Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes

Par Gaston Julia, Paris

En 1909, parlant au Congrès de Rome, *G. Darboux* disait: « Depuis une trentaine d'années, un changement profond s'est accompli sous nos yeux dans l'orientation des études mathématiques. La théorie des fonctions, puisqu'il faut l'appeler par son nom, attire aujourd'hui, avec une force irrésistible, les recherches des plus jeunes, des plus actifs, des plus inventifs parmi nous. Un esprit nouveau les anime: il nous a déjà valu, et nous promet plus encore pour l'avenir, de belles et profondément originales découvertes. »

Nous allons essayer, dans cette conférence, de fixer quelques étapes et de préciser quelques caractères du développement de cette théorie des fonctions dont *G. Darboux* relevait déjà la séduction. Dans des congrès antérieurs, des voix autorisées vous ont entretenus, à diverses reprises, des fonctions de variables réelles et du prodigieux renouvellement que leur étude a provoqué dans la science mathématique. Nous considérerons aujourd'hui les fonctions de variables complexes pour noter les progrès réalisés dans les problèmes qui les concernent. Sans entrer dans les détails que donnent les « Encyclopédies » et les « Mémoriaux », nous chercherons simplement à discerner les grandes phases de ce développement et les plus caractéristiques, pour en présenter une esquisse aussi nette et aussi complète que le permet le cadre de cette conférence.

* * *

Ce qui caractérise essentiellement les fonctions de variables complexes que l'on étudie, et les différencie des fonctions de variables réelles, c'est qu'elles sont parfaitement déterminées dans tout le domaine connexe où elles existent, dès qu'elles sont déterminées dans une partie arbitrairement petite de ce domaine. A cet égard, les fonctions envisagées par les analystes ont été, d'abord et pendant longtemps, uniquement des fonctions monogènes et analytiques d'une ou de plusieurs variables. La théorie de ces fonctions, assise d'abord par *Cauchy,* sur les notions de *monogénéité* (dérivée unique) et *d'intégrale définie*, a été assise ensuite par *Weierstrass* sur *la série de Taylor* et *le prolongement analytique*. L'équivalence n'était cependant pas parfaite comme on l'a cru longtemps, la différence des deux points de vue correspondant à une différence très profonde dans les domaines où il est possible de définir les fonctions monogènes. La révélation de cette différence est l'œuvre, récente, de M. *Borel*, qui réussit il y a vingt ans à dégager nettement la notion générale de fonction monogène de *Cauchy*, qu'on peut définir dans un domaine C ou domaine de *Cauchy*, de la notion plus restrictive de fonction analytique, qu'on peut définir dans un domaine moins général, domaine W ou de *Weierstrass*. Nous examinerons donc: d'une part, les fonctions *monogènes analytiques* d'une ou de plusieurs variables; d'autre part, les fonctions monogènes non-analytiques qu'on appelle aujourd'hui fonctions *quasi-analytiques*, ces dernières constituant, entre les fonctions analytiques et les fonctions de variables réelles, une bande étroite où les études, bien que fort attachantes, sont jusqu'ici assez restreintes. Et nous distinguerons en gros trois périodes, la première allant de *Cauchy* aux environs de 1880, la seconde allant aux environs de 1900, la troisième allant jusqu'aux recherches contemporaines.

PREMIÈRE PÉRIODE

Cauchy se préoccupe surtout de poser les principes de sa théorie, de créer les méthodes fondamentales (*intégrale de Cauchy, calcul des limites ou méthode des majorantes, méthode d'approximation dite de Cauchy-Lipschitz*) par lesquelles elle se développera, et de les appliquer aux principaux problèmes de l'Analyse: calcul des fonctions implicites, intégration des équations différentielles et aux dérivées partielles; il établit ce que nous appelons les *théorèmes d'existence locaux*. Mais il commence l'étude des *points singuliers* (pôles, résidus), calcule le rayon de convergence de la série de Taylor et emploie déjà le prolongement analytique pour les équations différentielles.

Succédant à *Cauchy*, et fidèles à son point de vue, *Puiseux, Briot* et *Bouquet, Hermite* portent leurs efforts sur les *fonctions algébriques*, étudiées pour *toutes les valeurs de la variable*, leurs points singuliers critiques ou non, leurs intégrales et leur périodicité, les transcendantes périodiques provenant de l'inversion des différentielles algébriques (*fonctions elliptiques ou abéliennes*), sur le rôle de ces transcendantes dans la théorie des équations différentielles ou l'Arithmétique, en même temps qu'ils amorcent l'étude locale des *points singuliers des intégrales* des équations différentielles.

Ailleurs, suivant des orientations et utilisant des méthodes différentes, *Riemann, Weierstrass* et leurs émules ou élèves (*Clebsch, Neumann, Schwarz, Klein*) poursuivent l'étude des mêmes *problèmes algébriques*, tandis que *Fuchs*, se rattachant plutôt à l'école de *Cauchy*, étudie les points singuliers les plus simples des équations différentielles, en particulier les permutations des intégrales des équations linéaires par des circuits autour des points singuliers.

Cédant à leurs efforts répétés le monde algébrique fait apparaître des possibilités nouvelles qui enrichissent l'objet de la théorie des fonctions et l'ensemble de ses méthodes.

Les notions de points critiques, de lacets, celle, si importante, de périodicité, éclairent la notion de fonction multiforme tandis que, par les surfaces à plusieurs feuillets de *Riemann*, ces notions deviennent plus intuitives et familières. La connaissance de plus en plus précise du monde algébrique soulève des problèmes intéressants comme la *représentation paramétrique des courbes algébriques*, déjà résolue pour les genres zéro et un. Conjugué avec les recherches de *Briot* et *Bouquet*, de *Fuchs*, *Schwarz* et *Jordan* sur l'inversion des différentielles algébriques et sur les équations différentielles, cet ensemble devait aboutir à la théorie de *l'uniformisation* qui sera un des thèmes principaux de recherches dans la période suivante.

Par la théorie des fonctions elliptiques, les *points singuliers essentiels* isolés montrent déjà leur complexité et *Weierstrass* commence l'étude de ces points. Les *lignes singulières* lui apparaissent aussi et il fournit la première série de *Taylor* admettant pour coupure son cercle de convergence tandis que, venant de l'Arithmétique, par ses études sur la fonction modulaire, *Hermite* découvre lui aussi ces lignes singulières dont la nature apparaîtra plus clairement dans les travaux de *Schwarz* et dans les fonctions fuchsiennes de *Poincaré*.

La théorie des fonctions s'élève de problèmes *locaux* à des problèmes *généraux* dont certains, les problèmes algébriques, sont déjà plus ou moins résolus: étude dans tout le domaine d'existence, recherche de ses frontières et des singularités, étude des fonctions au voisinage des singularités, et *Weierstrass* ébauche une synthèse d'une logique très satisfaisante, basée sur la série de *Taylor*, les éléments de fonction analytique, le prolongement analytique, fondus dans la notion de domaine d'existence W défini avec précision. Dans l'intérieur de ce domaine on cherche des *représentations analytiques* (séries, produits infinis, intégrales) valables dans des régions de plus en plus étendues (théorèmes de *Weierstrass* et de *Mittag-Leffler*); la série de *Taylor* joue toujours un rôle prépondérant, mais les séries de fractions rationnelles interviennent déjà dans les fonctions elliptiques telles que les présente *Weierstrass*, et les séries thêta à une ou plusieurs variables, étudiées par *Jacobi*, *Hermite*, *Weierstrass* et *Riemann* mettent entre les mains des analystes des représentations analytiques nouvelles souples et précises.

Un enrichissement parallèle s'observe dans les méthodes. Déjà *Riemann* avait, dans la définition des fonctions analytiques, souligné le rôle des deux équations différentielles classiques de *Cauchy* pour l'existence d'une dérivée unique et ramené l'étude des fonctions analytiques de $z = x + iy$ à celle des fonctions harmoniques réelles de x et y. Par sa théorie des surfaces de *Riemann* et de leur connexion il fait jouer un rôle fondamental à cette *topologie* dont le rôle, grâce aux beaux travaux de *Jordan*, ne fera que grandir. Par l'introduction du *genre* des surfaces de *Riemann* algébriques, il fait apparaître le véritable rôle de l'invariant d'*Abel*. Par l'introduction des *substitutions birationnelles*, il *classe* les courbes algébriques à l'aide du nombre minimum de paramètres, les *modules*. Par ses recherches sur le problème de *Dirichlet* et sur la *représentation conforme*, il fournira des éléments fondamentaux à la théorie de l'uniformisation. Ce qu'ici ses démonstrations ont d'insuffisant, *Weierstrass* le montre par une critique lucide et créatrice. *Neumann*, *Schwarz* donnent alors des solutions rigoureuses de ces problèmes sous des hypothèses convenables relatives aux frontières du domaine, ils étendent ensuite ces solutions aux théorèmes d'existence sur une surface de *Riemann* algébrique donnée à priori.

