому понятию можно дать и другое, равносильное определение. Вершины a_0 и b_0 циклически-реберно связаны, если существует такая последовательность простых циклов

$$C_1,\quad C_2,\quad \dots,\quad C_k \tag{5.2.3}$$

с a_0 на C_1 и b_0 на C_k, что каждая пара соседних циклов имеет хотя бы одну общую вершину.

Циклически-реберная связность определяет отношение эквивалентности на множестве вершин V графа G. Множество всех вершин, циклически-реберно связанных с данной вершиной a_0, назовем *листовым множеством* $L(a_0)$ [1]), которому принадлежит a_0. Листовое множество может состоять только из вершины a_0; тогда листовое множество a_0 называется *особым*. Это может случиться только тогда, когда все ребра в a_0 являются петлями или разделяющими ребрами.

Подграф $G(L)$ называется *листом*, определяемым листовым множеством L [2]). Все ребра в $G(L)$ циклические. Если, например, a и b в L соединены ребром $E = (a, b)$, то существует связывающая a и b простая цепь $P(a, b)$, которая состоит из циклических ребер, принадлежащих $G(L)$. Если P не содержит ребра E, то его можно добавить к P и получить содержащий E простой цикл C.

Граф $G(L)$ *циклически замкнут*, т. е. если какой-нибудь простой цикл C в G имеет общую вершину с L, то весь простой цикл C содержится в $G(L)$. Поэтому каждое соединяющее ребро для L должно быть разделяющим ребром. Заметим также, что не может быть более одного такого ребра, связывающего два листовых множества L_1 и L_2, так как иначе эти ребра оказались бы циклическими. Эти рассуждения приводят к теореме.

Теорема 5.2.3. *Для любого листового множества L все соединяющие ребра будут разделяющими. Каждый лист $G(L)$ 2-реберно связен и является максимальной частью графа G с этим свойством.*

Доказательство. Остается проверить только последнее утверждение. Любая часть H, которая 2-реберно связна, является связной, и любое ребро в H будет циклическим. Таким образом, H содержится в некотором листе $G(L)$.

---

[1]) В оригинале — leaf. (*Прим. перев.*)

[2]) В оригинале — graph of the leaf. Здесь мы переносим введенный автором термин с множества вершин на соответствующий подграф. (*Прим. перев.*)

Задачи

1. Справедлива ли теорема 5.2.1 для бесконечных графов?
2. Доказать, что для конечного графа с разделяющими ребрами существуют по крайней мере два листовых множества с одним соединяющим ребром.
3. Положим $\gamma(E)=1$ или $\gamma(E)=0$ в зависимости от того, является E разделяющим ребром или нет. Доказать, что число листов в G равно

$$\lambda(G) = 1 + \sum_{E \in G} \gamma(E). \qquad (5.2.4)$$

5.3. Гомоморфные образы графа. Для графа G с множеством вершин V пусть τ есть однозначное отображение множества V в другое множество V_1. Пусть на V_1 определен граф G_1. Назовем τ *гомоморфизмом* G в G_1, если для любого ребра $E=(a,\ b)$ в G существует соответствующее ребро

$$E_1 = \tau(E) = (\tau(a),\ \tau(b)) = (a_1,\ b_1) \qquad (5.3.1)$$

в G_1. Граф на V_1, состоящий из всех ребер $\tau(E)$, называется *гомоморфным образом* $\tau(G)$ графа G в G_1.

При гомоморфизме τ графа G множество вершин V распадается на попарно непересекающиеся *множества прообразов*

$$V = \bigcup_{a_1 \in V_1} \tau^{-1}(a_1),$$

где $\tau^{-1}(a_1)$ состоит из всех вершин графа G, имеющих один и тот же образ a_1 в $\tau(G)$. Тогда при отображении τ всем вершинам из подграфа $G(\tau^{-1}(a_1))$ будет соответствовать вершина a_1. Таким образом, в $\tau(G)$ будет существовать ребро (5.3.1) тогда и только тогда, когда существует некоторое ребро

$$E = (a,\ b),\ a \in \tau^{-1}(a_1),\ b \in \tau^{-1}(b_1) \qquad (5.3.2)$$

в G.

Следует указать, что это определение гомоморфизма графа не совсем точно. Обычно бывает несколько ребер (5.3.2) в G, связывающих два множества прообразов. Тогда можно либо соединять соответствующие вершины a_1 и b_1 в (5.3.1) единственным ребром, либо считать E_1 кратным ребром, повторяя его столько раз, сколько существует связывающих ребер (5.3.2). Чтобы различить эти два типа отображений, можно называть их: в случае однократного ребра — (*простым*) *гомоморфизмом*, в случае многократного ребра — *кратным гомоморфизмом*. Если

$$a_1 = \tau(a) = \tau(b), \qquad (5.3.3)$$

то в случае простого гомоморфизма мы будем считать, что ребру E в (5.3.2) соответствует вершина a_1. В случае кратного гомоморфизма для каждого ребра (5.3.2), удовлетворяющего (5.3.3), нужно вводить в a_1 петлю.

В том случае, когда на множестве V задано отношение R, этой неопределенности не возникает. Если дано отображение τ, то образ отношения R определяется как такое отношение R_1 на множестве V_1, что

$$a_1 R_1 b_1$$

выполняется тогда и только тогда, когда в V выполняется некоторое соотношение

$$aRb,\ a_1 = \tau(a),\ b_1 = \tau(b).$$

Пусть теперь G — произвольный граф. Определим отображение τ его множества вершин V на новое множество

$$V_1 = V_1(L_1),$$

элементы которого $\{L_1\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с семейством $\{L\}$ всех листовых множеств G. Гомоморфный образ, граф $G_1 = \tau(G)$, будет иметь своим множеством вершин V_1, и в G_1 будет существовать ребро (L_1, L_1') тогда и только тогда, когда два соответствующих листовых множества L и L' связаны ребром в G. Назовем граф G_1 ***листовой композицией*** для G. Мы заметили в п. 5.2, что два листовых множества в G могут соединяться не более чем одним ребром. Кроме того, граф G_1 не может иметь циклов, так как любой такой цикл происходил бы из цикла в G, проходящего через несколько листов. Таким образом, можно утверждать следующее (рис. 5.3.1).

Теорема 5.3.1. *Любой граф G гомоморфен своей листовой композиции G_1, и при этом множествами прообразов вершин G_1 являются листовые множества G. G_1 есть граф без циклов.*

Имеется несколько частных типов гомоморфизмов графа. Гомоморфизм называется *независимым* или *разделенным*, если никакие две вершины из одного множества прообразов не соединены ребром. Любой независимый гомоморфизм можно получить как последовательность *элементарных независимых гомоморфизмов*, состоящих в отождествлении двух не соединенных ребром вершин.

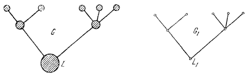


Рис. 5.3.1.

Гомоморфизм называется *связным*, если подграфы для множеств прообразов связны. Связный гомоморфизм можно построить с помощью ряда *элементарных связных гомоморфизмов*, состоящих в отождествлении концов одного ребра. Гомоморфизм в теореме 5.3.1, очевидно, связный.

Вообще, подграфы для множеств прообразов состоят из нескольких связных компонент. Тогда гомоморфизм можно осуществить в два шага, сначала стягивая каждую компоненту в одну вершину, а затем отождествляя эти независимые вершины в каждом множестве. Мы получаем теорему:

Теорема 5.3.2. *Любой гомоморфизм является произведением связного и независимого гомоморфизмов.*

Если $V = \bigcup C_i$ есть разложение V на непересекающиеся классы C_i, то часто удобно обозначать соответствующий при гомоморфизме граф через

$$G_1 = G/C.$$

5.4. Блоки. В п. 5.2 было введено отношение эквивалентности на множестве вершин V при помощи понятия циклически-реберной связности. Аналогичным образом определим теперь эквивалентность на семействе ребер графа G. Два ребра E_1 и E_2 называются *сильно циклически связанными*, если существует такая последовательность простых циклов (5.2.3), что E_1 принадлежит C_1, E_2 принадлежит C_k и любая пара соседних циклов C_i и C_{i+1} имеет по крайней мере одно общее ребро. Докажем теорему:

Теорема 5.4.1. *Два ребра сильно циклически связаны тогда и только тогда, когда существует простой цикл, содержащий оба эти ребра.*

Достаточно показать следующее.

Теорема 5.4.2. *Если E_1 — ребро в простом цикле C_1, E_2 — ребро в простом цикле C_2, а C_1 и C_2 имеют хотя бы две общие вершины, то существует простой цикл, содержащий оба ребра E_1 и E_2.*

Доказательство. Можно считать, что E_1 не принадлежит C_2. Тогда, проходя по C_1 в обе стороны от ребра E_1, мы найдем соответственно две первые вершины a_1 и a_2, принадлежащие также C_2. Обозначим через

$$C_1(a_1, E_1, a_2), \quad C_2(a_2, E_2, a_1)$$

участки циклов C_1 и C_2, содержащие соответственно E_1 и E_2. Их сумма

$$C = C_1(a_1, E_1, a_2) \cup C_2(a_2, E_2, a_1)$$

есть простой цикл, содержащий оба ребра (рис. 5.4.1).

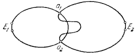


Рис. 5.4.1.

Можно говорить также, что две вершины a_1 и a_2 *сильно циклически связаны*, если существует пара сильно циклически связанных ребер E_1 и E_2, инцидентных соответственно a_1 и a_2, другими словами, если a_1 и a_2 расположены на одном простом цикле. Нужно отметить, что, в отличие от случая ребер, это определение не дает отношения эквивалентности для вершин. Например, на рис. 5.4.2 ребра в C_1 сильно циклически связаны и ребра в C_2 — тоже. Таким образом, a_1 и a_2 сильно циклически связаны, a_2 и a_3 также сильно циклически связаны; однако для a_1 к a_3 это не имеет места.

Множество всех ребер, сильно циклически связанных с ребром E, образует некоторую часть графа, называемую *блоком* [1]), определяемым ребром E. Множество вершин L^* этого графа называется *блоковым множеством*, определяемым ребром E [2]). Блок является связным графом. Отметим, что он может состоять из единственного ребра [3]).

Лемма. *Если $P(a_0, b_0)$ — простая цепь, связывающая две различные вершины из блокового множества L^*, то все ребра в P принадлежат этому блоку.*

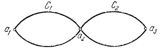


Рис. 5.4.2.

Доказательство. Если утверждение леммы не выполняется, то, выделяя в случае надобности из P участок, можно считать, что в $P(a_0, b_0)$ нет ребер, принадлежащих данному блоку, определяемому ребром E. Но это приводит к противоречию, так как в блоке существует простая цепь $Q(b_0, a_0)$; следовательно,

$$P(a_0, b_0) \cup Q(b_0, a_0)$$

есть простой цикл, ребра которого сильно циклически связаны с E.

Из этой леммы следует, что блок является подграфом $G(L^*)$ [4]). Он сильно циклически замкнут в том смысле, что если простой цикл C имеет хотя бы две вершины, общие с L^*, то все ребра из C принадлежат $G(L^*)$. Поэтому два различных блока могут иметь не более одной общей вершины. Очевидно, все вершины в L^* цик-

[1]) В оригинале — lobe graph. (*Прим. перев.*)

[2]) В оригинале — lobe. Здесь, так же как в п. 5.2, мы переносим основное название с множества вершин на соответствующий граф. См. примечание [2]) на стр. 106. (*Прим. перев.*)

[3]) В частности, каждая петля составляет отдельный блок. (*Прим. перев.*)

[4]) Здесь нужно оговорить, что граф G не имеет петель. (*Прим. перев.*)

лически-реберно связаны[1]), и, таким образом, каждый лист $G(L)$ будет иметь непересекающееся по ребрам разложение

$$G(L) = \cup\, G(L_i^*) \qquad (5.4.1)$$

на семейство блоков.

В графе G вершину a назовем *разделяющей вершиной* (*разрезающей вершиной*), если существует собственная непустая часть H, имеющая a своей единственной соединяющей вершиной. Так как в любой вершине $b \neq a$ из H все ребра должны идти к вершинам из H, $H = G(A)$ является подграфом. Также $\overline{H} = G(B)$ является подграфом, имеющим только одну общую с H вершину a. Таким образом, если a есть разделяющая вершина, то имеет место прямое по ребрам разложение

$$G = G(A) \cup G(B),\ V = A \cup B,\ A \cap B = a. \quad (5.4.2)$$

Обратно, разложение (5.4.2) может быть использовано для определения разделяющей вершины. Согласно этому определению вершина с петлей является разделяющей.

Теорема 5.4.3. *Следующие свойства графа равносильны:*

1. *Граф G связен и не имеет разделяющих вершин.*
2. *Любая пара ребер принадлежит некоторому простому циклу.*
3. *Любая пара вершин принадлежит некоторому простому циклу.*
4. *Если a, b, c — три различные вершины, то существует простая цепь $P(a, b, c)$.*
5. *Вершинная связность $l_0 \geqslant 2$.*

Доказательство. Если граф G связен и имеет разделяющую вершину, то разложение (5.4.2) показывает, что не все пары ребер лежат на простом цикле. Предположим, что G не имеет разделяющих вершин. Возьмем блок $H = G(L^*)$, определяемый некоторым ребром E. Если H не совпадает с целым графом, то он имеет некоторую соединяющую вершину a, в которой есть ребра дополнительного графа $\overline{H}$. Построим часть H_1 графа $\overline{H}$, состоящую из ребер всех цепей, выходящих из a и

[1]) Если только $G(L^*)$ не является единственным ребром. (*Прим. перев.*)

содержащихся в $\overline{H}$. Этот граф H_1 является компонентой $\overline{H}$, так что его соединяющие вершины должны принадлежать H. Но граф H связен; поэтому из леммы следует, что a есть единственная соединяющая вершина для H_1. Так как G не имеет разделяющих вершин, $H = G$. Тогда граф G сильно циклически связен, и по теореме 5.4.1 любая пара его ребер содержится в простом цикле. Это доказывает равносильность свойств 1 и 2.

Очевидно, из 2 следует 3. С другой стороны, если выполняется 3, то граф G связен и не может иметь разделяющих вершин, так как иначе отличные от a вершины $x \in A$, $y \in B$ в (5.4.2) не могли бы принадлежать одному простому циклу. Таким образом, 3 и 1 равносильны.

Если выполнено 4, то граф G связен и не может иметь разделяющих вершин, так как иначе три вершины x, y, a, определенные, как выше в (5.4.2), не могли бы располагаться на какой-то простой цепи $P(x, y, a)$ в этом порядке. Обратно, если выполняется 1, то каждая пара вершин a, b и b, c лежит на простом цикле, откуда легко получить простую цепь $P(a, b, c)$. Наконец, из определений ясно, что 1 и 5 равносильны.

Теорема 5.4.4. *Блок $G(L^*)$ не имеет разделяющих вершин; все его соединяющие вершины являются разделяющими вершинами для G.*

Мы отмечали, что любой лист $G(L)$ имеет непересекающееся по ребрам разложение (5.4.1) на блоки $G(L^*)$. На основании теоремы 5.4.4 составление $G(L)$ из $G(L^*)$ может быть представлено кактусообразной фигурой, в которой различные блоки соприкасаются в своих соединяющих вершинах (рис. 5.4.3).

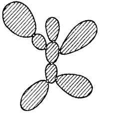


Рис. 5.4.3.

Нам потребуется следующее утверждение.

Теорема 5.4.5. *Пусть G — связный граф с конечным числом $n \geq 2$ блоков. Тогда хотя бы два из этих блоков 1-вершинно соединены.*

Доказательство. Проведем из какой-нибудь вершины v_0 простую цепь M, проходящую через возможно большее число блоков. Так как никакая пара блоков не может иметь ребер, принадлежащих одному простому циклу, в конце концов M должна прийти в 1-вершинно соединенный блок $G(L_0)$. Выбрав теперь $v_0 \in L_0$ и строя аналогичную простую цепь, мы обязательно попадем в другой блок $G(L_1)$, который также 1-вершинно соединен.

Пусть G — связный граф без петель и с конечным числом $\lambda^*(G)$ блоков. Если некоторую вершину v и все инцидентные с ней ребра удалить из G, то остающийся граф $G(V-v)$ распадется на $i(v)$ связных компонент. Назовем $i(v)$ *индексом связности* вершины v. Очевидно, $i(v) = 1$ тогда и только тогда, когда v — не разделяющая вершина для G. Если v — разделяющая вершина, то $i(v)$ означает число блоков, для которых она является соединяющей вершиной. Для индексов связности существует доказанное Харари соотношение того же типа, что и соотношение (5.2.4):

Теорема 5.4.6. *Если $\lambda^*(G)$ есть число блоков связного графа G без петель, то*

$$\lambda^*(G) = 1 + \sum_{v \in V} (i(v) - 1). \tag{5.4.3}$$

Доказательство. Можно доказать (5.4.3) индукцией по числу блоков $\lambda^*(G)$. Это равенство очевидно для $\lambda^*(G) = 1$. Согласно теореме 5.4.5 граф G может быть построен последовательным добавлением блоков с одной соединяющей вершиной. Такое добавление увеличивает $\lambda^*(G)$ на единицу и одно $i(v)$ — на столько же.

Частного вида графы, в которых каждый блок представляет собой единственный простой цикл, называются *деревьями Хусими*. Они могут быть охарактеризованы также тем свойством, что в них никакое ребро не может принадлежать более чем одному простому циклу. (См., например, статьи Харари и Нормана и Харари и Уленбека.)

Задачи

1. Доказать, что граф является деревом Хусими, если все его простые циклы имеют нечетную длину.

2. (Дирак) Если граф без разделяющих вершин имеет простой цикл нечетной длины, то каждая его вершина принадлежит простому циклу нечетной длины.

5.5. Максимальные простые циклы. Будем рассматривать простые циклы максимальной длины в конечном графе G. Так как простой цикл расположен целиком в своем блоке, не будет ограничением предполагать, что G не имеет разделяющих вершин.

Обозначим вершины на простой цепи $P(a_0, a_l)$ максимальной длины l через

$$a_0, \ldots, a_l.$$

Ясно, что все ребра в вершине a_l должны идти к вершинам из P. Пусть a_m — такая ближайшая к a_0 вершина в P, что существует ребро (a_l, a_m) (рис. 5.5.1).

Простой цикл

$$C = (a_m, a_{m+1}, \ldots, a_l, a_m) \tag{5.5.1}$$

назовем *концевым циклом* простой цепи P в a_l. Выберем эту простую цепь P так, чтобы длина ее концевого цикла была максимальной. Рассмотрим подграф

$$G(C) = G(a_m, a_{m+1}, \ldots, a_l),$$

определяемый множеством вершин (5.5.1) простого цикла C. Предположим, что в $G(C)$ есть гамильтонова цепь $H_i(a_m, a_i)$, идущая из a_m к некоторой вершине a_i с

$$m+1 \leqslant i \leqslant l.$$

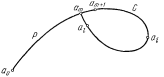


Рис. 5.5.1.

Тогда все ребра из G в вершине a_i должны принадлежать графу $G(C)$, так как иначе ребро (a_i, a_j) к вершине на $P(a_0, a_{m-1})$ дало бы максимальную простую цепь

$$P' = P(a_0, a_m) \cup H_i(a_m, a_i)$$

с бо́льшим концевым циклом, а ребро (a_i, b) с b, не принадлежащим P, дало бы простую цепь

$$P(a_0, a_m) \cup H_i(a_m, a_i) \cup (a_i, b)$$

длины $l+1$.

Предположим теперь, что

$$\rho(a_{m+1}) + \rho(a_i) > k, \quad i = m+2, \ldots, l,$$

где $k=l-m+1$ есть длина концевого цикла. Из теоремы 3.4.7 мы заключаем, что все эти a_i являются концевыми точками гамильтоновых цепей $H_i(a_m, a_i)$; следовательно, все $\rho(a_i)$ ребер в a_i принадлежат $G(C)$. Но тогда a_m оказывается разделяющей вершиной для $G(C)$, так что остается единственная возможность: $G(C)$ есть весь граф G. Таким образом, если мы исключим случай, когда G имеет гамильтонов цикл, то получим для некоторого i

$$\rho(a_{m+1})+\rho(a_i)\leqslant k.$$

Итак, мы установили следующий результат:

Теорема 5.5.1. *Если связный граф G не имеет разделяющих вершин, то либо он имеет гамильтонов цикл, либо длина k максимального простого цикла удовлетворяет условию*

$$k\geqslant\rho_0+\rho_1,$$

где $\rho_0\leqslant\rho_1$ — две наименьшие локальные степени в G.

Из этой теоремы следует другая теорема, принадлежащая Дираку: если G — граф без разделяющих вершин, то либо длина максимальных простых циклов удовлетворяет неравенству $k\geqslant 2\rho_0$, либо граф имеет гамильтонов цикл. Другое доказательство теоремы Дирака дали Эрдёш и Галлаи; наша аргументация является небольшим усовершенствованием их метода.

Глава 6

АКСИОМА ВЫБОРА

6.1. Полная упорядоченность. Множество V называется *вполне упорядоченным*, если оно упорядочено так, что каждое его непустое подмножество имеет первый элемент. Любое конечное множество может быть вполне упорядочено при помощи перечисления его элементов. Точно так же любое счетное множество может быть вполне упорядочено, так как его элементы находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством натуральных чисел.

Важность понятия полной упорядоченности определяется следующим принципом.

Принцип трансфинитной индукции. Пусть V — *вполне упорядоченное множество и* v_0 — *его первый элемент. Если некоторое свойство* P *выполняется для* v_0, *а также для элемента* a_0, *коль скоро оно выполнено для всех* $x < a_0$[1]), *то* P *выполняется для каждого элемента из* V.

Доказательство. Если бы этот принцип не был справедлив, то нашелся бы наименьший элемент b_0[2]), для которого P не выполнено. Но тогда P выполняется для всех $y < b_0$ и, следовательно, для b_0, что противоречит предположению.

Любой элемент a_0 во вполне упорядоченном множестве определяет дихотомию множества V на верхнюю часть $U(a_0)$, состоящую из всех $x \geqslant a_0$, и нижнюю часть $L(a_0)$, состоящую из всех $y < a_0$.

---

[1]) Можно не требовать особо выполнения P для v_0. Действительно, согласно второму условию теоремы, P должно выполняться для v_0, если оно выполняется для всех предшествующих v_0 элементов V. Поскольку, однако, таких элементов нет, для них выполняются абсолютно все свойства (разумеется, касающиеся каждого отдельного такого элемента) и в том числе P. Следовательно, P выполняется и для v_0. (*Прим. ред.*)

[2]) То есть b_0 есть наименьший элемент в подмножестве тех элементов V, для которых свойство P не выполняется. (*Прим. ред.*)

Пусть, далее, $F\{A\}$ — некоторое семейство подмножеств $A \neq \varnothing$ множества V. Отображение

$$A \to f(A) \in A, \tag{6.1.1}$$

переводящее A в некоторый элемент $f(A)$ из A, называется *выбирающей функцией* для F. *Аксиома выбора* утверждает:

Каждое семейство множеств имеет выбирающую функцию.

Ясно, что вполне упорядоченное множество V имеет выбирающую функцию для семейства всех его подмножеств, которую можно получить, ставя в соответствие каждому A его наименьший элемент в полной упорядоченности. Докажем обратное.

Теорема Цермело. *Любое множество, имеющее выбирающую функцию для своих подмножеств, может быть вполне упорядочено.*

Мы пойдем по пути одного из доказательств, данных Цермело. Пусть (6.1.1) — выбирающая функция для семейства F всех подмножеств V. Для любого множества $A \neq \varnothing$ положим

$$A' = A - f(A).$$

Семейство Γ подмножеств V будем называть *цепью*, если оно обладает следующими тремя свойствами:

1. Множество V принадлежит Γ.
2. Если $A \neq \varnothing$ принадлежит Γ, то A' принадлежит Γ.
3. Γ замкнуто относительно пересечения, т. е. пересечение любого числа множеств из Γ принадлежит Γ.

Семейство всех подмножеств образует цепь. Пересечение любого семейства цепей есть цепь. Таким образом, существует единственная минимальная цепь Γ_0, содержащаяся во всех остальных и состоящая из множеств, общих всем цепям.

В цепи Γ_0 будут *разделяющие множества* A_0, характеризуемые тем свойством, что если $B \neq A_0$ есть какое-нибудь другое множество из Γ_0, то выполняется одно из двух включений

$$B \supset A_0, \quad B \subset A_0. \tag{6.1.2}$$

В частности, V является таким множеством. Разделяющее множество определяет разделение семейства $\Gamma_0 - A_0$

на два непересекающихся семейства

$$U(A_0),\quad L(A_0),$$

соответственно альтернативам в (6.1.2).

Обозначим через $L'(A_0)$ семейство всех множеств B из Γ_0 с $B \subseteq A_0'$. Ни для какого множества B из $U(A_0)$ не может быть строгого включения $A_0 \supset B'$, так как из

$$B \supset A_0 \supset B'$$

следовало бы, что в B содержатся хотя бы два элемента, не принадлежащих B'. Кроме того, два семейства $U(A_0)$ и $L'(A_0)$ не имеют общих множеств. Докажем следующее утверждение:

Семейство

$$\Gamma_1 = U(A_0) \cup A_0 \cup L'(A_0) \tag{6.1.3}$$

является цепью.

Доказательство. Проверим свойства цепи.

1. Либо $V = A_0$, либо V принадлежит $U(A_0)$.

2. Мы видели, что для каждого $B \supset A_0$ либо $B' \supset A_0$, либо $B' = A_0$. Множество A_0' принадлежит $L'(A_0)$. То же справедливо и для каждого $B' \subset B$ из $L'(A_0)$.

3. Пересечение множеств из $U(A_0)$ или множеств из $U(A_0)$ с A_0 есть либо A_0, либо множество из $U(A_0)$. Пересечение любых множеств из (6.1.3) при условии, что какое-то из них принадлежит $L'(A_0)$, должно принадлежать $L'(A_0)$.

Так как Γ_0 — минимальная цепь, а Γ_1 — подцепь, должно быть $\Gamma_0 = \Gamma_1$, т. е.

$$\Gamma_0 = U(A_0) \cup A_0 \cup L'(A_0).$$

Это представление показывает, что A_0' также является разделяющим множеством.

Разделяющие множества из Γ_0 образуют цепь.

Доказательство. 1) V является разделяющим множеством. 2) Для любого разделяющего множества A_0 множество A_0' также является разделяющим. 3) Пусть $D = \bigcap A_i$ — пересечение разделяющих множеств A_i. Для любого $B \neq D$ из Γ_0 мы имеем: либо $B \supseteq A_i$ для некоторого i и, следовательно, $B \supset D$, либо $B \subset A_i$ для всех i и, следовательно, $B \subset D$.

Из минимальности Γ_0 мы получаем:

Каждое множество из Γ_0 является разделяющим, т. е. множества в Γ_0 упорядочены по включению.

Отсюда мы установим упорядоченность элементов множества V. Для произвольного подмножества $B \neq \varnothing$ из V пусть B_0 есть пересечение всех множеств из Γ_0, содержащих B. Тогда

$$f(B_0) \in B, \quad B_0 \supseteq B, \tag{6.1.4}$$

так как иначе B_0' было бы меньшим множеством в Γ_0, содержащим B.

B_0 является единственным множеством из Γ_0, удовлетворяющим (6.1.4).

Доказательство. Пусть B_1 — другое множество из Γ_0, содержащее B, так что $B_1 \supset B_0 \supseteq B$. Мы уже видели, что тогда $B_1' \supseteq B_0$, и, значит, $f(B_1)$ не может принадлежать B.

Применим это утверждение к одному элементу $B = (b)$. Тогда в Γ_0 существует единственное множество $B_0(b)$, для которого

$$b \in B_0(b), \quad f(B_0) = b.$$

Это определяет взаимно однозначное соответствие между элементами $b \in V$ и множествами B_0 из Γ_0. Так как последние упорядочены по включению, соответствующая упорядоченность определяется для элементов множества V.

Возьмем, наконец, произвольное множество B в V. Ему соответствует единственное наименьшее множество B_0 с (6.1.4). Каждый элемент $b \in B$, $b \neq f(B_0)$, содержится в B_0', откуда

$$B_0(b) \subset B_0(f(B_0)).$$

Это показывает, что в определенной выше упорядоченности $f(B_0)$ есть наибольший элемент в B. Обращая упорядоченность в V, мы получаем полную упорядоченность.

6.2. Принципы максимальности. Метод трансфинитной индукции часто оказывается несколько сложным для применения. Однако он может быть заменен равносильными утверждениями, так называемыми *принципами максимальности* различного типа. Доказательства этих принципов должны использовать полную упорядоченность или аксиому выбора. Смотря по обстоятельствам, их можно формулировать как в терминах включения множеств, так и в терминах частичной упорядоченности (см. п. 1.4). Семейство множеств, упорядоченное по включению, будет здесь называться *цепью*.

Принцип максимальности Хаусдорфа или *Куратовского* имеет следующий вид:

Любое упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества P содержится в некотором максимальном упорядоченном множестве.

Здесь под максимальным упорядоченным множеством понимается такое упорядоченное подмножество O множества P, что добавление к O любого элемента нарушает свойство упорядоченности.

Воспользуемся следующим замечанием. Пусть $\{O_k\}$ — цепь упорядоченных множеств в частично упорядоченном множестве P. Тогда сумма множеств

$$O = \bigcup O_k$$

упорядочена. Действительно, если a и b — какие-нибудь два элемента из O, то существует некоторое O_k, которому они оба принадлежат. Так как множество O_k упорядочено, имеем $a > b$ или $b > a$ в P.

Чтобы доказать принцип максимальности Хаусдорфа — Куратовского, применим процесс *трансфинитного построения* для получения максимального упорядоченного множества. Предположим, что элементы в P также вполне упорядочены и что O_0 — некоторое заданное упорядоченное подмножество множества P. Пусть $a \in P - O_0$. Допустим, что для каждого элемента x, предшествующего a в полном упорядочении определено упорядоченное множество O_x, содержащее O_0 и такое, что $O_x \supseteq O_y$ для любого y, предшествующего x. Ясно, что

$$O'_a = \bigcup O_x$$

является упорядоченным подмножеством P, и положим

$$O_a = O'_a \cup a \quad \text{или} \quad O_a = O'_a$$

в зависимости от того, дает добавление a к O'_a упорядоченное множество или нет.

Множество Q_a определено для каждого $a \in P$, так как иначе нашлось бы наименьшее a, для которого O_a не определено, что противоречит правилу построения. На том же основании O_a однозначно определяется по a и по полной упорядоченности. Сумма

$$O = \bigcup_{a \in P} O_a$$

дает искомое максимальное упорядоченное подмножество P. Во-первых, оно является упорядоченным и содержит O_a. Во-вторых, пусть b есть элемент P, не принадлежащий O. Тогда b не может принадлежать O_b; следовательно, добавление b к O_b' не дает упорядоченного множества. Таким образом, O есть максимальное упорядоченное множество.

Принцип Хаусдорфа — Куратовского равносилен *принципу максимальности Цорна*, обычно называемому *леммой Цорна*:

Пусть P — частично упорядоченное множество, в котором для каждого упорядоченного подмножества O существует верхняя граница $m(O)$ его элементов. Тогда P содержит максимальные элементы.

Для доказательства этого принципа возьмем максимальное упорядоченное подмножество O в P; тогда должно быть $m(O) \in O$. Но $m(O)$ также является максимальным элементом в P, так как если $x > m(O)$, то x мог бы быть включен в O.

Обратно, чтобы вывести принцип Хаусдорфа — Куратовского из принципа Цорна, рассмотрим семейство Q всех упорядоченных подмножеств множества P, которые содержат данное упорядоченное множество O. Множества из Q частично упорядочены по включению. Любая цепь C из Q имеет верхнюю границу, именно, сумму множеств из C. Таким образом, из леммы Цорна следует, что Q имеет максимальные элементы, т. е. максимальные упорядоченные подмножества P, содержащие O.

Установим, наконец, равносильность каждого из этих двух принципов аксиоме выбора, выведя ее из леммы Цорна. Для некоторых семейств Γ подмножеств множества V будут существовать выбирающие функции $f(F)$. Определим частичную упорядоченность для этих функций, полагая

$$f_1(F_1) \supset f_2(F_2),$$

если f_1 есть продолжение f_2, т. е. если $F_1 \supset F_2$ и обе функции совпадают на F_2. Тогда любое упорядоченное множество $\{f_i\}$ таких функций имеет верхнюю границу, именно функцию $f(F)$, определенную на сумме семейства

$$F = \bigcup F_i$$

так, что для любого множества A_k из F будет

$$f(A_k) = f_i(A_k),$$

где F_i есть одно из семейств, которым принадлежит A_k. Следовательно[1]), существует максимальная выбирающая функция для подмножеств V. Но тогда f должна быть определена для каждого подмножества, так как, если бы она была не определена для какого-нибудь множества A, можно было бы выбрать некоторый элемент $a \in A$ и положить $f(A) = a$, а это противоречит тому, что функция f максимальная.

6.3. Суммируемые по цепи свойства. Существуют другие формулировки принципов максимальности, которые во многих случаях удобнее применять. Пусть V — множество и Γ — некоторое свойство, определенное для подмножеств V. Назовем Γ *суммируемым по цепи свойством*, если оно удовлетворяет условию: из того, что

$$C = \{V_i\} \tag{6.3.1}$$

есть цепь подмножеств, обладающих свойством Γ, следует, что их сумма

$$V_0 = \bigcup V_i \tag{6.3.2}$$

также обладает этим свойством.

Пусть $\{\Gamma\}$ есть некоторая совокупность свойств множеств. Множество A называется *$\{\Gamma\}$-множеством*, если оно обладает всеми свойствами из $\{\Gamma\}$. Тогда справедлив следующий принцип:

Принцип суммы цепи. Пусть $\{\Gamma\}$ — *совокупность суммируемых по цепи свойств и* $\Psi = \{V_i\}$ — *семей-*

---

[1]) По лемме Цорна. (*Прим. ред.*)

ство $\{\Gamma\}$*-подмножеств множества* V. *Тогда* Ψ *содержит максимальные* $\{\Gamma\}$*-множества* $M\{\Gamma\}$.

Чтобы привести принцип суммы цепи в более тесную связь с его применениями в алгебре и в теории графов, выделим два частных вида свойств.

Свойство включения. Обозначим через F некоторое фиксированное подмножество множества V и через $\Gamma(F)$ — множество, однозначно определенное множеством F. Будем говорить, что множество A обладает *свойством включения* Γ, если из $A \supseteq F$ следует

$$A \cup \Gamma(F) = \varnothing.$$

Свойство исключения. Множество A обладает *свойством исключения* Γ, если из $A \supseteq F$ следует

$$A \cap \Gamma(F) = \varnothing.$$

Если A не содержит F, то считаем, что каждое соотношение тривиальным образом удовлетворяется. Особый случай $F = \varnothing$ также допускается. Тогда $G = \Gamma(\varnothing)$ есть некоторое фиксированное множество, и свойство включения (соответственно исключения) Γ означает, что A содержит G (соответственно A не пересекается с G).

Свойство включения или исключения Γ называется свойством *конечного типа*, если F — конечное множество, в том числе если $F = \varnothing$.

Свойства включения и исключения конечного типа являются суммируемыми по цепи свойствами.

Доказательство. Это утверждение очевидно для $F = \varnothing$. Если оно неверно для некоторого F, обозначим конечное число элементов F через

$$f_1, f_2, \ldots, f_k.$$

Предположим, что для цепи Γ-множеств (6.3.1) сумма V_e из (6.3.2) содержит F. Тогда для каждого $f_i \in F$ найдется некоторое содержащее его множество $V(f_i)$ из (6.3.1) и, следовательно, найдется множество V_l, содержащее все f_i. Значит,

$$V_m \supset F, \quad m \geqslant l.$$

Для свойства включения это дает

$$V_m \supset \Gamma(F), \quad V_0 \supset \Gamma(F),$$

а для свойства исключения —

$$V_m \cap \Gamma(F) = \varnothing, \quad V_0 \cap \Gamma(F) = \varnothing.$$

Таким образом, мы можем установить следующий принцип.

Принцип включения — исключения. *Если* $\{\Gamma\}$ — *совокупность свойств, состоящая из свойств включения и исключения конечного типа в множестве* V, *то семейство всех* $\{\Gamma\}$-*подмножеств имеет максимальные множества.*

Чтобы проиллюстрировать применение этого принципа в простом случае, рассмотрим группу G и покажем, что в ней существуют максимальные абелевы подгруппы. Во-первых, свойство быть подгруппой H является свойством включения: если a, $b \in H$, то произведение $a \cdot b$ также будет принадлежать H. Во-вторых, свойство подгруппы быть абелевой является свойством исключения: если $a \in H$, то H не пересекается с множеством A_a, состоящим из элементов, не коммутирующих с a.

Сделаем несколько замечаний, которые иногда облегчают применение принципа включения — исключения. Свойства включения и исключения конечного типа могут быть сформулированы в терминах включения и исключения конечных множеств. Свойство включения Γ выполняется для множества A только тогда, когда из $A \supset F$ следует, что A содержит все множества

$$F \cup g, \quad g \in \Gamma(F). \tag{6.3.3}$$

Свойство исключения Γ выполняется, если из $A \supset F$ следует, что A не содержит множеств (6.3.3).

Часто бывает желательно установить существование максимальных подмножеств, элементы которых удовлетворяют некоторым условиям

$$Q(t_1, t_2, \ldots, t_k),$$

причем каждое условие содержит лишь конечное число элементов. Это получается при помощи исключения для каждого Q всех конечных множеств $T = \{t_i\}$, не удовлетворяющих Q. С другой стороны, можно искать максимальные множества, для элементов которых никакое условие Q не выполняется. Это получается при помощи исключения всех конечных множеств $T' = \{t'_i\}$, для которых они удовлетворяются.

Наконец, чтобы доказать равносильность принципа включения — исключения приведенным выше принципам, выведем из него принцип Хаусдорфа. Пусть $\{\Gamma\}$-множествами являются упорядоченные подмножества в частично упорядоченном множестве P. Каждое такое множество A характеризуется тем свойством, что для любых $a,\ b \in A$ должно выполняться одно из соотношений $a > b$ или $b > a$. Тогда в качестве множеств исключения можно взять все пары $(a,\ b)$, для которых ни одно из этих соотношений не выполняется.

В виде иллюстративного использования описанных принципов докажем теорему.

Теорема 6.3.1. *Пусть для каждого $i \in I$ из множества индексов I определено конечное семейство подмножеств*

$$\Phi_i = (F_{i,1},\ \ldots,\ F_{i,n_i}) \qquad (6.3.4)$$

множества V. Тогда существуют такие минимальные подмножества H, что для каждого $i \in I$ множество H содержит хотя бы одно множество F_{ij}.

Доказательство. Если $\{H^{(k)}\}$ есть упорядоченное по включению семейство подмножеств, содержащих хотя бы одно F_{ij} для каждого i, то пересечение множеств $H^{(k)}$ также имеет это свойство. В противном случае для какого-то фиксированного i нашлось бы некоторое множество $H^{(k)}$, не содержащее данного F_{ij}; так как существует только конечное число множеств F_{ij}, нашлось бы некоторое $H^{(k)}$, не содержащее никакого из них, что противоречит предположению.

6.4. Максимальные графы исключения. Обычное применение аксиомы выбора в теории графов состоит в установлении того, что данный граф G имеет максимальные части с определенными свойствами. Эти условия часто формулируются так, что требуется найти такую максимальную часть H, чтобы некоторое заданое семейство частей

$$\{F_i\} \qquad (6.4.1)$$

было бы *исключено* или *запрещено* для H. Обычно предполагается, что пустой граф не входит в семейство (6.4.1). Часть H называется *графом исключения* для семейства (6.4.1) если она не имеет этих графов своими частями; такой граф будет *максимальным графом исключения*, если он не является собственной частью другого графа исключения.

Если все графы в (6.4.1) конечны, то будем говорить об *исключении конечного типа*. В качестве примеров семейств (6.4.1) можно рассмотреть все простые циклы или же все простые циклы, обладающие некоторыми свойствами. Принцип включения — исключения немедленно дает следующую теорему.

Теорема 6.4.1. *Пусть G — произвольный граф и (6.4.1) — семейство его конечных частей. Тогда существуют максимальные графы исключения в G, содержащие любой данный граф исключения H_0.*

Пусть, например, семейство (6.4.1) состоит из всех простых циклов в G. Из теоремы 6.4.1 получается

Теорема 6.4.2. *Каждый граф содержит максимальные части без циклов.*

Чтобы привести другой пример, предположим, что в графе G каждой вершине v отвечает неотрицательное целое число $k(v)$ — ее *кратность*. Тогда существуют максимальные части H графа G, локальные степени которых ограничены этими кратностями:

$$\rho_H(v) \leqslant k(v), \qquad v \in V.$$

В качестве исключенного семейства (6.4.1) достаточно в этом случае взять все звездные графы $S(v)$ графа G, состоящие из $k(v)+1$ ребер с концом v.

Интересным оказывается то, что из свойств исключенных частей (6.4.1) графа можно вывести различные заключения о соответствующих максимальных графах исключения. Сначала докажем следующее.

Теорема 6.4.3. *Если никакая конечная часть графа из (6.4.1) не имеет концевых ребер, то любой максимальный граф исключения H покрывает вершины графа G.*

Доказательство. Покажем, что в каждой неизолированной вершине v графа G найдется хотя бы одно ребро из H. Если бы в некотором H не было ребер в v, то любое ребро из G с концом v можно было бы добавить к H и при этом в нем не получилось бы запрещенной части.

Результат теоремы 6.4.3 может быть обобщен следующим образом. Пусть $\mu \geqslant 1$ — минимум локальных степеней по всем вершинам в исключенных частях графа. Тогда в вершине v максимальный граф исключения H должен иметь не менее чем

$$\min(\mu - 1, \rho(v))$$

ребер.

Если G — связный граф, можно искать условия, при которых максимальные графы исключения H были бы связны.

Теорема 6.4.4. *Пусть G — связный граф и (6.4.1) — семейство конечных 2-реберно связных его частей. Тогда максимальные графы исключения связны и покрывают вершины G.*

Доказательство. Так как никакой из исключенных графов (6.4.1) не имеет разделяющих ребер, из теоремы 6.4.3 следует, что максимальный граф исключения H должен покрывать вершины G. Допустим, что H имеет некоторую связную компоненту H_1. Так как граф G связен, существует ребро $E = (a_1, a_2)$, связывающее H_1 с некоторой другой компонентой H_2. Но тогда E можно было бы добавить к H и при этом не получилось бы запрещенных частей (6.4.1), так как они не имеют разделяющих ребер.

В случае, когда исключенные графы (6.4.1) являются простыми циклами, условия теоремы 6.4.4 выполнены. Можно обобщить эту теорему следующим образом. Если граф G t-реберно связен, а каждый исключенный граф в (6.4.1) $(t+1)$-реберно связен, то максимальный граф исключения H t-реберно связен. В частности, H не имеет разделяющих ребер при $t = 2$.

Задачи

1. Доказать аналогичные теоремы для t-вершинно связных исключенных графов.
2. Найти условия, при которых максимальные графы исключения не имеют разделяющих вершин.

6.5. Максимальные деревья. Применим предыдущие рассуждения к случаю, когда семейство (6.4.1) исключенных графов состоит из всех простых циклов в графе G. Из теорем 6.4.3 и 6.4.4 непосредственно следует

Теорема 6.5.1. *Связный граф содержит максимальные деревья, и каждое из них покрывает вершины графа.*

Этим максимальным деревьям дают различные названия, например: *скелеты*, или *остовы*, или *наполнения* графа G; мы будем называть их просто *максимальными деревьями*.

Пусть $T(G)$ — максимальное дерево в конечном связном графе G. Тогда $T(G)$ можно получить из G последовательным удалением ряда ребер

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_k, \tag{6.5.1}$$

каждое из которых выбрано из какого-нибудь цикла в предыдущем графе. Очевидно, все эти графы связны. Число вершин в $T(G)$ есть ν_v, т. е. то же, что и в G. Тогда по теореме 4.1.3 число ребер в дереве $T(G)$ равно

$$\nu_e(T) = \nu_v - 1.$$

Число k ребер в (6.5.1), которое требуется, чтобы свести G к $T(G)$, равно, следовательно,

$$\gamma(G) = \nu_e - \nu_v + 1, \tag{6.5.2}$$

где ν_e — число ребер в G.

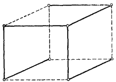


Рис. 6.5.1.

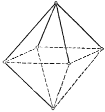


Рис. 6.5.2.

Теорема 6.5.2. *Число ребер, которые нужно удалить из конечного связного графа, чтобы получить максимальное дерево, равно его цикломатическому рангу* (6.5.2).

На рис. 6.5.1 и 6.5.2 указаны максимальные деревья для графов куба и октаэдра.

Существование максимальных деревьев было установлено при помощи принципа максимальности. Можно также указать построение, основанное непосредственно на аксиоме выбора. Как и в п. 2.4, выберем фиксированную вершину a_0 и положим

$$V = a_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots,$$

где A_i состоит из всех вершин a_i с расстоянием

$$d(a_0, a_i) = i$$

от a_0. В вершине a_i будут ребра, соединяющие ее с A_{i-1}. Выберем одно такое ребро (a_{i-1}, a_i) для каждого a_i и удалим все остальные ребра. Очевидно, остающийся граф T связен и не имеет циклов; кроме того, добавление любого ребра к T дает некоторый цикл. Отсюда получается

Теорема 6.5.3. *Пусть a_0 — некоторая фиксированная вершина в связном графе G. Тогда существуют такие максимальные деревья T в G, что расстояние от a_0 до любой вершины v в T такое же, как и в G.*

Задачи

1. Построить максимальные деревья для графов додекаэдра и икосаэдра.
2. То же для бесконечного графа, состоящего из сторон единичных квадратов на плоскости.
3. Показать на примере, что не все максимальные деревья получаются при помощи построения из теоремы 6.5.3.
4*. Определить все графы, для которых это имеет место.

6.6. Соотношения между максимальными графами. Обратимся к общему случаю максимальных графов исключения H для семейства (6.4.1) запрещенных конечных графов. При некоторых условиях можно установить простые правила для получения любого такого графа H_1 из другого максимального графа H. Добавление произвольного множества ребер

$$E = \bigcup E_i$$

даст какие-то запрещенные части F_j в графе $H \cup E$. Сумму этих частей

$$F(E) = \bigcup F_j$$

можно называть *запрещенной составляющей множества*

E по отношению к H. Каждая часть F_j содержит хотя бы одно из ребер E_i.

Множество ребер

$$R = \bigcup R_h$$

из $F(E)$ называется *редукционным множеством* для $F(E)$, если граф $F(E) - R$ не имеет запрещенных частей, а любое собственное подмножество R таким свойством не обладает. Тогда граф

$$H_1 = H \cup E - R \qquad (6.6.1)$$

является графом исключения для семейства (6.4.1). Он будет максимальным тогда и только тогда, когда добавление любого ребра E_0 к E дает запрещенные части в графе (6.6.1), т. е. когда R не может быть редукционным множеством ни для какого множества, большего E.

Максимальный граф H будет называться *сингулярным*, если добавление одного ребра E к H дает только одну исключенную часть $F(E)$ в $H \cup E$. Любое ребро R в $F(E)$ является тогда редукционным ребром, и граф H_1 в (6.6.1) является графом исключения. Будем говорить, что он получается из H *сингулярной реберной заменой.*

Сингулярный максимальный граф называется *сильно сингулярным*, если никакая запрещенная составляющая $F(E_1, E_2)$, определяемая двумя ребрами, не может быть редуцирована одним ребром. Из приведенных рассуждений получается

Теорема 6.6.1. *Если H — сильно сингулярный максимальный граф, то любая сингулярная реберная замена дает другой максимальный граф.*

Пусть теперь H_1 и H_2 — два различных сильно сингулярных максимальных графа, а E_2 — ребро из H_2, не принадлежащее H_1. Добавление E_2 к H_1 дает один исключенный граф $F(E_2)$ в $H_1 \cup E_2$. Граф $F(E_2)$ не может содержаться целиком в H_2, так что он имеет ребро E_1 из H_1, не принадлежащее H_2. Замена E_1 на E_2 дает новый максимальный граф H_1' отличающийся от H_2 на одну пару ребер меньше чем H_1.

Будем говорить, что два графа *сингулярно связаны*, если один из них может быть преобразован в другой при помощи ряда сингулярных реберных замен. Наши рассуждения приводят к теореме.

Теорема 6.6.2. *Если максимальные графы исключения конечны и сильно сингулярны, то все они сингулярно связаны и, следовательно, имеют одинаковое число ребер.*

Предположим, что граф G конечен, а H является графом исключения с максимальным числом ребер. Тогда сингулярная реберная замена должна дать другой такой граф без предположения, что H сильно сингулярен. Поэтому можно также утверждать следующее.

Теорема 6.6.3. *Пусть в конечном графе все графы исключения с максимальным числом ребер сингулярны. Тогда они все сингулярно связаны.*

Применим эти выводы к случаю максимальных деревьев $T(G)$ в графе G. Если к $T(G)$ добавлено ребро E_1, то граф

$$T(G) \cup E_1$$

имеет единственный цикл C_1, так как в $T(G)$ есть только одна цепь, связывающая концы E_1. Удаление какого-то ребра E_0 из C_1 снова дает дерево $T_1(G)$; будем говорить, что оно получено из $T(G)$ *сингулярной циклической заменой*. Если добавить два ребра E_1 и E_2, то

$$T(G) \cup E_1 \cup E_2$$

будет содержать хотя бы два различных простых цикла. Легко проверить, что тогда удаление одного ребра E_0 из этого графа не может дать графа без циклов. Отсюда следует

Теорема 6.6.4. *Если T_1 и T_2 — максимальные деревья в конечном связном графе, то одно из них может быть получено из другого сингулярными циклическими заменами.*

Задачи

1*. Можно определить расстояние между двумя максимальными деревьями в конечном графе G как наименьшее число циклических замен, необходимых для преобразования одного дерева в другое. Найти максимальное расстояние между двумя такими деревьями.

2*. Пусть в конечном графе G каждое ребро имеет меру $\mu(a, b)$, следовательно, каждая часть H имеет полную меру

$$\mu(H) = \sum_{E \subset H} \mu(E).$$

Пусть $\{H\}$ — семейство сильно сингулярных максимальных графов. Показать, как можно построить граф H_0 из $\{H\}$ с минимальной полной мерой при помощи метода, аналогичного использованному в задаче о минимальном соединении в п. 4.1. Рассмотреть эту же задачу для произвольных классов максимальных графов.

3*. В дереве существует единственная кратчайшая простая цепь между любыми двумя вершинами, но существуют и другие связные графы с тем же свойством. Попытаться охарактеризовать эти «геодезические» графы другими способами.

Глава 7

ТЕОРЕМЫ О ПАРОСОЧЕТАНИЯХ

7.1. Двудольные графы. *Двудольным графом*[1]) называется граф $G = G(V,\ V')$, в котором множество вершин

$$S = V \cup V', \quad V = \{v\}, \quad V' = \{v'\} \qquad (7.1.1)$$

распадается на два непересекающихся множества V и V' так, что каждое ребро $E = (v,\ v')$ соединяет некоторую вершину $v \in V$ с вершиной $v' \in V'$. Графы этого специального типа играют заметную роль в различных приложениях.

Каждая часть двудольного графа также двудольная. Если граф G связен, то каждая вершина $v \in V$ имеет четное расстояние от вершин из V и нечетное расстояние от вершин из V'. Возникает вопрос: в каких случаях данный граф можно представить как двудольный граф?

