DIE THEORIE DER OPERATIONEN UND IHRE BEDEUTUNG FÜR DIE ANALYSIS

Von S. Banach, Lwów.

I

Die Bedeutung der Theorie der Operationen für die gesamte Mathematik tritt am deutlichsten hervor, wenn wir uns ihre geschichtliche Entwicklung vergegenwärtigen. Als Operation bezeichnet man eine Zuordnung, welche den Elementen einer Menge, des sogn. Bereiches, die Elemente einer anderen Menge, des sogn. Gegenbereiches, entsprechen läßt; dies ist also eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffes einer Funktion, welche Zahlen wieder mit Zahlen verbindet. Bereits in den Anfängen der Mathematik begegnen wir dem Begriffe einer Operation, z. B. dann, wenn wir von der Länge einer Kurve, von dem Flächeninhalte einer Fläche, oder vom Volumen eines Körpers sprechen. Später kommen die Begriffe der Ableitung, des unbestimmten Integrals und des bestimmten Integrals vor. Von den zuletzt genannten Operationen ordnen die zwei ersten Funktionen wieder Funktionen, die dritte aber Funktionen Zahlen zu. Als Operationen können auch die Grenze einer Zahlenfolge und die Summe einer Zahlenreihe angesehen werden, die gewissen Zahlenfolgen Zahlen zuordnen; ähnliches gilt für Grenzen von Funktionenfolgen wie auch Funktionenreihen.

Die ersten Grundlagen für die Theorie der Operationen verdankt man Herrn V. Volterra, der systematisch solche Operationen untersuchte, welche stetige Funktionen in ebensolche Funktionen abbildet. Bereits von ihm wurde eine besondere Klasse der Operationen ausgezeichnet, die der linearen in der heutigen Terminologie, und Herr J. Hadamard hat sie dann näher betrachtet. An die Fredholmschen Arbeiten über die Integralgleichungen anschließend, entwickelte Herr D. Hilbert eine Theorie der linearen Operationen, deren Bereich und Gegenbereich ein wichtiger Raum ist, der nach ihm seinen Namen trägt. Einen weiteren Schritt in der Entwicklung der Theorie stellen die Untersuchungen des Herrn M. Fréchet dar, der den Begriff eines metrischen Raumes eingeführt hatte. Somit gelang es ihm zu zeigen, daß die wichtigen Begriffe, z. B. der Begriff einer stetigen Operation, der Grenze einer Folge von Operationen und viele andere, die man früher nur für gewöhnliche Funktionen kannte, auch für Räume von so allgemeiner Natur einen Sinn haben.

Eine Spezialisierung der Operationen erhalten wir, falls wir fordern, daß in ihren Bereichen und Gegenbereichen gewisse Verknüpfungen erklärt sind. Insbesondere ist der Fall interessant, wo im Bereiche und Gegenbereiche die Addition der Elemente sowie die Multiplikation der Zahlen durch Elemente definiert ist. Indem wir voraussetzen, daß diese Verknüpfungen den üblichen Gesetzen der Algebra genügen, gelangen wir zum Begrifte eines vektoriellen oder linearen Raumes. Vektorielle Räume, in welchen eine Norm erklärt ist, d. h. in welchen jedem Elemente eine Zahl mit Eigenschaften der Länge eines Vektors zugeordnet wird, nennen wir normiert. In einem vektoriellen normierten Raume kann die Entfernung zweier Elemente als die Norm ihrer Differenz erklärt werden; erweist sich bei dieser Metrisierung der Raum als vollständig, so nennen wir ihn einen Raum vom Typus (B); offensichtlich bilden diese eine Verallgemeinerung der euklidischen Räume. Den Begriff eines Raumes vom Typus (B) haben unabhängig voneinander Herr N. Wiener und ich eingeführt. Nun zeigt es sich, daß viele Räume, die in der Analysis betrachtet werden Räume vom Typus (B) sind, so insbesondere der Raum der stetigen Funktionen, der Hilbertsche Raum, die von Herrn F. Riesz untersuchten Räume der mit der p-ten Potenz integrierbaren Funktionen und viele andere. Die große Wichtigkeit der Räume vom Typus (B) besteht darin, daß sie es erlauben die Begriffe der verschiedenartig-regulären Operationen einzuführen, die z. B. den linearen, polynomischen, analytischen und differenzierbaren Funktionen der gewöhnlichen Analysis entsprechen; diese Klassen werden mit denselben Namen bezeichnet. Die für diese regulären Operationen erhaltenen Resultate erlauben uns wichtige Sätze aus verschiedenen Zweigen der Mathematik abzuleiten.