Pendant que les disciples de *Cauchy*, de *Riemann*, de *Weierstrass* continuent d'explorer le domaine algébrique, pendant que *Fuchs*, *Schwarz* et *Jordan* après *Briot* et *Bouquet* rapprochent ce domaine des équations différentielles par leurs travaux sur les intégrales uniformes des équations du premier ordre, sur l'inversion uniforme du rapport de deux intégrales d'une équation linéaire du second ordre, sur les équations linéaires du second ordre à coefficients rationnels et intégrale algébrique, se forment dans les pépinières de l'Ecole Polytechnique et de l'Ecole Normale Supérieure de Paris des hommes qui vont répondre à plusieurs des questions ouvertes, puis donner un nouvel essor à la théorie des fonctions.

DEUXIÈME PÉRIODE

1° Les fonctions entières

Weierstrass avait commencé l'étude des transcendantes uniformes d'une variable les plus simples, les fonctions entières, et, par sa décomposition en facteurs primaires, donné une représentation commode mettant bien en évidence les zéros de la fonction. Il avait montré qu'une fonction entière approche indéfiniment toute valeur au voisinage du point singulier essentiel laissant pendante la question des valeurs effectivement prises. En 1879, s'appuyant sur la fonction modulaire qu'il connaît bien par ses études antérieures, M. *Picard* démontre les deux célèbres théorèmes qui tranchent la question précédente: « théorèmes révélateurs, dit M. *Painlevé*, qui, tels deux caps d'un continent inconnu découverts par quelques hardis navigateurs, font pressentir un monde mystérieux, monde si vaste et si riche que cinquante années d'exploration n'en ont pas encore épuisé les secrets. »

La théorie des fonctions entières reçoit par cette découverte une prodigieuse impulsion. *Laguerre* introduit la notion de *genre*, *Poincaré* établit une relation entre la *croissance du module maximum* $M(r)$ (ordre apparent) et d'une part le genre, d'autre part l'*allure asymptotique des coefficients de Taylor*. Puis M. *Hadamard* montre que la croissance de $M(r)$ renseigne sur l'*allure des modules des zéros* et il établit pour $M(r)$ une *borne inférieure* très précieuse, sur des cercles de rayon indéfiniment croissant: il conclut en établissant que la fonction $\xi(t)$ de *Riemann* est de genre zéro. M. *Borel* enfin donne la première *démonstration élémentaire* du théorème de M. *Picard* et, dans son mémoire fondamental sur les zéros des fonctions entières, assied la technique de ces fonctions sur les bases définitives, où nous la trouvons aujourd'hui: introduction et rôle de l'*ordre réel*, sa relation avec la *croissance de $M(r)$*, *classification des fonctions* d'après cette croissance, relation de $M(r)$ avec *le plus grand terme* de la série de Taylor, *méthode d'exclusion* ..., tels sont les principes que les *Lindelöf*, les *Boutroux*, les *Wiman* développeront et préciseront dans tous leurs détails. La théorie des fonctions entières est un des premiers exemples réussis d'étude dans tout le domaine d'existence.

2⁰ Les fonctions automorphes. L'uniformisation des fonctions algébriques ou analytiques d'une variable

Le monde algébrique va subir de nouveaux assauts.

Par sa découverte des *groupes fuchsiens ou kleinéens*, et des fonctions uniformes invariantes par les substitutions de ces groupes, *Poincaré* établit l'existence de *représentations paramétriques de toutes les courbes algébriques*, dont *Klein* d'autre part avait établi la possibilité dans des cas spéciaux; *l'uniformisation des fonctions algébriques d'une variable* est ainsi réalisée, et *Poincaré* donne une représentation conforme sur un polygone plan de la surface de *Riemann* de ces fonctions. Il intègre en passant toutes les équations linéaires à coefficients algébriques dont les points singuliers sont assez simples: il donne une généralisation surprenante de la théorie des fonctions elliptiques et des exemples naturels et instructifs de ces lignes singulières que *Weierstrass* et *Hermite* avaient rencontrées. Les *fonctions fuchsiennes ou kleinéennes* sont un autre exemple d'étude réussie dans tout le domaine d'existence; elles montrent les particularités curieuses que peut présenter ce domaine: frontières régulières ou courbes de *Jordan* sans courbure ou ensembles parfaits discontinus du type *Schottky*, etc.

Peu après, et sauf une lacune qu'il comblera ensuite, *Poincaré* uniformise *toutes les fonctions analytiques*, donnant le premier exemple d'une spéculation hardie sur les surfaces de *Riemann* à une infinité de feuillets. Il ne perdra pas de vue ce sujet et il reviendra plus tard à des questions connexes, comme le problème de *Dirichlet*, en créant cette originale « *méthode du balayage* » qu'il utilisera, pour établir la représentation conforme des surfaces de *Riemann* simplement connexes sur des cercles de rayon fini ou infini, dans son célèbre mémoire des Acta où l'uniformisation des fonctions analytiques se trouve acquise sans restriction.

Par ailleurs, en utilisant sa belle méthode d'approximations successives, M. *Picard*, par intégration de $\Delta u = k e^u$ $(k > 0)$, apporte des contributions précieuses à la résolution d'importants problèmes d'existence sur les fonctions automorphes.

Cet ensemble de découvertes admirables, complété par les recherches des *Appell*, des *Goursat*, des *Humbert*, des *Painlevé*, des *Klein*, des *Fricke*, des *Hurwitz* ..., achèvera de nous rendre familières les courbes algébriques, leurs représentations paramétriques, leurs surfaces de *Riemann* et leurs représentations planes, tandis que le problème de la *représentation conforme des aires multiplement connexes* recevra de M. *Schottky* des solutions intéressantes qui le feront rentrer dans le cycle des problèmes algébriques.

3⁰ Les fonctions algébriques de deux variables

M. *Picard* s'attaque aux fonctions algébriques de deux variables. Avec ses *groupes hyperabéliens, hyperfuchsiens, hyperkleinéens* et les fonctions qu'ils laissent invariantes, il pénètre plus avant dans ce monde des fonctions analytiques de plusieurs variables desquelles on sait encore si peu de chose en dehors des problèmes locaux.

On n'avait alors que des renseignements généraux très réduits: les théorèmes de *Cauchy*, de *Weierstrass* puis de *Hurwitz* sur les fonctions implicites ou les fonctions rationnelles. Mais les fonctions abéliennes fournissaient une base de départ analogue aux fonctions elliptiques pour une variable. C'est de cette base, améliorée d'abord par de nombreux travaux, que M. *Picard* partira pour étudier ses fonctions hyperfuchsiennes, hyperkleinéennes ...

Avec *Poincaré* il démontre la *nécessité d'une relation quadratique* entre les périodes des fonctions quadruplement périodiques. Et, tandis que, par une analyse d'une étonnante hardiesse où se révèlent les difficultés du problème de *Dirichlet* à deux variables complexes, *Poincaré* établit, pour les fonctions méromorphes de deux variables, la *représentation par un quotient de deux fonctions entières*, et, plus tard, étendra aux intégrales doubles la *théorie des résidus* de *Cauchy*, M. *Picard*, par une analyse pénétrante et féconde, fonde la théorie moderne des fonctions algébriques de deux variables. Il leur découvre des caractères profonds et sans équivalent dans les fonctions algébriques d'une variable, notamment le rôle des *intégrales de différentielles totales algébriques de première ou deuxième espèce* qu'une surface algébrique ayant suffisamment de singularités (surface irrégulière) peut seule posséder; il caractérise par un entier $\varrho \geq 1$ le nombre des *courbes logarithmiques possibles des intégrales de troisième espèce*, il introduit le *genre géométrique*, nombre des *intégrales doubles de première espèce*, calcule le nombre des intégrales doubles de *deuxième espèce* et de leurs périodes distinctes ...

Par ces principes qu'*Humbert*, MM. *Painlevé*, *Garnier* en France, MM. *Castel-*

nuovo, *Enriques*, *Severi* et leurs élèves en Italie, développeront, complèteront, préciseront, M. *Picard* nous a introduits au cœur des fonctions algébriques de deux variables, et, par ses travaux sur les fonctions hyperfuchsiennes, il a tenté sur le problème difficile d'uniformisation de ces fonctions l'essai que permettaient les difficultés de la topologie des espaces supérieurs.

4º Les intégrales des équations différentielles algébriques

En fidèles disciples de *Cauchy*, les deux grands géomètres français dont nous venons d'indiquer quelques œuvres maîtresses ne séparaient pas la théorie générale des fonctions de celle des équations différentielles à variables complexes, cette dernière étant pour eux un chapitre fondamental de la première. Après eux, la théorie des fonctions algébriques est achevée dans ses grandes lignes. Mais, comme il fallait s'y attendre, ils ont sur les équations différentielles algébriques posé de nouveaux problèmes dont M. *Painlevé*, animé du même esprit, va poursuivre l'étude.