Теорема 7.1.1. *Граф G является двудольным тогда и только тогда, когда все простые циклы в нем имеют четную длину.*

Доказательство. Ясно, что для двудольного графа это условие выполняется. Обратно, предположим, что G имеет такое свойство. Выберем вершину a_0 в некоторой его связной компоненте G_0. Множество вершин S в G_0 распадается, как в (7.1.1), где V состоит из вершин с четным расстоянием от a_0, а V' — с нечетным расстоянием. Чтобы показать, что никакие две вершины v_1 и v_2 из V не могут быть соединены ребром $E = (v_1,\ v_2)$, возьмем кратчайшие простые цепи

$$P(a_0,\ v_1), \quad Q(a_0,\ v_2)$$

из a_0. Обе они имеют четную длину. Если b — последняя общая для P и Q вершина, то оба расстояния $d(b,\ v_1)$ и $d(b,\ v_2)$ либо четны, либо нечетны. Если бы существовало

---

[1]) В книге Форда и Фалкерсона «Потоки в сетях» такие графы называются *двусторонними*. (*Прим. перев.*)

ребро E между v_1 и v_2, то цепь

$$P(b,\ v_1) \cup E \cup Q(v_2,\ b)$$

была бы нечетным простым циклом, что противоречит предположению. Так же доказывается, что никакие две вершины из V' не соединены ребром. Таким образом, все компоненты G_0 и, следовательно, сам граф G двудольные.

Так как двудольная часть B произвольного данного графа G характеризуется тем, что B не содержит нечетных простых циклов, из общих результатов главы 6 следует.

Теорема 7.1.2. *Любой граф G содержит максимальные двудольные части B_0. Если граф G связен, то каждый такой двудольный граф B_0 также связен и покрывает вершины графа G.*

Прямой метод построения максимальной двудольной части связного графа G состоит в следующем. Выберем вершину a_0 и разложим множество вершин S графа G

$$S = a_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

так, чтобы A_i состояло из вершин с расстоянием i от a_0. В каждом A_i удаляем все ребра, соединяющие какие-нибудь две его вершины. Тогда, очевидно, остающийся граф будет максимальной двудольной частью.

Приведем теперь одну теорему о бесконечных двудольных графах. Пусть $G(V,\ V')$ — такой граф, локально конечный в вершинах множества V. Для любого подмножества $A \subseteq V$ обозначим через $V'(A)$ множество вершин из V', соединенных ребрами с вершинами из A. Два множества A и $V'(A)$ определяют подграф

$$G(A,\ V'(A)) \tag{7.1.2}$$

графа G. Если A конечно, то этот граф конечен.

Предположим, что каждому конечному подмножеству A множества V поставлена в соответствие некоторая часть S_A, так что

$$A \to S_A \subseteq G\,(A,\ V'\,(A)). \tag{7.1.3}$$

Установим следующее (Оре):

Теорема 7.1.3. *Пусть $G(V,\ V')$ — двудольный граф, локально конечный на V, и пусть в G имеется некоторое соответствие (7.1.3) для конечных подмножеств $A \subset V$.*

Тогда существует такая часть H графа G, что для любого A выполняется равенство

$$H(A, V'(A)) = S_B \cap G(A, V'(A)) \tag{7.1.4}$$

для некоторого, подходящим образом выбранного множества $B \supseteq A$.

Доказательство. Часть H графа G назовем R-графом, если она обладает следующим свойством: для каждого конечного A существует такое конечное $B \supseteq A$, что

$$H(A, V'(A)) \supseteq S_B \cap G(A, V'(A)). \tag{7.1.5}$$

Очевидно, $G = H$ является R-графом, в котором можно брать $B = A$.

Лемма. *Существуют минимальные R-графы в G.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $\{H_i\}$ есть упорядоченная по включению цепь R-графов, то ее пересечение

$$D = \bigcap_i H_i$$

является R-графом. В графе (7.1.2) имеется конечное множество ребер $\{E_j\}$. Возьмем ребро E_j, принадлежащее не всем H_i; пусть $H_j^{(0)}$ есть один из графов, не содержащих E_j. Конечное пересечение

$$H^{(0)} = \bigcap_j H_j^{(0)}$$

является тогда R-графом, содержащим D, и

$$H^{(0)}(A, V'(A)) = D(A, V'(A)).$$

Так как (7.1.5) справедливо для $H^{(0)}$, оно справедливо также и для D.

Завершим теперь доказательство теоремы 7.1.3. Пусть H — минимальный R-граф; значит, если удалить из H произвольное ребро E, то граф $H - E = K$ уже не будет R-графом. Мы покажем, что для H равенство (7.1.4) справедливо для любого конечного A и некоторого $B \supseteq A$. Пусть граф в левой части (7.1.4) состоит из ребер $\{F_i\}$, так что

$$H(A, V'(A)) = \{F_i\}$$

для некоторого данного A. Так как $K_i = H - F_i$ не является R-графом, существует некоторое конечное множество A_i, для которого

$$K_i(A_i, V'(A_i)) \not\supseteq S_B \cap G(A_i, V'(A_i))$$

при всяком $B \supseteq A_i$. Так как соответствующее включение выполняется для H при некотором $B_i \supseteq A_i$, мы получаем, что F_i принадлежит обоим графам

$$S_{B_i},\ G(A_i, V'(A_i))$$

для любого такого B_i.

Положим

$$A_0 = \bigcup A_i = A \cup A.$$

Так как A_0 конечно, должно найтись подходящее множество $B \supseteq A_0$ такое, что в H

$$H(A_0, V'(A_0)) \supseteq S_B \cap G(A_0, V'(A_0)).$$

Это условие можно переписать в виде

$$H(A, V'(A)) \cup H(\bar{A}, V'(\bar{A})) \supseteq$$
$$\supseteq S_B \cap G(A, V'(A)) \cup S_B \cap G(\bar{A}, V'(\bar{A})).$$

Так как $B \supseteq A_i$ для всех i, мы получаем, как и выше, что

$$S_B \supseteq F_i$$

для всех i; следовательно,

$$S_B \supseteq H(A, V'(A)),$$

и равенство (7.1.4) выполнено.

Теорема 7.1.3 имеет многочисленные применения. Мы приведем здесь только теорему, принадлежащую Радо.

Теорема 7.1.4. *Пусть $G(V, V')$ — двудольный граф, локально конечный на V. Пусть для каждого конечного множества $A \subset V$ определена выбирающая* ***функция***

$$f_A(a), \quad a \in A,$$

которая из множества всех выходящих из вершины а ребер выбирает *некоторое одно ребро* $(a, f_A(a))$ ***из а. Тогда существует*** *выбирающая функция $f_V(v)$, определенная* ***для всего V и*** *обладающая следующим свойством:* ***для каждого A существует*** *такое множество $B \supseteq A$, что*

$$f_V(a) = f_B(a), \quad a \in A.$$

Доказательство. Здесь граф S_A состоит из всех ребер

$$(a, f_A(a)), \quad a \in A,$$

определяемых выбирающей функцией. В соответствии с (7.1.4) здесь минимальный R-граф H дает также выбирающую функцию, определяющую единственное ребро в каждой вершине и совпадающую на A с $f_B(x)$.

Задачи

1. Доказать, что граф G является двудольным тогда и только тогда, когда для некоторого фиксированного a_0 нет таких ребер $E = (b, c)$, что

$$d(a_0, b) = d(a_0, c).$$

2. Найти максимальную двудольную часть для каждого из графов правильных многогранников.
3. Являются ли максимальные двудольные части сингулярными в смысле п. 6.6?

7.2. Дефициты. Ряд важных приложений теории графов является следствием так называемых *теорем о паросочетаниях* для двудольных графов. Для доказательства этих теорем мы будем использовать *функции дефицита*, которые здесь введем. Предположим, что в рассматриваемом двудольном графе G вершины $v \in V$ (см. (7.1.1)) имеют конечные локальные степени $\rho(v)$.

Пусть A — конечное подмножество V. Число вершин в A обозначим через $\nu(A)$, число ребер, выходящих из A,— через $\rho(A)$. Для двух таких множеств A_1 и A_2 мы, очевидно, имеем

$$\nu(A_1 \cup A_2) + \nu(A_1 \cap A_2) = \nu(A_1) + \nu(A_2) \qquad (7.2.1)$$

и

$$\rho(A_1 \cup A_2) + \rho(A_1 \cap A_2) = \rho(A_1) + \rho(A_2). \qquad (7.2.2)$$

Для каждого подмножества A множества V можно указать соединенное с ним подмножество $V'(A)$ множества V', состоящее из всех тех вершин из V', которые соединены ребром хотя бы с одной вершиной из A. Если A конечно, то $V'(A)$ также конечно из-за условия локальной конечности в V. Для таких множеств $V'(A)$ мы имеем соотношение

$$\nu(V'(A_1 \cup A_2)) + \nu(V'(A_1 \cap A_2)) \leqslant \nu(V'(A_1)) + \nu(V'(A_2)). \qquad (7.2.3)$$

Для проверки этого заметим, что $V'(A_1 \cup A_2)$ состоит из тех вершин, которые соединены с вершинами из A_1 или из A_2 или с теми и другими, так что можно написать

$$\nu(V'(A_1 \cup A_2)) = \nu(V'(A_1)) + \nu(V'(A_2)) - \Delta,$$

где Δ есть число вершин, учтенных и в $V'(A_1)$, и в $V'(A_2)$. Сюда входят $\nu(V'(A_1 \cap A_2))$ вершин из $V'(A_1 \cap A_2)$, а также те вершины, которые соединены и с A_1 и с A_2, но не с $A_1 \cap A_2$. Если таких вершин нет, то

$$V'(A_1 \cap A_2) = V'(A_1) \cap V'(A_2), \qquad (7.2.4)$$

и в (7.2.3) выполняется равенство.

Для любого конечного подмножества A множества V разность

$$\delta(A) = \nu(A) - \nu(V'(A))$$

будет называться *дефицитом* подмножества A.

Теорема 7.2.1. *Для дефицитов двух множеств A_1 и A_2 имеет место соотношение*

$$\delta(A_1 \cup A_2) + \delta(A_1 \cap A_2) \geqslant \delta(A_1) + \delta(A_2). \qquad (7.2.5)$$

Доказательство. Это соотношение получается при вычитании (7.2.3) из (7.2.1). Оно выполняется также, когда пересечение двух множеств пусто, если положить

$$\delta(\varnothing) = 0, \qquad (7.2.6)$$

и это соглашение принимается в дальнейшем изложении. Равенство в (7.2.5) выполняется тогда и только тогда, когда выполнено (7.2.4). Заметим, что дефициты являются целыми числами.

В последующих рассуждениях накладываем еще одно требование на рассматриваемый граф.

Ограниченные дефициты. Для конечных подмножеств множества V существует верхняя граница дефицитов.

Тогда будет существовать некоторый *максимальный дефицит* δ_0 и соответственно некоторые *множества максимального дефицита*, называемые также *критическими множествами*, для которых

$$\delta(A) = \delta_0. \qquad (7.2.7)$$

В соответствии с условием (7.2.6) мы всегда имеем $\delta_0 \geqslant 0$. Если $\delta_0 \neq 0$, то множества, удовлетворяющие соотношению (7.2.7), непусты.

Теорема 7.2.2. *Если A_1 и A_2 — критические множества, то их сумма и их пересечение также критические; кроме того, они удовлетворяют равенству* (7.2.4).

Доказательство. Из

$$\delta(A_1) = \delta(A_2) = \delta_0$$

и теоремы 7.2.1 следует, что

$$\delta(A_1 \cup A_2) + \delta(A_1 \cap A_2) \geqslant 2\delta_0.$$

Так как δ_0 есть максимальный дефицит, это возможно только при

$$\delta(A_1 \cup A_2) = \delta(A_1 \cap A_2) = \delta_0.$$

Из теоремы 7.2.2 непосредственно следует

Теорема 7.2.3. *Существует единственное минимальное критическое множество N, содержащееся во всех остальных критических множествах. Если V конечно, то существует единственно максимальное критическое множество, содержащее все остальные.*

Мы имеем: $N = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\delta_0 = 0$.

Будем говорить, что подмножество A множества V является множеством *без дефицита*, если никакое подмножество множества A не имеет положительного дефицита. Все V будет множеством без дефицита тогда и только тогда, когда $\delta_0 = 0$.

Пусть A_1 — некоторое критическое множество и A_2 — конечное множество, не пересекающееся с A_1. По теореме 7.2.1

$$\delta(A_1 \cup A_2) \geqslant \delta(A_1) + \delta(A_2),$$

и следовательно, $\delta(A_2) \leqslant 0$. Если это замечание применить к $A_1 = N$, то мы получим теорему:

Теорема 7.2.4. *Множество вершин V можно однозначно представить в виде*

$$V = N \cup \overline{N}, \tag{7.2.8}$$

где N — минимальное критическое множество, а его дополнение $\overline{N}$ является множеством без дефицита.

Приведем еще один факт.

Теорема 7.2.5. *В множестве $V'(N)$, определяемом минимальным критическим множеством N, в каждой вершине должно быть хотя бы два ребра от N.*

Доказательство. Допустим, что для некоторого $a' \in V'(N)$ существует только одно ребро (a, a') от N. Тогда множество $N - a$ не может иметь дефицит, меньший δ_0, и $N - a$ оказывается критическим, в противоречии с определением N.

7.3. Теоремы о паросочетаниях. Исследуем теперь, как изменяется максимальный дефицит при удалении из G некоторой вершины $a_1 \in V$ и всех инцидентных ей ребер. Если A — подмножество V, не содержащее a_1, то удаление вершины a_1 и ее ребер не изменяет дефицита A. Поэтому, если имеется некоторое критическое множество, не содержащее a_1, то его дефицит остается равным δ_0. Если же a_1 содержится в каждом критическом множестве и, следовательно, в N, то в V уже не будет множеств с дефицитом δ_0. Из теоремы 7.2.5 легко следует, что

$$\delta(N - a_1) = \delta_0 - 1,$$

и новое минимальное критическое множество N_1 содержится в $N - a_1$. Мы установили следующее:

Теорема 7.3.1. *Удаление из V некоторой вершины a_1 и всех ее ребер изменяет максимальный дефицит только при $a_1 \in N$; в этом случае новый максимальный дефицит равен*

$$\delta_0' = \delta_0 - 1.$$

Повторяя это преобразование, мы получаем теорему.

Теорема 7.3.2. *Если максимальный дефицит множества вершин V равен $\delta_0 > 0$ и N — минимальное критическое множество, то V можно свести к множеству без дефицита при помощи удаления из него δ_0 соответственно выбранных вершин множества N вместе с их ребрами.*

Предположим далее, что V есть множество без дефицита. Будем исследовать возможность удаления из графа G некоторой связанной пары вершин (a, a') и всех ребер с этими концами так, чтобы в полученном графе G_1 множество вершин $V_1 = V - a$ оставалось бы множеством без дефицита.

Предположим сначала, что V не имеет непустых множеств нулевого дефицита. Тогда можно удалить произвольное ребро (a, a') и соответствующие ребра. Действительно, если A_1 — произвольное конечное подмножество множества V_1, то оно также является подмножеством V, и, по предположению, соединенное с ним в G множество $V'(A_1)$ должно содержать хотя бы на одну вершину больше чем A_1. После удаления a' из V' в соединенном с A_1 множестве в G_1 число вершин может уменьшаться разве лишь на единицу, так что должно быть $\delta_1(A_1) \leqslant 0$.

Пусть теперь в V существуют непустые подмножества нулевого дефицита. Выберем среди них минимальное множество A. Тогда можно брать $a \in A$, и a' будет концом некоторого ребра (a, a'). Действительно, пусть A_1 снова означает произвольное конечное подмножество $V_1 = V - a$.

Если $\delta(A_1) < 0$, то, как и выше, мы получаем $\delta_1(A_1) \leqslant 0$ в G_1. Остается случай $\delta(A_1) = 0$. Так как $A \neq \varnothing$ и минимально среди всех непустых множеств с нулевым дефицитом, из теоремы 7.2.2 следует, что или A_1 содержит A, или эти два множества не пересекаются. Первая возможность исключена, так как A_1 не содержит a. Следовательно, A_1 имеет нулевой дефицит и не пересекается с A. Но тогда по теореме 7.2.2 выполняется условие (7.2.4), так что множества $V'(A)$ и $V'(A_1)$ также не пересекаются. Поэтому удаление ребер с концами в вершинах

$$a \in A,\ a' \in V'(a)$$

не может повлиять на дефицит A_1. Следовательно, $\delta_1(A_1) = 0$ в G_1.

Введем определение. Будем говорить, что подмножество A множества V *сопоставлено при паросочетании на* подмножество A' множества V', или что имеется *паросочетание A на A'*, если существует такое взаимно однозначное соответствие между A и A', что соответствующие друг другу вершины соединены ребром [1]). Будем также называть такое паросочетание *частичным паросочетанием V в V'* и обозначать его через $\{A, M_A\}$, где обозначение M_A [2]) используется для того, чтобы указывать различ-

---

[1]) Таким образом, паросочетание можно рассматривать одновременно и как часть графа, и как отображение. Являясь отображением, оно допускает употребление соответствующих выражений, как, например: «паросочетание A в V'», «паросочетание между A и A'», «при паросочетании A сопоставлено в V'», или «A и A' (A с A') сопоставлены», или «A сопоставлено множеству A'» и т. п. (*Прим. перев.*)

[2]) M — от matching (паросочетание). (*Прим. перев.*)

ные паросочетания, которые могут быть выбраны. Положим

$$\{A,\ M_A\} \supset \{B,\ M_B\},$$

если $A \supset B$ и M_A является продолжением M_B. Тогда множество всех частичных паросочетаний образует частично упорядоченное множество.

Вернемся к случаю, когда V не имеет дефицита. Частичное паросочетание $\{A,\ M_A\}$ будет называться *правильным паросочетанием*, если после удаления всех вершин из V и из V', которые участвуют в M_A, и всех ребер с концом в этих вершинах остающееся множество $V - A$ является множеством без дефицита в полученном графе.

Лемма. *Каждое правильное частичное паросочетание содержится в максимальном паросочетании, являющемся паросочетанием всего множества V.*

Доказательство. Согласно предыдущему лемма очевидна, если V конечно. Если же V бесконечно, то воспользуемся принципом максимальности и рассмотрим некоторое упорядоченное множество правильных частичных паросочетаний $\{A,\ M_A\}$. Тогда сумма $\bigcup A$ также является сопоставленной при помощи правильного паросочетания. В самом деле, если бы $V - \bigcup A$ содержало какое-нибудь конечное подмножество B с положительным дефицитом, то это получилось бы после удаления некоторых ребер, примыкающих к B. Но первоначально было только конечное число таких ребер; следовательно, B получило бы положительный дефицит уже после удаления ребер для одного из паросочетаний $\{A,\ M_A\}$, в противоречии с тем, что они все правильные. Кроме того, если A_0 — максимальное множество с правильным паросочетанием, то $A_0 = V$, так как иначе, как мы уже показали, A_0 можно было бы увеличить при помощи паросочетания новой вершины.

Все эти рассуждения приводят к *основной теореме о паросочетании.*

Теорема 7.3.3. *Пусть множество вершин V локально конечно и имеет максимальный дефицит δ_0. Тогда можно найти такое подмножество D множества V с δ_0 вершинами, что $V - D$ сопоставляется при паросочетании на некоторое подмножество множества V', и δ_0 есть наимень-*

шее число с этим свойством. Для того чтобы V можно было сопоставить при паросочетании на некоторое подмножество множества V', необходимо и достаточно, чтобы V не имело дефицита.

Доказательство. Если V содержит подмножество A с положительным дефицитом, то вершины из A не могут быть сопоставлены при паросочетании на $V'(A)$, так как последнее множество содержит слишком мало вершин. Мы уже видели, что δ_0 есть наименьшее число вершин, которые нужно удалить из V, чтобы получить множество без дефицита. Остальное следует из леммы. Доказательство можно было бы упростить, если воспользоваться теоремой 7.1.4.

В том случае, когда V является конечным множеством, нет необходимости накладывать требование локальной конечности, так как при помощи исключения ребер можно получить часть G' графа G с конечными локальными степенями и с тем же максимальным дефицитом. Действительно, пусть V содержит n вершин. Никакое его подмножество A, содержащее хотя бы одну вершину a бесконечной степени $\rho(a)$, не может иметь положительного дефицита. Это остается справедливым, если удалить все ребра в a, кроме n. Остающийся граф G' локально конечен и имеет те же множества положительного дефицита, что и G. Из теоремы 7.3.3 получается

Теорема 7.3.4. *Если множество вершин V конечно и состоит из n вершин и максимальный дефицит равен δ_0, то максимальное число вершин, которые могут быть сопоставлены при паросочетании в V', равно*

$$\mu = n - \delta_0.$$

Последняя часть теоремы 7.3.3 равносильна теореме Ф. Холла *о системах различных представителей:*

Теорема 7.3.5. *Пусть $F(A_i)$ — семейство конечных подмножеств множества V'. Если любые k множеств A_i содержат в совокупности не менее k элементов, то можно найти такие различные элементы $a_i' \in V'$, что для каждого i будет*

$$a_i' \in A_i.$$

Доказательство получается немедленно, если множества A_i считать вершинами из множества V и соединить каждое A_i ребрами с теми элементами a'_j из V', которые принадлежат A_i. Из теоремы 7.3.3 вытекает также более общий результат:

Теорема 7.3.6. *Если в условиях теоремы 7.3.5 существует такое фиксированное число δ_0, что любые k множеств A_i содержат в совокупности хотя бы $k-\delta_0$ элементов, то в семействе $F(A_i)$ можно найти систему различных представителей a_i для всех, кроме δ_0, множеств.*

Наконец, на основании теоремы 7.3.4 можно отметить, что если семейство $F(A_i)$ содержит только конечное число множеств, то в теоремах 7.3.5 и 7.3.6 можно не предполагать, чтобы множества A_i были конечными.

7.4. Взаимные паросочетания. До сих пор мы изучали частичные паросочетания множества V в V'. Далее мы будем исследовать взаимные паросочетания V в V' и V' в V. Прежде всего докажем теорему:

Теорема 7.4.1. *Пусть M есть паросочетание некоторого подмножества A множества V в V', а M' — паросочетание некоторого подмножества A' множества V' в V. Тогда из ребер в M и M' можно построить такое частичное паросочетание между V и V', в котором участвуют все вершины из A и A'.*

Доказательство. В каждой вершине $a \in A$ есть единственное ребро $E=(a, v')$ из M, а в каждой вершине $a' \in A'$ — единственное ребро $E'=(a', v)$ из M'. Поэтому граф $M \cup M'$ имеет не более двух ребер в каждой вершине из $A \cup A'$ и не более одного ребра в остальных вершинах из $V \cup V'$. Если две вершины a_0 и a'_0 соединены одним и тем же ребром $E=(a_0, a'_0)$ в M^0 и в M', то мы сохраняем при паросочетании сопоставленными a_0 и a'_0. Предположим, что $E_0=(a_0, a'_0)$ принадлежит M, а в M' имеется другое ребро $E'_0=(a'_0, a_1)$ в a'_0. Мы можем идти дальше из a_1 по некоторому ребру $E_1=(a_1, a'_1)$ из M [1]) и будем продолжать этот процесс, пока возможно. В результате мы получим цепь

$$(a_0, a'_0)(a'_0, a_1)(a_1, a'_1)(a'_1, a_2)\ldots, \qquad (7.4.1)$$

[1]) Если $a_1 \notin A_1$, то сопоставляем a_0 и a_0'. (*Прим. перев.*)

ребра которой принадлежат поочередно M и M'. Цепь (7.4.1) может оказаться конечной, только если она возвращается к $a_0 = a_n$. Тогда паросочетание между вершинами a_i и a'_i определяется ребрами $E_i = (a_i, a'_i)$ (рис. 7.4.1).

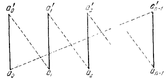


Рис. 7.4.1.

Пусть цепь (7.4.1) бесконечна. Тогда может существовать некоторое входящее в a_0 ребро $E'_{-1} = (a'_{-1}, a_0)$ из M', в a'_{-1} — некоторое входящее ребро $E_{-1} = (a_{-1}, a'_{-1})$ из M и т. д. Цепь (7.4.1) может быть так продолжена и в противоположном направлении. Если это построение остановится в некоторой вершине a_{-n}, то паросочетание между двумя множествами вершин в этой цепи может быть установлено с помощью ребер E_i. Если цепь закончится в некоторой вершине a'_{-n}, то можно использовать ребра E'_i. Наконец, если (7.4.1) продолжается неограниченно в обоих направлениях, то можно использовать каждое из этих семейств ребер (рис. 7.4.2).

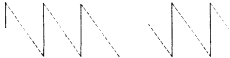


Рис. 7.4.2.

Если в теореме 7.4.1 положить $A = V$ и $A' = V'$, то получится так называемая *теорема Бернштейна:*

Теорема 7.4.2. *Пусть M — некоторое паросочетание V в V', а M' — некоторое паросочетание V' в V. Тогда* *из ребер в M и M' можно построить паросочетание V на V'* [1]).

Первоначально эта теорема была установлена для доказательства следующего результата из теории множеств. Если множество A находится во взаимно однозначном соответствии с некоторым подмножеством множества B, а множество B находится во взаимно однозначном соответствии с некоторым подмножеством множества A, то существует взаимно однозначное соответствие между A и B.

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что граф G локально конечен во всех вершинах из V и V'. Тогда функция дефицита $\delta'(A')$ может быть определена также для конечных подмножеств A' множества V'. Объединяя теоремы 7.4.2 и 7.3.3, мы получим теорему:

Теорема 7.4.3. *Пусть G — локально конечный двудольный граф. Для того чтобы два его множества вершин V и V' можно было сопоставить при паросочетании друг на друга, необходимо и достаточно, чтобы оба максимальных дефицита для V и для V' были равны нулю:*

$$\delta_0 = \delta_0' = 0. \tag{7.4.2}$$

Такое паросочетание может быть определено как часть M графа G, которая имеет ровно одно ребро в каждой вершине G, т. е. *M — однородный суграф первой степени* [2]). Таким образом, теорема 7.4.3 дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы G имел такой суграф.

Среди популярных интерпретаций этой теории имеется так называемая *задача о браке* или *о танцах*. В группе имеется равное число девушек и юношей. Каждый юноша знаком с несколькими девушками и каждая девушка знакома с несколькими юношами. При каких условиях можно найти такое их расположение, чтобы каждый имел своим партнером знакомого?

Более практической интерпретацией является так называемая задача о назначениях. Группа лиц может выполнять несколько видов работ. Каждый член группы

[1]) Паросочетание, в котором участвуют все вершины, называется *совершенным* (см.: Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, 1962). (*Прим. перев.*)

[2]) См. п. 1.3. (*Прим. перев.*)

может выполнять только некоторые из этих видов работ. В каких случаях можно заполнить все места квалифицированными работниками? Существует и много других интерпретаций, которые могут быть сформулированы в терминах сборки, состязаний или соединений.

Теорему 7.4.3 можно сформулировать также как теорему о множествах.

Теорема 7.4.4. *Пусть*

$$F(A_i), \quad F'(A_i') \tag{7.4.3}$$

— два семейства подмножеств множества S. Предположим, что каждое множество A_i пересекается только с конечным числом множеств A_j' и наоборот. Взаимно однозначное сопоставление множеств в двух семействах (7.4.3), *при котором соответствующие множества A_i и A_i' имеют непустое пересечение, возможно тогда и только тогда, когда любые k множеств ($k = 1, 2, \ldots$) A_i пересекаются не менее чем с k множествами A_j', и наоборот.*

Чтобы получить теорему 7.4.4 из теоремы 7.4.3, нужно принять множества A_i за вершины из V, A_j' — за вершины из V' и считать, что в G имеется ребро (A_i, A_j') тогда и только тогда, когда эти два множества пересекаются.

Заметим, что из теоремы 7.4.4 не следует, что можно найти множество *различных общих представителей* для множеств из двух семейств (7.4.3), т. е. такое множество элементов a_i, что

$$a_i \in A_i, \quad a_i \in A_i', \quad a_i \neq a_j.$$

Установление условий существования таких систем представителей оказывается довольно трудной задачей. Однако если одно из семейств (7.4.3) состоит из непересекающихся множеств, то такое множество представителей получается из паросочетания просто путем произвольного выбора $a_i \in A_i \cap A_i'$.

Сделаем несколько замечаний о фактическом построении паросочетания M[1]). Начнем с выбора некоторого ребра $E = (a, a')$, примем, что оно принадлежит M, а затем

[1]) Соответствующего теореме 7.4.3. (*Прим. перев.*)

удалим из G все ребра с концом в a или в a'. В остающемся графе паросочетание[1]) существует тогда и только тогда, когда он не имеет подмножеств с положительным дефицитом. Пусть A_1 — множество из $V-a$ с дефицитом $\delta(A_1)$ в G. Удаление вершины a' изменит дефицит A_1, только если $a' \in V'(A_1)$, и тогда он увеличится до

$$\delta_1(A_1) = \delta(A_1) + 1$$

в G_1. Поэтому в множестве $V-a$ максимальный дефицит в G_1 есть $\delta_1 = 0$, кроме случая, когда $a' \in V'(A_1)$ для некоторого критического множества A_1 в G. Этого не может случиться, если выбрать $a \in A_0$ для некоторого минимального критического множества $A_0 \neq \varnothing$ в V. В этом случае любое другое критическое множество A_1 в G либо содержит A_0, либо не пересекается с A_0. Первая возможность исключается, так как $a \notin A_1$. При второй — никакая вершина a' на ребре $E = (a, a')$ не может принадлежать $V'(A_1)$, так как иначе было бы

$$\delta(A_0 \cup A_1) > 0$$

в противоречии с предположением. Следовательно, $\delta_1 = 0$ в G_1. В конечном случае из теоремы 7.4.3 видно, что также $\delta_1' = 0$ в множестве $V' - a'$. (В бесконечном случае это же заключение может быть выведено, как читатель может проверить, из рассмотрений, приведенных в п. 7.6.) Наше рассуждение показывает, что искомое паросочетание получается при последовательном выборе ребер $E_i = (a, a')$ в различных остающихся графах, где каждый раз за a может быть взята произвольная вершина в любом минимальном критическом множестве.

На первом шаге мы имеем $\rho(a)$ выборов для ребер в a. После удаления ребер в соответствующей вершине a' локальные степени в множестве $V-a$ уменьшатся не более, чем на единицу, при условии, что ребра однократные. Таким образом, в следующей вершине мы имеем не менее чем $\rho(b)-1$ выборов и т. д. Это приводит к следующему утверждению М. Холла. *Пусть G — двудольный граф с однократными ребрами, для которого существует хотя бы одно паросочетание. Тогда G имеет по*

[1]) $V-a$ на $V'-a'$. (*Прим. перев.*)

крайней мере $\rho_0!$ *паросочетаний, где*

$$\rho_0 = \min_{a \in V} \{\rho(a)\}.$$

Имеется значительное число работ, посвященных проблеме паросочетаний. Приведенные здесь исследования в основном взяты из статьи автора. В библиографии приведены статьи, содержащие другие доказательства, а также другие результаты о паросочетаниях.

Задачи

1. Попытаться улучшить приведенную здесь нижнюю границу для числа паросочетаний.
2. Попытаться найти верхние границы для этого числа.

7.5. Паросочетания в графах частного вида. Существуют различные специальные двудольные графы, для которых можно довольно легко установить существование паросочетания [1]), просто показав, что никакое конечное множество вершин не может иметь положительного дефицита.

Пусть G — однородный граф степени m, так что

$$m = \rho(a) = \rho(a') \tag{7.5.1}$$

для всех вершин $a \in V$ и $a' \in V'$.

Теорема 7.5.1. *Однородный граф не имеет дефицита.*

Доказательство. Для любого конечного множества $A \subset V$ с $\nu(A)$ вершинами существует

$$\rho(A) = m\nu(A)$$

ребер, имеющих конец в A. Все эти ребра имеют свой второй конец в $V'(A)$. Полное число ребер с концом в $V'(A)$ равно

$$m\nu(V'(A)),$$

причем

$$m\nu(V'(A)) \geqslant m\nu(A).$$

Отсюда

$$\delta(A) = \nu(A) - \nu(V'(A)) \leqslant 0,$$

что и требовалось.

[1]) В этом пункте имеются в виду паросочетания V на V'. (*Прим. перев.*)

Граф M_1, состоящий из ребер паросочетания, является однородным суграфом степени 1. Если ребра M_1 удалить из G, то остающийся граф

$$G_1 = G - M_1$$

будет однородным степени $m - 1$. Поэтому он также имеет однородный суграф M_2 степени 1, ребра которого можно удалять. Эту редукцию можно продолжать пока не исчерпается весь граф. Нами установлена

Теорема 7.5.2. *Однородный двудольный граф степени m является прямой по ребрам суммой*

$$G = \bigcup_i M_i$$

m однородных суграфов M_i степени 1.

Эту теорему об однородных графах можно применить к случаю, когда имеется два разложения одного и того же множества

$$S = \bigcup B_i = \bigcup B'_j \tag{7.5.2}$$

на непересекающиеся классы B_i и B'_j, содержащие по m элементов. Мы получаем, что для этих двух семейств классов существует система общих представителей.

Эти рассуждения могут быть использованы для установления некоторых свойств разложений на смежные классы в группах. Пусть S — произвольная группа, A и B — ее конечные подгруппы одного порядка m. Тогда разложения S на смежные классы по A и по B будут непересекающимися разложениями типа (7.5.2). Следовательно, существует такая система $\{g\}$ общих представителей, что

$$S = \bigcup gA = \bigcup Bg. \tag{7.5.3}$$

Точно так же существуют разложения

$$S = \bigcup Ag' = \bigcup g'B \tag{7.5.4}$$

с одними и теми же правыми и левыми представителями. Этот результат принадлежит Скорца. В частности, когда $A = B$, мы получим разложения

$$S = \bigcup g'A = \bigcup Ag' \tag{7.5.5}$$

с одними и теми же представителями для правых и левых смежных классов — факт, впервые установленный Миллером и Чепменом.

В связи с этим заметим, что, опираясь на свойства групп, можно показать, что разложения вида (7.5.5) будут существовать также и для бесконечных подгрупп общего типа (см. Оре). Однако соответствующая теорема справедлива не всегда, как показывает пример, приведенный Шю.

Рассмотрим теперь некоторые графы, которые мы назовем *почти однородными*. Это означает, что локальные степени двудольного графа G имеют вид

$$\rho(a) = m - d(a), \quad \rho(a') = m - d(a'), \qquad (7.5.6)$$

где отклонения $d(a)$ и $d(a')$ — положительные или отрицательные целые числа, причем только конечное число их отлично от нуля. Положим

$$\sum d(a) = P + N, \quad \sum d(a') = P' + N', \qquad (7.5.7)$$

где P — сумма положительных, N — сумма отрицательных отклонений в V, а P' и N' — соответствующие суммы в V'. Эти величины должны быть ограничены:

$$P + |N'| < m, \quad P' + |N| < m. \qquad (7.5.8)$$

Тогда можно показать следующее.

Теорема 7.5.3. *Почти однородный граф G, в котором отклонения, определяемые в* (7.5.6), *удовлетворяют условиям* (7.5.8), *имеет однородный суграф первой степени.*

Доказательство. Согласно (7.5.6) мы имеем

$$\rho(A) = m\nu(A) - \sum_{a \in A} d(a)$$

ребер с концом в конечном множестве A. Эти ребра связывают A с $V'(A)$. Число ребер, выходящих из этого множества, равно

$$\rho(V'(A)) = m\nu(V'(A)) - \sum_{a' \in V'(A)} d(a').$$

Это число не меньше, чем $\rho(A)$, и после вычитания мы получаем

$$m\delta(A) + \sum d(a') - \sum d(a) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$m\delta(A) \leqslant P + |N'| < m,$$

а так как $\delta(A)$ — целое число, должно быть $\delta(A) \leqslant 0$, что и требовалось.

Теорема 7.5.3 является расширением теоремы 7.5.1. Теорема 7.5.2 имеет следующее обобщение.

Теорема 7.5.4. *Если для почти однородного графа G существует такое положительное целое число $t \leqslant m$, что в* (7.5.7) *выполняется*

$$P + |N'| \leqslant m - t,\ P' + |N| \leqslant m - t,$$

то G имеет часть $G_0 = \bigcup_{i=1}^{t} M_i$, являющуюся прямой по ребрам суммой t однородных суграфов первой степени.

Доказательство предоставляется читателю (см. Оре).

В качестве применения теоремы 7.5.3 получаем теорему:

Теорема 7.5.5. *Если G — однородный граф степени m, то G имеет паросочетание*[1], *в котором не участвуют произвольно заданные $m - 1$ ребер.*

Доказательство. После удаления из G $m - 1$ ребер остается почти однородный граф, в котором все отклонения (7.5.6) положительны и

$$\sum d(a) = \sum d(a') = m - 1.$$

Далее докажем следующее обобщение теоремы 7.5.2:

Теорема 7.5.6. *Пусть в двудольном графе G существует точная верхняя граница m для локальных степеней. Тогда G есть сумма m непересекающихся по ребрам частичных паросочетаний.*

Доказательство. Обозначим через A_m и A'_m соответственно подмножества V и V', состоящие из вершин с локальными степенями m. Как и при доказательстве теоремы 7.5.1, показываем здесь, что подмножества множеств A_m и A'_m не могут иметь положительных дефицитов и, следовательно, существуют частичные паросочетания для вершин каждого множества. Согласно теореме 7.4.1 из двух таких паросочетаний можно построить одно частичное паросочетание M_m для G, содержащее все

[1] V на V'. (*Прим. перев.*)

вершины из A_m и A'_m. Если M_m удалить из G, то мы получим новый граф, в котором максимальная локальная степень равна $m-1$. Проводя последовательно операции такого типа, получим заключение теоремы.

Имеет место также несколько иного рода теорема о паросочетании:

Теорема 7.5.7. *Пусть G — двудольный граф с n вершинами в каждом множестве вершин, удовлетворяющий двум условиям:*

1. Никакое подмножество V или V' менее чем с l вершинами не имеет положительного дефицита.

2. Любые l вершин из V соединены ребрами не менее чем с $n/2$ вершинами из V', и наоборот.

Тогда G имеет паросочетание[1]).

Доказательство. Если $A \subset V$ имеет не менее чем l вершин, то из условия 2 следует

$$\nu(V'(A)) \geqslant \frac{n}{2}.$$

Если бы такое множество имело положительный дефицит, то было бы

$$\nu(A) > \frac{n}{2}.$$

Для минимального критического множества N' в V' (если оно существует) мы получили бы также

$$\nu(V(N')) \geqslant \frac{n}{2}.$$

В дальнейшем в теореме 7.6.1 мы установим, что если A есть критическое множество, то A и $V(N')$ не пересекаются; следовательно,

$$\nu(A \cup V(N')) > n$$

в противоречии с тем, что V имеет только n вершин. Следовательно, G не может иметь множеств с положительным дефицитом.

На основании теоремы 7.5.7 паросочетания существуют в следующих случаях:

1. Каждая вершина из V соединена ребрами не менее чем с $n/2$ вершинами из V', и наоборот;

[1]) V на V'. (*Прим. перев.*)

2. G не имеет концевых ребер, и любые две вершины из V соединены по крайней мере с $n/2$ вершинами из V', и наоборот.

Некоторые из предыдущих результатов для локально конечных графов остаются в силе, когда степени не более чем счетны. Теорема 7.5.2 допускает обобщение:

Теорема 7.5.8. *Пусть G — связный двудольный граф, в котором множества вершин*

$$V = (a_1, a_2, \ldots), \quad V' = (a'_1, a'_2, \ldots) \tag{7.5.9}$$

счетны и каждая вершина одного множества соединена со счетным числом вершин другого. Тогда

$$G = \bigcup_{i=1,2,\ldots} M_i \tag{7.5.10}$$

является прямой по ребрам суммой последовательности совершенных паросочетаний [1]).

Доказательство. При данных условиях число ребер в G также счетно:

$$E_1, E_2, \ldots \tag{7.5.11}$$

Установим прежде всего, что G имеет совершенное паросочетание M_1, которое содержит данное ребро E_1. Для этого построим паросочетание M множества V в V', выбрав сначала E_1, а затем последовательно некоторое ребро F_i в каждой из остальных вершин a_i в (7.5.9). Это всегда возможно, так как на каждом шаге число уже выбранных ребер конечно. Аналогично мы получим паросочетание M' множества V' в V, содержащее E_1. Как и в п. 7.4, из M и M' может быть построено, согласно теореме Бернштейна, совершенное паросочетание M_1 для графа G, содержащее E_1. Остающийся граф $G - M_1$ будет графом того же типа, что и G; следовательно, в нем может быть построено совершенное паросочетание M_2, содержащее первое ребро из последовательности (7.5.11), не принадлежащее M_1. Повторяя этот процесс, мы получим формулу (7.5.10).

7.6. Двудольные графы с положительными дефицитами. В доказанных выше теоремах о паросочетаниях

[1]) См. примечание на стр. 147. (*Прим. перев.*)

мы имели дело главным образом с графами, в которых выполнялись условия (7.4.2), так что множеств с положительными дефицитами в них не было. Рассмотрим теперь случай, когда множества вершин V и V' имеют положительные максимальные дефициты δ_0 и δ_0'. Выведем сначала некоторые вспомогательные утверждения о соотношениях между дефицитами подмножеств V и V'.

Лемма 1. *Если A и A' — соответственно подмножества V и V', то в каждом из пересечений*

$$D = A \cap V(A'), \quad D' = A' \cap V'(A) \qquad (7.6.1)$$

любая вершина всегда соединена с вершиной из другого пересечения.

Доказательство. Если $a' \in D'$, то $a' \in V'(A)$ и, значит, существует ребро (a, a') с $a \in A$. Но все ребра из a' должны идти к $V(A')$ по определению этого множества; следовательно, $a \in D$ (рис. 7.6.1).

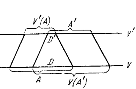


Рис. 7.6.1.

Из леммы 1 непосредственно следует

Лемма 2. *Каждое из соотношений*

$$D = \varnothing, \quad D' = \varnothing$$

влечет за собой другое.

Докажем еще несколько лемм.

Лемма 3. *Имеет место неравенство*

$$\delta(A) - \delta(A - D) \leqslant \nu(D) - \nu(D'). \qquad (7.6.2)$$

Доказательство. Согласно определению функции дефицита

$$\delta(A) = \nu(A) - \nu(V'(A)),$$

$$\delta(A - D) = \nu(A - D) - \nu(V'(A - D)),$$

и после вычитания мы получаем

$$\delta(A) - \delta(A - D) = \nu(D) - \nu(V'(A)) + \nu(V'(A - D)). \tag{7.6.3}$$

Никакое ребро (a_1, a_1') от вершины $a_1 \in A - D$ не может идти к вершине $a_1' \in A'$, так как a_1 не принадлежит множеству $V(A')$. Отсюда

$$V'(A - D) \subseteq V'(A) - D',$$

и (7.6.2) следует из (7.6.3).

Лемма 4.

$$\delta(A) + \delta'(A') \leqslant \delta(A - D) + \delta(A' - D'). \tag{7.6.4}$$

Доказательство. Для A' мы имеем неравенство, соответствующее (7.6.2):

$$\delta'(A') - \delta'(A' - D') \leqslant \nu(D') - \nu(D),$$

и если его сложить с (7.6.2), то получим (7.6.4).

Следствием леммы 4 является

Лемма 5. *Если A и A' — критические множества, то множества $A - D$ и $A' - D'$ также критические.*

И наконец, докажем следующее:

Лемма 6. *Если A — критическое множество в V и N' — минимальное критическое множество в V', то*

$$N' \cap V'(A) = A \cap V(N') = \varnothing. \tag{7.6.5}$$

Доказательство. Согласно лемме 5 множество

$$N' - D' = N' - V'(A) \cap N'$$

критическое. Так как N' — минимальное множество, это возможно только при

$$V'(A) \cap N' = \varnothing.$$

Второе соотношение в (7.6.5) следует из леммы 2.

Из этих лемм мы выведем следующие утверждения о структуре графа G.

Теорема 7.6.1. *Каждое из множеств вершин двудольного графа может быть разложено на три непересекающихся подмножества:*

$$V = N \cup V(N') \cup R,$$
$$V' = N' \cup V(N) \cup R', \tag{7.6.6}$$

где N и N' — минимальные критические множества в V и в V'. Подграф $G(R, R')$, состоящий из ребер, соединяющих R и R', не имеет дефицита. Любое критическое множество в V имеет вид $N \cup A$, где A есть подмножество множества R с нулевым дефицитом в $G(R, R')$.

Если множества вершин V и V' конечные с n и n' вершинами, то

$$\nu(R) = \nu(R') \tag{7.6.7}$$

и

$$n - \delta_0 = n' - \delta_0'. \tag{7.6.8}$$

Доказательство. Ситуация схематически изображена на рис. 7.6.2.

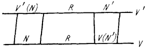


Рис. 7.6.2.

Согласно лемме 6 множества N и $V(N')$ не пересекаются, поэтому можно представить V в виде (7.6.6), где R обозначает множество оставшихся вершин. Так как R не пересекается с $V(N')$, вершины из R могут быть соединены ребрами только с вершинами множества

$$V'(N) \cup R'.$$

Дефицит множества $A \subset R$ в графе $G(R, R')$ равен

$$\delta_1(A) = \nu(A) - \nu(R'(A)),$$

и легко проверить, что в G

$$\delta(N \cup A) = \delta_0 - \delta_1(A). \tag{7.6.9}$$

Следовательно, дефицит $\delta_1(A)$ не может быть положительным.

Если $\delta_1(A) = 0$, то в силу (7.6.9)

$$\delta(N \cup A) = \delta_0,$$

и $N \cup A$ является критическим множеством. С другой стороны, если N_1 — критическое множество в V, то оно не пересекается с $V(N')$ по лемме 6, и можно написать $N_1 = N_0 \cup A$; следовательно, $\delta_1(A) = 0$.

Если множества V и V' конечны, то должно иметь место (7.6.7), так как $G(R, R')$ не имеет дефицита. Из (7.6.6) следует:

$$n = \nu(N) + \nu(V(N')) + \nu(R),$$
$$n' = \nu(N') + \nu(V'(N)) + \nu(R'),$$

и после вычитания мы получим (7.6.8).

Из теоремы 7.6.1 получается распространение соответствующей теоремы о паросочетании:

Теорема 7.6.2. *Пусть G — двудольный граф с максимальными дефицитами δ_0 и δ_0'. Тогда можно найти такое подмножество D множества N с δ_0 вершинами и такое подмножество D' множества N' с δ_0' вершинами, что множества*

$$V - D, \quad V' - D'$$

могут быть сопоставлены при паросочетании друг на друга, а δ_0 и δ_0' — наименьшие числа с этим свойством.

Доказательство. Мы видели в теореме 7.3.2, что для сведения V к множеству без дефицита нужно удалить некоторое подмножество D множества N с δ_0 вершинами и выходящие из них ребра. Но эта операция не может изменить дефицит множества V', так как по теореме 7.6.1 нет ребер от N' к N. Поэтому можно, кроме того, удалить подмножество D' множества N' с δ_0' вершинами и получить, что $V' - D'$ не имеет дефицита. Это доказывает теорему 7.6.2.

Теоремой 7.6.2 можно также воспользоваться для придания теореме о взаимно однозначном сопоставлении для множеств более общей формы. Пусть (7.4.3) — два семейства множеств, удовлетворяющих условиям теоремы 7.4.4. Если существуют такие числа $\delta_0 \geqslant 0$ и $\delta_0' \geqslant 0$, что любые k множеств A_i пересекаются не менее чем с $k - \delta_0$ множествами A_j', а любые k множеств A_j' пересекаются не менее чем с $k - \delta_0'$ множествами A_i, то можно взаимно однозначно сопоставить все, кроме δ_0, множества A_i со всеми, кроме δ_0', множествами A_j', так, чтобы соответствующие друг другу множества имели непустое пересечение.

Приведем еще утверждение, которое является непосредственным следствием соотношения (7.6.8).

Теорема 7.6.3. *Если оба множества вершин двудольного графа G конечны и имеют одинаковое число вершин, то*

$$\delta_0 = \delta_0'. \tag{7.6.10}$$

Задачи

1. Каков максимальный дефицит для семейства множеств, состоящего из всех подмножеств множества V с n элементами?
2. Тот же вопрос для семейства всех m-элементных подмножеств.
3. Построить пример бесконечного графа, для которого теорема 7.6.3 неверна.

7.7. Применения к матрицам. Рассмотрим произвольную конечную матрицу

$$M = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n', \tag{7.7.1}$$

элементы a_{ij} которой могут быть как нулевыми, так и отличными от нуля. Свойства матрицы M в этом отношении могут быть описаны при помощи ее двудольного *терм-графа* $G(M)$. Множества вершин V и V' нумеруются числами от 1 до n и соответственно от 1 до n', и в $G(M)$ имеется ребро (i, j), если $a_{ij} \neq 0$.

Этот граф G имеет матрицу смежности

$$M_0(G) = (g_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n', \tag{7.7.2}$$

где $g_{ij} = 1$ или $g_{ij} = 0$ в зависимости от того, существует или нет в G ребро (i, j), т. е.

$$g_{ij} = 1 \text{ при } a_{ij} \neq 0,$$
$$g_{ij} = 0 \text{ при } a_{ij} = 0.$$

Предположим сначала, что в (7.7.1) $n = n'$, так что M есть квадратная матрица с определителем

$$D = |M| = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}. \tag{7.7.3}$$

В ненулевых членах представления (7.7.3) все элементы a_{ij} должны быть отличны от нуля; следовательно, ребра

$$(1, j_1)(2, j_2) \ldots (n, j_n)$$

в G представляют собой паросочетание V на V'. Обратно, если в G существует паросочетание двух множеств вершин V и V', то соответствующее произведение имеется в (7.7.3) и отлично от нуля. Поэтому из общей теоремы о паросочетании 7.4.2 получаем

Теорема 7.7.1. *Представление* (7.7.3) *определителя содержит ненулевые члены тогда и только тогда, когда любые k строк в D имеют ненулевые элементы a_{ij} не менее чем в k столбцах* ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Обратимся снова к общей матрице (7.7.1). Ее *терм-ранг* определяется как наибольший из порядков миноров, содержащих в своем разложении ненулевые члены. Определяем дефицит множества A из k строк как

$$\delta(A) = k - k'(A),$$

где $k'(A)$ есть число столбцов в M, имеющих хотя бы один ненулевой элемент, общий с одной из строк из A. Как и раньше, обозначаем максимальный дефицит через δ_0; для столбцов аналогично — δ_0' Из теоремы 7.6.2 вытекает

Теорема 7.7.2. *Терм-ранг матрицы размеров $n \times n'$ равен*

$$\rho = n - \delta_0 = n' - \delta_0',$$

где δ_0 и δ_0' — максимальные дефициты множеств строк и столбцов.