II

In der Theorie der Operationen kann man im Einklang mit dem Vorhergehenden verschiedene Gebiete, so z. B. Algebra, Analysis, Topologie u. s. w. unterscheiden. Den Hauptbegriff in der Algebra der Theorie der Operationen stellt der Begriff einer linearen Operation dar. Eine Operation $U(x)$, die den Elementen eines vektoriellen Raumes die Elemente eines anderen vektoriellen Raumes zuordnet und der Bedingung $U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2)$ genügt, wird additiv genannt; ist sie noch dazu stetig, so bezeichnet man sie als linear. Die Mathematik liefert viele Beispiele von linearen Operationen; zu ihnen gehören z. B. die Ableitung, das unbestimmte und bestimmte Integral, die Grenze einer Zahlenfolge, die Summe einer Zahlenreihe u. s. w. Zur Entwicklung der Theorie der linearen Operationen haben neben den oben erwähnten Gelehrten auch die Herren H. Hahn, E. Helly, P. Levy, J. Radon, H. Steinhaus und andere vieles beigetragen.

Wir wollen nun die wichtigsten Resultate der Theorie der linearen Operationen besprechen. Jede additive Operation, die sich als Grenze von stetigen Operationen darstellen läßt, allgemeiner jede additive Baire'sche Operation ist stetig. Dieses Ergebnis bildet eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes, laut welchem die einzigen Baire'schen Funktionen, die der

Bedingung $f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2)$ genügen, die Gestalt at besitzen. In Betracht dessen, daß wir in der Praxis keine anderen Operationen als die Baire'schen antreffen, können wir also im Allgemeinen sicher sein, daß jede in der Analysis vorkommende in einem Raume vom Typus (B) definierte additive Operation stetig ist; umgekehrt: kann man sich von irgendeiner additiven Operation in voraus überzeugen, daß sie nicht stetig ist, so bildet das Gebiet, in welchem sie erklärt ist, keinen Raum vom Typus (B).

Die klassischen Sätze über die Kondensation der Singularitäten lassen sich auf den Fall der Räume vom Typus (B) übertragen. In diesem allgemeinen Falle haben sie folgenden Charakter: Ist eine Folge von Eigenschaften $\{E_n\}$ gegeben, und gibt es für jedes n ein Element, das die Eigenschaft E_n nicht besitzt, so gibt es auch ein Element, welches keine der Eigenschaften E_n aufweist; von jeder der Eigenschaften E_n müssen wir dabei voraussetzen, daß die Menge der Elemente, denen sie zukommt, linear und im Borelschen Sinne meßbar ist.

Von grundlegender Bedeutung ist der Satz von der Erweiterung der linearen Funktionale; unter Funktional verstehen wir dabei eine Operation mit Zahlen als Werten. Der zuletzt genannte Satz besagt, daß jedes lineare in einer linearen Menge erklärte Funktional sich zu einem in ganzem Raume linearen Funktional erweitern läßt.

Die Theorie der linearen Operationen ermöglicht eine genaue Untersuchung der Gleichungen der Form $U(x)=y$, wo $U(x)$ eine lineare Operation bezeichnet; y ist gegeben, x wird gesucht. Sie liefert verschiedene notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichungen solcher Art. Zu diesem Zwecke wird u. a. der Begriff der mit $U(x)$ konjugierten linearen Operation $\overline{U}(Y)$ eingeführt, die vermittels der Gleichung $X(x)=Y[U(x)]$ den linearen Funktionalen $Y(y)$ die linearen Funktionale $X(x)$ zuordnet. Mit Hilfe dieses zuletzt definierten Begriffes gelangt man z. B. zu dem Satze: Für die unbeschränkte Lösbarkeit der Gleichung $U(x)=y$ ist die Existenz der stetigen Umkehrung der Operation $\overline{U}(Y)$ notwendig und hinreichend.

Die Theorie der linearen Operationen besitzt mannigfache Anwendungen; einerseits erlaubt sie bekannte Sätze aus verschiedenen Gebieten der Mathematik in einheitlicher und einfacher Weise zu erhalten, andererseits aber können mit ihrer Hilfe auch viele neue Ergebnisse gewonnen werden. Ihre wichtigsten Anwendungen beziehen sich auf die Theorie der linearen Integralgleichungen, der linearen numerischen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, der Orthogonalreihen, der Summierbarkeit u. s. w.