Dans sa thèse, approfondissant la notion de prolongement analytique, il affermit ses connaissances (et les nôtres) sur les domaines d'existence des fonctions générales et leur représentation analytique dans ces domaines; puis, les fonctions algébriques désormais bien connues, il explorera les *intégrales des équations différentielles algébriques* pour déterminer leurs singularités, leur domaine d'existence, leur uniformité ou multiformité, leurs représentations analytiques. Pendant dix années d'un labeur soutenu il s'attachera à ces problèmes difficiles: prospecteur hardi et perspicace, très informé aussi des plus récents progrès de la théorie des fonctions, créant des méthodes originales et fécondes lorsqu'il ne peut utiliser celles qu'il tient de ses prédécesseurs, il progressera sur ce « continent inconnu » dont au jubilé de son ancien maître il a parlé en termes si émouvants. Considérant d'abord les équations du premier ordre, c'est *en fonction* de la *constante d'intégration* qu'il étudie leurs intégrales; chemin faisant il ajoute des théorèmes à la théorie des fonctions algébriques, notamment sur les transformations simplement rationnelles; et cherchant comment les singularités des intégrales dépendent de la constante d'intégration, il obtient ses premiers résultats. Mais c'est dans l'étude des équations d'ordre supérieur qu'il rencontre les plus grandes difficultés: s'attaquant au problème fondamental, il crée une méthode permettant de former toutes les équations dont les intégrales ont des *points critiques fixes* qu'on peut déterminer sans intégration à partir de l'équation elle-même. Déterminant effectivement ces équations pour l'ordre deux, en particulier celles dont l'intégrale est uniforme ou n'a qu'un nombre fini de branches, il en découvre de remarquables dont l'intégrale générale est une fonction entière ou méromorphe, irréductible aux transcendantes connues, et possédant des propriétés asymptotiques curieuses découvertes par *P. Boutroux*. La même méthode sera plus tard appliquée aux équations d'ordre supérieur par ses élèves *Boutroux*, *Chazy*, *Garnier*. En signalant enfin l'inversion par des fonctions uniformes d'un système de deux différentielles totales algébriques de deux variables qui se rattachent aux études de M. *Picard*, nous aurons donné quelque idée des succès que, grâce à M. *Painlevé*, la théorie des fonctions vérifiant une équation différentielle algébrique aura enregistrés sur un des plus difficiles terrains de recherche qui se soient rencontrés jusqu'ici.

5⁰ Le prolongement analytique

1⁰ Etude d'une fonction à partir de données relatives à un point d'holomorphie

Dans les paragraphes précédents nous avons vu la théorie des fonctions progresser vers des problèmes de plus en plus généraux, sur les terrains que l'expérience et l'intuition révélaient peu à peu aux analystes: fonctions algébriques et leurs intégrales, fonctions uniformes (elliptiques, automorphes), possédant des propriétés connexes d'invariance ou de périodicité très simples permettant l'étude du domaine d'existence tout entier et de l'allure aux frontières; fonctions uniformes (entières ou méromorphes) n'ayant qu'un point singulier essentiel; fonctions satisfaisant à des équations différentielles algébriques où la détermination du domaine d'existence et des propriétés sont beaucoup plus difficiles. Chemin faisant, sous l'empire de la nécessité et parce que les problèmes particuliers bien posés sont un facteur essentiel de progrès, des moyens techniques (surfaces de *Riemann*, *polygone fondamental*, ...) et des représentations analytiques de plus en plus puissants et appropriés à leur objet (séries de polynomes, de fractions rationnelles, séries thêta, produits infinis, séries de *Weierstrass* et de *Mittag-Leffler*) étaient créés à côté de cette série de Taylor qui, *pouvant convenir à toutes les fonctions analytiques*, se trouvait par là même impropre aux études particulières citées plus haut.

Sous l'influence des progrès ainsi réalisés, nous allons voir grandir le nombre et l'importance d'études consacrées comme la théorie des fonctions entières ou méromorphes à des classes très générales de fonctions, surtout de fonctions uniformes (auxquelles se ramènent les multiformes par l'uniformisation), satisfaisant à des conditions de plus en plus larges, et définies par des moyens de plus en plus variés. Accompagnant la marche parallèle de la théorie des fonctions de variable réelle, la théorie des fonctions de variable complexe devient avare d'hypothèses à priori (voir par exemple la démonstration de M. *Goursat* pour le théorème de *Cauchy*, où seule l'existence d'une dérivée est supposée); l'étude minutieuse des conséquences qu'entraînent de strictes hypothèses voit se révéler une quantité de possibilités nouvelles, tandis que se développe l'étude serrée des représentations analytiques, de leurs domaines de validité, des propriétés de la fonction déduites de ces représentations et des possibilités de représentation des fonctions dans tout leur domaine d'existence.

a) *Les singularités d'une fonction déduites de sa série de Taylor*

La plus ancienne de ces représentations est la série de *Taylor* dont *Cauchy*, à partir de son intégrale, établit l'existence et détermine le domaine de validité. En calculant à partir des coefficients le rayon du cercle de convergence, *Cauchy* donnait la distance au centre du point singulier le plus voisin, et *Weierstrass*, par le prolongement analytique, indiquait, pour déterminer le domaine d'existence et calculer les valeurs de la fonction, un moyen, il est vrai, théorique. Ainsi se trouvaient posés deux problèmes principaux: *détermination des points singuliers, calcul de la fonction dans tout le domaine d'existence.*

Tandis que *Darboux* avait obtenu, à partir des points singuliers de la fonction, des renseignements sur l'allure asymptotique de ses coefficients de *Taylor*, M. *Hadamard* s'est attaché *à déterminer les singularités à partir de ces coefficients*. Dans un mémoire aujourd'hui classique et dans ses travaux ultérieurs, il a créé des méthodes d'exploration dont les principes, allant bien au-delà des applications qu'il en a faites, sont les bases de l'état actuel de la question: critères permettant de déceler les *pôles*, leurs parties infinies, même des points singuliers plus généraux, et par conséquent de *reconnaître les fonctions méromorphes*, *ordre* en un point du cercle de convergence, théorème sur la *multiplication* des *singularités*, influence des *lacunes* sur les points singuliers, notamment des séries non prolongeables *W*, voici quelques principes dont la fécondité a été confirmée par les nombreux successeurs de M. *Hadamard* (*Borel*, *Leau*, *Le Roy*, *Lindelöf*, *Faber*, *Fabry*, *Dienes*, *Hardy*, *Nörlund*, *Soula*, *Mandelbrojt*...).

L'étude des séries non prolongeables et des lacunes recevra un développement particulièrement élégant par les beaux travaux de MM. *Borel* et *Fabry*, et, tout récemment, MM. *Pólya* et *Ostrowski* lui apporteront des éléments nouveaux: rôle de la *densité des coefficients non nuls*, relation des *lacunes avec l'ultra-convergence* des sommes partielles.

Indépendamment des travaux précédents, guidé par ses recherches sur les séries trigonométriques, *Fatou* donne plusieurs théorèmes concernant *l'allure de la série sur le cercle de convergence* et il énonce un beau théorème, que *Hurwitz* et M. *Pólya* démontreront de deux façons différentes, sur le rôle des *signes* (c'est-à-dire des *arguments*) *des coefficients*, quels que soient les modules, dans les séries non prolongeables, tandis que, dans la voie ouverte par le théorème classique *d'Eisenstein*, les travaux de MM. *Borel* et *Pólya* d'une part, de *Fatou* d'autre part, devaient aboutir au beau théorème de M. *Carlson* sur les séries à coefficients entiers et rayon de convergence égal à un.

Quant à l'étude de la série de *Taylor* sur son cercle de convergence: convergence, divergence, allure au voisinage du cercle, théorème d'*Abel*, ses extensions et inversions, sommations diverses et propriétés différentielles de la somme, il faudrait un livre pour passer en revue les résultats acquis, dont beaucoup relèvent d'ailleurs du prolongement que nous allons maintenant examiner.

b) *Le prolongement analytique des séries de Taylor*

C'est, en effet, surtout dans le prolongement analytique que les progrès réalisés ont été importants. La question a tenu le premier plan des préoccupations de *Weierstrass:* son théorème sur la convergence dans un domaine, vers une fonction holomorphe, d'une série de fonctions holomorphes lorsqu'elle converge uniformément sur le contour (théorème corrélatif de l'intégrale de *Cauchy*), comme son « *Doppelreihensatz* » en témoignent suffisamment. Sa représentation de la dérivée logarithmique des fonctions entières conduisit *Mittag-Leffler* au beau théorème par lequel il donnait, pour toute fonction analytique uniforme dont les points singuliers forment un ensemble réductible, une expression, valable en tout point non singulier, où se trouvaient mis en évidence les points singuliers et la singularité de la fonction en ces points. Peu après, *Runge* représentait avec un large arbitraire une fonction uniforme quelconque par une *série de fractions rationnelles* absolument et uniformément convergente dans tout domaine intérieur au domaine d'existence, et lorsque ce domaine est simplement connexe il donnait pour le même objet des *séries de polynomes* dont MM. *Painlevé*, *Hilbert*, ... ont démontré autrement l'existence. Dans sa thèse, M. *Painlevé* examinait le *prolongement l'un par l'autre de deux éléments* coïncidant non plus dans une aire commune, mais *sur une frontière linéaire commune*, ouvrant par là des questions d'unicité dont l'étude, poursuivie jusqu'à nos jours, sous des hypothèses de plus en plus larges, a été une des portes par où les fonctions de variable réelle et la théorie des ensembles sont entrées au cœur de la théorie des fonctions de variable complexe.