Если поменять номера двух вершин в V, то соответствующие строки в матрице переставятся; аналогичное справедливо и для столбцов. При помощи изменения нумерации множеств вершин V и V' можно перерасположить строки и столбцы матрицы в любом порядке. Этим можно воспользоваться для приведения матрицы к некоторой нормальной форме. Как мы видели в теореме 7.6.2, существуют такие множества

$$D \subset N, \quad D' \subset N'$$

соответственно с δ_0 и δ_0' элементами, что множества

$$V - D, \quad V' - D'$$

сопоставляются при паросочетании друг на друга. Из (7.6.6) мы получаем соответствующие разложения V и

V' на четыре множества:

$$V = V(N') \cup R \cup (N - D) \cup D,$$
$$V' = V'(N) \cup R' \cup (N' - D') \cup D'.$$

Если расположить вершины в таком порядке и заметить, какие множества вершин соединены ребрами, то мы получим матрицу следующего вида:

$$\begin{array}{c|cccc} & V'(N) & R' & N'-D' & D' \\ \hline V(N') & M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ R & M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ N-D & M_{31} & 0 & 0 & 0 \\ D & M_{41} & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad (7.7.4)$$

Здесь матрицы M_{31}, M_{22} и M_{13} квадратные. Дальнейшие факты можно найти у Оре; еще более подробное изучение таких нормальных форм провели Далмидж и Мендельсон.

Упомянем еще одну проблему, касающуюся паросочетаний [1]) для двудольных графов. Если такие паросочетания существуют, то можно искать число различных среди них. При этом предполагается, конечно, что множества вершин V и V' графа G конечны и имеют одно и то же число вершин

$$n = \nu(V) = \nu(V'). \qquad (7.7.5)$$

При формулировке с определителями мы видели, что каждое паросочетание [1]) соответствует одному ненулевому члену представления (7.7.3). Аналогично каждое паросочетание [1]) графа соответствует одному члену

$$g_{1j_1} g_{2j_2} \ldots g_{nj_n} = 1$$

в определителе матрицы смежности (7.7.2). Напомним, что для квадратной матрицы (7.7.1) существует также, кроме определителя D (7.7.3), другая, реже используемая величина, называемая *перманентом* P. Этот перманент определяется как сумма

$$P = \sum a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

[1]) V на V'. (*Прим. перев.*)

тех же членов, что и в D, но взятых с положительными знаками. Таким образом, доказана

Теорема 7.7.3. *Пусть G — двудольный граф с одноократными ребрами и конечными множествами вершин V и V', имеющими одно и то же число (7.7.5) элементов. Тогда число паросочетаний*[1] *между V и V' равно значению перманента матрицы смежности для G.*

Утверждение теоремы 7.7.1 можно выразить в несколько иной форме. Предположим, что матрица M в (7.7.1) содержит нулевую подматрицу O размеров $r \times r'$. Тогда существует множество C из r строк матрицы M, которые содержат ненулевые элементы не более чем из $n' - r'$ столбцов, так что

$$\delta(C) \geqslant r - (n' - r') = r + r' - n'.$$

С другой стороны, нулевая матрица, образованная строками 3, 4 и столбцами 2, 3, 4 в (7.7.4), имеет размеры

$$r = \nu(N) = \nu(V'(N)) - \delta_0,$$
$$r' = \nu(R' \cup N') = n' - \nu(V'(N)),$$

так что

$$r + r' - n' = \delta_0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 7.7.4. *Максимальные дефициты матрицы (7.7.1) равны*

$$\delta_0 = \max(0,\ r + r' - n'), \quad \delta_0' = \max(0,\ r + r' - n), \quad (7.7.6)$$

где $r \times r'$ — размеры нулевых подматриц из N.

При $n = n'$ терм-ранг получается из теоремы 7.7.2:

$$\rho = 2n - \max(n,\ r + r'). \qquad (7.7.7)$$

Отсюда следует

Теорема 7.7.5. *Терм-ранг квадратной матрицы размеров $n \times n$ меньше n тогда и только тогда, когда существует нулевая подматрица O размеров $r \times r'$, для которой*

$$r + r' > n.$$

[1] Различных. (*Прим. перев.*)

Применим этот результат к выводу некоторых свойств матриц с неотрицательными элементами $a_{ij} \geqslant 0$. Введем обозначения

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad s_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

для сумм элементов матрицы M по строкам и по столбцам и

$$\sigma_0 = \sum_{ij} a_{ij} = \sum s_i = \sum s_j'$$

для *полной суммы* ее элементов. Если

$$s_j' = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

то матрица называется *стохастической*, и для нее $\sigma_0 = n$. Матрица называется *бистохастической*, если

$$s_i = s_j' = 1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Предположим теперь, что матрица M имеет нулевую подматрицу O размеров $r \times r'$, где $r + r' > n$. Тогда матрицу M можно представить в следующем виде:

$$M = \begin{vmatrix} A & B \\ C & O \end{vmatrix}.$$

Сумма всех элементов B равна

$$\sum_B a_{ij} = \sum_{j=n-r'+1}^{n} s_j',$$

а сумма всех элементов A —

$$\sum_A a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-r} s_i - \sum_B a_{ij} = \sigma_0 - \sum_C a_{ij} - \sum_B a_{ij} \geqslant 0.$$

Это условие можно также переписать в виде

$$\sigma_0 \geqslant \sum_{i=n-r+1}^{n} s_i + \sum_{j=n-r'+1}^{n} s_j'.$$

Поэтому, если

$$\sum s_i + \sum_{r'} s_j' > \sigma_0$$

для любой суммы из r и из r' сумм s_i и s'_j, то M не может иметь нулевой подматрицы O размеров $r \times r'$; следовательно, ее терм-ранг превосходит ρ из (7.7.7). Отсюда следует

Теорема 7.7.6. *Пусть M — квадратная матрица с неотрицательными элементами, для которой полная сумма элементов равна σ_0, а суммы по строкам и по столбцам удовлетворяют неравенствам*

$$s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n, \quad s'_1 \leqslant \ldots \leqslant s'_n.$$

Если для некоторого фиксированного $k > n$

$$s_1 + \ldots + s_r + s'_1 + \ldots + s'_{k-r} > \sigma_0, \quad r = 1, \ldots, n-1, \tag{7.7.8}$$

то терм-ранг ρ матрицы M удовлетворяет неравенству

$$\rho \geqslant 2n - k + 1. \tag{7.7.9}$$

При $k = n + 1$ терм-ранг равен $\rho = n$. Для стохастической матрицы этот критерий сводится к следующему:

Теорема 7.7.7. *Если для стохастической матрицы M выполняются условия*

$$s_1 + \ldots + s_r > n - k + r, \quad k > n, \quad r = 1, \ldots, n-1,$$

то терм-ранг ρ имеет нижнюю границу (7.7.9). Если

$$s_1 + \ldots + s_r > r - 1$$

(в частности, если матрица M является бистохастической), то $\rho = n$.

Условие (7.7.8) можно переписать в виде

$$s_n + \ldots + s_{r+1} + s'_n + \ldots + s'_{k-r+1} < \sigma_0.$$

Если положить

$$\mu_0 = \max_{i, j = 1, \ldots, n-1} (s_i, s'_j),$$

то оно наверняка выполняется при

$$(2n - k)\,\mu_0 < \sigma_0,$$

т. е. при

$$k > 2n - \frac{\sigma_0}{\mu_0}.$$

Это приводит к результату Далмнджа и Мендельсона: *терм-ранг матрицы не превосходит*

$$\frac{\sigma_0}{\mu_0}.$$

Мы закончим этот параграф несколькими утверждениями на тему, которая близка к затронутым и касается *латинских квадратов*. Латинским квадратом называется $(n \times n)$-матрица L, элементами которой являются n символов

$$M_1, M_2, \ldots M_n, \qquad (7.7.10)$$

расположенных так, что каждый символ появляется ровно по одному разу в каждой строке и в каждом столбце. Это название происходит от того, что Эйлер использовал для обозначения элементов латинские буквы A, B, C. Латинский квадрат можно рассматривать как таблицу умножения[1]) для алгебраической системы S с n элементами. Каждая строка в L соответствует одному элементу $a \in S$, каждый столбец — одному элементу $b \in S$, а символы (7.7.10) — их возможным произведениям. Тогда, если на месте (a, b) в таблице оказывается символ M_c, то пишем $a \cdot b = c$. Такая система S является *квазигруппой* в том смысле, что каждое из соотношений

$$xa = xb, \quad ay = by$$

влечет $a = b$. Таблица умножения для любой конечной группы определяет латинский квадрат некоторого частного вида.

Латинский квадрат также может быть представлен как полный двудольный граф G, в котором каждое множество вершин имеет n элементов, а каждая вершина из V соединена ребрами со всеми вершинами из V', и наоборот. Согласно теореме 7.5.2 такой граф является прямой по ребрам суммой n непересекающихся паросочетаний[2]) M_i; обратно, можно считать, что в латинском квадрате каждый символ (7.7.10) указывает, какому паросочетанию[2]) в данном разложении принадлежит каждое ребро G. В паросочетании M_1 можно выбрать первое

[1]) Иначе говоря, таблицу Кэли. (*Прим. ред.*)

[2]) V на V'. (*Прим. перев.*)

ребро n способами, второе — $n-1$ способами и т. д. Таким образом, полное число паросочетаний[1]) будет равно $n!$. Остающийся граф $G-M_1$ однородный степени $n-1$; следовательно, согласно п. 7.4 он имеет не менее чем $(n-1)!$ паросочетаний M_2. Продолжая этот процесс, мы получим (М. Холл), что для данного n существует не менее

$$n!(n-1)!\ldots 2!\ 1!$$

латинских квадратов.

Матрица K размеров

$$k\times l,\quad k\leqslant n,\quad l\leqslant n,$$

элементами которой являются символы (7.7.10), называется *частичным латинским квадратом*, если в каждой ее строке и в каждом столбце каждый символ встречается не более одного раза. Можно показать следующее:

Теорема 7.7.8. *Для того чтобы частичный латинский квадрат можно было дополнить до латинского квадрата, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\mu(i)\geqslant k+l-n,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $\mu(i)$ — число появлений i-го символа в K.

Доказательство просто следует из предыдущих теорем о паросочетаниях.

Задача

1. Частичный латинский квадрат максимален, если нельзя добавить строку или столбец без нарушения его свойства. Установить необходимое и достаточное условие максимальности частичного латинского квадрата.

7.8. Чередующиеся цепи и максимальные паросочетания.

Для многих задач теории графов эффективным инструментом является *метод чередующихся цепей*, введенный Петерсеном (1891) в его исследованиях о существовании частей в графах. Применим здесь этот метод к двудольным графам и паросочетаниям. Пусть

$$M=\{E_i\},\quad E_i=(a_i,a_i'),\quad A=\{a_i\},\quad A'=\{a_i'\},\quad (7.8.1)$$

есть частичное паросочетание графа G, сопоставляющее множества A и A'. *Чередующейся цепью* относительно M называется цепь P, в которой ребра принадлежат поочe-

[1]) V на V'. (*Прим. перев.*)

редно M и $\overline{M}$ и которая начинается обычно ребром, не принадлежащим M. Никакое ребро не может повторяться.

Обозначим через

$$F_1 = (v, a_1'), \quad v \in V - A, \quad a_1' \in A',$$

некоторое ребро в не сопоставленной при паросочетании вершине v. Построим все чередующиеся цепи

$$P = (F_1, E_1, F_2, E_2, \ldots). \tag{7.8.2}$$

Допустим, что по такой цепи можно достигнуть некоторой другой не сопоставленной при паросочетании вершины v_n'; тогда последнее ребро

$$F_n = (a_{n-1}, v_n'), \quad a_{n-1} \in A, \quad v_n' \in V' - A',$$

не может принадлежать M. Такую цепь P можно использовать для получения нового паросочетания M_1, заменяя все ребра E в P и M на ребра F. Заметим, что в M_1 все вершины из A и A' остаются в сопоставленных при паросочетании множествах; кроме того, вершины v и v_n' имеют паросочетания. Такое увеличенное паросочетание M_1 может быть получено также, если цепь P в (7.8.2) бесконечна; но тогда к сопоставленным при паросочетании множествам добавляется только v. В любом случае будем говорить, что M_1 получается из M *чередующимся расширением* относительно P.

Начиная с этого места, будем называть паросочетание M *максимальным*, если не существует паросочетания M_1 с бо́льшими сопоставленными множествами.

Теорема 7.8.1. *Паросочетание максимально тогда и только тогда, когда сопоставленные при нем множества не могут быть увеличены чередующимся расширением.*

Доказательство. Достаточно показать, что паросочетание M, которое не может быть расширено, максимально. Допустим, что существует паросочетание M_1 с бо́льшим сопоставленным множеством A_1, и возьмем ребро

$$F_1 = (v, a_1'), \quad v \in A_1 - A,$$

из M_1, не принадлежащее M. Тогда $a_1' \in A'$, так как иначе M могло бы быть расширено. Построим цепь (7.8.2), начинающуюся с F_1 и состоящую поочередно из ребер паросочетания M_1, не принадлежащих M, и ребер из M, не принадлежащих M_1. Вершина a_1' сопоставлена с v в M_1, так что второе ребро $E_1 = (a_1', a_1)$ из M ведет к вершине a_1, в которой существует другое ребро $F_2 = (a_1, a_2')$ из M_1, и т. д. Следовательно, цепь P либо бесконечна, либо оканчивается в вершине из V', которая не сопоставлена в M. В обоих случаях M может быть расширено.

Чередующаяся цепь P относительно паросочетания M называется *чередующимся циклом*, если она начинается с ребра F_1, не принадлежащего M, и возвращается в начальную вершину по ребру из M. Такая цепь называется *бесконечным чередующимся циклом*, если она может быть продолжена неограниченно в обоих направлениях. Если в чередующемся цикле P поменять ролями ребра, принадлежащие M и не принадлежащие M, то мы получим другое паросочетание $M(P)$ с теми же сопоставленными множествами. Будем в этом случае говорить, что $M(P)$ получается из M *циклической деформацией*. Далее, пусть $\{P\}$ — семейство непересекающихся по ребрам чередующихся циклов. Тогда результатом *циклической деформации* относительно $\{P\}$ называется паросочетание $M\{P\}$, получаемое после выполнения всех циклических деформаций для циклов из $\{P\}$. Новый граф $M\{P\}$ имеет те же сопоставленные при паросочетании множества, что и M.

Теорема 7.8.2. *Если M и M_1 — два совершенных паросочетания множеств вершин V и V' графа G, то одно паросочетание может быть получено из другого циклическими деформациями.*

Доказательство. Как и выше, для ребра E из M, не принадлежащего M_1, существует конечный или бесконечный чередующийся цикл P, содержащий E и состоящий поочередно из ребер M, не принадлежащих M_1, и ребер M_1, не принадлежащих M. Очевидно, существуют максимальные семейства $\{P\}$ непересекающихся по ребрам чередующихся циклов P. В остающемся графе $G - \{P\}$ не может быть ребер M, не принадлежащих M_1, или наоборот, так как иначе в $G - \{P\}$ можно было бы построить новый чередующийся цикл Q, который можно было бы добавить к $\{P\}$. Поэтому в результате деформации M относительно $\{P\}$ мы получим M_1.

Теорема 7.8.2 справедлива также для любых двух паросочетаний с одними и теми же сопоставленными множествами. Проведем такой же анализ для двух максимальных паросочетаний M и M_1 соответственно с сопоставленными множествами $A \cup A'$ и $A_1 \cup A_1'$. Пусть в несопоставленной, или *дефицитной вершине* $v \in V - A$ в M существует ребро $F_1 = (v, a_1')$ из M_1. Построим чередующуюся цепь Q из v, начинающуюся с F_1 и состоящую из ребер M и M_1. Так как M максимально, эта цепь конечна и может кончаться только M-ребром

$$F_n = (a_n', v_1), \qquad v_1 \in V - A_1,$$

в дефицитной вершине v_1 в M_1. Назовем в этом случае Q *дефицитной цепью* в V для M и M_1. Если M_1 деформировать относительно Q, то в полученном паросочетании $M_1(Q)$ вершина v будет дефицитной, а v_1 не будет дефицитной, как в M. Вообще, пусть $\{Q\}$ — семейство непересекающихся по ребрам дефицитных цепей для M и M_1. После деформации M_1 относительно $\{Q\}$ характер дефицитности в паросочетании $M_1\{Q\}$ будет таким же, как в M, для всех концевых точек цепей из $\{Q\}$. Можно показать, что существуют максимальные семейства $\{Q\}$ непересекающихся по ребрам дефицитных цепей. После деформации относительно $\{Q\}$ дефицитные вершины в V для M и для $M_1\{Q\}$ должны быть одними и теми же. Действительно, если бы $v \in V$ было дефицитной вершиной в M и не дефицитной в $M_1\{Q\}$, то можно было бы построить дефицитную цепь Q_1 от v, непересекающуюся по ребрам с цепями максимального семейства $\{Q\}$. После деформации с дефицитными цепями также и для V' мы получим новое паросочетание M_2 с теми же дефицитными вершинами, что и в M. Наконец, M и M_2 могут быть деформированы друг в друга циклическими деформациями.

Теорема 7.8.3. *Любое максимальное паросочетание M можно преобразовать в любое другое максимальное паросочетание M_1 деформациями относительно дефицитных цепей и циклическими деформациями. Существует такое взаимно однозначное соответствие между дефицит-*

ными вершинами в M и в M_1, что соответствующие вершины связаны непересекающимися по ребрам чередующимися цепями.

Отметим также обратный результат:

Теорема 7.8.4. *Пусть M — максимальное паросочетание и $\{Q\}$ — семейство непересекающихся чередующихся цепей четной длины из дефицитных вершин в M. Если M деформируется относительно $\{Q\}$, то новое паросочетание также будет максимальным.*

Доказательство предоставляется читателю.

Пусть, как и раньше, M — *максимальное паросочетание* с сопоставленными множествами $A \cup A'$. Построим все четные чередующиеся цепи $Q_0(v)$, выходящие из вершин $v \in V - A$. Множество N всех концов этих цепей состоит из вершин из V, которые являются дефицитными в некотором максимальном паросочетании графа G. Таким образом, N не зависит от выбора M; назовем это N *дефицитным множеством* в V. Конечные вершины чередующихся цепей $Q_1(v)$ нечетной длины образуют множество $V'(N)$. Аналогично V' имеет дефицитное множество N', состоящее из концов четных чередующихся цепей $Q_0'(v')$ от $v' \in V' - A'$.

Теорема 7.8.5. *Имеем*

$$N \cap V(N') = N' \cap V'(N) = \varnothing. \tag{7.8.3}$$

Доказательство. Соотношение (7.8.3) вытекает из следующего замечания: никакие две чередующиеся цепи $Q(v)$ и $Q'(v')$ не могут иметь общих вершин. Допустим, что $c \in V$ есть первая вершина $Q(v)$, принадлежащая также $Q'(v')$. Так как $Q(v)$ кончается M-ребром в c, цепь

$$P = Q(v,\ c) \cup Q'(c,\ v')$$

является нечетной чередующейся цепью от v к v'. Но тогда M можно расширить относительно P, что противоречит максимальности M.

Согласно (7.8.3) существуют прямые разложения

$$\begin{aligned} V &= N \cup R \cup V(N'), \\ V' &= N' \cup R' \cup V'(N) \end{aligned} \tag{7.8.4}$$

множеств вершин. Заметим, что в (7.8.4) каждый член не зависит от выбора максимального паросочетания M. Здесь N и N' состоят из вершин, дефицитных для некоторого M; $V'(N)$ и $V(N')$ (а следовательно, и остающиеся множества R и R') определяются по N и N' однозначно.

В соответствии с (7.8.4) можно определить разложение максимального паросочетания M. В каждой вершине $v' \in V'(N)$ существует ребро E из M, так как вершина v' не может быть дефицитной. Поэтому чередующиеся цепи от $V - A$ к v' могут быть продолжены через E. Следовательно, все M-ребра из $V'(N)$ имеют свой второй конец в N, и в подграфе

$$G(N,\ V'(N))$$

множество $V'(N)$ имеет паросочетание M_1 в множество N. Аналогично в

$$G(N',\ V(N'))$$

множество $V(N')$ имеет паросочетание M_2 в множество N'. Наконец, в каждом $r \in R$ существует M-ребро, которое может идти только к некоторому $r' \in R'$, и аналогично для каждого $r' \in R'$. Следовательно, M определяет совершенное паросочетание M_3 в графе $G(R,\ R')$. Таким образом, мы имеем разложение

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3.$$

Здесь M_1 и M_2 могут быть названы *дефицитными компонентами*, а M_3 — *совершенной компонентой*. Заметим также, что для любого подмножества F сопоставленных при паросочетании M множеств существует единственный *M-образ* $\mu(F)$, состоящий из конечных вершин M-ребер, выходящих из F. Очевидно

$$\mu(R) = R', \quad \mu(R') = R,$$
$$\mu(V'(N)) \subset N, \quad \mu(V(N')) \subset N'.$$

Имеются некоторые условия, при которых можно установить существование максимальных паросочетаний. Следующий случай является важным.

Теорема 7.8.6. *Локально конечный граф имеет максимальное паросочетание.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуются некоторые дальнейшие свойства функции дефицита. Конечное подмножество A множества V назовем *минимальным* δ-множеством, если

$$\delta(A) = \delta > 0, \ \delta(B) < \delta \text{ для } B \subset A.$$

Лемма. *Если A_1 и A_2 — минимальные δ_1- и δ_2-множества, не содержащие друг друга, то $A_3 = A_1 \cup A_2$ есть минимальное δ_3-множество, для которого*

$$\delta_3 > \max(\delta_1, \ \delta_2). \tag{7.8.5}$$

Доказательство. По теореме 7.2.1

$$\delta(A_1 \cup A_2) + \delta(A_1 \cap A_2) \geqslant \delta_1 + \delta_2,$$

и так как пересечение $A_1 \cap A_2$ является собственным подмножеством A_1 и A_2, мы получаем (7.8.5). Чтобы доказать, что A_3 есть минимальное δ_3-множество, рассмотрим собственное подмножество множества A_3:

$$B_3 = B_1 \cup B_2, \quad B_1 \subseteq A_1, \quad B_2 \subseteq A_2.$$

Можно считать, что B_3 не содержит A_2. Снова из теоремы 7.2.1 следует, что

$$\delta(B_1 \cup A_2) = \delta(B_1 \cup B_2 \cup A_2) \geqslant$$
$$\geqslant \delta(B_1 \cup B_2) + \delta(A_2) - \delta(A_2 \cap B_3).$$

Так как множество A_2 минимально,

$$\delta(B_1 \cup A_2) > \delta(B_1 \cup B_2).$$

Так же

$$\delta(A_1 \cup A_2) \geqslant \delta(B_1 \cup A_2)$$

и, как и требовалось,

$$\delta(B_1 \cup B_2) < \delta_3.$$

Обозначим через

$$N_0 = \bigcup_{\delta=1,2,\dots} A_\delta \tag{7.8.6}$$

сумму всех минимальных δ-множеств; будем называть N_0 *минимальным критическим* множеством в V. Докажем следующие утверждения:

1. Множество $V'(N_0)$ может быть сопоставлено при паросочетании в N_0.

2. Множество $V - N_0$ может быть сопоставлено при паросочетании в $V' - V'(N_0)$.

1. Достаточно показать, что никакое подмножество A' множества $V'(N_0)$ не имеет положительного дефицита в графе

$$G_2 = G(V - N_0,\ V' - V'(N_0)).$$

Если бы в G_1 существовало некоторое A' с $\delta'(A') > 0$, то можно было бы считать, что A' есть минимальное δ'-множество. В G_1 конечные вершины ребер, выходящих из A', образуют множество $B \subset N_0$. По определению (7.8.6) множества N_0, каждая вершина из B принадлежит некоторому минимальному δ-множеству в V. Из леммы следует, что существует минимальное δ-множество A, содержащее B. Применяя соотношение (7.6.4) для дефицитов к A' и A, мы получим противоречие.

2. Чтобы доказать второе свойство, покажем, что никакое подмножество C множества $V - N_0$ не имеет положительного дефицита в графе

$$G_2 = G(V - N_0,\ V' - V'(N_0)).$$

Положим

$$V'(C) = A' \cup A_1',\quad A' \subset V'(N_0),\quad A_1' \subset V' - V'(N_0),$$

и допустим, что в G_2

$$\delta_2(C) = \nu(C) - \nu(A_1') > 0.$$

Пусть, как и выше, B есть множество всех конечных вершин ребер, отходящих от A' к N_0, а A — минимальное δ-множество, содержащее B. Тогда для дефицита множества $A \cup C$ в G мы получим

$$\delta(A \cup C) = \delta + \delta_2(C) = \delta_2 > \delta.$$

Поэтому $A \cup C$ содержит некоторое минимальное δ_2-множество A_2 с $\delta_2 > \delta$; следовательно, A_2 содержится в N_0. Но это противоречит тому, что A_2 должно содержать вершины из C.

Паросочетание M_1 множества $V'(N_0)$ в графе G_1 можно объединить с паросочетанием M_2 множества $V - N_0$ в графе G_2; при этом мы получим паросочетание

$$M = M_1 \cup M_2$$

в G. Чтобы убедиться в максимальности M, заметим, что дефицитные вершины при M должны принадлежать множествам N_0 и $V' - V'(N_0)$. Если бы M можно было расширить, то существовала бы некоторая чередующаяся цепь P от N_0 к $V' - V'(N_0)$. Но цепь P должна была бы идти от N_0 по некоторому ребру, не принадлежащему M, а это противоречит тому, что все ребра от N_0 идут к $V'(N_0)$. Теорема 7.8.6 доказана.

Сделаем еще некоторые замечания о максимальных паросочетаниях. Предположим, что v_0 есть дефицитная вершина в максимальном паросочетании M; построим чередующуюся цепь P, выходящую из v_0. В конечной вершине любого M-ребра $E_{n-1} = (v_{n-1}, v_n)$ в P не может быть ребра $E_n = (v_n, v_{n+1})$, примыкающего к дефицитной вершине v_{n+1}, так как иначе M можно было бы расширить. Если v_n имеет бесконечную локальную степень, то можно всегда продолжить P, выбирая в качестве v_{n+1} вершину, отличную от предыдущих вершин v_i. Так как цепь P не может быть бесконечной, мы должны в конце концов прийти к вершине v_n конечной степени. После деформации M относительно P дефицитная вершина v_0 заменится на v_n. Повторяя этот процесс, мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 7.8.7. *В двудольном графе G с максимальным паросочетанием M пусть F и I — множества вершин соответственно конечной и бесконечной локальных степеней. Тогда M можно деформировать при помощи четных чередующихся цепей в другое максимальное паросочетание M_1, все дефицитные вершины которого принадлежат F.*

Предполагается, что каждая вершина с бесконечной локальной степенью соединена ребрами с бесконечным числом вершин. Следствием теоремы 7.8.7 является

Теорема 7.8.8. *Если G — двудольный граф без вершин конечной степени, то любое максимальное паросочетание оказывается совершенным.*

Задача

1. Доказать, что если G — локально конечный граф, то дефицитные множества N и N' для максимального паросочетания совпадают с минимальными критическими множествами N_0 и N_0' в (7.8.6).

7.9. Разделяющие множества. В двудольном графе G множество

$$S = T \cup T', \quad T \subset V, \quad T' \subset V', \qquad (7.9.1)$$

называется *разделяющим множеством*, если каждое ребро имеет хотя бы один конец в S. Любое разделяющее множество содержит минимальные разделяющие множества. Предположим, что в G имеется максимальное паросочетание M с сопоставленными множествами $A \cup A'$. Назовем *M-множеством* минимальное разделяющее множество для графа M, т. е. такое множество $U \cup U'$, что каждое M-ребро имеет в нем ровно одну вершину; таким образом, в приведенных выше обозначениях

$$A = U \cup \mu(U'), \quad A' = \mu(U) \cup U'.$$

Разделяющее множество (7.9.1) *согласовано с M*, если оно является M-множеством. Наконец, разделяющее множество *согласовано*, если оно согласовано со всеми максимальными паросочетаниями.

Теорема 7.9.1. *Любой граф с максимальными паросочетаниями имеет согласованные разделяющие множества.*

Доказательство. В обозначениях (7.8.4) множество

$$S = V'(N) \cup R \cup V(N')$$

является согласованным множеством. В самом деле, очевидно, что каждое ребро в G имеет конец в S, а в предыдущем пункте было установлено, что множества

$$T = R \cup V(N'), \quad T' = V'(N) \qquad (7.9.2)$$

определяют M-множество для каждого максимального паросочетания M.

В соответствии с (7.9.2) множества

$$T_1 = V(N'), \quad T_1' = R \cup V'(N)$$

также определяют согласованное множество. Такие множества обладают следующим минимальным свойством.

Теорема 7.9.2. *Пусть* (T, T') *определяет согласованное множество для* G. *Тогда любая пара множеств*

$$\left(T - F \cup F_1,\ T' - F' \cup F_1'\right), \qquad (7.9.3)$$
$$F \subset T, \quad F' \subset T',$$

может определять разделяющее множество, только если

$$F_1 \supset \mu(F'), \quad F_1' \supset \mu(F). \qquad (7.9.4)$$

Доказательство. Ребра из M, соединяющие F и $\mu(F)$, не могут иметь вершин в множествах (7.9.3), если не выполняется условие (7.9.4).

Теорема 7.9.3. *Если* G — *двудольный граф с максимальными паросочетаниями* M, *то все такие паросочетания имеют одно и то же кардинальное число* $\nu(M)$ *ребер, равное минимальному числу* $\nu(S)$ *вершин в разделяющем множестве.*

Доказательство. Согласно (7.9.4) сумма

$$S = \left(T - F \cup F_1'\right) \cup \left(T' - F' \cup F_1\right)$$

множеств из (7.9.3) должна иметь мощность не меньше чем

$$\nu(M) = \nu(T \cup T').$$

Частным случаем теоремы 7.9.3 является теорема Кёнига:

Теорема 7.9.4. *В двудольном графе* G *с конечным разделяющим множеством существуют максимальные паросочетания вершин* M, *и*

$$\nu(M) = \nu(S),$$

где S *есть разделяющее множество с минимальным числом вершин.*

Доказательство. Так как $\nu(M_1) \leqslant \nu(S)$ для любого частичного паросочетания M_1, граф G имеет максимальные паросочетания вершин; остальное следует из теоремы 7.9.3.

Для локально конечного графа можно сформулировать аналогичный результат. Согласно теореме 7.9.2 согласованное разделяющее множество обладает свойством быть *конечно минимальным*, т. е. после удаления двух конечных множеств F и F' из T и T' пара множеств (7.9.3) может определять разделяющее множество только при

$$\nu\left(F_1 \cup F_1'\right) \geqslant \nu\left(F \cup F'\right).$$

В этой терминологии можно доказать теорему:

Теорема 7.9.5. *Локально конечный граф имеет конечно минимальные разделяющие множества S, и любое такое множество согласовано для некоторого максимального паросочетания.*

Задачи

1. Дать доказательство теоремы 7.9.5.

2*. Попытаться охарактеризовать все согласованные разделяющие множества: (α) если G конечно; (β) если G является графом с максимальным паросочетанием.

7.10. Совместные паросочетания. Пусть G, как и выше, есть двудольный граф с множествами вершин V и V'; для простоты предположим, что V конечно и $n = \nu(V)$. Мы установили, что частичное паросочетание M множества из $n - \delta_0$ элементов V в V' существует тогда и только тогда, когда для каждого подмножества $A \subset V$

$$\delta(A) = \nu(A) - \nu(V'(A)) \leqslant \delta_0. \qquad (7.10.1)$$

Хиггинс рассмотрел более общую задачу о *совместных паросочетаниях.* Пусть дано множество m целых чисел

$$d_i, \quad 0 \leqslant d_i \leqslant n, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (7.10.2)$$

Ставится вопрос: в каких случаях можно определить m таких частичных паросочетаний M_i множества V в V', что в M_i сопоставлены все элементы V, кроме d_i элементов, и что концы в V' всех сопоставляющих ребер семейства $\{M_i\}$ различны?

Следующая формулировка равносильна указанной. Даны n множеств

$$B_j, \quad B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j.$$

В каких случаях существует m таких непересекающихся подмножеств

$$R_i, \quad \nu(R_i) = n_i = n - d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

множества B, что элементы в каждом R_i образуют частичную систему представителей для множеств B_j?

Если такие паросочетания существуют, то для каждого M_i число вершин в V', которые сопоставлены вершинам множества $A \subset V$ с $k = \nu(A)$ элементами, будет не меньше чем $k - \min(d_i, k)$. Поэтому множество $V'(A)$ должно содержать не менее чем

$$mk - \Delta(k, d), \ \Delta(k, d) = \sum_i \min(k, d_i), \quad (7.10.3)$$

вершин; следовательно,

$$\delta(A, d) = mk - \nu(V'(A)) - \Delta(k, d) \leqslant 0. \quad (7.10.4)$$

Назовем число $\delta(A, d)$ *d-дефицитом* множества A; можно положить $\delta(\varnothing, d) = 0$. Мы предоставляем читателю проверить, что условие

$$\delta(A \cup B, d) - \delta(A \cap B, d) \geqslant \delta(A, d) + \delta(B, d), \quad (7.10.5)$$

аналогичное (7.2.5), удовлетворяется также для этой функции. При $m = 1$, $d_1 = 0$ мы получаем обычный дефицит. Если условие (7.10.4) выполняется для каждого подмножества A, то будем говорить, что V *не имеет d-дефицита.*

Теорема 7.10.1. *Пусть $G(V, V')$ — двудольный граф с конечным множеством вершин V. Если V не имеет d-дефицита, то существует такое семейство m частичных паросочетаний $\{M_i\}$ множества V в V', имеющих непересекающиеся сопоставленные множества в V', что M_i сопоставляет все, за исключением d_i, вершины множества V.*

Будем доказывать теорему индукцией по $n = \nu(V)$; для $n = 1$ теорема тривиальна. Предположим сначала, что существует собственное подмножество A_0 множества V, для которого

$$\delta(A_0, d) = 0, \ \nu(A_0) = k_0. \quad (7.10.6)$$

Положим

$$d_i' = \min(k_0, d_i), \quad d_i'' = d_i - d_i'. \quad (7.10.7)$$

Тогда для любого множества $A \subset A_0$ условие (7.10.4) можно также записать в виде

$$\delta(A, d') \leqslant 0.$$

По индуктивному предположению граф

$$G_0 = G(A_0, V'(A_0))$$

имеет m таких частичных паросочетаний M'_i, что все вершины множества A_0, за исключением d'_i, сопоставлены.

Покажем теперь, что в графе

$$G_1 = G(V - A_0,\ V' - V'(A_0))$$

множество $V - A_0$ не имеет d''-дефицита. Пусть A_1 — подмножество множества $V - A_0$. Предоставляем читателю проверить формулу

$$\delta(A_0 \cup A_1,\ d) = \delta(A_0,\ d) + \delta(A_1,\ d'').$$

Из условий (7.10.4) и (7.10.6) теперь следует, что

$$\delta(A_1,\ d'') \leqslant 0,$$

а это и требовалось. Следовательно, в G_1 существует такое семейство паросочетаний $\{M''_i\}$, что при M''_i сопоставлены все, кроме d''_i, вершины из $V - A_0$. Полагая

$$M_i = M'_i \cup M''_i,$$

мы получаем требуемое паросочетание для G.

Остается случай, когда никакое собственное подмножество A_0 множества V не удовлетворяет равенствам (7.10.6). Заметим, что если $d_1 = 0$, то теорема справедлива. В самом деле, $V'(A)$ должно содержать по крайней мере k вершин; следовательно, по теореме 7.3.3 существует паросочетание M_1 всего множества V в V'. Удалим из G все концы ребер M_1, лежащие в V', и все ребра в этих вершинах. Очевидно, в остающемся графе условия (7.10.4) выполняются для чисел $d_2, \ldots, d_m$.

Поэтому мы можем для данного n применять индукцию по минимальному числу d_1 в (7.10.2). Заменим множество (7.10.2) на

$$d_1 - 1,\ d_2 + 1,\ d_3,\ \ldots,\ d_m. \qquad (7.10.8$$

В (7.10.4) это изменит только сумму $\Delta(k,\ d)$, и ее выражение в (7.10.3) показывает, что она может уменьшиться не более чем на единицу. В нашем случае в (7.10.4) выполняется неравенство для каждого собственного подмножества A множества V, так что (7.10.4) выполняется также для величин (7.10.8). При $A = V$ сумма

$$\Delta(n,\ d_i) = d_1 + \ldots + d_m$$

не изменяется. По индуктивному предположению заключаем, что G имеет m паросочетаний M_i', соответствующих (7.10.8). Так как M_1' сопоставляет больше вершин, чем M_2', должна быть по крайней мере одна вершина, в которой найдется ребро E_1 из M_1', не принадлежащее M_2'. Перенесем E_1 в M_2' и получим требуемое паросочетание

$$M_1' - E_1, \quad M_2' \cup E_1, \quad M_3', \ \ldots$$

для G.

Хиггинс сформулировал теорему 7.10.1 несколько иначе. Положим

$$r_i = n - d_i,$$

так что M_i сопоставляет r_i вершин V в V'. Обозначим также

$$N = \sum_{i=1}^{m} r_i, \qquad (7.10.9)$$

и пусть нумерация такова, что

$$r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_m.$$

Таким образом, число N имеет разбиение $\{r_i\}$. Как обычно, такое разбиение можно представить при помощи $(m \times n)$-матрицы M, элементами которой будут нули и единицы:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & \tilde{r}_1 & \tilde{r}_2 & \ldots & & & & & \\
\hline
r_1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
r_2 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & & & & &
\end{array}$$

В i-й строке первые r_i элементов равны 1, а остальные 0. Суммы по столбцам также образуют невозрастающую последовательность

$$\tilde{r}_1 \geqslant \tilde{r}_2 \geqslant \ldots,$$

которая определяет *двойственное разбиение*

$$N = \sum_{j=1}^{n} \tilde{r}_j. \qquad (7.10.10)$$

Обозначим через

$$\alpha_k = \sum_{j=n-k+1}^{n} \tilde{r}_j \tag{7.10.11}$$

сумму всех элементов в последних k столбцах матрицы M. Диаграмма показывает, что эту сумму можно представить в виде

$$\alpha_k = \sum_i (k - \min(k, d_i)) = mk - \Delta(k, d).$$

Поэтому условие (7.10.4) равносильно неравенству

$$\nu(V'(A)) \geqslant \alpha_k. \tag{7.10.12}$$

Заметим, что для фиксированного k только левая часть в (7.10.12) зависит от A, так что достаточно проверять выполнение (7.10.4) или (7.10.12) для множеств A с наименьшим значением $\nu(V'(A))$.

Применим предыдущий результат к тому простому случаю, когда все вершины из V соединены с различными вершинами из V'. Этот случай может встретиться, например, если выбирать системы представителей R_i для семейства $\{B_j\}$ непересекающихся множеств. Если локальные степени в V обозначить через

$$\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n, \tag{7.10.13}$$

то условие (7.10.12) примет вид

$$\sum_{j=n-k+1}^{n} \rho_j \geqslant \alpha_k.$$

Из (7.10.11) мы получаем теорему.

Теорема 7.10.2. *Пусть*

$$\{B_i\}, \quad \nu(B_i) = \rho_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

есть семейство непересекающихся множеств, причем ρ_i *расположены в порядке* (7.10.13). *Для того чтобы можно было найти семейство из* m *непересекающихся систем представителей*

$$\{R_j\}, \quad \nu(R_j) = r_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=k}^{n} \rho_i \geqslant \sum_{i=k}^{n} \tilde{r}_i, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.10.14}$$

где невозрастающая последовательность $\{\tilde{r}_i\}$ *является двойственным разбиением* (7.10.10) *для разбиения* $\{r_i\}$ *в* (7.10.9).

Этой задаче можно давать различные занимательные интерпретации. Например, n семей из ρ_i членов отправляются на пикник в m автобусах с r_j местами. В каких случаях можно найти такое размещение пассажиров, чтобы никакие два члена одной семьи не попали в один автобус? Если число мест в автобусах равно числу пассажиров, то кроме условий (7.10.14) мы имеем также

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i = \sum_{j=1}^{m} r_j. \tag{7.10.15}$$

Теорема 7.10.2 равносильна теореме Гейла и Райзера о матрицах:

Теорема 7.10.3. *Для того чтобы можно было построить матрицу из единиц и нулей так, чтобы i-я строка содержала $\rho(i)$ единиц, а j-й столбец содержал $r(j)$ единиц, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (7.10.14) *и* (7.10.15), *где числа* $\rho(i)$ *и* $r(j)$ *расположены в убывающем порядке.*

Построенную таким образом матрицу можно рассматривать как матрицу смежности для ориентированного графа с однократными ребрами. Отсюда следует

Теорема 7.10.4. *Для того чтобы существовал ориентированный граф с заданными локальными степенями* $\rho(i)$ *и* $\rho^*(j) = r(j)$, *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия* (7.10.14) *и* (7.10.15).

Теорему 7.10.1 можно распространить на случай локально конечного графа G.

Глава 8

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

8.1. Отношение включения и достижимые множества. Исследуем теперь некоторые основные свойства *ориентированных графов*. Пусть G — такой граф с множеством вершин V. Если a и b — некоторые вершины, для которых существует ориентированная цепь $P(a, b)$ от a к b, то будем говорить, что вершина b *достижима* из a, и писать $a > b$. Как и для неориентированных графов, очевидно, что ориентированную цепь $P(a, b)$ можно свести к ориентированной простой цепи $P_1(a, b)$, в которой каждая вершина встречается лишь один раз.

Теорема 8.1.1. *Если b достижима из a и c достижима из b, то c достижима из a.*

Доказательство. Пусть $P(a, b)$ и $Q(b, c)$ — ориентированные простые цепи и d — первая вершина в P, принадлежащая также Q. Тогда

$$P(a, d) \cup Q(d, c)$$

является ориентированной простой цепью из a к c.

Бинарное отношение $a > b$, которое таким образом определяется, будем называть *отношением включения*, соответствующим графу G. Теорема 8.1.1 показывает, что это отношение транзитивно. Обратное отношение обозначается через $b < a$.

Обозначим соответственно через

$$D(a), \quad D^*(a)$$

множества всех достижимых и обратно достижимых вершин из вершины a. Очевидно, $a > b$ тогда и только тогда, когда

$$D(a) \supseteq D(b).$$

Две вершины a и b называем *эквивалентными по достижимости*, если

$$D(a) = D(b), \tag{8.1.1}$$

т. е. если

$$a > b, \quad b > a \text{ или просто } a \sim b.$$

Очевидно, для выполнения (8.1.1) необходимо и достаточно, чтобы вершины a и b были в G *взаимно связаны* (*сильно связаны, бисвязаны*), т. е. чтобы в G существовали цепи $P(a, b)$ и $Q(b, a)$.

Теорема 8.1.2. *Две вершины эквивалентны по достижимости тогда и только тогда, когда они взаимно связаны.*

Вообще, для любого множества A можно определить достижимое множество

$$D(A) = \bigcup_{a \in A} D(a)$$

как множество всех вершин, достижимых из тех или иных $a \in A$. Два множества A и B эквивалентны по достижимости, если

$$D(A) = D(B).$$

Это может случиться только тогда, когда каждое $b \in B$ достижимо из некоторого $a \in A$, и наоборот.

Множество A, из которого достижима каждая вершина, т. е.

$$D(A) = V, \tag{8.1.2}$$

можно назвать *порождающим множеством. Минимальное порождающее множество* есть минимальное среди множеств A, обладающих свойством (8.1.2); такие минимальные множества могут как существовать, так и не существовать.

Мы будем рассматривать некоторые вопросы, аналогичные изученным в главе 5 для неориентированных графов и связанные с листами и блоками. Ребро в G называем *ориентированно-циклическим ребром*, если оно принадлежит некоторому ориентированному циклу, и *ациклическим* в противном случае. Две вершины a_0 и b_0 *ориентированно-циклически-реберно связаны*, если существует такая последовательность ориентированных простых циклов

$$C_1, C_2, \ldots, C_k, \tag{8.1.3}$$

что a_0 принадлежит C_1, b_0 принадлежит C_k и любая пара соседних циклов C_i и C_{i+1} имеет хотя бы одну общую вершину.

Теорема 8.1.3. *Две вершины ориентированно-циклически-реберно связаны тогда и только тогда, когда они взаимно связаны.*

Доказательство. Предположим сначала, что a_0 и b_0 ориентированно-циклически-реберно связаны. Если в (8.1.3) $k=1$, то утверждение очевидно. Поэтому можно провести доказательство индукцией по числу k ориентированных простых циклов. Пусть c — такая ближайшая к b_0 вершина на C_k, что c принадлежит одному из предыдущих простых циклов, и существует ориентированный участок $C_k(c, b_0)$ от c до b_0. По индуктивному предположению существует ориентированная цепь из a_0 к c, и она может быть продолжена до b_0. Аналогично находим ориентированную цепь от b_0 к a_0.

Пусть теперь a_0 и b_0 взаимно связаны ориентированными простыми цепями $P(a_0, b_0)$ и $Q(b_0, a_0)$. Если $a_1 \neq a_0$ есть первая вершина на P, принадлежащая Q, то существует ориентированный простой цикл

$$C_1 = P(a_0, a_1) \cup Q(a_1, a_0),$$

и вершины a_1 и b_0 взаимно связаны простыми цепями

$$P(a_1, b_0), \quad Q(b_0, a_1).$$

Повторяя такую операцию, мы получим последовательность (8.1.3) ориентированных простых циклов, связывающую a_0 и b_0.

Из этих рассуждений вытекает также следующее.

Теорема 8.1.4. *Две вершины a_0 и b_0 в ориентированном графе G взаимно связаны тогда и только тогда, когда они связаны маршрутом из ориентированно-циклических ребер.*

Ориентированный граф *бисвязен* (*взаимно связен, сильно связен*), если все его вершины взаимно связаны. Такой граф характеризуется также тем свойством, что каждая его вершина является порождающим множеством.

Теорема 8.1.5. *Ориентированный граф бисвязен тогда и только тогда, когда он связен и не имеет ациклических ребер.*

Доказательство. Бисвязный граф G, очевидно, имеет связный соотнесенный неориентированный граф

G_u. Никакое ребро $E_0 = (a_0, b_0)$ в G не может быть ациклическим, так как существует ориентированная простая цепь $Q(b_0, a_0)$, которая вместе с E_0 дает ориентированный простой цикл, содержащий E_0. С другой стороны, если граф G_u связен и все ребра в G ориентированно-циклические, то из теоремы 8.1.4 следует, что граф G бисвязен.

Можно поставить вопрос: при каких условиях данный неориентированный граф G_0 можно рассматривать как соотнесенный неориентированный граф G_u для бисвязного графа G? Этот вопрос можно сформулировать как *задачу о движении транспорта.* Граф G_0 рассматривается как план города или местности, а его ребра — как улицы или дороги. В каких случаях можно ввести направления движения на всех улицах так, чтобы любые два пункта были соединены в обоих направлениях дорогами с односторонним движением? Эту задачу решил Роббинс для конечных графов, а затем Эджид для произвольных графов. Результат состоит в следующем.

Теорема 8.1.6. *Неориентированный граф G_0 является графом G_u бисвязного ориентированного графа G тогда и только тогда, когда граф G_0 связен и не имеет разделяющих ребер.*

Доказательство. Разделяющие ребра соответствуют в нашей интерпретации единственным мостам через реку или тупикам. Поэтому предположим, что в связном графе G_0 нет разделяющих ребер. Можно построить бисвязные ориентированные части графа, вводя подходящие направления; например, из простого цикла возникают два таких графа. Эти ориентированные части графа образуют частично упорядоченное множество, если считать $H_1 \supset H_2$, когда ребра H_2 принадлежат H_1 и имеют те же направления. Рассмотрим упорядоченное по включению семейство $\{H_i\}$ бисвязных частей. Их сумма

$$H = \bigcup H_i,$$

очевидно, также бисвязна; следовательно, по принципу суммы цепи существуют максимальные бисвязные части H.

Покажем теперь, что такая максимальная часть H содержит все вершины G_0. Если бы это было не так, то нашлось бы некоторое неориентированное ребро $E = (b, c)$, где b принадлежит H, а c не принадлежит H. В G_0 существует простой цикл C, содержащий E. Обозначим через $C(b, c, d)$ участок C от b через E до следующей вершины d из H. В H существуют ориентированные цепи $P(c, d)$ и $Q(d, c)$, и, выбирая любое из двух возможных направлений на $C(b, c, d)$, мы получим бо́льший бисвязный граф H', что противоречит максимальности H. Наконец, проверяем, что в максимальном H содержатся все ребра G_0.

В связи с задачей о движении транспорта упомянем более трудный вопрос: в каких случаях можно так ввести направления на некоторых или на всех улицах города, чтобы любые два перекрестка были взаимно связаны ориентированными дорогами, не имеющими пересечений? Другими словами, когда можно ввести направления на ребрах неориентированного графа G_0 так, чтобы каждая пара вершин принадлежала ориентированному простому циклу? Очевидно, это возможно, если G_0 имеет гамильтонов цикл.

Еще более ограничительным является условие, чтобы любые два дома в городе соединялись непересекающимися ориентированными дорогами. Тогда граф должен быть ориентирован так, чтобы любые два ребра принадлежали ориентированному простому циклу.

В связи с ориентированными цепями приведем следующий результат, который получил Реден при изучении квадратичных полей.

Теорема 8.1.7. *Пусть G — конечный ориентированный граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром. Тогда существует ориентированная простая цепь, проходящая через все вершины графа.*

Доказательство. Теорема справедлива для случая, когда число вершин $n=2$. Пусть G_n есть граф с n вершинами, для которого теорема верна; построим граф G_{n+1}, добавив некоторую вершину v_{n+1}, в которой имеются ребра ко всем вершинам v_i из G_n. По предположенному в G_n существует ориентированная простая цепь

$$P_n = (v_1, v_2) \ldots (v_{n-1}, v_n).$$

Если есть ребро $E = (v_n, v_{n+1})$ или (v_{n+1}, v_1), то эта простая цепь может быть продолжена через v_{n+1}. Поэтому можно считать, что в v_{n+1} есть и входящие, и выходящие ребра. Допустим, что все ребра $E_1, \ldots, E_k$ входящие, а ребро E_{k+1} выходящее. Тогда

$$P_{n+1} =$$

$$= (v_1, v_2) \ldots (v_{k-1}, v_k)(v_k, v_{n+1})(v_{n+1}, v_{k+1}) \ldots (v_{n-1}, v_n)$$

является искомой простой цепью.

Задачи

1. Применяя указанный выше метод, ввести направления для некоторой простой схемы дорог.

2*. (Проблема Бряттона) Для бисвязных графов с n вершинами и m ребрами найти минимум длин ориентированных диаметров.

3*. В теореме Редеи исследовать условия того, чтобы простая цепь имела произвольные концы.

8.2. Теорема о гомоморфизме. В ориентированном графе G обозначим через $L(a_0)$ множество всех вершин, которые взаимно связаны с данной вершиной a_0. Назовем $L(a_0)$ *(ориентированным) листовым множеством*, которому принадлежит a_0. Оно состоит более чем из одной вершины, если a_0 лежит на ориентированном простом цикле, не являющемся петлей. Подграф $G(L)$ назовем *(ориентированным) листом*, определяемым листовым множеством L[1]). Из предыдущих рассуждений следует, что все ребра в $G(L)$ ориентированно-циклические и что листы являются максимальными бисвязными частями графа G. Граф $G(L)$ *ориентированно-циклически замкнут* в том смысле, что если C — любой ориентированный простой цикл, имеющий общую с L вершину, то весь цикл C содержится в $G(L)$. Отсюда получаем теорему:

Теорема 8.2.1. *Все ребра, касающиеся листа $G(L)$, ациклические.*

Назовем ориентированный граф *ациклическим*, если все его ребра ациклические, т. е. если G не имеет ориентированных циклов. Для ориентированных графов ациклические графы играют роль, подобную роли деревьев для неориентированных графов. Например, аналогично теореме 6.5.1 справедлива

Теорема 8.2.2. *Любой ориентированный граф G имеет максимальные ациклические части H, обладающие хо-*

---

[1]) См. примечание [2]) на стр. 106. (*Прим. перев.*)

тя бы одним входящим или выходящим ребром в каждой неизолированной вершине G. Если граф G связен, то граф H также связен.