Die klassische Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen erweist sich als ein Spezialfall der Theorie der Gleichungen $x-\lambda U(x)=y$, wo $U(x)$ eine lineare vollstetige Operation bezeichnet; vollstetig nennt man eine

Operation, wenn sie beschränkte Mengen in kompakte überführt. Die Theorie solcher Gleichungen wurde im wesentlichen von Herrn F. Riesz aufgestellt. Aus den vorher angegebenen Sätzen über allgemeine lineare Gleichungen, lassen sich übrigens verschiedene Integralgleichungen betreffende Folgerungen auch in den in der klassischen Analysis nicht betrachteten Fällen ziehen; einer dieser Sätze gibt, wie es Herr S. Mazur bemerkte, den ergodischen Satz für die statistische Mechanik, in der von Herrn J. v. Neumann gegebenen Formulierung. In der Theorie der linearen numerischen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, sowie in der Theorie der Momentenprobleme gewinnt man eine Reihe von Resultaten, indem man u. a. Sätze benutzt, die mit den folgenden sogn. allgemeinen Momentenproblemen verknüpft sind: bei gegebenen Elementen x_n und Zahlen c_n wird ein lineares Funktional $X(x)$ mit $X(x_n)=c_n$, oder bei gegebenen linearen Funktionalen $X_n(x)$ und Zahlen c_n wird ein Element x mit $X_n(x)=c_n$ gesucht.

Die Methoden der Theorie der linearen Operationen wurden in der Theorie der Orthogonalreihen von den Herren S. Kaczmarz, W. Orlicz, H. Steinhaus u. a. benutzt; daß sie hier ein wesentliches Werkzeug bildet, zeigt uns das ausgezeichnete Buch der Herren S. Kaczmarz und H. Steinhaus — „Theorie der Orthogonalreihen", das in der Sammlung „Monografie Matematyczne" erschienen ist. Die Sätze über die Kondensation der Singularitäten erlauben die Existenz von Funktionen nachzuweisen, deren Entwicklungen nach gegebenen Orthogonalsystemen gewisse Singularitäten aufweisen, z. B. in einer überalldichten Menge divergieren. Andere Sätze der Theorie der linearen Operationen geben gleichzeitig notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Entwicklung jeder Funktion aus einer gegebenen Funktionenklasse, z. B., jeder stetigen Funktion nach gegebenem Orthogonalsystem in gewissem Sinne konvergent, z. B. gleichmäßig konvergent wäre. Aus den Sätzen über Baire'sche additive Operationen und über allgemeine Momentenprobleme folgert man hier verschiedene Resultate über Multiplikatoren für Orthogonalsysteme;[1] man charakterisiert in mannigfacher Weise die Mengen der zulässigen Multiplikatoren für gegebene Funktionenklassen und stellt Beziehungen zwischen solchen Mengen von Multiplikatoren auf. Die in letzter Zeit erhaltenen Sätze über lakunäre Orthogonalreihen ergeben sich unter anderen aus der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen und bilden ein passendes Beispiel einer Überlegung, bei der man die mathematischen Schwierigkeiten nicht ohne tieferes Eindringen in die Theorie der linearen Operationen überwinden kann.

Die allgemeine Theorie der Summationsmethoden ist ein natürliches Anwendungsgebiet der Theorie der linearen Operationen; in der erwähnten Monographiensammlung soll ein Buch von Herrn S. Mazur „Allgemeine Limitierungstheorie" erscheinen, in welchem die Methoden der Theorie der linearen Operationen voll zur Geltung kommen; viele Anwendungen in diesem Gebiete der Mathematik wurden zusammen von Herren S. Mazur und W. Orlicz angegeben. Die Theorie der Summationsmethoden behandelt vor allem zwei Probleme: welche vektorielle Räume von Zahlenfolgen als Konvergenzfelder der Summationsmethoden genommen werden können und welche additive Funktionale in vektoriellen Räumen von Zahlenfolgen mit Hilfe von Summationsmethoden erklärt werden können. Die Theorie der linearen Operationen erlaubt eine Reihe sich auf diese Probleme beziehender Resultate zu erhalten, z. B.: jede Methode summiert gewisse unbeschränkte Zahlenfolgen, wenn sie überhaupt irgendwelche divergente summiert, oder: ist jede beschränkte mit einer Methode summierbare Zahlenfolge auch mit einer anderen Methode summierbar, so zu derselben Grenze.