Mais un problème précis et délicat restait à résoudre dont on n'avait de solution que pour des séries très particulières comme la série hypergéométrique: *la série de Taylor d'une fonction $f(z)$ étant donnée, former à partir de ses coefficients une expression analytique représentant $f(z)$ dans un domaine plus vaste que le cercle de convergence (C), le plus vaste possible*. C'est de ce problème que M. *Borel*, par sa *théorie des séries sommables*, a donné la première solution générale, et ses travaux sur les séries divergentes marquent une date importante de l'histoire du prolongement analytique. Partant des sommations par moyennes linéaires de *Frobenius, Hölder, Cesaro*, et dégageant l'idée-mère, il définit la sommation exponentielle des séries numériques, il associe à toute série de *Taylor* à rayon de convergence fini $f(z) = \Sigma a_n z^n$, une fonction entière $F(z) = \Sigma' \frac{a_n}{n!} z^n$ qui, prise pour noyau d'une intégrale convenable de *Laplace-Abel* $\int_0^\infty e^{-a} F(az)\, da$, rend cette intégrale absolument et uniformément convergente à l'intérieur d'un domaine (B) (polygone si f a un nombre fini de points singuliers), *domaine de sommabilité exponentielle*, contenant (C), la valeur de l'intégrale étant $f(z)$ dans (C) et son prolongement analytique dans (B). Hors le cas où (C) est coupure W, (B) dépasse (C) en tous les points où f est holomorphe, et la génération de (B) à partir des points singuliers de f est aisée à concevoir. M. *Phragmen* montra ensuite que l'intégrale de M. *Borel* ne converge pas hors de (B).

En remplaçant la fonction exponentielle par d'autres fonctions sommatrices il a été possible d'étendre (B) et d'appliquer ces méthodes à l'étude des points singuliers situés sur la frontière de (B). Mais surtout, la solution de M. *Borel* a suscité de nouvelles recherches (*Lindelöf*, *Mittag-Leffler*, *Painlevé*, ...) qui ont abouti à de nouvelles solutions par des méthodes un peu différentes (représentation conforme, intégrales de *Laplace-Abel* généralisées où interviennent les fonctions $E_a(z)$, $E(z)$ de *Mittag-Leffler*) dans lesquelles l'intégrale de *Cauchy* joue toujours un rôle de premier ordre. Les solutions de *Mittag-Leffler* notamment, ont donné des séries de polynomes, qu'on peut former linéairement à l'aide des coefficients de *Taylor* de f et de constantes universelles, convergeant uniformément vers $f(z)$ à l'intérieur de « l'*étoile principale* », tandis que M. *Painlevé* donnait plus de souplesse à ces prolongements en donnant des développements valables dans des étoiles curvilignes variables qui permettent d'atteindre tout point régulier de la fonction.

Récemment *Porter* et *Jentzsch* ont donné des exemples de séries de *Taylor* dont certaines suites de sommes partielles convergent uniformément au-delà du cercle de convergence et M. *Ostrowski* a expliqué cette *ultraconvergence* par l'existence dans la série, après déduction éventuelle d'une série à rayon de convergence supérieur, d'une infinité de lacunes de largeur relative inférieurement bornée; il a montré qu'alors l'ultraconvergence a lieu uniformément dans tout domaine intérieur au domaine d'existence de la fonction uniforme limite $f(z)$, réalisant dans ce cas particulier, de la façon la plus simple, le problème du prolongement analytique.

6° Le prolongement analytique

2° Etude d'une fonction à partir de données relatives au voisinage d'un point singulier

Tandis qu'on cherchait à tirer de la série de *Taylor* et de son prolongement tous les renseignements qu'ils pouvaient donner, et de même que les géomètres prennent dans chaque problème les coordonnées les plus adéquates, les analystes poursuivirent l'étude de toutes les représentations analytiques dont l'expérience ou l'intuition révélaient l'utilité pratique et qu'une suspicion née du souci croissant de la rigueur avait empêché de progresser.

a) *Séries asymptotiques*

Cauchy, dans son travail sur la *série de Stirling*, avait eu déjà des soucis de ce genre; *Poincaré* par sa *théorie des séries asymptotiques* donne une base mathématique sérieuse à des considérations utiles qui jusque-là manquaient de rigueur et donne des règles pratiques d'utilisation de ces séries, en particulier pour l'intégration des équations différentielles; *Stieltjes* d'autre part, poursuivant une idée de *Laguerre*, étudie la liaison de ces séries avec les développements en fraction continue qui devaient, plus tard, ouvrir un champ si fécond de découvertes à l'activité des analystes. La théorie des séries asymptotiques divergentes, ou celle des séries de *Taylor* à *rayon de convergence nul* est en somme l'*étude d'une fonction uniforme au voisinage d'un point singulier A, dans un domaine dont la frontière passe par A, à l'aide de données sur la fonction au voisinage de A*. *Poincaré* eut surtout en vue l'application aux équations différentielles; M. *Borel* étudia le problème dans le cadre de la théorie des fonctions: *domaine de validité* (secteur de sommet A) d'une série asymptotique; *existence*, pour un développement asymptotique donné à priori, *d'une infinité de fonctions correspondantes*, au moins lorsque le domaine de validité est angulairement assez restreint, restriction que lèvera plus tard M. *Carleman*; relation de ce problème avec les *problèmes d'interpolation* de fonctions entières; *calcul d'une fonction distinguée* correspondant au développement asymptotique par la méthode de sommation des séries divergentes ... Après lui, le problème des conditions à imposer aux coefficients de la série et au domaine de validité pour que la fonction correspondante soit unique fera l'objet de travaux de plus en plus précis (*Watson*, *F.* et *R. Nevanlinna*) jusqu'à M. *Carleman* qui en a donné une solution complète et extrêmement originale dans le cas du domaine circulaire passant par A, solution que M. *Ostrowski* a ensuite étendue à des domaines très généraux.

b) *Fractions continues et intégrales de Stieltjes*

Dans une autre voie, *Stieltjes* approfondissant et développant un exemple de *Laguerre*, établissait une liaison extrêmement intéressante entre une série asymtotique divergente, une classe de fractions continues et un type nouveau d'intégrales auquel son nom est demeuré attaché. L'admirable mémoire de 1894—1895 qui expose ses résultats est aujourd'hui classique. Bien que la classe des séries asymptotiques auxquelles s'applique la sommation de *Stieltjes* soit particulière, par les connexions fécondes qu'il établit, par l'ingéniosité et la fécondité des concepts et des méthodes mis en œuvre (*intégrale de Stieltjes*, *noyaux de convergence des suites bornées de fonctions holomorphes*, ...) par les problèmes intéressants qu'il pose (problèmes des moments et recherches connexes), par les travaux qu'il a suscités depuis ceux de M. *Borel* jusqu'à ceux de M. *Carleman*, le mémoire de *Stieltjes*, qu'on trouve à la base des recherches modernes sur le problème des moments, les fonctions quasi-analytiques de variable réelle, la convergence des suites de fonctions analytiques, a exercé sur le développement de la théorie des fonctions une influence capitale.

c) *Séries de Dirichlet*

Les recherches arithmétiques de *Dirichlet* l'avaient conduit au type de séries $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ auquel son nom a été attaché et dont l'intérêt a grandi avec les célèbres recherches de *Riemann* sur $\zeta(s)$. Depuis les travaux de MM. *Cahen* et *Hadamard* l'étude de ces séries, de leurs domaines de convergence simple, absolue, uniforme, du calcul de leurs coefficients, de l'allure de la somme au voisinage des droites de convergence et particulièrement de $z = \infty$, de la sommabilité, des singularités et du prolongement analytique de cette somme..., a été poussée très loin sous l'influence de M. *Landau* par les travaux de nombreux géomètres. D'une part (*Bohr*, *M. Riesz*, *Hardy*, ...), on a cherché à leur *étendre les progrès réalisés dans le prolongement analytique des séries de Taylor*, d'autre part (*Bohr*, ...), on a cherché à *caractériser les fonctions admettant de tels développements en série*, enfin on a cherché (*Bohr*, *Hardy*) à utiliser les connaissances acquises pour étudier la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann*. Tandis que M. *Hardy* réussissait à prouver que $\zeta(s)$ *possède une infinité de zéros sur la droite* $R(s) = 1/2$, mordant ainsi pour la première fois sur le théorème précis énoncé sans démonstration par *Riemann*, M. *Bohr*, outre ses multiples apports de détail aux questions précédentes, montrait la fécondité des considérations arithmétiques sur les λ_n, et, par sa belle *théorie des fonctions presque périodiques*, réussissait dans une certaine mesure à caractériser les fonctions développables en série de *Dirichlet*.

d) *Séries de facultés et d'interpolation*

Corrélativement, l'emploi des séries de facultés (ou de factorielles) et des *séries d'interpolation* (de *Stirling*, *Newton*, ...) s'est multiplié en Analyse après 1900 pour résoudre des problèmes posés par les équations différentielles, les équations linéaires aux différences finies. S'inspirant des résultats acquis sur les séries de *Taylor*, les séries asymptotiques, les séries de *Dirichlet*, MM. *Landau*, *Carlson* et surtout M. *Nörlund* ont développé l'étude moderne de leurs convergences, de leur sommabilité, de leur prolongement analytique, de leur allure au voisinage du point singulier $z = \infty$, de leur relation avec les séries asymptotiques et les fractions continues, ..., tandis que leur excellente *adaptation à l'étude des solutions des équations linéaires aux différences finies ou des équations différentielles linéaires au voisinage de leurs singularités*, résultait des travaux de MM. *Nörlund*, *Horn* et de leurs émules.