Для ориентированного графа G можно построить ориентированный граф G', вершинами которого являются листовые множества G. Два листовых множества L_1 и L_2 соединяются ориентированным ребром (L_1, L_2) в G' если имеются ориентированные ребра от L_1 к L_2 в G. Этот граф называется *листовой композицией* графа G. G' является ациклическим графом, так как любой ориентированный цикл в нем дал бы ориентированный цикл в G, проходящий через несколько листов. Таким образом, мы можем установить *теорему о гомоморфизме* для ориентированных графов, аналогичную теореме 5.3.1 для неориентированных графов:

Теорема 8.2.3. *Ориентированный граф G имеет ациклический граф листовой композиции G', и G гомоморфен G' при отображении τ, для которого множества прообразов элементов*

$$\tau^{-1}(a_0') = L(a_0)$$

являются ориентированными листовыми множествами графа G.

В ориентированном графе можно также искать аналог блокам, введенным для неориентированных графов в п. 5.4. Там они были получены при помощи отношения эквивалентности для ребер графа, которое основывалось на понятии сильной циклической связности. Для ориентированного графа будем говорить, что два ребра E_1 и E_2 в G *сильно ориентированно-циклически-реберно связаны*, если существует такая последовательность ориентированных простых циклов (8.1.3), что E_1 лежит на C_1, E_2 лежит на C_k и любая пара соседних циклов C_i, C_{i+1} имеет по крайней мере одно общее ребро. Соответственно назовем ориентированный граф G *сильно ориентированно-циклически-реберно связным*, если все ребра сильно ориентированно-циклически-реберно связаны. Тогда справедлив следующий аналог теоремы 8.1.6.

Теорема 8.2.4. *Неориентированный граф G_0 является графом G_u для сильно ориентированно-циклически-реберно связного ориентированного графа G тогда и только тогда, когда G_0 не имеет разделяющих вершин.*

Доказательство подобно доказательству теоремы 8.1.6 и предоставляется читателю.

Далее, пусть E_0 — некоторое ребро в ориентированном графе G. Часть графа, состоящая из всех ребер, сильно ориентированно-циклически-реберно связанных с E_0, назовем (*ориентированным*) *блоком*, которому принадлежит E_0. Его множество вершин $M(E_0)$ есть *блоковое множество*, определенное ребром E_0 [1]), и блок является, очевидно, подграфом $G(M)$. Можно проверить, что его соотнесенный неориентированный граф $G_u(M)$ не имеет разделяющихся вершин. Блок *сильно ориентированно-циклически замкнут*, т. е. любой ориентированный простой цикл C, имеющий хотя бы две общие с $M(E_0)$ вершины, содержится целиком в $G(M)$.

Задачи

1. Имеют ли все максимальные ациклические части конечного ориентированного графа G одно и то же число ребер?
2. Существует ли аналог теоремы 6.6.4 о соотношениях между такими максимальными ациклическими частями?
3. Доказать, что в неориентированном графе G можно ввести ориентации ребер так, что он станет ациклическим графом.

8.3. Транзитивные графы и погружения в отношения упорядочения. Ориентированный граф G называется *транзитивным*, если для любых двух его ребер

$$E_0 = (a_0, a_1), \quad E_1 = (a_1, a_2)$$

существует замыкающее ребро $E_2 = (a_0, a_2)$ (и вообще, если $a > b$, то существует ребро $E = (a, b)$). Каждый ориентированный граф G имеет транзитивное замыкание, т. е. наименьший содержащий его транзитивный граф G_t. Граф G_t получается из ориентированных цепей $P(a, b)$ в G добавлением ребра $E = (a, b)$, когда $a > b$ и такого ребра нет в G.

Если G — бисвязный граф, то $a > b$ и $b > a$ для любой пары вершин, и, следовательно, в G_t будут все ребра (a, b) и (b, a). Поэтому если G имеет однократные ребра (и петли), то его транзитивное замыкание будет ориентированным полным графом $U^{(d)}$.

---

[1]) См. примечание [2]) на стр. 111. (*Прим. перев.*)

Если граф G ациклический, то добавление ребер $E = (a, b)$, $a > b$, не может дать ориентированного цикла в G_t, так как он соответствовал бы некоторому циклическому ориентированному маршруту в G. Согласно определению частичного упорядочения (см. п. 1.4) мы видим, что G_t является графом частичного упорядочения, при условии, что он не имеет кратных ребер.

Из п. 8.2 получаем следующие общие утверждения.

Теорема 8.3.1. *Пусть G — ориентированный граф с однократными ребрами. Транзитивное замыкание G_t графа G является графом, у которого листы суть ориентированные полные графы $U^{(d)}(L)$, определенные на листовых множествах L графа G, а листовая композиция G_t' для G_t является графом частичного упорядочения, изоморфным транзитивному замыканию листовой композиции G' для G.*

Ориентированный граф будет называться *квазиупорядочением*, если его транзитивное замыкание является упорядоченным графом (т. е. графом упорядочения) [1]. Из определения упорядоченного множества видно, что квазиупорядочение характеризуется двумя свойствами:

1. Граф G ациклический: из $a > b$, $b > a$ следует $a = b$.

2. Одно из соотношений $a > b$ или $b > a$ всегда выполняется для любой пары вершин.

Представляет интерес также несколько менее ограничительное понятие упорядоченности. Ориентированный граф O назовем *слабым упорядочением*, если он удовлетворяет условию: для любой пары вершин выполняется хотя бы одно из соотношений $a > b$, $b > a$. Листовая композиция для слабо упорядоченного множества будет квазиупорядочением.

Теорема 8.3.2. *Любой ориентированный граф G является частью некоторого слабого упорядочения O с теми же листами, что и G.*

Будем говорить, что две вершины в G *сравнимы*, если выполняется хотя бы одно из соотношений $a > b$, $b > a$;

[1] Следует иметь в виду, что в дальнейшем в оригинале, как правило, не делается строгих различий между сходными понятиями упорядочений (различного типа), соответствующих им графов и соответствующих упорядоченных множеств. Это же сохраняется и в переводе. (*Прим. перев.*)

если ни одно из них не выполнено, то вершины a и b называются *несравнимыми*. Таким образом, граф является слабым упорядочением тогда и только тогда, когда все его вершины сравнимы.

Чтобы доказать теорему 8.3.2, докажем сначала вспомогательное утверждение:

Теорема 8.3.3. *Если a и b — несравнимые вершины в графе G и если присоединить к G ребро $E = (a, b)$, то G и $G \cup E$ будут иметь одни и те же ориентированно-циклические ребра.*

Доказательство. Во-первых, новое ребро E не может быть ориентированно-циклическим в $G \cup E$, так как иначе существовала бы ориентированная цепь $P(b, a)$ в G. Во-вторых, если $F = (c, d)$ есть ациклическое ребро в G, то оно не может стать ориентированно-циклическим в $G \cup E$, так как иначе ориентированной цепи

$$Q(d, a) \cup E \cup Q_1(b, c)$$

отвечала бы ориентированная цепь

$$Q_1(b, c) \cup E \cup Q(d, a)$$

связывающая b с a.

Чтобы теперь получить теорему 8.3.2, рассмотрим семейство всех графов $H \supset G$, которые имеют те же ориентированно-циклические ребра, что и граф G. Пусть $\{H_i\}$ — упорядоченное по включению семейство таких графов и

$$H_0 = \cup H_i$$

— их сумма. Тогда H_0 есть граф того же типа, так как если бы H_0 содержал ориентированный цикл C, не содержащийся в G, то ребра из C должны были бы принадлежать одному из графов H_i. Из принципа максимальности заключаем, что должны существовать максимальные графы $H_0 \supset G$ с теми же ориентированно-циклическими ребрами. Из теоремы 8.3.3 следует, что в H_0 все вершины должны быть сравнимы; следовательно, H_0 является слабым упорядочением.

Вместо присоединения к графу G ребра $E = (a, b)$ в теореме 8.3.3, можно использовать и обратное ребро $E' = (b, a)$. Тогда мы получаем, что для любого ребра E между несравнимыми вершинами a и b существует слабо упорядоченный граф $O \supset G$, удовлетворяющий условиям теоремы 8.3.3 и не содержащий E. Это рассуждение дает следующее представление для ориентированных графов:

Теорема 8.3.4. *Любой ориентированный граф G может быть представлен как пересечение*

$$G = \bigcap O_i$$

слабых упорядочений $O_i \supset G$, имеющих те же ориентированно-циклические ребра, что и G.

В случае ациклического графа получается

Теорема 8.3.5. *Каждый ациклический граф есть пересечение квазиупорядочений, в которых он содержится.*

8.4. Базисные графы. Мы будем изучать достижимость вершин ориентированными цепями. Можно предполагать, что все ребра в графе однократные и петель нет. В п. 8.3 мы строили транзитивное замыкание ориентированного графа G, добавляя ребро $E = (a_0, a_n)$, если существовала ориентированная цепь $P(a_0, a_n)$. Теперь рассмотрим противоположную операцию, состоящую в удалении *излишних* ребер $E = (a_0, a_n)$, т. е. таких ребер E, для которых существует не содержащая E ориентированная цепь $P(a_0, a_n)$. Такая операция не может изменить достижимые множества ни для какой вершины.

Часть H графа G называется *порождающей частью*, если достижимые множества для всех вершин одни и те же для H и для G:

$$D_G(a) = D_H(a), \quad a \in V. \tag{8.4.1}$$

Для того чтобы граф H обладал этим свойством, необходимо и достаточно, чтобы для каждого ребра $E = (a, b)$ в G существовала ориентированная цепь $P_H(a, b)$ в H. Условие (8.4.1) приводит нас к следующему утверждению:

Теорема 8.4.1. *Любая порождающая часть H графа G имеет те же листовые множества, что и G, и листовая композиция H' для H является порождающей частью для G'.*

Минимальный порождающий граф для G назовем *базисным графом*. Таким образом, порождающий граф H будет базисным графом тогда и только тогда, когда удаление любого ребра из H изменяет достижимость в H, т. е. если $E = (a, b)$ — произвольное ребро в H, то оно не может быть излишним в том смысле, что существует некоторая ориентированная цепь $P_H(a, b)$ в H, не содержащая E.

Если G — конечный граф, то существуют базисные графы, и они могут быть получены при последовательном удалении ребер, как это указано выше. Если G имеет ориентированный гамильтонов цикл, то он может быть взят в качестве базисного графа. Если существует базисный граф, он не обязательно единственный. На рис. 8.4.1 любое радиальное ребро и ориентированный многоугольный цикл определяют базисный граф.

На рис. 8.4.2 пять ребер (1, 0), (3, 0), (5, 0), (0, 2), (0, 4) составляют единственный базисный граф. Заметим, что граф, полученный после удаления ребер (0,2) и (0, 4), имеет единственный базис, состоящий из семи ребер.

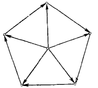


Рис. 8.4.1.

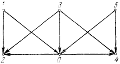


Рис. 8.4.2.

В качестве примера можно также взять ориентированный полный граф $U_0^{(d)}$, определенный на множестве вершин из n элементов. Ориентированные гамильтоновы циклы дают один тип базисных графов; каждый имеет n ребер. Другой тип дают звездные графы $S(a_0)$, состоящие из всех выходящих из a_0 и входящих в вершину a_0 ребер; эти графы имеют $2(n-1)$ ребер.

Эта конструкция является частным случаем следующего результата.

Теорема 8.4.2. *Пусть G_d — ориентированный граф, полученный удвоением связного неориентированного графа G. Тогда удвоением любого максимального дерева в G можно получить базисный граф для G_d.*

Доказательство предоставляется читателю.

В конечном упорядоченном множестве

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_n$$

базисный граф единственный и состоит из всех ребер $E_i = (a_i, a_{i+1})$. Если бесконечное упорядоченное множество будет иметь базисный граф B, то, очевидно, для любого ребра $E = (a, b)$ в B вершины a и b должны быть непосредственно следующими друг за другом в смысле этого упорядочения. Кроме того, никакие две вершины не могут иметь бесконечного числа лежащих между ними вершин. Отсюда мы получаем следующую теорему.

Теорема 8.4.3. *Упорядоченное множество может иметь базисный граф только тогда, когда оно изоморфно естественно упорядоченному множеству целых чисел.*

Сформулируем некоторые общие условия, при которых существуют базисные графы. Будем говорить, что ориентированный граф G имеет *компактное реберное разделение*, если он удовлетворяет следующему условию: для любого ребра $E = (a_0, b_0)$ пусть H есть такая часть (содержащая E), что после удаления ребер из H вершина b_0 перестает быть достижимой из a_0; тогда существует конечная часть H_0 графа H с тем же свойством.

Теорема 8.4.4. *Ориентированный граф с компактным реберным разделением имеет базисный граф.*

Доказательство. Чтобы показать, что существуют минимальные порождающие графы, рассмотрим упорядоченное семейство $\{K^{(i)}\}$ таких графов и установим, что их пересечение

$$K_0 = \bigcap_i K^{(i)} \tag{8.4.2}$$

также является порождающим графом. Это имеет место тогда и только тогда, когда для каждого ребра $E = (a_0, b_0)$ в G вершина b_0 достижима из a_0 в K_0. Так как G имеет компактное реберное разделение, для каждого E существует такое семейство конечных частей $\{H_0^{(j)}(E)\}$, что b_0 достижима из a_0 в части K, только если дополнение $\overline{K}$ не содержит никакого из этих графов $H_0^{(j)}$. Если бы часть K_0 не содержала никаких ребер некоторого H_0^j, то в (8.4.2) был бы граф $K^{(i)}$ с тем же свойством, в противоречии с предположением, что все $K^{(i)}$ являются порождающими графами.

Как частный случай теоремы 8.4.4 получается

Теорема 8.4.5. *Если в G любые два конца a_0 и b_0 ребра связаны конечным числом ориентированных цепей, то G имеет базисный граф.*

Эти условия выполняются, если граф G локально конечен и цепи от a_0 к b_0 имеют ограниченные длины.

Установим также другой результат:

Теорема 8.4.6. *Ориентированный граф G имеет базисный граф тогда и только тогда, когда каждый его лист $G(L)$ и его листовая композиция G' имеют базисные графы.*

Доказательство. Предположим сначала, что G имеет базисный граф B. Для любой вершины a_0 в листовом множестве L каждая другая вершина $b_0 \in L$ достижима из a_0 только цепями, лежащими целиком в $G(L)$. Следовательно, в B вершина b_0 достижима из a_0 в подграфе $B(L)$. Никакое ребро в $B(L)$ не может быть излишним, так как иначе оно приводило бы к уменьшению B. В B существует только одно ребро, соединяющее пару листовых множеств L_1 и L_2 в G (и в B), так как если одно такое ребро содержится в B, то другие, очевидно, являются излишними. Ребра из B' образуют порождающий граф для G', и никакие ребра из B' не могут быть излишними, так как это снова приводило бы к уменьшению B.

Обратно, предположим, что существует базисный граф $B(L)$ для каждого листового множества L в G, а также базисный граф для листовой композиции G'. Каждое ребро в G' является образом всех ребер из G, связывающих пару листовых множеств. Каждому ребру в G' поставим в соответствие одно такое ребро из G. Тогда легко видеть, что такие ребра, отвечающие ребрам из B', вместе со всеми ребрами базисных графов $B(L)$ образуют порождающий граф для G, и он действительно является базисным.

Теорема 8.4.6 сводит проблему существования базисного графа к случаю ациклических графов и бисвязных графов.

В заключение сделаем несколько замечаний о том случае, когда базисный граф единственный. Ребро E

графа G назовем *существенным*, если оно принадлежит каждому порождающему графу для G. Очевидно, это равносильно тому, что E не является излишним в G. Таким образом, существенные ребра принадлежат каждому базисному графу, если таковые существуют.

Теорема 8.4.7. *Пусть G — такой граф, что каждый его порождающий граф содержит базисный граф для G. Для того чтобы G имел единственный базисный граф, необходимо и достаточно, чтобы для каждого ребра $E=(a, b)$ существовала цепь $P(a, b)$, состоящая из существенных ребер.*

Доказательство. Согласно предыдущему единственный базисный граф существует тогда и только тогда, когда существенные ребра образуют базисный граф, а это имеет место, только если выполняется условие теоремы. Теорема 8.4.6 применима, в частности, к конечным графам.

Задачи

1*. Когда можно выбрать ориентации ребер неориентированного графа G так, чтобы он стал базисным графом ориентированного графа?

2*. Найти наибольшее число ребер в базисном графе, определенном на множестве вершин из n элементов.

8.5. Чередующиеся цепи. Цепь

$$P=(a_0, a_1)(a_1, a_2)\dots(a_{n-1}, a_n) \tag{8.5.1}$$

в ориентированном графе G называется *чередующейся*, если ребра $E_i=(a_i, a_{i+1})$ поочередно принадлежат G и его обратному графу G^*. Такие цепи можно классифицировать в соответствии с характером начального ребра E_0: она будет *α-цепью, если E_0 есть α-ребро*, т. е. принадлежит G, и *α^*-цепью*, если E_0 есть *α^*-ребро*, т. е. принадлежит G^*. Часто бывает желательно принимать во внимание также характер $\beta=\alpha$ или $\beta=\alpha^*$ последнего ребра E_{n-1}. Например, P есть *(α, α^*)-цепь*, если E_0 принадлежит G и E_{n-1} принадлежит G^*. Мы получаем четыре типа цепей, характеризуемых символами

$$(\beta, \gamma)=(\alpha, \alpha^*);\quad (\alpha^*, \alpha);\quad (\alpha, \alpha);\ (\alpha^*, \alpha^*).$$

Цепи двух первых типов имеют четную длину, двух других — нечетную. Чередующаяся цепь будет циклом, если

$a_0 = a_n$. Понятие чередующихся цепей можно распространить также на односторонне- и двусторонне-бесконечные цепи. Если P в (8.5.1) есть (β, γ)-цепь, то будем говорить, что a_n (β, γ)*-достижима из* a_0.

Теорема 8.5.1. *Если вершина b (β, γ)-достижима из a и вершина c (γ^*, δ)-достижима из b, то c (β, δ)-достижима из a.*

Доказательство. Если две связывающие цепи $P(a, b)$ и $Q(b, c)$ не имеют общих ребер, то они могут быть объединены в одну (β, δ)-цепь

$$P(a, b) \cup Q(b, c).$$

Если они имеют общие ребра, то пусть $E = (e, f)$ — первое такое ребро в P. Тогда (β, δ)-цепью будет одна из цепей

$$P(a, e, f) \cup Q(f, c), \quad P(a, e) \cup Q(e, c),$$

в зависимости от того, в одном или в противоположных направлениях входит E в P и в Q.

Множество всех вершин, (β, γ)-достижимых из вершины a, обозначим через

$$V(a, \beta, \gamma). \tag{8.5.2}$$

Будем включать a в это множество при $\beta = \gamma$; в *вырожденном случае*, когда $\rho(a) = 0$, мы имеем

$$V(a, \alpha, \alpha^*) = a.$$

Это определение достижимых множеств можно распространить на произвольные множества A, полагая

$$V = (A, \beta, \gamma,) = \bigcup_{a \in A} V(a, \beta, \gamma). \tag{8.5.3}$$

Как и выше (см. п. 1.2), обозначим через $G[A]$ множество конечных вершин тех ребер, которые имеют начальную вершину в A.

Теорема 8.5.2. *Множество A является (α, α^*)-достижимым множеством тогда и только тогда, когда все входящие в $G[A]$ ребра имеют свою начальную вершину в A, т. е.*

$$G^*[G[A]] \subseteq A. \tag{8.5.4}$$

Доказательство. Очевидно, что из этого свойства следует

$$A = V(A,\ \alpha,\ \alpha^*). \tag{8.5.5}$$

С другой стороны, если бы имелось некоторое ребро

$$F = (c,\ b), \quad b \in G[A], \quad c \notin A,$$

то можно было бы построить (α, α^*)-цепь $E \cup F^*$ от A к c; следовательно, (8.5.5) не удовлетворялось бы.

Из теоремы 8.5.2, как частный случай, получается

Теорема 8.5.3. *Конечное множество A с конечными локальными степенями $\rho(a)$ является (α, α^*)-достижимым множеством тогда и только тогда, когда*

$$\rho(A) = \rho^*(G[A]).$$

Далее может быть доказана

Теорема 8.5.4. *Достижимые множества* (8.5.5) *образуют два полных поля множеств.*

Доказательство. Определение (8.5.3) показывает, что любая сумма множеств $V(A)$ будет множеством того же типа. Если

$$d \in D = \bigcap V_i$$

есть вершина, принадлежащая пересечению достижимых множеств, то $V(d)$ также должно содержаться в D. Наконец, нужно показать, что разность

$$V_1 = V(A) - V(B), \quad V(A) \supset V(B),$$

является достижимым множеством. Для любого ребра

$$E = (a,\ a'), \quad a \in V_1,$$

должно быть

$$a' \in G[V(A)],$$

так что для любого другого ребра $F = (a'', a')$, входящего в a, будет также $a'' \in V(a)$. Но $a'' \in V(B)$ не может быть, так как цепь $F \cup E$ приводила бы от a'' к вершине a, не принадлежащей $V(B)$.

Две вершины a и b называются *эквивалентными по α-достижимости,* если любая вершина v, (α, β)-достижимая из a ($\beta = \alpha$ или $\beta = \alpha^*$), будет также (α, β)-достижимой из b, и наоборот. Будем считать, что a эквивалентна по α-достижимости сама себе.

Теорема 8.5.5. *Достижимое множество $V(a)$ состоит из всех вершин, эквивалентных a по α-достижимости.*

Доказательство. Заметим сначала, что если $b \in V(a)$, то существует (α, α^*)-цепь $P(a, b)$ и обратная (α, α^*)-цепь $P(b, a)$; следовательно, a и b должны быть эквивалентны по α-достижимости согласно теореме 8.5.1. Предположим теперь, что a и b эквивалентны по α-достижимости. Так как a должна быть α-достижима из b, существует α-цепь $P(b, a)$. Если P есть (α, α^*)-цепь, то все доказано. Предположим поэтому, что P есть (α, α)-цепь. Пусть c — последняя перед a вершина в $P(b, a)$, для которой c (α, α^*)-достижима из b (может быть и $c = b$). Тогда вершина c должна быть (α, α^*)-достижимой из a цепью $Q(a, c)$, и

$$Q(a, c) \cup P(c, b)$$

будет (α, α^*)-маршрутом от a к b, который может быть сведен к (α, α^*)-цепи между этими двумя вершинами; следовательно, $b \in V(a)$.

Таким же образом найдем, что множество $V^*(a)$ состоит из всех вершин, которые эквивалентны a по α^*-достижимости. Можно также сказать, что вершина b эквивалентна a по (α, α^*)-достижимости, если любая вершина, достижимая из a (α, β)-цепью, будет достижима из b (α^*, β)-цепью, и наоборот. Легко проверить, что все такие вершины образуют множество

$$V(G[a]; \alpha^*, \alpha) = G[V(a)].$$

В связи с чередующимися цепями введем *граф чередующейся композиции* $G(\alpha, \alpha^*)$, важный во многих приложениях. Он определяется как произведение

$$G(\alpha, \alpha^*) = G \cdot G^*$$

графа G на его обратный граф G^*. Это означает, что $G(\alpha, \alpha^*)$ и G имеют одно и то же множество вершин V, и две вершины a и c соединены ребром $E_\alpha = (a, c)$ в $G(\alpha, \alpha^*)$ тогда и только тогда, когда a и c соединены чередующейся (α, α^*)-цепью длины 2 в G, т. е. существуют ребра

$$E_1 = (a, b), \quad E_2 = (b, c)$$

соответственно в G и в G^*. Граф $G(\alpha, \alpha^*)$ можно считать неориентированным. Его связными компонентами являются определенные выше достижимые множества $V(a)$.

8.6. Суграфы первой степени в графе. Любой ориентированный граф имеет адэкватное представление как двудольный граф. Для множества вершин V данного графа G строится копия V', которая находится во взаимно однозначном соответствии $a \rightleftarrows a'$ с V. Графу G соотносим двудольный граф $G(V, V')$, построенный так, что $G(V, V')$ имеет ребро (a, b') тогда и только тогда, когда существует ребро (a, b) в G. Обратно, очевидно, если в двудольном графе $G(V, V')$ существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин, то он может быть представлен как ориентированный граф на V.

Это соответствие между двудольными графами и ориентированными графами позволяет перенести результаты, полученные выше для двудольных графов, на ориентированные графы. Если двудольный граф $G(V, V')$ имеет совершенное паросочетание M, то существует единственная последовательность ребер

$$\ldots (a_0, a_1')(a_1, a_2') \ldots$$

в M, начинающаяся в любой вершине a_0 из V. В соответствующем ему ориентированном графе G этой последовательности отвечает ориентированная цепь

$$\ldots (a_0, a_1)(a_1, a_2) \ldots$$

Через каждую вершину G проходит ровно одна цепь, так что совершенному паросочетанию в $G(V, V')$ соответствует суграф первой степени в G, или (см. п. 2.3) граф подстановок для множества вершин V.

Теоремы о паросочетаниях для локально конечных графов зависят, как мы видели в предыдущей главе, от понятия дефицита множества, и это понятие также легко переносится на ориентированные графы. *Дефицит* конечного множества A есть величина

$$\delta(A) = \nu(A) - \nu(G[A]), \qquad (8.6.1)$$

где, как обычно, $G[A]$ означает множество всех конечных вершин ребер, имеющих свои начальные вершины в A. Можно также говорить об *обратном дефиците*

$$\delta^*(A) = \nu(A) - \nu(G^*[A]), \tag{8.6.2}$$

где $G^*[A]$ — множество всех начальных вершин ребер, имеющих свои конечные вершины в A. Легко видеть, что эти дефициты имеют те же свойства, что и дефициты, определенные в п. 7.2 для двудольных графов.

Как и ранее, обозначим максимальные дефициты через

$$\delta_0 \geqslant 0, \quad \delta_0^* \geqslant 0; \tag{8.6.3}$$

как аналог теоремы 7.4.3 получится

Теорема 8.6.1. *Для того чтобы локально конечный ориентированный граф имел суграф первой степени, необходимо и достаточно, чтобы его максимальные дефициты были равны нулю:*

$$\delta_0 = \delta_0^* = 0. \tag{8.6.4}$$

Как и в теореме 7.5.1, мы замечаем, что однородный ориентированный граф не имеет дефицита; следовательно, он имеет суграф первой степени. Если этот суграф удалить из G, то остающийся граф также будет однородным. Это приводит к аналогу теоремы 7.5.2:

Теорема 8.6.2. *Однородный ориентированный граф с множеством вершин V и локальными степенями*

$$\rho(v) = \rho^*(v) = m, \quad v \in V,$$

является прямой по ребрам суммой m графов подстановок

$$G = \bigcup P_i$$

на V.

Так же, как в теореме 7.5.8, мы заключаем, что эта теорема справедлива и в том случае, когда G имеет счетное множество вершин и каждая вершина соединена со счетным числом различных вершин входящими и выходящими ребрами.

Все остальные теоремы о паросочетаниях из главы 7 имеют соответствующие им теоремы для ориентированных графов, и мы предоставляем читателю их сформулировать. Паросочетанию вершин для двудольного графа будет соответствовать часть[1] H ориентированного графа G, которая имеет не более одного выходящего и одного входящего ребра в каждой вершине V. Назовем H частью *не более чем первой степени*. Вершины, в которых H не имеет ни входящего, ни выходящего ребра, являются *дефицитными вершинами*. Если множества дефицитных вершин минимальны, то *H есть максимальная часть не более чем первой степени*. Этот граф состоит из непересекающихся ориентированных простых цепей, покрывающих вершины графа G. Эти цепи могут быть конечными, а также односторонне- или двусторонне-бесконечными. Конечные цепи могут быть циклическими и нециклическими, в том числе нулевой длины.

Максимальным частям не более чем первой степени соответствуют максимальные паросочетания в соответствующем двудольном графе. Если они существуют, то, очевидно, найдутся такие подмножества N и N', что вершины из N являются дефицитными для выходящих ребер, а вершины из N' — дефицитными для входящих ребер в некотором максимальном H. Как в п. 7.8, мы получаем непересекающиеся разложения

$$V = N \cup G^*[N'] \cup R = N' \cup G[N] \cup R'.$$

Здесь множества

$$G[N] \cup R \cup G^*[N'], \qquad G[N] \cup R' \cup G^*[N']$$

являются разделяющими множествами для G, т. е. каждое ребро имеет вершину в одном из них; эти особые разделяющие множества имеют сильные минимальные свойства, соответствующие свойствам, указанным в теореме 7.9.2.

Максимальные графы не более чем первой степени будут существовать в том частном случае, когда G имеет конечное разделяющее множество (теорема 7.9.4). То же справедливо, если граф G локально конечен (теорема 7.8.6). В последнем случае, если G имеет конечные

[1]) Соответствующий суграф. (*Прим. перев.*)

максимальные дефициты (8.6.3), то число вершин, в которых нет выходящих ребер в H, равно δ_0, а число вершин, в которых нет входящих ребер, равно δ_0^*. Так как такие дефицитные вершины являются соответственно начальными и конечными вершинами простых цепей в H, мы получаем, что для конечного G

$$\delta_0 = \delta_0^*;$$

это также следует из теоремы 7.6.3.

Глава 9

АЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРАФЫ

9.1. Базисные графы. Пусть G — ациклический граф с однократными ребрами. Тогда из $a > b$, $b > a$ следует $a = b$, и соответствующее графу G отношение включения $a > b$ является частичным упорядочением, граф G_t которого есть транзитивное замыкание G. Если $a > c > b$, то будем говорить, что *с лежит между* a и b, или что c есть *промежуточная вершина* для a и b.

Пусть $E = (a, b)$ — некоторое ребро. Если имеются промежуточные вершины между a и b, то ребро E оказывается излишним в смысле п. 8.4; если вершин между a и b нет, то ребро E существенное. В этом случае b *непосредственно следует* за a и a *непосредственно предшествует* b. Ориентированная цепь $P(a, b)$ в G *максимальна*, если все ее ребра существенные, т. е. если любая вершина из P непосредственно следует за предыдущей [1]).

(Ориентированные) цепи между a и b *конечны*, если не существует ни бесконечно убывающей последовательности вершин

$$a > a_1 > a_2 > \ldots > b,$$

ни бесконечно возрастающей последовательности

$$a > \ldots > b_2 > b_1 > b.$$

В этом случае цепи между любой парой вершин $a' > b'$ также конечны при

$$a \geqslant a' > b' \geqslant b.$$

Пусть цепи между a и b конечны, $P(a, b)$ — любая цепь от a до b и $E_i = (a_i, a_{i+1})$ — несущественное ребро в P. Тогда можно увеличить P, заменяя E_i некоторой бо-

---

[1]) В этой главе речь идет исключительно об ориентированных графах. Поэтому, не опасаясь недоразумений, можно говорить просто о цепях и циклах, понимая под ними ориентированные цепи и ориентированные циклы. (*Прим. перев.*)

лее длинной цепью $P_1(a_i, a_{i+1})$. Можно проверить, что, повторяя этот процесс конечное число раз любым способом, в конце концов получим максимальную цепь $Q(a, b)$. Обратно, легко видеть, что если цепи между a и b обладают этим свойством увеличения, то все цепи между ними конечны.

Теорема 9.1.1. *Ациклический граф G имеет не более одного базисного графа B, и если такой граф B существует, то он состоит из существенных ребер.*

Доказательство. Существенные ребра должны принадлежать каждому порождающему графу. С другой стороны, пусть $E_0 = (a_0, a_1)$ — ребро в базисном графе B. Если бы E_0 было излишним в G, то между a_0 и a_1 существовала бы некоторая вершина c. Так как B — базис, существуют цепи $P(a_0, c)$ и $P(c, a_1)$ в B. Но E_0 не может быть излишним в B, так что объединенная цепь

$$P(a_0, c) \cup P(c, a_1)$$

должна содержать E_0. Но это приводит к ориентированному простому циклу, проходящему через a_0 или a_1, в противоречии с тем, что G ациклический.

Теорема 9.1.2. *Для того чтобы ациклический граф имел базис, необходимо и достаточно, чтобы концы любого ребра $E_0 = (a_0, a_1)$ были связаны максимальной цепью.*

Доказательство. Если базисный граф существует, то условие выполняется. С другой стороны, если оно выполняется, то все существенные ребра определяют базис. Отсюда непосредственно следует

Теорема 9.1.3. *Ациклический граф имеет базис, если для каждого ребра $E_0 = (a_0, a_1)$ цепи, связывающие a_0 и a_1, конечны.*

Можно поставить следующую задачу. Пусть G — неориентированный граф. В каких случаях можно приписать его ребрам такие ориентации, чтобы он стал базисным графом частичного упорядочения? Легко видеть, что для треугольника, т. е. для простого цикла, состоящего из трех ребер, такая конструкция невозможна. Поэтому нужно потребовать, чтобы граф G имел простые циклы только длины $l \geqslant 4$. Однако этого условия недостаточно. Общая задача еще не решена.

Задачи

1. Пусть ациклический граф имеет базис; имеет ли базис каждая его часть?

2. Построить граф без треугольников, который нельзя ориентировать так, чтобы он стал базисным графом частичного упорядочения.

3*. Найти графы с наименьшим числом ребер, обладающие этим свойством.

4*. Найти наибольшее число ребер в ациклическом базисном графе, определенном на множестве вершин с n элементами.

9.2. Деформации цепей. Выведем некоторые результаты для ациклических графов, которые содержат как частный случай хорошо известные теоремы типа теоремы Жордана — Гёльдера для групп и других алгебраических систем.

Предположим, что в ациклическом графе G две вершины a и b связаны максимальными ориентированными цепями

$$A(a, b) = (a_0, a_1) \dots (a_{k-1}, a_k), \quad a_0 = a, \quad a_k = b,$$
$$B(a, b) = (b_0, b_1) \dots (b_{l-1}, b_l), \quad b_0 = a, \quad b_l = b. \quad (9.2.1)$$

Будем говорить, что цепи A и B в (9.2.1) *взаимно просты*, если у них общие только концы a и b и не существует такой вершины c, чтобы были максимальными цепи

$$P(a, c) \cup Q(c, a_i), \quad P(a, c) \cup R(c, b_j) \qquad (9.2.2)$$

или цепи

$$Q_1(a_i, c) \cup P_1(c, b), \quad R_1(b_j, c) \cup P_1(c, b) \qquad (9.2.3)$$

для какой-либо пары промежуточных вершин a_i и b_j (рис. 9.2.1).

Если a_r и a_s — две вершины в максимальной цепи $A(a, b)$ в (9.2.1), то они должны быть связаны участком $A(a_r, a_s)$. Если существует другая максимальная цепь $B_1(a_r, a_s)$, то

$$A_1(a, b) = A(a, a_r) \cup B_1(a_r, a_s) \cup A(a_s, b)$$

также является максимальной цепью от a до b. Будем говорить, что A_1 получено из A *деформацией*. Деформация называется *простой*, если цепи

$$A(a_r, a_s), \quad B_1(a_r, a_s)$$

взаимно просты. Пара цепей (9.2.1) называется *деформационно эквивалентной*, если одна получается из другой конечным числом простых деформаций.

Теорема 9.2.1. *Пусть в ациклическом графе G цепи между вершинами $a > b$ конечны. Тогда любая пара максимальных цепей* (9.2.1), *связывающих эти вершины, деформационно эквивалентна.*

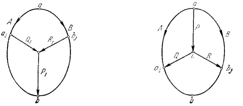


Рис. 9.2.1.

Доказательство. Допустим, что цепи $A(a, b)$ и $B(a, b)$ не являются деформационно эквивалентными. Если они имеют общие вершины, кроме a и b, то каждая из них должна разлагаться на участки A_i и B_i так, что или $A_i = B_i$, или они имеют только общие концы. Если все A_i и B_i взаимно просты, то цепи A и B будут деформационно эквивалентными. Поэтому можно предполагать, что A и B имеют только общие концы a и b и не деформационно эквивалентны. Тогда они не будут и взаимно простыми, и найдется некоторая вершина c с цепями (9.2.2) или (9.2.3). В первом случае максимальные цепи

$$P(a, c) \cup Q(c, a_i) \cup A(a_i, b),$$
$$P(a, c) \cup R(c, b_j) \cup B(b_j, b)$$

также соединяют a и b. Так как A и B не деформационно эквивалентны, цепи хотя бы в одной из трех пар

$$A(a, a_i); \quad P(a, c) \cup Q(c, a_i),$$
$$Q(c, a_i) \cup A(a_i, b); \quad R(c, b_j) \cup B(b_j, b),$$
$$P(a, c) \cup R(c, b_j); \quad B(a, b_j)$$

не могут быть деформационно эквивалентными. Аналогичный результат получается, когда существуют цепи (9.2.3). Эти утверждения можно объединить следующим образом. Если цепи $A(a, b)$ и $B(a, b)$ не деформационно эквивалентны, то существуют такие вершины a' и b' с

$$a \geqslant a' > b' \geqslant b$$

(где оба равенства одновременно не допускаются), что a' и b' также связаны парой не эквивалентных цепей. Это рассуждение может быть повторено, и мы получим последовательности

$$a \geqslant a' \geqslant a'' \geqslant \ldots \geqslant b'' \geqslant b' \geqslant b$$

пар вершин с тем же свойством. Так как по крайней мере одна из этих последовательностей бесконечна, мы приходим к противоречию. (См. Оре и Маклейн.)

Из теоремы 9.2.1 немедленно получается следствие:

Теорема 9.2.2. *Пусть G — ациклический граф с конечными цепями между любыми вершинами $a > b$. Для того чтобы максимальные цепи $A(a, b)$ и $B(a, b)$ всегда имели одну и ту же длину, необходимо и достаточно, чтобы любая пара взаимно простых цепей обладала этим свойством.*

Алгебраические приложения этой теоремы к теоремам Жордана — Гёльдера опираются на тот факт, что для соответствующих систем выполняется следующее специальное условие:

Условие четырехугольника. Если

$$a > a_1 > b, \ a > b_1 > b,$$

где $a_1 \neq b_1$ непосредственно следуют за a, то существует вершина c между a и b, которая непосредственно следует как за a_1, так и за b_1 (рис. 9.2.2). Если условие четырехугольника выполняется, то взаимно простые цепи имеют вид

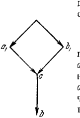


Рис. 9.2.2.

$$(a, a_1) \cup (a_1, c); \quad (a, b_1) \cup (b_1, c),$$

и, следовательно, каждая из них имеет длину 2.

Чтобы получить обычную теорему Жордана — Гёльдера для *главных рядов* в группах, достаточно рассмотреть частично упорядоченное по включению множество всех нормальных делителей данной группы G_0. Если в этой системе нормальный делитель A содержит два максимальных нормальных делителя A_1 и B_1, то пересечение $C = A_1 \cap B_1$ также будет нормальным делителем в G_0, и притом максимальным в A_1 и в B_1, согласно теореме об изоморфизме. Поэтому условие четырехугольника в данном случае выполнено.

Чтобы вывести теорему Жордана — Гёльдера для *композиционных рядов*, т. е. рядов подгрупп, в которых каждый член является максимальным нормальным делителем предыдущего, применяются те же рассуждения для частично упорядоченного множества всех композиционных подгрупп, т. е. подгрупп, содержащихся в композиционных рядах.

Задачи

1. Провести полное доказательство теоремы Жордана — Гёльдера для композиционных рядов, основываясь на предшествующих результатах для графов.
2. Можно ли сформулировать теорему 9.2.1 так, чтобы она выполнялась для произвольных ориентированных графов?

9.3. Графы воспроизведения. Обратимся к одному применению теории графов в области биологии. Пусть V — популяция индивидуальных организмов некоторого вида, способных к размножению. Связи членов популяции V со своим потомством могут быть выражены бинарным отношением *непосредственного потомства* π, так что

$$a\,\pi\,b, \quad a,\ b \in V,$$

если b есть непосредственный потомок (дитя, отпрыск) индивидуума a. Отношению π соответствует ориентированный граф $G = G(\pi)$, который можно назвать *графом воспроизведения* для V. Он имеет однократные ребра и не имеет петель; в G существует ребро $(a,\ b)$ тогда и только тогда, когда b является непосредственным потомком a. Если существует ориентированная цепь $P(c,\ d)$ между двумя вершинами, то, как и раньше, пишем $c > d$ и называем d *потомком* c, а c — *предком* d. Соответствующий *граф потомства* есть транзитивное замыкание графа G.

Множество вершин V должно распадаться по полу на два непересекающихся класса: отцов m и матерей f, так что

$$V = M \cup F, \quad m \in M, \quad f \in F. \tag{9.3.1}$$

При объединении двух индивидуумов из разных классов получается один или более отпрысков. Этот процесс воспроизведения имеет два свойства:

1. Каждый индивидуум имеет двух родителей.
2. Никакой индивидуум не является своим потомком.

В терминах графов это означает:

1. Число входящих ребер в каждой вершине $a \in V$ равно

$$\rho^*(a) = 2. \tag{9.3.2}$$

2. Граф является ациклическим.

Исследуем здесь графы с такими свойствами и поставим следующий вопрос. Пусть в графе выполняются указанные два условия. В каких случаях можно вершинам G приписать *пол*, т. е. когда существует такое непересекающееся разложение (9.3.1) множества вершин, что в каждой вершине имеется по одному ребру, приходящему в нее из каждого множества?

Рассмотрим сначала эту задачу в несколько более общей форме, опуская условие ацикличности. Кроме того, предположим, что вместо (9.3.2) выполняется только условие

$$\rho^*(a) \leqslant 2. \tag{9.3.3}$$

В этой связи для произвольного ориентированного графа G удобно использовать терминологию, что a является *родителем* b, если существует ребро (a, b), направленное от a к b. Будем также говорить, что граф G имеет *дихотомию по полу*, если существует такое разложение (9.3.1) на два непересекающихся класса, что каждый индивидуум, имеющий хотя бы двух родителей, имеет их ровно два, по одному из каждого класса M и F.

Предположим теперь, что G удовлетворяет неравенству (9.3.3). Припишем характеристику пола m некоторой произвольной вершине a_0. Если a_0 имеет непосредственного потомка a_1, то a_1 может также быть непосредственным потомком некоторого другого родителя a_2. В этом случае a_2 нужно приписать пол f. Для a_2 поступаем таким же образом. Если a_2 имеет некоторого непосредственного потомка a_3 и a_3 имеет некоторого другого родителя a_4, то a_4 должно иметь пол m. Продолжая этот процесс, мы припишем пол каждой из вершин a_{2n}, достижимых из a_0 (α, α^*)-цепями, т. е., в обозначениях п. 8.5, каждой вершине множества

$$V(a_0;\ \alpha,\ \alpha^*). \tag{9.3.4}$$

Однако, чтобы так полученные характеристики m и f определялись однозначно, все цепи к a_{2n} должны давать одну и ту же характеристику. Легко видеть, что для этого необходимо и достаточно, чтобы длины всех (α, α^*)-циклов делились на 4. Если это условие удовлетворяется, то вершинам в каждом множестве (9.3.4) можно приписать характеристики с нужными свойствами. Отсюда получается

Теорема 9.3.1. *Для того чтобы ориентированный граф, удовлетворяющий* (9.3.3), *имел дихотомию по полу, необходимо и достаточно, чтобы длины всех чередующихся* (α, α^*)*-циклов делились на 4.*

При подходящей переформулировке условие (9.3.3) может быть в теореме опущено. Будем говорить, что чередующийся (α, α^*)-маршрут *правильный,* если ни за каким ребром $A = (a, b)$ непосредственно не следует обратное ребро A^*. Тогда мы имеем теорему:

Теорема 9.3.2. *Для того чтобы ориентированный граф имел дихотомию по полу, необходимо и достаточно, чтобы длины всех чередующихся правильных* (α, α^*)*-маршрутов делились на 4.*

Доказательство. Условие, очевидно, необходимо. С другой стороны, из него следует (9.3.3). Если бы в некоторой вершине было 3 и более входящих ребер (рис. 9.3.1), то имелся бы циклический правильный (α, α^*)-маршрут длины 6.

Теорему 9.3.1 можно сформулировать в терминах графа чередующейся композиции (см. п. 8.5), (α, α^*)-маршруту в G соответствует единственный маршрут в $G \cdot G^*$. Петли в $G \cdot G^*$ определяются 2-маршрутами, состоящими из ребра и его обращения. Они исключаются, когда мы ограничиваемся правильными (α, α^*)-маршрутами. Если циклические правильные (α, α^*)-маршруты в G имеют длины, делящиеся на 4, то циклы в $G \cdot G^*$ имеют четные длины; следовательно, $G \cdot G^*$ есть двудольный граф, если пренебречь петлями, и наоборот. Кроме того, множества (9.3.4) являются связными компонентами графа $G \cdot G^*$. В каждой из них можно приписать характеристику m или f данной вершине a_0, и характеристики остальных вершин определятся однозначно. Таким образом, теорему 9.3.2 можно сформулировать иначе.

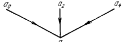


Рис. 9.3.1.

Теорема 9.3.3. *Для того чтобы ориентированный граф G имел дихотомию по полу, необходимо и достаточно, чтобы граф чередующейся композиции $G \cdot G^*$ без петель был двудольным. Количество способов, которыми можно приписать характеристики, равно 2^k, где k есть число связных компонент графа $G \cdot G^*$.*

Вернемся к графам воспроизведения. Можно построить такой граф последовательно, полагая, что от пары вершин a и b происходит новая вершина c, соединенная с ними ребрами (a, c) и (b, c). Если в таком ациклическом графе каждый индивидуум имеет двух родителей, то граф должен быть бесконечным. В генетических экспериментах или в их описаниях обычно исходят из некоторой данной ограниченной популяции, или порождающего множества B, от которого происходят последующие поколения. Предки этих данных индивидуумов неизвестны, и для каждого b из B полагают $\rho^*(b) = 0$. Можно также начинать с некоторого порождающего множества, в котором семейные отношения известны только не полностью. Поэтому приходится рассматривать условие (9.3.3) как характеризацию общих графов воспроизведения. При этом определении из теоремы 9.3.2 следует

Теорема 9.3.4. *Ориентированный граф G является графом воспроизведения тогда и только тогда, когда он ациклический и его граф чередующейся композиции $G \cdot G^*$ двудольный.*

В графе воспроизведения можно ввести обычные понятия семейных отношений: отец, мать, брат, сестра, сводный брат, сводная сестра, дядя, тетя, двоюродные брат и сестра, племянницы и племянники и т. д. Большинство обычных запретов в человеческом обществе могут быть представлены как простые ограничения на граф воспроизведения. Например, смешение с потомками не разрешается. В терминах графов это означает, что если существует ориентированная цепь $P(a_0, a_n)$, то не может существовать ребра (a_0, a_n), иными словами, граф воспроизведения должен быть базисным в смысле п. 8.4. Читатель может описать на языке графов и другие запреты.

Задачи

1. Охарактеризовать теоретически графы воспроизведения для совокупности индивидуумов с абсолютной моногамией для обоих полов, т. е. когда никакой индивидуум не может иметь более одного супруга. Та же задача с моногамией лишь для одного пола.

2. Дать формулировку в терминах графов для такого ограничения, когда не разрешаются браки между сводными братьями и сестрами. Тот же вопрос при запрещении браков между дядей и племянницей или тетей и племянником.

3*. Предположим, что в графе

$$\rho^*(a) \leqslant n$$

для каждой вершины a. В каких случаях можно разложить множество вершин из n непересекающихся множеств так, чтобы входящие в каждую вершину ребра приходили от различных множеств?

Глава 10

ЧАСТИЧНАЯ УПОРЯДОЧЕННОСТЬ[1])

10.1. Графы частичных упорядочений. В п. 1.4 мы ввели понятие частичного упорядочения. Отношение *частичного упорядочения* $a \geqslant b$ характеризуется тремя свойствами:

1. Из $a \geqslant b$ и $b \geqslant a$ следует $a = b$.
2. Рефлексивность: $a \geqslant b$.
3. Транзитивность.

Обращение $a \leqslant b$ частичного упорядочения есть частичное упорядочение. Каждому частичному упорядочению $a \geqslant b$ соответствует *строгое частичное упорядочение* $a > b$, являющееся пересечением двух отношений

$$a \geqslant b, \quad a \neq b.$$

Граф G строгого частичного упорядочения характеризуется свойствами:

1. G есть ориентированный граф с однократными ребрами.
2. Ациклический.
3. Транзитивный.

Граф соответствующего частичного упорядочения получается добавлением петель в каждой вершине.

Как и выше для ациклических графов, будем говорить, что вершина b непосредственно следует за вершиной a, если $a > b$, и не существует такой вершины c, что $a > c > b$, т. е., другими словами, если ребро (a, b) существенное. Ориентированная цепь $P(a, b)$ максимальна, когда все ее ребра существенные. Для таких максимальных цепей имеют место свойства Жордана — Гёльдера, выраженные теоремами 9.2.1 и 9.2.2.

Частичное упорядочение является транзитивным замыканием любого своего порождающего графа. Как в теореме 9.1.1, мы получаем, что частичное упорядочение имеет не более одного базисного графа B, и если такой граф B существует, то он состоит из существенных ре-

[1]) См. примечание на стр. 192. (*Прим. перев.*)

бер. Следует отметить, что, когда частичное упорядочение представляют в виде графа, обычно изображают не сам граф частичного упорядочения, а его базисный граф B. Базисный граф существует, согласно теореме 9.1.2, тогда и только тогда, когда для любого ребра (a, b) вершины a, b связаны максимальной цепью $P(a, b)$. В частности, это имеет место, когда цепи между a и b конечны.

10.2. Представления в виде сумм упорядоченных множеств. Обратимся теперь к частям не более чем первой степени и покажем, что особые свойства частичных упорядочений позволяют вывести более конкретные результаты, чем те, которые получены в п. 8.6 для общих ориентированных графов. Как и в п. 8.6, представим ориентированный граф G в виде двудольного графа $G(V, V')$, где V' есть копия V, с взаимно однозначным соответствием $a \rightleftarrows a'$ между вершинами этих множеств. Каждому ребру (a, b) в G соответствует единственное ребро (a, b') в $G(V, V')$, и наоборот. Любому паросочетанию M в $G(V, V')$ соответствует часть H[1]) в G не более чем первой степени. Компоненты C_i графа H являются ориентированными простыми циклами и ориентированными простыми цепями. Пусть V_i означает множество вершин компоненты C_i. Тогда множества V_i не пересекаются, и имеют место разложения

$$H = \bigcup C_i, \quad V = \bigcup V_i. \tag{10.2.1}$$

Некоторые из множеств V_i могут состоять из одной вершины.

Предположим теперь, что G есть ациклический граф. Тогда компоненты C_i графа H в (10.2.1) будут конечными или бесконечными ориентированными простыми цепями, следовательно, подграфы $G(V_i)$ представляют собой квазиупорядочения[2]). Поэтому любому паросочетанию M в $G(V, V')$ соответствует разложение (10.2.1) множества V, в котором каждое $G(V_i)$ является квазиупорядочением со счетным числом вершин. Если G есть частичное упорядочение, то множества V_i оказываются упорядоченными.