In engerem Zusammenhange mit der Theorie der linearen Operationen stehen die Sätze, welche sich auf konvexe Mengen und Funktionale beziehen; die ersten Ergebnisse in dieser Hinsicht stammen von Herrn G. Ascoli, und Herrn S. Mazur gelang es vor kurzem zu zeigen, daß die diesbezüglichen wesentlichen Sätze der klassischen Theorie von H. Minkowski in euklidischen Räumen auch in den Räumen vom Typus (B) bestehen bleiben. Diese Resultate haben viele Anwendungen. Die Bedingungen für die Halbstetigkeit eines konvexen Funktionals in Räumen vom Typus (B) gestatten es eine neue direkte Methode in der Variationsrechnung zu schaffen. Diese Methode ergibt eine Vereinfachung der vor kurzem vom Herrn L. Tonelli entwickelten Theorie einer Klasse von Variationsproblemen. Mit ihrer Hilfe kann man auch gewisse allgemeinere Variationsprobleme lösen, entweder solche bei welchen es sich um Doppelintegrale in Parameterform handelt oder solche bei welchen die Ableitungen der gesuchten Funktionen in beliebig hoher Ordnung vorkommen; auch darf die Integrationsmannigfaltigkeit geschlossen sein. Diese Anwendungen stammen von den Herren S. Mazur und J. Schauder.

III

Die linearen Operationen bilden einen Spezialfall der polynomischen Operationen; diese letzteren sind der eigentliche Gegenstand der Operationenalgebra. Bis vor kurzem gab es in dieser Hinsicht eigentlich nur Definitionen. Die Herren S. Mazur und W. Orlicz haben nun mit eingehenden Untersuchungen begonnen und insbesondere die elementare Teilbarkeitstheorie für polynomische Operationen in Räumen vom Typus (B) mit dem Hilbertschen Nullstellensatz als Schlußergebnis entwickelt; man erhält mit Hilfe der dort benutzten Methode verschiedene Sätze, die sogar im Falle der gewöhnlichen Polynome mehrerer Veränderlichen neu sind. Das Endziel wäre die Theorie der Gleichungen der Form $U(x)=y$, im Falle einer beliebigen polynomischen Operation $U(x)$; doch tappen wir diesbezüglich fast vollkommen im Dunklen. Wir wissen nicht welcher Art die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit dieser Gleichungen sind, ein Problem welches nur im Falle von Polynomen ersten Grades, wie ich früher erwähnte, gelöst wurde. Die Theorie der polynomischen Operationen ist sicherlich von Interesse, nicht nur aus dem Grunde, daß die polynomischen Operationen eine natürliche Verallgemeinerung der linearen Operationen darstellen, sondern auch darum, daß viele Probleme der klassischen Analysis sich als Fragestellungen dieser Theorie deuten lassen. Erwähnen wir noch, daß einige Sätze aus der Theorie der linearen Operationen, z. B. der Satz über die Stetigkeit der additiven Baire'schen Operationen und die Sätze über Kondensation der Singularitäten ihre Analogona in der Theorie der allgemeineren polynomischen Operationen haben.

Mit dem Begriffe der polynomischen Operationen eng verbunden sind die analytischen Operationen, d. h. Operationen, die sich in der Form einer Reihe darstellen lassen, deren n-tes Glied eine homogene polynomische Operation n-ten Grades ist. Es gibt einige Arbeiten, welche die Sätze über analytische Funktionen auf analytische Operationen verallgemeinern; insbesondere, ein Analogon des Cauchy-Hadamardschen Satzes über den Konvergenzradius, Sätze über den analytischen Charakter der implizit analytisch erklärten Operationen u. s. w.

Ein grundlegender Begriff für die Analysis der Operationen ist der des Differentials oder Variation; die Einführung dieses fruchtbaren Begriffes verdankt man Herrn M. Frechet. Zur Analysis der Operationen gehören die Sätze über Extrema von Funktionalen, über implizite Operationen, über Gleichungen, in denen Differentiale der unbekannten Operationen auftreten, und die den Differentialgleichungen im gewöhnlichen Sinne entsprechen u. s. w.; vieles verdankt man in dieser Hinsicht Herrn V. Volterra und Herrn P. Levy. Die Analysis der Operationen wird u. a. in der Variationsrechnung, bei Systemen von Differentialgleichungen mit unendlichvielen unbekannten Funktionen, bei nichtlinearen Differential und Integralgleichungen verwendet.