TROISIÈME PÉRIODE

Les environs de 1900 accusent une orientation nouvelle dans les méthodes et problèmes de la théorie des fonctions de variable complexe. Vers cette époque, la théorie des ensembles et des fonctions de variable réelle a acquis ses bases essentielles: les fonctions à variation bornée, l'intégrale de *Stieltjes*, la puissance des ensembles, leur classification et leur mesure, l'intégrale de *Lebesgue*. Parmi les artisans de cet épanouissement, *Jordan*, *Stieltjes*, M. *Borel*, ont quelquefois travaillé en vue des fonctions de variable complexe. A leur exemple, et profitant du rajeunissement des idées de *Riemann* par M. *Hilbert*, des études sur les fonctions orthogonales provoquées par la théorie des équations intégrales, les nouvelles générations d'analystes travailleront en unissant les variables réelles aux variables complexes; tandis que les anciennes méthodes se développeront par les apports nouveaux, de plus en plus s'affirmera un principe que l'on peut énoncer ainsi: *aux frontières du domaine d'existence W, l'allure de la fonction relève surtout de la théorie des fonctions de variable réelle, les possibilités nouvelles révélées par les progrès de celle-ci se réalisant presque toutes aux frontières dans les problèmes « naturels » sur les fonctions analytiques qu'on pouvait croire les plus simples*, et ainsi se réalisera une fusion chaque jour plus intime des points de vue réel et complexe dans la théorie des fonctions.

Dans sa thèse de 1894, M. *Borel* tente les premiers essais d'extension du prolongement analytique: avec ses séries de fractions simples, et utilisant sa méthode d'exclusion, il fournit les premiers exemples d'expressions dont les valeurs,dans des régions de convergence séparées au point de vue W, sont pourtant liées entre elles. Dans son mémoire des Acta sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles, il précisera ses idées: par les séries de polynomes (M), la somme d'une série de fractions simples peut, sous des hypothèses convenables, se prolonger d'une région d'holomorphie dans une région à pôles denses où la somme n'existe pas au point de vue de *Weierstrass*. En 1912 enfin, il donnera les principes d'une théorie générale des fonctions *quasi-analytiques de variable complexe*, de leurs domaines d'existence C, de leur représentation analytique par les développements M.

Le mémoire de *Stieltjes* (1894—1895), tant par la représentation analytique en intégrales de *Stieltjes* des fonctions bornées (ou s'y ramenant), que par le théorème sur la convergence uniforme des séries de fonctions holomorphes bornées dans un domaine sous l'hypothèse d'un noyau de convergence intérieur à ce domaine, marque lui aussi des progrès et une orientation qui, en connexion avec les travaux d'*Arzela* et de M. *Hilbert* favoriseront les études sur des familles intéressantes de fonctions analytiques (en particulier les fonctions bornées) sur leur représentation et leurs propriétés géométriques et sur leur convergence.

Dans son beau mémoire de 1901, à la faveur des progrès réalisés par *Arzela* dans l'étude des suites de fonctions et de leur répartition en suites convergentes, M. *Hilbert* reprend le raisonnement de *Riemann* et, le mettant sur des bases rigoureuses, donne une nouvelle solution du problème de *Dirichlet* pour les fonctions harmoniques. Son analyse consacrera l'introduction de la méthode des variations pour démontrer rigoureusement l'existence des solutions d'un grand nombre de problèmes non locaux de la théorie des fonctions et aussi pour les calculer.

L'introduction des idées de M. *Lebesgue* dans les représentations de fonctions analytiques où intervient l'intégrale, l'étude connexe des séries de *Fourier*, et, en général, des séries de fonctions orthogonales suscitée par la théorie des équations intégrales, complètent l'influence des trois mémoires précédents sur l'évolution de la théorie des fonctions. Dans sa thèse de 1906 sur les séries trigonométriques et les séries de *Taylor*, *Fatou* obtient des résultats, comme son célèbre théorème sur l'existence des valeurs limites radiales des fonctions bornées dans un cercle, dont les conséquences ne se comptent plus et qui feront de plus en plus apparaître l'importance des ensembles de mesure nulle que par ailleurs M. *Borel* classait et dont il relevait l'importance fondamentale pour les domaines C.

Les éléments nouveaux incorporés dans l'objet et la technique de la théorie des fonctions s'y diffusent rapidement, produisent des rejets féconds donnant à la théorie l'aspect de ces figuiers des banyans, forêts aux mille colonnes.

1° Développements sur les fonctions entières ou holomorphes dans un cercle, sur la convergence des suites et le prolongement analytique

Dans la théorie des fonctions entières, de nombreux géomètres précisent et complètent les principes donnés par MM. *Hadamard* et *Borel*. *Boutroux* perfectionne la méthode d'exclusion, M. *Wiman* donne à celle du plus grand terme une précision et une extension aux fonctions holomorphes dans un cercle qui, outre des résultats très originaux provoqueront en particulier les travaux de MM. *Pólya* et *Valiron*. Concurremment avec eux MM. *Lindelöf*, *Blumenthal*, *Denjoy*, *Maillet*, *Littlewood*, ...étudient les fonctions d'ordre entier, d'ordre infini, d'ordre nul, précisant les relations entre la croissance et la densité des zéros. Par l'*extension du principe du maximum du module* qu'il donnera avec M. *Phragmen*, M. *Lindelöf* amorce avec ses élèves l'étude de la fonction entière au voisinage de l'infini lorsque la frontière du domaine passe par l'infini.

A un autre point de vue, dans la voie ouverte par la démonstration élémentaire de M. *Borel*, M. *Landau*, M. *Schottky* donnent d'importantes propositions aujourd'hui classiques concernant les fonctions holomorphes dans un cercle et y admettant *deux valeurs exceptionnelles*, tandis que M. *Caratheodory* relève le rôle essentiel de la fonction modulaire et du lemme de *Schwarz* dans les *inégalités précises* sur le rayon du cercle d'holomorphie ou, sur le maximum du module qui traduisent analytiquement ces propositions. Sous des conditions initiales très larges, ces inégalités font rentrer les fonctions à valeurs exceptionnelles dans le cadre, considéré par *Stieltjes*, des fonctions à module borné. Reliant ces nouveaux théorèmes aux travaux de *M. Osgood*, d'*Arzela*, de *Vitali*, de M. *Montel* et de leurs émules, sur les fonctions bornées, MM. *Caratheodory* et *Landau* obtiennent un critère de convergence pour les *familles à valeurs exceptionnelles* et M. *Montel*, pour marquer la solidarité remarquable créée entre les fonctions d'une même famille par une limite supérieure du module (*Stieltjes*), par l'égale continuité (*Arzela*) par deux valeurs exceptionnelles (*Caratheodory, Landau*) propose de les appeler *familles normales* et poursuit l'étude des cas où cette solidarité existe. De nouveaux critères venus d'ailleurs s'ajouteront aux anciens, en particulier celui de l'*univalence* (*Kœbe*), tandis que l'étude, sur la sphère de *Riemann*, par M. *Ostrowski*, de l'*oscillation sphérique* des fonctions méromorphes d'une famille, poursuivie par M. *Caratheodory* à l'aide du concept de *convergence continue* de *Hahn* donnera pour caractériser ces familles, un critère nécessaire et suffisant d'une élégance achevée. Avec plus de précision encore, M. *Ostrowski*, s'appuyant sur le *lemme des deux constantes* par lequel, avec M. *Nevanlinna*, il généralise le *théorême des trois cercles de M. Hadamard*, mesure et compare la convergence d'une suite de fonctions dans les diverses parties du domaine de convergence uniforme et, parmi les corollaires de son étude, obtient ses belles propositions sur l'ultra-convergence des séries de *Taylor*. Les critères de convergence antérieurs s'affineront encore de M. *Blaschke* à MM. *Khintchine* et *Ostrowski*, lorsque seront introduits dans les hypothèses soit des *noyaux de convergence à la Vitali*, mais à *point limite frontière*, soit des *noyaux de convergence entièrement frontières* mais intéressant les limites presque partout sur le cercle frontière (*Fatou*) des fonctions de la famille supposées bornées.

Avec le *théorème de Fatou* les questions soulevées par la thèse de M. *Painlevé* recevront de *Fatou* lui-même, de MM. *Riesz*, *Priwaloff*, *Lusin*, ..., sous des hypothèses de plus en plus larges, des solutions de plus en plus précises, qui nous renseignent sur la mesure des ensembles où une fonction analytique s'annule à la frontière du domaine d'existence. Employé pour les passages à la limite dans les moyennes circulaires d'ordre positif des modules des fonctions holomorphes, dont l'introduction systématique par M. *G. H. Hardy*, développée par MM. *Littlewood* et *F. Riesz*, permet non seulement d'obtenir comme je l'ai montré, des propositions parallèles aux propositions classiques où intervient le maximum du module, mais encore d'explorer plus finement les propriétés des familles de fonctions et de les représenter analytiquement, le *théorème de Fatou* permettra d'une part, d'affiner les critères envisagés plus haut, d'autre part de développer cette théorie des *fonctions subharmoniques* dont M. *F. Riesz* a marqué en de beau mémoires toute l'importance en Analyse et spécialement dans la théorie du potentiel.