---

[1]) См. примечание на стр. 204. (*Прим. перев.*)

[2]) См. п. 8.3. (*Прим. ред.*)

Дефицитными вершинами H являются те, в которых нет выходящих ребер, так что этими вершинами будут конечные вершины простых цепей C_i. Обратно дефицитными вершинами являются те, в которых нет входящих H-ребер; следовательно, таковыми будут начальные вершины простых цепей C_i. Если все простые цепи C_i конечны, то они будут иметь как начальные, так и конечные вершины; следовательно, в этом случае имеет место взаимно однозначное соответствие между дефицитными и обратно дефицитными вершинами. Если граф G конечен, то минимальное число дефицитных вершин равно максимальному дефициту G:

$$\delta_0 = \delta_0^*, \tag{10.2.2}$$

как это показано в п. 8.6. Отсюда следует

Теорема 10.2.1. *Пусть в конечном ациклическом графе G с множеством вершин V*

$$V = \bigcup V_i \tag{10.2.3}$$

есть такое непересекающееся разложение V, что для каждого класса V_i подграф $G(V_i)$ является квазиупорядоченным множеством. Тогда наименьшее число компонент V_i в любом таком разложении равно максимальному дефициту (10.2.2) *графа G.*

Заметим, что если $\nu_e(H)$ — число ребер части H не более чем первой степени, содержащей максимальное число ребер, то

$$\nu_e(H) = \nu(V) - \delta_0. \tag{10.2.4}$$

Это показывает, что графы H с минимальным числом квазиупорядоченных компонент будут также графами с максимальным числом ребер.

Исследуем более подробно случай строгого частичного упорядочения G. Подмножество S множества V будет называться *нижним отрезком*, если из $x < s$ для некоторого $s \in S$ следует $x \in S$. Аналогично определяется *верхний отрезок*. Каждое множество B порождает нижний отрезок $S(B)$, состоящий из всех $x \leqslant b$ для какого-нибудь $b \in B$; таким образом, B будет порождающим множеством для $S(B)$ в смысле п. 8.1. *Минимальное порождающее множество* B_0 есть такое множество, что никакое его подмножество не порождает $S(B_0)$. Множество B_0 является минимальным порождающим множеством тогда и только тогда, когда оно будет *независимым множеством,* т. е. когда ни для какой пары b_1 и b_2 его элементов не выполняется соотношение $b_1 > b_2$.

Предположим сначала, что G — конечное частичное упорядочение. Если A — подмножество множества вершин V, то его дефицит дается формулой

$$\delta(A) = \nu(A) - \nu(G[A]),$$

где $G[A]$ есть множество вершин v с $v < a$ для некоторого $a \in A$, т. е.

$$S(A) = A \cup G[A].$$

Пусть для некоторого такого v мы имеем $v \notin A$. Так как G транзитивно,

$$G[v] \subseteq G[A];$$

следовательно,

$$\delta(A \cup v) = \delta(A) + 1.$$

Это показывает, что любое множество с максимальным дефицитом должно быть нижним отрезком. Пусть B_0 есть минимальное порождающее множество для такого отрезка A. Из

$$B_0 = A - G[A]$$

мы заключаем, что

$$\delta(A) = \nu(B_0),$$

т. е. что дефицит отрезка равен числу вершин в его минимальном порождающем множестве B_0. Как следствие мы получаем теорему:

Теорема 10.2.2. *В конечном частичном упорядочении максимальный дефицит равен*

$$\delta_0 = \nu(B_0),$$

где B_0 — независимое множество с максимальным числом элементов.

Критические множества, т. е. множества с максимальным дефицитом, являются отрезками, для которых B_0 есть наибольшее независимое множество с $\gamma(B_0) = \delta_0$. Из теоремы 7.2.2 следует, что критические множества образуют кольцо множеств; в частности, существуют наименьшее множество $N_0 = S(B_0)$, содержащееся во всех остальных, и наибольшее множество $M_0 = S(B_0')$, содержащее все остальные. Соответственно среди наибольших независимых множеств существуют единственное самое нижнее множество B_0 и единственное самое верхнее множество B_0', так что все элементы любого другого наибольшего множества содержатся между B_0 и B_0'.

Объединяя результаты теорем 10.2.1 и 10.2.2, мы получаем для конечных частичных упорядочений теорему:

Теорема 10.2.3. *Пусть G — частичное упорядочение, в котором наибольшие независимые множества имеют δ элементов. Тогда множество вершин V имеет такое непересекающееся разложение* (10.2.3) *на δ компонент V_i, в котором каждое $G(V_i)$ является графом упорядочения.*

Теорему 10.2.3 доказал Дилворт, распространивший ее также на бесконечные частичные упорядочения. Доказательство опирается на конечный случай и использует индукцию относительно максимального числа δ независимых вершин. Ясно, что для данного δ не может быть непересекающегося разложения на упорядочения менее чем с δ членами, так как это помешало бы существованию δ независимых элементов. Для $\delta = 1$ теорема тривиальна.

В общем случае каждое конечное подмножество F множества V имеет непересекающееся разложение на упорядочения с δ членами

$$F = \bigcup F_i, \tag{10.2.5}$$

где некоторые F_i могут быть пустыми. Будем называть множество C *сильно зависимым*, если для любого конечного множества F существует такое разложение (10.2.5) на упорядочения, что

$$C \cap F \subseteq F_1$$

для подходящей компоненты F_1. Одна вершина сильно зависима. Если это условие применить к двум элементам, то мы получим, что множество C должно быть упорядоченным. Сумма

$$C_0 = \bigcup C_i$$

любого упорядоченного по включению семейства $\{C_i\}$ сильно зависимых множеств также будет сильно зависима, так как должно быть

$$C_0 \cap F = C_k \cap F$$

для некоторого подходящего множества C_k. Из принципа максимальности заключаем, что существуют максимальные сильно зависимые множества.

Чтобы завершить индукцию, покажем, что если C есть максимальное сильно зависимое множество, то остающееся множество

$$V_1 = V - C$$

содержит максимальное число $\delta_1 = \delta - 1$ независимых вершин. Не может быть $\delta_1 < \delta - 1$, так как это приводило бы к разложению V на упорядочения менее чем с δ членами. Пусть поэтому $\delta_1 = \delta$, так что V_1 содержит δ независимых элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_\delta. \tag{10.2.6}$$

Так как множества $C \cup a_i$ не могут быть сильно зависимыми, для каждого a_i найдется такое конечное множество S_i, что не существует разложения на упорядочения, в котором $(C \cup a_i) \cap S_i$ содержится в одной компоненте. Очевидно, $a_i \in S_i$, так что конечное множество

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_\delta$$

содержит все вершины (10.2.6). Пусть

$$S = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_\delta$$

есть такое прямое разложение множества S на упорядочения, что

$$C \cap S \subseteq T_1.$$

Так как S содержит независимые вершины (10.2.6), существует некоторое $a_i \in T_1$. Но тогда

$$S_i = (S_i \cap T_i) \cup \ldots \cup (S_i \cap T_\delta)$$

является прямым разложением множества S_i на упорядочения с

$$(C \cup a_i) \cap S_i \cap T_1 \subseteq S_i \cap T_1,$$

что противоречит определению S_i.

Теорема Дилворта относится к частично упорядоченным множествам, для которых наибольшие независимые множества имеют ограниченное число элементов. При некоторых условиях эта теорема может быть распространена на частичные упорядочения с бесконечными независимыми множествами.

Разложение (10.2.3) частичного упорядочения на непересекающиеся упорядоченные множества называется *независимым*, если существует независимое множество

$$B_0 = \{b_i\}, \quad b_i \in V_i.$$

Если независимое разложение существует, то любое другое независимое множество может иметь не более одной вершины в каждом V_i. Мы видим, что теорема 10.2.3 равносильна следующей:

Теорема 10.2.4. *Частичное упорядочение, в котором наибольшие независимые множества состоят из δ элементов, имеет независимое разложение на упорядочения.*

Доказательство. При данном условии независимое разложение содержит по крайней мере δ упорядочений и не может иметь больше. С другой стороны, когда теорема 10.2.3 справедлива, должно быть по одной из δ вершин в каждом V_i.

Частичное упорядочение G называется *локально конечным*, если для данного v существует только конечное число вершин x, удовлетворяющих условиям $v > x$ или $v < x$. Отсюда следует, что все простые цепи в G конечны. Так как двудольный граф $G(V, V')$, отвечающий G, также будет локально конечен, из теоремы 7.8.6 следует, что он имеет максимальное паросочетание M. Исходя из этого свойства, можно доказать следующее:

Теорема 10.2.5. *Любое локально конечное частичное упорядочение имеет независимое разложение на упорядочения.*

Задачи

1*. Дать доказательство теоремы 10.2.5.

2*. Доказать тот же результат при двух несколько более слабых условиях: (α) $G(V, V')$ имеет максимальное паросочетание; (β) все ориентированные цепи в G конечны.

10.3. Структуры и структурные операции. Отношения замыкания. Предположим, что частичное упорядочение P обладает следующим свойством: для каждой пары элементов a и b существует единственный элемент

$$m = a \cup b,$$

называемый *структурным объединением* a и b, для которого

$$x \geqslant a, \quad x \geqslant b$$

тогда и только тогда, когда $x \geqslant m$.

Из этого определения легко получить свойства:

1. Идемпотентность: $a \cup a = a$.
2. Коммутативность: $a \cup b = b \cup a$. (10.3.1)
3. Ассоциативность: $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$.

Если в P существует структурное объединение, то его можно рассматривать как алгебраическую операцию, при которой любым двум элементам a и b отвечает вполне определенный третий элемент $a \cup b$. Кроме того, $a \geqslant b$ в P тогда и только тогда, когда

$$a \cup b = a. \tag{10.3.2}$$

Операцию, удовлетворяющую условиям (10.3.1), будем называть *структурной операцией*. Для нее можно доказать также обратный результат:

Теорема 10.3.1. *Структурная операция определяет частичное упорядочение со структурным объединением $a \cup b$, если считать $a \geqslant b$, когда выполняется соотношение* (10.3.2).

Доказательство простое и может быть предоставлено читателю в качестве упражнения.

Можно считать, что вместо структурного объединения частичное упорядочение имеет однозначно определенный элемент $a \cap b$, называемый *структурным пересечением*, для которого

$$y \leqslant a, \quad y \leqslant b$$

тогда и только тогда, когда

$$y \leqslant a \cap b.$$

Структурное пересечение обладает теми же свойствами (10.3.1), что и структурное объединение. Теорема, аналогичная теореме 10.3.1, также справедлива, если считать, что $a \geqslant b$, когда

$$a \cap b = b. \tag{10.3.3}$$

Частичное упорядочение называется *структурой*, если любая пара элементов a и b имеет как структурное объединение $a \cup b$, так и структурное пересечение $a \cap b$. Вместо того, чтобы вводить структуру при помощи исходного частичного упорядочения, можно просто рассматривать структуру как алгебраическую систему с операцией структурного объединения $a \cup b$ и операцией структурного пересечения $a \cap b$. Эти операции удовлетворяют двойственным системам аксиом:

$$\begin{aligned} &a \cup a = a, && a \cap a = a, \\ &a \cup b = b \cup a, && a \cap b = b \cap a, \\ &a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c, && a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c, \\ &a \cup (a \cap b) = a, && a \cap (a \cup b) = a. \end{aligned} \tag{10.3.4}$$

Первые три аксиомы из каждой системы в (10.3.4), как мы видели, определяют частичное упорядочение. Последние две аксиомы суть *законы поглощения*. Они гарантируют, что два частичных упорядочения $a \geqslant b$, определенные соответственно формулами (10.3.2) и (10.3.3), совпадают. Так, из (10.3.2) следует

$$a \cap b = (a \cup b) \cap b = b$$

и, обратно, (10.3.2) следует из (10.3.3).

Теория структур пронизывает бо́льшую часть математики, но сколько-нибудь подробное описание ее применений выходит за пределы нашего изложения, и мы отсылаем читателя к специальным работам на эту тему. Добавим только несколько утверждений.

Мы определили структуру как такое частичное упорядочение, в котором любые два элемента a и b имеют точную верхнюю границу $a \cup b$ и точную нижнюю границу $a \cap b$. Следовательно, эти понятия определены для любого конечного множества элементов. Структура называется *полной*, если любое множество

$$A = \{a_i\}, \qquad i \in I,$$

имеет структурное объединение, или точную верхнюю границу и структурное пересечение, или точную нижнюю границу:

$$\mathbf{V} = \bigvee_{i \in I} a_i, \quad \mathbf{\Lambda} = \bigwedge_{i \in I} a_i.$$

Тогда каждая из систем условий

$$x \geqslant a_i, \quad y \leqslant a_i, \quad i \in I,$$

будет выполняться тогда и только тогда, когда соответственно

$$x \geqslant \mathbf{V}, \quad y \leqslant \mathbf{\Lambda}.$$

Полная структура L имеет единственный максимальный элемент m_1, являющийся структурным объединением всех элементов L, и единственный минимальный элемент m_0, являющийся структурным пересечением всех элементов.

Для полных структур система аксиом может быть сокращена. Достаточно предполагать, что:

1. Каждое множество имеет структурное пересечение.
2. Существует единственный максимальный элемент m_1, содержащий все остальные.

Структурное объединение множества A можно тогда определить как структурное пересечение

$$\bigvee_{a_i \in A} a_i = \bigwedge_{u \in U} u,$$

где U есть непустое множество всех элементов u, которые содержат все $a_i \in A$.

Полные структуры связаны с *отношениями замыкания* для множеств. Пусть S — некоторое основное множество. Отношение замыкания в S есть отображение

$$A \to \Gamma(A),$$

которое каждому подмножеству A множества S ставит в соответствие некоторое множество $\Gamma(A)$, причем это соответствие обладает следующими свойствами:

1. $\Gamma(A) \geqslant A$.
2. $\Gamma(\Gamma(A)) = \Gamma(A)$.
3. Из $A \geqslant B$ следует $\Gamma(A) \geqslant \Gamma(B)$.

Множества-образы $\Gamma(A)$ называются *замкнутыми множествами* для этого отношения. Условие 1 показывает, что $S = \Gamma(S)$ является замкнутым множеством.

Теорема 10.3.2. *Замкнутые множества для отношения замыкания* Γ *образуют полное кольцо* R *пересечений множеств, содержащее* S, *и замыкание* $\Gamma(A)$ *множества* A *есть наименьшее множество в* R, *содержащее* A. *Обратно, любое полное кольцо пересечений* R, *содержащее* S, *определяет отношение замыкания указанным способом.*

Доказательство. Под *полным кольцом пересечений* R множеств понимается такое семейство множеств, что пересечение любого его подсемейства принадлежит R. Пусть

$$\{D_i\}, \quad \Gamma(D_i) = D_i,$$

— семейство замкнутых множеств для отношения замыкания Γ. Чтобы показать, что их пересечение

$$D = \bigcap D_i$$

замкнуто, заметим, что из

$$D \subseteq D_i, \quad \Gamma(D) \subseteq \Gamma(D_i) = D_i$$

следует

$$\Gamma(D) = \bigcap D_i = D.$$

Обратно, пусть R — полное кольцо пересечений множеств, содержащее S. Можно определить

$$\Gamma(A) = \bigcap C_i,$$

где C_i пробегает все множества из R, содержащие A; легко видеть, что $\Gamma(A)$ удовлетворяет трем условиям для отношения замыкания.

Теория полных структур и теория отношений замыкания равносильны в следующем смысле. Замкнутые множества для отношения замыкания образуют полную структуру. Структурным пересечением семейства замкнутых множеств $\{\Gamma(A_i)\}$ является их пересечение, а структурным объединением — замыкание их суммы

$$\bigvee_i \Gamma(A_i) = \Gamma\left(\bigcup_i \Gamma(A_i)\right). \tag{10.3.5}$$

Обратно, в полной структуре множества $\Gamma(a)$ всех $x \leqslant a$

образуют кольцо пересечений множеств, следовательно, определяют отношение замыкания в множестве вершин V.

Задачи

1. Показать, что в (10.3.5) можно положить

$$\bigvee_i \Gamma(A_i) = \Gamma\left(\bigcup_i A_i\right).$$

2. Доказать, что операция образования транзитивного замыкания графа является операцией замыкания.

3. Доказать, что множество всех транзитивных графов с данным множеством вершин образует полную структуру для отношения включения графов.

4*. Частичное упорядочение является структурой, если существует единственный минимальный элемент $a \cup b$, содержащий a и b, и единственный максимальный элемент $a \cap b$, содержащийся в a и b. В более общем случае может быть такое минимальное множество элементов $\{c_i\}$, что $x \geqslant a$, $x \geqslant b$ тогда и только тогда, когда $x \geqslant c_i$ для некоторого i, и аналогично для $x \leqslant a$, $y \leqslant b$. Это наводит на мысль об определении частичного упорядочения P как мультиструктуры, в которой заданы многозначные операции

$$a \cup b = \{c_i\}, \quad a \cap b = \{d_i\}.$$

Попытаться сформулировать соответствующие аксиомы для этого случая.

10.4. Размерность в частичном упорядочении. В п. 8.3 мы установили, что каждый ациклический граф G содержится в квазиупорядочении O с тем же множеством вершин. Если граф G транзитивен и, следовательно, является частичным упорядочением, то он будет содержаться в транзитивном замыкании для O. Отсюда мы получаем следующий результат, впервые доказанный Шпильрайном. Всякое частичное упорядочение содержится в некотором упорядочении. В этом случае то же рассуждение, которое привело к теоремам 8.3.4 и 8.3.5, дает теорему Душника и Миллера:

Теорема 10.4.1. *Любое пересечение упорядочений на множестве V является частичным упорядочением, и любое частичное упорядочение есть пересечение содержащих его упорядочений.*

На основе этой теоремы можно сформулировать следующее определение. *Порядковая размерность* $d_0(G)$ частичного упорядочения G есть наименьшее кардинальное число упорядочений O_i на V, для которого

$$G = \bigcap_i O_i. \qquad (10.4.1)$$

Можно также ввести понятие размерности частичного упорядочения и другим способом, который более сходен с введением обычной декартовой размерности для произведения пространств. Предположим, что $\{O_i\}$ есть семейство упорядочений, определенных соответственно на множествах V_i; индекс i может при этом пробегать произвольное множество индексов I. Введем в рассмотрение произведение множеств

$$V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k = \bigtimes_{i \in I} V_i, \qquad (10.4.2)$$

состоящее из всех k-наборов

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_k), \qquad v_i \in V_i.$$

Упорядочения $\{Q_i\}$ определяют частичное упорядочение Q, называемое *произведением упорядочений*

$$Q = \bigtimes_{i \in I} Q_i \qquad (10.4.3)$$

на произведении множеств (10.4.2) в смысле п. 2.6: если

$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_k),$$

то $v > w$ в Q тогда и только тогда, когда для каждого i

$$v_i \geqslant w_i,$$

где точное равенство не может выполняться одновременно для всех индексов. Фактически частичное упорядочение Q есть структура с операциями

$$v \cup w = (\max(v_i, w_i)), \quad v \cap w = (\min(v_i, w_i)).$$

Кроме того, эта структура является *дистрибутивной*, т. е. структурные операции удовлетворяют в ней двойственным друг другу *законам дистрибутивности*

$$u \cap (v \cup w) = (u \cap v) \cup (u \cap w),$$

$$u \cup (v \cap w) = (u \cup v) \cap (u \cup w),$$

в чем читатель может убедиться.

Введем следующее определение. *Мультипликативной размерностью* $d_p(G)$ для частичного упорядочения G

называется наименьшее кардинальное число упорядочений Q_i, для которого G изоморфно подграфу произведения этих упорядочений Q.

Теорема 10.4.2. *Порядковая размерность и мультипликативная размерность частичного упорядочения G совпадают*:

$$d_0(G) = d_p(G). \tag{10.4.4}$$

Доказательство. Предположим сначала, что G имеет представление (10.4.1) в виде пересечения $k = d_0(G)$ упорядочений на его множестве вершин V. Введем k копий V_i' множества V и на каждой из них — упорядочение O_i', изоморфное O_i. Каждому $a \in V$ будет соответствовать единственный элемент a'

$$a \rightleftarrows a' = (a_i') \tag{10.4.5}$$

в произведении пространств

$$V' = \times_i V_i'. \tag{10.4.6}$$

Согласно представлению (10.4.1) мы имеем $a > b$ в G тогда и только тогда, когда $a > b$ для каждого O_i в V, следовательно, когда $a_i' > b_i'$ для каждого O_i' в V_i'. Это означает, что взаимно однозначное соответствие (10.4.5) таково, что $a > b$ в G тогда и только тогда, когда $a' > b'$ для произведения упорядочений

$$O' = \times_i O_i'. \tag{10.4.7}$$

Значит, G изоморфно подграфу произведения упорядочений O' с k множителями. Отсюда следует, что

$$d_0(G) \geqslant d_p(G).$$

Пусть теперь Q есть произведение (10.4.3) $l = d_p(G)$ упорядочений $\{Q_i\}$, которые определены на множествах V_i, имеющих своим произведением множество (10.4.2). Построим такое семейство упорядочений $\{O_i\}$ на V, что Q имеет представление (10.4.1). Для этого мы вполне упорядочим множество индексов I для упорядочений Q_i и определим каждое упорядочение O_i на V следующим образом. Положим $v > w$ для двух элементов v и w из V, если либо $v_i > w_i$, либо в случае $v_i = w_i$, $v_j > w_j$, где j есть первый индекс в I, для которого $v_j \neq w_j$. Читатель может убедиться, что O_i действительно является упорядочением на V. Чтобы показать, что

$$Q = \bigcap_i O_i, \tag{10.4.8}$$

заметим, что $v > w$ в Q может иметь место только в том случае, когда это включение выполняется для каждого упорядочения O_i, и наоборот.

Предположим, что G есть подграф в Q. Тогда (10.4.8) дает

$$G = \bigcap_i (G \cap O_i);$$

следовательно, G является пересечением l упорядочений. Отсюда следует

$$d_0(G) \leqslant d_p(G),$$

и мы получаем (10.4.4).

Из теоремы 10.4.2 следует, что можно говорить просто о размерности частичного упорядочения G и обозначать ее через $d(G)$. Приведем некоторые свойства этой размерностной функции.

Теорема 10.4.3. *Размерность произведения упорядочений Q из* (10.4.3) *с k множителями равна $d(Q) = k$.*

Доказательство. Мы уже убедились в том, что Q может быть в данном случае представлено как пересечение (10.4.8) k упорядочений. Поэтому $d(Q) \leqslant k$. Чтобы доказать, что $d(Q) = k$, достаточно установить, что Q не может быть пересечением меньшего чем k числа упорядочений на V. Для проверки этого выберем две вершины $a_i > b_i$ в множестве V_i для каждого упорядочения Q_i и построим вершины в V:

$$\alpha^{(i)} = (\ldots b_x \ldots a_i \ldots b_y \ldots),$$

$$\beta^{(i)} = (\ldots a_x \ldots b_i \ldots a_y \ldots),$$

где все компоненты $\alpha^{(i)}$, кроме a_i, равны b_x, а все компоненты $\beta^{(i)}$, кроме b_i, равны a_x. В Q

$$\beta^{(j)} > \alpha^{(i)}, \quad i \neq j,$$

а $\alpha^{(i)}$ и $\beta^{(i)}$ несравнимы.

Так как Q является пересечением упорядочений, существует некоторое упорядочение O_i на V с

$$\alpha^{(i)} > \beta^{(i)},$$

а также некоторое упорядочение O_i^* с обратным соотношением. Но ни в каком O_i не может быть

$$\alpha^{(j)} > \beta^{(j)}, \quad j \neq i,$$

так как это привело бы к ориентированному циклу

$$\alpha^{(j)} > \beta^{(i)} > \alpha^{(j)} > \beta^{(j)} > \alpha^{(i)}.$$

Поэтому для каждого i должно существовать хотя бы одно O_i в представлении в виде пересечения (10.4.8) для Q. Это завершает доказательство теоремы 10.4.3. Частным ее случаем оказывается теорема, доказанная Коммом:

Теорема 10.4.4. *Размерность структуры L всех подмножеств множества S равна мощности S.*

Доказательство. Семейство подмножеств S изоморфно произведению множеств (10.4.2), в котором компонентами являются $v_i = 0$ или $v_i = 1$.

Задачи

1. Пусть L — произведение упорядочений из двух множителей

$$L = O_1 \times O_2$$

соответственно длины α_1 и α_2. Найти максимальное число независимых элементов в L, а также явное разложение Дилворта для L в виде суммы упорядоченных множеств.

2*. Та же задача для произвольного произведения упорядочений.

Глава 11

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И СООТВЕТСТВИЯ ГАЛУА

11.1. Соответствия Галуа. Будем обозначать через P и Q два частично упорядоченных множества. Предположим, что существует отображение ρ, переводящее P в Q:

$$p \to \rho(p) \in Q, \tag{11.1.1}$$

а также отображение π, переводящее Q в P:

$$q \to \pi(q) \in P. \tag{11.1.2}$$

Эти отображения будем называть парой *соответствий Галуа* между P и Q, если выполняются следующие два условия:

1. Если $p_1 \geqslant p_2$ — два элемента из P и $q_1 \geqslant q_2$ — элементы из Q, то

$$\rho(p_1) \leqslant \rho(p_2), \quad \pi(q_1) \leqslant \pi(q_2). \tag{11.1.3}$$

2. Для любых элементов $p \in P$ и $q \in Q$

$$\pi\rho(p) \geqslant p, \quad \rho\pi(q) \geqslant q. \tag{11.1.4}$$

Если определена пара соответствий Галуа, то будем говорить, что между P и Q имеет место *связь Галуа*. Эта терминология заимствована из теории Галуа для уравнений. В ней изучается соответствие между подполями данного поля F и подгруппами группы автоморфизмов A поля F. Для каждого множества элементов $X \subseteq F$ существует подгруппа $A(X)$, состоящая из тех автоморфизмов, которые оставляют инвариантным каждый элемент из X. Обратно, для каждого подмножества[1] $Y \subset A$ существует поле $F(Y)$, состоящее из тех элементов F, которые инвариантны при автоморфизмах из Y. Можно проверить, что условия

$$A(X) \subseteq A(X_1) \text{ при } X \supset X_1,$$
$$F(Y) \subseteq F(Y_1) \text{ при } Y \supset Y_1$$

[1]) Фактически для каждой подгруппы. (*Прим. ред.*)

выполнены; кроме того,

$$F(A(X)) \supseteq X, \quad A(F(Y)) \supseteq Y,$$

так что определено соответствие Галуа между подмножествами множеств F и A.

Из многочисленных примеров соответствий Галуа упомянем следующие.

1. В векторном пространстве V каждому подмножеству A множества V отвечает множество $O(A)$, состоящее из всех векторов, ортогональных векторам из A. Нетрудно проверить, что

$$O(A) \subseteq O(B) \text{ при } A \supset B,$$
$$O(O(A)) \supseteq A,$$

так что определена связь Галуа для подмножеств V.

2. В группе G каждому подмножеству A соответствует централизатор $C(A)$. Здесь $C(A)$ состоит из всех элементов c, коммутирующих с каждым элементом a из A:

$$a \cdot c = c \cdot a.$$

3. В кольце каждому подмножеству A отвечает аннулятор $N(A)$, состоящий из элементов n, для которых $n \cdot a = 0$ для каждого $a \in A$.

Исследуем свойства соответствий Галуа. Условия (11.1.3) показывают, что соответствия Галуа обращают включение. Из свойств (11.1.3) и (11.1.4) следует, что для любого $p \in P$ должно быть одновременно

$$\rho\pi\rho(p) \geqslant \rho(p), \qquad \rho\pi\rho(p) \leqslant \rho(p).$$

Таким образом, мы получаем теорему:

Теорема 11.1.1. *Если ρ и π — соответствия Галуа, то*

$$\rho\pi\rho(p) = \rho(p), \quad \pi\rho\pi(q) = \pi(q). \tag{11.1.5}$$

Отображения $\pi\rho$ и $\rho\pi$ переводят P и Q в себя. Их можно назвать *операциями замыкания Галуа*, а образы

$$\Gamma_P(p) = \pi\rho(p), \quad \Gamma_Q(q) = \rho\pi(q) \tag{11.1.6}$$

— *замыканиями Галуа* соответственно для p и q. Читатель может проверить, что они обладают следующими свойствами:

Теорема 11.1.2. *Замыкания Галуа* (11.1.6) *имеют три свойства замыкания в P:*

1. *Если* $p_1 \geqslant p_2$, *то* $\Gamma_P(p_1) \geqslant \Gamma_P(p_2)$.
2. $\Gamma_P(p) \geqslant p$.
3. $\Gamma_P\Gamma_P(p) = \Gamma_P(p)$,

и аналогично в Q.

Следует отметить, что элементы

$$\overline{p} = \Gamma_P(p), \quad \overline{q} = \Gamma_Q(q)$$

являются *замкнутыми элементами в P и Q*:

Теорема 11.1.3. *Замкнутые элементы $\overline{p}$ и $\overline{q}$ в P и Q — это те элементы, которые являются образами элементов другого множества:*

$$\overline{p} = \pi(q), \quad \overline{q} = \rho(\pi), \tag{11.1.7}$$

и связь Галуа определяет взаимно однозначные отображения для множеств замкнутых элементов.

Доказательство. Элементы $\overline{p}$ вида (11.1.7) замкнуты согласно (11.1.5). С другой стороны, если $\overline{p}$ — замкнутый элемент, то он является образом при π:

$$\overline{p} = \pi(\rho(p)).$$

Наконец, если

$$\overline{p} = p, \quad \overline{q} = q$$

в (11.1.7), то одно из соотношений

$$\overline{p} = \pi(\overline{q}), \quad \overline{q} = \rho(\overline{p})$$

влечет за собой другое.

Пусть P_1 и Q_1 — множества замкнутых элементов соответственно в P и Q. Связь Галуа называется *совершенной в P*, если $P = P_1$, т. е. если каждое $p \in P$ замкнуто:

$$\pi\rho(p) = p.$$

Связь называется *совершенной*, если она совершенна в P и в Q. В ряде вопросов, например в теории Галуа для уравнений, важно знать когда это имеет место. Оказывается полезным следующий критерий.

Теорема 11.1.4. *Связь Галуа между P и Q совершенна в P тогда и только тогда, когда любые два различных элемента $p_1 > p_2$ имеют различные образы:*

$$\rho(p_1) < \rho(p_2).$$

Доказательство предоставляется читателю.

Рассмотрим общее построение связей Галуа. Множество P_1 замкнутых элементов является таким частично упорядоченным подмножеством множества P, что для каждого $p \in P$ существует единственный минимальный элемент $\overline{p} \in P_1$ с $\overline{p} \geqslant p$. Аналогично замкнутые элементы $\overline{q}$ образуют такое подмножество Q_1 множества Q, что для любого $q \in Q$ существует минимальный элемент $\overline{q} \in Q_1$ с $\overline{q} \geqslant q$. Между P_1 и Q_1 имеется обратный изоморфизм, т. е. взаимно однозначное отображение π

$$P_1 = \pi(Q_1), \quad Q_1 = \pi^{-1}(P_1),$$

для которого из $q_1 > q_2$ в Q_1 следует

$$\pi(q_1) < \pi(q_2)$$

в P_1, и наоборот. Обратно, если существуют такие подмножества P_1 и Q_1 в P и Q, то соответствия Галуа могут быть определены.

В большинстве приложений множества P и Q являются полными структурами. Установим, что тогда множества P_1 и Q_1 также будут полными структурами. Пусть $\{\overline{p}_i\}$ — некоторое множество замкнутых элементов. Наибольшим элементом из P, содержащимся во всех $\overline{p}_i$, будет структурное пересечение

$$d = \bigwedge \overline{p}_i.$$

Но из

$$d \leqslant \overline{p}_i, \quad \overline{d} \leqslant \overline{p}_i$$

заключаем, что

$$\overline{d} \leqslant \bigwedge \overline{p}_i = d, \quad \overline{d} = d.$$

Так как d замкнуто, структурные пересечения в P и в P_1 совпадают. Наименьшим элементом в P, содержащим все $\overline{p}_i$, является структурное объединение

$$u = \bigvee \overline{p}_i.$$

Поэтому наименьший замкнутый элемент, содержащий все $\overline{p}_i$, есть замыкание

$$\overline{u} = \overline{\bigvee \overline{p}_i} = \overline{\bigvee} \overline{p}_i.$$

Мы видим, что структурные объединения в P и в P_1, во-

вообще говоря, не совпадают. Будем называть P_1 *полной подструктурой P относительно структурного пересечения*, и аналогично для Q_1 в Q.

Полные структуры P и Q имеют максимальные и минимальные элементы:

$$m^{(P)},\ m^{(Q)},\ n^{(P)},\ n^{(Q)}.$$

Точно так же P_1 и Q_1 имеют максимальные и минимальные элементы:

$$m^{(P_1)},\ m^{(Q_1)},\ n^{(P_1)},\ n^{(Q_1)}.$$

Ясно, что

$$m^{(P)}\ \overline{m}^{(P)} = m^{(P_1)},\quad m^{(Q)}\ \overline{m}^{(Q)} = m^{(Q_1)} \qquad (11.1.8)$$

и что

$$m^{(P)} \to n^{(Q_1)},\quad m^{(Q)} \to n^{(P_1)}$$

при связи Галуа.

Обратно, пусть P и Q имеют такие полные подструктуры P_1 и Q_1 относительно структурного пересечения, что выполняется (11.1.8). Тогда P_1 и Q_1 обратно изоморфны, связь Галуа между P и Q определяется, если каждому $p \in P$ соотнести в качестве замыкания $\overline{p}$ наименьший элемент в P_1, содержащий p, и аналогично для Q. Соответствия Галуа определяются формулами

$$\rho(\overline{p}_1 \cup \overline{p}_2) = \overline{\overline{q}_1 \cup \overline{q}_2},$$
$$\rho(\overline{\overline{p}_1 \cup \overline{p}_2}) = \overline{q}_1 \cap \overline{q}_2$$

и аналогично для π.

Эти рассуждения справедливы, в частности, при $P = Q$, т. е. для связей Галуа в полной структуре P. Могут представиться различные частные случаи. Может быть $P_1 = Q_1$, и соответствие Галуа будет *двойственным себе*; это предполагает, что P_1 имеет *обратный*, или *двойственный автоморфизм*, т. е. взаимно однозначное отображение, переводящее структурные объединения в структурные пересечения и наоборот. Такая связь Галуа будет *инволютивной*, если двойственный автоморфизм π есть *инволюция*, т. е. такое отображение порядка 2, что

$$\overline{p} \to \overline{q} = \pi(\overline{p}), \quad \overline{q} \to \pi(\overline{q}) = \overline{p}.$$

Наконец, пусть P_1 есть *структура с дополнениями*, так что каждое $p_1 \in P_1$ имеет хотя бы одно *дополнение* p_1', определяемое формулами

$$p_1 \cup p_1' = m_1, \quad p_1 \cap p_1' = n_1.$$

Полярность, или *ортогональность*, есть инволютивная связь Галуа, которая переводит каждое $p_1 \in P_1$ в его особое *полярное*, или *ортогональное*, *дополнение* p_1^*, обладающее следующими свойствами:

$$p_1 \to p_1^* = \pi(p_1), \quad p_1^{**} = p_1,$$

$$p_1 \cup p_1^* = m_1, \quad p_1 \cap p_1^* = n_1.$$

11.2. Связи Галуа для бинарных отношений. Проиллюстрируем теорию связей Галуа, применяя ее к бинарным отношениям. Пусть V и V' — два множества, которые могут и совпадать. Как известно, бинарное отношение R есть соотношение

$$aRa', \tag{11.2.1}$$

которое выполняется для некоторых пар элементов (a, a') в произведении $V \times V'$. Обозначим через $R(a)$ подмножество множества V', состоящее из всех вершин a', для которых выполняется соотношение (11.2.1). Обратное отношение R^* определяем, как и раньше, полагая

$$a'R^*a,$$

если выполняется (11.2.1). Множество $R^*(a')$ состоит из всех $a \in V$, удовлетворяющих (11.2.1).

Отношение R ставит в соответствие каждому множеству A в V два производных множества

$$\widehat{R}(A) = \bigcap_{a \in A} R(a), \quad \check{R}(A) = \bigcup_{a \in A} R(a), \tag{11.2.2}$$

содержащихся в V'. Множество $\widehat{R}(A)$ состоит из всех $a' \in V'$, для которых (11.2.1) выполняется при каждом $a \in A$; множество $\check{R}(A)$ состоит из всех a', для которых (11.2.1) выполняется хотя бы при некотором $a \in A$. Мы проведем исследование только множеств $\widehat{R}(A)$. Определение (11.2.2) показывает, что они образуют полное кольцо пересечений множеств. Минимальное множество этого кольца есть $\widehat{R}(V)$, состоящее из всех таких a', что (11.2.1) выполняется при каждом a. Максимальное множество есть

$$\widehat{R}(\varnothing) = V'.$$

Для обратного отношения получается аналогичная картина. Каждому подмножеству A' множества V' отвечает множество $\widehat{R}^*(A')$, состоящее из всех $a \in V'$, для которых (11.2.1) выполняется при каждом $a' \in A'$. Как и в (11.2.2), мы имеем

$$\widehat{R}^*(A') = \bigcap_{a' \in A'} R^*(a'). \qquad (11.2.3)$$

Эти множества образуют полное кольцо пересечений с $\widehat{R}^*(V')$ в качестве минимального элемента.

Из (11.2.2) и (11.2.3) следует

$$\widehat{R}(A_1) \subseteq \widehat{R}(A_2), \quad A_1 \supseteq A_2,$$

и аналогично для $\widehat{R}^*$; кроме того,

$$\widehat{R}^*\widehat{R}(A) \supseteq A, \quad \widehat{R}\widehat{R}^*(A') \supseteq A',$$

так что можно утверждать следующее:

Теорема 11.2.1. *Каждое бинарное отношение R и его обращение R^* определяют соответствия Галуа*

$$A \to \widehat{R}(A), \quad A' \to \widehat{R}^*(A') \qquad (11.2.4)$$

для подмножеств множеств V и V'.

Из теории связей Галуа, в частности, следует

Теорема 11.2.2. *Для бинарного отношения R и его обращения R^* мы имеем*

$$\widehat{R}\widehat{R}^*\widehat{R}(A) = \widehat{R}(A), \quad \widehat{R}^*\widehat{R}\widehat{R}^*(A') = \widehat{R}^*(A'). \quad (11.2.5)$$

Замыканиями (11.1.6) множеств A и A' в этом случае будут

$$\Gamma(A) = \widehat{R}^*\widehat{R}(A), \quad \Gamma^*(A') = \widehat{R}\widehat{R}^*(A').$$

Важно отметить, что теорема 11.2.1 допускает обращение:

Теорема 11.2.3. *Любая связь Галуа* Γ *между структурами* P *и* Q *всех подмножеств множеств* V *и* V' *получается из отображений* (11.2.4) *для подходящего отношения* R.

Доказательство. Пусть P_1 и Q_1 — подструктуры замкнутых множеств в Γ со связывающим их двойственным изоморфизмом α: .

$$\overline{A} \to \alpha(\overline{A}), \quad \overline{A'} \to \alpha^{-1}(\overline{A'}).$$

Введем между V и V' отношения

$$aRa', \quad a'R^*a, \tag{11.2.6}$$

которые выполняются соответственно при

$$a' \in \alpha(\overline{a}), \quad a \in \alpha^{-1}(\overline{a'}). \tag{11.2.7}$$

Первое из написанных условий дает нам

$$\overline{a'} \subset \alpha(\overline{a}),$$

и, применяя α^{-1}, мы получаем

$$\alpha^{-1}(\overline{a'}) \supset \overline{a} \supset a,$$

так что R^* есть обращение R. Кроме того,

$$\hat{R}(A) = \bigcap_{a \in A} \hat{R}(\overline{a}) = \bigcap_{a \in A} \alpha(\overline{a}),$$

и при обратном изоморфизме мы получим

$$\hat{R}(A) = \alpha(\overline{\bigvee a}) = \alpha(\overline{A}).$$

Это показывает, что замкнутые множества для Γ те же самые, что для R и R^*.

Будем далее предполагать, что R есть бинарное отношение на множестве V. Для того чтобы R было двойственным себе, т. е. для того, чтобы структуры замкнутых множеств совпадали, необходимо и достаточно, чтобы при каждом a было

$$R(a) = \bigcap_{b \in B_a^*} R^*(b),$$

$$R^*(a) = \bigcap_{b \in \Gamma_a} R(b),$$

для подходящих множеств B_a и B_a^*. Это свойство можно выразить в следующей форме:

Теорема 11.2.4. *Для того чтобы отношение R определяло двойственную себе связь Галуа, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $a \in V$ существовали такие множества B_a и B_a^*, что соотношения*

$$aRx, \quad aR^*y$$

выполняются тогда и только тогда, когда

$$B_a^*R^*x, \quad B_aRy.$$

Ввиду сказанного такие отношения можно также называть *слабо симметрическими*.

Пусть теперь $R = R^*$ — симметрическое отношение. В этом случае (11.2.5) сводится к

$$\widehat{R}\widehat{R}\widehat{R}(A) = \widehat{R}(A).$$

Это означает, что соответствие между замкнутыми множествами имеет порядок 2 и, следовательно, является инволюцией. Обратно, каждое инволютивное соответствие Галуа между подмножествами V может быть определено симметрическим отношением, так как в этом случае условия (11.2.7) сводятся к одному условию, и соотношения (11.2.6) совпадают.

Теорема 11.2.5. *Симметрическое отношение определяет инволютивную связь Галуа в семействе всех подмножеств основного множества V; обратно, каждая такая связь Галуа получается из симметрического отношения.*

Отношение R рефлексивно, если aRa для каждого a, и антирефлексивно, если это не имеет места ни для какого a. Обратное отношение R^* рефлексивно или антирефлексивно вместе с R. Если R антирефлексивно, то $R(a)$ не содержит a; следовательно,

$$a \cap \widehat{R}(A) = \varnothing$$

для любого множества A и, в частности,

$$\widehat{R}(A) \cap \widehat{R}\widehat{R}(A) = \varnothing.$$

Для соответствия Галуа, определяемого отношением R, из этого последнего свойства замкнутых множеств следует, что для образов при двойственных изоморфизмах должно быть

$$\hat{R}^*\hat{R}(A) \cup \hat{R}^*\hat{R}\hat{R}(A) = V$$

в Q_1. В P_1 мы аналогично получаем

$$\hat{R}\hat{R}^*(A) \cup \hat{R}\hat{R}^*\hat{R}^*(A) = V.$$

Предположим теперь, что отношение R симметрическое, и, следовательно, для замкнутых множеств мы имеем $P_1 = Q_1$. Установленные результаты сводятся к равенствам

$$\hat{R}(A) \cap \hat{R}\hat{R}(A) = \varnothing, \quad \hat{R}(A) \cup \hat{R}\hat{R}(A) = V.$$

Таким образом, структура замкнутых множеств будет структурой с дополнениями, и R определяет в ней полярность. Как и выше, из (11.2.6) и (11.2.7) легко получить обратное. Тем самым установлена

Теорема 11.2.6. *Симметрическое антирефлексивное отношение определяет связь Галуа с полярностью для семейства всех подмножеств V; обратно, любая такая полярность получается из подходящего симметрического антирефлексивного отношения в V.*

Из различных отношений, которые можно получить при помощи связей Галуа, упомянем *замкнутые отношения*, при которых

$$\hat{R}^*(\hat{R}(A)) = A. \tag{11.2.8}$$

Соответствующие множества $\check{R}(A)$, определенные в (11.2.2) для отношения R, имеют свойства, аналогичные свойствам, полученным для $\hat{R}(A)$. Обозначим здесь через $S = \bar{R}$ дополнительное отношение для R, т. е. такое отношение, что

$$aSa'$$

выполняется тогда и только тогда, когда (11.2.1) не выполнено. В этом случае можно проверить, что для S соответствующими производными множествами являются

$$\hat{S}(A) = C'(\check{R}(A)), \; \check{S}(A) = C'(\hat{R}(A)),$$

где C' обозначает дополнительное множество в V'. Для обращения S имеют место аналогичные формулы.

Задача

1. Исследовать свойства замкнутых отношений, определяемых в (11.2.8), в частности, для конечных множеств.

11.3. Отношения чередующегося произведения. *Произведение двух отношений* R и S определяется так же, как и произведение графов. Именно, отношение

$$aRSa''$$

выполняется тогда и только тогда, когда существует такая вершина $a' \in V'$, что

$$aRa',\ a'Sa'',$$

другими словами, существует маршрут (a, a'), (a', a'') длины 2 от a к a''. Произведение нескольких отношений определяется аналогично, так что

$$R_1R_2 \ldots R_k[A] = \breve{R}_k \ldots \breve{R}_1(A)$$

есть множество тех вершин, которые могут быть достигнуты от вершин из A маршрутами из k ребер, лежащих по порядку в $R_1, \ldots, R_k$. Если все R_i равны $R_i = R$, то мы получаем множества $R^n[A]$, определяемые посредством *степени отношения* R^n.

Рассмотрим различные отношения, характеризуемые свойствами произведений. Простейшим из них является *транзитивное отношение* в множестве V, определяемое условием

$$R^2 \subseteq R. \tag{11.3.1}$$

Обозначим через E *тождественное отношение* $a = b$ в V. Тогда *рефлексивные отношения* определяются условием

$$R \cup E = R, \tag{11.3.2}$$

а *антирефлексивные отношения* — условием

$$R \cap E = 0,$$

где 0 есть *нулевое отношение*, не выполняющееся ни для каких пар вершин. Отношение будет *ациклическим*, если

$$R^n \cap E = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11.3.3}$$

Таким образом, *строгое частичное упорядочение* определяется условиями (11.3.1) и (11.3.3), а *отношение экви-*

валентности характеризуется условиями $R = R^*$ и (11.3.1), (11.3.2). *Транзитивное замыкание* отношения R есть объединение

$$\Gamma(R) = E \cup R \cup R^2 \cup \ldots, \qquad (11.3.4)$$

при котором

$$a\Gamma(R)b$$

выполняется тогда и только тогда, когда существует ориентированная цепь из R-ребер от a к b.

Пусть R — отношение между элементами V и V', а S — отношение между элементами V' и V. Произведения

$$RS, \qquad SR \qquad (11.3.5)$$

являются соответственно отношениями в V и в V'. Для их транзитивных замыканий

$$\Gamma(RS), \qquad \Gamma(SR)$$

будет выполнено

$$a\Gamma(RS)b, \qquad a'\Gamma(SR)b',$$

если существует четная цепь от a к b, состоящая поочередно из ребер в R и в S, соответственно четная цепь от a' к b' из S- и R-ребер.

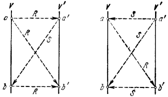


Рис. 11.3.1.

Два отношения R и S будут называться *взаимно транзитивными*, если

$$RSR \subseteq R, \qquad SRS \subseteq S. \qquad (11.3.6)$$

Это — условия четырехугольника для ребер из R и S (рис. 11.3.1). Если существуют ребра

$$E_1 = (a,\ a') < R,\ E_3 = (b,\ b') < R,\ E_2 = (a',\ b) < S,$$

то существует и ребро $E_4 = (a, b')$ в R, и аналогично для S. Если отношения R и S взаимно транзитивны, то отношения R^* и S^* также взаимно транзитивны. Каждое из условий (11.3.6) обеспечивает транзитивность обоих произведений отношений (11.3.5). Если $V = V'$ и $R = S$, то условия (11.3.6) превращаются в

$$R^3 \subseteq R.$$

Это условие *слабой транзитивности*, по-видимому, является естественной заменой транзитивности в двудольных графах. Такие отношения изучал Рэйнич.

Назовем отношение *самотранзитивным*, если R и R^* взаимно транзитивны. В этом случае условия (11.3.6) также сводятся к одному:

$$RR^*R \supseteq R. \qquad (11.3.7)$$

Такие самотранзитивные отношения изучали, в частности, Жакотен-Дюбрейль и Риге; последний обозначал их термином *«дифункциональные отношения»*. Если выполнено (11.3.7), то отношения R^*R и RR^* оба транзитивны и симметричны, и будет

$$aRR^*a,$$

если существует R-ребро от каждого a к каждому a'. Сказанное приводит к основному результату для самотранзитивных отношений (ср. с п. 8.5):

Теорема 11.3.1. *Все самотранзитивные отношения получаются следующей конструкцией: рассматриваются такие разбиения основных множеств V и V':*

$$V = \bigcup B_i, \quad V' = \bigcup B_i',$$

что кардинальное число классов B_i и B_i' одно и то же, и в каждой паре соответствующих классов B_i и B_i' каждая вершина $b_i \in B_i$ соединяется R-ребром с каждой $b_i' \in B_i'$, и наоборот.

Таким образом, эти отношения можно рассматривать как соответствия между двумя отношениями эквивалентности.

11.4. Отношения Феррерса. Пусть R и S — отношения между V и V'. Построим *чередующиеся произведения*

$$\Delta(R, S) = (R \cap \overline{S}) \cdot (S^* \cap \overline{R}^*),$$
$$\Delta(S^*, R^*) = (S^* \cap \overline{R}^*) \cdot (R \cap \overline{S}), \tag{11.4.1}$$

где, как и прежде, $\overline{R}$ есть дополнительное отношение для R. Очевидно, $\Delta(R, S)$ есть отношение в V, а $\Delta(S^*, R^*)$ — отношение в V'. Кроме того,

$$a \Delta(R, S) b$$

выполняется тогда и только тогда, когда существует такое $a' \in V'$, что

$$a (R \cap \overline{S}) a', \quad a' (S^* \cap \overline{R}^*) b,$$

т. е. когда существуют ребро (a, a') из R, не принадлежащее S, и ребро (a', b) из S^*, не принадлежащее R^*.

Транзитивное замыкание $\Gamma(\Delta(R, S))$ состоит из вершин в V, которые могут быть достигнуты из вершины a четными чередующимися цепями с ребрами, принадлежащими двум отношениям:

$$R \cap \overline{S}, \; S^* \cap \overline{R}^* = (S \cap \overline{R})^*. \tag{11.4.2}$$

Вершины $a' \in V'$, которые могут быть достигнуты из a нечетными чередующимися цепями такого рода, удовлетворяют соотношению

$$a\Gamma(R, S) \cdot R \cap \overline{S} a'.$$

Если отношения (11.4.2) взаимно транзитивны, то выполняются условия:

$$(R \cap \overline{S}) \cdot (S \cap \overline{R})^* \cdot (R \cap \overline{S}) \subset R \cap \overline{S},$$
$$(S \cap \overline{R})^* \cdot (R \cap \overline{S}) \cdot (S \cap \overline{R})^* \subset (S \cap R)^*. \tag{11.4.3}$$

Представляет некоторый интерес особый случай $S = \overline{R}$. Условия (11.4.3) сводятся к

$$R\overline{R}^*R \subset R, \quad \overline{R}^*R\overline{R}^* \subset \overline{R}^*, \tag{11.4.4}$$

т. е. отношения R и $\overline{R}^*$ взаимно транзитивны. Отношения с этим особым свойством известны под названием *отношений Феррерса;* их изучали Винер и Риге. Читатель может проверить, что если одно из отношений

$$R,\ \overline{R},\ R^*,\ \overline{R}^*$$

есть отношение Феррерса, то таковыми же являются и остальные три, и условия (11.4.4) сводятся к одному условию, если только R и R^* определены на целых множествах V и V'. Эти отношения можно охарактеризовать другим способом:

Теорема 11.4.1. *Отношение R является отношением Феррерса тогда и только тогда, когда соотнесенные множества $R(a)$ образуют упорядоченное по включению семейство.*

Доказательство. Если R есть отношение Феррерса, для которого

$$aRa',\ b\overline{R}a',$$

то

$$a' \in R(a),\ a' \notin R(b), \tag{11.4.5}$$

и условие (11.4.4) показывает, что

$$R(a) \supset R(b). \tag{11.4.6}$$

Обратно, если множества $R(a)$ образуют упорядоченное по включению семейство и выполняется (11.4.5), то выполнены и (11.4.6), (11.4.4).