IV

Nun gehe ich zur Besprechung der Topologie in Räumen vom Typus (B) über. Der bekannte Brouwersche Fixpunktsatz besagt, das es bei jeder stetigen Abbildung einer abgeschlossenen konvexen und kompakten Menge auf sich wenigstens einen Fixpunkt gibt, sobald es sich um Mengen handelt, die in euklidischen Räumen gelegen sind. Herr G. D. Birkhoff und O. Kellog erkannten, daß dieser Satz in gewissen Fällen im Raume der stetigen Funktionen und im Hilbertschen Raume zutrifft. Besonders interessant ist es nun, daß wie die genannten Verfasser zeigten, aus diesem Satze unmittelbar bekannte Existenzsätze für gewisse gewöhnliche Differentialgleichungen und nichtlineare Integralgleichungen folgen. Einige Zeit später hat Herr J. Schauder den Fixpunktsatz für allgemeine Räume vom Typus (B) bewiesen, und bekam daraus ganz neue Existenzsätze für elliptische und für hyperbolische Differentialgleichungen; die Tragweite der topologischen Methode wird durch die Tatsache bestätigt, daß Herr J. Schauder auf diese Weise z. B. das Dirichletsche Problem für elliptische Differentialgleichungen unter der einzigen Voraussetzung der Stetigkeit der in Betracht kommenden Funktionen gelöst hat.

In den letzten Jahren wurden auch andere topologische Sätze auf Räume vom Typus (B) übertragen und durch ihre entsprechende Interpretation erhält man neue wichtige und schöne Resultate in klassischen Gebieten der partiellen Differentialgleichungen. Ich erwähne die wichtigsten dieser Verallgemeinerungen. Herr J. Schauder bewies den Satz von der Invarianz des Gebietes für gewisse Räume vom Typus (B) und eineindeutige stetige Abbildungen spezieller Art; aus diesem Satze ausgehend erkannte er, daß für allgemeine nichtlineare elliptische Differentialgleichungen im gewissen Sinne die Existenz der Lösungen eine Folge der eindeutigen Lösbarkeit ist. Die Herren J. Leray und J. Schauder verallgemeinerten ferner den Begriff des Abbildungsgrades auf den Fall der Räume vom Typus (B) und erhielten daraus Existenzsätze im Großen für elliptische Differentialgleichungen, wo keine Eindeutigkeit gefordert wird; diese Ergebnisse sind also der Methode der sukzessiven Approximationen nicht zugänglich. Die oben erwähnten Sätze wurden auch von Herrn J. Leray auf die Hydrodynamik angewendet. Herr J. Leray zeigte auch, daß der Jordansche Kurvensatz, bzw. dessen Alexandroffsche Verallgemeinerung für abgeschlossene Mengen, sich auf Räume vom Typus (B) verallgemeinern läßt. Für die bereits erwähnte Monographieeinsammlung ist ein Buch von Herrn J. Schauder „Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus“ bestimmt, in welchem als eine der wesentlichen Methoden die der Theorie der Operationen benutzt wird.

V

Ich habe mich in meinem Vortrage auf die Darstellung derjenigen Ergebnisse aus der Theorie der Operationen beschränkt, die in allgemeinen Räumen vom Typus (B) bestehen. Nicht berücksichtigt wurden also diejenigen Untersuchungen, die sich auf speziellere so wie auch allgemeinere Räume als die vom Typus (B) beziehen. Diese hier nicht besprochenen wichtigen Teile der Theorie der Operationen haben auch ein ausgedehntes Anwendungsgebiet. Hierher gehören vor allem die neuesten grundlegenden

Untersuchungen der Herren J. v. Neumann und H. Stone über nichtbeschränkte insbesondere Hermite'sche Operationen im Hilbertschen komplexen Raume; diese wurden in den vortrefflichen Darstellungen der beiden Verfasser in erschöpfender Weise behandelt. Zu erwähnen wären noch die Ergebnisse des Herrn L. Fantappiè über Operationen für analytische Funktionen.

Der Kreis der Mathematiker, die sich mit der Theorie der Operationen von verschiedenen Standpunkten beschäftigen, wird immer größer; leider war es mir in einer so kurzer Zeit nicht möglich alle wichtigen Arbeiten, auch diejenigen die sich auf Räume vom Typus (B) beziehen, zu besprechen. Ich glaube aber an den gewählten Beispielen Ihnen gezeigt zu haben, welche Tragweite und Bedeutung den Methoden der Operationen zukommt. Sie verbinden miteinander in ungewohnter Weise scheinbar voneinander gänzlich getrennte Gebiete, sie steigern die Kraft unserer geometrischen Intuition, sie gestatten komplizierte Beziehungen der Analysis auf einfachere zurückzuführen und dadurch neue Eigenschaften zu erschließen.