Avec l'étude approfondie par MM. *Faber*, *Fejer*, *Müntz*, *Sasz*, *Carleman*, ... des développements en séries de polynômes ou des approximations par des sommes de monômes d'ordres convenables, avec l'étude de ces polynômes de meilleure approximation dont on doit l'introduction à *Tchebychef*, et l'étude développée à MM. *S. Bernstein*, *Tonelli*, *Faber*, *Jackson*, de *La Vallée-Poussin*, ..., en particulier des relations entre l'ordre asymptotique de l'approximation et les singularités de la fonction à approcher, nous aurons signalé enfin quelques progrès récents de la représentation des fonctions dans l'ordre du prolongement analytique.

2⁰ Rôle des variations et des suites orthogonales

M. *Hilbert* a déterminé, par son mémoire de 1901, un retour fécond aux idées de *Riemann* caractérisé par un large recours à la *méthode des variations* et aux *définitions par une propriété d'extremum*.

Lui-même ou ses élèves MM. *Courant*, *Kœbe*... ont obtenu ainsi des solutions élégantes pour la représentation conforme des aires ou des surfaces de *Riemann* de connexion quelconque et pour les problèmes d'existence qui se posent dans l'uniformisation des fonctions algébriques ou analytiques. En minimant, avec des données initiales très simples, non plus des intégrales mais des quantités comme le maximum du module dans un domaine, ou en opérant corrélativement, MM. *Fejer*, *F. Riesz*, *Caratheodory*, *Rado*, ... ont démontré avec une simplicité « maximum » l'existence de la fonction de *Riemann* représentant le domaine sur un cercle. On s'est attaché aussi aux familles de fonctions simples dépendant d'un indice (polynômes des divers degrés, ...) et dont chacune jouit de la propriété d'extremum caractérisant une fonction à déterminer. M. *Bieberbach* a ainsi donné pour la fonction de *Riemann* une série de polynômes minimant l'intégrale de *Riemann*, tandis que j'employais à cet objet des polynômes ou des fractions rationnelles minimant le maximum du module ou d'autres intégrales, et, dans des cas très généraux, par une méthode dualistique de celle de *Ritz*, je ramenais le *problème de Dirichlet* au *problème de meilleure approximation sur la frontière* en mesurant l'approximation soit comme *Tchebychef* soit à l'aide d'intégrales convenables.

L'emploi très élégant des variations dans les travaux de M. *Carleman* sur les séries asymptotiques ou le calcul des fonctions quasi-analytiques procèdent aussi de l'influence de M. *Hilbert*.

Dans un ordre d'idées voisin, les études sur les équations intégrales, sur les suites de fonctions orthogonales, de MM. *Hilbert, Schmidt*... ont provoqué l'apparition de suites de polynômes définis dans un domaine par leurs propriétés d'orthogonalité sur la frontière ou dans le domaine, à l'aide desquels MM. *Szegö* et *Carleman*, par exemple ont pu représenter toute fonction analytique dans le domaine, ces polynômes s'exprimant asymptotiquement par la fonction de *Riemann* du domaine lorsque leur degré devient infini.

3° Retour à l'esprit „Funktionentheoretisch" de Weierstrass

Les perfectionnements de la technique que nous venons de noter dans les 1° et 2°, l'étude approfondie, nécessaire au problème général de l'uniformisation, de la *topologie des surfaces de Riemann générales*, que nous devons à *Poincaré*, à MM. *Weyl*, *Kœbe* et leurs successeurs, ont ramené un souci d'ordre esthétique et philosophique procédant de *Weierstrass*, et excluant des problèmes sur la détermination des fonctions analytiques tous les éléments autres que des fonctions analytiques. Ce souci nous a valu les beaux mémoires de MM. *Caratheodory* et *Lindelöf* sur la représentation conforme, une reprise par M. *Kœbe* dans cet esprit, de tous ses travaux sur la représentation des aires de connexion quelconque, sur l'uniformisation, et des travaux ultérieurs de M. *Bieberbach*. La technique et la topologie en ont bénéficié elles-mêmes: introduction de suites de fonctions algébriques d'approximation, utilisation meilleure du lemme de *Schwarz* et des lemmes analogues, introduction des suites de surfaces de *Riemann* et de leurs *noyaux*..., tandis qu'ailleurs la thèse de M. *Painlevé* suscitait d'excellents outils comme le lemme de M. *Carleman*, auquel je crois avoir donné récemment l'extension qu'il mérite.

4° La géométrie des fonctions analytiques

Le même souci d'ordre esthétique a, sous l'influence de *Klein*, *Study* et de M. *Caratheodory*, favorisé, il me semble, les études géométriques sur les fonctions analytiques.

M. *Caratheodory* d'une part, par ses études sur les coefficients de *Taylor* des fonctions à partie réelle positive ou bornée dans le cercle unité, poursuivies par MM. *Herglotz*, *Ostrowski* (intégrale de *Stieltjes*) et, pour les fonctions à module borné, par MM. *I. Schur*, *R. Nevanlinna*, *Denjoy*, ..., a développé un élégant chapitre de *géométrie des fonctions bornées* où la convexité de *Minkowski* joue un rôle fondamental et dont le lemme de *Schwarz* faisait soupçonner l'existence.

D'autre part, pour étudier la convergence singulière des itérées d'une fraction rationnelle, j'établis en 1917 une extension du lemme de *Schwarz* aux cercles tangents au cercle fondamental, dont le succès a dépassé toutes mes espérances, MM. *R. Nevanlinna*, *Wolff*, *Caratheodory* notamment l'ayant déjà développée et appliquée au problème des moments, à l'existence des dérivées limites, à la représentation conforme . . .

En second lieu, les études de M. *Kœbe* sur la mesure des *ensembles frontières* de domaines où existent les fonctions automorphes uniformisantes, nous ont valu le beau « *Verzerrungssatz* » inaugurant la *géométrie des fonctions univalentes* dans un cercle, que M. *Bieberbach* a complété par un heureux « *Drehungssatz* », tandis que son « *Flächensatz* » fournissait pour leurs coefficients de *Taylor* des inégalités dont la précision s'affirme vers une limite exacte qu'il a conjecturée et que M. *Dieudonné* a établi dans le cas réel.

M. *Caratheodory*, en étudiant, dans le cas le plus général, la correspondance entre points frontières dans la représentation conforme sur un cercle des aires planes, inaugurait un autre chapitre de cette géométrie où la topologie et l'analyse se mêlent de la façon la plus heureuse et la plus féconde, tandis que les déformations intérieures ou frontières créées par cette correspondance sous des hypothèses frontières de plus en plus restrictives (courbes de *Jordan* pourvues ou non de tangentes, convexes, à courbure bornée, etc. . . .) ont suscité les nombreux travaux de MM. *Study*, *Lindelöf* et des élèves de M. *Caratheodory*.

Mentionnant enfin le *diamètre transfini des aires* dont l'introduction par M. *Fekete* et l'utilisation en représentation conforme par MM. *Pólya*, *Szegö*, . . . ont donné lieu à de belles propositions, nous aurons donné un aperçu de cette *géométrie des fonction analytiques* qui se traduit souvent par la recherche de *limites exactes* assignées aux familles de fonctions douées d'une propriété caractéristique

5⁰ Equations fonctionnelles. Itération des substitutions. Points et courbes J. Nouvelles recherches sur les fonctions entières et méromorphes

L'enrichissement de la technique des fonctions analytiques dont nous avons suivi les progrès dans les paragraphes précédents a commencé dans les quinze premières années de ce siècle. Il s'est poursuivi le plus souvent par la nécessité de créer les méthodes les mieux adaptées à l'étude de questions intéressantes rendues plus abordables, et au cours de cette étude se sont révélées des circonstances nouvelles qui ont enrichi l'objet de la théorie des fonctions.