Отношения Феррерса появились впервые в связи с аддитивными разбиениями целых чисел. Предположим, что для некоторого целого N мы имеем

$$N = \sum r_i, \quad r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_m.$$

Это разбиение может быть представлено при помощи матрицы инциденций, или *диаграммы Феррерса*

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & r_1^* & r_2^* & \cdots & & & \\
\hline
r_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
r_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & & & & & &
\end{array}$$

где в i-й строке первые r_i элементов равны 1, а остальные 0. Тогда суммы по столбцам также образуют невозрастающую последовательность

$$r_1^* \geqslant r_2^* \geqslant \ldots,$$

определяющую двойственное, или обратное разбиение

$$N = \sum r_i^*.$$

Кроме уже приведенных условий изучались также многие другие формальные условия. Говорят, что два отношения *коммутируют*, если

$$R \cdot S = S \cdot R.$$

Это означает, что если

$$aRb,\ bSc,$$

то существует некоторое b', для которого

$$aSb',\ b'Rc,$$

и наоборот. *Слабая коммутативность* определяется *условием шестиугольника* Дюбрейля

$$RSR = SRS.$$

Более топологический характер носит T_0-условие: из $R(a) = R(b)$ следует $a = b$. Мы не будем вдаваться в дальнейшие подробности.

Задачи

1. Доказать, что если R является отношением Ферререса, то

$$R\bar{R}^*R$$

обладает тем же свойством.

2. Пусть R и S — отношения эквивалентности; когда будет эквивалентностью произведение $R \cdot S$?

3. Пусть G есть группа с подгруппами A и B. Разложения на смежные классы

$$G = \bigcup gA = \bigcup g'B$$

определяют отношения эквивалентности в G. Показать, что они коммутируют тогда и только тогда, когда A и B — коммутирующие подгруппы: $AB = BA$.

4. Показать, что отношения эквивалентности, определяемые левым и правым разложениями на смежные классы

$$G = \bigcup gA = \bigcup Ag_1,$$

всегда коммутируют.

Глава 12

СВЯЗЫВАЮЩИЕ ЦЕПИ

12.1. Теорема о секущих цепях. Некоторые из предыдущих результатов опирались на теоремы о паросочетаниях, установленные в главе 7. Они относились к существованию семейств непересекающихся ребер, соединяющих два множества вершин в двудольном графе. Обобщим эти результаты, заменяя ребра цепями, связывающими два непересекающихся множества вершин в графе. Чтобы получить общий метод для доказательства двух разных теорем, выведем сначала одну вспомогательную *теорему о секущих цепях.*

Пусть даны t непересекающихся ориентированных простых цепей графа

$$A_i = E_{i1},\quad E_{i2},\ \ldots,\ E_{in_i},\qquad i = 1, 2, \ldots, t, \quad (12.1.1)$$

где

$$E_{ij} = (a_{i,j-1}, a_{ij}),\qquad j = 1, 2, \ldots, n_i, \qquad (12.1.2)$$

— ребра, а

$$a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{in_i} \qquad (12.1.3)$$

— вершины, лежащие на A^i. Этим простым цепям (12.1.1) соотнесем такое семейство ориентированных *секущих ребер*

$$C_l = (c_l, c_{l+1}),\qquad l = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad (12.1.4)$$

что для каждого секущего ребра концы c_l и c_{l+1} совпадают с какими-то вершинами из (12.1.3), за исключением c_0 и c_m, которые не лежат ни на какой из простых цепей A_i. Концы ребра C_l могут лежать и на одном и том же A_i.

Семейство секущих ребер (12.1.4) будем называть *чередующимися*, если оно обладает следующими свойствами. В вершине a_{ij} будет не более одного выходящего и одного входящего секущего ребра. Кроме того, на любой данной простой цепи A_i эти секущие ребра образуют упорядоченную последовательность поочередно выходящих и входящих ребер. В случае, если в некоторой вершине имеются ребра обоих типов, то входящее ребро учитывается раньше, чем выходящее. Первое секущее ребро, если оно существует, должно быть выходящим; следовательно, оно единственное. Заметим также, что, стягивая в случае надобности некоторые участки простой цепи A_i в однократные ребра E_{ij}, можно предполагать, что в каждой промежуточной вершине a_{ij} существует по крайней мере одно секущее ребро (рис. 12.1.1).

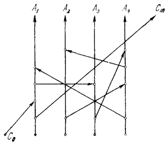


Рис. 12.1.1.

Теорема о секущих цепях утверждает следующее.

Теорема 12.1.1. *Пусть дано семейство $\{A_i\}$ из t непересекающихся простых цепей* (12.1.1) *и чередующееся семейство* (12.1.4) *секущих ребер $\{C_l\}$. Из принадлежащих $\{A_i\}$ и $\{C_l\}$ ребер можно построить $t+1$ непересекающихся простых цепей $\{A_i'\}$, связывающих множество начальных вершин*

$$c_0,\ a_{i0},\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,t, \qquad (12.1.5)$$

с множеством конечных вершин

$$c_m,\ a_{in_i},\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,t. \qquad (12.1.6)$$

Доказательство. Из каждой простой цепи A_i получается новая цепь A_i' при помощи следующего построения. Положим $A_i' = A_i$, если на A_i нет секущих ребер. В противном случае отправляемся от a_{i0} по A_i до первого ее секущего ребра C. По предположению ребро C — выходящее; продолжаем построение A_i' вдоль C к некоторой вершине a_{kl} на простой цепи A_k. Затем идем по A_k до следующего секущего ребра C', которое также должно быть выходящим, и т. д. К этим t цепям A_i' можно добавить новую цепь A_0' того же типа, начиная построение ее от c_0 вдоль секущего ребра C_0. Эти $t+1$ цепей $\{A_i'\}$ можно называть *секущими цепями*, определяемыми семействами $\{A_i\}$ и $\{C_j\}$.

Остается показать, что секущие цепи обладают указанными в теореме свойствами. В каждой вершине a_{ij}, включая вершины (12.1.6), существует только одно ребро, через которое секущая цепь может входить. Это очевидно для вершин, в которых нет входящих секущих ребер. В вершине a_{ij} с входящим секущим ребром не может быть входящим ребро E_{ij} из A_i, имеющее своим концом a_{ij}, так как предыдущее секущее ребро в $a_{i,j-1}$ является, по предположению, выходящим. Отсюда следует, во-первых, что A_i' не могут иметь циклических участков; следовательно, они будут простыми цепями; во-вторых, это построение может закончиться только тогда, когда мы придем к одной из вершин (12.1.6); в-третьих, ни в какой вершине a_{ij} не может быть более одной секущей цепи A_i'; следовательно, все они непересекающиеся.

Продвигаясь от вершины a_{ij} в обратном направлении по единственному возможному входящему ребру для простой цепи A_i', мы в конце концов придем к одной из вершин (12.1.5). Отсюда следует, что для любой вершины a_{ij} существует единственная проходящая через нее секущая цепь. Следует отметить также, что теми ребрами из семейств $\{A_i\}$ и $\{C_i\}$, которые не участвуют в секущих цепях, будут только участки E_{ij} из (12.1.2), связывающие вершину $a_{i,j-1}$ (с выходящим секущим ребром) со следующей вершиной a_{ij} (с входящим секущим ребром).

Теорема о секущих цепях, очевидно, остается в силе и в том случае, когда некоторые из вершин в (12.1.5) совпадают, аналогичное справедливо и для вершин (12.1.6), с тем единственным изменением в формулировке, что простые цепи $\{A_i\}$, а также $\{A_i'\}$ могут иметь общие концы. Например, множества (12.1.5) и (12.1.6) могут состоять из одной вершины каждое.

Теорема о секущих цепях в слегка измененной форме верна также для семейства простых цепей $\{A_i\}$, относительно которых предполагается только, что они непересекающиеся по ребрам. В этом случае секущее ребро C_l в (12.1.4) будет соединять пару вершин, лежащих на простых цепях A_i и A_j, но эти простые цепи не будут однозначно определены концами C_l, как выше, так как через одну вершину может проходить несколько цепей A_i. Поэтому мы предполагаем, что секущие ребра *размечены по простым цепям*, т. е.

$$C_l = (c_l, c_{l+1}; A_i, A_j), \tag{12.1.7}$$

так что даны не только концы и направление C_l, как в (12.1.4), но указано также, какие простые цепи A_i и A_j считаются соединенными. Такое секущее ребро может оказаться петлей с $c_l = c_{l+1}$, но тогда в (12.1.7) предполагается $A_i \neq A_j$. Как и выше, вершины c_l и c_{l+1} из (12.1.7) будут лежать соответственно на A_i и A_j, однако теперь c_0 может не лежать ни на какой простой цепи A_i, а если лежит на A_i, то совпадает с a_{i0}; точно так же c_m либо не лежит ни на какой простой цепи A_i, либо совпадает с a_{in_i}.

Семейство секущих ребер (12.1.7) называется *чередующимся*, если в каждой вершине a_{ij} на простой цепи A_i существует не более одного входящего и одного выходящего секущего ребра, и они чередуются на A_i, причем первое ребро является выходящим. Описанный выше метод можно теперь использовать для построения семейства $t+1$ непересекающихся по ребрам *секущих цепей* $\{A_i'\}$, связывающих начальные вершины (12.1.5) с конечными вершинами (12.1.6). Когда при этом построении мы проходим по секущему ребру C_l в (12.1.7), размечающие простые цепи A_i и A_j указывают, от какой цепи мы начинаем следующий шаг. Как и раньше, в любой вершине a_{ij}, рассматриваемой как вершина на A_i, возможно только одно входящее ребро. Заметим, что в этом случае цепь A_i' может проходить через одну и ту же вершину a_{ij} несколько раз, но каждый раз эта вершина считается принадлежащей новой простой цепи A_i. Семейство $\{A_i'\}$ можно свести к $t+1$ непересекающимся по ребрам простым цепям, опуская циклические участки.

12.2. Вершинное разделение. Пусть в неориентированном графе G даны два непересекающихся подмножества A и B множества вершин V. Простую цепь (цепь)

$$P(a, b), \ a \in A, \ b \in B, \qquad (12.2.1)$$

будем называть *связывающей простой цепью* (связывающей цепью) для A и B. Множество вершин

$$S = \{s_i\} \qquad (12.2.2)$$

называется *разделяющим множеством* для A и B, если каждая связывающая простая цепь должна проходить хотя бы через одну вершину из S. Заметим, что каждое разделяющее множество содержит минимальное разделяющее множество. Множества A и B называются *σ-вершинно разделенными*, если существует конечное разделяющее множество (12.2.2) с минимальным числом σ вершин. Докажем следующую *теорему о вершинном разделении*, принадлежащую Менгеру.

Теорема 12.2.1. *Для двух σ-вершинно разделенных множеств A и B в неориентированном графе G существует семейство $\{A_i\}$ из σ непересекающихся связывающих простых цепей.*

Доказательство. Очевидно, σ есть максимальное число простых цепей в таком семействе $\{A_i\}$. Можно предполагать, что $\sigma \geq 1$, так что существует хотя бы одна связывающая простая цепь (12.2.1). Чтобы доказать теорему, достаточно показать, что если $\{A_i\}$ — семейство из $t < \sigma$ непересекающихся связывающих простых цепей, то можно построить другое такое семейство $\{A_i'\}$ с $t+1$ элементами.

Применим к данному семейству $\{A_i\}$ обозначения из п. 12.1, считая, что каждое A_i ориентировано от A к B. Можно предполагать, что

$$a_{i0} \in A, \quad a_{in_i} \in B,$$

и никакие промежуточные вершины не принадлежат этим множествам. *Возвращающийся секущий маршрут* для простых цепей $\{A_i\}$ определяется следующим образом. Начинаем маршрут с некоторого ребра

$$C_0 = (c_0, c_1), \ c_0 \in A, \ c_1 \notin A,$$

не принадлежащего никакой простой цепи A_i. Такое ребро существует, так как t вершин a_{i0} не могут составлять разделяющее множество. От c_1 продолжаем маршрут, пока не попадем в вершину a_{ij} на некоторой A_i. От a_{ij} идем в обратном направлении (к A) по A_i до некоторой вершины a_{ik}, $k<j$. Затем следуем от a_{ik} по участку, состоящему из ребер вне $\{A_i\}$, до некоторой другой вершины a_{rs} на A_r, и т. д.

Вершину назовем *достижимой* из A, если она лежит на некотором таком возвращающемся секущем маршруте. Первым шагом в доказательстве теоремы 12.2.1 будет:

Лемма. *В множестве B существуют достижимые вершины.*

Доказательство. Если бы это было не так, то на каждой A_i нашлась бы такая вершина $a_i \neq a_{in_i}$, что a_i достижима, а никакая вершина за a_i уже не достижима. Снова t вершин $\{a_i\}$ не могут образовывать разделяющее множество, и существует связывающая простая цепь P, не проходящая через эти вершины. Если P не содержит никаких вершин простых цепей $\{A_i\}$, то она является искомой связывающей простой цепью. Предположим, что p — первая вершина на P, лежащая в B или за a_i на некоторой A_i. Обозначим через p' вершину, предшествующую p на P и лежащую в A или на некоторой простой цепи A_j, причем p' не находится за a_j. Так как вершина a_j достижима, вершина p' также достижима. Если пройти по $P(p', p)$, то получим, что p достижима, а это противоречит ее определению.

Обозначим теперь через Q некоторый возвращающийся секущий маршрут, связывающий A и B. Если бы какие-нибудь ребра появлялись более одного раза, то соответствующие циклические участки маршрута Q можно было бы исключить; следовательно, Q можно считать цепью. Она складывается поочередно из участков C_k, состоящих из ребер простых цепей A_i и связывающих две вершины таких простых цепей, и из возвращающихся участков цепей A_i. Ориентируем *секущие цепи* C_k в направлении по Q от A к B.

Можно проделать ряд других редукций цепи Q, уменьшающих ее длину. Если $g_0 \in A$ и $g_m \in B$ — ее концевые точки, то можно считать, что никакие ее промежуточные вершины не принадлежат этим множествам. Можно также предполагать, что две секущих цепи C_k и C_l не имеют общих вершин вне простых цепей A_i, так как иначе можно было бы удалить из Q циклические участки.

Предположим далее, что на некоторой простой цепи A_i имеются два различных участка

$$A_i(g_k, g_{k+1}), \quad A_i(g_l, g_{l+1}), \tag{12.2.3}$$

лежащих на Q в указанном порядке. Если бы g_{l+1} было ближе к A, чем g_k, то можно было бы укоротить Q, заменяя участок от g_k до g_{l+1} на $A_i(g_k, g_{l+1})$. Поэтому можно считать, что на каждой A_i общие с Q участки (12.2.3) располагаются в возрастающем порядке и любые два последовательных участка имеют не более одной общей вершины. Отсюда следует, что на каждой A_i любая вершина может иметь не более одной входящей и одной выходящей секущей цепи. Цепи обоих видов могут быть только в общих концах двух последовательных участков (12.2.3). Построение Q показывает, что любой входящей секущей цепи на A_i должна предшествовать выходящая цепь. Таким образом, секущие цепи C_k удовлетворяют условиям для чередующегося семейства секущих ребер с простыми цепями A_i. Из теоремы о секущих цепях следует, что существует $t+1$ непересекающихся связывающих цепей $\{A_i'\}$ между A и B. Это завершает доказательство теоремы Менгера.

Эту теорему можно видоизменять различным образом. Можно полагать, что

$$A = a,\ B = b$$

— одноэлементные множества, не соединенные ребром, и σ — наименьшее число разделяющих вершин, отличных от a и b. Тогда существует σ цепей $\{A_i\}$, имеющих общими только вершины a и b. Теорема применима также к ориентированным графам. Если σ — минимальное число разделяющих вершин для ориентированных цепей от A к B, то существует σ непересекающихся ориентированных цепей между этими множествами.

12.3. Реберное разделение. Существует аналог теоремы о вершинном разделении — *теорема о реберном разделении*. Пусть, как и раньше, A и B — два непересекающихся множества вершин в неориентированном графе G. Будем говорить, что семейство ребер

$$T = \{E_i\} \tag{12.3.1}$$

образует *разделяющее множество ребер* для A и B, если каждая связывающая цепь между этими множествами должна проходить через какое-нибудь ребро из T. Очевидно, можно считать, что никакое E_i не лежит в A или в B. Каждое резделяющее множество ребер содержит минимальное такое множество. Любое множество S, содержащее один конец каждого ребра из разделяющего семейства ребер, является разделяющим множеством вершин; любое семейство ребер, которое содержит все ребра, отходящие от разделяющего множества вершин, является разделяющим множеством ребер.

Назовем A и B *τ-реберно разделенными,* если существует конечное разделяющее семейство ребер (12.3.1) с минимальным числом τ ребер. Если A и B σ-вершинно разделенные, то, согласно предыдущему замечанию, $\tau \geqslant \sigma$. Теорема о реберном разделении утверждает следующее:

Теорема 12.3.1. *Если A и B — два τ-реберно разделенных множества в неориентированном графе G, то существует семейство из τ непересекающихся по ребрам простых цепей $\{A_i\}$, связывающих A и B.*

Доказательство. Действуем так же, как при доказательстве теоремы 12.2.1. Можно считать, что $\tau \geqslant 1$. Достаточно показать, что если $\{A_i\}$ есть семейство из $t < \tau$ непересекающихся по ребрам связывающих простых цепей, то можно построить другое такое семейство $\{A_i'\}$ из $t+1$ простых цепей.

Воспользуемся обозначениями п. 12.1. Будем считать, что каждое A_i ориентировано от A к B и только концевые точки принадлежат этим множествам. Определение *возвращающегося секущего маршрута* требует более тонких по сравнению с предыдущим понятий. Так как t начальных ребер простых цепей $\{A_i\}$ не могут составлять разделяющего семейства ребер, существует связывающая цепь с отличным от них начальным ребром. Будем, начиная с этого ребра, строить маршрут C_0, не содержащий ребер из всех A_i, пока не достигнем некоторой вершины a_{ij}. В данном случае она не обязательно будет первой такой вершиной. В a_{ij} может быть несколько простых цепей A_k, но мы выберем одну A_i и включим ее в разметку маршрута C_0. На следующем шаге пойдем по простой цепи A_i в обратном направлении до вершины a_{ik},

$k < j$. Из a_{ih} строим другой маршрут

$$C_1(a_{ih}, a_{lm}; A_i, A_l), \qquad (12.3.2)$$

не имеющий ребер ни из каких простых цепей, и указываем простые цепи A_i и A_l, которые он связывает. Продолжая такое построение, мы получим *возвращающийся секущий маршрут*. Любая вершина такого маршрута *достижима* из A, и любое ребро в ней *проходное*. Как и выше, докажем лемму.

Лемма. *В содержит достижимые вершины.*

Доказательство. Если бы это было не так, то на каждой простой цепи A_i нашлось бы такое проходное ребро

$$E^{(i)} = (a_i, b_i), \qquad a_i > b_i,$$

что $E^{(i)}$ — проходное от a_i к b_i и никакое ребро на A_i за $E^{(i)}$ не является проходным. Так как t ребер $E^{(i)}$ не могут составлять разделяющего семейства, существует связывающая цепь P, не содержащая никакого $E^{(i)}$. На P найдется первая вершина p, лежащая в B или на некоторой A_i за a_i, и вершина p', предшествующая p и лежащая в A или на некоторой простой цепи A_j не за соответствующим a_j. Так как вершина p' достижима, вершина p также должна быть достижимой, так что некоторое ребро в A_i за $E^{(i)}$ оказывается проходным.

Оставшаяся часть аналогична доказательству теоремы 12.2.1. Существует возвращающийся секущий маршрут Q от A к B. Q может быть преобразовано редукциями, как и выше, необходимо только принимать во внимание разметку по простым цепям. Как и в п. 12.1, мы получаем чередующееся семейство размеченных секущих простых цепей (12.3.2); следовательно, можно построить $t + 1$ непересекающихся по ребрам связывающих цепей $\{A_i'\}$.

12.4. Дефицит. Теорема Менгера о вершинном разделении является обобщением теоремы Кёнига о паросочетании (теорема 7.9.4) для двудольных графов. При анализе теорем о паросочетаниях мы использовали понятие дефицита для двудольного графа. Как будет показано, это понятие можно распространить на случай связывающих простых цепей в произвольном ориентированном или неориентированном графе G. Если граф G ориентированный, то нужно рассматривать только ориентированные цепи.

Пусть, как и выше, A и B — непересекающиеся множества. Если A конечно, то выражение

$$\delta(A) = \delta(A, B) = \nu(A) - \sigma(A) \qquad (12.4.1)$$

называется *дефицитом* A относительно B; здесь $\nu(A)$ есть число вершин в A и

$$\sigma(A) = \sigma(A, B)$$

есть минимальное число вершин в разделяющем множестве для связывающих цепей между A и B. Положим

$$\delta(\varnothing) = 0. \qquad (12.4.2)$$

Для произвольного множества A *максимальный дефицит* относительно B определяется как

$$\delta_0(A) = \max_{D \subset A} \delta(D) \qquad (12.4.3)$$

где D пробегает все конечные подмножества множества A. При вычислении $\delta_0(A)$ в (12.4.3) следует рассматривать только те конечные подмножества D, которые имеют минимальное разделяющее множество $S(D)$, не пересекающееся с D. В самом деле, если

$$D_1 = D \cap S(D) \neq \varnothing,$$

то, очевидно,

$$\delta(D) = \delta(D - D_1).$$

Согласно (12.4.2) мы имеем $\delta_0 \geqslant 0$. Если

$$\delta_0(A) = 0, \qquad (12.4.4)$$

то A называется множеством *без дефицита*.

Пусть D_1 и D_2 — конечные множества, не пересекающиеся с B, а $S(D_1)$ и $S(D_2)$ — разделяющие множества вершин с минимальным числом $\sigma(D_1)$ и $\sigma(D_2)$ элементов. Тогда

$$S(D_1) \cup S(D_2)$$

является разделяющим множеством вершин для $D_1 \cup D_2$, и мы получаем

$$\sigma(D_1 \cup D_2) \leqslant \sigma(D_1) + \sigma(D_2) - \sigma(D_1 \cap D_2).$$

Как в теореме 7.2.1, мы находим, что функция дефицита удовлетворяет неравенству

$$\delta(D_1 \cup D_2) = \delta(D_1 \cap D_2) \geqslant \delta(D_1) + \delta(D_2). \qquad (12.4.5)$$

Пусть, далее, A есть некоторое множество, не пересекающиеся с B и имеющее максимальный дефицит δ_0. Подмножества D множества A, для которых

$$\delta(D) = \delta_0,$$

называются *критическими множествами*. Как и в теореме 7.2.2, мы устанавливаем, что сумма и пересечение критических множеств будут критическими множествами. Отсюда следует, как в теореме 7.2.3, что существует единственное минимальное критическое множество N, содержащееся во всех остальных; если A конечно, то существует единственное максимальное критическое множество M, содержащее все остальные.

Будем говорить, что множество A *сопоставлено при паросочетании* в B, если существует такое семейство непересекающихся простых цепей $\{A_i\}$, что из каждой вершины $a_i \in A$ выходит одна простая цепь и вторые концы всех простых цепей принадлежат B.

Теорема 12.4.1. *Для того чтобы конечное множество A можно было сопоставить при паросочетании в множество B, не пересекающееся с A, необходимо и достаточно, чтобы A не имело дефицита относительно B.*

Доказательство. Это условие, очевидно, необходимо. Чтобы доказать его достаточность, предположим, что условие (12.4.4) выполнено. Тогда A само имеет минимальное разделяющее множество не менее чем с $\nu(A)$ вершинами; следовательно, по теореме 12.2.1 существует $\nu(A)$ непересекающихся простых цепей от A к B.

Эта новая формулировка теоремы Менгера, даваемая теоремой 12.4.1, имеет то преимущество, что ее можно распространить на бесконечные множества и получить результаты, аналогичные результатам п. 7.8 для двудольных графов. Здесь вместо локальной конечности мы требуем ***конечность цепей:*** из каждой $a \in A$ можно достигнуть только конечного числа вершин цепями, промежуточные вершины которых не принадлежат ни A, ни B. Тогда можно доказать теорему:

Теорема 12.4.2. *Пусть A и B — два непересекающихся множества, удовлетворяющих условию конечности цепей для вершин из A. Тогда A можно сопоставить при паросочетании в B непересекающимися простыми цепями тогда и только тогда, когда*

$$\delta_0(A, B) = 0.$$

Если B также удовлетворяет условию конечности цепей для обратных цепей, то эти два множества можно взаимно сопоставить при паросочетании друг на друга непересекающимися цепями тогда и только тогда, когда

$$\delta_0(A, B) = \delta_0^*(B, A) = 0.$$

Этот результат соответствует теоремам 7.3.3 и 7.4.3 о двудольных графах. Доказательство предоставляется читателю. Результаты пп. 7.8 и 7.9 также имеют аналоги для связывающих непересекающихся простых цепей.

Подобные теоремы справедливы также для непересекающихся по ребрам простых цепей от A к B, если воспользоваться функцией дефицита, определенной по отношению к разделяющим ребрам. Вместо дефицита вершин (12.4.1) в этом случае вводится *дефицит ребер*

$$\delta^{(e)}(A) = \rho(A) - \tau(A),$$

где $\rho(A)$ есть число ребер, выходящих из A к остальным вершинам, а $\tau(A)$ — минимальное число элементов в разделяющем семействе ребер. Если рассматривать паросочетания A в B при помощи непересекающихся по ребрам простых цепей, то немедленно получатся утверждения, аналогичные теоремам 12.4.1 и 12.4.2.

Задача

1*. Вывести теоремы о паросочетаниях для непересекающихся по ребрам и непересекающихся по вершинам простых цепей, аналогичные теоремам 7.8.6 и 7.9.1.

Глава 13

ДОМИНИРУЮЩИЕ МНОЖЕСТВА, ПОКРЫВАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА И НЕЗАВИСИМЫЕ МНОЖЕСТВА

13.1. Доминирующие множества. Пусть G — ориентированный или неориентированный граф с множеством вершин V. Подмножество D множества V называется *доминирующим множеством* для G, если каждая не принадлежащая D вершина является конечной вершиной некоторого ребра от вершины, принадлежащей D. Очевидно, само V является доминирующим множеством. Например, если рассматривать G как граф, представляющий игру, с вершинами, соответствующими позициям, и ребрами — ходам, то доминирующим множеством D будет такое множество позиций, что во все остальные позиции можно попасть из D за один ход.

Минимальным доминирующим множеством называется такое доминирующее множество, что никакое его подмножество не обладает этим свойством.

Теорема 13.1.1. *Если граф G локально конечен, то любое доминирующее множество содержит минимальное.*

Доказательство. Применим принцип минимальности. Пусть $\{D_i\}$ — семейство упорядоченных по включению доминирующих множеств с пересечением D_0. Допустим, что к некоторому $a_0 \notin D_0$ не ведут ребра от D_0. Тогда найдется такое множество D_i, что от D_i нет ребер к $a_0 \notin D_i$, а это противоречит определению D_i.

Теорема 13.1.2. *Доминирующее множество D_0 является минимальным доминирующим множеством тогда и только тогда, когда для каждого $d_0 \in D_0$ выполняется одно из следующих двух условий*:

1. *В d_0 нет входящих ребер $E_0 = (d_1, d_0)$, внутренних для D_0.*

2. *Существует ребро $E = (d_0, \overline{d})$, касающееся D_0 и такое, что E есть единственное ребро от D_0 к $\overline{d}$.*

Доказательство. Чтобы $D_0 - d_0$ не было доминирующим множеством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из этих условий.

Для конечных графов теорема 13.1.2 может быть использована для сведения доминирующего множества к минимальному. Заметим, что любая вершина v, в которой нет входящих ребер, должна принадлежать каждому доминирующему множеству.

Рассматривая обратный граф G^*, можно определить *обратные доминирующие множества*[1]).

Будем рассматривать случай, когда граф G неориентированный.

Теорема 13.1.3. *Любой неориентированный граф без изолированных вершин имеет такое доминирующее множество D, что его дополнение $\overline{D}$ также является доминирующим множеством.*

Доказательство. Можно считать, что граф G связен. Пусть T — максимальное дерево, в котором выбран некоторый корень a_0. Тогда вершины в T и в G распадаются на два непересекающихся множества D и $\overline{D}$, состоящих соответственно из вершин с четным и с нечетным расстоянием от a_0 в T. Очевидно, D и $\overline{D}$ будут доминирующими множествами для G.

Заметим, далее, следующее.

Теорема 13.1.4. *Пусть G — неориентированный граф без изолированных вершин. Тогда дополнение $\overline{D}$ минимального доминирующего множества D является доминирующим множеством.*

Доказательство. Если бы в некотором $d \in D$ не было ребер к $\overline{D}$, то множество $D-d$ оказалось бы доминирующим.

Объединяя теоремы 13.1.1 и 13.1.4, мы получим теорему:

Теорема 13.1.5. *Пусть граф G неориентированный, локально конечный и без изолированных вершин. Тогда*

---

[1]) Их можно также называть субдоминирующими. Это понятие совпадает с понятием внешне устойчивого множества (по Бержу) для ориентированного графа. В случае неориентированного графа понятия доминирования и обратного доминирования, очевидно, совпадают. Тогда часть графа, имеющую своим множеством вершин доминирующее (или, что то же, обратно доминирующее) множество, называют *всесмежным графом*. В этом случае доминирующее множество можно назвать *всесмежным множеством*. (*Прим. перев.*)

для любого минимального доминирующего множества существует другое, не пересекающееся с ним доминирующее множество.

Число доминирования $\delta(G)$ графа G есть наименьшее число вершин, составляющих минимальное доминирующее множество. Это число появляется в различных задачах-головоломках. Примером может служить так называемая *задача о пяти ферзях* на шахматной доске. Требуется разместить на доске пять ферзей так, чтобы они держали под боем каждую клетку. Решение приведено на рис. 13.1.1; меньшего числа ферзей недостаточно, так что $\delta(G) = 5$. Аналогичные задачи можно формулировать для других фигур или их комбинаций, а также для других игр на доске. (См., например, Роуз-Болл, библ. гл. 1.)

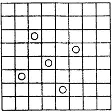


Рис. 13.1.1.

Задачи

1. Найти минимальные доминирующие множества и числа доминирования для графов правильных многогранников.

2*. Попытаться распространить некоторые из приведенных результатов на ориентированные графы.

13.2. Покрывающие множества и покрывающие суграфы. Предположим, что G не имеет изолированных вершин. Множество вершин K называется *покрывающим множеством* [1], если каждое ребро имеет хотя бы один конец в K. Из принципа минимальности легко получаем, что каждое покрывающее множество содержит минимальное покрывающее множество.

Двойственным образом назовем семейство ребер $D(E_i)$ *покрывающим семейством ребер*, если оно имеет хотя бы одно ребро в каждой вершине. В нашей прежней терминологии (см. п. 1.3) это означает, что $H = \bigcup E_i$

[1] Также *накрывающим множеством*. Часть графа, имеющую такое множество своим множеством вершин, можно назвать *покрывающим* **графом** или *накрывающим графом*. (*Прим. перев.*)

является *покрывающим суграфом* для вершин из G. Напомним определение *звездного графа* (п. 1.3): звездный граф состоит из всех ребер, инцидентных некоторой вершине, включая возможные петли.

Теорема 13.2.1. *Покрывающий суграф H минимален тогда и только тогда, когда его связные компоненты являются однократными петлями или звездными графами без петель* [1]).

Доказательство следует из того факта, что если для ребра $E = (a, b)$ из H существуют другие ребра из H и в a, и в b, то $H - E$ также будет покрывающим суграфом.

Теорема 13.2.2. *Любой покрывающий суграф содержит минимальный покрывающий суграф.*

Доказательство. Достаточно показать, что любой связный граф G имеет минимальный покрывающий суграф. Пусть T — максимальное дерево в G, в котором выбран корень a_0. Построим часть H_0 графа T по следующим правилам. Все концевые ребра от a_0 относим к H_0, а все остальные ребра $E_0 = (a_0, a_1)$ от a_0 — к дополнению $\overline{H}_0$. Если нет концевых ребер от a_0, то единственное не концевое ребро относим к H_0. Вообще, в вершине a_n, находящейся на расстоянии n от a_0, пусть входящее ребро есть $E_{n-1} = (a_{n-1}, a_n)$. Оно уже отнесено к H_0 или к $\overline{H}_0$. Тогда все концевые ребра от a_n будем относить к H_0, а остальные ребра $E_n = (a_n, a_{n+1})$ — к $\overline{H}_0$. В случае, когда в a_n нет концевых ребер и E_{n-1} не принадлежит H_0, единственное ребро E_n относим к H_0. Это построение показывает, что H_0 будет покрывающим суграфом и что после удаления любого из его ребер он это свойство теряет.

Аналогично теореме 13.1.3 можно показать:

Теорема 13.2.3. *Для того чтобы граф G имел такой покрывающий суграф H, что его дополнение $\overline{H}$ также является покрывающим суграфом, необходимо и достаточно, чтобы G не имел концевых ребер и никакая его связная компонента не состояла из одного простого цикла нечетной длины.*

---

[1]) Здесь следовало бы сказать точнее: «... или частями звездных графов, и притом без петель». (*Прим. перев.*)

Доказательство. Эти условия, очевидно, необходимы. Предположим, что они удовлетворяются и что граф G связен. Сначала покажем, что существует такая пара нетривиальных непересекающихся по ребрам частей H и H', что если H имеет ребро в вершине a_0 графа G, то H' также имеет такое ребро, и наоборот. Если имеется некоторая двусторонне-бесконечная цепь P, то можно построить H и H', относя ребра из P поочередно к каждой из частей. Если G не имеет двусторонне-бесконечных цепей, то он должен содержать циклы, так как концевых ребер не существует. Если найдется простой цикл четной длины, то применяем предыдущее построение. Если все простые циклы имеют нечетную длину, то обозначим через C один из них. Согласно предположению, в вершине a_0 на C существует ребро $E = (a_0, b)$ вне C. Начиная с E, строим простую цепь P, непересекающуюся с C, продолжая ее насколько возможно дальше. Она может вернуться на C, или быть бесконечной, или кончаться на некотором простом цикле C_1, непересекающемся с C. В каждом случае получается требуемая пара графов H и H'. Ребра из C принадлежат поочередно H и H', и в a_0 имеется два H-ребра. Ребро E принадлежит H', и последующие ребра в P — поочередно H и H'.

Чтобы завершить доказательство, рассмотрим все пары графов (H, H') с указанными покрывающими свойствами. Они образуют частичное упорядочение, в котором включение

$$(H_1, H_1') \geqslant (H_2, H_2')$$

имеет место, если выполняются оба условия

$$H_1 \geqslant H_2, \quad H_1' \geqslant H_2'.$$

Если $\{(H_i, H_i')\}$ есть упорядоченное по включению семейство пар, то, очевидно, их сумма, т. е. пара $(H_0, H_0') = (\bigcup H_i, \bigcup H_i')$, также принадлежит этому частичному упорядочению.

Отсюда мы заключаем, что существуют максимальные пары (H_0, H_0'). Покажем, наконец, что

$$G = H_0 \cup H_0'. \qquad (13.2.1)$$

Во всех случаях сумма

$$G(A) = H_0 \cup H_0'$$

является подграфом, так как любое ребро, соединяющее две вершины из H_0, можно было бы отнести произвольно или к H_0, или к H_0' если оно уже не принадлежало этим графам. Рассмотрим теперь дополнительный граф $\overline{G(A)}$ и любую цепь P в нем, выходящую из вершины $a_0 \in A$. Такая цепь не может вернуться к $G(A)$, так как тогда можно было бы увеличить H_0 и H_0', относя ребра из P поочередно к этим графам. По этой же причине цепь P не может быть бесконечной или приводить к какому-нибудь простому циклу, не пересекающемуся с $G(A)$. Поэтому $\overline{G(A)}$ оказывается графом без циклов, в противоречии с тем, что G не имеет концевых ребер. Значит, (13.2.1) выполнено, и доказательство завершено.

Наш результат может быть также сформулирован так, что ребра графа можно разбить на два непересекающихся класса, причем каждый класс представлен в каждой вершине, только если выполняются условия теоремы 13.2.3. Другая формулировка следующая. Будем говорить, что граф H есть *собственный покрывающий суграф*, если он покрывает вершины G, но не содержит всех его ребер в каждой из вершин. Тогда G имеет собственный покрывающий суграф только при ограничениях теоремы 13.2.3. Теорема 13.2.2 показывает, что в этом случае G имеет два непересекающихся по ребрам минимальных покрывающих суграфа.

Числом реберного покрытия $\alpha_e(G)$ называется наименьшее число ребер, составляющих покрывающий суграф H для G; *числом вершинного покрытия* $\alpha_v(G)$ называется наименьшее число вершин в покрывающем множестве.

Теорема 13.2.4. *Число реберного покрытия имеет границы*

$$\nu(V) - 1 \geqslant \alpha_e(G) \geqslant {}^1/_2\nu(V), \qquad (13.2.2)$$

где $\nu(V)$ *есть число вершин в* G.

Доказательство. Для числа ребер и вершин в звездном графе мы имеем[1])

$$\nu_e = \nu_v - 1,$$

[1]) При однократных ребрах. (*Прим. перев.*)

и суммирование дает нам первое неравенство в (13.2.2). Второе неравенство следует из того, что покрывающий суграф имеет в каждой вершине хотя бы одно ребро. Предполагается, что G не является суммой однократных петель.

Задачи

1. Найти числа реберного покрытия для графов правильных многогранников.

2. Показать, что неравенство (13.2.2) может быть улучшено до

$$\alpha_e(G) \leqslant \nu(V) - \frac{1}{2}(d(G) + 1),$$

где $d(G)$ есть диаметр G.

3. Исследовать границы (13.2.2), когда удовлетворяются условия теоремы 13.2.3.

4*. Покрывающий суграф H для ориентированного графа G можно определить как часть, имеющую хотя бы одно входящее и одно выходящее ребро в каждой вершине G. Попытаться распространить предыдущие результаты на такие покрывающие суграфы, в частности установить аналог теоремы 13.2.3.

13.3. Независимые множества. Предположим, что граф G неориентированный и без петель. Множество I вершин называется *независимым* (иногда *несвязанным*), если между любыми его вершинами нет соединяющих ребер[1]). *В зависимом множестве* (*связанном множестве*) хотя бы две вершины соединены ребром. Противоположным независимым множествам являются *полностью зависимые множества*, в которых каждая пара вершин соединена ребром[2]). Если предположить, что G определяет бинарное отношение R, т. е. все ребра однократны, то полностью зависимые множества для R будут независимыми множествами для дополнительного отношения $\bar{R}$.

Максимальное независимое множество I_0 есть независимое множество, которое становится зависимым после добавления любой вершины. Заметим, что каждое

[1]) Это соответствует понятию внутренне устойчивого множества по Бержу. Подграф, порождаемый независимым множеством, называется *пустым*. (*Прим. перев.*)

[2]) Такое множество называется также *кликой*. Подграф, порожденный полностью зависимым множеством, содержит полный граф на этом множестве вершин. (*Прим. перев.*)

независимое множество содержится в максимальном независимом множестве.

Теорема 13.3.1. *Независимое множество максимально тогда и только тогда, когда оно доминирующее.*

Доказательство. Если I — максимальное независимое множество, то не может быть вершин $j \in \bar{I}$, не соединенных с I ребром, так как иначе множество $j \cup I$ также было бы независимым. С другой стороны, пусть I — независимое доминирующее множество. Тогда никакое j нельзя перевести из $\bar{I}$ в I так, чтобы $I \cup j$ осталось независимым.

Максимальное число $\beta_v(G)$ вершин, составляющих независимое множество, назовем *числом (вершинной) независимости*. Теорема 13.3.1 показывает, что оно не может быть меньше числа доминирования, следовательно,

$$\beta_v(G) \geqslant \delta(G). \tag{13.3.1}$$

При представлении игр графами независимое множество вершин является таким множеством позиций, что никакая из них не может быть достигнута из другой за один ход. Примером является задача о расположении максимального числа ферзей на шахматной доске так, чтобы ни один из них не мог побить другого. Это максимальное число равно $\beta_v(G) = 8$, в то время как для соответствующей задачи о доминировании в п. 13.1 мы видели, что $\delta(G) = 5$. Одно из решений задачи указано на рис. 13.3.1.

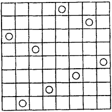


Рис. 13.3.1.

Другой пример можно взять из области комбинаторики. Из N объектов можно выбрать $\binom{N}{n}$ сочетаний по n. Два таких сочетания можно назвать *k-связанными*, если они имеют не менее чем k общих элементов. Это отношение можно представить графом

$$G_k = G(k;\ N,\ n).$$

Число независимости $\beta_v(G_k)$ этого графа дает максимальное число сочетаний, не являющихся k-связанными. Некоторые задачи-головоломки о выборе групп или комиссий зависят от определения максимальных k-несвязанных множеств, например *задача Киркмана о пансионе для девушек*; сюда же относятся вопросы о так называемых *тройках Штейнера* в геометрии и другие задачи из комбинаторного анализа (см., например, Нетто).

Если I — максимальное независимое множество, то, согласно теореме 13.3.1, существует хотя бы одно ребро от I к каждой вершине из его дополнения $\bar{I}$. Поэтому число ребер, выходящих из I, не меньше числа вершин в $\bar{I}$:

$$\rho(I) \geqslant \nu(\bar{I}).$$

Добавляя к обеим частям вершины в I, мы получим

$$\rho(I) + \nu(I) = (\rho + 1)(I) \geqslant \nu(V). \qquad (13.3.2)$$

Из следствий этого неравенства прежде всего укажем теорему:

Теорема 13.3.2. *Если ρ_1 есть верхняя граница для локальных степеней в G, то*

$$\beta_v(G) \geqslant \frac{1}{\rho_1 + 1} \nu(V).$$

Если граф G бесконечный, то неравенство (13.3.2) справедливо также для соответствующих кардинальных чисел. Из хорошо известных свойств бесконечных кардинальных чисел легко получить следующее утверждение:

Теорема 13.3.3. *Пусть $\nu(V)$ означает бесконечное кардинальное число вершин множества V в графе G. Если существует такое кардинальное число ρ_1, являющееся верхней границей для локальных степеней G, что $\rho_1 < \nu(V)$, то*

$$\nu(I) = \nu(V) \qquad (13.3.3)$$

для любого максимального независимого множества I.

Частным случаем этой теоремы является результат Серпинского и Пикара: если граф G локально конечен, а множество V бесконечно и несчетно, то (13.3.3) выполняется для любого максимального независимого множества. То же равенство (13.3.3) выполняется также, когда V счетно, а локальные степени ограничены в совокупности.

Имеется значительное число исследований того частного случая, когда V есть множество вещественных чисел, а R — отношение на V. Фодор доказал, что (13.3.3) выполняется, если никакая вершина v не является предельной точкой ее соответствующего множества $R(v)$; оказывается даже, что можно взять I, имеющее положительную внешнюю меру. Более сильные результаты можно получить, если принять некоторые предположения о расстоянии $d(v)$ между v и $R(v)$. Другие относящиеся сюда работы опубликовали Эрдёш и Багемил; более полную библиографию см. в недавно вышедшей статье Маркуса.

Аналогично независимым множествам вершин рассматриваются *независимые семейства ребер*, состоящие из ребер, не имеющих общих вершин. Каждое независимое семейство ребер содержится в максимальном независимом семействе. Максимальное число ребер в таком семействе есть *число реберной независимости* $\beta_e(G)$ графа G. Галлаи указал на интересную взаимосвязь между максимальными числами независимости и минимальными числами покрытия:

Теорема 13.3.4. *В графе с n вершинами*

$$\alpha_v + \beta_v = \alpha_e + \beta_e = n. \qquad (13.3.4)$$

Доказательство. (1а) Множество I является независимым множеством тогда и только тогда, когда его дополнение $\overline{I}$ есть покрывающее множество. Поэтому, если I — минимальное множество с β_v элементами, то должно быть

$$\alpha_v + \beta_v \leqslant n.$$

(1б) Множество K является покрывающим множеством тогда и только тогда, когда $\overline{K}$ независимое, так что если K — минимальное покрывающее множество с α_v элементами, то

$$\alpha_v + \beta_v \geqslant n.$$

(2а) Пусть F — максимальное семейство из $\nu_e(F)$ независимых ребер; множество вершин K, определяемое ребрами из F, имеет $2 \cdot \nu_e(F)$ элементов. Дополнительное множество $\overline{K}$ должно быть независимым; выберем в каждой вершине $k \in \overline{K}$ ребро E_k. Другой конец E_k должен лежать в K. Граф

$$H = F \cup \bigcup E_k$$

покрывает вершины G, и

$$\nu_e(H) = \nu_e(F) + \nu_v(\overline{K}).$$

С другой стороны,

$$\nu_v(K) + \nu_v(\overline{K}) = n,$$

и мы получаем

$$\nu_e(H) + \nu_e(F) = n.$$

Отсюда следует

$$\alpha_e + \beta_e \leqslant n.$$

(2б) Пусть H — минимальный покрывающий суграф для G; согласно теореме 13.2.1, H является суммой частей звездных графов. Возьмем часть H' графа H, выбирая по одному ребру E_a, выходящему из каждого центра a звезд из H. Тогда устанавливается взаимно однозначное соответствие между ребрами из $H \cup H'$ (причем ребра, принадлежащие H', считаются дважды) и вершинами из G, так что

$$\nu_e(H) + \nu_e(H') = n.$$

Так как ребра в H' независимы, это дает

$$\alpha_e + \beta_e \geqslant n.$$

13.4. Теорема Турана. Если конечный граф с n вершинами имеет небольшое число ребер, то следует ожидать, что его число независимости будет относительно большим. Для фиксированных значений n и k должны существовать такие графы $G_0(n, k)$ с минимальным числом $N_0(n, k)$ ребер, что

$$\beta(G_0) < k, \quad 3 \leqslant k \leqslant n. \tag{13.4.1}$$

Эти графы, как будет показано, имеют очень простую форму и определяются, по существу, однозначно.

Теорема 13.4.1. *Графы $G_0(n, k)$, удовлетворяющие (13.4.1) и имеющие минимальное число ребер, являются суммами $k-1$ непересекающихся полных графов*

$$G = C_1 \cup \ldots \cup C_{k-1}. \qquad (13.4.2)$$

Если представить n в виде

$$n = t(k-1) + r, \quad 0 \leqslant r \leqslant k-2, \qquad (13.4.3)$$

то r полных компонент C в (13.4.2) определены на $t+1$ вершинах, а остальные компоненты — на t вершинах.

Число ребер графа G из (13.4.2) равно

$$N = \frac{1}{2}\, t\,(t+1)\, r + \frac{1}{2}\, t\,(t-1)(k-1-r),$$

и из (13.4.3) мы получаем

$$N = \frac{1}{2}\, t\,(n-k+1+r). \qquad (13.4.4)$$

Доказательство теоремы 13.4.1 проводится индукцией по n. Для самых маленьких значений $n = 1, 2, 3, 4$ она легко проверяется непосредственно. При удалении ребра из графа число независимости может разве лишь возрасти на единицу. Поэтому граф $G_0(n, k)$ должен иметь некоторое максимальное независимое множество I с

$$\nu(I) = \beta(G_0) = k-1$$

вершинами. Теорема 13.3.1 показывает, что каждая вершина из дополнения $\overline{I}$ имеет хотя бы одно ребро, соединяющее ее с вершиной из I. Так как подграф $G_0(\overline{I})$ не может иметь независимого множества более чем с $k-1$ вершинами, число его ребер не меньше чем

$$N_0(n-k+1,\ k);$$

следовательно,

$$N_0(n,\ k) \geqslant n-k+1+N_0(n-k+1,\ k). \qquad (13.4.5)$$

Так как

$$n-k+1 = (t-1)(k-1)+r, \qquad (13.4.6)$$

по индуктивному предположению из (13.4.4) следует, что

$$N_0(n-k+1,\ k) = \frac{1}{2}\,(t-1)\,(n-2k+2+r).$$

Подставляя это в (13.4.5), мы получим

$$N_0(n, k) \geqslant \frac{1}{2} t(n-k+1+r). \qquad (13.4.7)$$

Знак равенства в (13.4.5), и тем самым в (13.4.7), может иметь место только при следующих условиях:

1. Из каждой вершины в $\overline{I}$ выходит единственное ребро к I.

2. $G_0(\overline{I})$ есть минимальный граф вида (13.4.2), где, согласно (13.4.6), r графов C определены на t вершинах, а остальные — на $t-1$ вершинах.

Положим $I = (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$.

Пусть

$$\overline{v}_1 \in C_1, \quad \overline{v}_2 \in C_2$$

— вершины из двух различных компонент $\overline{I}$. Они не могут быть соединены ребрами с одной и той же вершиной $v_i \in I$, так как иначе[1]) k вершин

$$\overline{v}_1, \overline{v}_2, v_2, \ldots, v_{k-1}$$

были бы независимыми. Отсюда мы заключаем, что каждое $v_i \in I$ может иметь ребра, выходящие только из одной компоненты C_i в $\overline{I}$. Но тогда получающийся граф $G_0(n+1, k)$ также будет иметь вид (13.4.2). Это завершает доказательство.

Из теоремы 13.4.1 следует

Теорема 13.4.2. *Пусть* ρ_1 — *максимальная локальная степень в графе. Для данного* ρ_1 *граф* G, *удовлетворяющий* (13.4.1), *существует тогда и только тогда, когда*

$$\rho_1 \geqslant t-1. \qquad (13.4.8)$$

Доказательство. Для графа вида (13.4.2) мы имеем $\rho_1 = t-1$, и (13.4.1) выполняется. Если $\rho_1 \leqslant t-2$, то максимальное число ребер в графе равно

$$\frac{1}{2}(t-2)n,$$

и легко проверить, что это число меньше, чем (13.4.4).

Если теорему 13.4.1 применить к дополнительному графу с n вершинами, то получим теорему Турана: ма-

[1]) В силу условия 1. (*Прим. ред.*)

ксимальное число ребер в графе, не содержащем полных графов на k вершинах, равно

$$M(n, k) = \frac{1}{2}\frac{k-2}{k-1}\cdot(n^2 - r^2) + \frac{1}{2}r(r-1).$$

Графы такого вида с максимальным числом ребер $M(n, k)$ являются дополнениями графов G из (13.4.2) в полном графе с n вершинами. Если теорему 13.4.2 применить к задаче о дополнении, то мы получим результат Царанкевича.

Задачи

1*. Найти связные графы, удовлетворяющие (13.4.1) и имеющие минимальное число ребер.

2*. Для данного числа ребер в графе с n вершинами определить границы для числа независимых множеств.

3*. Найти графы с тем минимальным свойством, что удаление любого ребра увеличивает число независимости.

13.5. Теорема Рамсея. Существует одна комбинаторная теорема, принадлежащая Рамсею, которая применима к широкому классу математических задач:

Пусть S_n — множество из n элементов, а m — некоторое целое число. Составим для любого r все $\binom{n}{r}$ сочетаний по r элементов из S_n и разобьем множество этих сочетаний произвольно на μ непересекающихся классов. Тогда существует такое число $n_0 = n_0(m, r, \mu)$, что для $n \geqslant n_0$ найдется подмножество S_m множества S_n, для которого все $\binom{m}{r}$ сочетаний принадлежат одному классу.