Tandis que les solutions des équations aux différences finies, linéaires ou non, leurs développements, leurs singularités, leurs domaines W, avaient fait l'objet de travaux étendus, notamment de M. *Nörlund*, les solutions des équations fonctionnelles dont la substitution fondamentale n'est pas linéaire, n'avaient avant 1917 fait l'objet que d'études locales ou très particulières, dont l'intérêt, pour celles de

Kœnigs et de *Fatou* notamment, faisait souhaiter une étude dans tout le domaine d'existence. Lorsque la substitution fondamentale est rationnelle, les recherches que *Fatou* et moi-même, indépendamment l'un de l'autre, avons poursuivi tant sur l'itération de la substitution, la délimitation des domaines de convergence, leur structure, leur connexion, les singularités de leurs frontières, ... que sur les solutions des équations fonctionnelles correspondantes les plus simples (*Schrœder*, *Poincaré*, *Abel*, *Picard*, équation de permutabilité ou semi-permutabilité, ...) ont abouti d'abord à la vérification du principe que nous énoncions au début de cette troisième partie sur la pénétration, par les frontières, des singularités de la théorie des ensembles et des fonctions de variable réelle jusqu'au cœur des problèmes « *naturels* » les plus simples concernant les fonctions analytiques (ici, frontières sans tangentes, à points doubles partout denses, domaines à connexion infinie, à frontières ponctuelles ou linéaires, ...). D'un autre côté, et sans parler de la mise au point et du perfectionnement de la technique acquise qu'elles ont nécessité et dont nous avons antérieurement cité des exemples, elles ont imprimé une nouvelle direction aux études sur les familles de fonctions et sur les fonctions entières et méromorphes. C'est, en effet, en étendant aux familles de fonctions méromorphes la propriété caractéristique des points singuliers de l'itération que j'ai découvert ces ensembles de « *points singuliers des familles de fonctions* » (*points J*) auxquels les géomètres, (*Ostrowski*, *Valiron* ...) qui en ont poursuivi l'étude ont donné mon nom et dont l'application aux fonctions entières ou méromorphes (points, droites, courbes *J*) dans mes recherches sur les théorèmes de M. *Picard* a suscité ensuite des travaux pleins d'intérêt de MM. *Ostrowski*, *Milloux* (cercles de remplissage), *Pólya*, *Valiron*, ..., en relation avec l'ordre de la fonction, les lacunes de sa série de *Taylor* ..., en dernier lieu de M. *W. Bernstein* en relation avec le polygone de sommabilité de M. *Borel*.

Tandis que des résultats généraux sur les *arguments* des racines des équations $f(z) = Z$ étaient obtenus dans cette voie, les analystes poursuivaient autrement l'étude des $f(z)$ entières ou méromorphes par des méthodes de plus en plus précises, concurremment avec l'étude rigoureuse des *singularités de la fonction inverse* $z = \varphi(Z)$ [*valeurs asymptotiques de* $f(z)$] (*Iversen*, *Gross*, ...).

En 1920, par une analyse perspicace des moyennes de *Poisson-Jensen*, appliquées aux logarithmes des modules des fonctions entières, dont M. *R. Nevanlinna* allait tirer une méthode générale très fine et très précise d'étude des fonctions méromorphes, M. *Carleman* obtenait sur les fonctions entières d'ordre fini ϱ, un théorème *limitant le nombre de leurs valeurs asymptotiques en fonction de l'ordre*; sa méthode remarquablement précisée et perfectionnée par M. *Ahlfors*, devait fournir la limite exacte 2ϱ dont M. *Denjoy* avait conjecturé l'existence. Puis, par les beaux et pénétrants travaux de M. *R. Nevanlinna* que suivirent MM. *Valiron*, *Bloch*, *H. Cartan*, *Ahlfors*, ..., la théorie des fonctions méromorphes dans tout le plan ou dans un cercle recevait des contributions substantielles tandis que MM. *Pólya* et *Nevanlinna* soulevaient d'originales questions d'unicité intéressant ces fonctions.

Il reste dans les équations fonctionnelles, dans l'itération, dans la théorie des fonctions méromorphes bien des questions à résoudre qui méritent l'effort des jeunes analystes: M. *Valiron*, dans sa conférence, vous en indiquera quelques-unes.

6⁰ Le rôle des surfaces de Riemann générales

L'uniformisation des fonctions multiformes, après que *Poincaré* en eut démontré la possibilité, s'est décomposée en deux problèmes distincts: un problème de topologie sur les surfaces de *Riemann* générales et leurs diverses surfaces de recouvrement, un problème consécutif de représentation conforme, qui ont tous les deux provoqué de nombreux travaux.

Le premier de ces problèmes nous a familiarisés avec les surfaces de *Riemann* générales et celles du type parabolique ou hyperbolique admettant des groupes de superposition. L'étude des fonctions inverses des fonctions méromorphes tendait au même but pour les surfaces simplement connexes du type parabolique. Avec M. *Caratheodory* s'introduisaient les familles de surfaces de *Riemann* et leurs noyaux. A la faveur de ces progrès de la technique des surfaces de *Riemann* que j'avais éprouvés dans mes recherches sur les équations fonctionnelles, considérant qu'une fonction $Z = f(z)$ réalise une représentation conforme biunivoque d'une surface de *Riemann* d [domaine d'existence et d'uniformité de $f(z)$] sur la surface D que décrit Z lorsque z décrit d [domaine d'existence et d'uniformité de la fonction inverse $z = \varphi(Z)$], j'ai, dès 1922, et pour tous les problèmes où une donnée analytique ou géométrique, ou bien une propriété fonctionnelle, permet d'établir à priori les domaines d et D ou l'un d'eux, proposé d'en déduire, par le théorème fondamental sur la représentation conforme, à la fois la solution f, son inverse φ, et les domaines d'existence de f et φ. J'ai effectivement montré, pour de nombreuses équations fonctionnelles, où d et D admettent des groupes de transformations rationnelles, la puissance de cette méthode qui permet la détermination et l'étude simultanée de f et φ, dans d, D et aux frontières, par utilisation des résultats connus sur la correspondance des frontières de d et D. Lorsque f est uniforme il convient quelquefois de déterminer et d'étudier d'abord D, comme je l'ai fait encore tout récemment pour la représentation conforme des aires multiplement connexes sur des aires du type *de La Vallée Poussin.*

D'un autre point de vue qu'on peut rattacher aux recherches synthétiques de M. *Lindelöf*, à partir de son principe fondamental analogue au lemme de *Schwarz* transposé aux surfaces de *Riemann*, la connaissance de propriétés géométriques ou de limitations ou de propriétés d'extremum données à priori sur D permet de conclure à des théorèmes d'existence ou des inégalités précises et variées pour f, ou pour une classe de fonctions, dans des domaines variés à l'intérieur de d. Ce point de vue, sur lequel j'ai insisté à la suite des travaux de M. *Littlewood* sur les fonctions *subordonnées* me paraît lui aussi devoir être fécond.

L'utilisation de plus en plus grande des surfaces de *Riemann* à ces divers points de vue comme méthode de découverte ou d'unification, s'est affirmée, comme je l'avais espéré, dans les travaux ultérieurs de M. *Bloch* et de ses continuateurs d'une part, de MM. *Speiser*, *Nevanlinna*, *Ahlfors*, ... de l'autre, dont l'effort, sous l'influence du *théorème de M. Picard*, s'est appliqué à la recherche de critères topologiques ou autres différenciant les surfaces hyperboliques et paraboliques. Sur ce chapitre je ne saurais mieux faire que de vous renvoyer à la conférence de M. *Nevanlinna*. Mais je pense qu'il conviendra aussi d'étudier les familles de surfaces de *Riemann* comme les familles de fonctions. Je vois dans l'étude approfondie de classes de plus en plus nombreuses de surfaces de *Riemann* douées de propriétés géométriques intéressantes une source de progrès futurs pour la théorie des fonctions.

7° Les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes

La théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, longtemps délaissée par les analystes, a connu dans ces dix dernières années une reprise de faveur couronnée de succès dont les conférences de MM. *Caratheodory* et *Severi* vous sont ici même un témoignage.

Après sa représentation (simplifiée par *Cousin*) des fonctions méromorphes par un quotient de fonctions entières, *Poincaré* attaquait en 1907 un deuxième problème général, celui de la *représentation analytique biunivoque l'un sur l'autre de deux domaines bornés à quatre dimensions* et montrait que le problème est *généralement impossible*, même pour des domaines simplement connexes.

Après l'étude de la *convergence des séries doubles de puissances* et des diverses manières de les ordonner (*Phragmen, Pringsheim, Fabry, Faber, Hartogs*), le prolongement analytique et l'étude des *singularités essentielles ou non*, ont été abordés par M. *Hartogs* dans de remarquables recherches que *E. E. Levi* a poursuivies par la recherche des *singularités essentielles*. Il en ressort que ces singularités, jamais isolées, possèdent au voisinage de chacun de leurs points des *propriétés métriques caractéristiques* (*pseudo-convexité*) définies généralement par des *inégalités différentielles précises* fournies pour deux dimensions par M. *Hartogs* et pour trois par *E. E. Levi*.

Après mes études sur les « points J » des familles de fonctions d'une variable, j'ai conjecturé que les *« points J » des familles de fonctions de plusieurs variables*, points singuliers pour l'*ensemble des fonctions de ces familles*, devaient avoir les mêmes propriétés que les points singuliers d'une fonction de plusieurs variables. Après une brève théorie de la normalité des familles, j'ai démontré que tous les théorèmes de M. *Hartogs* et de *E. E. Levi* étaient vrais pour les points J de familles de fonctions, expliquaient les propriétés antérieurement reconnues aux rayons de convergence associés des séries de puissances, et j'ai soulevé un problème général, que MM. *H. Cartan* et *P. Thullen* viennent de résoudre affirmativement, sur l'identité des frontières fermées d'holomorphie ou de méromorphie d'une fonction et des frontières fermées de convergence ou de normalité (ensemble frontière de points J) d'une famille de fonctions.