Покажем, что теорема Рамсея является следствием некоторых общих результатов теории графов. Пусть G — граф, ориентированный или неориентированный, с множеством вершин V. Предположим, что существует разложение графа G на μ частей, непересекающихся по ребрам:

$$G = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_\mu. \tag{13.5.1}$$

Построим некоторое семейство ребер графа G следующим образом. Возьмем произвольную вершину $a_0 \in V_0 = V$. Выберем семейство F_1 ребер от a_0, принадлежащих одному и тому же графу H_1' из (13.5.1). Множество концов этих ребер обозначим через V_1. Возьмем, далее, $a_1 \in V_1$ и построим такое семейство F_2 ребер от a_1 к $V_2 \subset V_1$, что все ребра в F_2 принадлежат одному графу H_2' из (13.5.1). Затем возьмем $a_2 \in V_2$ и будем продолжать этот процесс. Семейство ребер

$$F_1, F_2, \ldots, F_s \neq \varnothing, \tag{13.5.2}$$

полученное таким образом, будем называть *сомкнутой цепочкой*. В (13.5.2) каждое F_i состоит из ребер одного графа H_i' из (13.5.1). Мы имеем

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_s \neq \varnothing, \tag{13.5.3}$$

и ребра из F_i соединяют вершину $a_{i-1} \in V_{i-1}$ с множеством $V_i \subset V_{i-1}$. Назовем a_{i-1} *центром*, принадлежащим графу H_i' в сомкнутой цепочке (13.5.2).

Теорема 13.5.1. *Пусть*

$$c_1, c_2 \ldots, c_k \tag{13.5.4}$$

— семейство центров в сомкнутой цепочке (13.5.2), *принадлежащих одному и тому же графу H из* (13.5.1). *Тогда подграф*

$$G(c_1, c_2, \ldots, c_k) \tag{13.5.5}$$

является частью графа H.

Доказательство. Пусть c_1 и c_2 — два центра из (13.5.4) и $E=(c_1, c_2)$ — соединяющее их ребро в G и, следовательно, в графе (13.5.5). Тогда по (13.5.3) E является ребром от c_1 к V_{c_1+1}, так что E принадлежит H.

Предположим теперь, что G конечен, и обозначим число вершин в V_i через ν_i, так что

$$n = \nu_0 > \nu_1 > \ldots > \nu_s. \tag{13.5.6}$$

Если n велико и числа ν_i убывают не слишком быстро, то сомкнутая цепочка может быть относительно длинной. Так как в (13.5.1) имеется только фиксированное число μ графов, должно быть достаточно много центров, принадлежащих одному и тому же H; следовательно, большой подграф (13.5.5) является частью графа H.

Можно построить сомкнутую цепочку (13.5.2), выбирая в каждом центре все ребра в графе H, имеющем наибольшее число ребер [1]). Обозначим локальные степени G через $\rho(v) \geqslant 2$ и положим

$$\rho_0 = \min_{v \in V} \rho(v).$$

Тогда в каждой вершине будет не меньше чем

$$\nu = \frac{1}{\mu} \rho_0$$

ребер в некотором H, и таким же образом мы получим в (13.5.6)

$$\nu_i \geqslant \frac{1}{\mu} (\nu_{i-1} - d), \quad d = n - 1 - \rho_0.$$

Следовательно,

$$\nu_i \geqslant n \frac{1}{\mu^i} - d \frac{1}{\mu - 1} \geqslant n \frac{1}{\mu^i} - d.$$

Рассматривая это условие для $i \geqslant 1$, можно показать следующее:

Теорема 13.5.2. *Пусть G — конечный граф с непересекающимся по ребрам разложением* (13.5.1). *Пусть минимальная локальная степень в G есть $\rho_0 \geqslant 2$. Тогда один из графов H в* (13.5.1) *должен содержать подграф графа G не менее чем с*

$$m = \frac{1}{\mu \log \mu} \log \frac{n}{d+1} - 1$$

вершинами.

Можно было бы дать и более точные оценки. Если G_n есть полный граф без петель с n вершинами, то имеем $d = 0$. Тогда теорема 13.5.2 дает следующий результат, являющийся теоремой Рамсея для случая $r = 2$:

Теорема 13.5.3. *Пусть полный граф C_n с n вершинами имеет непересекающееся по ребрам разложение* (13.5.1). *Тогда существует такое число n_0, что если*

$$n \geqslant n_0(\mu, m), \qquad n_0 \leqslant \mu^{(m+1)\mu},$$

то хотя бы один из графов H содержит полный граф G_m.

---

[1]) В этой вершине. (*Прим. перев.*)

В частности, при $\mu = 2$ мы получим теорему:

Теорема 13.5.4. *Для данного m существует такое число n_0, что при $n \geqslant n_0$ любой граф с n вершинами содержит или независимое множество с m вершинами, или полный граф с m вершинами.*

Приведем более житейскую интерпретацию: в любой достаточно большой компании можно обнаружить либо m незнакомых друг с другом людей, либо *клику* из m лиц, каждый из которых знаком со всеми остальными.

Точные нижние границы для n в теоремах 13.5.3 и 13.5.4 неизвестны, за исключением некоторых частных случаев. Для $m = 3$ достаточно взять $n_0 = 6$ в последней части задачи. Некоторые другие точные границы были найдены Гудманом, а также Глисоном и Гринвудом. В их работах, а также в работе Эрдёша найдены гораздо лучшие оценки для n_0, чем те, которые получаются при указанном выше методе доказательства.

Общая теорема Рамсея может быть получена индукцией по r; мы лишь наметим доказательство. Рассмотрим множество C, состоящее из всех сочетаний по r элементов, взятых из множества V, и предположим, что C разложено на μ непересекающихся множеств

$$C = C_1 \cup \ldots \cup C_\mu. \tag{13.5.7}$$

Выберем некоторую вершину $a_0 \in V = V_0$. Множество C' всех сочетаний P' по $r-1$ элементов из $V_0 - a_0$ также распадается на μ классов

$$C' = C_1' \cup \ldots \cup C_\mu', \tag{13.5.8}$$

зависящих от множества C_i в (13.5.7), которому принадлежит r-сочетание $a_0 \cup P'$. Начинаем построение сомкнутой цепочки в полном графе G на V, выбирая такие ребра от центра a_0 к множеству V_1, чтобы все $(r-1)$-сочетания элементов из V_1 принадлежали одному и тому же классу C_1'' из (13.5.8). Согласно индуктивному предположению такие множества V_1 существуют и могут быть сделаны произвольно большими, если взять достаточно большое число n элементов V. Затем мы выбираем вершину $a_1 \in V_1$ и повторяем построение по отношению к множеству V_1. Ясно, что этим способом для большого n можно получить столь длинную сомкнутую цепочку, чтобы она содержала m центров

$$c_1, c_2, \ldots, c_m$$

и при этом соответствующие ребра из цепочки соединяли их с множествами

$$V_{c_1} \supset V_{c_2} \supset \ldots \supset V_{c_m},$$

из которых $(r-1)$-сочетания принадлежат одному классу C_t'' из (13.5.8). Тогда все r-сочетания из этих m центров принадлежат одному классу из (13.5.7), так как в любом

$$(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_r}), \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_r,$$

все центры, кроме c_1, принадлежат V_{i_1+1}; следовательно, в комбинации с c_1 они дают r-сочетание в C_t.

У Рамсея эта теорема появилась в связи с исследованием возможности удовлетворения логических выражений некоторого вида. Эрдёш и Секереш дали одно любопытное приложение, связанное с решением предложенной Эстер Клейн задачи. Пусть дано n точек на плоскости. Показать, что существует такое число $n_0(m)$, что при $n \geqslant n_0(m)$ найдутся m из этих точек, которые образуют выпуклый многоугольник. Чтобы установить этот результат, заметим, что многоугольник будет выпуклым тогда и только тогда, когда любые четыре его вершины определяют выпуклый четырехугольник. 4-сочетания из n точек можно разбить на два класса, состоящие соответственно из выпуклых и невыпуклых четырехугольников. Из 5 точек всегда можно выбрать 4 точки, определяющие выпуклый четырехугольник. Тогда допущение, что нет выпуклых многоугольников с $m \geqslant 5$ вершинами, выбранными из числа данных точек, приводит к противоречию, так как, согласно теореме Рамсея, при $n \geqslant n_0(m)$ должны были бы существовать m точек, все 4-сочетания которых невыпуклы, а это противоречит только что рассмотренному случаю 5 точек.

Другим следствием теоремы Рамсея является результат Шура. Если числа 1, 2, ..., n разбиты на μ классов, то при $n \geqslant n_0(\mu)$ один из классов содержит три числа: x, y, $x-y$. Отсюда можно получить теорему Диксона о том, что для любого достаточно большого простого числа q сравнение

$$x^n + y^n \equiv z^n \pmod q$$

всегда разрешимо.

Заметим, наконец, что Эрдёш и Радо исследовали теорему Рамсея для бесконечных множеств и произвольных кардинальных чисел.

Задачи

1. (К. В. Боствик). Доказать, что из произвольных собравшихся шести человек трое будут или знакомы друг с другом, или незнакомы между собой.
2. Доказать теорему Шура.
3. (Е. Макаи). Показать, что при $n \geqslant 9$ среди n точек на плоскости всегда найдется выпуклый пятиугольник.

4*. Распространить задачу Э. Клейн на пространство или на произвольное число измерений.

13.6. Одна задача из теории информации. Как установил Шеннон, теория независимых множеств в графе имеет большое значение для фундаментальных проблем теории информации. Пусть дан некоторый код для передачи информации. Обозначим основные его сигналы символами

$$S = (s_1, s_2, \ldots, s_n). \tag{13.6.1}$$

Для наглядности можно понимать под сигналами буквы алфавита, а под процессом передачи информации — обычный разговор по телефону [1]). Известно из опыта, что некоторые сигналы ошибочно могут быть приняты за другие, а некоторые пары сигналов не перепутываются. Отметим, что во многих приложениях такие ошибки встречаются только с некоторыми вероятностями; однако здесь мы рассмотрим только детерминированный случай, когда два сигнала либо могут быть перепутаны друг с другом, либо нет.

Обозначим принятые сигналы через

$$S^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_m^*). \tag{13.6.2}$$

[1]) В применении к разговору по телефону лучше было бы говорить не о буквах алфавита, а о фонемах языка. Впрочем, для формальных построений это несущественно. (*Прим. ред.*)

Для каждого $s_i \in S$ найдется некоторое подмножество $S^*(s_i)$ множества S^*, состоящее из принятых символов, для которых возможным отправленным сигналом является s_i. Точно так же найдется подмножество $S(s_j^*)$ множества S, состоящее из всех сигналов из (13.6.1), которые, возможно, могли послужить исходными для s_j^*. Таким образом, процесс передачи информации может быть представлен в виде *передаточного графа* $T(S, S^*)$, в котором ребро (s_i, s_j^*) существует тогда и только тогда, когда s_j^* может получаться из s_i.

Два сигнала s_i и s_k в (13.6.1) называются *зависимыми*, если имеются два ребра

$$(s_i, s_j^*), \quad (s_k, s_j^*) \tag{13.6.3}$$

в T с общим концом s_j^*; в противном случае s_i и s_k называются *независимыми*. Поэтому можно также описывать возможности перепутывать сигналы при помощи *графа (зависимости) сигналов* $C(S)$. Этот граф имеет множеством вершин S, и две вершины в C соединяются ребром (s_i, s_k) только тогда, когда в T существуют соседние ребра (13.6.3). Аналогично можно построить граф зависимости сигналов $C(S^*)$ на множестве (13.6.2), в котором две вершины s_j^* и s_l^* соединены ребром только тогда, когда соответствующие два сигнала могут порождаться одним и тем же s_i.

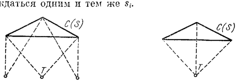


Рис. 13.6.1.

Граф сигналов $C(S)$, очевидно, однозначно определяется передаточным графом, но обратное, вообще говоря, неверно (рис. 13.6.1). Однако можно показать, что каждый граф $C(S)$ на S можно рассматривать как граф сигналов некоторого передаточного графа T, и обычно не единственным образом. Предположим, что в данном графе

$T(S, S^*)$ вершина $s^* \in S^*$ является концом k ребер

$$(s_1, s^*), \ldots, (s_k, s^*).$$

Тогда соответствующие вершины s_i в $C(S)$ будут все зависимыми друг с другом, т. е. они определяют полный граф U_k на k вершинах. Наоборот, любое ребро E в графе $C(S)$ будет содержаться в максимальном полном графе U для S, и притом обычно в нескольких таких графах. Каждому U соотнесем вершину $s^*(U)$ и соединим с s^* все вершины каждого U в C. Очевидно, так полученный граф $T(S, S^*)$ имеет C своим графом сигналов. Можно также сделать другое построение графа T, соотнося каждому ребру $E = (s_1, s_2)$ в C вершину $s^*(E)$ и два ребра (s_1, s^*) и (s_2, s^*). В этом случае граф $C(S^*)$ оказывается смежностным графом для $C(S)$ (рис. 13.6.2).

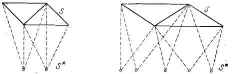
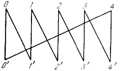


Рис. 13.6.2.

Обратимся теперь к фактическому процессу передачи информации. Чтобы получить безошибочный код, в котором не будет никаких перепутываний, следует ограничиваться сигналами из независимого подмножества I множества S. Максимальным числом сигналов в такой безошибочной группе будет тогда число независимости $\beta(C)$ для $C(S)$.

В реальных сообщениях обычно не ограничиваются одним сигналом: они посылаются в виде слов или комбинаций сигналов. В простейшем случае, когда слова состоят только из двух букв, всего может быть β^2 безошибочных сообщений, если использовать сигналы из максимального независимого множества в C. Вообще, для слов из n букв мы получаем таким же образом β^n различных сообщений. Можно было бы предположить, что, вообще, таковым будет максимальное число безошибочных слов из n букв. Однако это не так, что можно увидеть из следующего примера, принадлежащего Шеннону. Рассмотрим передаточный граф на рис. 13.6.3, где $C(S)$ и $C(S^*)$ являются простыми циклами из 5 ребер.



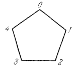


Рис. 13.6.3.

Очевидно, $\beta = 2$ и независимым множеством в C является, например (0, 2), дающее 4 безошибочных слова

$$0\,0,\ 0\,2,\ 2\,0,\ 2\,2$$

длины 2. Но легко проверить, что пять слов

$$0\,0,\ 1\,2,\ 2\,4,\ 3\,1,\ 4\,3$$

также различаются при приеме. Общая задача состоит в нахождении числа независимости для декартова произведения графов (п. 2.6). Из наших рассуждений видно, что всегда

$$\beta(G \times H) \geqslant \beta(G)\beta(H). \tag{13.6.4}$$

В частности, для n одинаковых множителей должно быть

$$\beta(G \times \ldots \times G) \geqslant \beta(G)^n. \tag{13.6.5}$$

По-видимому, установить точные значения в (13.6.4) и (13.6.5) или необходимые и достаточные условия равенства в них очень трудно. Эти задачи исследовал Шеннон для всех графов с числом вершин вплоть до 7 и установил при помощи специального редукционного процесса, что, за исключением простых циклов из 5 или 7 ребер, знак равенства в (13.6.5) имеет место для всех таких графов. Однако для графов с бо́льшим числом вершин равенство, видимо, является исключительным случаем.

Задачи

1. Доказать, что знак равенства в (13.6.5) имеет место, если никакой сигнал не может быть перепутан более чем с одним другим сигналом.

2*. Исследовать значение $\beta(C^n)$, когда C является простым циклом.

Глава 14

ХРОМАТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ

14.1. Хроматическое число. Предположим, что G есть неориентированный граф с однократными ребрами и без петель. Граф G называется *k-раскрашиваемым*, если существует такое разложение множества его вершин на k непересекающихся классов

$$C_1, \quad C_2, \ldots, C_k, \quad V = \bigcup_i C_i, \quad C_i \cap C_j = \varnothing, \quad (14.1.1)$$

что вершины в каждом классе независимы, т. е. что ребра в G соединяют вершины только из разных классов. Представление (14.1.1) называется *k-раскраской* графа G. Эта терминология подсказывается такой иллюстрацией, при которой каждый класс имеет свой цвет. Тогда каждая вершина окрашивается так, что концы любого ребра всегда имеют разный цвет. Можно также описывать цвета классов C_i в (14.1.1) целыми числами 1, 2, ..., k и ввести *функцию раскраски* f, для которой

$$f(v_i) = i, \quad v_i \in C_i.$$

Наименьшее число $k = k(G)$ классов в возможной раскраске (14.1.1) называется *хроматическим числом* графа G. Тогда граф G — *k-хроматический*, и (14.1.1) есть *хроматическое разложение* V. Граф будет 2-хроматическим только тогда, когда он двудольный. Поэтому граф более чем 2-хроматический должен содержать нечетный простой цикл. Полный граф на n вершинах имеет хроматическое число n.

Имеется некоторый частный вид функции раскраски, иногда называемый *функцией Гранди*, которая характеризуется следующим свойством. Пусть для каждого v

$$\{v'_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, \rho(v),$$

есть множество соседних вершин. Тогда $f(v)$ равно такому наименьшему числу из 1, 2, ..., что для всех i

$$f(v) \neq f(v_i').$$

Очевидно,

$$f(v) \leqslant \rho(v) + 1.$$

Кроме того, для любого $f(v)$ значения

$$1,\ 2,\ \ldots,\ f(v) - 1$$

должны достигаться на соседних вершинах.

Функцию Гранди можно построить следующим образом. Выберем максимальное независимое множество S_1 в V и положим

$$f(s_1) = 1, \qquad s_1 \in S_1.$$

Все вершины в G соединены ребром с S_1, так что получается $f(v) \geqslant 2$ для $v \notin S_1$. Затем выберем максимальное независимое множество S_2 в $G(V - S_1)$ и определим

$$f(s_2) = 2, \qquad s_2 \in S_2.$$

Продолжая этот процесс, мы получим функцию Гранди.

Если функция Гранди удовлетворяет условию

$$\max_{v \in V} f(v) = k, \tag{14.1.2}$$

то она определяет раскраску в k цветов. Если граф G является k-хроматическим с разложением (14.1.1), то можно построить функцию Гранди, удовлетворяющую (14.1.2), следующим образом. Определим максимальное независимое множество S_1 как сумму

$$S_1 = C_1 \cup C_2' \cup C_3' \cup \ldots \cup C_k',$$

где C_2' состоит из вершин C_2, не соединенных с C_1, C_3' — из вершин C_3, не соединенных с $C_1 \cup C_2'$, и т. д. Множество S_2 образуется из множеств

$$C_2 - S_1,\ C_3 - S_1,\ \ldots$$

аналогично; так как граф G по условию k-хроматический, этот процесс закончится через k шагов.

Укажем несколько простых свойств хроматических чисел.

Теорема 14.1.1. *Для числа независимости $\beta(G)$ и хроматического числа $k(G)$ графа G порядка n мы имеем*

$$\rho(G)k(G) \geqslant n. \qquad (14.1.3)$$

Доказательство. Так как все множества C_i в (14.1.1) являются независимыми, должно быть

$$\nu(C_i) \leqslant \beta(G),$$

и, следовательно,

$$n = \sum \nu(C_i) \leqslant k\beta(G) = k(G)\beta(G).$$

Столь же непосредственно получается

Теорема 14.1.2. *Если G содержит полный граф U_m на m вершинах, то*

$$k(G) \geqslant m.$$

Рассмотрим теперь связь между раскрасками графа G и раскрасками его конечных частей. Возьмем такое конечное множество вершин F, что никакое пересечение $F \cap C_i$ в (14.1.1) не пусто. Ясно, что подграф $G(F)$ является $k(G)$-раскрашиваемым. Если бы было

$$k_1 = k(G(F)) < k(G),$$

то нашлось бы k_1-хроматическое разложение F в $G(F)$. Так как вершины в этих классах не остаются независимыми в G, можно, добавив конечное число ребер из G, повысить хроматическое число для $G(F)$. Тогда мы получим, что G содержит конечные подграфы $G(F)$ с тем же хроматическим числом, что и G.

Обратный результат доказали де Брёйн и Эрдёш:

Теорема 14.1.3. *Если все конечные части графа G k-раскрашиваемые, то и сам граф G тоже k-раскрашиваемый.*

Доказательство следует из теоремы Радо (теорема 7.1.4). Строим двудольный граф $G(V, V')$, где V есть множество вершин для G, а V' — множество из k цветов. Для любого конечного множества $F \subset V$ определяется выбирающая функция при помощи такой раскраски вершин графа $G(F)$, что соединенные ребром вершины имеют различные цвета. Тогда существует выбирающая функция с этим же свойством для всего множества V.

Следующая теорема указывает верхнюю границу для хроматического числа.

Теорема 14.1.4. *Если ρ_1 есть точная верхняя граница для локальных степеней, то*

$$k(G) \leqslant \rho_1 + 1. \qquad (14.1.4)$$

Доказательство. Согласно предыдущей теореме достаточно рассмотреть конечный граф G. Теорема очевидна для случаев $n = 1$ и $n = 2$; докажем ее в общем случае индукцией по n. Предположим, что граф G_{n-1} k-раскрашиваем, причем $k = \rho_1 + 1$. Добавление к G_{n-1} вершины v_n с $\rho(v_n) \leqslant \rho_1$ дает новый граф G_n, в котором v_n не соединена со всеми k классами C_i в k-раскраске (14.1.1) для G_{n-1}. Поэтому v_n можно добавить к одному из этих классов без увеличения k.

Границу (14.1.4) улучшил Брукс, доказавший, что

$$k(G) \leqslant \rho_1.$$

Задачи

1. Найти хроматическое число и функцию Гранди для каждого из графов правильных многогранников.
2. (Я. Мыцельский). Доказать, что для каждого k существуют k-хроматические графы без треугольников.
3*. Найти нижнюю границу порядка для таких графов.
4. (В. Т. Татт, также Дж. Б. Келли и Л. М. Келли) Привести примеры k-хроматических графов без простых циклов длины $\leqslant 5$.

14.2. Суммы хроматических графов. Прежде всего отметим следующий факт.

Теорема 14.2.1. *Для графов G и G' с одним и тем же свойством вершин мы имеем*

$$k(G \cup G') \leqslant k(G)\, k(G'). \qquad (14.2.1)$$

Доказательство. Пусть $V = \bigcup_{j=1}^{k} C'_j$ есть k-раскраска G'. Из (14.1.1) мы получаем kk'-раскраску $G \cup G'$:

$$V = \bigcup C_i \cap C'_j.$$

Следующий результат получили Гаддам и Нордхауз:

Теорема 14.2.2. *Для хроматических чисел графа G и его дополнения $\overline{G}$ имеют место неравенства*

$$2n^{1/2} \leqslant k(G) + k(\overline{G}) \leqslant n + 1, \qquad (14.2.2)$$

$$n \leqslant k(G)\,k(\overline{G}) \leqslant \left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^2. \qquad (14.2.3)$$

Доказательство. Нижняя граница в (14.2.3) получается из теоремы 14.2.1 для $G' = \overline{G}$. Из нее же получается и нижняя граница в (14.2.2) при помощи общего неравенства

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab.$$

Это же неравенство дает верхнюю границу в (14.2.3) из верхней границы в (14.2.2). Таким образом, остается только доказать, что

$$k(G) + k(\overline{G}) \leqslant n + 1.$$

Это справедливо для $n = 1$ и $n = 2$ и может быть доказано в общем случае индукцией по n. Для графа G_n с n вершинами

$$G_n \cup \overline{G}_n = U_n.$$

По этому полному графу U_n построим U_{n+1}, добавляя вершину v_{n+1}. Присоединим q ребер из тех n ребер, которые идут от вершины v_{n+1} к V_n, к графу G_n; остальные $n - q$ ребер присоединим к $\overline{G}_n$. В результате мы получим дополнительные друг для друга графы G_{n+1} и $\overline{G}_{n+1}$ в U_{n+1}. Так как добавление к графу вершины и ее ребер может увеличить хроматическое число не более чем на единицу, мы получаем

$$k(G_{n+1}) \leqslant k(G_n) + 1, \quad k(\overline{G}_{n+1}) \leqslant k(\overline{G}_n) + 1. \quad (14.2.4)$$

Складывая эти два неравенства, получим требуемый результат, за исключением того случая, когда оба хроматических числа увеличились. Рассмотрим этот случай. Хроматическое число для G_n возрастает при присоединении v_{n+1}; поэтому должно быть $q \geqslant k(G_n)$, так как иначе v_{n+1} можно было бы добавить к одному из классов C_i в (14.1.1) без нарушения его независимости. Точно так же

$$n - q \geqslant k(\overline{G}_n),$$

так что в этом случае

$$k(G_n) + k(\overline{G}_n) \leqslant n,$$

и требуемое неравенство следует из индуктивного предположения и (14.2.4).

Пусть, например, граф G двудольный. Тогда

$$\frac{1}{2}n \leqslant k(\overline{G}) \leqslant n-1.$$

Можно построить специальные примеры, показывающие, что указанные в теореме 14.2.2 границы не могут быть улучшены.

Каждая раскраска вида (14.1.1) определяет гомоморфное отображение графа G на граф G/C, при котором множествами прообразов элементов G/C являются независимые классы C_i (см. п. 5.3). В G/C пара вершин (C_i, C_j) соединена ребром тогда и только тогда, когда существует ребро в G

$$(c_i, c_j), \quad c_i \in C_i, \quad c_j \in C_j.$$

Но если $k = k(G)$, то такое ребро всегда должно существовать, так как иначе $C_i \cup C_j$ можно было бы объединить в один класс. Отсюда следует

Теорема 14.2.3. *Пусть G имеет k-хроматическое разложение* (14.1.1). *Тогда G имеет такой независимый гомоморфизм, что его образ, граф G/C, является полным графом на k вершинах.*

Используем это представление для получения некоторых аддитивных разложений k-хроматического графа. Пусть $a < k$ — некоторое целое положительное число; разделим k на a с остатком:

$$k = ab + r, \quad 0 \leqslant r \leqslant a-1. \tag{14.2.5}$$

Разложим теперь каждый из k классов C_i в (14.1.1) соответственно на классы:

$$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1a}, \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2a}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{b1} & C_{b2} & \ldots & C_{ba}, \\ C_{b+1,1} & C_{b+1,2} & \ldots & C_{b+1,r}. \end{matrix} \tag{14.2.6}$$

Построим две части A и B графа следующим образом. Граф A состоит из всех ребер в G, соединяющих любые два класса в различных строках в (14.2.6), а граф B состоит из всех ребер, соединяющих классы в двух различных столбцах. Из этого определения ясно, что

$$G = A \cup B, \tag{14.2.7}$$

причем граф A является $(b+1)$-раскрашиваемым, а граф B — a-раскрашиваемым при $r \neq 0$. Для $r = 0$ мы получаем теорему Зыкова:

Теорема 14.2.4. *Если хроматическое число графа G равно произведению $k = ab$, то G есть сумма (14.2.7) двух таких графов, что граф A является b-хроматическим, а граф B — a-хроматическим.*

Доказательство. Неравенство (14.2.1) показывает, что эти хроматические числа не могут быть меньше, чем a и b.

Аналогичные соображения можно применить в некоторых случаях при $r \neq 0$ в (14.2.5). Всегда должно быть $k(A) = b+1$, так как $k(A) \leqslant b$ приводит к противоречию, что видно из (14.2.1). Но может быть $k(B) \leqslant a-1$; это приводит к условию

$$a \geqslant r + b + 1 \geqslant 3,$$

не удовлетворяющемуся для $a = 2$. Следовательно, G всегда можно записать в виде суммы (14.2.7), где

$$k(A) = b+1, \quad k(B) = 2,$$

т. е. B двудольный, а A можно взять таким, что

$$k(A) = \frac{1}{2}k, \quad k(A) = \frac{1}{2}(k+1),$$

в зависимости от четности k. Повторяя эту операцию, мы получим следующую теорему:

Теорема 14.2.5. *k-хроматический граф можно представить как сумму t двудольных графов, где t есть наименьший показатель, для которого $k \leqslant 2^t$.*

Задачи

1*. Попытаться получить неравенства для хроматических чисел произвольной пары графов G и G_1, обобщающие неравенства (14.2.2) и (14.2.3).

2*. Найти другие представления в виде суммы для хроматических графов.

14.3. Критические графы. Целый ряд интересных свойств хроматических графов получил Дирак при помощи понятия *критического графа.* Граф K называется (*вершинно*) *критическим,* если удаление любой вершины с ее ребрами уменьшает хроматическое число $k = k(K)$. Критическим 1-хроматическим графом является одна вершина; критическим 2-хроматическим графом — одно ребро. Критический 3-хроматический граф становится двудольным графом после удаления одной вершины, следовательно, он является простым циклом нечетной длины.

Теорема 14.3.1. *Критический граф K имеет следующие свойства:*

1. *Граф K конечен и связен.*
2. *Для любой вершины* $\rho(v) \geqslant k - 1$. (14.3.1)
3. *Граф K не имеет разделяющих вершин.*

Доказательство. 1. Мы видели, что k-хроматический граф содержит конечный подграф с тем же хроматическим числом. Следовательно, каждый k-хроматический граф содержит конечный критический граф с тем же хроматическим числом. Если бы граф K не был связным, то какую-нибудь из его компонент можно было бы удалить, не изменяя k.

2. Удаление вершины и ее ребер может уменьшить хроматическое число не более чем на единицу. Если v удалить из K, то полученный граф будет иметь хроматическое число $k-1$. Если бы было $\rho(v) < k - 1$, то эту вершину можно было бы вернуть на место без увеличения хроматического числа.

3. Допустим, что K имеет разделяющую вершину s. Тогда K состоит из двух подграфов $K(A)$ и $K(B)$, имеющих только одну общую вершину s. Хроматические числа для $K(A)$ и $K(B)$ не превосходят $k-1$, и, окрасив s в один цвет в обоих графах, мы получим, что K можно раскрасить в $k-1$ цветов.

Результат 3 в теореме 14.3.1 можно обобщить. Пусть A — подмножество множества вершин V критического графа K. Если A и все ребра от его вершин удалить из K, то останется граф $K(V-A)$, который, вообще говоря, распадается на несколько связных компонент:

$$K(V-A) = K(C_1) \cup \ldots \cup K(C_i), \qquad (14.3.2)$$

где число $t = i(A)$ есть *индекс компонент* множества A.

По предположению граф $K(A)$ раскрашивается менее чем k цветами. Обозначим через $\mu(A)$ число существенно различных способов раскрашивания $K(A)$, т. е. раскрашиваний, которые нельзя получить друг из друга переименованием цветов. Подсчитывая эти способы, можно всегда предполагать, что какая-то одна вершина $a_1 \in A$ имеет вполне определенный цвет, обозначаемый через 1.

Теорема 14.3.2. *Для любого подмножества A множества вершин V критического графа K должно быть*

$$i(A) \leqslant \mu(A). \tag{14.3.3}$$

Доказательство. По условию граф $K(V-C_1)$ можно раскрасить в $k-1$ цветов. Поэтому каждый из графов

$$K(C_j \cup A), \quad j = 2, 3, \ldots, i(A), \tag{14.3.4}$$

можно раскрасить в $k-1$ цветов так, что множество A имеет одно и то же раскрашивание во всех графах. То же самое можно сделать и для каждого графа $K(V-C_t)$. Таким образом, если число $i(A)$ компонент превосходит число способов $\mu(A)$, которыми может быть раскрашен $K(A)$, то должна найтись пара, скажем $K(V-C_1)$ и $K(V-C_2)$, в которой A имеет одно и то же раскрашивание. Но тогда все графы (14.3.4), включая $j=1$, могут быть $(k-1)$-раскрашены с общим раскрашиванием для A. Это дает раскрашивание K в $k-1$ цветов. Следовательно, (14.3.3) должно выполняться.

Если $K(A)$ — полный граф, то имеется только одно существенное раскрашивание; следовательно, справедлива

Теорема 14.3.3. *Критический граф не может быть разделен вершинами содержащегося в нем полного графа.*

Каждый критический граф имеет соответствующие простые цепи L_0 максимальной длины и простые циклы C_0 максимальной длины. Обозначим соответственно через $\lambda_k(n)$, $\gamma_k(n)$ наименьшие длины L_0 и C_0 для различных k-критических графов порядка n. Следующий результат принадлежит Дж. Б. Келли и Л. М. Келли:

Теорема 14.3.4.

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k(n) = \lim_{n\to\infty} \gamma_k(n) = \infty. \tag{14.3.5}$$

Доказательство. Множество A с ν вершинами имеет не более чем $\nu^{\nu-1}$ существенно различных раскрашиваний. Из теоремы 14.3.2 мы получаем, что

$$i(A) \leqslant \nu^{\nu-1}.$$

Следовательно, для простой цепи L длины l

$$i(L) \leqslant (l+1)^l,$$

и для критического графа, в котором максимальная длина простой цепи равна l_0,

$$i(L) \leqslant (l_0+1)^{l_0}.$$

Теорема 2.5.4 показывает, что локальные степени в K для данного l_0 ограничены, и из неравенства (2.4.6) следует, что при возрастании n должно l_0 стремиться к бесконечности.

Вторая часть (14.3.5) вытекает из следующего факта, обнаруженного Дираком.

Теорема 14.3.5. *В графе без разделяющих вершин*

$$c_0^2 > l_0, \qquad (14.3.6)$$

где l_0 и c_0 — соответственно длины длиннейших простых цепей и простых циклов.

Доказательство. Пусть $L_0(a, b)$ — длиннейшая простая цепь. Согласно теореме 5.4.1 существует простой цикл C, проходящий через a и b. Простая цепь L_0 распадается на участки $L_1, \ldots, L_t$ так, что каждая L_i или имеет на C только свои концы, или целиком лежит на C. В обоих случаях L_i является цепью на простом цикле, так что длина c_i цепи L_i меньше c_0. Таким образом,

$$l_0 = \sum c_i < tc_0,$$

и, так как $t < c_0$, мы получаем неравенство (14.3.6).

Дальнейшее изучение асимптотического поведения функции $\gamma_k(n)$ из (14.3.5) проводили Дирак и Рид.

Свойство 2 в теореме 14.3.1 допускает следующее обобщение.

Теорема 14.3.6. *Любой критический k-хроматический граф по крайней мере $(k-1)$-реберно связен.*

Доказательство. Допустим, что для некоторого множества A существует разложение

$$G = G(A) \cup G(\overline{A}) \cup G(A, \overline{A}), \; A \cup \overline{A} = V,$$

с

$$\rho = \rho(A, \overline{A}) < k - 1. \qquad (14.3.7)$$

Графы $G(A)$ и $G(\overline{A})$ имеют функции раскраски f и $\overline{f}$ со значениями $1, \ldots, k-1$. Покажем, что если выполняется (14.3.7), то эти функции могут быть объединены в раскрашивание целого графа G в $k-1$ цветов, что противоречит предположению. Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_e$$

— вершины в A, от которых отходят ребра к $\overline{A}$. Если среди них имеется ровно r различных цветов $f(a_i)$, то обозначим эти цвета через $1, 2, \ldots, r$ и переобозначим вершины так, чтобы было

$$f(a_1) = 1 \leqslant f(a_2) \leqslant \ldots \leqslant f(a_e) = r.$$

Затем упорядочим произвольным образом ребра

$$E_t = (a_i, \overline{a}_j), \quad t = 1, 2, \ldots, \rho, \quad \rho = \rho(A, \overline{A}),$$

но так, чтобы i не убывало. Для $E_1 = (a_1, \overline{a}_1)$ перерасположим значения $\overline{f}$ так, чтобы было $\overline{f}(\overline{a}_1) = 2$. Для последующих ребер будем брать значения

$$\overline{f}(\overline{a}_j) = t + 1,$$

перерасполагая, если нужно, значения $\overline{f}$ на каждом шаге. Так как $\rho < k - 1$, этот процесс может быть проведен для всех ребер E_t. Он приведет к значениям, удовлетворяющим условиям

$$f(a_i) \neq \overline{f}(\overline{a}_j)$$

для каждого ребра E_t. Но тогда f и $\overline{f}$ можно объединить в $(k-1)$-раскраску для G.

Среди различных нерешенных проблем для критических графов можно сформулировать следующую важную проблему.

Предположение Хедвигера. Каждый связный конечный k-хроматический граф имеет некоторую часть с полным k-графом в качестве образа при связном гомоморфизме.

Это предположение тривиально выполняется для $k = 1$ и $k = 2$. Для $k = 3$ каждый граф с циклом имеет связный гомоморфизм на треугольник. Для $k = 4$ предположение доказано Дираком в общей форме:

Теорема 14.3.7. *Если G — конечный связный граф с однократными ребрами, без разделяющих вершин и с локальными степенями $\rho(v) \geqslant 3$, то G имеет часть гомоморфную полному 4-графу при связном гомоморфизме.*

Доказательство. Пусть C — простой цикл наибольшей длины γ в G; по теореме 2.5.3 $\gamma \geqslant 4$. Обозначим вершины в C через $a_1, \ldots, a_\gamma$. *Хордой* T назовем простую цепь, связывающую две несоседние вершины в C. Докажем сначала, что в каждой вершине на C, например в a_1, существуют хорды. Имеется хотя бы одно ребро $E = (a_1, b)$, не принадлежащее C. Если b лежит на C, то все доказано; предположим поэтому, что b не принадлежит C. Из теоремы 5.4.3 следует, что существует простой цикл C_1, содержащий E и a_2. Простая цепь $C_1(a, b, a_2)$ должна иметь первую вершину a_i на C, и, так как C есть длиннейший простой цикл, мы получаем $a_i \neq a_2$ и $a_i \neq a_n$.

Предположим (рис. 14.3.1), что C имеет две хорды $T_1(a_i, a_j)$ и $T_2(a_k, a_l)$ с общей вершиной t вне C. Примем за t первую вершину на T_1, принадлежащую также T_2. Тогда часть, состоящая из C и T_2 вместе с $T_1(a_i, t)$, гомоморфна полному 4-графу при связном гомоморфизме.

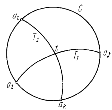


Рис. 14.3.1.

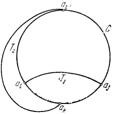


Рис. 14.3.2.

Остается рассмотреть случай, когда все хорды простого цикла C не пересекаются (рис. 14.3.2). Любая хорда $T_1(a_i, a_j)$ делит C на две простые цепи. Возьмем a_i и a_j так, чтобы цепь $C(a_i, a_j)$ была как можно короче; возьмем a_k на этой простой цепи. Существует некоторая хорда $T_2(a_k, a_l)$, и, по нашему предположению, вершина a_l не может быть расположена на $C(a_i, a_j)$. Граф, состоящий из C, T_1 и T_2, будет связно гомоморфен полному 4-графу.

Следующий случай $k=5$. Для таких графов прогресс очень мал, и это не удивительно, так как можно доказать, что справедливость предположения Хедвигера в этом случае приводила бы к доказательству так называемой гипотезы четырех красок для плоских графов.

Задачи

1. Записав неравенство (14.3.6) в виде $c_0^2 \geqslant \alpha l_0$, найти наилучшее возможное значение для числа α.

2. Дать необходимое и достаточное условие того, чтобы граф был связно гомоморфен полному 4-графу.

14.4. Полиномы раскрашиваний. Предположим, что в нашем распоряжении имеется фиксированное число λ цветов для сопоставления их вершинам графа G с множеством вершин V. Если V имеет n элементов, то это можно сделать λ^n способами. Мы хотим определить число $\pi(G;\ \lambda)$ допустимых раскрасок, удовлетворяющих тому условию, что концы каждого ребра раскрашены различно. Обозначим через $\mu(E)$ число раскрашиваний графа G, в которых концы ребра E имеют один цвет, и вообще через

$$\mu(H) = \mu\left(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_s}\right) \tag{14.4.1}$$

— число раскрашиваний, в которых концы каждого ребра части

$$H = \{E_{i_1}, \ldots, E_{i_s}\} \tag{14.4.2}$$

получают один цвет. Известный принцип теории множеств дает формулу

$$\pi(G;\ \lambda) = \lambda^n - \sum_i \mu(E_i) + \sum_{ij} \mu(E_i, E_j) + \ldots, \tag{14.4.3}$$

где суммы берутся соответственно по всем ребрам E_i, по всем парам различных ребер E_i, E_j и т. д.

Чтобы вычислить общий член (14.4.1) в представлении (14.4.3), разложим граф H в (14.4.2) на связные компоненты:

$$H = \bigcup_{l=1}^{c(H)} H_l. \tag{14.4.4}$$

Пусть V есть множество вершин H. Если ребра в H имеют одинаковый цвет на обоих концах, то все вершины любой связной компоненты H_i в (14.4.4) должны иметь один и тот же цвет. Поэтому величина (14.4.1) равна

$$\mu(H) = \lambda^{c(H)}.$$

Подставляя это в (14.4.3), мы получим формулу

$$\pi(G; \lambda) = \sum_{s,c} (-1)^s p(s, c) \lambda^c, \tag{14.4.5}$$

где $p(s, c)$ есть число частей H графа G с s ребрами и $c = c(H)$ связными компонентами.

Формула (14.4.5) принадлежит Биркгофу. Если этот полином раскрашиваний $\pi(G; x)$ известен, то хроматическое число k_0 графа G будет наименьшим положительным целым числом, для которого

$$\pi(G; k_0) > 0.$$

При фактическом вычислении $\pi(G; \lambda)$ многие члены $\mu(H)$ в (14.4.3) исчезают. Возможность таких редукций была систематически исследована Уитни. Чтобы получить его результаты, расположим ребра G в некотором определенном порядке:

$$E_1, E_2, \ldots, E_N, \tag{14.4.6}$$

где N есть число ребер в G. Пусть $\{C_i\}$ — семейство всех простых циклов в G. По каждому из них построим *разорванный цикл*

$$P_i = C_i - F_i, \tag{14.4.7}$$

полученный из C_i после удаления ребра F_i с наибольшим номером в (14.4.6). Расположим разорванные циклы лексикографически:

$$P_1, P_2, \ldots, P_t, \tag{14.4.8}$$

по отношению к порядку ребер E_i из (14.4.6), которые они содержат. Тогда ребро F_i в (14.4.7) не может содержаться ни в каком разорванном цикле P_j, предшествующем P_i, так как F_i имеет больший номер, чем все ребра в P_i и в P_j.

Разобъем, далее, все части графа G на $t+1$ непересекающихся классов

$$S_1, S_2, \ldots, S_{t+1} \tag{14.4.9}$$

следующим образом. S_1 состоит из всех частей, содержащих P_1; класс S_2 — из всех частей, содержащих P_2 и не содержащих P_1, и т. д.; S_{t+1} состоит из всех частей, не содержащих разорванных циклов.

Покажем, что все члены в (14.4.3), соответствующие графам из S_1, исчезают. Очевидно, графы из S_1 могут быть сгруппированы в пары взаимно однозначным образом:

$$H_1 \rightleftarrows H_1 \cup F_1, \tag{14.4.10}$$

где H_1 не содержит F_1. Два графа в (14.4.10) имеют одинаковое число связных компонент, так как F_1 соединяет в H_1 два конца из P_1; следовательно,

$$\mu(H_1) = \mu(H_1 \cup F_1).$$

Эти два члена входят в (14.4.3) с противоположными знаками, так как один имеет на одно ребро больше, чем другой.

Аналогично для каждого графа H_2 из S_2, не содержащего F_2, в S_2 найдется единственный граф $H_2 \cup F_2$, так как F_2 не содержится в P_1. То же рассуждение снова показывает, что соответствующие члены в (14.4.3) исчезают. Повторяя этот процесс, мы получаем, что при вычислении (14.4.3) можно ограничиваться членами $\mu(H_{t+1})$, в которых H_{t+1} не содержат никакого из разорванных циклов (14.4.8).

Эти графы H_{t+1} не могут иметь циклов. Отсюда следует, что

$$c(H_{t+1}) = n - s,$$

и мы получаем выведенное Уитни выражение для полинома раскрашиваний:

$$\pi(G; x) = \sum_s (-1)^s m(s) x^{n-s}, \tag{14.4.11}$$

где $m(s)$ есть число частей графа G с s ребрами, не содержащих разорванных циклов (14.4.8). Сравнивая коэффициенты при x^i в двух выражениях (14.4.5) и (14.4.11) для $\pi(G; x)$, мы получаем формулу

$$(-1)^{n-i} m(n-i) = \sum_s (-1)^s p(s, i). \tag{14.4.12}$$

Приведем несколько простых свойств полиномов раскрашиваний. Если G не имеет ребер, то, очевидно,

$$\pi(G; x) = x^n.$$

Вообще, так как нет частей с $c = 0$, условия

$$p(s,\ 0) = 0, \quad m(n) = 0$$

выполняются, и $\pi(G;\ x)$ имеет множитель x. Для одного ребра $H = E$

$$c(E) = n - 1,$$

и мы получаем

$$p(1,\ n-1) = N, \quad p(1,\ j) = 0,\ j \neq n-1.$$

Аналогично

$$p(s,\ n-s) = \binom{N}{s}, \quad p(s,\ j) = 0, \quad j \neq n-s,$$

если G не имеет простых циклов длины $\leqslant s$.

Следующим соотношением будет

$$\sum_j p(s,\ j) = \binom{N}{s}, \qquad (14.4.13)$$

вытекающее из того, что сумма слева представляет собой число частей графа G с s ребрами. Из (14.4.5) мы находим

$$\pi(G;\ 1) = \sum_{s,c} (-1)^s p(s,\ c),$$

и, согласно (14.4.13), получаем

$$\pi(G;\ 1) = \sum (-1)^s \binom{N}{s} = (1-1)^N = 0 \quad (14.4.14)$$

при $N > 0$.

Определение полинома раскрашиваний показывает, что если G имеет непересекающееся разложение

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$$

на связные компоненты, то

$$\pi(G;\ x) = \pi(G_1;\ x) \ldots \pi(G_k;\ x). \qquad (14.4.15)$$

Аналогично пусть

$$G = G_1 \cup G_2$$

— разложение, в котором G_1 и G_2 имеют только одну общую вершину a. Тогда все раскрашивания G получаются из раскрашиваний G_1 и G_2, в которых a имеет один и тот же цвет. Это сразу приводит к формуле

$$\pi(G;\, x) = \frac{1}{x} \cdot \pi(G_1;\, x) \cdot \pi(G_2;\, x). \qquad (14.4.16)$$

Теорема 14.4.1. *Если E — разделяющее ребро для G, то*

$$\pi(G;\, x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \pi(G - E;\, x). \qquad (14.4.17)$$

Доказательство. Разобьем части графа G на два класса

$$\{H\}, \quad \{H \cup E\},$$

где H пробегает все части графа $G - E$. Граф $H \cup E$ имеет на одно ребро больше, чем H, и на одну связную компоненту меньше, так что

$$\pi(G;x) = \sum (-1)^s \mu(H) + \frac{1}{x} \sum (-1)^{s+1} \mu(H).$$

Просуммировав, мы получим (14.4.17).

Если применить теорему 14.4.1 к дереву T, то получится

$$\pi(T;\, x) = x(x-1)^{n-1}. \qquad (14.4.18)$$

Для графа без циклов полином раскрашиваний, согласно (14.4.15), является произведением множителей (14.4.18).

Очевидно, в простом цикле C с n ребрами часть H с s ребрами имеет

$$c(H) = n - s, \quad s < n,$$

компонент. Это дает формулу

$$\pi(G;\, x) = (x-1)^n + (-1)^n (x-1). \qquad (14.4.19)$$

Объединяя формулы (14.4.15) и (14.4.16) с результатом теоремы 14.4.1, мы получаем, что вычисление полинома раскрашиваний графа сводится к нахождению этих полиномов для его блоков.

Полиномы раскрашиваний можно также вычислять последовательными редукциями при помощи формулы

$$\pi(G \cup E;\ x) = \pi(G;\ x) - \pi(G';\ x),$$

где $G \cup E$ — граф, полученный из G добавлением нового ребра $E = (a,\ b)$ между двумя его вершинами, а G' получается, если считать, что a и b совпадают. Доказательство является простым следствием определения полиномов раскрашиваний. Уитни приводит еще ряд других процессов редукции.

Задачи

1. Найти полиномы раскрашиваний для графов правильных многогранников.
2. Показать, что если $\pi(G;\ x)$ точно делится на x^k, то k есть число связных компонент в G.
3. Доказать, что условие теоремы 14.4.1 также и достаточно для того, чтобы E было разделяющим ребром.
4. Доказать, что формула (14.4.18) характеризует T как дерево.

Глава 15

ГРУППЫ И ГРАФЫ

15.1. Группы автоморфизмов. Каждый граф G, ориентированный или неориентированный, имеет *группу автоморфизмов* $\Gamma = \Gamma(G)$, состоящую из изоморфизмов G на себя. Это значит, что группа Γ (автоморфизмов) графа G состоит из всех таких взаимно однозначных отображений α множества вершин V на себя, что если $E = (a, b)$ есть (ориентированное) ребро в G, то $E^\alpha = (a^\alpha, b^\alpha)$ также является (ориентированным) ребром, и наоборот. Таким образом, Γ можно рассматривать как группу подстановок на множестве V. Если граф G определяется матрицей смежности (вершин) $M(G)$, то есть автоморфизмами будут те перестановочные матрицы M_α, которые коммутируют с $M(G)$ [1]).

В дальнейшем будем предполагать, что граф G неориентированный и, если не оговорено противное,— с однократными ребрами и без петель.

Первая возникающая здесь задача — это фактическое нахождение группы $\Gamma(G)$. Полный граф U_n с n вершинами имеет своей группой симметрическую группу S_n, и, обратно, если группой является S_n, то граф полный, Полезно также отметить, что граф и его дополнение должны иметь одну и ту же группу.

Заметим далее, что нахождение группы можно свести к случаю, когда G связен. Пусть

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_r, \quad G_i = \bigcup G_{ij}, \qquad (15.1.1)$$

есть разложение G на связные компоненты G_{ij}, расположенные так, что графы

$$G_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n_i, \qquad (15.1.2)$$

[1]) *Перестановочной* называется матрица, в каждой строке и в каждом столбце которой находится ровно по одному единичному элементу, а все прочие ее элементы равны нулю. Умножение любой матрицы A на перестановочную матрицу P слева означает некоторую перестановку строк матрицы A. Умножение A на P справа равносильно некоторой перестановке столбцов A. (*Прим. ред.*)

изоморфны друг с другом и не изоморфны с другими компонентами. При любом автоморфизме графы G_i должны преобразовываться в себя, так что группа графа G будет прямым произведением

$$\Gamma(G) = \Gamma(G_1) \times \ldots \times \Gamma(G_r), \qquad (15.1.3)$$

соответствующим (15.1.1).

Изоморфные компоненты G_{ij} из (15.1.2) можно переводить друг в друга, и, наряду с этой операцией, можно к каждой компоненте G_{ij} применить автоморфизм h_j. Таким образом, группа автоморфизмов $\Gamma(G_i)$ в (15.1.3) состоит из всех отображений, которые могут быть записаны в виде обобщенной подстановки:

$$P(h) = \begin{pmatrix} X_j \\ X_{k_j} \cdot h_{k_j} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n_i).$$

В обычной теоретико-групповой терминологии она называется *полной мономиальной группой* n_i переменных над группой H, изоморфной любой из групп автоморфизмов $\Gamma(G_{ij})$, $j = 1, \ldots, n_i$.

Если G — связный граф, то сразу появляются некоторые ограничения на возможные автоморфизмы. Любая вершина должна переходить в вершину с той же локальной степенью, ребро — в ребро с тем же числом ребер в каждом конце. Вообще, любая часть графа имеет изоморфный образ с изоморфно расположенными соединяющими ребрами и вершинами. Несмотря на эти ограничения, фактическое нахождение группы для больших графов может оказаться очень сложным.

Приведем несколько иллюстраций. Оба графа на рис. 15.1.1 и 15.1.2 является однородными степени 3. Первый из них имеет единичную группу, а второй — группу порядка 2, определяемую, как показал Фрухт, подстановкой

$$P = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10).$$

Группой простого цикла является группа диэдра, порождаемая циклической подстановкой вершин $(1, 2, \ldots, n)$ и отражением $(1, n-1)(2, n-2)\ldots$

Группа тетраэдра есть симметрическая группа S_4 на четырех элементах, так как он является полным графом с 4 вершинами. Группы куба и октаэдра обе изоморфны прямому произведению группы S_4 и отражения порядка 2. Группы додекаэдра и икосаэдра изоморфны прямому произведению знакопеременной группы A_5 на 5 элементах и отражения.

Так называемый *граф Петерсена* имеет вид, изображенный на рис. 15.1.3. Это однородный граф степени 3 и порядка 10. Он был впервые введен Петерсеном в качестве примера графа с $\rho = 3$, который не является суммой трех графов первой степени. Как установил Фрухт, его группа изоморфна S_5.

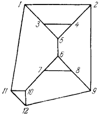


Рис. 15.1.1.

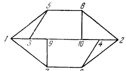


Рис. 15.1.2.

В геометрических теориях приходится иметь дело с целым рядом конкретных графов. В качестве примера возьмем конфигурации, иллюстрирующие теоремы Паппа и Дезарга в проективной геометрии. Группы этих графов были найдены Каньо. Эта задача сразу сводится к предыдущим случаям, так как граф Дезарга оказывается дополнением графа Петерсена, а граф Паппа имеет дополнение, которое состоит из трех компонент, являющихся треугольниками.

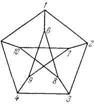


Рис. 15.1.3.

Кроме тривиального случая одной вершины, все графы небольших порядков имеют неединичные группы. Согласно Каньо, граф порядка 6, изображенный на рис. 15.1.4, является графом наименьшего порядка с единичной группой. Каньо исследовал также все графы порядка $\leqslant 6$, в которых локальные степени удовлетворяют условию $\rho(v) \geqslant 3$. Все они имеют нетривиальные группы. Графы этого типа порядка 7 могут иметь своей группой только единичную; пример приводится на рис. 15.1.5.

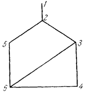


Рис. 15.1.4.

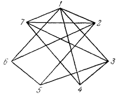


Рис. 15.1.5.

Другой иллюстрацией группы автоморфизмов графа будут графы кристаллов и группы кристаллов. Следует заметить, однако, что при определении кристаллографических групп интересуются несколько иной задачей, именно, автоморфизмами, получающимися при ортогональных преобразованиях трехмерного пространства. Наконец, отметим также, что автоморфизмы деревьев были обстоятельно исследованы Пойа.

Задачи

1. Найти все графы порядка $n \leqslant 7$, имеющие своей группой единичную.

2. Сравнить группу кристалла и группу графа для некоторых видов кристаллов.

15.2. Цветные графы Кэли для групп. Опишем кратко представление групп при помощи графов, которое было введено Кэли. Пусть Γ есть некоторая группа конечного или бесконечного порядка N. Группе Γ соотнесем некоторый граф G, множество вершин которого совпадает с множеством элементов Γ. Любую пару вершин соединяем ориентированным ребром $E_{ij} = (g_i, g_j)$, так что G является полным ориентированным графом с N входящими и выходящими ребрами в каждой вершине. В частности, между любыми двумя вершинами g_i и g_j имеется пара ребер (g_i, g_j) и (g_j, g_i) с противоположными ориентациями.

Распределим ребра G на N классов или цветов, приписав каждому ребру E_{ij} единственный элемент группы

$$c_{ij} = g_i^{-1} g_j. \qquad (15.2.1)$$

Очевидно, в каждой вершине имеется одно входящее ребро и одно выходящее ребро из каждого класса. Таким образом, ребра любого класса образуют однородный граф первой степени; следовательно, он будет суммой конечных или бесконечных ориентированных простых циклов. На рис. 15.2.1 изображен цветной граф симметрической группы S_3; его вид слегка упрощен, так как оба ориентированных ребра между двумя его вершинами представлены одной линией.

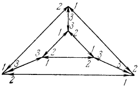


Рис. 15.2.1.

Пройдем теперь от вершины g_1 в G по ориентированной цепи к некоторой вершине g_n. Тогда по (15.2.1) должно быть

$$g_n = g_1 c_{12} c_{23} \ldots c_{n-1,n}.$$

Здесь произведение

$$p = c_{12} c_{23} \ldots c_{n-1,n}$$

будет единичным элементом e в Γ, если цепь является циклом, и $p \neq e$ в противном случае. Таким образом, цветной граф может оказаться полезным при нахождении соотношений, имеющих место между элементами Γ.

При построении цепей в G на каждом шаге можно выбирать произвольную новую вершину, которая еще не встречалась. Поэтому ясно, что в G можно найти ориентированные гамильтоновы цепи. Чтобы получить некоторую цепь от одной вершины к другой, нет необходимости, чтобы цветной граф содержал ребра всех классов. Достаточно иметь только те, которые соответствуют некоторой системе образующих для Γ, так как остальные элементы получаются как их произведения.

Сказанное приводит к задаче о нахождении этих систем образующих для группы, особенно систем, которые содержат минимальное число элементов или же просты в каком-либо ином смысле, так, чтобы их граф имел гамильтоновы цепи. Некоторые частные случаи были рассмотрены Рапапортом. Между прочим, можно заметить, что задачи такого типа появляются в искусстве колокольного звона, где нужно как-то объединить звонарей, чтобы создать все возможные перестановки на множестве колоколов при помощи переходов от одного к другому в условиях некоторых простых ограничивающих правил. Некоторые литературные ссылки из области колокольного звона приводятся в библиографии.

При применении цветных графов, описанном в следующем пункте, нас будут интересовать те автоморфизмы, которые сохраняют раскраску ребер. Такой автоморфизм получается при умножении каждого элемента из Г, т. е. каждой вершины из G, слева на фиксированный элемент группы x. Тогда образом ребра $E=(g_i, g_j)$ будут

$$xE=(xg_i, xg_j),$$

и, согласно определению (15.2.1), оба эти ребра имеют один цвет. Эти замечания приводят к теореме:

Теорема 15.2.1. *Все сохраняющие раскраску ребер автоморфизмы графа Кэли для группы получаются как умножения слева на элементы группы.*

Доказательство. Остается только показать, что все автоморфизмы имеют такой вид. Если какой-нибудь сохраняющий цвета автоморфизм α имеет неподвижную вершину g_i, то он должен также оставлять неизменными все выходящие и входящие ребра в g_i, так как имеется ровно одно такое ребро каждого цвета. Таким образом, все соседние с g_i вершины также инвариантны слева. Продолжая это рассуждение, мы видим, что $\alpha=e$ есть тождественное отображение. Следовательно, все $\alpha\neq e$ должны сдвигать все вершины, и может существовать ровно один такой автоморфизм, переводящий одну вершину в другую. Так как умножения слева обладают этим свойством, только они и являются автоморфизмами, сохраняющими цвета.

15.3. Графы с заданными группами. Фрухт получил следующий результат.

Теорема 15.3.1. *Для любой конечной группы* Г *можно найти такой конечный неориентированный граф G, что группа автоморфизмов графа G изоморфна* Г.

Доказательство. Первый шаг состоит в построении такого семейства неизоморфных связных графов H_v, что группа каждого H_v является единичной. Это можно сделать многими способами. Фрухт использовал графы, изображенные на рис. 15.3.1. Такой граф имеет три ребра (1, 3), (3, 4), (4, 2), и от вершин 3 и 4 в H_v, $v = 1, 2, \ldots$, отходят простые цепи соответственно длины $2v$ и $2v+1$.

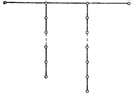


Рис. 15.3.1.

Затем для Г строится цветной граф Кэли $C(\Gamma)$. Искомый граф G получается из $C(\Gamma)$ такой заменой каждого ориентированного ребра (g_i, g_j) из класса цвета v на граф H_v, что g_i отождествляется с вершиной 1, а g_j — с вершиной 2.

Очевидно, граф G является неориентированным и связным. Остается показать, что его группа изоморфна Г; это можно сделать аналогично доказательству теоремы 15.2.1. Рассмотрим сначала автоморфизм α, оставляющий неподвижной некоторую вершину g_i. В G ребра, отходящие от g_i, имеют вид (1, 3) или (2, 4) в зависимости от направления соответствующего ребра в $C(\Gamma)$. Но если вершина g_i инвариантна при α, то соседние вершины 3 и 4 также должны оставаться неизменными, так как все соответствующие им цепи в H_v имеют различные длины. По той же причине каждый из графов H_v в g_i остается неподвижным; следовательно, такой будет и вершина 2, соответствующая вершине g_j. Последовательно мы получим, что все вершины в G неподвижны, т. е. что α является тождественным отображением.

При автоморфизме графа G любая вершина g_i может переходить только в некоторую вершину g_j, так как все остальные вершины графа H_v имеют другие локальные степени. Кроме того, из предыдущего следует, что для каждой пары (g_i, g_j) может быть не более одного автоморфизма, переводящего одну вершину в другую. Но такой автоморфизм в G индуцируется автоморфизмами графа $C(\Gamma)$, определяемыми умножениями слева на элементы из Γ. Это завершает доказательство теоремы 15.3.1.

По существу, проведенное доказательство очень просто, но такая конструкция обычно приводит к графам высокого порядка. Фрухт предложил более экономный в этом отношении метод, построив однородные графы степени 3 с заданной группой. Для любой группы Γ можно найти граф такого вида с $2(n+2)N$ вершинами, где N есть порядок Γ, а n —число ее образующих.

Требование, чтобы граф имел заданную группу, не налагает существенных ограничений на другие его свойства. Избицкий и Сабидусси показали, что можно найти однородный граф с произвольными степенью, связностью, хроматическим числом и другими характеристиками. Эти же авторы распространили теорему Фрухта на бесконечные группы.

Группы автоморфизмов частичных упорядочений исследовали Биркгоф и Фрухт; можно показать, что частичное упорядочение P с заданной группой Γ может быть найдено так, чтобы P имело не более N^2 вершин, где N есть порядок группы Γ.

В связи с группами автоморфизмов графов следует также упомянуть о некоторых интересных исследованиях однородных графов степени 3, которые провел Татт. Он рассмотрел задачу о нахождении таких графов, в которых любая ориентированная простая цепь длины s может быть переведена автоморфизмом в любую другую такую простую цепь. Это возможно только при $s \leqslant 5$. Число s должно также удовлетворять условию

$$s \leqslant \frac{1}{2}\, m + 1,$$

где m есть длина кратчайшего простого цикла. Такие специальные графы («клетки»), для которых s принимает это максимальное значение, имеют ряд замечательных свойств. Коксетер доказал, что при $s = 2$ существует бесконечное число однородных графов степени 3 со свойством транзитивности. Пример для случая $s = 1$ был построен Фрухтом.

15.4. Реберные отображения. Будем говорить, что два графа G и G' *реберно изоморфны*, если существует такое взаимно однозначное соответствие $E \rightleftarrows E'$ между их ребрами, что если E_1 и E_2 — смежные ребра в G, то соответствующие ребра E_1' и E_2' смежны в G', и наоборот. Ясно, что любой обычный (вершинный) изоморфизм между G и G' определяет также реберный изоморфизм, но обратное, вообще говоря, не имеет места. Этот вопрос был изучен Уитни, и мы приведем его основные результаты в несколько упрощенной форме.

На рис. 15.4.1 приведен пример двух графов, которые реберно изоморфны, но не являются вершинно изоморфными.

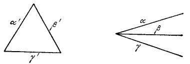


Рис. 15.4.1.

На рис. 15.4.2 приведены три пары графов порядка 4, которые и вершинно, и реберно изоморфны, но реберный изоморфизм не индуцируется никаким вершинным изоморфизмом. Предоставляем читателю проверить, что для графов, порядок которых не превосходит 4, подобные отображения исчерпываются этими примерами.

Теорема Уитни утверждает следующее:

Теорема 15.4.1. *Пусть G — конечный связный граф, отличный от графов, изображенных на рис.* 15.4.1 *и* 15.4.2. *Тогда любой реберный изоморфизм графа G на другой граф индуцируется вершинным изоморфизмом.*

Доказательство. Согласно предыдущим рассуждениям можно считать, что G имеет не менее пяти вершин. Тогда он содержит некоторую минимальную связную часть, т. е. дерево, с пятью вершинами. Легко проверить, что для таких графов все реберные изоморфизмы индуцируются вершинными изоморфизмами.

Общий случай может быть доказан индукцией по числу ребер в G. Предположим, что к G добавляется ребро $E = (a, b)$ так, что новый граф $G \cup E$ связен. Обозначим через

$$E_1^{(a)} = (a, a_1), \quad E_2^{(a)} = (a, a_2), \ \ldots, \tag{15.4.1}$$

$$E_1^{(b)} = (b, b_1), \quad E_2^{(b)} = (b, b_2), \ \ldots \tag{15.4.2}$$

ребра графа G, инцидентные соответственно a и b. Согласно индуктивному предположению граф, реберно изоморфный $G \cup E$, должен иметь вид $G' \cup E'$, где G' вершинно изоморфен G, а E' есть ребро с такими же смежностями ребер в G', что и E в G. Поэтому можно считать, что реберно изоморфный граф имеет вид $G \cup E'$, где $E' = (a', b')$.

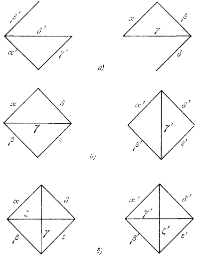


Рис. 15.4.2.

1. E является концевым ребром, присоединенным в вершине a. Чтобы показать, что $G \cup E$ и $G \cup E'$ вершинно изоморфны, достаточно доказать, что ребро E' также концевое с $a = a'$. Если бы ребро E' не было концевым, то оба его конца a' и b' принадлежали бы G, так что E' было бы смежно некоторым ребрам из G, отличным от (15.4.1). Но раз E' концевое, должно быть $a = a'$, так как иначе E' также было бы смежно некоторым ребрам не из (15.4.1).

2. E имеет оба конца в G.

(α) $a = a'$, $b \neq b'$. Чтобы доказать, что это невозможно, заметим, что, так как b' должно быть инцидентно всем ребрам (15.4.2), может найтись только одно такое ребро

$$E_1^{(b)} = (b, b_1) = (b, b').$$

Но тогда E' в b' смежно некоторому ребру в G, не принадлежащему (15.4.1) и (15.4.2); такое ребро в b' должно существовать, так как (b, b_1) не может быть изолированным ребром в G.

(β) E и E' не имеют общих концов. E' смежно всем ребрам (15.4.1); поэтому может быть не более двух таких ребер

$$E_1^{(a)} = (a, a_1), \quad E_2^{(a)} = (a, a_2), \quad E' = (a_1, a_2).$$

Все ребра (15.4.2) также смежны E'. Поэтому может найтись не более двух ребер в b, и они должны соединять b с a_1 и a_2. В любом случае E' смежно другим ребрам в a_1 и a_2, так как G связен и имеет более 4 вершин.

Так как пары графов на рис. 15.4.2 изоморфны, из теоремы 15.4.1 следует

Теорема 15.4.2. *Реберно изоморфные графы вершинно изоморфны, за исключением графов на рис.* 15.4.1.

Заметим, что два графа реберно изоморфны тогда и только тогда, когда их смежностные графы (п. 1.5) изоморфны. Таким образом, теорема 15.4.2 равносильна следующей теореме.

Теорема 15.4.3. *Графы с изоморфными смежностными графами изоморфны, за исключением графов на рис.* 15.4.1.

Пусть G — связный граф. Будем говорить, что G *циклически изоморфен* другому графу G', если существует такое взаимно однозначное реберное отображение между ними, что ребрам, лежащим на простом цикле в одном графе, соответствуют ребра на простом цикле в другом графе. Следующая теорема, по существу, принадлежит Уитни.

Теорема 15.4.4. *Пусть граф G связный и без разделяющих вершин. Для того чтобы все циклические изоморфизмы G индуцировались изоморфизмами, необхо-*

димо и достаточно, чтобы граф G был 3-вершинно связным.

Доказательство. Покажем сначала, что если G 3-вершинно связный, то любой циклический изоморфизм индуцируется изоморфизмом. Никакой из исключительных графов на рис. 15.4.1 и 15.4.2 не является 3-вершинно связным. Поэтому, согласно теореме 15.4.1, достаточно, чтобы любой циклических изоморфизм был реберным изоморфизмом. Предположим, что при циклическом изоморфизме двум смежным ребрам

$$E_1 = (a, b), \quad E_2 = (b, c)$$

соответствуют несмежные ребра

$$E_1' = (a', b'), \quad E_2' = (c', d').$$

По предположению о связности граф G_1, полученный из G после удаления ребер, отходящих от b, не может иметь разделяющих вершин. Теорема 5.4.3 показывает, что в G_1 существует простой цикл, проходящий через a

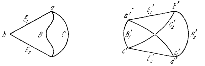


Рис. 15.4.3.

и c; следовательно, имеются две непересекающиеся простые цепи $B(a, c)$ и $C(a, c)$, не содержащие E_1 и E_2. Так как $E_1 \cup E_2 \cup B$ — простой цикл, его образ является простым циклом, проходящим через E_1' и E_2'. Изменим обозначения так, чтобы в этом полученном простом цикле a' была связана с c' и b' с d' (рис. 15.4.3). $E_1 \cup E_2 \cup C$ также есть простой цикл, которому соответствует простой цикл, проходящий через E_1' и E_2'. В этом простом цикле a' должна быть связана с d' раньше, чем с c' (как показано на рисунке), так как непосредственная связь по C' от a' к c', не содержащая E_1' и E_2', соответствовала бы простому циклу в G, состоящему только из части ребер из B и C. Следовательно, в G' существовал бы простой цикл $E_1' \cup C_1' \cup B_2'$. Но прообраз этого простого цикла не является простым циклом, и мы получаем противоречие.

Предположим далее, что вершинная связность G равна $l_0 = 2$. Тогда существует разложение G на два подграфа

$$G = G(A) \cup G(B), \quad A \cap B = \{a, b\}, \qquad (15.4.3)$$

где a и b — две разделяющие вершины; $G(A)$ и $G(B)$ имеют внутренние вершины. Если существует ребро (a, b), то отнесем его к $G(A)$. Из разложения (15.4.3) мы получим новый граф G^*, *поворачивая* G относительно вершин a и b, т. е. присоединяя $G(B)$ к $G(A)$ через переставленные разделяющие вершины a и b. Очевидно, граф G^* будет циклически изоморфен G, а ребра из $G(A)$ и $G(B)$ в a и b не останутся смежными.

Уитни доказал, что если $l_0 = 2$, то любой граф, циклически изоморфный графу G, изоморфен некоторому графу G^*, полученному из G последовательными поворотами относительно различных пар разделяющих вершин a и b.

Задачи

1*. Исследовать возможность получения результатов, аналогичных предыдущим, для классов частей графа, отличных от класса его простых циклов.

2*. Распространить предыдущие результаты на бесконечные графы.

ЛИТЕРАТУРА

Глава 1

C. Berge, Théorie des graphes et ses applications. Paris, 1958. Есть русский перевод: Берж К., Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.

D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.

A. Sainte-Laguë, Les réseaux (ou graphes). Mémor. Sci. Math., v. 18, 1926.

Многие сборники математических головоломок содержат задачи, которые можно сформулировать в терминах графов. Мы укажем здесь лишь следующие:

W. Rouse-Ball, Mathematical recreations and problems. London, 1892. Numerous editions.

E. Lucas, Récréations mathématiques. 3 v., Paris, 1882—1894. Есть русский перевод: Люкс Е. Л., Математические развлечения, СПБ, 1883.

Глава 2

2.7.

D. W. Crowe, The n-dimensional cube and the tower of Hanoi. Amer. Math. Monthly, v. 63 (1956), pp. 29—30.

Глава 3

3.1

L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Petropolitanae, v. 8 (1736), pp. 128—140.

N. G. de Bruijn, A combinatorial problem. Nederl. Akad. Wetensch. Proc., v. 49 (1946), pp. 758—764.

Van Aardenne-Ehrenfest and N. G. de Bruijn, Circuits and trees in oriented graphs. Simon Stevin, v. 28 (1951), pp. 203—217.

3.2

P. Erdös, T. Grünwald and E. Weiszfeld, Über Eulersche Linien unendlicher Graphen. Mat. Fiz. Lapok, v. 43 (1936), pp. 129—140.

P. Erdös, T. Grünwald and E. Vàzsonyi, Über Euler-Linien unendlicher Graphen. J. Math. Phys. Massachussets Inst. of Technology, v. 17 (1938), pp. 59—75.
E. Vàzsonyi, Über Gitterpunkte des mehrdimensionalen Raumes. Acta Litt. Sci. Szeged, v. 9 (1939), pp. 163—173.
G. Ringel, Über drei kombinatorische Probleme am n-dimensionalen Würfel und Würfelgitter. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, v. 20 (1955), pp. 10—19.

3.3

C. Wiener, Über eine Aufgabe aus der Geometria situs. Math. Ann., v. 6 (1873), pp. 29—30.
O. Ore, An Excursion into labyrinths. Mathematics Teacher, v. 52 (1959), pp. 367—370.
M. Beckman, C. B. McGuire and C. B. Winsten, Studies in the economics of transportation. New Haven, Yale University Press, 1956.
L. R. Ford, Network flow theory. Rand Corp. Publ. P-23 (1956).
Добавление к русскому переводу:
Форд Л. Р. и Фалкерсон Д. Р., Потоки в сетях, «Мир», М., 1966.

3.4

D. J. Newman, A problem in graph theory. Amer. Math. Monthly, v. 65 (1958), p. 611.
O. Ore, Note on Hamilton circuits. Amer. Math. Monthly, v. 67 (1960), p. 55.
W. T. Tutte, On Hamilton circuits. J. London Math. Soc., v. 21 (1946), pp. 98—101.
F. Supnick, Extreme Hamilton lines. Ann. of Math. (2), v. 66 (1957), pp. 179—201.
F. Fitting, Doppeltsymmetrische Rösselsprünge auf Quadraten von ungeraden Felderzahl ohne Mittelfeld. Jber. Deutsch. Math. Verein, v. 46 (1936), Abt. 1, pp. 38—43.
G. Dantzig, R. Fulkerson and S. Johnson, Solution of a large-scale travelling-salesman problem. Journal Operational Research Soc. of Amer., v. 2 (1954), pp. 393—410.
I. Heller, The travelling-salesman problem. George Washington Univ. Logistics Research Project, 1954.
M. M. Flood, On the travelling salesman's problem. Journal Operational Research Soc. of Amer., v. 4 (1956), pp. 61—75.
T. S. Motzkin and E. G. Straus, Some combinatorial extremum problems. Proc. Amer. Math. Soc., v. 7 (1956), pp. 1014—1021.
G. Dantzig, R. Fulkerson and S. Johnson, On a linear programming combinatorial approach to the travelling-salesman problem. Journal Operational Research Soc. of Amer., v. 7 (1959), pp. 58—66.
R. Bellman, On a routing problem. Quart. Appl. Math., v. 16 (1958), pp. 87—90.

Глава 4

4.1

A. Cayley, A theorem on trees. Quarterly Journal of Pure and Appl. Math., v. 23 (1889), pp. 376—378.
H. Prüfer, Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. Archiv der Math. und Phys. (3), v. 27 (1918), pp. 142—144.
O. Dziobek, Eine Formel der Substitutionstheorie. Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, v. 16 (1947), pp. 64—67.
G. Bol, Über eine kombinatorische Frage. Abh. Math. Seminar der Hansischen Univ., v. 12 (1938), pp. 242—245.
E. H. Neville, The codifying of tree-structure. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 49 (1953), pp. 381—385.
R. Bott and J. P. Mayberry, Matrices and trees. Также T. M. Whitin, An economic application of «Matrices and Trees». Опубликованы в сб. O. Morgenstern: Economic Activity Analysis, New York, John Wiley and Sons, 1954.
L. Vitalbi, Picerche sulla teoria dei reticoli. Giorn. Mat. Battaglini (5), v. 4 (84) (1956), pp. 93—121.
G. Andreoli, Preliminari topologici su gli alberi. Giorn. Mat. Battaglini (5), v. 2 (82) (1954), pp. 237—266.
P. J. Kelly, A congruence theorem for trees. Pacific J. Math., v. 7 (1957), pp. 961—968.
G. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Math., v. 68 (1937), pp. 145—254.
J. Riordan, An introduction to combinatorial analysis. John Wiley and Sons, New York, 1958. Есть русский перевод: Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963.
O. Borůvka, On a minimal problem. Práce Moraské Pridovedecké Spolecnosti, v. 3 (1926).
V. Jarník and M. Kossler, Sur les graphes minima contenant n points donnés. Casopis Mat. Fys., v. 63 (1934), pp. 223—235.
G. Choquet, Etude de certains réseaux de routes. C. R. Acad. Sci. Paris, v. 206 (1938), pp. 310—313.
J. B. Kruskal, On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. Proc. Amer. Math. Soc., v. 7 (1956), pp. 48—50.
D. Blanusa, Über die Anzahl der Bedingungsgleichungen beliebigen geodätischen Netzen. Z. Vermessungswesen, v. 73 (1944), pp. 54—62.

4.4

O. Ore, Graphs and correspondences. Festschrift Andreas Speiser Zürich (1945), pp. 184—191.
O. Ore, Incidence matchings in graphs. Journ. de Math., v. 40 (1961), pp. 123—127.

4.5

O. Ore, A problem regarding the tracing of graphs. Elem. Math., v. 6 (1951), pp. 49—53.
F. Bäbler, Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen Comment. Math., Helv., v. 27 (1953), pp. 81—100.
F. Harary. On arbitrarily traceable graphs and directed graphs. Scripta Math., v. 23 (1957), pp. 37—41.
Дополнительные работы по теории деревьев
A. Kotzig, The significance of the skeleton of a graph for the construction of composition bases of some subgraphs. Mat. Fyz. Časopis Slovensk. Akad. Vied., v. 6 (1956), pp. 68—77.
W. T. Tutte, A ring in graph theory. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 43 (1947), pp. 26—40.
J. S. R. Chisholm, The S-matrix for neutral PS — PV meson-nucleon interaction. Phil. Mag. (8), v. 1 (1956), pp. 338—344.
W. H. Burge, Sorting, trees and measures of order. Information and Control, v. 1 (1958), pp. 181—197.

Глава 5

5.1

S. Maclane, Some unique separation theorems for graphs. Amer. J. Math., v. 57 (1935), pp. 805—820.
R. E. Nettleton, K. Goldberg and M. S. Green. Dense subgraphs and connectivity. Canad. J. Math., v. 11 (1959), p. 262—268.

5.4

H. Whitney, Non-separable and planar graphs. Trans. Amer. Math. Soc., v. 34 (1932), pp. 339—362.
F. Harary, An elementary theorem on graphs. Amer. Math. Monthly, v. 66 (1959), pp. 405—407.
K. Husimi, Note on Mayers' theory of cluster integrals Journ. Chem. Phys., v. 18 (1950), pp. 682—684.
F. Harary and G. E. Uhlenbeck, On the number of Husimi trees. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., v. 39 (1953), pp. 315—322.
F. Harary and R. Z. Norman, The dissimilarity characteristic of Husimi trees. Ann. of Math. (2), v. 59 (1953), pp. 134—141.

5.5

G. A. Dirac, Some theorems on abstract graphs. Proc. London Math. Soc. (3), v. 2 (1952), pp. 69—81.
P. Erdös and T. Gallai, On maximal paths and circuits of graphs, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., v. 10 (1959), pp. 337—356.

Глава 6

6.4

O. Ore and T. S. Motzkin, Subsets and subgraphs with maximal properties. Proc. Amer. Math. Soc., v. 10 (1959), pp. 965—969.

Глава 7

7.1

R. Rado, Axiomatic treatment of rank in infinite sets. Canad J. Math., v. 1 (1949), pp. 337—343.

W. H. Gottschalk, Choice functions and Tychonoff's theorem. Proc. Amer. Math. Soc., v. 2 (1951), p. 172.

7.3

O. Ore, Graphs and matching theorems. Duke Math. J., v. 22 (1955), pp. 625—639.

P. Hall, On representatives of subsets. J. London Math. Soc., v. 10 (1935), pp. 26—30.

M. Hall, District representatives of subsets. Bull. Amer. Math. Soc., v. 54 (1948), p. 922—926.

7.4

N. G. de Bruijn, Gemeenschapelijke representantensystemen van twee klassenindeelingen van een versameling. Nieuw Archiev voor Wiskunde (2), v. 22 (1943), pp. 48—52.

G. Grünwald, Über einen mengentheoretischen Satz. Math. Fiz. Lapok, v. 44 (1937), pp. 51—53.

M. Hall, An algorithm for distinct representatives. Amer. Math. Monthly, v. 63 (1956), pp. 716—717.

P. R. Halmos and H. E. Vaughan, The marriage problem. Amer. J. Math., v. 72 (1950), pp. 214—215.

L. Henkin, Some interconnections between modern algebra and mathematical logic Trans. Amer. Math. Soc., v. 74 (1953), pp. 410—427.

P. J. Higgins, Disjoint transversals of subsets. Canad. J. Math., v. 11 (1959), pp. 280—285.

A. J. Hoffman and H. W. Kuhn, Systems of distinct representatives and linear programming. Amer. Math. Monthly, v. 63 (1956), pp. 455—460.

A. J. Hoffman and H. W. Kuhn, On systems of distinct representatives. Annals of Math. Studies, No. 38 (1956). Есть русский перевод: Гофман А. Дж., Кун Г. У., О системах различных представителей. В сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, М., 1959, 302—310.

G. Kreweras, Extension d'un théorème sur les répartitions en classes. C. R. Acad. Sci. Paris, v. 222 (1946), pp. 431—432.

W. Maak, Ein Problem der Kombinatorik in seiner Formulierung von H. Weyl. Math.-Phys. Semesterber. Göttingen, v. 22 (1952), pp. 251—256.

H. B. Mann and H. J. Ryser, Systems of distinct representatives. Amer. Math. Monthly, v. 60 (1953), pp. 397—401.
N. S. Mendelsohn and A. L. Dulmage, Some generalizations of the problem of distinct representatives. Canad. J. Math., v. 10 (1958), pp. 230—241.
N. S. Mendelsohn and A. L. Dulmage, Coverings of bipartite graphs. Canad. J. Math., v. 10 (1958), pp. 517—534.
R. Rado, Factorization of even graphs. Quart. J. Math., Oxford, v. 20 (1949), pp. 95—104.
B. Шмушкович, Об одной комбинаторной теореме теории множеств. Матем сб., 6 (48). 1 (1939), 139—146.
B. L. van der Waerden, Ein Satz über Klasseneinteilungen von endlichen Mengen. Hamburger Abh., v. 5 (1927), pp. 185—187.
H. Weyl, Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space. Amer. J. Math., v. 71 (1949), pp. 178—205.

7.5

G. Scorza, A proposito di un teorema del Chapman. Boll. Un. Mat. Ital., v. 6 (1927), pp. 1—6.
H. W. Chapman, A note on the elementary theory of groups of finite order. Messenger of Math., v. 42 (1913), pp. 132—134; v. 43, p. 85.
G. A. Miller, On a method due to Galois. Quart. J. Math., v. 41 (1910), pp. 382—384.
S. Shü, On the common representative system of residue classes of infinite groups. J. London Math. Soc., v. 16 (1941), pp. 101—104.
O. Ore, On coset representatives in groups. Proc. Amer. Math. Soc., v. 9 (1958), pp. 665—670.
O. Ore, Conditions for subgraphs of directed graphs. J. Math. Pures Appl., 37 (1958), pp. 321—328.

7.7

A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn, The term and stochastic rank of a matrix. Canad. J. Math., v. 11 (1959), pp. 269—279.
M. Hall, An existence theorem for Latin squares. Bull. Amer. Math. Soc., v. 51 (1945), pp. 387—388.
H. J. Ryser, A combinatorial theorem with an application to Latin rectangles. Proc. Amer. Math. Soc., v. 2 (1951), pp. 550—552.
H. J. Ryser, The term rank of a matrix. Canad. J. Math., v. 10 (1958), pp. 57—65.
M. Marcus, Some properties and applications of doubly stochastic matrices. Amer. Math Monthly., v. 67 (1960), pp. 215—221.
J. Singer, A class of groups associated with Latin squares. Amer. Math. Monthly, v. 67 (1960), pp. 235—240.

7.9

D. König, Graphen und Matrizes. Mat. Fiz. Lapok., v. 38 (1931), pp. 116—119.

D. König, Über trennende Knotenpunkte in Graphen. Acta Litt. ac. Scient. Szeged., v. 6 (1933), pp. 155—179.

D. König and S. Valkó. Über Mehrdeutige Abbildungen von Mengen. Math. Ann., v. 95 (1926), pp. 135—138.

R. Z. Norman and M. O. Rabin, An algorithm for a minimum cover of a graph. Proc. Amer. Math. Soc., v. 10 (1959), pp. 315—319.

C. Berge, Two theorems in graph theory. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., v. 43 (1957), p. 842—844.

7.10

P. J. Higgins, Disjoint transversals of subsets. Canad. J. Math., v. 11 (1959), pp. 280—285.

H. J. Ryser, Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. Canad. J. Math., v. 9 (1957), pp. 371—377.

D. Gale, A theorem on flows in networks. Pacific J. Math., v. 7 (1957), pp. 1073—1082.

Глава 8

8.1

H. E. Robbins, A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control. Amer. Math. Monthly, v. 46 (1939), pp. 281—283.

L. Egyed, Über die wohlgerichteten unendlichen Graphen. Mat. Fiz Lapok., v. 48 (1941), pp. 505—509.

L. Redei, Ein kombinatorischer Satz. Acta. Litt. Szeged, v. 7 (1934), pp. 39—43.

M. Friedler and J. Sedláček, Über Wurzelbasen von gerichteten Graphen. Casopis Pěst Mat., v. 83 (1958), pp. 214—225.

8.2

R. D. Luce, Two decomposition theorems for a class of finite oriented graphs. Amer. J. Math., v. 74 (1952), pp. 701—722.

R. D. Luce, Networks satisfying minimality conditions. Amer. J. Math., v. 75 (1953), pp. 825—838.

K. Čulík, Zur Theorie der Graphen. Casopis Pěst. Mat., v. 83, (1958), pp. 133—155.

8.4

L. Redei, Über die Kantenbasen für endliche vollständige gerichtete Graphen. Acta. Math. Sci. Hungar., v. 5 (1954), pp. 17—25.

8.6

O. Ore, Studies on directed graphs. I, Ann. of Math., v. 63 (1956), pp. 383—406; II, v. 64 (1956), pp. 142—153.

W. T. Tutte, The 1-factors of oriented graphs. Proc. Amer. Math. Soc., v. 4 (1953), p. 922—931.

Глава 9

9.2

O. Ore, Chains in partially ordered sets. Bull. Amer. Math. Soc., v. 49 (1943), pp. 558—566.
S. Maclane, A conjecture of Ore in partially ordered sets. Bull. Amer. Math. Soc., v. 49 (1943), pp. 567—568.
M. Benado, Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de O. Schreier. Acad. R. P. Romîne Bul. Şti. Secţ. Şti. Mat. Fiz., v. 4 (1952), pp. 585—591.
M. Benado, Bemerkungen zu einer Arbeit von Oystein Ore. Rev. Math. Pures Appl., v. 1 (1956), pp. 5—12.
M. Kolibiar, Bemerkung über die Ketten in teilweise geordneten Mengen. Acta Fac. Nat. Univ. Comenian, v. 3 (1958), pp. 17—22.

9.3

O. Ore, Sex in graphs. Proc. Amer. Math. Soc., v. 11 (1960), pp. 533—539.

Глава 10

10.2

R. P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets. Ann. of Math. (2), v. 51 (1950), pp. 161—166.
G. A. Moreira, Decomposition of partially ordered systems. Revista Cientifica, v. 1 (1950), pp. 12—18.
D. T. Fulkerson, Note on Dilworth's decomposition theorem for partially ordered sets. Proc. Amer. Math. Soc., v. 7 (1956), pp. 701—702.
G. B. Dantzig and A. J. Hoffman, Dilworth's theorem on partially ordered sets. Annals of Math. Studies, No. 38 (1956), pp. 207—214. Есть русский перевод: Данцпг Дж. Б., Гофман А. Дж., Теорема Дилворта о частично упорядоченных множествах. В сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, М., 1959, 311—317.

10.3

G. Birkhoff, Lattice theory. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., v. 25, Rev. ed. 1948. Есть русский перевод: Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, М., 1952.

10.4

E. Szpilrajn, Sur l'extension de l'ordere partiel. Fund. Math., v. 16 (1930), pp. 386—389.
B. Dushnik and E. W. Miller, Partially ordered sets. Amer. J. Math., v. 63 (1941), pp. 600—610.
B. Dushnik, Concerning a certain set of arrangements. Proc. Amer. Math. Soc., v. 1 (1950), pp. 788—796.
B. Dushnik and E. W. Miller, Partially ordered sets. Amer. J. Math., v. 70 (1948), pp. 507—520.

V. Sedmak. Dimension des ensembles partiellement ordonnés associés aux polygones et polyèdres. Hrvatsko, Prirodoslovno Društvo Glasnik Mat.-Fiz. Astr., Ser. II, v. 7 (1952), pp. 169—182.

V. Sedmak, Quelques applications des ensembles partiellement ordonnés. C. R. Acad. Sci. Paris, v. 236 (1953), pp. 2139—2140.

T. Hiraguchi, On the dimension of partially ordered sets. Sci. Rep. Kanazawa University, v. 1 (1951), pp. 77—94.

T. Hiraguchi. A note on Mr. Komm's theorems. Ibid., v. 2 (1953), No. 1, pp. 1—3.

T. Hiraguchi, On the dimension of orders. Ibid., v. 4 (1955), No. 1.

T. Hiraguchi, On the λ-dimension of the product of orders. Ibid., v. 5 (1956), pp. 1—5.

Глава 11

11.1

O. Ore, Galois connexions. Trans. Amer. Math. Soc., v. 55 (1944), pp. 493—513.

G. Birkhoff, Lattice theory. 2nd ed., 1948, Chapter IV. Есть русский перевод: Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, М., 1952, гл. IV.

C. J. Everett, Closure operators and Galois theory in lattices. Trans. Amer. Math. Soc., v. 55 (1944), pp. 514—525.

G. Pickert, Bemerkungen über Galois-Verbindungen. Arch. Math., v. 3 (1952), pp. 285—289.

G. Aumann, Bemerkungen über Galois-Verbindungen. Bayer. Akad. Wiss. M. N. Kl. (1955), pp. 281—284.

11.3

J. Riguet, Relations binaires, fermetures, correspondences de Galois. Bull. Soc. Math. France, v. 76 (1948), pp. 114—155.

J. Riguet, Quelques propriétés des relations difonctionelles. C. R. Acad. Sci. Paris., v. 230 (1950), pp. 1999—2000.

J. Riguet, Sur les ensembles réguliers de relations binaires. C. R. Acad. Sci. Paris, v. 231 (1950), pp. 936—937.

M. L. Dubreil-Jacotin, Quelques propriétés des applications multiformes. C. R. Acad. Sci. Paris, v. 230 (1950), pp. 806—808.

G. Y. Rainich, Involution and equivalence. Michigan Math. J., v. 2 (1954), pp. 33—34.

11.4

J. Riguet, Les relations de Ferrers. C. R. Acad. Sci. Paris, v. 232 (1951), pp. 1729—1730.

P. Dubreil, Relations binaires et applications. C. R. Acad. Sci. Paris, v. 230 (1950), pp. 1028—1030.

P. Dubreil, Comportement des relations binaires dans une application multiforme. C. R. Acad. Sci. Paris, v. 230 (1950), pp. 1242—1243.

R. M. Thrall, A combinatorial problem. Michigan Math. J., v. I (1952), pp. 81—88.

J. Lambek, Goursat's theorem and the Zassenhaus lemma. Canad. J. Math., v. 10 (1958), pp. 45—56.
K. Ono, On some properties of binary relations. Nagoya Math. J., v. 12 (1957), pp. 161—170.

Глава 12

12.2

D. König. Über trennende Knotenpunkte in Graphen. Acta Litt. Sci. Szeged, v. 6 (1933), pp. 155—179.
G. Hajös, Zum Mengerschen Graphensatz. Acta. Litt. Sci. Szeged, v. 7 (1934), pp. 44—47.
T. Grünwald, Ein neuer Beweis eines Mengerschen Satzes. J. London Math. Soc., v. 13 (1938), pp. 188—192.
G. A. Dirac, Connectivity theorems for graphs. Quarterly J. Math., Oxford Ser. (2), v. 3 (1952), pp. 171—174.

Глава 13

13.1

F. Scheid, Some packing problems. Amer. Math. Monthly., v. 67 (1960), pp. 231—235.

13.3

E. Netto, Lehrbuch der Combinatorik, 2. Aufl., 1927.
W. Sierpinski, Sur un problème de la théorie des relations. Fund. Math., v. 28 (1937), pp. 71—74.
S. Piccard, Solution d'un problème de la théorie des relations. Fund. Math., v. 28 (1936), pp. 197—202.
S. Piccard, Sur un problème de la théorie des relations. Mathematica, v. 13 (1937), pp. 55—58.
S. Marcus, Sur les ensembles indépendants dans la théorie des relations. Monatsh. Math., v. 63 (1959), pp. 244—255.
G. Fodor, On two problems concerning the theory of binary relations. Publ. Math. Debrecen, v. 1 (1950), pp. 199—200.
G. Fodor, On a theorem in the theory of binary relations. Compositio Math., v. 8 (1951), p. 250.
G. Fodor, On a problem concerning the theory of binary relations. Nieuw Archiv voor Wiskunde, v. 23 (1951), pp. 247—248.
D. Lázár, On a problem in the theory of aggregates. Compositio Math., v. 3 (1936), p. 304.
G. Grünwald. Über einen mengentheoretischen Satz. Math. Fiz. Lapok, v. 44 (1937), pp. 51—53.
F. Bagemihl, The Baire Category of independent sets. Compositio Math., v. 13 (1956), pp. 71—75.
P. Erdös and G. Fodor, Some remarks on set theory. V, Acta. Sci. Math. Szeged, v. 17 (1956), pp. 250—260; VI, v. 18 (1957), pp. 243—260.
T. Gallai, Über extreme Punkt- und Kantenmengen Annales. Un. Sci. Budapest, v. 2 (1959), pp. 133—138.

13.4

P. Turàn. Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. Math. Fiz. Lapok, v. 48 (1941), pp. 436—452.
P. Turàn, On the theory of graphs. Colloq. Math., v. 3 (1954), pp. 19—30.
K. Zarankiewicz, Sur les relations symétriques dans l'ensemble fini. Colloq. Math., v. 1 (1947), pp. 10—14.
P. Erdös and A. H. Stone, On the structure of linear graphs. Bull. Amer. Math. Soc., v. 52 (1946), pp. 1087—1091.
P. Erdös, Some theorems on graphs. Reveon Lematematika, v. 9 (1955), pp. 13—17.

13.5

F. P. Ramsey. On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc. (2), v. 30 (1930), pp. 264—286.
T. Skolem, Ein kombinatorischer Satz mit Anwendung auf ein logisches Entscheidungsproblem. Fund. Math., v. 20 (1935), pp. 254—261.
P. Erdös and R. Rado, A combinatorial theorem. J. London Math. Soc., v. 25 (1950), pp. 249—255.
P. Erdös and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry. Compositio Math., v. 2 (1935), pp. 463—470.
R. Rado, The distributive law for products of infinite series. Quart. J. Math., Oxford Ser., v. 11 (1940), pp. 229—242.
A. W. Goodman, On set of acquaintances and strangers at any party. Amer. Math. Monthly, v. 66 (1959), pp. 778—783.
A. M. Gleason and R. E. Greenwood, Combinatorial relations and chromatic graphs. Canad. J. Math., v. 7 (1955), pp. 1—7.
P. Erdös, Some remarks on the theory of graphs. Bull. Amer. Math. Soc., v. 53 (1947), pp. 292—294.
P. Erdös and R. Rado, Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set. Proc. London Math. Soc., v. 2 (1951), pp. 417—439.
P. Erdös and R. Rado, A partition calculus in set theory. Bull. Amer. Math. Soc., v. 62 (1956), pp. 427—489.

13.6

C. E. Shannon, The zero error capacity of a noisy channel. Transactions 1956 Symposium Information Theory, Institute of Radio Engineers, v. IT-2, pp. 8—19. Есть русский перевод: Шеннон К., Пропускная способность канала с шумом при нулевой ошибке. В сб.: Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ, М., 1963, 464—487.

Глава 14

14.1

P. Erdös and N. G. de Bruijn, A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. Indagationes Math., v. 13 (1951), pp. 369—373.

P. Erdös and R. Rado, Partition relations connected with the chromatic number of graphs, J. London Math. Soc., v. 34 (1959), pp. 63—72.
R. L. Brooks, On colouring the notes of a network. Cambridge Philos. Soc., v. 37 (1941), pp. 194—197.
J. Mycielski, Sur le coloriage des graphes. Colloq. Math., v. 3 (1955), pp. 161—162.

14.2

E. A. Nordhaus and J. W. Gaddum, On complementary graphs. Amer. Math. Monthly, v. 63 (1956), pp. 175—177.
А. А. Зыков, О некоторых свойствах линейных комплексов. Матем. сб., т. 24 (66), 2 (1949), стр. 163—188.

14.3

G. A. Dirac, Note on the colouring of graphs. Math. Z., v. 54 (1951), pp. 347—353.
G. A. Dirac, Some theorems on abstract graphs. Proc. London Mach. Soc. (3), v. 2 (1952), pp. 69—81.
G. A. Dirac, A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. J. London Math. Soc., v. 27 (1952), pp. 85—92.
G. A. Dirac, The structure of k-chromatic graphs. Fund. Math., v. 40 (1953), pp. 42—55.
G. A. Dirac, Circuits in critical graphs. Monatsh. Math., v. 59 (1955), pp. 178—187.
G. A. Dirac, A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger. Proc. London Math. Soc. (3), v. 7 (1957), pp. 161—195.
J. B. Kelly and L. M. Kelly, Paths and circuits in critical graphs. Amer. J. Math., v. 76 (1954), pp. 786—792.
R. C. Read, Maximal circuits in critical graphs. J. London Math. Soc., v. 32 (1957), pp. 456—462.
B. Zeidl, Über 4- und 5-chrome Graphen. Monatsh. Math., v. 62 (1958), pp. 212—218.

14.4

G. D. Birkhoff, A determinant formula for the number of ways of colouring a map. Ann. of Math. (2), v. 14 (1912), pp. 42—46.
G. D. Birkhoff, On the number of ways of colouring a map. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), v. 2 (1930), pp. 83—91.
H. Whitney, A logical expansion in mathematics. Bull. Amer. Math. Soc., v. 38 (1932), pp. 572—579.
H. Whitney. The colouring of graphs. Ann. of Math. (2), v. 33 (1932), pp. 688—718.
H. Whitney, A set of topological invariants for graphs. Amer. J. Math., v. 55 (1933), pp. 231—235.

Глава 15

15.1

R. Frucht, Die Gruppe des Petersenschen Graphen und der Kantensysteme der regulären Polyeder. Comment. Math. Helv., v. 9 (1937), pp. 217—223.

I. N. Kagno, Desargues' and Pappus' graphs and their groups. Amer. J. Math., v. 69 (1947), pp. 859—862.

I. N. Kagno, Linear graphs of degree ≤ 6 and their groups. Corrections ibid., v. 69 (1947), p. 872; v. 77 (1955), p. 392.

G. Pólya. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta. Math., v. 68 (1937) pp. 145—254.

15.2

A. Cayley, The theory of groups, graphical representation. Math. Papers, v. 10, pp. 403—405.

A. Cayley, On the theory of groups. Ibid., v. 10, pp. 323—330; v. 11, pp. 365—367.

R. A. Rankin, A campanolorical problem in group theory. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 44 (1948), pp. 17—25.

T. J. Fletcher, Campanological groups. Amer. Math. Monthly, v. 63 (1956), pp. 619—626.

D. J. Dickinson. On Fletcher's paper: «Campanological groups». Amer. Math. Monthly, v. 64 (1957), pp. 331—332.

E. S. Rapaport, Cayley color groups and Hamilton lines. Scripta Math., v. 24 (1959), pp. 51—58.

15.3

R. Frucht, Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe. Compositio Math., v. 6 (1938), pp. 239—250.

R. Frucht, Graphs of degree three with a given abstract group. Canad. J. Math., v. 1 (1949), pp. 365—378.

R. Frucht, On groups of repeated graphs. Bull. Amer. Math. Soc., v. 55 (1949), pp. 418—420.

R. Frucht, On the construction of partially ordered systems with a given group of automorphisms. Rev. Un. Mat. Argentina, v. 13 (1948), pp. 12—18.

G. T. Tranque, The type in cubic graphs. Gaceta Mat., (1), v. 5 (1953), pp. 11—23.

H. Izbicki, Reguläre Graphen 3., 4. und 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen. Monatsh. Math., v. 61 (1957), pp. 42—50.

H. Izbicki, Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften Ibid, v. 63 (1959), pp. 298—307.

H. Izbicki, Reguläre Graphen beliebigen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften. Ibid., v. 64 (1960), pp. 15—21.

G. Sabidussi, Graphs with given group and given graph-theoretical properties. Canad. J. Math., v. 9 (1957), pp. 515—525.

G. Sabidussi, On the minimum order of graphs with given automorphism group. Monatsh. Math., v. 63 (1959), pp. 124—127.
G. Sabidussi, Graphs with given infinite groups. Ibid., v. 64 (1960), pp. 64—67.
G. Sabidussi, Graph multiplication. Math. Z., v. 72 (1960), pp. 446—457.
G. Sabidussi, On a class of fixed-point-free graphs. Proc. Amer. Math. Soc., v. 9 (1958), pp. 800—804.
G. Sabidussi, The composition of graphs. Duke Math. J., v. 26 (1959), pp. 693—696.
F. Harary, On the group of the composition of two graphs. Duke Math. J., v. 26 (1959), p. 29—34.
G. Birkhoff, On groups of automorphisms, Rev. Un. Math. Argentina, v. 11 (1946), pp. 155—157.
W. T. Tutte, A family of cubical graphs. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 43 (1947), pp. 459—474.
H. S. M. Coxeter, Self-dual configurations and regular graphs. Bull. Amer. Math. Soc., v. 56 (1950), pp. 413—455.
R. Frucht, A one-regular graph of degree three. Canad. J. Math., v. 4 (1952), pp. 240—247.

15.4

H. Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs. Amer. J. Math., v. 54 (1932), pp. 150—168.
H. Whitney, On the classification of graphs. Ibid., v. 55 (1933), pp. 236—244.
H. Whitney, 2-isomorphic graphs. Ibid., v. 55 (1933), pp. 245—254.
R. M. Foster, Geometrical circuits of electrical networks. Bell. Tel. Syst. Techn. Publ. B-653; также Transactions Amer. Inst. Elec. Eng., v. 51 (1932), pp. 309—317.
J. Krausz, Démonstration nouvelle d'un théorème de Whitney sur les réseaux. Mat. Fiz. Lapok, v. 50 (1943), pp. 75—85.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