D'autre part, après de nombreux travaux locaux, le problème de la correspondance biunivoque analytique de deux domaines et des transformations automorphes d'un domaine, attaqué par MM. *Reinhardt*, *Behnke*, par M. *Caratheodory* qui attachait une métrique à chaque domaine borné de l'espace par l'intermédiaire des familles holomorphes bornées dans ce domaine, par MM. *H. Cartan*, *P. Thullen*, *Bergmann*, . . . , a marqué dans ces dernières années de considérables progrès, pour l'exposé desquels je vous renvoie à la conférence de M. *Caratheodory*.

Il semble enfin que sa connaissance du monde algébrique et l'étude du problème de *Dirichlet* à quatre dimensions aient décidé M. *Severi* à vouer aux problèmes soulevés par les fonctions générales de deux ou plusieurs variables, l'activité qu'il a antérieurement vouée avec tant de succès aux fonctions algébriques de deux variables. Il vous en parlera lui-même dans sa conférence.

Les fonctions analytiques de plusieurs variables offrent les meilleures perspectives aux recherches des analystes et il faut souhaiter qu'ils s'y consacrent nombreux et actifs.

8⁰ Les fonctions quasi-analytiques d'une variable

M. *Borel*, par les pénétrantes recherches qui remontent à sa thèse, avait en 1912 complètement différencié les concepts de fonction monogène et de fonction analytique, défini les domaines d'existence C, donné des exemples de séries de fractions simples représentant des fonctions *quasi-analytiques* et indiqué dans des cas très généraux la possibilité de leur calcul par séries de polynômes du type *Mittag-Leffler*. Une telle fonction non prolongeable W, parfaitement déterminée par sa valeur et les valeurs de toutes ses dérivées en un point A du domaine C, admet un « *prolongement B* », unique dans tout C, à partir de A.

D'autre part, l'étude des équations aux dérivées partielles a conduit M. *Holmgren* et M. *Hadamard* à des classes de fonctions de variable réelle $f(x)$, indéfiniment dérivables sur un segment dans lequel $[f^{(\gamma)}(x)] < k^\gamma A_\gamma$, ($k$ indépendant de γ, $A_\gamma = \underline{/2\gamma}$ ou $A_\gamma = \underline{/[1+\varepsilon]\gamma}$), pour lesquelles le prolongement est possible d'une infinité de manières. Comment dès lors, *caractériser les A_γ des classes réelles quasi-*

analytiques, c'est-à-dire à prolongement unique? Partant d'une condition suffisante donnée par M. *Denjoy* et précisée par M. *Borel*, M. *Carleman*, dans un petit livre résumant ses recherches de 1922–1923, où la profondeur des idées s'allie à une élégance parfaite des méthodes, a non seulement résolu la question en fournissant *plusieurs formes de conditions nécessaires et suffisantes* et en donnant des *méthodes de calcul effectif*, mais il l'a encore rapprochée de questions anciennes, comme l'unicité des fonctions ayant un développement asymptotique donné, le problème des moments de *Stieltjes*, la transformation des séries asymptotiques divergentes en fractions continues de *Stieltjes* convergentes, qui en ont reçu des solutions et un nouvel essor.

Vers la même époque, MM. *de La Vallée-Poussin* et *S. Bernstein*, plus tard M. *Ostrowski*, apportaient aux mêmes questions d'intéressantes contributions par d'autres moyens (séries de *Fourier*, meilleure approximation, ...). Par tous ces travaux se trouvait établie et caractérisée *entre les fonctions analytiques et les fonctions quelconques d'une variable réelle l'existence d'un champ étroit de fonctions quasi-analytiques*.

Les résultats de M. *Carleman* m'ont suggéré en 1925 de reprendre le point de vue complexe de M. *Borel* (condensation des singularités), en recherchant les classes assez générales et « *naturelles* » de fonctions quasi-analytiques d'une *variable complexe* qu'on pourrait obtenir par l'*application d'un algorithme régulier*. Les « points J » de la suite des itérées R_n d'une fraction rationnelle condensant les pôles de ces R_n, les séries $\Sigma\, a_n\, R_n$ formées avec les R_n comme la série de *Taylor* associée $\Sigma\, a_n z^n$ avec les puissances de z, outre des fonctions à propriétés Weierstrassiennes remarquables, m'ont fourni, *correspondant* (avec mêmes a_n) *à des classes de fonctions entières d'ordre nul définies simplement par leur croissance, des fonctions quasi-analytiques de toutes les classes, douées de propriétés fonctionnelles remarquables* (des équations linéaires analytiques aux différences finies peuvent admettre, par exemple, des solutions quasi-analytiques, nulle part analytiques, ou pouvant se prolonger B à travers des coupures W).

Ces recherches sur les fonctions quasi-analytiques me paraissent dignes d'être poursuivies. L'intégration des fonctions quasi-analytiques de variable complexe et la théorie des équations fonctionnelles ou différentielles à solutions quasi-analytiques me paraissent notamment recéler des phénomènes nouveaux que j'ai signalés dans une note des Comptes-Rendus et qui diffèrent radicalement de la multiformité classique des fonctions analytiques. Il paraît aussi intéressant de rechercher d'autres exemples naturels de prolongement B à travers des lignes ou des aires singulières W.

CONCLUSION

Au long de ces pages nous avons vu la théorie des fonctions s'élever graduellement du local au général par les fonctions rationnelles, les fonctions algébriques et les transcendantes connexes, les fonctions entières ou méromorphes, jusqu'aux fonctions générales définies par des représentations analytiques (séries, intégrales, produits) à puissance croissante. Nous avons vu les analystes élargir constamment les domaines de validité de ces représentations analytiques et rechercher pour elles les domaines maxima. Nous avons vu le concept même de fonction de variable complexe se préciser et la *fonction monogène de Cauchy* fournir la *fonction analytique de Weierstrass* et la fonction *quasi-analytique de M. Borel*. Les classes étudiées sont devenues de plus en plus générales: fonctions satisfaisant à des équations algébriques, à des équations différentielles algébriques, à des équations fonctionnelles, classes de fonctions soumises à des conditions analytiques de plus en plus larges, ou à des conditions géométriques ou à des conditions d'extremum, fonctions bornées, fonctions à valeurs exceptionnelles, fonctions univalentes. L'étude des classes de fonctions est devenue de plus en plus fine et minutieuse, manifestant par endroits une précission et une élégance qui font songer à l'esthétique de la géométrie d'Euclide.

Nous avons noté les apports féconds aux questions posées, aux méthodes, aux principes, des branches connexes de la Science Mathématique; nous avons vu la théorie des fonctions de variable complexe s'enrichir en s'assimilant plus intimement des concepts et des méthodes de la Topologie, du calcul des variations, de la théorie des fonctions de variable réelle. Nous avons vu aussi, comme conséquence de ces apports et des progrès réalisés sur la représentation conforme et la topologie des surfaces de *Riemann*, s'introduire des méthodes nouvelles de *définition et d'exploration en bloc* pour des fonctions ou des classes de fonctions d'une variable, et s'inaugurer des recherches analogues pour plusieurs variables. *La théorie moderne résulte de la fusion intime de tous ces éléments.*

Loin qu'elle ait été seulement assimilatrice, la théorie des fonctions a été souvent l'instigatrice des progrès réalisés par ces sciences connexes. Il serait facile d'en donner bien des exemples différents de ceux rencontrés dans cette conférence. Nous n'insisterons pas sur les progrès que la théorie des fonctions a suscités en Arithmétique, dans la théorie des classes de formes, des nombres premiers ..., dans la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles, et, par ses élégantes représentations paramétriques inaugurées par *Riemann*, dans la géométrie non euclidienne, les surfaces à courbure constante, les surfaces minima, le problème de *Plateau*.

Cette revue rapide nous amène à la conclusion suivante exprimée maintes fois par

Poincaré et M. *Picard* dans leurs écrits philosophiques, et en ces termes par M. *Hilbert* au Congrès de Paris.

« Les problèmes précédents, disait-il, nous montrent la variété croissante de la Science mathématique. N'est-il donc pas à redouter qu'elle se scinde en plusieurs branches n'ayant plus guère de rapports entre elles? Je ne le crois pas et je ne le souhaite pas; la Science mathématique est un tout indivisible, un organisme dont le développement est subordonné à la cohésion de ses parties. Nous voyons du reste qu'en se développant, très loin de perdre son caractère de science organisée, elle le manifeste de jour en jour plus clairement. De plus, chaque progrès réel va de pair avec la découverte de moyens plus pénétrants et de méthodes plus simples, dont l'acquisition et l'adaptation permettent à chaque géomètre un accès plus facile aux diverses branches des mathématiques. »

Réduite à ses seules préoccupations, à des problèmes, à des méthodes purement « *funktionentheoretisch* » la théorie des fonctions se subdiviserait indéfiniment sans progrès réel, produisant des rameaux sans force, une floraison sans durée et sans fruits.

Par un contact intime avec les autres branches de l'Analyse: fonctions de variable réelle, équations différentielles et aux dérivées partielles, calcul des variations, elle progressera,

« *et les fruits passeront la promesse des fleurs* ».

Paris, le 23 Août 1932.